Sprawozdanie z projektu metody numeryczne

Aproksymacja profilu wysokościowego

Artem Dychenko
192 441

1. Wstęp

Celem projektu jest implementacja metody wykorzystującej wielomian interpolacyjny Lagrange'a oraz metody wykorzystującej funkcje sklejane trzeciego stopnia. Do zrealizowania zadania wykorzystałem Matlab.

2. Testy - wybór profili wysokościowych:

Wybrane przeze mnie profile wysokościowe, na których przeprowadzę testy dla metod interpolacyjnych to:

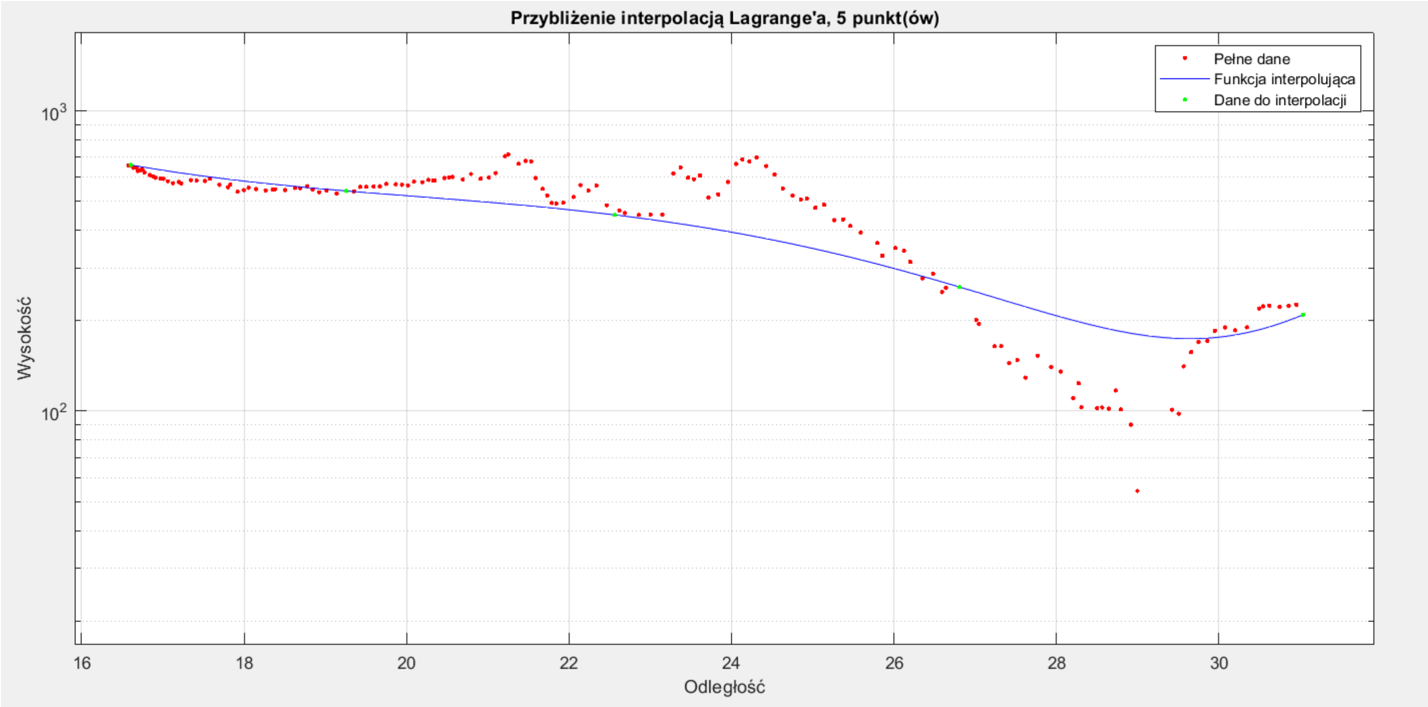
- Sahara desert - teren ma wzgórza piaszczyste i ciągle zmieniającą się wysokość, nawet odjemne wartości
- Spacerniak w Gdańsku - teren z reguły nizinny, płaski, z lekkimi uskokami
- Glębia Challengera - teren wyraźne górzysty, jest to najniżej położone zbadane miejsce na Ziemi

3. Intepolacja Lagrange'a:

Interpolacja Lagrange'a jest znana ze swojej prostoty implementacji oraz niskich wymagań pamięciowych w porównaniu do splajnów. Technika ta polega na przybliżaniu funkcji wielomianem stopnia n za pomocą n+1 punktów, zwanych węzłami. Intuicyjnie mogłoby się wydawać, że zwiększanie liczby punktów powinno prowadzić do bardziej dokładnego przybliżenia, ponieważ zwiększa się stopień wielomianu. Niestety, metoda ta jest bardzo podatna na tzw. zjawisko Rungego, które objawia się oscylacjami na krańcach przedziału interpolacji.

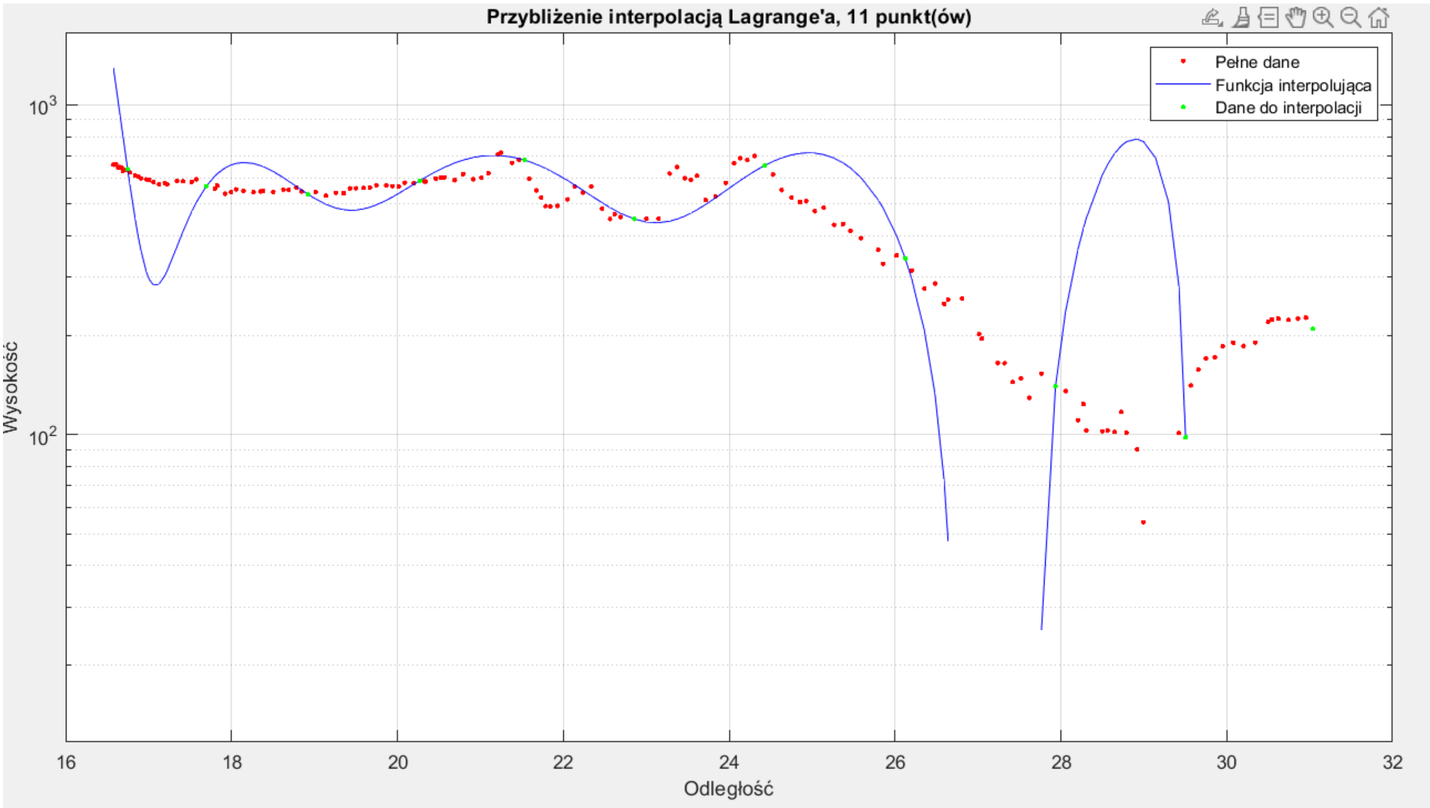
Poniżej prezentacja zastosowania interpolacji Lagrange'a dla trzech profili wysokościowych.

3.1. Interpolacja dla Sahara desert:



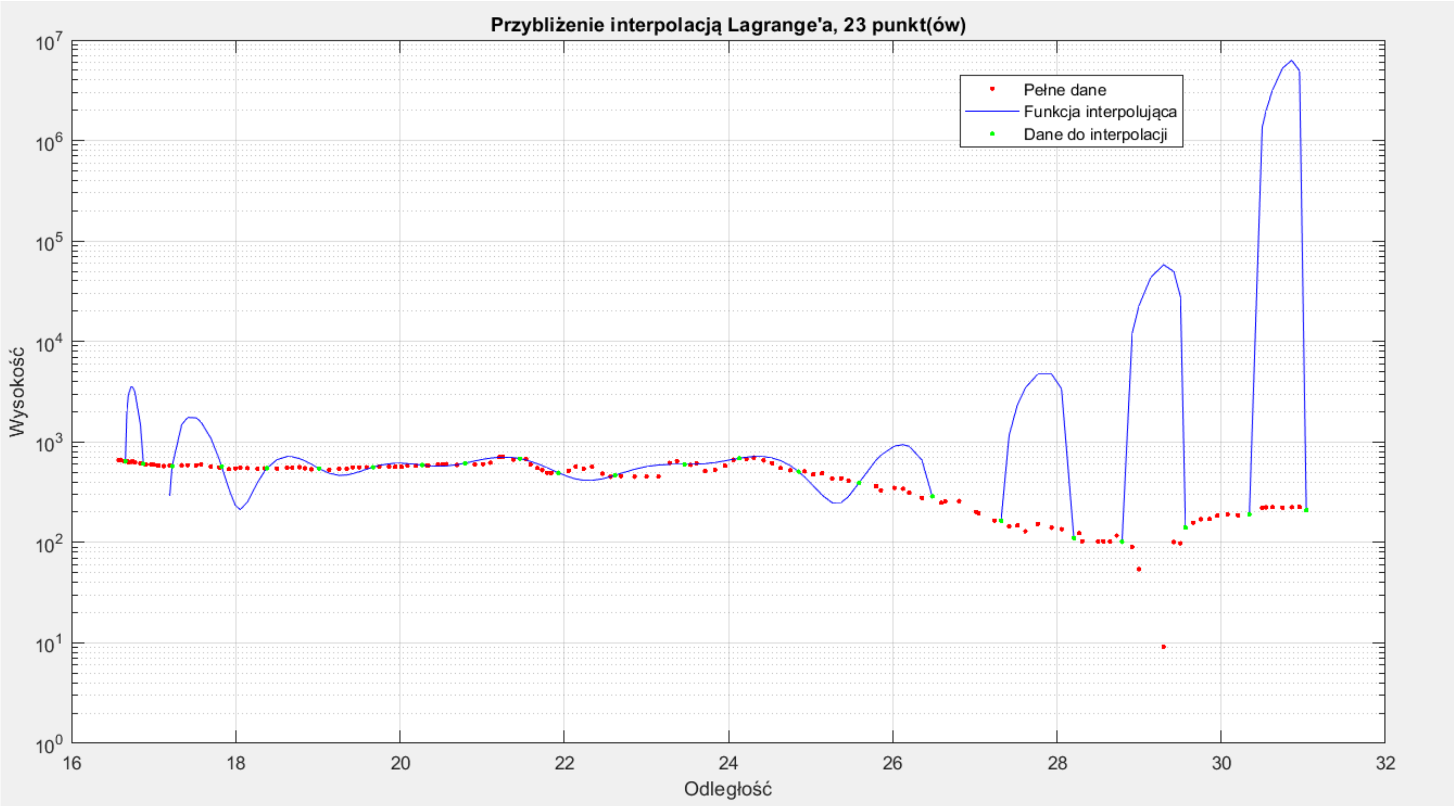
rys. 1 Interpolacja Lagrange'a dla 4 punktów na odcinku Sahary

Po zastosowaniu interpolacji dla czterech punktów, rozmieszczając ich równomiernie, mamy linię która przypomina nam oryginalną funkcję, ale nie jest dokładna, pokazuje trend wzrostu czy spadku.



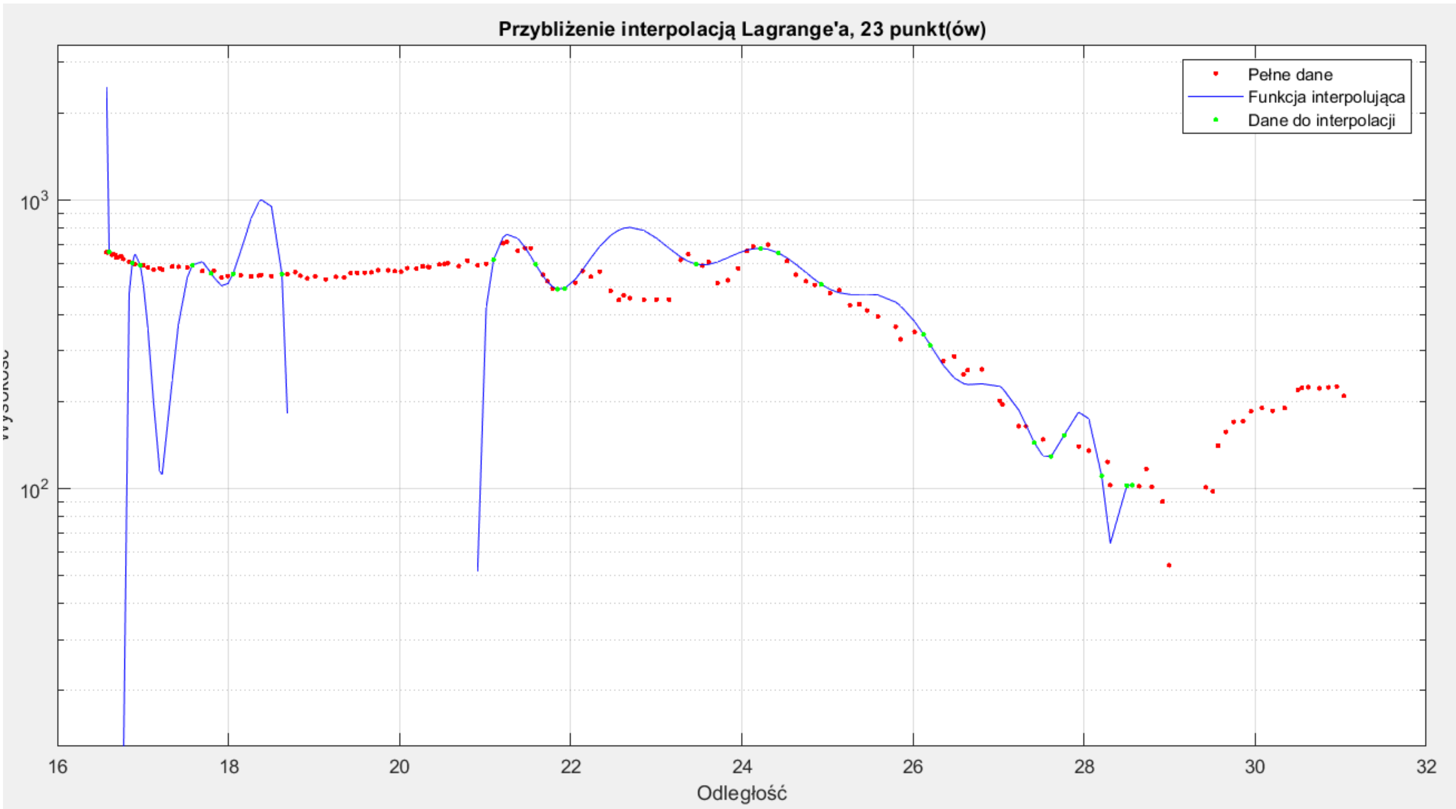
rys. 2 Interpolacja Lagrange'a dla 11 punktów na odcinku Sahary

Tutaj po środku już widać lepszą sytuację, ale pojawia się efekt Rungego i już po prawej stronie wykresu, linia przerywa się ponieważ mamy tam zbyt odległą wartość żeby było widać cały wykres.



rys. 3 Interpolacja Lagrange'a dla 23 punktów na odcinku Sahary

Kontynuacja zwiększania punktów wzmocniła sytuację, czyli środek stał jeszcze bardziej precezyjnym, a krańce mają jeszcze bardziej większe wartości.

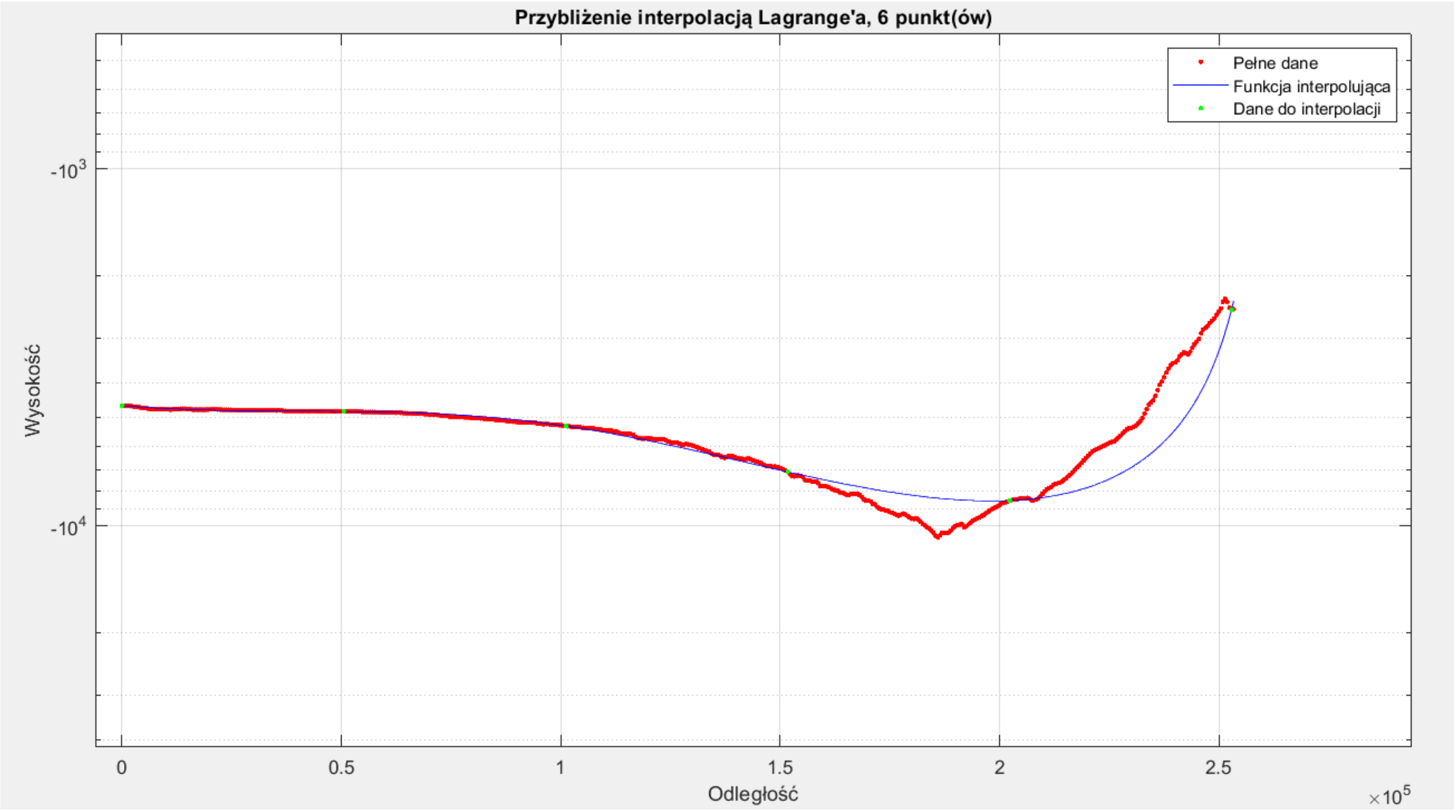


rys. 4 Interpolacja Lagrange'a dla 23 punktów(zmienny dystans między punktami) na odcinku Sahary

W ostatnim przykładzie zrobiłem nierównomierne rozmieszczenie punktów.

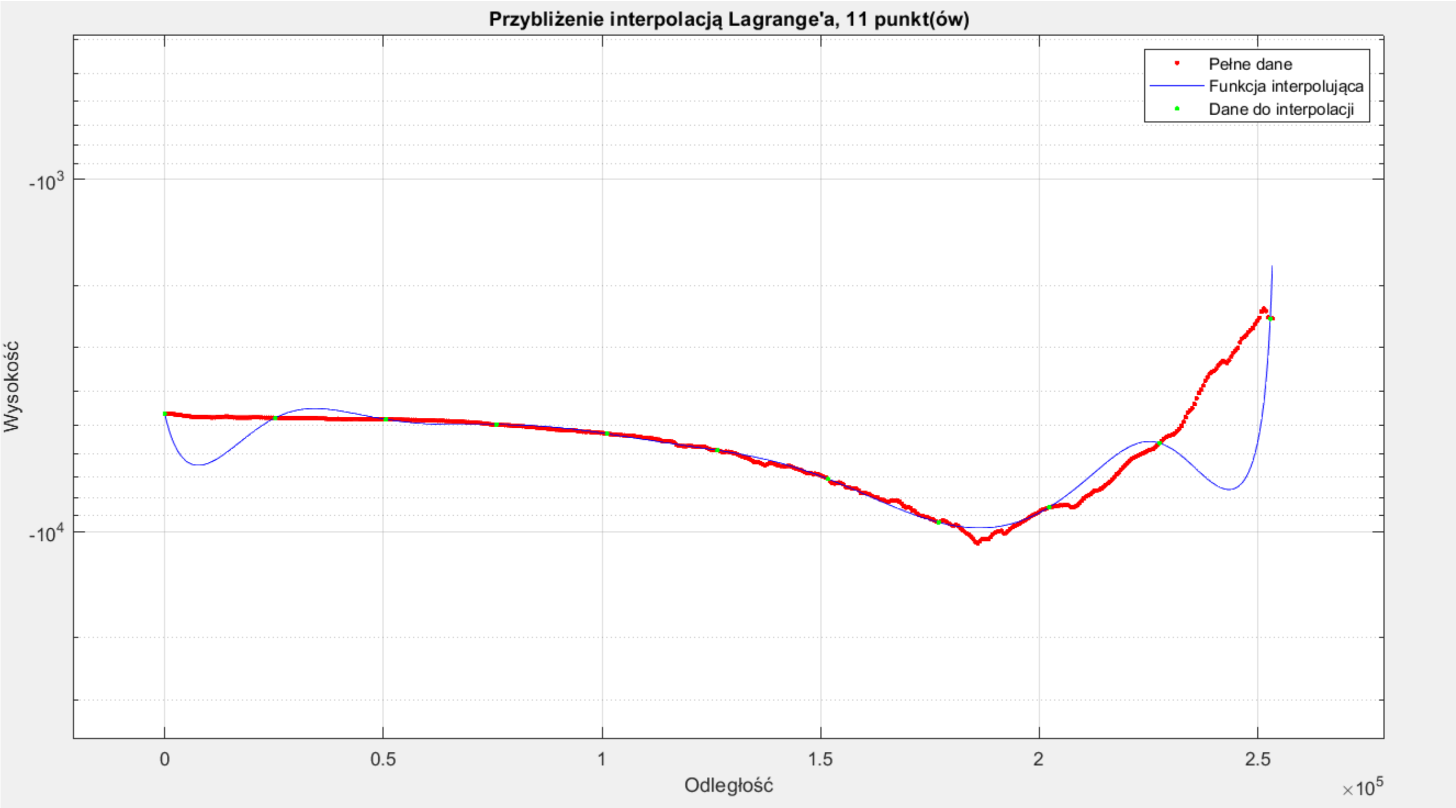
Możemy zauważyć, że w tym przypadku w niektórych miejscach gdzie jest więcej punktów nie mamy tak silnego efektu Rungego, ale równierz w innych jest go więcej.

3.2. Interpolacja dla Głębi Challengera:



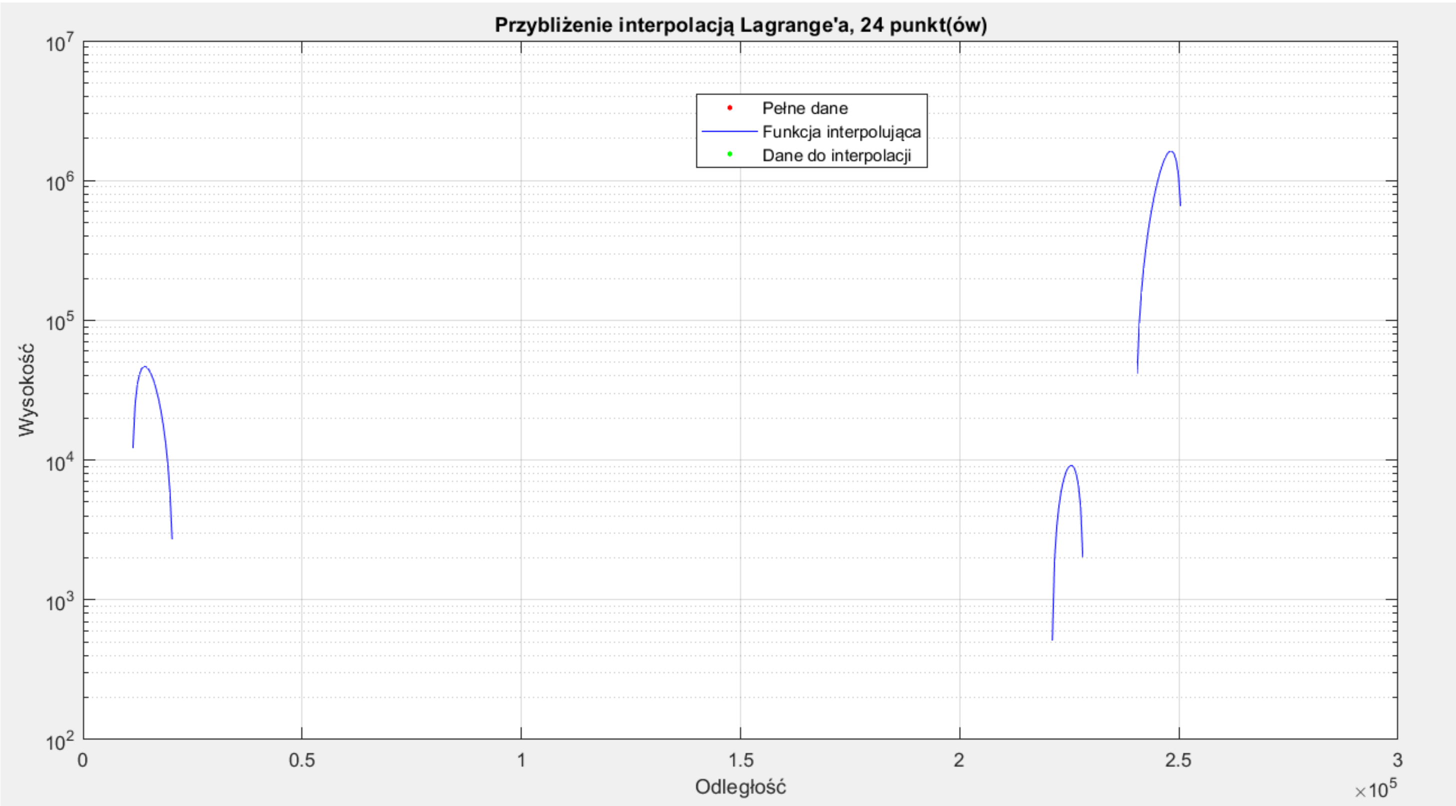
rys. 5 Interpolacja Lagrange'a dla 6 punktów na odcinku Głębi Challangera

Rozpoczynamy od 6 punktów i widzimy dość dobre dostosowanie się do wykresu, na 6 punktach jeszcze nie widać efektu Rungego.



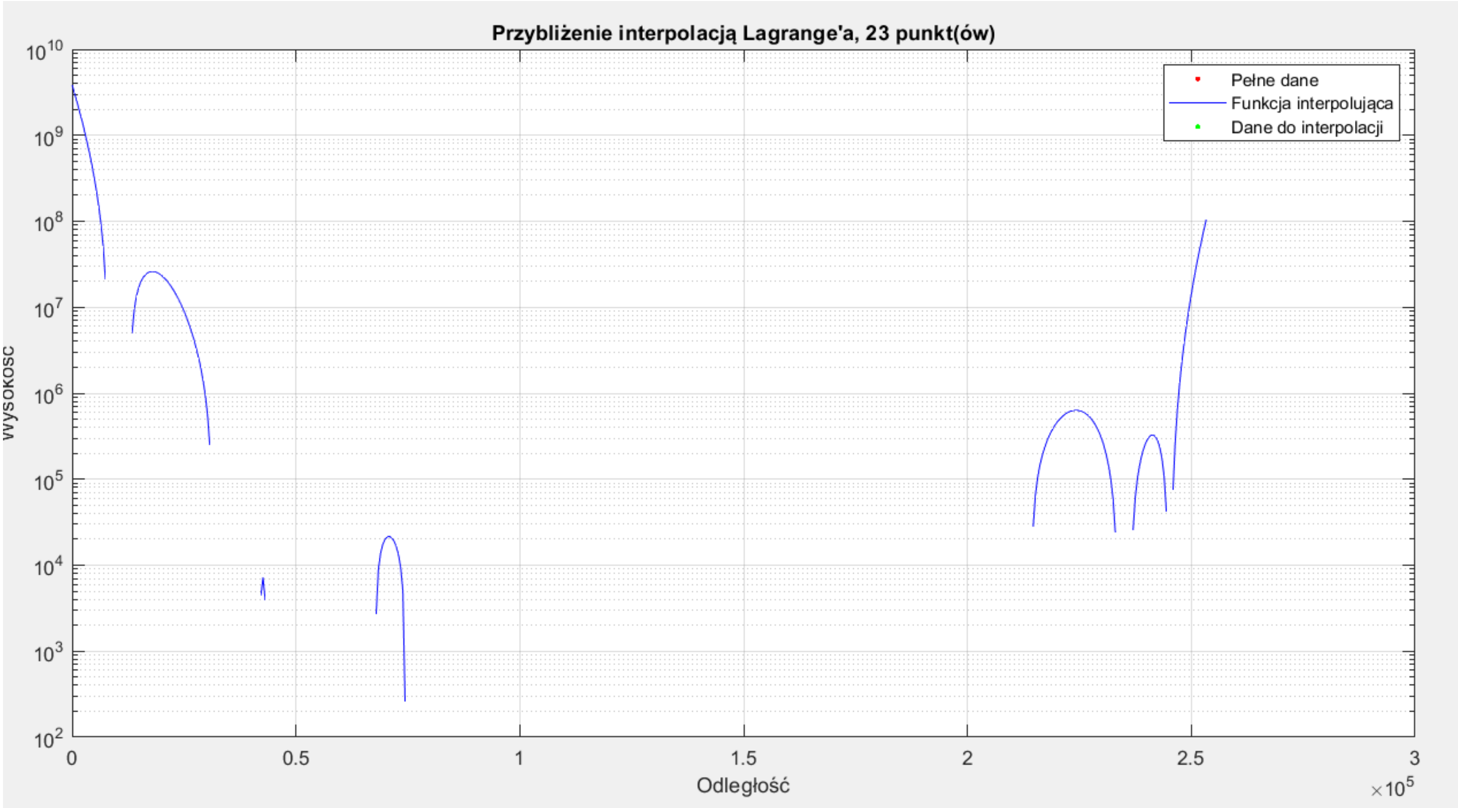
rys. 6 Interpolacja Lagrange’a dla 11 punktów na odcinku Głębi Challangera

Kontynuując dla 11 punktów sytuacja jest równierz dobra, nasza interpolacja dobrze naśladuję oryginalny wykres, ale mamy już widoczny efekt Rungego na krańcach wykresu.



rys. 7 Interpolacja Lagrange’a dla 24 punktów na odcinku Głębi Challangera

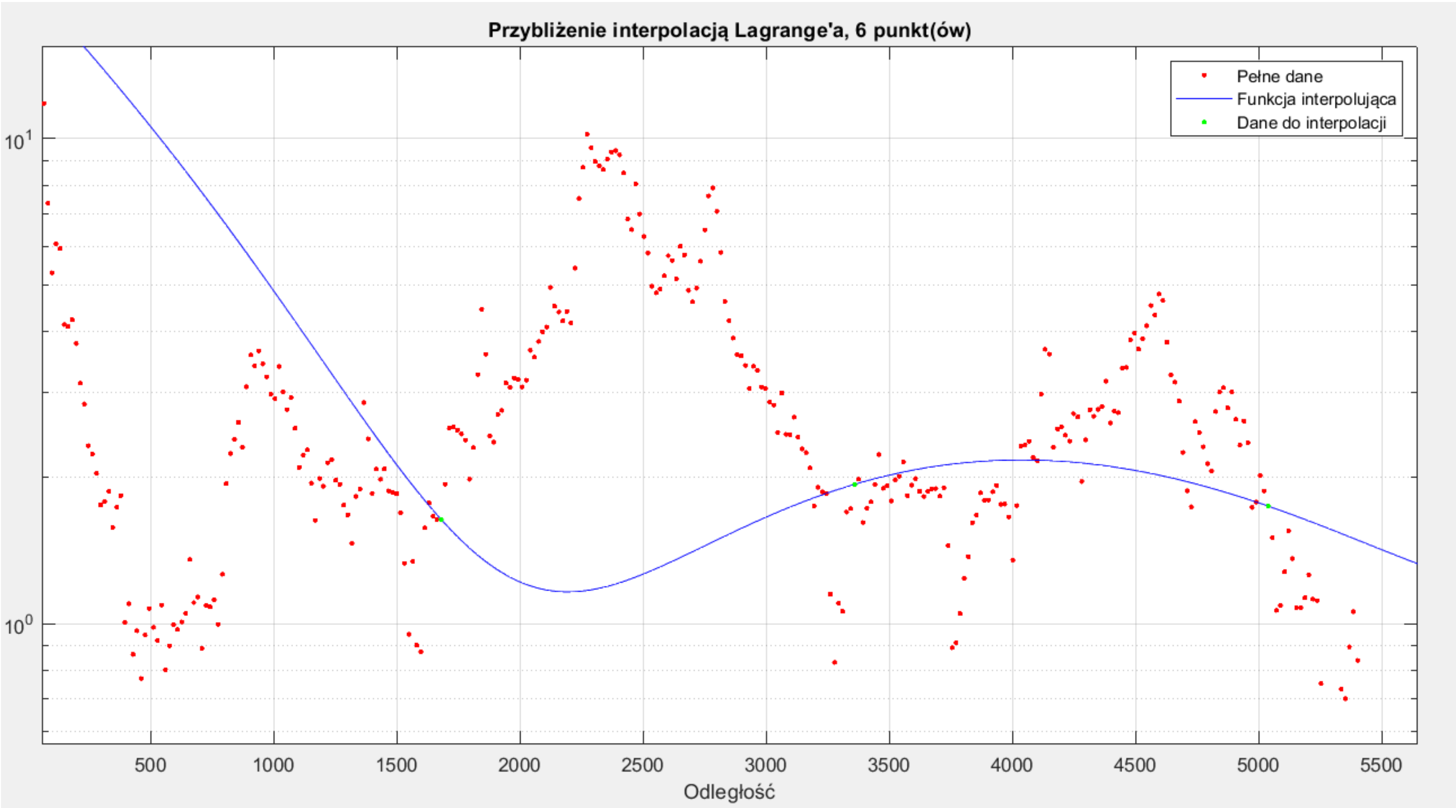
Ale dla więcej niż 11 punktów efekt Rungego już jest zbyt mocny i nie widać nic na wykresie



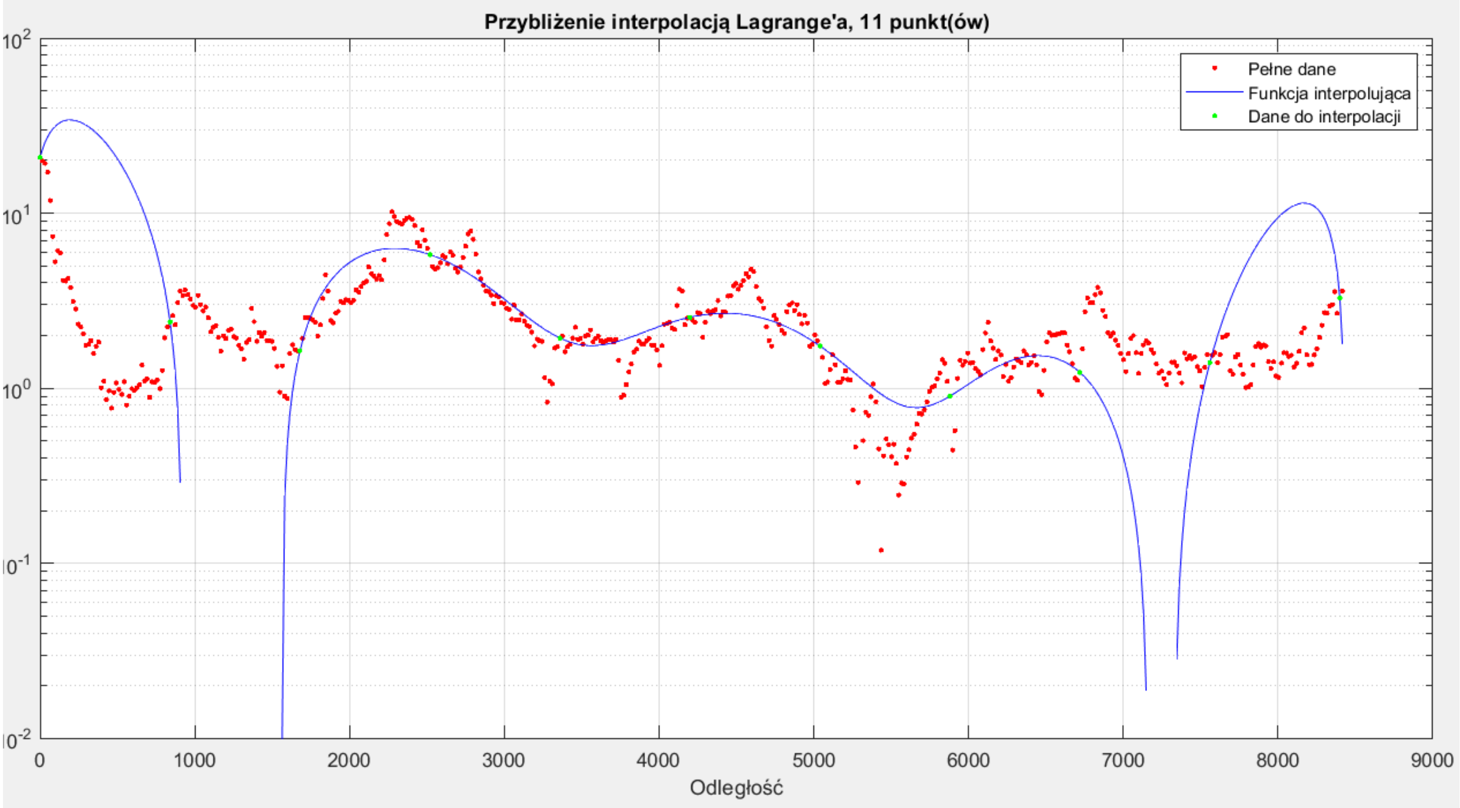
rys. 8 Interpolacja Lagrange'a dla 23 punktów(zmienny dystans między punktami) na odcinku Głębi Challangera

Sytuacja nie poprawia się dla nierównomiernego rozmieszczenia punktów. W tym przypadku osobliwości wybranego profilu umocniają efekt Rungego wskutku czego powodują, że metoda staje się niezbyt użyteczna.

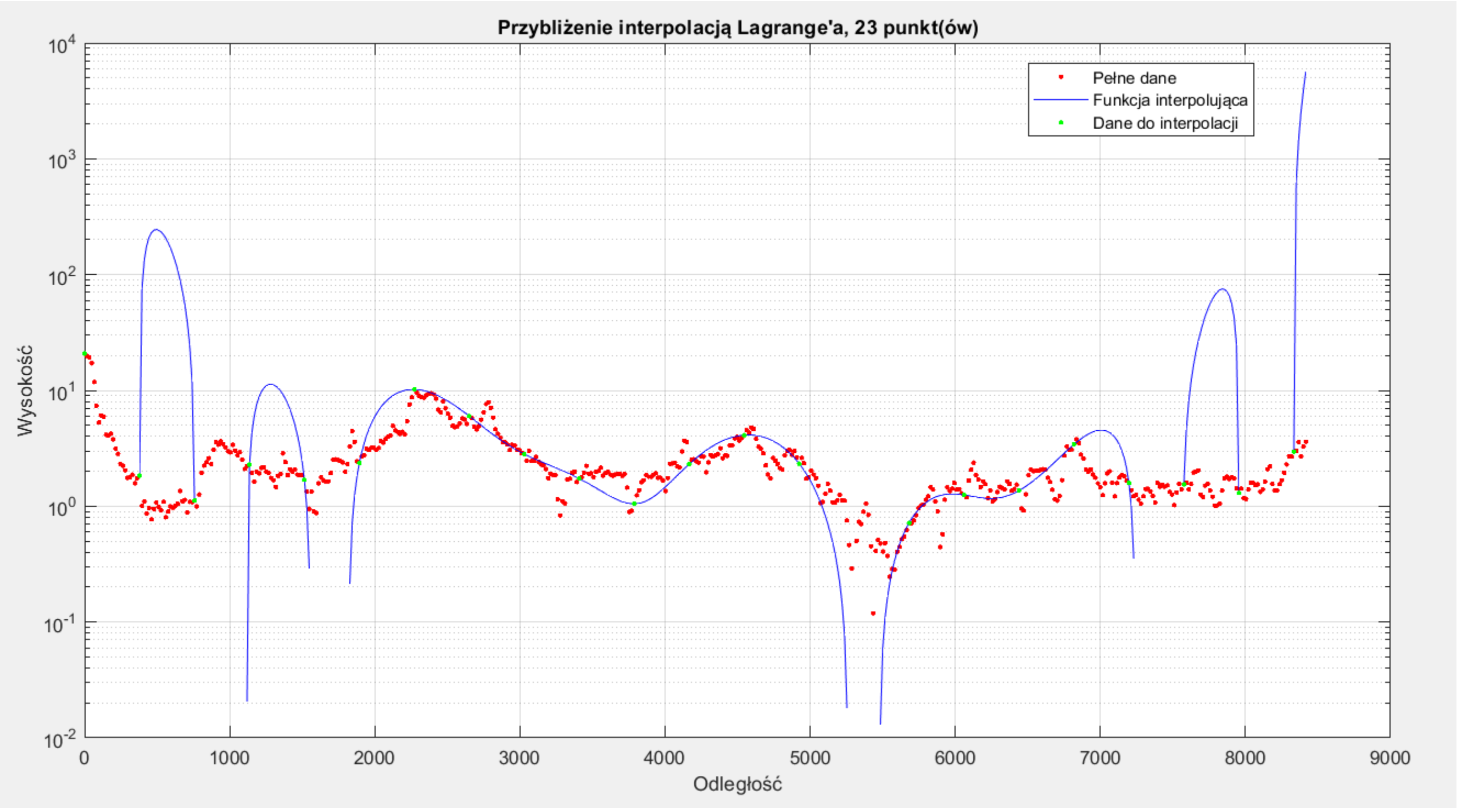
3.3. Interpolacja dla Spacerniak Gdańsk:



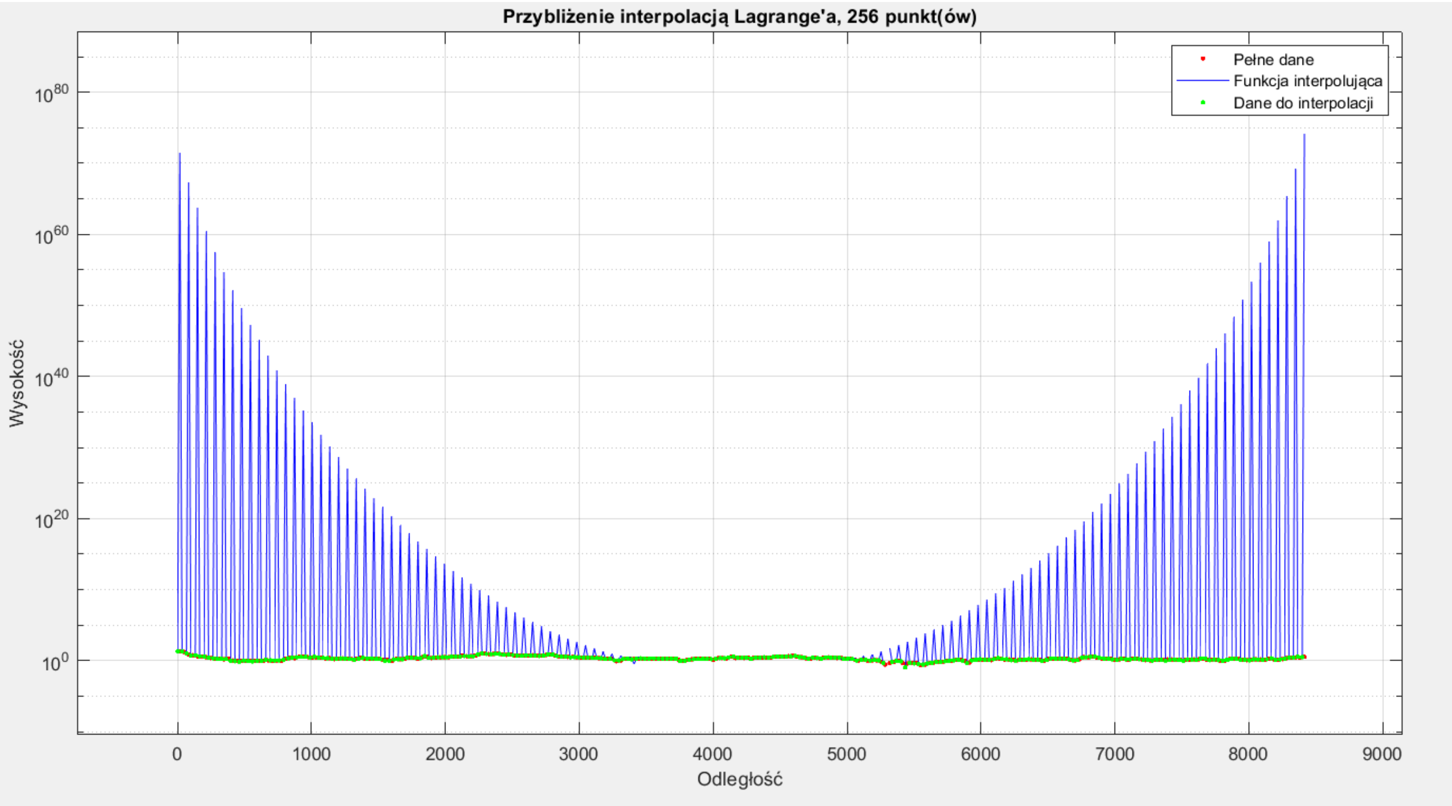
Zaczynamy od 6 punktów i widzimy bardzo nie dokładny wykres funckji. Warto zauważyć, że profil wysokościowy jest przeważnie płaski, ale zawiera pewne nagle skoki wysokości, co utrudnia dokładniejszą interpolację. Zobaczymy co będzie kiedy zwiększymy ilość punktów.



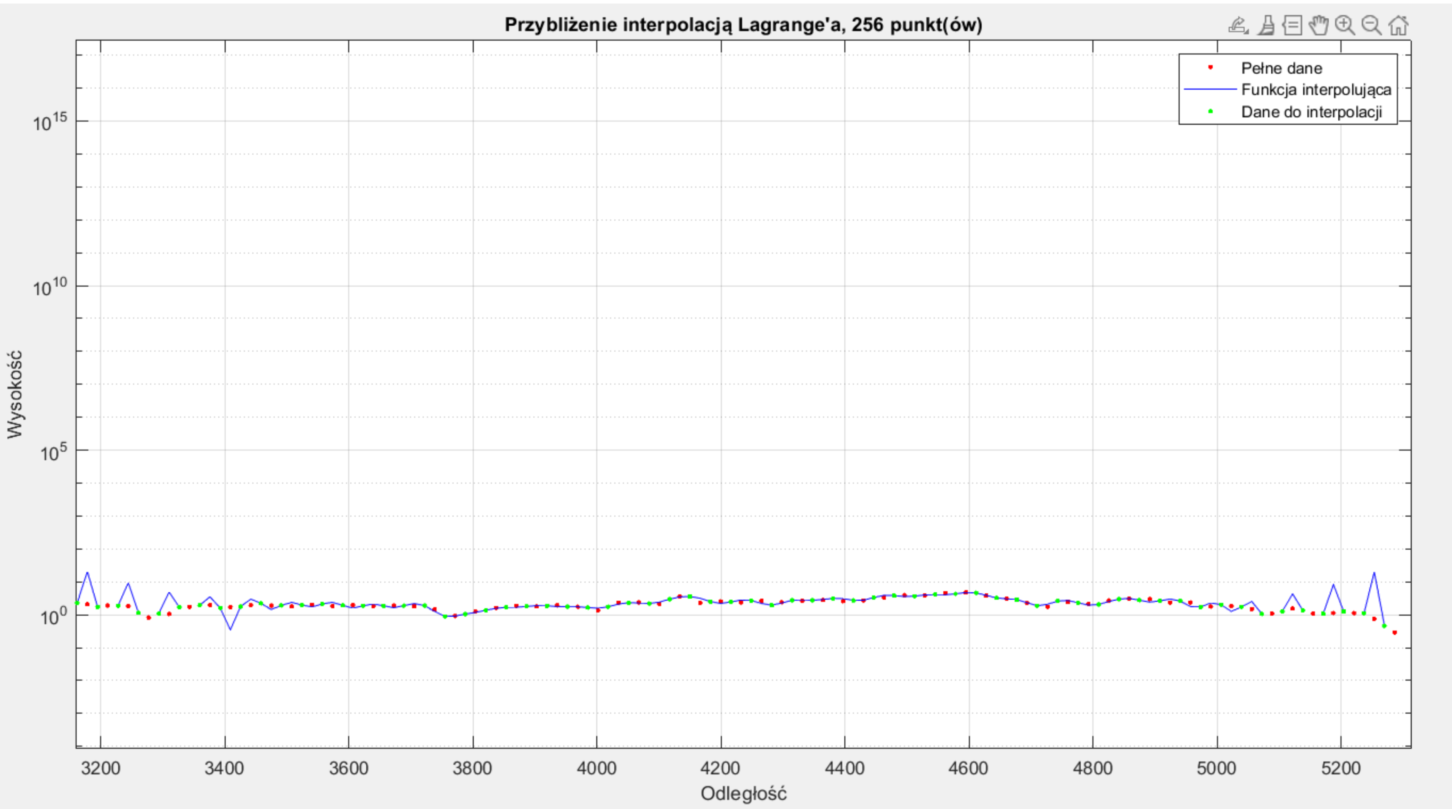
Dla 11 punktów sytuacja, trochę poprawiła się, ale zaczynamy widzieć dość silny efekt Rungego w niektórych miejcach. Interpolacja Lagrange'a niezbyt dobrze pasuje do profilów, które zawierają skoki wysokości.



Dla 23 mamy niektóre odcinki dość dobrze dopasowane do siebie, ale w innych jeszcze większe skoki Rungego. A co, jeżeli jeszcze więcej dodać punktów. Powiedzmy tak z dziesięć razy więcej.



Widzimy symetryczny efekt Rungego na krańcach, a co ze środkiem?



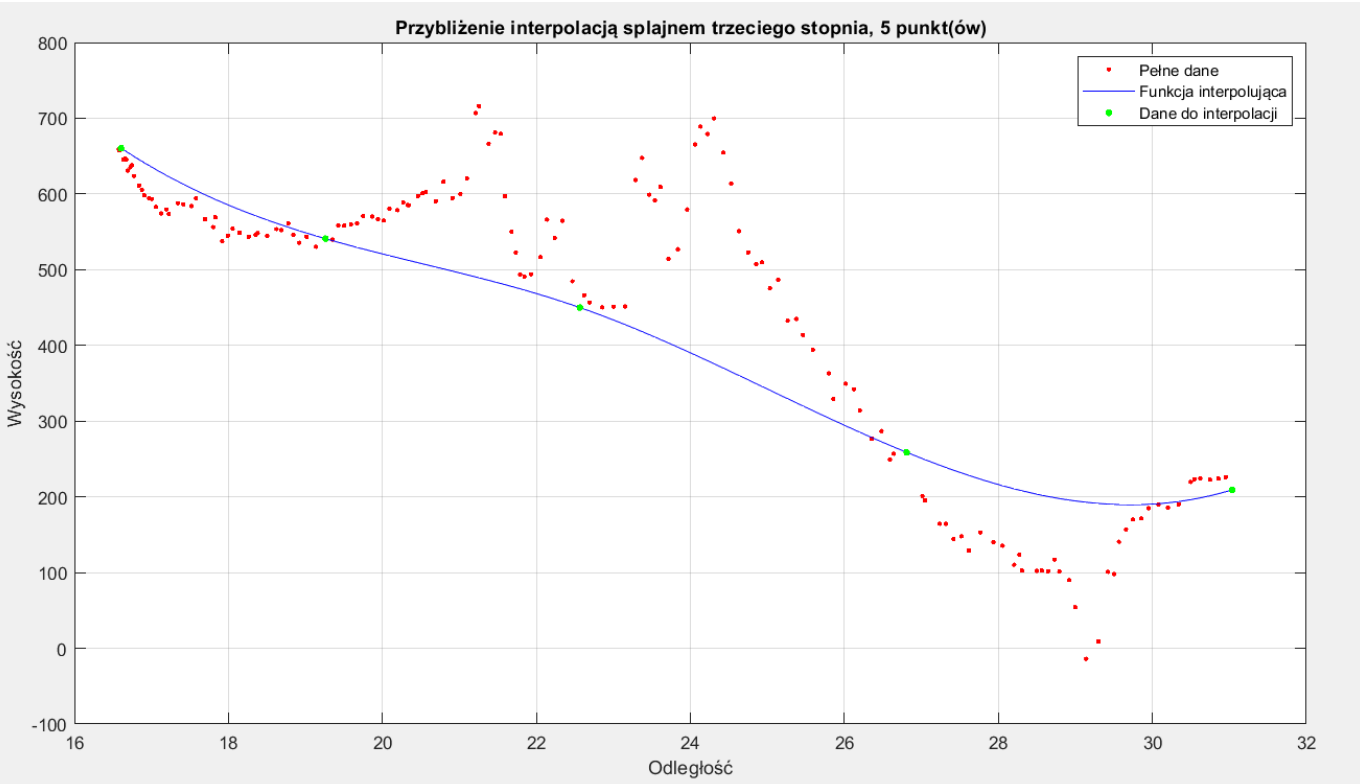
Na środku przy przybliżeniu widzimy dokładny wykres funkcji, ale to trwa nie długo i już na krańcach widać początki skoków Rungego.

4. Interpolacja funckjami slejania:

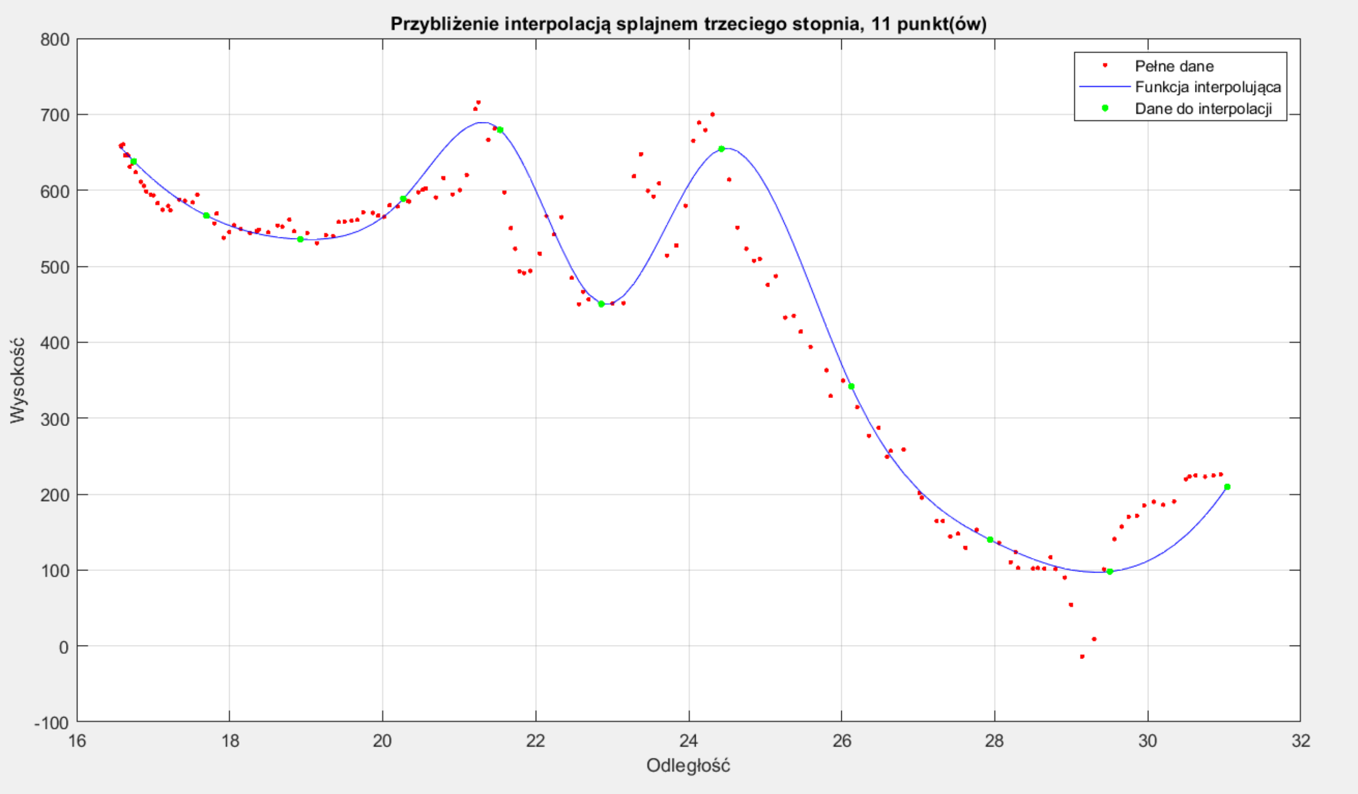
Aby uniknąć oscylacji na krańcach przedziałów w interpolacji Lagrange'a, można zastosować interpolację funkcjami sklejanymi (spline interpolation). W przypadku interpolacji funkcjami sklejanymi, dla n węzłów tworzymy n-1 podprzedziałów i dla każdego z nich interpolujemy funkcję wielomianem trzeciego stopnia (spline cubic).

Poniżej prezentacja zastosowania interpolacji funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia dla trzech profili wysokościowych.

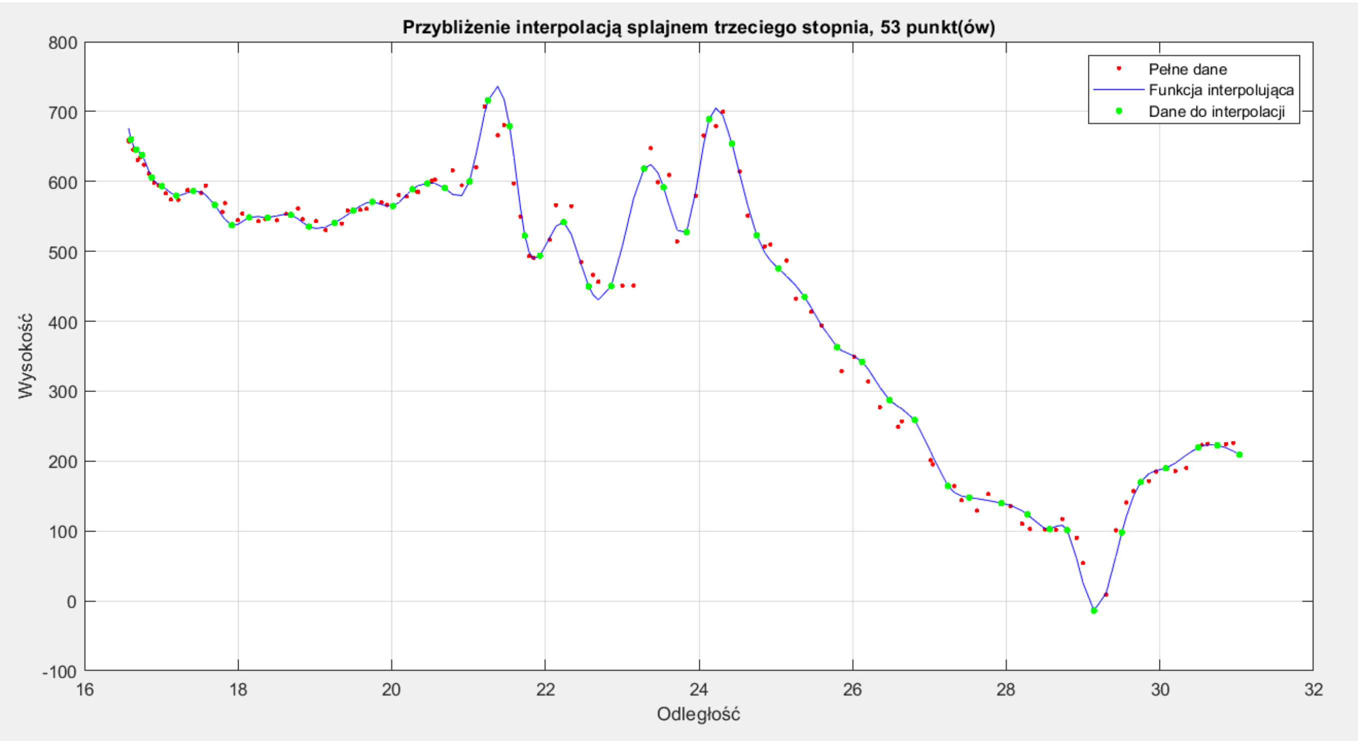
4.1. Interpolacja dla Sahara desert:



Dla 4 węzłów(równomienie rozmieszczonych) mamy prawie identyczny wynik. Zobaczymy co się stanie, kiedy zwiększymy liczbę punktów.

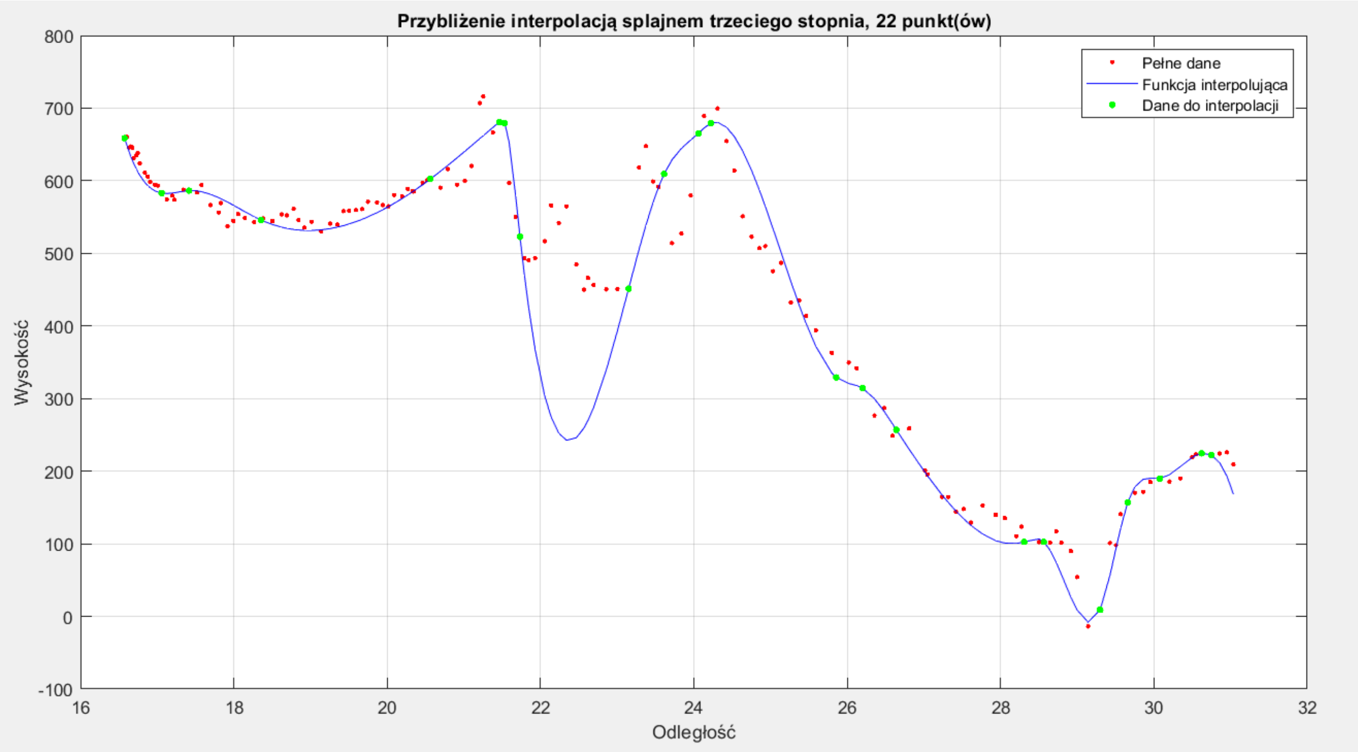


Mamy jeszcze bardziej dokładniejszą funckję, na krańcach nie widzimy oscylacje, zatem kontynuujemy zwiększanie punktów.



Rezultat jest już zadowalający, możemy zwiększać liczbe punktów, żeby mieć coraz dokładniejsze przybliżenie.

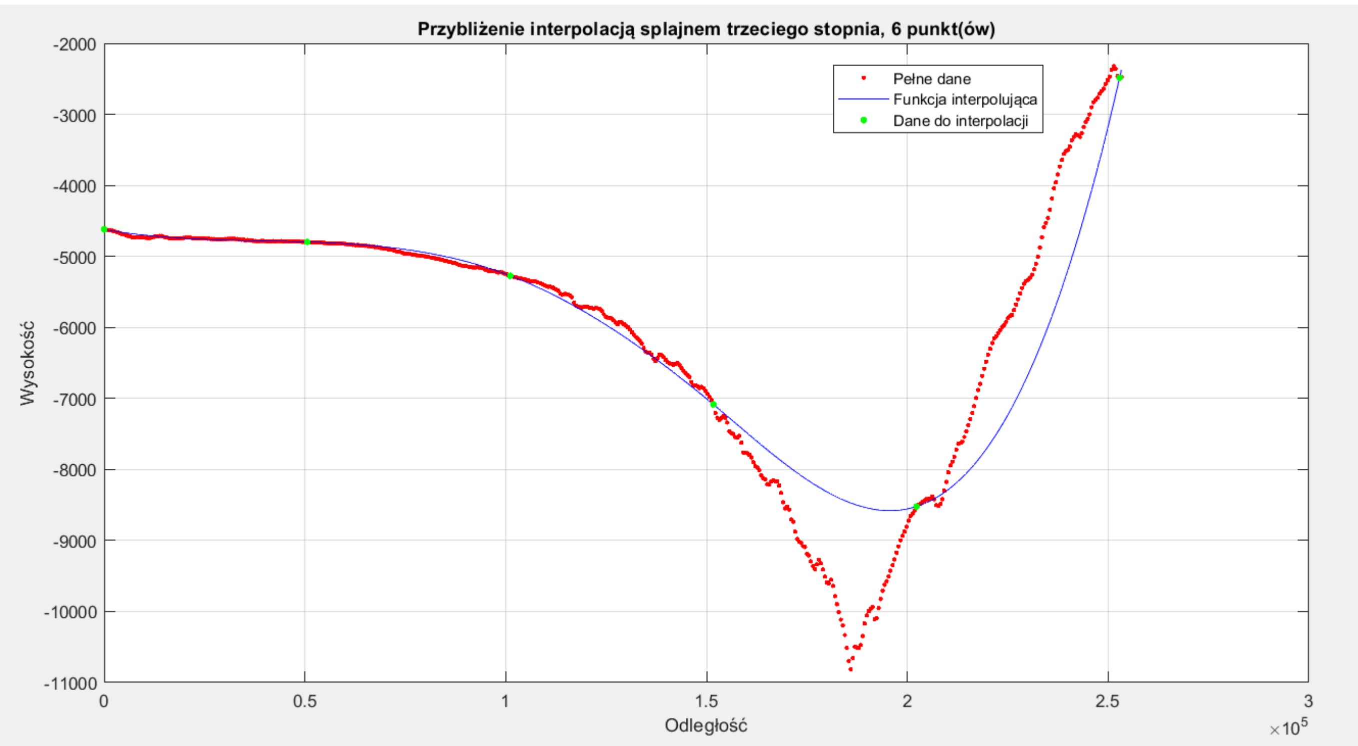
Dla 23 węzłów rozmieszczonych w nieregularny sposób otrzymujemy:

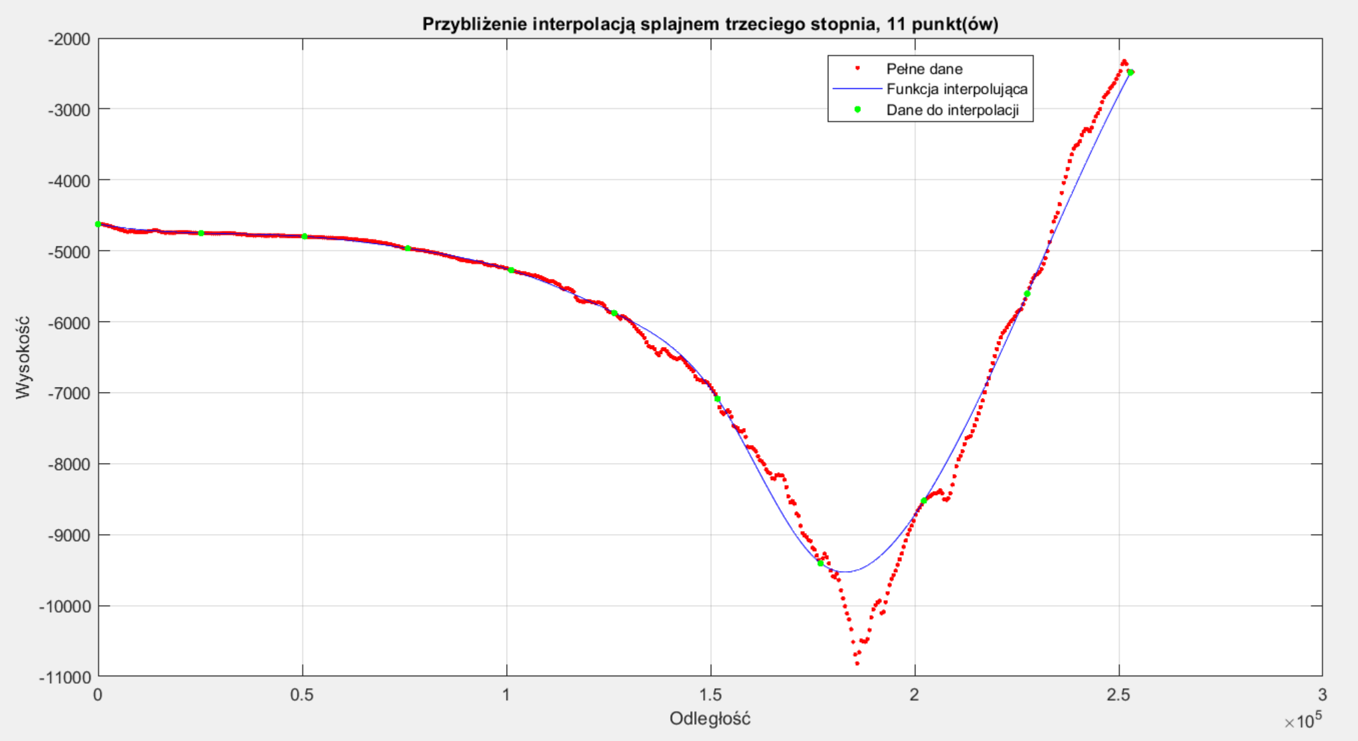


Mamy gorszy wynik, zatem nieregularne rozmieszczenie czasem może powodować mniej dokładne przybliżenie.

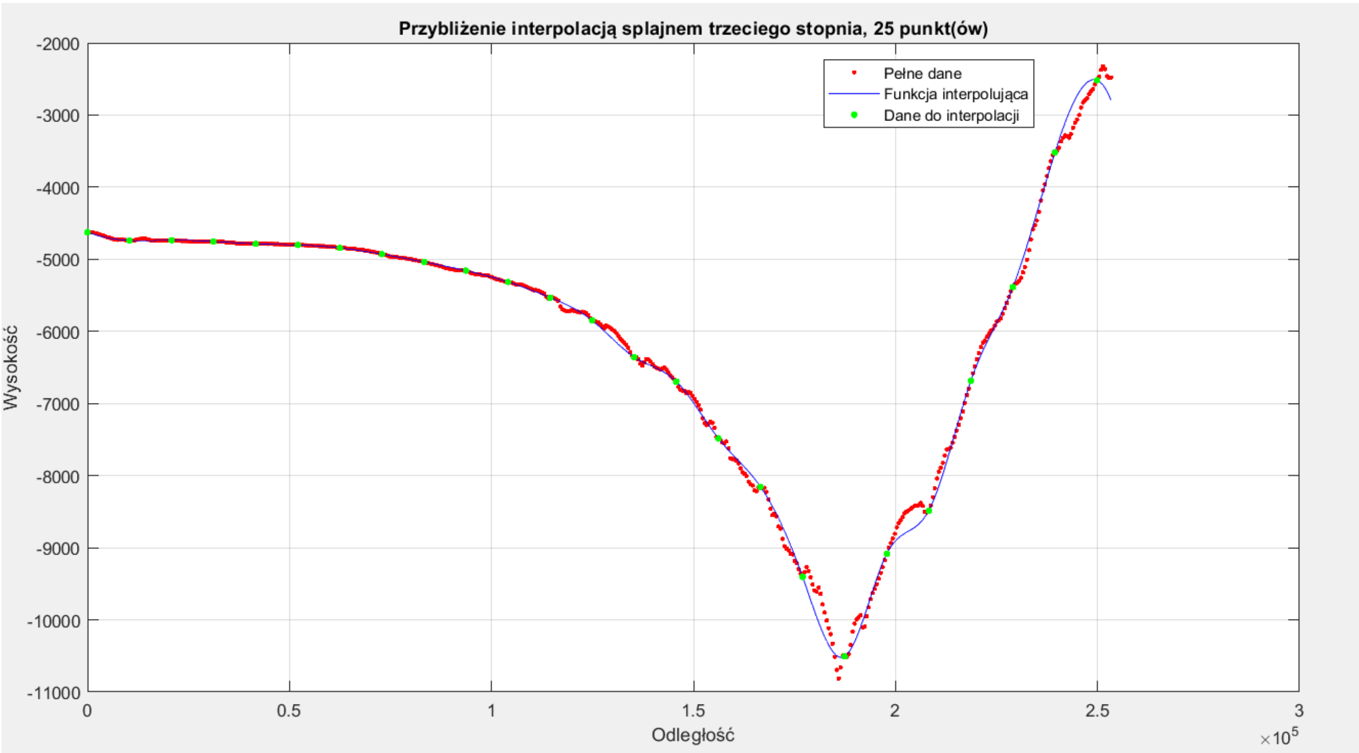
4.2. Interpolacja dla Głebi Challengera:

Zaczynamy od 6 punktów. Następnie zwiększamy do 11, 23 oraz 171 i widzimy, że wraz ze zwiększaniem się ilości punktów, uzyskujemy coraz dokładniejsze przybliżenie profilu wysokościowego. Poniżej rezultaty przedstawione na wykresach:

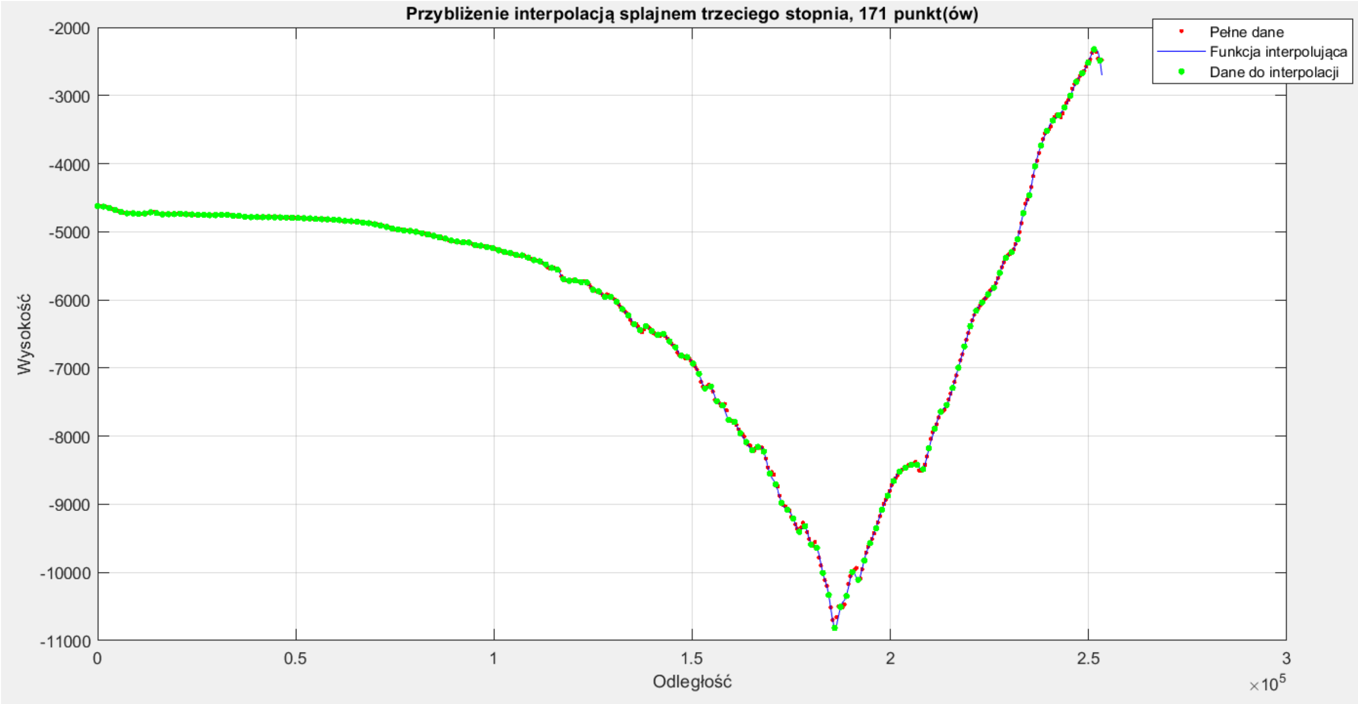


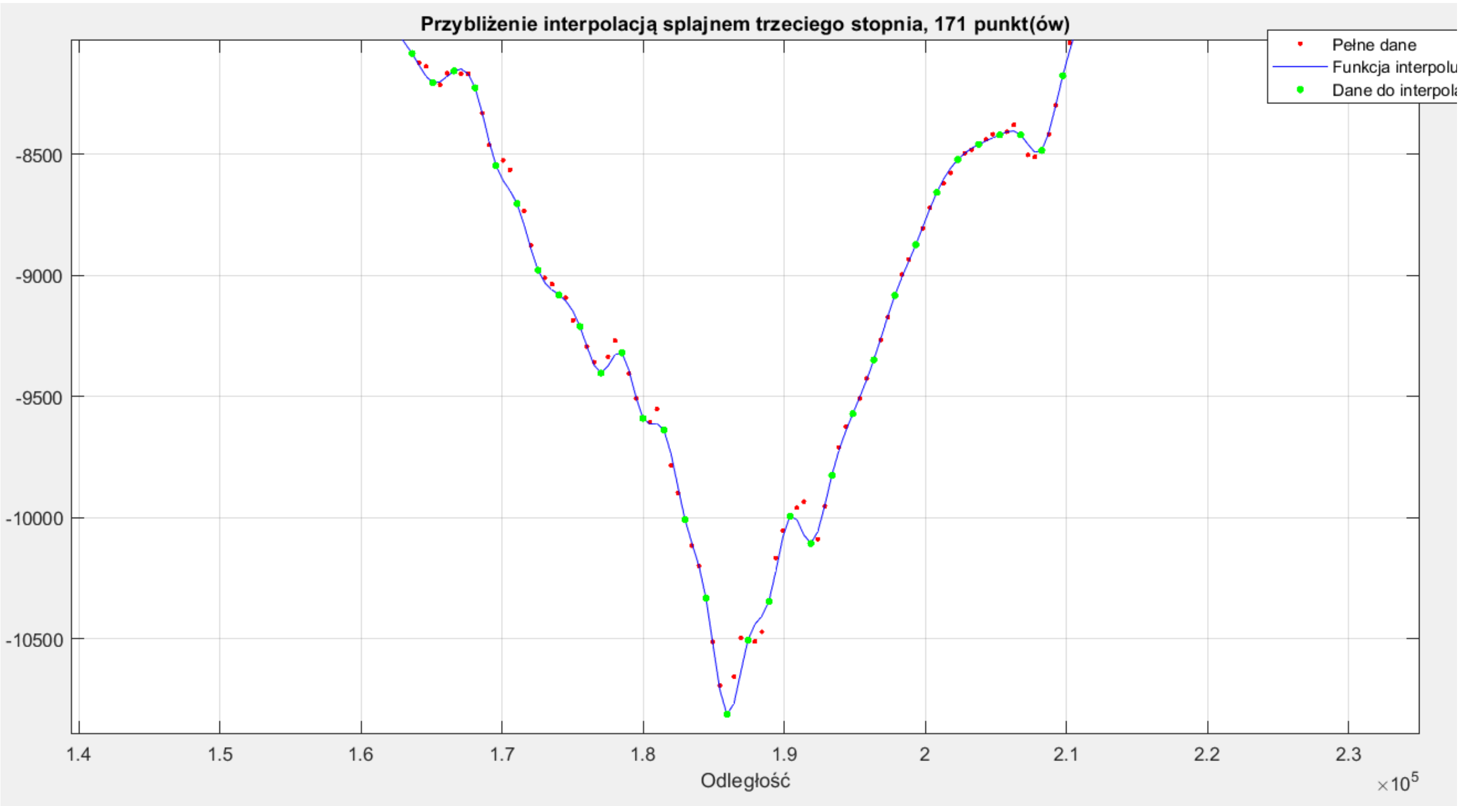


Przybliżenie interpolacją splajnem trzeciego stopnia, 11 punkt(ów)
Pełne dane
Funkcja interpolująca
Dane do interpolacji
Wysokość
Odległość
-2000
-3000
-4000
-5000
-6000
-7000
-8000
-9000
-10000
-11000
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
×10^5



Przybliżenie interpolacją splajnem trzeciego stopnia, 25 punkt(ów)
Pełne dane
Funkcja interpolująca
Dane do interpolacji
Wysokość
Odległość
-2000
-3000
-4000
-5000
-6000
-7000
-8000
-9000
-10000
-11000
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
×10^5



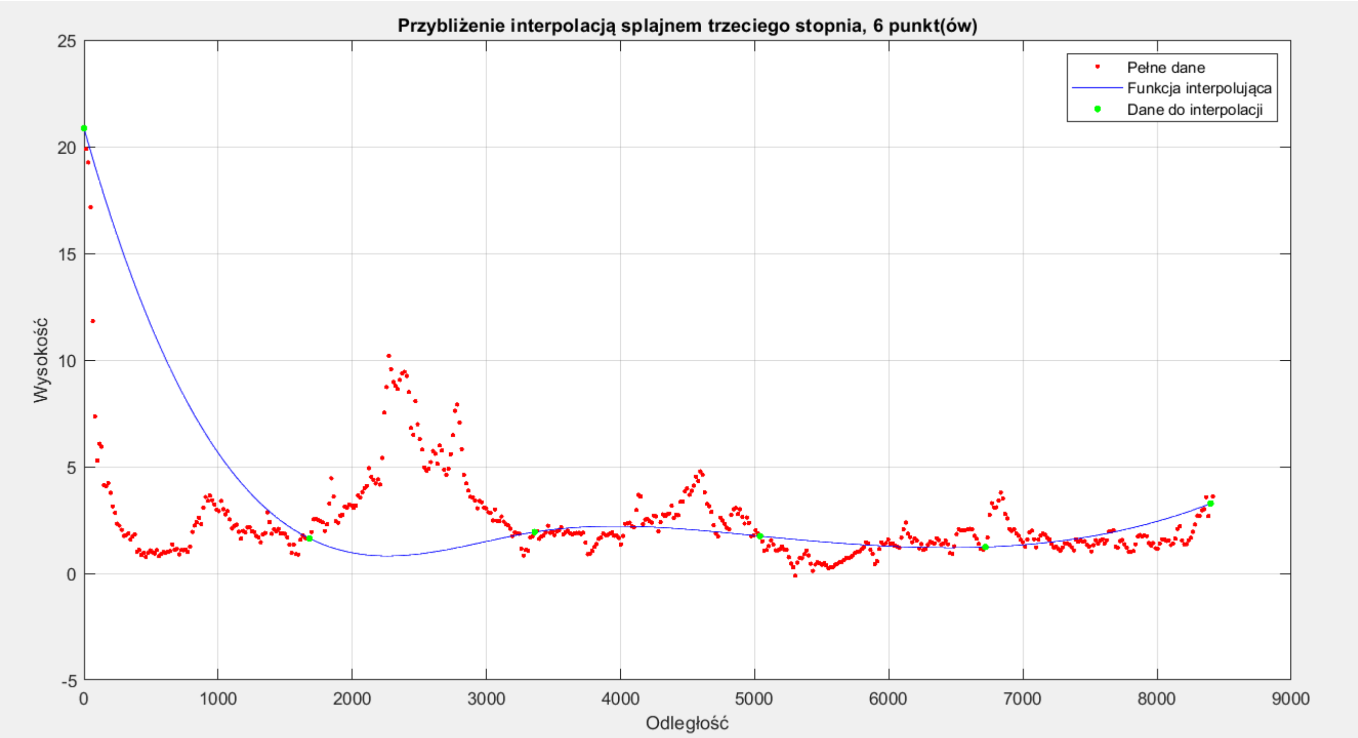


rys. 9 Powiększony wykres ze 171 węzłem

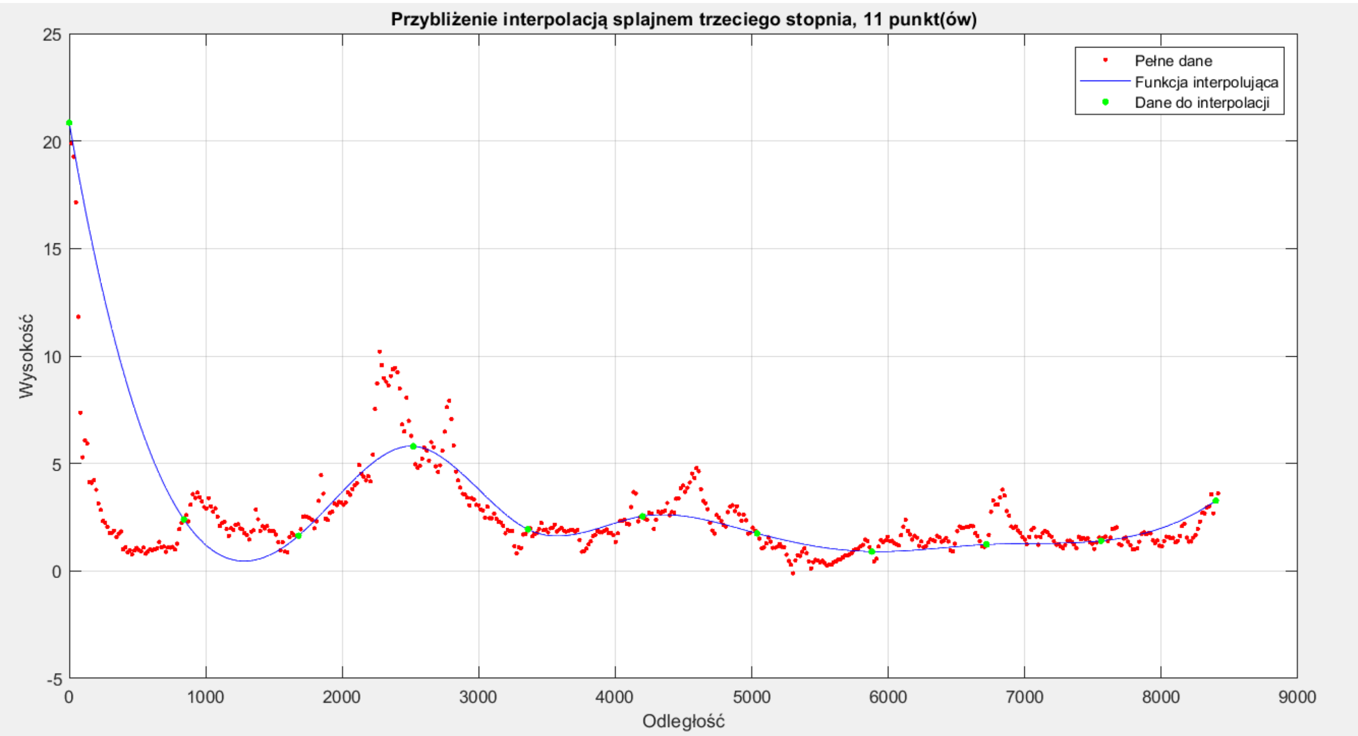
Mozemy podsumować, że ze wzrostem liczby węzłów wsrasta dokładność naszego wykresu. Nie pojawiają się oscylacje, czasami tylko wykres nie pokrywa się w pełni.

4.3. Interpolacja dla Spacerniak Gdańsk:

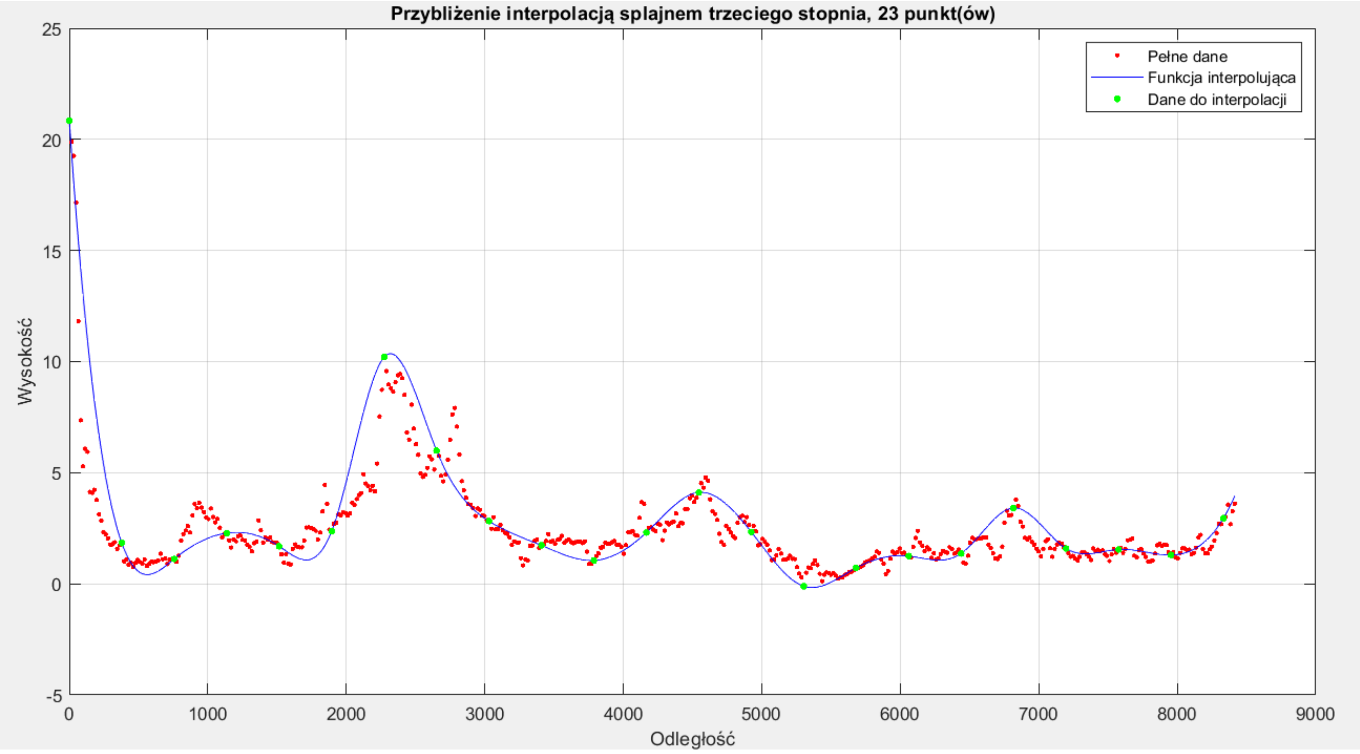
Zaczynamy od 6 punktów. Następnie zwiększamy do 11, 23 oraz 171 i widzimy, że wraz ze zwiększaniem się ilości punktów, uzyskujemy coraz dokładniejsze przybliżenie profilu wysokościowego. Poniżej rezultaty przedstawione na wykresach:

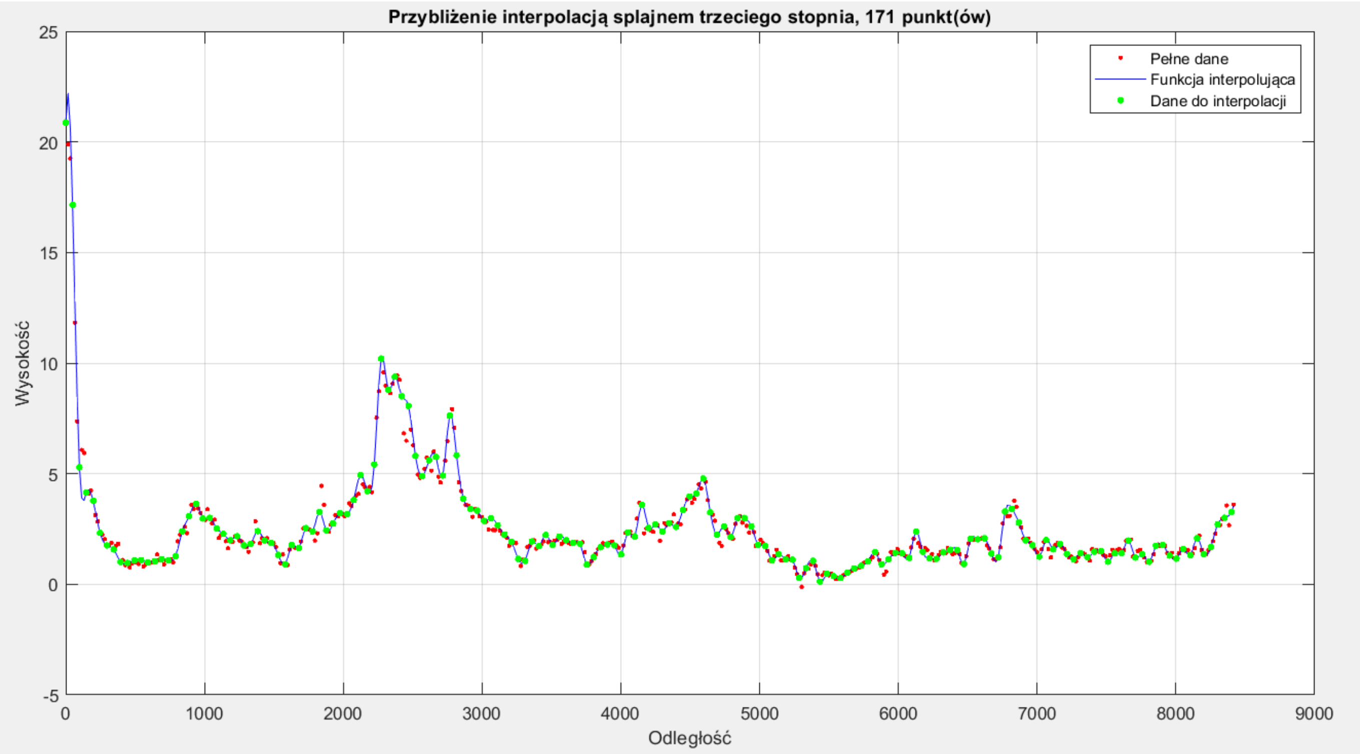


Przybliżenie interpolacją splajnem trzeciego stopnia, 6 punkt(ów)
Pełne dane
Funkcja interpolująca
Dane do interpolacji
Wysokość
Odległość
25
20
15
10
5
0
-5
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000



Przybliżenie interpolacją splajnem trzeciego stopnia, 11 punkt(ów)
Pełne dane
Funkcja interpolująca
Dane do interpolacji
Wysokość
Odległość
25
20
15
10
5
0
-5
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000





Możemy jednoznacznie stwierdzić, że zwiększenie liczby punktów polepszyło funkcję interpolującą. Jednak w miejscach gdzie pojawiają się skoki nie mamy idealnego przybliżenia.

5. Podsumowanie

Na podstawie powyższych wykresów możemy wyciągnąć kilka wniosków:

Metoda interpolacji Lagrange'a, mimo swojej szybkości, prostoty implementacji i mniejszych wymagań pamięciowych, generuje efekt Rungego, czyli oscylacje na krańcach przedziałów.

Wraz ze wzrostem liczby punktów zwiększa się dokładność przybliżenia, ale równocześnie nasila się efekt Rungego.

Dlatego lepszym rozwiązaniem jest stosowanie interpolacji funkcjami sklejanymi. Ta metoda wymaga więcej pamięci i czasu, ale daje znacznie lepsze rezultaty, nie jest podatna na efekt Rungego. Zwiększając liczbę podprzedziałów, otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenie.

Interpolacja w obu metodach zależy od liczby punktów - im więcej punktów, tym dokładniejsze przybliżenie. W metodzie Lagrange’a prowadzi to jednak do dużych oscylacji na krańcach.

W obu przypadkach sprawdzaliśmy także wpływ rozmieszczenia punktów na dokładność interpolacji. W niektórych przypadkach nierównomierne rozmieszczenie poprawiało przybliżenie, w innych je pogarszało. Nie można jednoznacznie stwierdzić, czy lepiej używać równomiernego, czy nierównomiernego rozmieszczenia punktów, ponieważ zależy to od konkretnych danych.

Ostatnim badanym aspektem był wpływ charakterystyki terenu. Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że dla regularnie rosnących lub malejących tras przybliżenia są dokładniejsze. Gdy pojawiają się gwałtowne zmiany, przybliżenie dla tej samej liczby punktów staje się mniej dokładne.

Podsumowując, metoda funkcji sklejanych jest bardziej precyzyjna i zalecana do stosowania w porównaniu z metodą Lagrange’a, pomimo jej większych wymagań. Metoda Lagrange’a, ze względu na generowany efekt Rungego, może prowadzić do poważnych błędów w interpolacji.