1 Интегралы с малым параметром

На этом и следующих трёх занятиях будут рассмотрены интегралы, зависящие от параметра. При наличии малого параметра существует несколько способов оценить интеграл:

- Разложение в ряд
- Выделение существенной области интегрирования
- Метод перевала или стационарной фазы

На данном семинаре будут рассмотрены первые 2 метода.

1.1 Ликбез

Следующие интегралы будут часто использоваться в курсе:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \pi \tag{2}$$

Вычислим первый (гауссов) интеграл:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2-t^2} = \int_{0}^{+\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-r^2} = \pi$$

Извлекая корень, получаем (1). Для вычисления (2) рассмотрим интеграл:

$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx$$

На первый взгляд, этот интеграл сложнее исходного. Однако, при помощи дифференцирования по параметру λ, его можно существенно упростить, вычислить, а потом проинтегрировать обратно. Действительно, получаем:

$$I^{'}(\lambda) = -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \sin x dx = Im \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x + ix} = -Im \frac{1}{\lambda - i} = -\frac{1}{\lambda^2+1}$$

Интегрируя, находим:

$$I(\lambda) = -\arctan \lambda + C$$

Константу найдём из рассмотрения предела $\lambda \to +\infty$. Имеем:

$$I(\lambda) \approx 0 = C - \frac{\pi}{2}$$

Отсюда, $C = \pi/2$ и $I(0) = \pi/2$. Это был пример вычисления интеграла с параметром. Более подробно эта тема будет изучаться в лекции №4.

1.2 Задача 1

Найдём асимптотики интеграла при $x \gg 1$ и $x \ll 1$:

$$I(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt$$

1.2.1 Решение

Подынтегральная функция аналитична в нуле, поэтому при $x \ll 1$ можно просто разложить $\cos t$ в ряд Тейлора; имеем:

$$I\left(x\right) \approx \int_0^x \frac{t^2/2}{t} dt = \frac{1}{4} x^2$$

При $x \gg 1$, для интеграла важна вся область интегрирования; это связано с тем, что при $x \to \infty$ этот интеграл расходится. Для выделения ведущей асимптотики можно воспользоваться трюком. Во-первых, поведение функции в нуле аналитично, поэтому интеграл можно представить в виде:

$$I\left(x\right) = \int_0^1 \frac{1-\cos t}{t} dt + \int_1^x \frac{1-\cos t}{t} dt$$

Поскольку на области интегрирования $\cos x$ успевает осциллировать много раз, во втором слагаемом мы можем его выбросить (известно, что $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ сходится и равен $\frac{\pi}{2}$, поэтому при выбрасывании косинуса мы потеряем некую константу~ 1). Во-вторых, поскольку подынтегральния функция аналитична в нуле, то первое слагаемое тоже даст число ~ 1. Таким образом формально можно записать:

$$I\left(x\right) = \int_1^x \frac{dt}{t} + O(1) \approx \ln x$$

На фоне большого слагаемого $\ln x \gg 1$ (при $x \gg 1$), выброшенные константы порядка единицы являются малой добавкой. Это называется взятием интеграла с логарифмической точностью. Точное вычисление асимптотики дает ответ $\ln x + C + o(1)$, где $C \approx 0.577$ - постоянная Эйлера-Маскерони.

1.3 Задача 2

Найдём асимптотики интеграла при $a \gg b$ и $a \ll b$:

$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{\exp(-x/a)}{\sqrt{x(x+b)}} dx$$

1.3.1 Решение

Обезразмерим интеграл, введя переменную $t = \frac{x}{a}$:

$$I(a,b) \equiv I\left(\frac{b}{a}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t\left(t+\frac{b}{a}\right)}} dt$$

Случай $b \gg a$ Из-за экспоненты, подыинтегральное выражение быстро затухает на масштабах $t \sim 1$ вблизи нуля. Поэтому в существенной области интегрирования $t \ll \frac{b}{a}$ и в знаменателе можно выбросить t на фоне большого члена $\frac{b}{a}$. Имеем:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \sqrt{\frac{a}{b}} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi a}{b}}$$

Заменой $t = z^2$ мы свели интеграл к известному интегралу Пуассона.

Случай $b \ll a$ Тут экспонента тоже затухает очень быстро на масштабах ~ 1. Однако, если выбросить $\frac{b}{a}$ в знаменателе, мы получим расходящийся интеграл - около нуля экспонента ведет себя примерно как 1, и подынтегральная функция имеет асимптотику $\sim \int_0^{\dots} \frac{1}{t} dt$, то есть расходится логарифмически. Поэтому тут существенная область интегрирования теперь - вблизи нуля. Интеграл можно переписать как:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t\left(t+\frac{b}{a}\right)}} dt + \int_1^\infty \dots$$

Второе слагаемое - сходящийся интеграл, который из-за экспоненты - число порядка 1 (формально можно оценить как $I_2 < \int_1^\infty e^{-t} dt = \frac{1}{e} \sim 1$); на фоне большого первого слагаемого его можно выбросить. Далее, поскольку, как было уже сказано, существенная область интегрирования лежит около нуля, экспоненту можно положить равной 1. Имеем:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t\left(t+\frac{b}{a}\right)}} dt$$

Этот интеграл уже можно просто взять. Введем замену $t = z^2$:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \int_0^1 \frac{2z dz}{\sqrt{z^2\left(z^2+\frac{b}{a}\right)}} = 2\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z^2+\frac{b}{a}}}$$

Теперь введем замену $z = \sqrt{\frac{b}{a}} \sinh u$; тогда $z^2 + \frac{b}{a} = \frac{b}{a}\left(\sinh^2 u + 1\right) = \frac{b}{a}\cosh^2 u$:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx 2\int_0^{\mathrm{arcsinh}\sqrt{\frac{a}{b}}} \frac{\sqrt{\frac{b}{a}}\cosh u du}{\sqrt{\frac{b}{a}}\cosh u} = 2\mathrm{arcsinh}\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Для гиперболического арксинуса есть известное выражение через элементарные функции $\mathrm{arcsinh} x = \ln(a + \sqrt{a^2+1})$. Значит:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx 2\ln\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{a}{b}+1}\right) \approx \ln\frac{a}{b} \gg 1$$

(тут мы выбросили малые константные члены на фоне большой основной логарифмической асимптотики).

1.4 Задача 3

Найдём асимптотики интеграла при $a \ll b$ и $a \gg b$:

$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{\sin\left(\frac{x}{a}\right)}{x(x^2+b^2)} dx$$

1.4.1 Решение

Обезразмерим интеграл, введя переменную $t = \frac{x}{a}$:

$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{at(a^2t^2+b^2)} a dt = \frac{1}{a^2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t\left(t^2+\frac{b^2}{a^2}\right)} dt \equiv \frac{1}{a^2} I\left(\frac{b}{a}\right)$$

Случай $a \gg b$ Если выбросить $\frac{b^2}{a^2} \ll 1$ по сравнению с t в знаменателе, то мы получим расходящийся интеграл (в нуле как $\sim \int_0^{\cdots} \frac{dt}{t^2}$). Из этого можно заключить, что основная область, где интеграл набирается - вблизи нуля. Поэтому $\sin t$ можно разложить; имеем:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \int_0^\infty \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{a}{b} \arctan\left(\frac{b}{a}t\right)\Big|_0^\infty = \frac{\pi a}{2b} \Rightarrow I(a,b) = \frac{\pi}{2ab}$$

Случай $a \ll b$ Поскольку интеграл от функции $\frac{\sin t}{t}$ набирается на масштабах порядка ~ 1 (из-за осциллирующего синуса), то в знаменателе можно выбросить t^2 на фоне $\frac{b^2}{a^2} \gg 1$. Имеем:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \int_0^\infty \frac{\sin x}{x \frac{b^2}{a^2}} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow I(a,b) \approx \frac{\pi}{2b^2}$$

1.5 Задачи для домашнего решения

Упражнение 1
Пусть $a, b > 0$. Найдите асимптотическое выражение для следующего интеграла:

$$I(a,b) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin^2 bx}{x^2} dx$$

при а) $a \gg b$ и б) $a \ll b$ (здесь и далее можно ограничиться главным порядком малости и все параметры считать положительными).

Упражнение 2
Найдите асимптотическое выражение для следующего интеграла:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2} \frac{1}{(x-1)^2+b^2} dx$$

при а) $a \ll 1, \quad b \sim 1$ и б) $a = b \gg 1$.

Упражнение 3
Найдите асимптотическое выражение для следующего интеграла:

$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{x}{x^2+a^2}(1-\tanh bx) dx$$

При $b \ll 1$ и $a \ll 1$.

Упражнение 4
Приближенно вычислите сумму

$$S(a,b) = \sum_{n=0}^\infty n^a e^{-bn}$$

при а) $a \sim 1$ и $b \ll 1$, б) $b \gg \frac{a}{b} \gg 1$.

Задача 1
Найдите асимптотическое выражение для следующего иниеграла:

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{1}{xa^2+(1-x^2)^2} dx$$

при а) $1 \gg a$, б) $1 \ll a$.

Задача 2
Найдите асимптотическое выражение для следующего интеграла:

$$I(n,a,b) = \int_0^a \frac{x^n}{e^{x/b}-1} dx$$

при а) $b \gg a$ и б) $n \gg 1$, $nb \ll a$.