63 олімпіада юних математиків
2019-2020 навч. рік

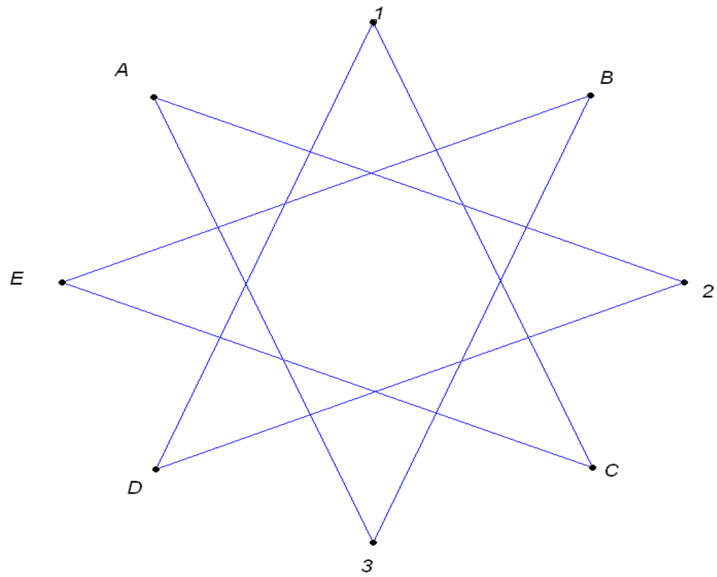
Відповіді та вказівки до розв'язків

6 клас

1. Нехай задумане число x. Микола помножив його і отримав чи то 5x, чи то 6x. Іван додав своє число, а Андрій відняв своє. Після цього можна отримати такі вирази: 5x-1; 5x; 5x+1; 6x-1; 6x; 6x+1. Умові, що x – ціле число, задовольняє лише останнє рівняння: 6x+1=73, тому x=12.
Відповідь: 12.
2. Складемо таблицю:

Бідони	Переливання							
10л	3	3	6	6	9	9	2	2
7л	7	4	4	1	1	0	7	5
3л	0	3	0	3	0	1	1	3

3. Петро прийде на зустріч коли його годинник буде показувати 16 годин 05 хвилин, а дійсним часом буде 16 годин 15 хвилин. Богдан прийде на зустріч коли на його годиннику буде 15 годин 50 хвилин, а дійсним часом буде 15 годин 45 хвилин.
Відповідь: Раніше прийде Богдан на 30 хвилин.
4. Якщо «незайняті» вершини позначити як A, B, C, D, E, то у вершинах A, B, C, D повинно стояти число 4, а у вершині, позначеною літерою E, не може стояти 4, бо вона з'єднана з вершинами B та C.
Відповідь: 4.



5. Найбільшим двозначним числом із сумою цифр 13 є число 94. Нехай остання цифра 1. Тоді перша – 4, але така цифра вже є. Нехай остання цифра 2, тоді перша – 8. Всі цифри різні, маємо 8942. Якщо остання цифра 3, або більше, то при множенні її на 4 отримаємо двоцифрове число, що не є цифрою.
Відповідь: 8942 роки.

7 клас

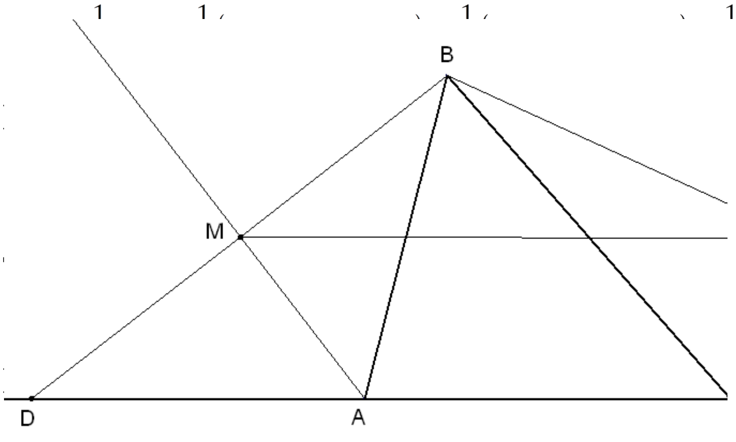
1. Якщо серед п'яти чисел є три, або більше чисел, кратних трьом, то, принаймні, два з них є сусідніми, що суперечить умові задачі. Якщо серед

цих п’яти чисел є менше двох чисел, кратних трьом, то серед чотирьох інших чисел є або три сусідні числа, що дають однакову остачу при діленні на 3 (тоді їх сума ділиться на 3), або два сусідні числа, що дають різні ненульові остачі при діленні на 3 (тоді їх сума кратна 3), що суперечить умові задачі.
Відповідь: 2 числа.

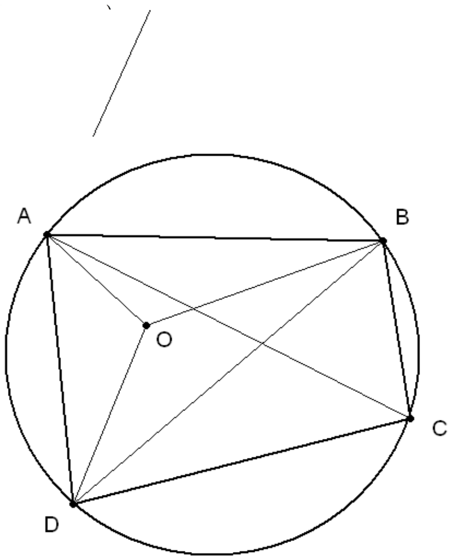
2. Перший мудрець міг сказати таку фразу лише коли у нього були б усі картки, на яких записані парні числа (сума будь-яких двох непарних чисел другого мудреця є парним числом). Тоді сума чисел на його картках дорівнює 2+4+6=12.
Відповідь: 12.
3. За умовою CD+DE+EF+FG+GH+HC=17,   AB+BC+CF+FG+GH+HA=12, AB+BC+CD+DE+EF+FG+GH+HA=20. Тоді (CF+FG+GH+HC)+ + (AB+BC+CD+DE+EF+FG+GH+HA) = 29. Звідси CF+FG+GH+HC+20=29, CF+FG+GH+HC = 9.
Відповідь: 9км.
4. Якщо підносити 21 до степеня, то 21,41,61,81,01,21,… - можливі останні дві цифри. Аналогічно, якщо підносити 11 до степеня, то 11,21,31,41,51,61,71,81,91,01.11,… - можливі останні дві цифри. Отже, число 21^{2012} буде закінчуватись на 41, а число 11^{2012} буде закінчуватись на 21, тому число 21^{2012} - 11^{2012} буде закінчуватись на 20.
Відповідь: 20.
5. Якщо заповнити таблицю згідно з правилом, вказаним в задачі то клітинки А і В будуть червоного кольору.
Відповідь: А, В – червоні.

8 клас

1. Оскільки трикутники ΔAMD *і* ΔAMB прямокутні, мають спільний катет та рівні кути, то вони рівні. Звідси випливає, що $DM = BM$, $AD = AB$. Аналогічно, що $BN = NK$, $BC = CK$. Отже, MN - середня лінія ΔDBK .

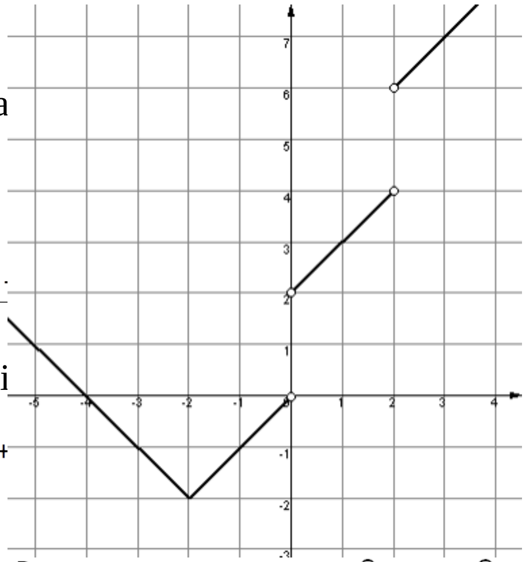


2.



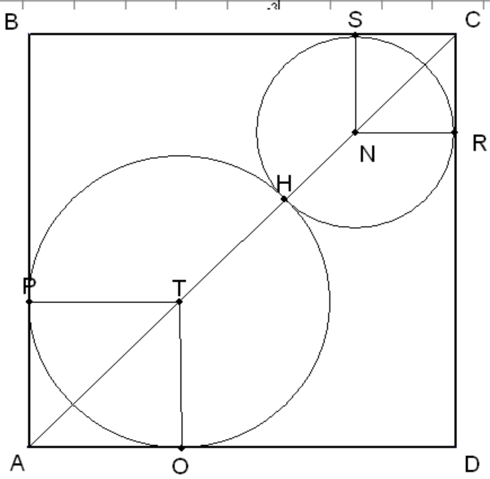
3. Нехай Вам було x років, а мені y років. Тепер Вам $x+t$ років, а мені $y+t$ років. За умовою задачі $\begin{cases} y+t=2x, \\ x+t=y, \\ x+t+y+t=70. \end{cases} \Rightarrow \ x=20,\ y=30,\ t=10.$ Отже, мені тепер 40 років.
   Відповідь: 40 років.

4. Скористаємось модульним методом інтерва

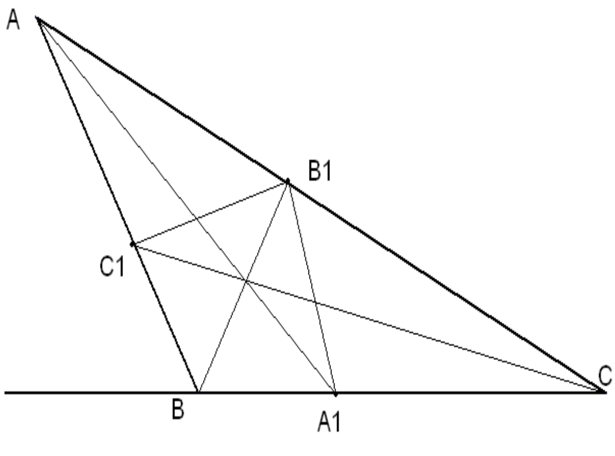


5. Якщо $abc=1,$ то $ab=\frac{1}{c}$, $1+a+ab=1+a+\frac{1}{c}=\frac{c\,\cdot}{}$
   $1+b+bc=1+b+\frac{1}{a}=\frac{1+a+ab}{a}=\frac{1+c+ac}{ac};$ тоді вихі
   $\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ac}=\frac{c}{1+c+ac}+\frac{ac}{1+c+ac}+$
   Відповідь: 1.

9 клас



1. За умовою $0{,}8b=a,\ \ a+b=1{,}8b$, тоді $\frac{a+b}{a}=\frac{1}{0}$
   $a+b$ на 125% більше, ніж число a.
   Відповідь: на 125%.
2. Введемо позначення згідно з малюнком. Не
   $HN=NR=NS=r.$ Тоді $AT=\sqrt{2}\cdot PT=\sqrt{2}\cdot R$, $NC=$
   $TN=TH+HN=R+r.$ Отже, $AC=AT+TN+NC=$
   $=(\sqrt{2}+1)(R+r)=\sqrt{2}$.
   Звідси $R+r=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=2-\sqrt{2}.$
   Відповідь: $2-\sqrt{2}.$
3. BA - бісектриса зовнішнього кута трикутника BB_1C. Тому точка C_1 є перетином продовження бісектриси CC_1 і бісектриси BA. Це означає, що B_1C_1 - бісектриса кута BB_1A.
   Аналогічно, B_1A_1 - бісектриса кута BB_1C. Оскільки кут між бісектрисами двох суміжних кутів – прямий, то $\angle A_1B_1C_1=90^\circ$.
   Відповідь: 90°.



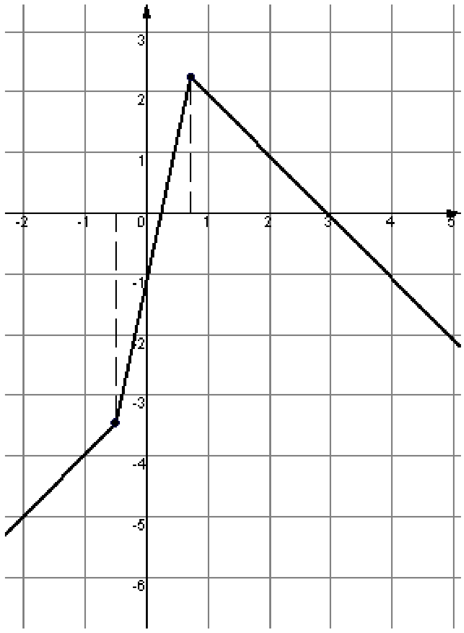
4. Приведемо рівняння до вигляду:
   $(x^2-2x)^2-3(x^2-2x+1)-1=0;$
   $(x^2-2x)^2-3(x^2-2x)-4=0;$ введемо заміну: $x^2-2x=t$, отримаємо

рівняння: $t^2-3t-4=0,$ звідки $\left[\begin{array}{l} t=-1,\\ t=4;\end{array}\right.$ або $\left[\begin{array}{l} x^2-2x+1=0,\\ x^2-2x-4=0;\end{array}\right.$ звідки $x_1=1,$ $x_{2,3}=1\pm\sqrt{5}$.

Відповідь: $1;\ 1\pm\sqrt{5}.$

5. Представимо функцію у вигляді: $y=\sqrt{4x^2+4x+1}-\sqrt{9x^2-12x+4}=\sqrt{(2x+1)^2}-\sqrt{(3x-2)^2}=|2x+1|-|3x-2|.$ Отже,

$$y=\left[\begin{array}{l} x-3,\ \ якщо\ \ x\in(-\infty;-0{,}5),\\ 5x-1,\ \ якщо\ \ x\in\left[-0{,}5;\dfrac{2}{3}\right),\\ 3-x,\ \ якщо\ \ x\in\left[\dfrac{2}{3};+\infty\right).\end{array}\right.$$



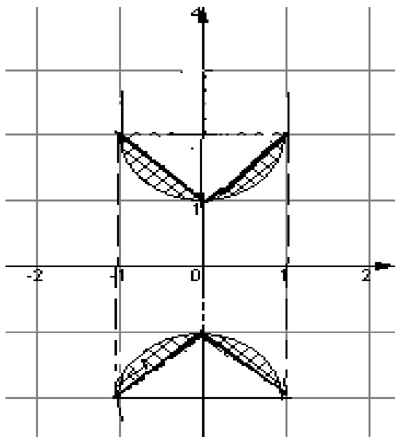
10 клас

1. Використовуючи основну властивість арифметичної прогресії запишемо: $(x+2y)+(5x-y)=2(2x+3y)$. Аналогічно, за основною властивістю геометричної прогресії, маємо $(x-1)^2(y+1)^2=(xy+1)^2$. Отримали систему: $\left\{\begin{array}{l} x+2y+5x-y=4x+6y,\\ (x-1)^2(y+1)^2=(xy+1)^2;\end{array}\right.$ ця система розпадається на дві:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 6x+y=4x+6y,\\ (x-1)(y+1)=xy+1;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} 6x+y=4x+6y,\\ (x-1)(y+1)=-xy-1;\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x=2{,}5y,\\ y=1\dfrac{1}{3};\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} x=2{,}5y,\\ 5y^2+1{,}5y=0;\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x=3\dfrac{1}{3},\\ y=1\dfrac{1}{3};\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} x=0,\\ y=0;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} x=-0{,}75,\\ y=-0{,}3.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\left(3\dfrac{1}{3};1\dfrac{1}{3}\right);(0;0);(-0{,}75;-0{,}3).$

2. Легко бачити, що обидві фігури, кожна з яких визначається однією з даних нерівностей, симетричні відносно кожної координатної осі (показати це!). У зв’язку з цим можна розглянути фігуру, яка визначається даною системою і розміщена в першій чверті, тобто фігуру, для якої



$x \ge 0;\ \ y \ge 0.$ $\begin{cases} y \le x+1, \\ y \ge x^2+1. \end{cases}$ Шукана фігура складається з чотирьох параболічних сегментів, які на малюнку заштриховані.

3. Нехай заданий дріб скоротний на число $d \ne 1$, тоді $\begin{cases} 2n+3 = ad, \\ 3n+2 = bd; \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} 6n+9 = 3ad, \\ -6n-4 = -2bd; \end{cases} \Rightarrow$ $(3a-2b)d = 5$. Оскільки число 5 має тільки два дільники 1 та 5 і $d \ne 1$, то $d = 5$, $3a-2b = 1$, $3(a-1) = 2(b-1)$, $\begin{cases} a-1 = 2k, \\ b-1 = 3k; \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} a = 2k+1, \\ b = 3k+1; \end{cases} \Rightarrow$ $n = 5k+1$, де k - довільне ціле невід’ємне число.

Відповідь: $n = 5k+1,\ k \in N \cup \{0\}$.

4. $\sqrt{25x^2-70x+49} = \sqrt{(5x-7)^2} = |5x-7|$, тоді $\begin{cases} 2y-3 = |5x-7|, \\ y = x+1; \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2y-3 = 5x-7, \\ y = x+1; \end{cases} \\ \begin{cases} 2y-3 = -5x+7, \\ y = x+1; \end{cases} \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2, \\ y = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{8}{7}, \\ y = \frac{15}{7}; \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \quad x_1 \cdot x_2 \cdot y_1 \cdot y_2 = \frac{2}{1} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{15}{7} = \frac{420}{49}.$$

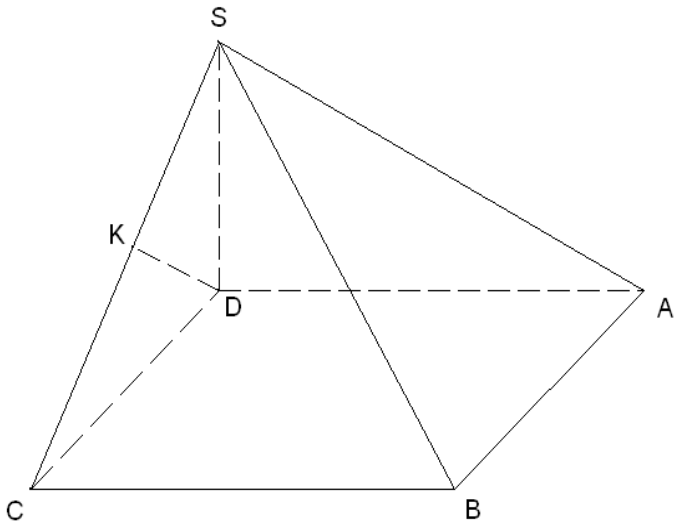
Відповідь: $\frac{420}{49}$.

5. Дискримінант квадратного тричлена дорівнює: $D = (a+1)^2 - 4(a+1) = (a+1)(a-3)$. Розглянемо можливі випадки:
   a) $D < 0$, тобто $-1 < a < 3$. Розв’язком нерівності є всі дійсні числа, зокрема й такі, що $|x| < 1$.
   b) $D = 0$, тобто $a = -1$, або $a = 3$. У випадку $a = -1$, $x^2 > 0$ для всіх x, крім $x = 0$, який входить у розв’язок нерівності $|x| < 1$, тобто $a = -1$ не задовольняє умові. Якщо $a = 3$, то $x^2 - 4x + 4 > 0$, $(x-2)^2 > 0$ для всіх x, крім $x = 2$, що не входить до розв’язків нерівності $|x| < 1$, тобто $a = 3$ задовольняє умові задачі.
   c) $\mathrm{D} > 0$, $a < -1$, або $a > 3$. У випадку $a < -1$, розв’язок нерівності $\left(-\infty; \frac{-a-1-\sqrt{D}}{2}\right) \cup \left(\frac{-a-1+\sqrt{D}}{2}; +\infty\right)$ не задовольняє розв’язку нерівності $|x| < 1$. При $a > 3$ розв’язок нерівності $\left(-\infty; \frac{a+1-\sqrt{D}}{2}\right) \cup \left(\frac{a+1+\sqrt{D}}{2}; +\infty\right)$ задовольняє нерівності $|x| < 1$.

Відповідь: $a > -1$.

11 клас

1. ОДЗ: $3x > -4\sqrt{5} > -9 \ \Rightarrow \ x > -3$. Найменше ціле число, що задовольняє ОДЗ $x = -2$. Перевіримо, чи це значення задовольняє нерівність:



$\sqrt{3\cdot(-2)+4\sqrt{5}}=\sqrt{4\sqrt{5}-6}<\sqrt{4\sqrt{5}}<\sqrt{12}<4<\sqrt{5}+2$. Тобто найменший цілий розв'язок рівняння -2.

Відповідь: -2.

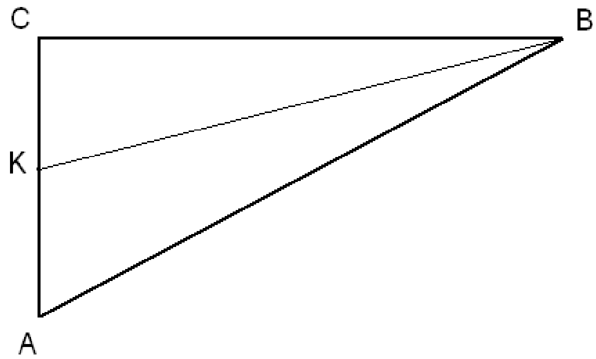
2. $ctg\alpha\cdot ctg(\alpha+\beta)=\dfrac{2\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\cos(2\alpha+\beta)+\cos\beta}{\cos(2\alpha+\beta)-\cos\beta}=\dfrac{18\cos(2\alpha+\beta)}{16\cos(2\alpha+\beta)}=\dfrac{9}{8}=1\dfrac{1}{8}$.

   Відповідь: $1\dfrac{1}{8}$.

3. Нехай SABCD – дана піраміда, $SD\perp(ABC)$, $AD\perp SD$, $AD\perp DC$ $\Rightarrow$ $AD\perp(SDC)$, D - точка перетину $AD\ i\ (SDC)$. SC - проекція SB на площину (SDC). Проведемо $DK\perp SC$. Довжина відрізка DK - відстань між прямими $AD\ i\ SB$, вона дорівнює $\dfrac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}$ з ΔSDC.

   Відповідь: $\dfrac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}$.

4. Нехай ВК – бісектриса кута В і $BK=\dfrac{c\sqrt{3}}{3}$. Нехай у ΔABC
   $\angle CBK=\angle KBA=\alpha$,
   $\angle BAK=90^\circ-2\alpha$,
   $\angle AKB=180^\circ-\alpha-90^\circ+2\alpha=90^\circ+\alpha$.
   Застосуємо теорему синусів до ΔABK: $\dfrac{\frac{c\sqrt{3}}{3}}{\sin(90^\circ-2\alpha)}=\dfrac{c}{\sin(90^\circ+\alpha)}$.

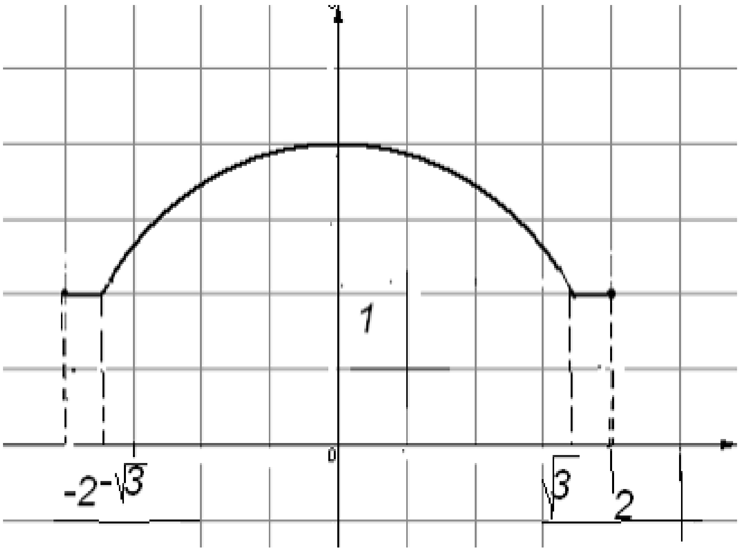


   Спростивши це рівняння, отримаємо квадратне рівняння $2\sqrt{3}\cos^2\alpha-\cos\alpha-\sqrt{3}=0$, звідки $\alpha=30^\circ$.
   Отже, катети трикутника дорівнюють: $\dfrac{c}{2}\ i\ \dfrac{c\sqrt{3}}{2}$.

   Відповідь: $\dfrac{c}{2};\dfrac{c\sqrt{3}}{2}$.

5. $D(y):\ \ 4-x^2\geq 0,\ \ x^2\leq 4,\ \ |x|\leq 2$. Нулі модуля: $1-\sqrt{4-x^2}=0$, $\Rightarrow\ x=\pm\sqrt{3}$. Нулі модуля розбивають область визначення функції на проміжки. Функція

приймає вигляд:



$$y=\begin{cases}1,\ \ \textit{якщо}\ \ x\in\left[-2;-\sqrt{3}\right),\\ \sqrt{4-x^2},\ \ \textit{якщо}\ \ x\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right),\\ 1,\ \ \textit{якщо}\ \ x\in\left[\sqrt{3};2\right].\end{cases}$$