Семинар по теме: метод перевала

21 февраля 2018 г.

Ликбез

Гамма функция определяется следующей формулой:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t}$$

Стоящий в правой части интеграл хорошо определён для $z > 0$. При стремлении z к нулю интеграл логарифмически расходится. Гамма функцию можно рассматривать как продолжение факториала на нечётные степени. Действительно, интегрируя по частям, находим:

$$\Gamma(z+1) = -\left. t^z e^{-t} \right|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} z t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z)$$

Поскольку при этом $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$, то видно, что $\Gamma(n+1) = n!$. Кроме того, через гамма функцию выражается гауссов интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} = 2\int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Используя найденное реккурентное соотношение и значение $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, можно получить, что

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^{2n} e^{-x^2} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{-t} t^n = \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$

Здесь $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)$. Интегралы такого типа часто встречаюстя в классической статистике.

1 Задача 1

Найти асимптотику интеграла

$$I(n) = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$$

при $n \gg 1$.

1.1 Решение

Функция $\sin x$ имеет максимум в точке $\pi/2$, то есть на границе промежутка интегрирования. При этом, по мере удаления от $\pi/2$ подынтегральная функция убывает очень быстро. Дейстительно, например, в точке $\pi/6$ ее значение равно $2^{-n} \ll 1$. Поэтому $\pi/2$ — это острый максимум, а значит, приближенное вычисление можно выполнить методом перевала.

Для этой цели необходимо привести выражение к стандартной для первала форме. Чтобы сделать это, мы переписываем

$$\sin t = e^{\ln \sin t} \quad \rightarrow \quad I(n) = \int_0^{\pi/2} e^{n \ln \sin t} dt$$

Разложим теперь выражение в экспоненте вблизи $\pi/2$ по формуле Тейлора вплоть до второго порядка. Проделав это, получаем

$$I(n) \simeq \int_0^{\pi/2} e^{n \ln(1-(t-\pi/2)^2/2+\dots} dt \simeq \int_0^{\pi/2} e^{-n(t-\pi/2)^2/2+\dots} dt$$

Видно, что мы практически получили Гауссов интеграл. Однако, здесь имеется два тонкости.

1. Характерным масштаб затухания подынтегральной функции по мере удаления от $\pi/2$ определяется из условия $n\Delta t^2 \sim 1$, то есть $\Delta t \sim n^{-1/2} \ll 1$. Это означает, что *нижний* предел интегрирования можно заменить на $-\infty$, ведь он находится на расстоянии $\sim 1 \gg n^{-1/2}$ от перевальной точки, и к существенным искажениям ответа такая замена не приведет.

2. С *верхним* пределом ситуация обстоит иначе. Дело в том, что он попадает в точности на максимум подынтегральной функции. Это приводит к тому, что от полного Гауссова интеграла нужно взять только половину, ведь вторая половина расположена в области $t > \pi/2$, по которой интегрирование не производится.

В результате получаем

$$I(n) \simeq \int_{-\infty}^{\pi/2} e^{-n(t-\pi/2)^2/2+\dots} dt = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{2\pi}{n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

2 Задача 2

Найти поведение интеграла при $a \gg 1$

$$I(a, x) = \int_0^x \exp(a \sin t) dt$$

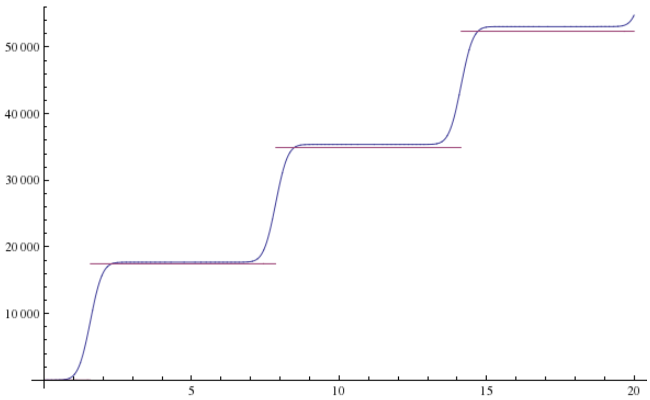
2.1 Решение

Особенность этой задачи заключается в том, что теперь у функции в показателе экспоненты бесконечное множество стационарных точек. Они определяются уравнением $f'(t) = a \cos t = 0 \Rightarrow t_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$; при этом ровно половина из них являются локальными максимумами: $f''(t) = -a \sin t \Rightarrow f''(t_n) = (-1)^n a$; поэтому локальные максимумы - лишь точки $t_{2n} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Вклад от окрестности каждой стационарной точки тоже легко определить:

$$I_{2n} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(a - \frac{a}{2}(t - t_{2n})^2) dt \approx \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^a$$

Займёмся теперь поведением нашего интеграла. По мере увеличения x, в область интегрирования будет попадать больше и больше перевальных точек. Вклад от каждой точки - постоянный; поэтому x будет достигать t_{2n}, функция будет испытывать резкий скачок на величину, примерно равную вкладу от одной перевальной точки. Таким образом, график

Рис. 1: $I(a, x)$ и асимптотика



функции будет представлять собой "лесенку"; ширина переходов между ступеньками по порядку равна $\sim \frac{1}{\sqrt{a}}$.
Важно отметить, что реальное значение интеграла такой функции по периоду отличается от апроксимации, полученной методом перевала. При больших x, когда имеется вклад от большого количества перевальных точек, эта погрешность складывается. Однако, относительная погрешность полученного результата по-прежнему остаётся малой.

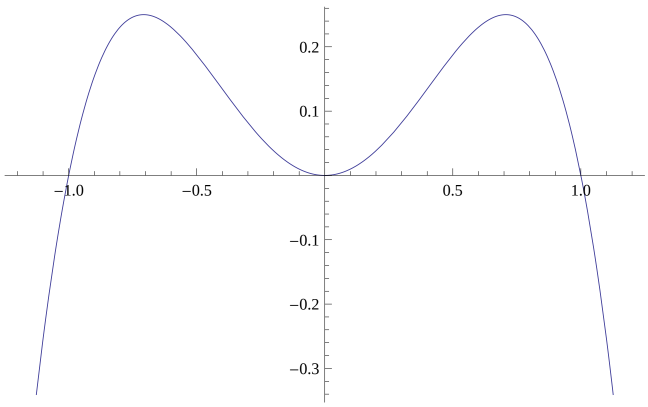
3 Задача 3 (несколько перевалов)

Найти асимптотическое поведение интеграла при $A \gg 1$

$$I(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-A(x^4 - x^2))dx$$

3.1 Решение

Рис. 2: $y = x^2 - x^4$



Функция в показателе экспоненты имеет два максимума:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Значения в перевальных точках определяются как:

$$f(x_{1,2}) = -A\left(\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 - \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)\frac{A}{4}$$

А вторые производные:

$$f''(x_{1,2}) = -A(12x_{1,2}^2 - 2) = -4A$$

Поэтому в окрестности каждой из точек функция представляется как:

$$f(x) \approx \frac{A}{4} - 2A(x - x_{1,2})^2$$

Обе точки дадут вклад в перевальную оценку; поэтому для асимптотики имеем:

$$I\left(A\right) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{A}{4} - 2A(x-x_1)^2\right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{A}{4} - 2A(x-x_2)^2\right) dx = \sqrt{\frac{2\pi}{A}} e^{A/4}$$

4 Задача 4 (перевал x^4)

Найти асимптотическое поведение интеграла при $A \gg 1$:

$$I\left(A\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-A\left(\cosh x - \frac{x^2}{2}\right)\right) dx$$

4.1 Решение

Поскольку функция $\cosh x$ вблизи нуля раскладывается как $\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots$, то видно, что ведущий член разложения функции в экспоненте имеет порядок x^4. Поэтому, следуя идее метода перевала о разложении функции в экспоненте в ряд около стационарной точки, для асимптотики этого интеграла имеем:

$$I(A) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-A\left(1 + \frac{x^4}{24}\right)\right) dx$$

Этот интеграл аналогичен интегралу Пуассона; его можно взять подстановкой $t = \frac{A}{24}x^4$, сводящей его к гамма-функции:

$$I(A) \approx e^{-A} \cdot 2 \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\frac{24}{A}\right)^{1/4} \frac{1}{4} t^{-3/4} dt = \frac{1}{2}\left(\frac{24}{A}\right)^{1/4} e^{-A} \int_0^{\infty} t^{-3/4} e^{-t} dt = \left(\frac{3}{2A}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) e^{-A}$$

Здесь $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \approx 3.62561$ — просто некое число; оно не выражается через известные мировые константы (π, e, C, …); однако это и не требуется.

5 Задачи для домашнего решения

Упражнение 1
Методом перевала приближенно вычислите интеграл при $\lambda \to +\infty$:

$$I(\lambda) = \int_{-1}^{1} \exp\left(\frac{\lambda}{\cosh^2 x}\right) dx.$$

Упражнение 2
Методом перевала приближенно вычислите интеграл при $\lambda \to +\infty$:

$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(x-1)^2(x-2)^2} dx.$$

Упражнение 3
Методом перевала приближенно вычислите интеграл при $\lambda \to +\infty$:

$$I(\lambda) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^\lambda dx.$$

Упражнение 4
Используя идеи, аналогичные методу перевала, в пределе $\lambda \to +\infty$ вычислите интеграл

$$I(\lambda) = \int_0^1 \exp(\lambda(\sin x - x)).$$

Обратите внимание: в перевальной точке вторая производная функции в показателе экспоненты равна 0.

Задача 1
В пределе $\lambda \to +\infty$ вычислите интеграл

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cosh^\lambda x dx.$$

Задача 2
Рассмотрите интеграл с тремя параметрами:

$$I(\lambda, \epsilon, s) = \int_0^{+\infty} x^s e^{-\epsilon x} \exp(-\lambda(1 - \cos x))dx.$$

Вычислите его в пределе $\epsilon \ll 1, \quad \lambda \gg 1$,
считая, что s - произвольное число порядка 1.