1. Теория возмущений, задача 1. Считая параметр $a > b$ $\varepsilon \ll 1$, исследуем с помощью теории возмущений матрицу

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} a & \varepsilon \\ \varepsilon & b \end{pmatrix}$$

Найдите с помощью как невырожденной, так и вырожденной теории возмущений первую неисчезающую поправку к собственным числам. Какое условие применимости и того, и другого способа? Сравните с точным ответом.

Ответ

$$\lambda_1^{(0)} = a$$

$$\lambda_2^{(0)} = b$$

Из невырожденной теории возмущений получаем:

$$\lambda_{1,2}^{(1)} = \pm\frac{\varepsilon^2}{a-b}$$

$$\lambda_{1,2}^{(1)} = \pm\varepsilon$$

Точный ответ:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+b\pm\sqrt{(a-b)^2+4\varepsilon^2}}{2}$$

В пределе $\varepsilon \ll (a-b)$ получаем ответ невырожденной теории возмущений, а в обратном случае $\varepsilon \gg (a-b)$ - вырожденной. В случае $\varepsilon \sim (a-b)$, даже если $\varepsilon \ll 1$, применять теорию возмущений нельзя!

2. Семинар по трансцендентным уравнениям. **Задача-шутка**. Метод итеративного решения уравнения задачи 3 на семинаре нельзя продолжать буквально до бесконечности, т.к. при некотором N:

$$\ln\ln ... A < 0$$

Число логарифмов в последнем неравенстве равно N. Оцените N при $A \gg 1$.

Решение

Отношение наблюдаемого диаметра Вселенной к планковскому масштабу $\sim 10^{90} \approx e^{207}$. В то же время, $e \approx 2.7$, $e^e \approx 15.2$, $e^{e^e} \approx 3.8\cdot 10^6$, и $e^{e^{e^e}} \gg 10^{90}$ (здесь «башню» из экспонент надо читать сверху вниз), поэтому при любом A, которое встретится в реальной физической задаче, $N \sim 1$. Т.о., при $A > 3.8\cdot 10^6$ $N = 5$, при $A > 15.2$ $N = 4$, при $A > 2.7$ $N = 3$.

3. Метод перевала. Оценить интеграл

$$\int_1^{10} x^x dx$$

Решение Интеграл набирается вблизи точки $x = 10$. Имеем:

$$\int_1^{10} x^x dx \approx 10^{10}\int_1^{10} dx e^{-(10-x)(1+\ln 10)} \approx \frac{10^{10}}{1+\ln 10} \approx 3.03\cdot 10^9$$

Численный счёт даёт ответ $3.06\cdot 10^9$. Точность порядка 1 процента.

4. Криволинейные интегралы. Вычислить среднее от функции $\frac{1}{r}$ по сфере радиуса R и центром в точке $(X, Y, Z) = r_0$.

Решение

$$\langle\frac{1}{r}\rangle = \frac{1}{4\pi R^2}\int_{|r-r_0|=R} d^2r\frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi R^2}\int_{|r|=R} d^2r\frac{1}{|r+r_0|} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{R^2+r_0^2+2Rr_0x}} =$$
$$= \frac{1}{Rr_0}\left(R+r_0-|R-r_0|\right) = \begin{cases} \frac{2}{R}, & R>r_0 \\ \frac{2}{r_0}, & R<r_0 \end{cases} \qquad (1)$$

5. Преобразование Фурье.

a. Используя формулу для сопротивления между произвольными узлами квадратной решётки, полученную на лекции, найдите асимптотику $R(N_x, N_y)$ при $N \to \infty$, где $N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2}$.

Решение

$$R_N = R\int \frac{\sin^2\left(\frac{\boldsymbol{q}\boldsymbol{N}}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}\left(\cos q_x + \cos q_y\right)}\frac{d^2\boldsymbol{q}}{(2\pi)^2} = \int_{q<N^{-1}} + \int_{q>N^{-1}} \approx$$
$$\approx R\int_{q<N^{-1}}\frac{\boldsymbol{q}^2\boldsymbol{N}^2}{q^2}\frac{d^2\boldsymbol{q}}{(2\pi)^2} + \frac{R}{2}\int_{q>N^{-1}} 4\frac{d^2\boldsymbol{q}}{(2\pi)^2q^2} \approx \frac{R}{\pi}\ln N \qquad (2)$$

b. Воспроизведите результат предыдущего пункта в непрерывном пределе

c. Пусть $N_x = N_y = N$. Вычислите $R(N, N)$

***d.** Итак, нами было получено, что при $N \to \infty$ $R_N \to \infty$. Рассмотрим теперь одномерную и трёхмерную сетку сопротивлений. Как ведёт себя $R_{N\gg 1}$ в таком случае? Можно ли связать между собой R_N и вероятность невозврата?