

Семинар по теме: метод перевала

21 февраля 2018 г.

1 Задача 1

Найти асимптотику интеграла

$$I(n) = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$$

при $n \gg 1$.

1.1 Решение

Функция $\sin x$ имеет максимум в точке $\pi/2$, то есть на границе промежутка интегрирования. При этом, по мере удаления от $\pi/2$ подынтегральная функция убывает очень быстро. Действительно, например, в точке $\pi/6$ ее значение равно $2^{-n} \ll 1$. Поэтому $\pi/2$ — это острый максимум, а значит, приближенное вычисление можно выполнить методом перевала. Для этой цели необходимо привести выражение к стандартной для перевала форме. Чтобы сделать это, мы переписываем

$$\sin t = e^{\ln \sin t} \quad \rightarrow \quad I(n) = \int_0^{\pi/2} e^{n \ln \sin t} dt$$

Разложим теперь выражение в экспоненте вблизи $\pi/2$ по формуле Тейлора вплоть до второго порядка. Проделав это, получаем

$$I(n) \simeq \int_0^{\pi/2} e^{n \ln(1-(t-\pi/2)^2/2+\dots)} dt \simeq \int_0^{\pi/2} e^{-n(t-\pi/2)^2/2+\dots} dt$$

Видно, что мы практически получили Гауссов интеграл. Однако, здесь имеется два тонкости.

1. Характерным масштаб затухания подынтегральной функции по мере удаления от $\pi/2$ определяется из условия $n\Delta t^2 \sim 1$, то есть $\Delta t \sim n^{-1/2} \ll 1$. Это означает, что *нижний* предел интегрирования можно заменить на $-\infty$, ведь он находится на расстоянии $\sim 1 \gg n^{-1/2}$ от перевальной точки, и к существенным искажениям ответа такая замена не приведет.
2. С *верхним* пределом ситуация обстоит иначе. Дело в том, что он попадает в точности на максимум подынтегральной функции. Это приводит к тому, что от полного Гауссова интеграла нужно взять только половину, ведь вторая половина расположена в области $t > \pi/2$, по которой интегрирование не производится.

В результате получаем

$$I(n) \simeq \int_{-\infty}^{\pi/2} e^{-n(t-\pi/2)^2/2+\dots} dt = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{2\pi}{n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

2 Задача 2

Найти поведение интеграла при $a \gg 1$

$$I(a, x) = \int_0^x \exp(a \sin t) dt$$

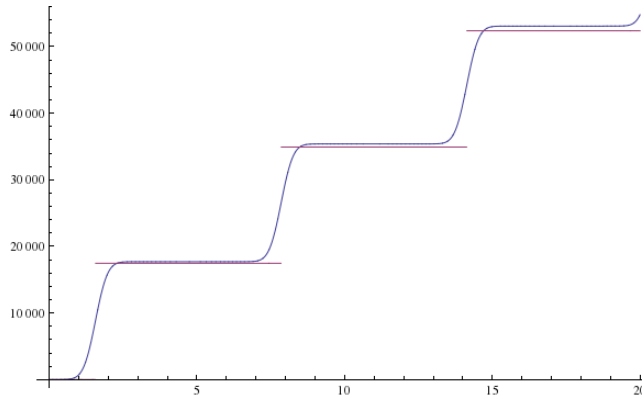
2.1 Решение

Особенность этой задачи заключается в том, что теперь у функции в показателе экспоненты бесконечное множество стационарных точек. Они определяются уравнением $f'(t) = a \cos t = 0 \Rightarrow t_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$; при этом ровно половина из них являются локальными максимумами: $f''(t) = -a \sin t \Rightarrow f''(t_n) = (-1)^n a$; поэтому локальные максимумы - лишь точки $t_{2n} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Вклад от окрестности каждой стационарной точки тоже легко определить:

$$I_{2n} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(a - \frac{a}{2}(t - t_{2n})^2\right) dt \approx \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^a$$

Займёмся теперь поведением нашего интеграла. По мере увеличения x , в область интегрирования будет попадать больше и больше перевальных точек. Вклад от каждой точки - постоянный; поэтому x будет достигать t_{2n} , функция будет испытывать резкий скачок на величину, примерно равную вкладу от одной перевальной точки. Таким образом, график функции будет представлять собой “лесенку”; ширина переходов между ступеньками по порядку равна $\sim \frac{1}{\sqrt{a}}$.

Рис. 1: $I(a, x)$ и асимптотика



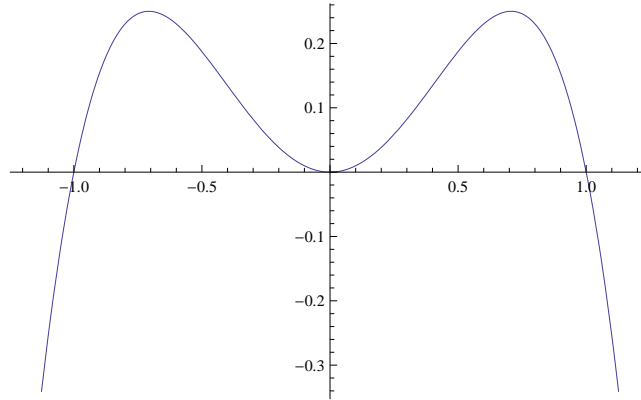
Важно однако отметить, что реальное значение интеграла такой функции по периоду отличается от аппроксимации, полученной методом перевала. При больших x , когда имеется вклад от большого количества перевальных точек, эта погрешность складывается. Этой погрешностью можно пренебречь при $x \lesssim a$, поскольку погрешность от каждой перевальной точки - порядка $\sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^a \cdot O\left(\frac{1}{a}\right)$.

3 Задача 3 (несколько перевалов)

Найти асимптотическое поведение интеграла при $A \gg 1$

$$I(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-A(x^4 - x^2)) dx$$

Рис. 2: $y = x^2 - x^4$



3.1 Решение

Функция в показателе экспоненты имеет два максимума:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Значения в перевальных точках определяются как:

$$f(x_{1,2}) = -A \left(\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4 - \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) \frac{A}{4}$$

А вторые производные:

$$f''(x_{1,2}) = -A(12x_{1,2}^2 - 2) = -4A$$

Поэтому в окрестности каждой из точек функция представляется как:

$$f(x) \approx \frac{A}{4} - 2A(x - x_{1,2})^2$$

Обе точки дадут вклад в перевальную оценку; поэтому для асимптотики имеем:

$$I(A) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{A}{4} - 2A(x - x_1)^2 \right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{A}{4} - 2A(x - x_2)^2 \right) dx = \sqrt{\frac{2\pi}{A}} e^{A/4}$$

4 Задача 4 (перевал x^4)

Найти асимптотическое поведение интеграла при $A \gg 1$:

$$I(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-A \left(\cosh x - \frac{x^2}{2} \right) \right) dx$$

4.1 Решение

Поскольку функция $\cosh x$ вблизи нуля раскладывается как $\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$, то видно, что ведущий член разложения функции в экспоненте имеет порядок x^4 . Поэтому, следуя идее метода перевала о разложении функции в экспоненте в ряд около стационарной точки, для асимптотики этого интеграла имеем:

$$I(A) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-A \left(1 + \frac{x^4}{24} \right) \right) dx$$

Этот интеграл аналогичен интегралу Пуассона; его можно взять подстановкой $t = \frac{A}{24}x^4$, сводящей его к гамма-функции:

$$I(A) \approx e^{-A} \cdot 2 \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{24}{A}\right)^{1/4} \frac{1}{4} t^{-3/4} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{24}{A}\right)^{1/4} e^{-A} \int_0^\infty t^{-3/4} e^{-t} dt = \left(\frac{3}{2A}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) e^{-A}$$

Здесь $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \approx 3.62561$ — просто некое число; оно не выражается через известные мировые константы (π , e , C , ...); однако это и не требуется.

5 Задачи для домашнего решения

Упражнение 1

Методом перевала приближенно вычислите интеграл при $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$I(\lambda) = \int_{-1}^1 \exp\left(\frac{\lambda}{\cosh^2 x}\right) dx.$$

Упражнение 2

Методом перевала приближенно вычислите интеграл при $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(x-1)^2(x-2)^2} dx.$$

Упражнение 3

Методом перевала приближенно вычислите интеграл при $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$I(\lambda) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^\lambda dx.$$

Упражнение 4

Используя идеи, аналогичные методу перевала, в пределе $\lambda \rightarrow +\infty$ вычислите интеграл

$$I(\lambda) = \int_0^1 \exp(\lambda(\sin x - x)).$$

Обратите внимание: в перевальной точке вторая производная функции в показателе экспоненты равна 0.

Задача 1

В пределе $\lambda \rightarrow +\infty$ вычислите интеграл

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cosh^\lambda x dx.$$

Задача 2

Рассмотрите интеграл с тремя параметрами:

$$I(\lambda, \epsilon, s) = \int_0^{+\infty} x^s e^{-\epsilon x} \exp(-\lambda(1 - \cos x)) dx.$$

Вычислите его в пределе $\epsilon \ll 1$, $\lambda \gg 1$, считая, что s — произвольное число порядка 1.