

# Экзамен по математическому анализу. Часть 3

Харитонцев-Беглов Сергей, Ипатов Марк, Ерёмина Елизавета,  
Родионычев Михаил

29 марта 2022 г.

## Содержание

Билет 01	1
Билет 02	1
Билет 03	2
Билет 04	3
Билет 05	4
Билет 06	4
Билет 07	6
Билет 08	7
Билет 09	7
Билет 10	8
Билет 11	9
Билет 12	10
Билет 13	10
Билет 14	11
Билет 15	11
Билет 16	12
Билет 17	14

Билет 18	14
Билет 19	15
Билет 20	16
Билет 21	17
Билет 22	19
Билет 23	20
Билет 24	22
Билет 25	24
Билет 26	25
Билет 27	26
Билет 28	27
Билет 29	28
Билет 30	29
Билет 31	30
Билет 32	31
Билет 33	32
Билет 34	33
Билет 35	34
Билет 36	35
Билет 37	35
Билет 38	36
Билет 39	37
Билет 40	37
Билет 41	38

Билет 42	39
Билет 43	40
Билет 44	41
Билет 45	42
Билет 46	43
Билет 47	43
Билет 48	44
Билет 49	46
Билет 50	47
Билет 51	47
Билет 52	48
Билет 53	48
Билет 54	49
Билет 55	50
Билет 56	51
Билет 57	52
Билет 58	52
Билет 59	53

# Билет 01

Пусть  $\mathcal{F}$  — совокупность (множество) ограниченных плоских фигур.

**Определение 1.1.** Площадь:  $\sigma: \mathcal{F} \rightarrow [0; +\infty)$ , причём

1.  $\sigma([a; b] \times [c; d]) = (b - a)(d - c)$
2. (Аддитивность).  $\forall E_1, E_2 \in \mathcal{F}: E_1 \cap E_2 = \emptyset \Rightarrow \sigma(E_1 \cup E_2) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$

**Свойство Монотонность площади.**  $\forall E, \tilde{E}: E \subset \tilde{E} \Rightarrow \sigma(E) \leq \sigma(\tilde{E})$ .

**Доказательство.**  $\tilde{E} = E \cup (\tilde{E} \setminus E) \Rightarrow \sigma(\tilde{E}) = \sigma(E) + \sigma(\tilde{E} \setminus E)$ . □

**Определение 1.2.** Псевдоплощадь:  $\sigma: \mathcal{F} \rightarrow [0; +\infty)$ , причём

1.  $\sigma([a; b] \times [c; d]) = (b - a)(d - c)$ ,
2.  $\forall E, \tilde{E} \in \mathcal{F}: E \subset \tilde{E} \Rightarrow \sigma(E) \leq \sigma(\tilde{E})$ ,
3. Разобьем  $E$  вертикальной или горизонтальной прямой, в том числе теми прямыми, которые правее или левее  $E$ . Тогда  $E = E_- \cup E_+$ ,  $E_- \cap E_+ = \emptyset$  и  $\sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$ .

**Свойства.** 1. Подмножество вертикального или горизонтального отрезка имеет нулевую площадь.

2. В определении  $E_-$  и  $E_+$  неважно куда относить точки из  $l$ .

**Доказательство.** Пусть  $\tilde{E} = E_- \cup (E \cap l) = (E_- \setminus l) \cup (E \cap l)$ .

Тогда  $\sigma(\tilde{E}) = \sigma(E_- \cup (E \cap l)) = \sigma(E_- \setminus l) + \underbrace{\sigma(E \cap l)}_{=0} \Rightarrow$  вообще не имеет разницы куда относить точки из  $l$ . □

# Билет 02

**Пример.**

1.  $\sigma_1(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^n |P_k| : P_k \text{ — прямоугольник, } \bigcup_{k=1}^n P_k \supset E \right\}$ .
2.  $\sigma_2(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |P_k| : P_k \text{ — прямоугольник, } \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supset E \right\}$ .

**Упражнение.**

1. Доказать, что  $\forall E \quad \sigma_1(E) \geq \sigma_2(E)$ .
2.  $E = ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \times ([0, 1] \cap \mathbb{Q})$ . Доказать, что  $\sigma_1(E) = 1, \sigma_2(E) = 0$ .

**Теорема 2.1.**

1.  $\sigma_1$  — квазиплощадь.

2. Если  $E'$  — сдвиг  $E$ , то  $\sigma_1(E) = \sigma_1(E')$ .

### Доказательство.

2.  $E'$  — сдвиг  $E$  на вектор  $v$ . Пусть  $P_k$  — покрытие  $E \iff P'_k$  — покрытие  $E'$ . Знаем, что площади прямоугольников не меняются при сдвиге, а значит:

$$\sigma_1(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^n |P_k|\right\} = \inf\left\{\sum |P'_k|\right\} = \sigma_1(E').$$

1.  $\Rightarrow$  монотонность. Пусть есть  $E \subset \tilde{E}$ . Тогда возьмем покрытие  $P_k$  для  $\tilde{E}$ .  $E \subset \tilde{E} \subset \bigcup_{k=1}^n P_k$ .

А теперь заметим, что  $\sigma_1 - \inf$ , и любое покрытие для  $\tilde{E}$  является покрытием и для  $E$ , т.е. все суммы из  $\sigma_1(\tilde{E})$  есть в  $\sigma_1(E)$ , а значит  $\sigma_1(E) \leq \sigma_1(\tilde{E})$  как инфимум по более широкому множеству.

1'. Докажем теперь аддитивность.

« $\leq$ »:  $\sigma_1(E) = \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$ . Пусть  $P_k$  — покрытие  $E_-$ ,  $Q_j$  — покрытие  $E_+$ .

Тогда  $\bigcup_{k=1}^n P_k \cup \bigcup_{j=1}^n Q_j \supset E_- \cup E_+ = E$ .

А значит  $\sigma_1(E) \leq \inf\left\{\sum_{k=1}^n |P_k| + \sum_{j=1}^n |Q_j|\right\} = \inf\{\sum |P_k|\} + \inf\{\sum |Q_j|\} = \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$ .

Заметим, что переход с разделением инфимумов возможен, так как  $P$  и  $Q$  выбираются независимо.

« $\geq$ »: Пусть  $P_k$  — покрытие  $E$ . Тогда можно пересечь прямой (покрытие и само  $E$ ) и разбить  $P_k$  на  $P_k^-$  и  $P_k^+$ , а тогда:  $|P_k| = |P_k^-| + |P_k^+|$ ,  $\sum |P_k| = \sum |P_k^-| + \sum |P_k^+|$ .

$\sum |P_k^-| \geq \sigma_1(E_-)$ ,  $\sum |P_k^+| \geq \sigma_1(E_+) \Rightarrow \sum |P_k| \geq \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$  для любого покрытия  $P_k$ , а значит и  $\sigma_1(E) \geq \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$

Таким образом  $\sigma_1(E) = \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$

1''. Проверим, что сама площадь прямоугольника не сломалась:  $\sigma_1([a, b] \times [c, d]) = (b-a)(d-c)$ . Заметим, что  $\sigma_1(P) \leq |P|$ , т.к. прямоугольник можно покрыть им самим.

Чтобы доказать  $\sigma_1(P) \geq |P|$ , посмотрим на  $P_k$ . Проведем прямые содержащие все стороны прямоугольников из покрытия (и  $P$ ). Заметим, что такими прямыми каждый прямоугольник разбивается на подпрямоугольники, сумма площадей которых равна площади исходного прямоугольника. Тогда заметим, что и площадь  $P$  это сумма «кусочков из нарезки»  $P$ , и некоторые части разбиения встречаются в  $P_k$  несколько раз. А значит выкинув все лишнее мы как раз получим  $|P|$ , а значит  $\sigma_1(P) \geq |P|$ .

Формально: Если  $\bigcup_{k=1}^n P_k \supset P$ , то  $\sum_{k=1}^n |P_k| \geq |P| \Rightarrow \inf\left\{\sum_{k=1}^n |P_k|\right\} \geq |P|$ .

Таким образом  $\sigma_1(P) = |P|$ .

□

## Билет 03

**Определение 3.1.** Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $f_+, f_- : [a, b] \rightarrow [0; +\infty)$ . Причем  $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ ,  $f_- = \max\{-f(x), 0\}$ .  $f_+$  — положительная составляющая, а  $f_-$  — отрицательная составляющая.

**Свойства.** 1.  $f = f_+ - f_-$ .

2.  $|f| = f_+ + f_-$

3.  $f_+ = \frac{f+|f|}{2}$ ,  $f_- = \frac{|f|-f}{2}$ . (Сложили и вычли первые два свойства)

4. Если  $f \in C([a, b])$ , то  $f_{\pm} \in C([a, b])$ . (Видно из 3-го пункта)

**Определение 3.2.** Пусть  $f : [a, b] \rightarrow [0; +\infty)$ .

Тогда подграфик  $P_f([a; b]) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$ . Подграфик может быть взят и от какого-то подотрезка области определения функции!

## Билет 04

**Определение 4.1.** Пусть  $f \in C([a, b])$ . Зафиксируем произвольную квазиплощадь  $\sigma$ . Тогда Определённый интеграл:  $\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = \sigma(P_{f_+}([a; b])) - \sigma(P_{f_-}([a; b]))$ .

Определение корректно, поскольку, раз функция непрерывна, то и составляющие непрерывны на отрезке, значит ограничены, значит под  $\sigma$  ограниченные множества, на которых  $\sigma$  определена. А позже проверим, что результат не зависит и от выбора  $\sigma$ .

**Свойства.** 1.  $\int_a^a f = 0$ . (Площадь отрезка = 0)

2.  $\int_a^b c = c(b - a)$ ,  $c \geq 0$  (для отрицательных будет следовать из пунктов ниже)

**Доказательство.** По графику очевидно :) □

3.  $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f = \sigma(P_f)$ .

4.  $\int_a^b (-f) = - \int_a^b f$ .

**Доказательство.**  $(-f)_+ = \max\{-f, 0\} = f_-$ .  $(-f)_- = \max\{f, 0\} = f_+$ , откуда  $\int_a^b (-f) = \sigma(P_{(-f)_+}) - \sigma(P_{(-f)_-}) = \sigma(P_{f_-}) - \sigma(P_{f_+}) = - \int_a^b f$  □

5.  $f \geq 0 \wedge \int_a^b f = 0 \wedge a < b \Rightarrow f = 0$ .

**Доказательство.** От противного. Пусть  $\exists c \in [a, b] : f(c) > 0$ . Тогда, возьмем  $\varepsilon := \frac{f(c)}{2}$ ,  $\delta$  из определения непрерывности в точке  $c$ . Если  $x \in (c - \delta, c + \delta)$ , то  $f(x) \in (f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon) = (\frac{f(c)}{2}, \frac{3f(c)}{2}) \Rightarrow f(x) \geq \frac{f(c)}{2}$  при  $x \in (c - \delta; c + \delta) \Rightarrow P_f \supset [c - \frac{\delta}{2}; c + \frac{\delta}{2}] \times [0; \frac{f(c)}{2}] \Rightarrow \int_a^b f = \sigma(P_f) \geq \delta \cdot \frac{f(c)}{2} > 0$ , противоречие. □

# Билет 05

**Теорема 5.1** (Аддитивность интеграла). Пусть  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c \in [a, b]$ .

$$\text{Тогда } \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

**Доказательство.**  $\int_a^b f = \sigma(P_{f+}([a, b])) - \sigma(P_{f-}([a, b]))$ . Разделим наш  $[a, b]$  и соответствующие множества вертикальной прямой  $x = c$ . Тогда  $\sigma(P_{f+}[a, b]) - \sigma(P_{f-}[a, b]) = \sigma_{P_{f+}[a, c]} + \sigma_{P_{f+}[c, b]} - \sigma(P_{f-}[a, c]) - \sigma(P_{f-}[c, b]) = \int_a^c f + \int_c^b f$   $\square$

**Теорема 5.2** (Монотонность интеграла). Пусть  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\forall x \in [a, b]: f(x) \leq g(x)$ .

$$\text{Тогда } \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

**Доказательство.**  $f_+ = \max\{f, 0\} \leq \max\{g, 0\} = g_+ \Rightarrow P_{f_+} \subset P_{g_+} \Rightarrow \sigma(P_{f_+}) \leq \sigma(P_{g_+})$ .

$$f_- = \max\{-f, 0\} \geq \max\{-g, 0\} = g_- \Rightarrow P_{f_-} \supset P_{g_-} \Rightarrow \sigma(P_{f_-}) \geq \sigma(P_{g_-}).$$

$$\int_a^b f = \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-}) \leq \sigma(P_{g_+}) - \sigma(P_{g_-}) = \int_a^b g. \quad \square$$

**Следствие.** 1.  $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$ .

$$2. (b-a) \min_{x \in [a, b]} f(x) \leq \int_a^b f \leq (b-a) \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

**Доказательство.** 1.  $-|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow$  (Применим теорему к двум неравенствам)

$$\int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \Rightarrow \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

$$2. m := \min_{x \in [a, b]} f(x), M := \max_{x \in [a, b]} f(x). m \leq f(x) \leq M \Rightarrow \int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M \Rightarrow$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

$\square$

**Теорема 5.3** (Интегральная теорема о среднем). Пусть  $f \in C([a, b])$ .

$$\text{Тогда } \exists c \in (a, b): \int_a^b f = (b-a)f(c).$$

**Доказательство.**  $m := \min f = f(p), M := \max f = f(q)$  (по теореме Вейерштрасса). Тогда  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f = f(c) \Rightarrow f(p) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq f(q) \xrightarrow{\text{т. Б-К}} \exists c \in (p, q) \text{ или } (q, p): f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$ .  $\square$

**Определение 5.1.**  $I_f := \frac{1}{b-a} \int_a^b f$  — среднее значение  $f$  на отрезке  $[a, b]$ .

# Билет 06

**Определение 6.1.**  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Интеграл с переменным верхним пределом  $\Phi(x) := \int_a^x f$ , где  $x \in [a, b]$ .

**Определение 6.2.**  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Интеграл с переменным нижним пределом  $\Psi(x) := \int_x^b f$ , где  $x \in [a, b]$ .

**Замечание.**  $\Phi(x) + \Psi(x) = \int_a^b f$ .

**Теорема 6.1** (Теорема Барроу). Пусть  $f \in C([a, b])$ . Тогда  $\Phi'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$ . То есть  $\Phi$  — первообразная функции  $f$ .

**Доказательство.** Надо доказать, что  $\lim_{y \rightarrow x} \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = f(x)$ . Проверим для предела справа (слева аналогично, но, возможно, с чуть другим порядком точек).

$$\text{Тогда } \Phi(y) - \Phi(x) = \int_a^y f - \int_a^x f = \int_x^y f.$$

Тогда  $\frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \frac{1}{y - x} \int_x^y f = f(c)$  для некоторого  $c \in (x, y)$  по интегральной теореме о среднем.

Проверяем определение по Гейне. Берем  $y_n > x$  и  $y_n \rightarrow x$ . Тогда  $\frac{\Phi(y_n) - \Phi(x)}{y_n - x} = f(c_n)$ , где  $c_n \in (x, y_n)$ ,  $x < c_n < y_n \rightarrow x \Rightarrow c_n \rightarrow x \Rightarrow$  в силу непрерывности  $f$   $f(c_n) \rightarrow f(x)$ .  $\square$

**Следствие.**  $\Psi'(x) = -f(x) \quad \forall x \in [a, b]$ .

**Доказательство.**  $\Psi(x) = \int_x^b f - \Phi(x) = C - \Phi(x) \Rightarrow \Psi' = (C - \Phi(x))' = -\Phi'(x) = -f(x)$ .  $\square$

**Теорема 6.2.** Непрерывная на промежутке функция имеет первообразную.

**Доказательство.**  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\text{Возьмём } c \in (a, b) \text{ Рассмотрим } F(x) := \begin{cases} \int_c^x f & \text{при } x \geq c \\ -\int_x^c f & \text{при } x \leq c \end{cases}.$$

Утверждаем, что  $F(x)$  — первообразная  $f(x)$ . Если  $x > c$ , то  $F'(x) = f(x)$ . Если  $x < c$ , то  $F'(x) = -(-f(x)) = f(x)$ . Если  $x = c$ , то, так как производные слева и справа считаются правильно и равны, то и в этой точке производная есть  $f(x)$ .  $\square$

**Теорема 6.3** (Формула Ньютона-Лейбница).  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  и  $F$  — её первообразная. Тогда  $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ .

**Доказательство.**  $\Phi(x) = \int_a^x f$  — первообразная и  $F(x) = \Phi(x) + C$  (знаем, что две первообразные отличаются на константу)

$$\text{Тогда } F(b) - F(a) = (\Phi(b) + C) - (\Phi(a) + C) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f \quad \square$$



И ровно в этот момент мы поняли, что от выбора псевдоплощади не зависим, поскольку первообразные от них не зависят (отсылка к первому билету/началу конспекта про псевдоплощади)

**Определение 6.3.**  $F|_a^b := F(b) - F(a)$

## Билет 07

**Теорема 7.1** (Линейность интеграла).  $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ .

**Доказательство.** Пусть  $F, G$  — первообразные для  $f, g$ .

Тогда  $\alpha F + \beta G$  — первообразная для  $\alpha f + \beta g$ . Тогда воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b \alpha f + \beta g = (\alpha F + \beta G)|_a^b = \alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(a) - \beta G(a) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

□

**Теорема 7.2** (Формула интегрирования по частям). Пусть  $f, g \in C^1[a, b]$ .

$$\text{Тогда } \int_a^b f g' = f g|_a^b - \int_a^b f' g.$$

**Доказательство.** Докажем при помощи формулы Ньютона-Лейбница. Пусть  $H$  — первообразная  $f'g$ . Тогда  $fg - H$  — первообразная для  $fg'$ .

Проверим данный факт:  $(fg - H)' = f'g + fg' - f'g = fg'$ . А значит нам можно воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница.

$$\int_a^b f g' = (fg - H)|_a^b = fg|_a^b - H|_a^b = fg|_a^b - \int_a^b f' g.$$

□

**Замечание Соглашение.** Если  $a > b$ , то  $\int_a^b f := -\int_b^a f$ .

Мотивация: Если  $F$  — первообразная, то  $\int_a^b f = F|_a^b$ .

**Теорема 7.3** (Формула замены переменной). Пусть  $f \in C[a, b]$ ,  $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ ,  $\varphi \in C^1[c, d]$ ,  $p, q \in [c, d]$ .

$$\text{Тогда } \int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx.$$

**Доказательство.** Пусть  $F$  — первообразная  $f$ . Тогда  $\int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx = F|_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} = F \circ \varphi|_p^q$ . Заметим, что  $F \circ \varphi$  — первообразная для  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ .

Проверим это:  $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ .

$$\text{Тогда: } \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx = F \circ \varphi|_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} = \int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

□

**Пример.**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t}{1 + \sin^4 t} dt. \quad (1)$$

Произведем замену  $\varphi(t) = \sin^2 t$ ,  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $\varphi'(t) = 2 \sin t \cos t = \sin 2t$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$ :

$$(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi'(t)}{1 + (\varphi(t))^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

## Билет 08

**Пример.**  $W_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt = (1)$  Докажем этот момент:

Положим  $x = \frac{\pi}{2} - t =: \varphi(t)$ ,  $\varphi'(t) = -1$ ,  $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$ .

$$\text{Тогда } (1) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \varphi(t) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n x dx$$

Частные случаи  $W_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

Общее решение:  $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \cdot (\cos x)' dx = (*)$ . Воспользовались тем, что  $\sin x = -(\cos x)'$ ,  $f'(x) = (n-1) \sin^{n-2} x \cdot \cos x$ .

Тогда получаем:

$$\begin{aligned} (*) &= - \left( \underbrace{\sin^{n-1} x \cdot \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \underbrace{\cos^2 x}_{=1-\sin^2 x} dx \right) = \\ &= (n-1) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \right) = (n-1)(W_{n-2} - W_n). \end{aligned}$$

Посчитаем для четных:  $W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot W_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} W_{2n-4} = \dots = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}$ , где  $k!!$  — произведение натуральных чисел  $\leq k$  той же четности, что и  $k$ .

Для нечетных:  $W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} W_{2n-3} = \dots = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} W_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$

## Билет 09

**Теорема 9.1** (Формула Валлиса).

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

**Доказательство.**  $\sin^n x \geq \sin^{n+1} x$  на  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Тогда  $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x dx = W_{n+1}$ .

Заметим, что  $W_{2n+2} \leq W_{2n+1} \leq W_{2n} \iff \frac{\pi}{2} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \leq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ . Поделим на  $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ :

$$\frac{\pi}{2} \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)((2n-1)!!)^2} \leq \frac{\pi}{2} \implies \lim \left( \frac{(2n)!!}{\sqrt{(2n+1)(2n-1)!!}} \right)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Последний переход — по двум милиционерам, т.к. при  $n \rightarrow +\infty$   $\frac{2n+1}{2n+2} \rightarrow 1$  □

**Следствие.**

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

**Доказательство.** Заметим, что  $(2n)! = (2n)!! \cdot (2n-1)!!$ , а  $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n) = 2^n \cdot n!$ . Тогда подставим в Спкку:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{\frac{(2n)!!}{2^n} \frac{(2n)!!}{2^n}} = 4^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

При этом из Валлиса, заметим, что  $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2n} = \sqrt{\pi n}$ . А значит все сойдется. □

## Билет 10

**Теорема 10.1** (Формула Тейлора (с остатком в интегральной форме)). Пусть  $f \in C^{n+1}[a, b]$ ,  $x, x_0 \in [a, b]$ . Тогда:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

**Доказательство.** Индукция по  $n$ :

- База.  $n = 0$ ,  $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt = f(x_0) + f|_{x_0}^x$
- Переход.  $n \rightarrow n + 1$ .
- Доказательство.  $f(x) = T_n(x) + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n}_{g'} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_f dt$ . Проинтегрируем интеграл по ча-

стям.  $g(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}$ .

Подставим:  $\int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \cdot f^{(n+1)}(t) \Big|_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^x \frac{1}{n+1} (x - t)^{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t) dt =$   
 $\underbrace{\frac{1}{n+1} (x - x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(x_0)}_{\text{новый член Тейлора!}} + \int_{x_0}^x \frac{1}{n+1} (x - t)^{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t) dt$

Вспомнив, что у нас там ещё был  $\frac{1}{n!}$  перед исходным интегралом заметим, что мы действительно получили новый член суммы и новый интеграл с  $\frac{1}{(n+1)!}$ , что доказывает индукционный переход.

□

# Билет 11

**Пример.**

$$H_j := \frac{1}{j!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \cos x dx. \quad (2)$$

**Свойство 1.**  $0 < H_j \leq \frac{1}{j!} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{2j} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{\left( \frac{\pi}{2} \right)^{2j}}{j!}.$

**Свойство 2.**  $\forall c > 0: c^j \cdot H_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0. 0 < c^j H_j \leq \frac{\left( \frac{\pi}{2} \right)^{2j} \cdot c^j}{j!} = \frac{\left( \frac{\pi^2}{4} c \right)^j}{j!} \rightarrow 0.$

**Свойство 3.**  $H_0 = 1, H_1 = 2$  (упражнение).

**Свойство 4.**  $H_j = (4j - 2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$ , при  $j \geq 2$ .

**Доказательство.**

$$j! H_j = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j (\sin x)' dx \quad (3)$$

Заметим, что  $\left( \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \right)' = j \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} \cdot (-2x)$ . Тогда:

$$\begin{aligned} (3) &= \underbrace{\left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \sin x \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}}_{=0} + 2j \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} x \underbrace{\sin x}_{=(-\cos x)'} dx = \\ &= 2j \left( \underbrace{\left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} \cdot x \cdot (-\cos x) \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( (j-1) \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-2} (-2x)x + \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} (-\cos x) \right) dx \right) \\ &= 2j \left( (j-1)! H_{j-1} - 2(j-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-2} x^2 \cos x dx \right). \end{aligned}$$

В процессе мы дважды интегрировали по частям, а теперь нужно избавиться во втором слагаемом от  $x^2$ . Для этого заметим, что  $x^2 = \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)$ , подставим и разобьём интеграл на два, которые есть  $H_{j-2}$  и  $H_{j-1}$  с нужными коэффициентами:

$$j! H_j = 2j(j-1)! H_{j-1} - 4j(j-1) \left( ((j-2)! \left( \frac{\pi}{2} \right)^2) H_{j-2} - (j-1)! H_{j-1} \right)$$

Откуда с легкостью получаем  $j! H_j = 2j! H_{j-1} - \pi^2 j! H_{j-2} + 4(j-1)j! H_{j-1} \iff H_j = (4j - 2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$ .

**Свойство 5.** Существует многочлен  $P_n$  с целыми коэффициентами степени  $\leq n$ , такой что  $H_j = P_j(\pi^2)$ .

**Доказательство.**  $P_0 \equiv 1, P_1 \equiv 2, P_n(x) = (4n - 2)P_{n-1}(x) - xP_{n-2}(x)$ . □

□

**Теорема 11.1** (Ламберта, доказательство: Эрмит). Числа  $\pi$  и  $\pi^2$  иррациональные.

**Доказательство.** От противного. Пусть  $\pi^2$  — рационально. Тогда пусть  $\pi^2 = \frac{m}{n}$ . Тогда  $H_j = P_j(\frac{m}{n}) = \frac{\text{целое число}}{n^j} > 0$ .

$n^j H_j = \text{целое число} > 0 \Rightarrow n^j H_j \geq 1$

Но, по свойству 2, при  $j \rightarrow +\infty$   $n^j H_j \rightarrow 0$ , противоречие. □

## Билет 12

**Определение 12.1.**  $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  равномерно непрерывна на  $E$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E: |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

**Определение 12.2.**  $f$  непрерывна во всех точках из  $E$ :

$\forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in E: |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Концептуальное отличие в том, что в первом случае у нас  $\delta(\varepsilon)$ , а во втором —  $\delta(x, \varepsilon)$ , т.е. при равномерной непрерывности у нас есть общая дельта по эпсилону на всю область, а при непрерывности во всех точках для каждой точки своё  $\delta$  по  $\varepsilon$

**Пример.**  $\sin x$  и  $\cos x$  равномерно непрерывны на  $\mathbb{R}$ .

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \Rightarrow \delta = \varepsilon$  подходит.  $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$ .

**Пример.**  $f(x) = x^2$  не является равномерно непрерывной на  $\mathbb{R}$ . Рассмотрим  $\varepsilon = 1$ , никакое  $\delta > 0$  не подходит.  $x$  и  $x + \frac{\delta}{2}$ .  $f(x + \frac{\delta}{2}) - f(x) = (x + \frac{\delta}{2})^2 - x^2 = \dots = \delta x + \frac{\delta^2}{4} > \delta x$ . При  $x = \frac{1}{\delta}$  противоречие.

**Теорема 12.1** (Теорема Кантора). Пусть  $f \in C[a, b]$ , тогда  $f$  равномерно непрерывна на  $[a, b]$ .

**Доказательство.** Берем  $\varepsilon > 0$  и предположим, что  $\delta = \frac{1}{n}$  не подходит, то есть  $\exists x_n, y_n \in [a, b]: |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$  и  $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ . По теореме Больцано-Вейерштрасса у последовательности  $x_n$  есть сходящаяся подпоследовательность  $x_{n_k} \rightarrow c$ , то есть  $\lim x_{n_k} = c \in [a, b]$ .

$\underbrace{x_{n_k} - \frac{1}{n_k}}_{\rightarrow c} < y_{n_k} < \underbrace{x_{n_k} + \frac{1}{n_k}}_{\rightarrow c} \Rightarrow \lim y_{n_k} = c$ . Но  $f$  непрерывна в точке  $c \Rightarrow \lim f(x_{n_k}) = f(c) = \lim f(y_{n_k}) \Rightarrow \lim (f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = 0$ , но  $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$ . □

**Замечание.** Для интервала или полуинтервала неверно.  $f(x) = \frac{1}{x}$  на  $(0; 1]$ . Докажем, что нет равномерной непрерывности на  $(0; 1]$ .

Пусть  $\varepsilon = 1$  и  $\delta > 0$ . Пусть  $0 < x < \delta$ ,  $y = \frac{x}{2}$ ,  $|x - y| = \frac{x}{2} < \delta$ . Тогда  $f(y) - f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} > 1$ .

## Билет 13

**Определение 13.1.** Пусть  $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Тогда  $\omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| \mid \forall x, y \in E, |x - y| \leq \delta\}$  — модуль непрерывности  $f$ .

**Свойства.** 1.  $\omega_f(0) = 0$ ,

2.  $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x - y|)$ .

3.  $\omega_f \uparrow$ .

4. Если  $f$  — липшицева функция с константой  $L$ , то  $\omega_f(\delta) \leq L\delta$ .

В частности, если  $|f'(x)| \leq L \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$ .

5.  $f$  равномерна и непрерывна на  $E \iff \omega_f$  непрерывна в нуле  $\iff \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0$ .

**Доказательство.** •  $1 \rightarrow 2$ .  $\forall \varepsilon > 0 \exists \gamma > 0 \forall x, y \in E: |x - y| < \gamma \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

Возьмем  $\delta < \gamma$ . Тогда  $|x - y| \leq \delta \implies |x - y| < \gamma \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \implies \sup \leq \varepsilon$ .

Тогда с одной стороны  $\omega_f \geq 0$ , а с другой ограничена  $\varepsilon$ . Следовательно предел  $\omega_f$  равен 0.

•  $2 \rightarrow 1$ . Из  $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0$ . Возьмем  $\delta > 0$  для  $\omega_f(\delta) < \varepsilon$ :  $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(\delta) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon$ ,  $\forall x, y \in E: |x - y| \leq \delta$ .

□

6.  $f \in C[a, b] \iff \omega_f$  непрерывен в нуле  $\iff \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0$ .

**Доказательство.** Для функции на отрезке равномерная непрерывность  $\iff$  непрерывность  $\iff$  теорема Кантора. □

## Билет 14

**Определение 14.1.** Пусть есть  $[a, b]$ . Тогда дробление (разбиение, пунктир) отрезка: набор точек:  $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ .

**Определение 14.2.** Ранг дробления:  $\max_{k=1,2,\dots,n} (x_k - x_{k-1}) =: |\tau|$ ,  $\tau = (x_0, x_1, \dots, x_n)$

**Определение 14.3.** Оснащение дробления — набор точек  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , такой что  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ .

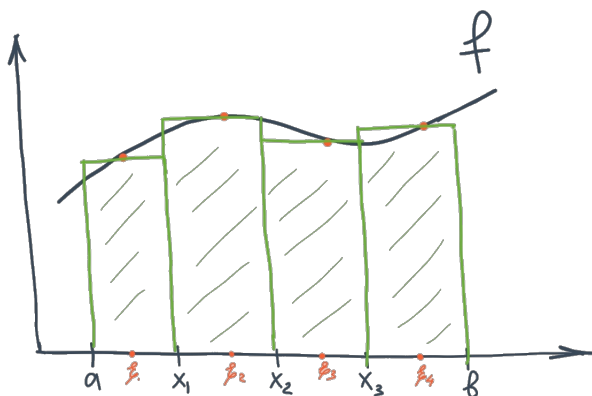
**Определение 14.4.** Интегральная сумма (сумма Римана)  $S(f, \tau, \xi) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ ,

По факту просто сумма площадей прямоугольников под графиком

## Билет 15

**Теорема 15.1** (Теорема об интегральных суммах). Пусть  $f \in C[a, b]$ ,

тогда  $\left| \int_a^b f(x) dx - S(f, \tau, \xi) \right| \leq (b - a)\omega_f(|\tau|)$ .



**Доказательство.**

$$\Delta := \int_a^b f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt - \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k) dt = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(\xi_k)) dt.$$

$$|\Delta| \leq \sum \left| \int \dots \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(\xi_k)| dt \leq \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \omega_f(|\tau|) = (b - a) \omega_f(|\tau|).$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(\xi_k)| dt \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_f(|\tau|) dt = (x_k - x_{k-1}) \omega_f(|\tau|).$$

□

**Следствие.**  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall$  дробления ранга  $\leq \delta \forall$  оснащения  $\left| \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| < \varepsilon$

**Следствие.** Если  $\tau_n$  — последовательность дроблений, ранг которых  $\rightarrow 0$ , то  $S(f, \tau_n, \xi_n) \rightarrow \int_a^b f$ .

**Пример.**  $S_p(n) := 1^p + 2^p + \dots + n^p$ . Посчитаем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_p(n)}{n^{p+1}}$ .

Возьмем  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$   $f(t) = t^p$   $\frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p = S(f, \tau, \xi)$ , где  $x_k = \xi_k = \frac{k}{n}$ .

Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \int_0^1 t^p dt = \frac{t^{p+1}}{p+1} \Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{p+1}$

**Определение 15.1.** Пусть  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , тогда  $f$  интегрируема по Риману, если  $\exists I \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall$  дробления ранга  $< \delta \forall$  его оснащения  $|S(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon$ .

$I$  — интеграл по Риману  $\int_a^b f$ .

## Билет 16

**Лемма.**  $f \in C^2[\alpha, \beta]$ . Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt - \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}(\beta - \alpha) = -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t)(t - \alpha)(\beta - t) dt.$$

**Доказательство.** Пусть  $\gamma := \frac{\alpha + \beta}{2}$ . Тогда:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)(t - \gamma)' dt = f(t)(t - \gamma) \Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)(t - \gamma) dt.$$

Заметим, что  $f(t)(t - \gamma) \Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} = f(\beta)(\beta - \gamma) - f(\alpha)(\alpha - \gamma) = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}(\beta - \alpha)$ . Продолжим:

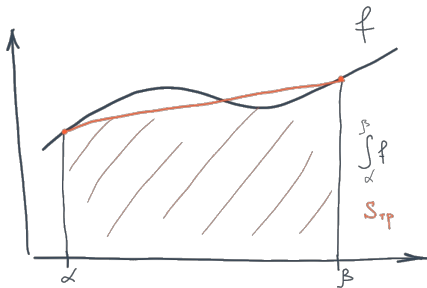
$$\begin{aligned} \text{левая часть} &= - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)(t - \gamma) dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)((t - \alpha)(\beta - t))' dt = \\ &= \frac{1}{2} f'(t)(t - \alpha)(\beta - t) \Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t)(t - \alpha)(\beta - t) dt. \end{aligned}$$

Переход к  $((t - \alpha)(\beta - t))'$ :

$$((t - \alpha)(\beta - t))' = (-t^2 + (\alpha + \beta)t - \alpha\beta)' = -2t + (\alpha + \beta) = -2(t - \gamma).$$

□

**Замечание.**  $\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}(\beta - \alpha)$  — площадь трапеции:



**Теорема 16.1** (Оценка погрешности в формуле трапеции). Пусть  $f \in C^2[a, b]$ .

Тогда :

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) \right| \leq \frac{|T|^2}{8} \int_a^b |f''|$$

**Доказательство.**  $\Delta := \int_a^b f(t) dt - \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1})$

$$|\Delta| \leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt - \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) \right| = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t)(t - x_{k-1})(x_k - t) dt \right|. \quad (4)$$



Тогда вспомним, что  $(t - x_{k-1})(x_k - t) \leq \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{2}\right)^2 \leq \frac{|\tau|^2}{4} \implies (4) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)| \cdot \frac{|\tau|^2}{4} dt =$

$$\frac{|\tau|^2}{8} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''| = \frac{|\tau|^2}{8} \cdot \int_a^b |f''|$$

□

**Замечание.** Пусть разбиение на  $n$  равных отрезков  $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} = |\tau|$ :

$$\sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} = \frac{b-a}{n} \left( \frac{f(x_0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(x_n)}{2} \right).$$

**Замечание.** Возьмем разбиение на равные отрезки и  $\xi_k = x_k$ :

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

## Билет 17

**Теорема 17.1** (формула Эйлера-Маклорена). Пусть  $f \in C^2[m, n]$ , тогда

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \frac{f(m) + f(n)}{2} + \int_m^n f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^n f''(t) \{t\} (1 - \{t\}) dt.$$

**Доказательство.** Подставим  $\alpha = k$  и  $\beta = k+1$  в лемму:

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} f(t) dt &= \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \frac{1}{2} \int_k^{k+1} f''(t)(t-k)(k+1-t) dt = \\ &= \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \frac{1}{2} \int_k^{k+1} f''(t) \{t\} (1 - \{t\}) dt. \end{aligned}$$

Дальше суммируем по  $k$  от  $m$  до  $n-1$ :

$$\int_m^n f(t) dt = \sum_{k=m}^{n-1} \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \frac{1}{2} \int_m^n f''(t) \{t\} (1 - \{t\}) dt.$$

Заметим, что  $\sum_{k=m}^{n-1} \frac{f(k) + f(k+1)}{2} = \frac{f(m) + f(n)}{2} + \sum_{k=m+1}^{n-1} f(k)$ . И тогда:

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \frac{f(m) + f(n)}{2} + \int_m^n f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^n f''(t) \{t\} (1 - \{t\}) dt.$$

□

## Билет 18

**Пример.**  $S_p(n) = 1^p + 2^p + \dots + n^p$ ,  $f(t) = t^p$ ,  $m = 1$ ,  $f''(t) = p(p-1)t^{p-2}$ .

$$S_p(n) = \frac{1+n^p}{2} + \int_1^n t^p dt + \frac{1}{2} \int_1^n p(p-1)t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})dt.$$

При  $p \in (-1, 1)$   $\int_1^n t^p dt = \frac{t^{p+1}}{p+1} \Big|_1^n = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \mathcal{O}(1)$ .

$$\int_1^n t^{p-2} \underbrace{\{t\}(1-\{t\})}_{\leq \frac{1}{4}} dt \leq \frac{1}{4} \int_1^n t^{p-2} dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{p-1}}{p-1} \Big|_1^n = \frac{1}{4} \cdot \frac{n^{p-1}-1}{p-1} = \mathcal{O}(1).$$

То есть  $S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \mathcal{O}(1)$ .

При  $p > 1$   $S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \mathcal{O}(n^{p-1})$ .

**Пример.** Гармонические числа:  $H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ .  $m = 1$ ,  $f(t) = \frac{1}{t}$ ,  $f''(t) = \frac{2}{t^3}$ .

$$H_n = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} + \int_1^n \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} \int_1^n \frac{2}{t^3} \{t\}(1-\{t\})dt$$

Откуда получаем ( $a_n := \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^3} dt$ ;  $\int_1^n \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_1^n = \ln n$ ):

$$H_n = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a_n.$$

Заметим, что  $a_{n+1} = a_n + \int_n^{n+1} \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^3} dt > a_n$ . То есть  $a_n \uparrow$ . Причем  $a_n \leq \int_1^n \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2} \Big|_1^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} < \frac{1}{2}$ .

А значит  $a_n$  имеет предел, а значит  $a_n = a + o(1)$ .

Вывод:  $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ , где  $\gamma \approx 0.5772156649$  — постоянная Эйлера.

**Замечание.**  $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$  — точная формула.

## Билет 19

**Пример Формула Стирлинга.**  $m = 1$ ,  $f(t) = \ln t$ ,  $f''(t) = -\frac{1}{t^2}$ .

$$\ln n! = \sum_{k=1}^n \ln k = \underbrace{\frac{\ln 1 + \ln n}{2}}_{=\frac{1}{2} \ln n} + \underbrace{\int_1^n \ln t dt}_{=t \ln t - t \Big|_1^n = n \ln n - n + 1} - \underbrace{\frac{1}{2} \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2} dt}_{:=b_n} \Rightarrow \ln n! = \frac{1}{2} \ln n + n \ln n - n + 1 - b_n.$$

Посмотрим на  $b_n$ :

$$b_n \leq \frac{1}{2} \int_1^n \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{t}\right) \Big|_1^n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2} \implies b_n = \underbrace{b}_{=\lim b_n} + o(1).$$

А значит  $\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + (1 - b) + o(1)$ .

Можем найти  $b$ , для этого представим обе части как экспоненты:  $n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{1-b} e^{o(1)} \sim n^n e^{-n} \sqrt{n} C$ .

Вспомним (из следствия формулы Валлиса):  $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$ . А еще знаем, что  $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2nC}}{(n^n e^{-n} \sqrt{nC})^2} = \frac{4^n \sqrt{2}}{\sqrt{nC}}$ .

Тогда получаем, что  $\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{4^n \sqrt{2}}{\sqrt{nC}} \implies C \sim \frac{4^n \sqrt{2}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} = \sqrt{2\pi}$ .

Итоговый результат (Формула Стирлинга):

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + o(1).$$

*Замечание.* Если посчитать точнее, то получим  $\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + \mathcal{O}(\frac{1}{n})$ .

## Билет 20

**Определение 20.1.** Пусть  $-\infty < a < b \leq +\infty$  и  $f \in C[a, b)$ .

Тогда определим  $\int_a^{\rightarrow b} f := \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f$  (если он существует).

Если  $-\infty \leq a < b < +\infty$ ,  $f \in C(a, b]$ , то  $\int_{\rightarrow a}^b f := \lim_{A \rightarrow a+} \int_A^b f$  (опять же, если он существует).

*Замечание.* Если  $b < +\infty$  и  $f \in C[a, b]$ , то определение не дает ничего нового:

$$\int_a^b f = \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f$$

$$\left| \int_a^b f - \int_a^B f \right| = \left| \int_B^b f \right| \leq M(b - B) \rightarrow 0, M = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

**Пример.** 1.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_1^y \frac{dx}{x^p} = \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ \text{при } p \neq 1}} -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} \Big|_{x=1}^{x=y} = \frac{1}{p-1} - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{(p-1)y^{p-1}} = \frac{1}{p-1}$  при  $p > 1$ ,

при  $p < 1$  получаем  $+\infty$ , а при  $p = 1$   $\lim_{y \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y = +\infty$

То есть, при  $p \leq 1$   $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = +\infty$ ,

при  $p > 1$   $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$ .

2.  $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{y \rightarrow 0+} \int_y^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{y \rightarrow 0+} -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} \Big|_{x=y}^{x=1} = -\frac{1}{p-1} + \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{y^{1-p}}{p-1} = \frac{1}{1-p}$  при  $p < 1$ , при  $p > 1$  получаем  $+\infty$ , а вот при  $p = 1$   $\lim_{y \rightarrow 0+} \ln x \Big|_y^1 = \lim_{y \rightarrow 0+} -\ln y = +\infty$ .

То есть, при  $p < 1$   $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$ ,

при  $p \geq 1$   $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = +\infty$ .

**Замечание.** Если  $f \in C[a, b]$  и  $F$  — его первообразная, то  $\int_a^b f = \lim_{B \rightarrow b-} F(B) - F(a)$ .

Если  $f \in C(a, b]$  и  $F$  — его первообразная, то  $\int_a^b f = F(b) - \lim_{A \rightarrow a+} F(A)$ .

**Доказательство.** Очевидно по формуле Ньютона-Лейбница. □

**Определение 20.2.**  $F \Big|_a^b := \lim_{B \rightarrow b-} F(B) - F(a)$ .

**Определение 20.3.**  $\int_a^{\rightarrow b} f$  сходится, если  $\lim$  в его определении существует и конечен. Иначе расходится.

**Теорема 20.1** (Критерий Коши). Пусть  $-\infty < a < b \leq +\infty$ ,  $f \in C[a, b]$ .

Тогда  $\int_a^{\rightarrow b} f$  сходится  $\iff \forall \varepsilon \exists c \in (a, b) : \forall A, B \in (c, b) \left| \int_A^B f \right| < \varepsilon$ .

**Замечание.** 1. Если  $b = +\infty$  это означает, что  $\forall \varepsilon \exists c > a \forall A, B > c : \left| \int_A^B f \right| < \varepsilon$ .

2. Если  $b < +\infty$  это означает, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A, B \in (b - \delta; b) : \left| \int_A^B f \right| < \varepsilon$ .

**Доказательство.** Для  $b < +\infty$  (то есть для конечной точки).

• " $\Rightarrow$ "  $\int_a^b f$  сходится  $\implies \exists$  конечный  $I := \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f$ , обозначим  $\int_a^B f$  за  $g(B)$ . Воспользуемся критерием Коши для функций:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \begin{matrix} \forall B \in (b - \delta, b) & |g(B) - I| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall A \in (b - \delta, b) & |g(A) - I| < \frac{\varepsilon}{2} \end{matrix} \implies |g(B) - g(A)| \leq |g(B) - I| + |I - g(A)| < \varepsilon$$

• " $\Leftarrow$ "  $\int_a^B f =: g(B)$ .

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A, B \in (b - \delta, b) : |g(B) - g(A)| < \varepsilon$  — а это условие из критерия Коши для  $\lim_{B \rightarrow b-} g(B)$ . □

**Замечание.** Если существуют  $A_n, B_n \in [a, b) : \lim A_n = \lim B_n = b : \int_{A_n}^{B_n} f \not\rightarrow 0$ , то  $\int_a^b f$  расходится.

**Доказательство.** Возьмем  $A_{n_k}$  и  $B_{n_k} : \left| \int_{A_{n_k}}^{B_{n_k}} f \right| \rightarrow C > 0 \implies \left| \int_{A_{n_k}}^{B_{n_k}} f \right| > \frac{C}{2}$  при больших  $k$ . Но это противоречит критерию Коши. □

## Билет 21

**Свойства несобственных интегралов.** 1. Аддитивность. Пусть  $f \in C[a, b)$ ,  $c \in (a, b)$ .

Если  $\int_a^b f$  сходится, то  $\int_c^b f$  сходится и  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ .

2. Если  $\int_a^b f$  сходится, то  $\lim_{c \rightarrow b-} \int_c^b f = 0$

3. Линейность  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  и  $\int_a^b f$  и  $\int_a^b g$  сходятся. Тогда  $\int_a^b (\alpha f + \beta g)$  сходится и  $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ .

4. Монотонность. Пусть  $\int_a^b f$  и  $\int_a^b g$  существуют в  $\overline{R}$  и  $f \leq g$  на  $[a, b)$ . Тогда  $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ .

5. Интегрирование по частям.  $f, g \in C^1[a, b) \implies \int_a^b f g' = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g$ .

6. Замена переменных.  $\varphi: [\alpha, \beta) \rightarrow [a, b)$ ,  $\varphi \in C^1[\alpha, \beta)$  и  $\exists \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \varphi(\gamma) =: \varphi(\beta-)$  и  $f \in C[a, b)$ .

Тогда  $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(x) dx$ . «Если существует один из  $\int$ , то существует второй и они равны»

**Доказательство.** 1.  $\int_a^b f = \lim_{B \rightarrow b-} F(B) - F(a) \implies \lim_{B \rightarrow b-} F(B)$  существует и конечен  $\implies$

$\int_c^b f = \lim_{B \rightarrow b-} F(B) - F(c)$  — сходится ( $F(c)$  — просто число какое-то).

$\int_a^b f = \lim_{B \rightarrow b-} F(B) - F(a) = \lim_{B \rightarrow b-} F(B) - F(c) + F(c) - F(a) = \int_c^b f + \int_a^c f$ .

2.  $\int_c^b f = \int_a^b f - \int_a^c f \xrightarrow{c \rightarrow b-} \int_a^b f \Rightarrow$  разность  $\rightarrow 0$

3.  $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B (\alpha f + \beta g) = \lim_{B \rightarrow b-} (\alpha \int_a^B f + \beta \int_a^B g) = \alpha \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f + \beta \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ .

4.  $\int_a^B f \leq \int_a^B g$  (монотонность собственных интегралов), а дальше предельный переход:

$\lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f \leq \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B g$

5.  $a < B < b$  и пишем формулу интегрирования по частям:  $\int_a^B f g' = f g \Big|_a^B - \int_a^B f' g$  и переходим

к пределу при  $B \rightarrow b-$ . Так как  $f, g$  — непрерывные функции, то  $\lim_{B \rightarrow b-} f g \Big|_a^B = f g \Big|_a^b$  и получаем, что нужно.

6.  $F(y) := \int_{\varphi(\alpha)}^y f(x) dx$ ,  $\Phi(\gamma) := \int_{\alpha}^{\gamma} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ . Знаем, что  $F(\varphi(\gamma)) = \Phi(\gamma)$  при  $\alpha < \gamma < \beta$ .

Пусть существует правый  $\int$ , то есть  $\exists \lim_{y \rightarrow \varphi(\beta-)} F(y)$ . Возьмем  $\gamma_n \nearrow \beta \implies \varphi(\gamma_n) \rightarrow \varphi(\beta-)$   $\implies \Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)) \rightarrow \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(x)dx$ . При этом  $\Phi(\gamma_n) \rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ .

Пусть существует левый  $\int$ , то есть  $\exists \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma)$ . Докажем, что  $\exists$  правый  $\int$ . При  $\varphi(\beta-) < b$  нечего доказывать.

Пусть  $\varphi(\beta-) = b$ . Тогда возьмем  $b_n \nearrow b$ . Можно считать, что  $b_n \in [\varphi(\alpha), b)$ . Тогда  $\exists \gamma_n \in [\alpha, \beta) : \varphi(\gamma_n) = b_n$ . Докажем, что  $\gamma_n \rightarrow \beta$ . Пусть это не так. Тогда найдется  $\gamma_{n_k} \rightarrow \tilde{\beta} < \beta \implies \varphi(\gamma_{n_k}) \rightarrow \varphi(\tilde{\beta}) < b$  по непрерывности  $\varphi$  в точке  $\tilde{\beta}$ . Противоречие.

Итак,  $\gamma_n \rightarrow \beta$ ,  $F(b_n) = F(\varphi(\gamma_n)) = \Phi(\gamma_n) \rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ .

□

**Замечание к третьему свойству.** 1. Если  $\int_a^b f$  сходится, а  $\int_a^b g$  расходится, то  $\int_a^b (f+g)$  расходится. Доказательство от противного, пусть интеграл сходится, тогда  $g = (f+g) - f \implies \int_a^b g$  сходится.

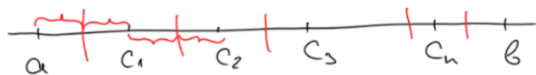
2. Если  $\int_a^b f$  и  $\int_a^b g$  расходятся, то  $\int_a^b (f+g)$  может сходиться.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$  и  $\int_1^{+\infty} -\frac{dx}{x}$  расходятся.

**Замечание к шестому свойству.**  $\int_a^b f(x)dx$ . Сделаем замену  $x = b - \frac{1}{t} = \varphi(t)$ ,  $\varphi'(t) = \frac{1}{t^2}$ ,  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\alpha = \frac{1}{b-a}$ .

Тогда  $\int_a^b f(x)dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(b - \frac{1}{t}) \frac{1}{t^2} dt$ .

**Определение 21.1.** Пусть  $f$  непрерывна на  $(a, b)$  за исключением некоторого количества точек  $c_1 < c_2 < \dots < c_n$ .

$\int_a^b f$  сходится, если сходятся интегралы по всем маленьким отрезкам (содержащим только одну выколотую точку).



## Билет 22

**Теорема 22.1.** Пусть  $f \in C[a, b]$  и  $f \geq 0$ .

Тогда  $\int_a^b f$  сходится  $\iff F(y) := \int_a^y f$  ограничена сверху.

**Доказательство.**  $f \geq 0 \implies F$  монотонно возрастает.  $\int_a^b f$  сходится  $\iff \exists$  конечный  $\lim_{y \rightarrow b-} F(y) \iff F$  ограничена сверху.  $\square$

**Замечание.**  $f \in C[a; b), f \geq 0$ . Если  $\int_a^b f$  расходится, это означает, что  $\int_a^b f = +\infty$ .

**Следствие Признак сравнения.**  $f, g \in C[a, b), f, g \geq 0$  и  $f \leq g$ .

1. Если  $\int_a^b g$  сходится, то и  $\int_a^b f$  сходится.
2. Если  $\int_a^b f$  расходится, то и  $\int_a^b g$  расходится.

**Доказательство.**  $F(y) := \int_a^y f$  и  $G(y) := \int_a^y g$ .

1. Пусть  $\int_a^b g$  сходится  $\implies G(y)$  ограничена, но  $F(y) \leq G(y) \implies F(y)$  ограничена  $\implies \int_a^b f$  сходится.
2. От противного. Пусть  $\int_a^b g$  сходится  $\Rightarrow$  см. первый пункт — противоречие.

 $\square$ 

**Замечание.** 1. Неравенство  $f \leq g$  может выполняться лишь для аргументов, близких к  $b$ .

2. Неравенство  $f \leq g$  можно заменить на  $f = \mathcal{O}(g)$ .

$$f = \mathcal{O}(g) \implies f \leq cg. \int_a^b g \text{ сходится} \implies \int_a^b cg \text{ сходится} \implies \int_a^b f \text{ — сходится.}$$

3. Если  $f = \mathcal{O}(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$  для  $\varepsilon > 0$ , то  $\int_a^{+\infty} f$  — сходится.

$$f \in C[a, +\infty), g(x) = \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} \text{ и можно считать, что } a \geq 1 \int_1^{+\infty} g(x) dx \text{ — сходится.}$$

**Следствие.**  $f, g \in C[a, b), f, g \geq 0$  и  $f(x) \sim g(x)$  при  $x \rightarrow b-$ . Тогда  $\int_a^b f$  и  $\int_a^b g$  ведут себя одинаково (либо оба сходятся, либо оба расходятся).

**Доказательство.**  $f \sim g \implies f = \varphi \cdot g$ , где  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow b-} 1 \implies$  в окрестности  $b$   $\frac{1}{2} \leq \varphi \leq 2 \implies f \leq 2g \wedge g \leq 2f$  в окрестности  $b \implies$  из сходимости  $\int_a^b g$  следует сходимость  $\int_a^b f$ , и наоборот.  $\square$

## Билет 23

**Определение 23.1.**  $f \in C[a, b]$ .  $\int_a^b f$  абсолютно сходится, если  $\int_a^b |f|$  сходится.

**Теорема 23.1.**  $\int_a^b f$  сходится абсолютно  $\implies \int_a^b f$  сходится.

**Доказательство.**  $f = f_+ - f_-$ ,  $|f| = f_+ + f_-$ .  $|f| \geq f_{\pm} \geq 0$ . Если  $\int_a^b f$  сходится абсолютно  $\implies \int_a^b |f|$  сходится  $\implies \int_a^b f_{\pm}$  сходится  $\implies \int_a^b f = \int_a^b f_+ - \int_a^b f_-$  сходится.  $\square$

**Теорема 23.2** (Признак Дирихле).  $f, g \in C[a, +\infty)$ . Если

1.  $f$  имеет ограниченную первообразную на  $[a, +\infty)$  (то есть  $\left| \int_a^y f(x) dx \right| \leq K \quad \forall y$ )
2.  $g$  монотонна
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

$\implies$  то  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$  сходится.

**Доказательство.** Только для случая  $g \in C^1[a; +\infty)$ .

Надо доказать, что  $\exists$  конечный  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_a^y f(x)g(x)dx$ ,  $F(y) := \int_a^y f(x)dx$ .

$$\int_a^y f(x)g(x)dx = \int_a^y F'(x)g(x)dx = F(x)g(x) \Big|_a^y - \int_a^y F(x)g'(x)dx = F(y)g(y) - \int_a^y F(x)g'(x)dx.$$

Чтобы доказать существование предела у разности каких-то штук, нужно доказать, что он существует у них по отдельности.

$\lim_{y \rightarrow +\infty} F(y)g(y) = 0$  — произведение бесконечно малой и ограниченной функции.

Хотим показать, что  $\int_a^y F(x)g'(x)dx$  имеет конечный  $\lim$ , то есть  $\int_a^{+\infty} F(x)g'(x)dx$  сходится.

Тогда докажем, что он абсолютно сходится.  $\int_a^{+\infty} |F(x)||g'(x)|dx$ ,  $|F(x)||g'(x)| \leq K|g'(x)| = Kg'(x)$ . (считаем, что  $g(x)$  возрастает)  $\int_a^{+\infty} g'(x)dx = g \Big|_a^{+\infty} = \lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) - g(a) = -g(a) \implies$  сходится.  $\square$

**Теорема 23.3** (Признак Абеля).  $f, g \in C[a, +\infty)$ , Если

1.  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  сходится
2.  $g$  монотонна
3.  $g$  ограничена



$\Rightarrow$  то  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$  сходится.

**Доказательство.** 2) + 3)  $\Rightarrow g$  имеет конечный предел  $l \in \mathbb{R} := \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .

Пусть  $\tilde{g}(x) := g(x) - l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{g}(x) = 0$  и  $\tilde{g}$  монотонна.

Пусть  $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ . Тогда 1)  $\iff$  существует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \Rightarrow F$  ограничена.

Тогда  $f$  и  $\tilde{g}$  удовлетворяют условиям признака Дирихле  $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\tilde{g}(x)dx$  — сходится. Тогда:

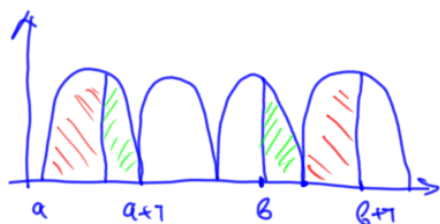
$$\int_a^{+\infty} fg = \int_a^{+\infty} f(\tilde{g} + l) = \int_a^{+\infty} f\tilde{g} + l \int_a^{+\infty} f.$$

Где  $\int_a^{+\infty} f\tilde{g}$  сходится по доказанному, а  $\int_a^{+\infty} f$  — по условию. □

## Билет 24

**Утверждение 24.1.**  $f$  — периодическая функция с периодом  $T$ . Тогда неважно, по какому периоду интегрировать  $\Rightarrow \int_a^{a+T} f = \int_b^{b+T} f$

**Доказательство.** см. картинку:



$$\int_b^{a+T} f = \int_{b-(k-1)T}^{a+T} f \quad \int_{b+T}^{a+T} f = \int_a^{a+T} f$$

$$\int_b^{a+T} f = \int_{b-(k-1)T}^{a+T} f \cdot \int_{a+T}^{b+T} f = \int_a^{a+T} f$$

□

**Следствие.**  $f, g \in C[a; +\infty)$ ,  $f$  — периодическая с периодом  $T$ ,  $g$  монотонная и  $g \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .  
 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  расходится.

$$\text{Тогда } \int_a^{+\infty} fg \text{ сходится} \iff \int_a^{a+T} f = 0.$$

**Доказательство.**  $\Leftarrow$ .  $F(x) = \int_a^x f$  — периодична с периодом  $T$ :

$$F(x+T) = \int_a^{x+T} f = \int_a^x f + \underbrace{\int_x^{x+T} f}_{=0} = F(x). \quad F \text{ — непрерывна и периодична} \implies \text{ограничена} \implies$$

$\int_a^{+\infty} fg$  сходится по признаку Дирихле.

$\Rightarrow$ . Пусть  $\int_a^{a+T} f =: K \neq 0$ .  $\tilde{f}(x) =: f(x) - \frac{K}{T}$  — периодична с периодом  $T$ . Тогда  $\int_a^{a+T} \tilde{f} =$   
 $\int_a^{a+T} (f - \frac{K}{T}) = K - T \cdot \frac{K}{T} = 0 \implies \int_a^{+\infty} \tilde{f}g$  сходится.

Тогда  $\int_a^{+\infty} fg = \int_a^{+\infty} (\tilde{f} + \frac{K}{T})g = \int_a^{+\infty} \tilde{f}g + \frac{K}{T} \int_a^{+\infty} g \implies \int_a^{+\infty} fg$  расходится как сумма сходящегося и расходящегося.  $\square$

**Пример.** Рассмотрим  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ .

1.  $p > 1$  интеграл сходится абсолютно:  $|\sin x| \leq 1 \implies \left| \frac{\sin x}{x^p} \right| \leq \frac{1}{x^p}$ , а значит  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  сходится.

2.  $0 < p \leq 1$  интеграл сходится, но не абсолютно.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  — расходится,  $\frac{1}{x^p} \searrow 0$ .

$$g(x) := \frac{1}{x^p}, f(x) := \sin x. \quad \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0 \implies \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \text{ сходится.}$$

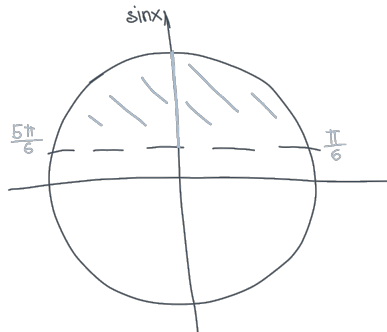
Если взять  $f(x) = |\sin x|$ , то интеграл по периоду равен  $4 \left( \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = 2 \int_0^{\pi} \sin x dx = 4 \right)$ .

Значит исходный интеграл расходится.

3.  $p \leq 0$  интеграл расходится.

$$a_n := \frac{\pi}{6} + 2\pi n, b_n := \frac{5\pi}{6} + 2\pi n. \text{ Тогда } \int_{a_n}^{b_n} \frac{\sin x}{x^p} dx \geq \frac{1}{2} \int_{a_n}^{b_n} \frac{dx}{x^p} \geq \frac{1}{2} \int_{a_n}^{b_n} dx = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Предъявили сколь угодно далеко такие отрезки, что интеграл по ним превосходит  $\frac{\pi}{3}$  — это отрицание критерия Коши.



## Билет 25

**Определение 25.1.** Метрика (расстояние)  $\rho: X \times X \rightarrow [0; +\infty)$ , если выполняются следующие условия:

1.  $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$ ,
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ,
3. (неравенство треугольника)  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ .

**Определение 25.2.** Метрическое пространство — пара  $(X, \rho)$ .

**Пример.** Дискретная метрика (метрика Лентяя)  $\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$

**Пример.** На  $\mathbb{R}$ :  $\rho(x, y) = |x - y|$ .

**Пример.** На  $\mathbb{R}^d$  (пространство столбцов = векторов):  $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^d (x_k - y_k)^2}$ . Неравенство треугольника здесь — неравенство Минковского.

**Пример.**  $C[a, b]$ .  $\rho(f, g) = \int_a^b |f - g|$ .

Неравенство треугольника:

$$\rho(f, h) = \int_a^b |f - h| \stackrel{(*)}{\leq} \int_a^b (|f - g| + |g - h|) = \rho(f, g) + \rho(g, h).$$

(\*)  $\iff |f(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|$  — неравенство треугольника для  $(\mathbb{R}, |x - y|)$ .

**Пример.** Манхэттенская метрика:  $\mathbb{R}^2$ ,  $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$  (с точки зрения пешехода расстояние равно такой штуке).

**Пример.** Французская железнодорожная метрика.  $\mathbb{R}^2$ . Есть точка  $P$  (Париж), тогда  $\rho(A, B) = AB$ , если  $A, B, P$  на одной прямой, иначе  $\rho(A, B) = |AP| + |PB|$ .

**Определение 25.3.**  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.  $B_r(x) := \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$  — открытый шар радиуса  $r$  с центром в точке  $x$ .

**Определение 25.4.**  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.  $\bar{B}_r(x) := \{y \in X \mid \rho(x, y) \leq r\}$  — закрытый шар радиуса  $r$  с центром в точке  $x$ .

То есть если берём контур — это замкнутый шар.

**Свойства.** 1.  $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$ .

2.  $x \neq y \implies \exists r > 0: B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset \wedge \bar{B}_r(x) \cap \bar{B}_r(y) = \emptyset$ .

**Доказательство.** 1.  $x \in B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) \iff \begin{cases} \rho(x, a) < r_1 \\ \rho(x, a) < r_2 \end{cases} \iff \rho(x, a) < \min\{r_1, r_2\} \implies x \in B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$ .

2.  $r := \frac{1}{3}\rho(x, y) > 0$ . Пусть  $\bar{B}_r(x) \cap \bar{B}_r(y) \neq \emptyset$ .

Тогда  $\exists z \in \bar{B}_r(x) \cap \bar{B}_r(y) \implies \rho(x, z) \leq r \wedge \rho(y, z) \leq r \implies \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \leq 2r = \frac{2}{3}\rho(x, y) \implies 1 \leq \frac{2}{3}$ . Противоречие.

При этом,  $B_r(x) \subset \bar{B}_r(x) \implies \exists r: B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset$ . То есть если замкнутый шар не пересекает, то и открытый — тем более.

□

## Билет 26

**Определение 26.1.**  $A \subset X$ .  $A$  — открытое множество, если  $\forall a \in A \exists B_r(a) \subset A$  ( $r > 0$ ). То есть для любой точки-центра из  $A$  находится шарик, который целиком тоже лежит в  $A$ .

**Теорема 26.1** (О свойствах открытых множеств). 1.  $\emptyset, X$  — открытые.

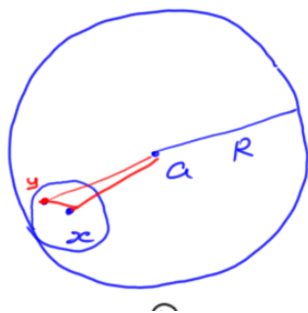
2. Объединение любого числа открытых множеств — открытое.

3. Пересечение конечного числа открытых множеств — открытое.

4.  $B_R(a)$  — открытое.

**Доказательство.** 2. Пусть  $A_\alpha$  — открытые,  $\alpha \in I$ .  $B := \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ . Берем  $b \in B \implies b \in A_\beta$  для некоторого  $\beta$ . Но  $A_\beta$  — открытое  $\implies \exists r > 0 \quad B_r(b) \subset A_\beta \subset B$ .

3. Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — открытые.  $B := \bigcap_{k=1}^n A_k$ . Берем  $b \in B \implies b \in A_k \forall k = 1, 2, \dots, n$ . Но  $A_k$  — открытое  $\implies \exists r_k > 0 \quad B_{r_k}(b) \subset A_k$ .  $r := \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\} > 0 \implies B_r(b) \subset B_{r_k}(b) \subset A_k \forall k \implies B_r(b) \subset \bigcap_{k=1}^n A_k = B \implies B$  — открытое.



4.  $\rho(a, x) < R$ ,  $r := R - \rho(a, x) > 0$ . Докажем, что  $B_r(x) \subset B_R(a)$ . Возьмем  $y \in B_r(x)$ , то есть  $\rho(x, y) < r \implies \rho(y, a) \leq \rho(y, x) + \rho(x, a) < r + \rho(x, a) = R \implies y \in B_R(a)$ .

□

**Замечание.** В 3 существенна конечность.  $\mathbb{R}. \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, 1) = [0, 1)$ . А для нуля любой открытый шарик плохой.

## Билет 27

**Определение 27.1.**  $A \subset X$ ,  $a \in A$ .  $a$  — внутренняя точка множества  $A$ , если  $\exists r > 0: B_r(a) \subset A$ .

**Замечание.**  $A$  — открытое  $\iff$  все его точки внутренние.

**Определение 27.2.** Внутренность множества  $\text{Int } A := \{a \in A \mid a \text{ — внутренняя точка}\}$ .

**Пример.**  $A = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ . Тогда  $\text{Int } A = (0, 1)$ .

**Свойства внутренности.** 1.  $\text{Int } A \subset A$ .

2.  $\text{Int } A$  —  $\bigcup$  всех открытых множеств, которые содержатся в  $A$ .

3.  $\text{Int } A$  — открытое множество. (Следствие из предыдущего)

4.  $A$  — открытое  $\iff A = \text{Int } A$ .

5. Если  $A \subset B$ , то  $\text{Int } A \subset \text{Int } B$ .

6.  $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B$

7.  $\text{Int}(\text{Int } A) = \text{Int } A$ .

**Доказательство.**

2.  $B := \bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha}$ ,  $A_{\alpha} \subset A$ ,  $A_{\alpha}$  открытые.

$B \subset \text{Int } A$ . (Потому что:) Берем  $b \in B \implies \exists \beta \in I: b \in A_{\beta}$  — открытое  $\implies \exists r > 0: B_r(b) \subset A_{\beta} \subset A \implies b$  — внутренняя точка  $A \implies b \in \text{Int } A$ .

$\text{Int } A \subset B$ . Берем  $b \in \text{Int } A \implies \exists r > 0 B_r(b) \subset A$ , но  $B_r(b)$  — открытое множество  $\implies$  оно участвует в объединении  $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \implies B_r(b) \subset B \implies b \in B$ .

4.  $\Leftarrow$ : пользуемся пунктом 3.

$\Rightarrow$ : Если  $A$  — открытое, то все его точки внутренние  $\implies$  все из внутренности  $\implies A = \text{Int } A$ .

6.  $\subset: A \cap B \subset A, \subset B \implies \text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int } A \wedge \text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int } B$ .

$\supset$ . Пусть  $x \in \text{Int } A \cap \text{Int } B \implies \begin{cases} \exists r_1 > 0 & B_{r_1}(x) \subset A \\ \exists r_2 > 0 & B_{r_2}(x) \subset B \end{cases} \implies \text{если } r = \min\{r_1, r_2\} \implies B_r(x) \subset A \wedge B_r(x) \subset B \implies B_r(x) \subset A \cap B \implies x \in \text{Int}(A \cap B)$ .

7. Пусть  $B := \text{Int } A$  — открытое  $\implies B = \text{Int } B$ .

□

## Билет 28

**Определение 28.1.**  $A \subset X$ .  $A$  — замкнутое, если  $X \setminus A$  — открытое.

**Теорема 28.1** (о свойствах замкнутых множеств). 1.  $\emptyset$  и  $X$  — замкнуты.

2. Пересечение любого числа замкнутых множеств — замкнуто.

3. Объединение конечного числа замкнутых множеств — замкнуто.

4.  $\overline{B}_R(a)$  — замкнуто. ( $\iff$  замкнутый шар — замкнутое множество)

**Доказательство.** 2.  $A_\alpha$  — замкнуты  $\implies X \setminus A_\alpha$  — открытые  $\implies \bigcup_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$  — открыто  $\implies X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$  — замкнутое.

3. Аналогично.

4.  $X \setminus \overline{B}_R(a)$  — открытое. Берем  $x \notin \overline{B}_R(a)$  (то есть берём точку из дополнения  $\iff$  она не лежит в шарике). Возьмем  $r := \rho(a, x) - R > 0$ . Покажем, что  $B_r(x) \subset X \setminus \overline{B}_R(a)$ .

От противного. Пусть  $B_r(x) \cap \overline{B}_R(a) \neq \emptyset$ . Берем  $y \in B_r(x) \cap \overline{B}_R(a) \implies \rho(x, y) < r \wedge \rho(a, y) \leq R \implies \rho(a, x) \leq \rho(a, y) + \rho(y, x) < R + r = \rho(a, x)$ . Противоречие.

□

**Замечание.** В 3 важна конечность.  $\mathbb{R}. \bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1] = (0, 1]$  — не является замкнутым.

**Определение 28.2.** Замыкание множества  $\text{Cl } A$  (Closure  $A$ ) — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих  $A$ .

**Теорема 28.2.**  $X \setminus \text{Cl } A = \text{Int}(X \setminus A)$  и  $X \setminus \text{Int } A = \text{Cl}(X \setminus A)$ .

**Доказательство.**  $\text{Int}(X \setminus A) = \bigcup B_\alpha$ .  $B_\alpha$  — открытые,  $B_\alpha \subset X \setminus A \iff X \setminus B_\alpha$  — замкнутое.  $X \setminus B_\alpha \supset A$ .

$$\bigcap (X \setminus B_\alpha) = \text{Cl } A \implies \underbrace{X \setminus \bigcap (X \setminus B_\alpha)}_{= \bigcup B_\alpha} = X \setminus \text{Cl } A \iff \bigcup (B_\alpha) = \text{Int}(X \setminus A).$$

□

**Следствие.**  $\text{Int } A = X \setminus \text{Cl}(X \setminus A)$  и  $\text{Cl } A = X \setminus \text{Int}(X \setminus A)$ .

**Свойства.** 1.  $\text{Cl } A \supset A$ .

2.  $\text{Cl } A$  — замкнутое множество.

3.  $A$  — замкнуто  $\iff A = \text{Cl } A$ .

**Доказательство.**  $\Leftarrow$  — пункт 2.  $\Rightarrow A$  — замкнутое  $\Rightarrow$  оно участвует в пересечении из определения  $\implies \text{Cl } A \subset A \implies \text{Cl } A = A$ .  $\square$

4.  $A \subset B \implies \text{Cl } A \subset \text{Cl } B$ .

**Доказательство.**  $X \setminus A \supset X \setminus B \implies \text{Int}(X \setminus A) \supset \text{Int}(X \setminus B) \implies \underbrace{X \setminus \text{Int}(X \setminus A)}_{=\text{Cl } A} \subset \underbrace{X \setminus \text{Int}(X \setminus B)}_{=\text{Cl } B}$   $\square$

5.  $\text{Cl}(A \cup B) = \text{Cl } A \cup \text{Cl } B$ .

6.  $\text{Cl}(\text{Cl } A) = \text{Cl } A$ .

**Доказательство.**  $B := \text{Cl } A$  — замкнуто  $\implies \text{Cl } B = B$ .  $\square$

**Упражнение.**  $\text{Cl } \text{Int } \text{Cl } \text{Int} \dots A$ . Какое наибольшее количество различных множеств может получиться.

**Теорема 28.3.**  $x \in \text{Cl } A \iff \forall r > 0 \quad B_r(x) \cap A \neq \emptyset$ .

**Доказательство.** Запишем отрицание условия теоремы:  $x \notin \text{Cl } A \iff \exists r > 0 \quad B_r(x) \cap A = \emptyset$ .

Что означает, что  $x \notin A$ ? Это значит, что  $x \in X \setminus \text{Cl } A = \text{Int}(X \setminus A) \iff x \in \text{Int}(X \setminus A) \iff x$  — внутренняя точка  $X \setminus A \iff \exists r > 0: B_r(x) \subset X \setminus A \iff \exists r > 0: B_r(x) \cap A = \emptyset$ .  $\square$

**Следствие.**  $U$  — открытое,  $U \cap A = \emptyset \implies U \cap \text{Cl } A = \emptyset$ .

**Доказательство.** Возьмем  $x \in U \implies \exists r > 0: B_r(x) \subset U \implies B_r(x) \cap A = \emptyset \implies x \notin \text{Cl } A \implies U \cap \text{Cl } A = \emptyset$ .  $\square$

## Билет 29

**Определение 29.1.** Окрестностью точки  $x$  будем называть шар  $B_r(x)$  для некоторого  $r > 0$ . Обозначать будем  $U_x$

**Определение 29.2.** Проколотой окрестностью точки  $x$  —  $B_r(x) \setminus \{x\}$ . Обозначать будем  $\dot{U}_x$ .

**Определение 29.3.**  $x$  — предельная точка множества  $A$ , если  $\forall \dot{U}_x: \dot{U}_x \cap A \neq \emptyset$ .

Обозначим через  $A'$  — множество предельных точек для  $A$ .

**Свойства.**

1.  $\text{Cl } A = A \cup A'$ .

**Доказательство.**  $x \in \text{Cl } A \iff \forall U_x: U_x \cap A \neq \emptyset \iff \begin{cases} x \in A \\ \forall \dot{U}_x \cap A \neq \emptyset \iff x \in A' \end{cases}$   $\square$

2.  $A \subset B \implies A' \subset B'$ . Очевидно.

3.  $A$  — замкнуто  $\iff A \supset A'$ .

**Доказательство.**  $A$  — замкнуто  $\iff A = \text{Cl } A \iff A = A \cup A' \iff A \supset A'$ .  $\square$

4.  $(A \cup B)' = A' \cup B'$ .

**Доказательство.** Докажем " $\subset$ ". Возьмем  $x \in (A \cup B)'$ :  $x \notin A' \implies \exists \dot{U}_x: \dot{U}_x \cap A = \emptyset$ , но  $\dot{U}_x \cap (A \cup B) \neq \emptyset \implies \dot{U}_x \cap B \neq \emptyset \implies x \in B'$ .

Докажем " $\supset$ ".  $A \cup B \supset A \implies (A \cup B)' \supset A'$ . Проверим тот же фокус для  $B$ , получим  $(A \cup B)' \supset A' \cup B'$ .  $\square$

**Теорема 29.1.**  $x \in A' \iff \forall r > 0 \ B_r(x)$  содержит бесконечное количество точек из  $A$ .

**Доказательство.** Докажем " $\Leftarrow$ ".  $B_r(x) \cap A$  содержит бесконечное количество точек  $\implies \dot{B}_r(x) \cap A$  содержит бесконечное число точек  $\implies \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \implies x \in A'$ .

" $\Rightarrow$ ". Возьмем радиус  $r = 1$ . Тогда  $\dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \implies \exists x_1 \in A: 0 < \rho(x, x_1) < 1$ . Возьмем  $r = \rho(x, x_1)$ .  $\dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \implies \exists x_2 \in A: 0 < \rho(x, x_2) < \rho(x, x_1)$ . Тогда можно взять  $r = \rho(x, x_2)$ , и так далее.

В итоге получили, что  $r > \rho(x, x_1) > \rho(x, x_2) > \rho(x, x_3) > \dots > 0 \implies$  все  $x_n$  различны.  $\square$

**Следствие.** Конечное множество не имеет предельных точек. (Потому что их должно быть  $\infty$ )

**Доказательство.** Предположим предельная точка существует  $\iff \exists r > 0: B_r(x) \cap A$  содержит бесконечное количество точек. Но это невозможно, так как в  $A$  конечное число точек.  $\square$

## Билет 30

**Определение 30.1.**  $(X, \rho)$  — метрическое пространство  $Y \subset X$ .

Тогда  $(Y, \rho|_{Y \times Y})$  — подпространство метрического пространства  $(X, \rho)$ .

**Пример.**  $(\mathbb{R}, |x - y|)$ .  $Y = [a, b] \subset \mathbb{R}$ , например,  $Y = [0, 1]$ .

$B_1(1) = (0, 1]$ ,  $B_2(0) = [0, 1]$ .  $B_r^Y(a) = Y \cap B_r^X(a)$ . ( $B_r^A$  — шарик радиуса  $r$  на множестве  $A$ )

**Теорема 30.1** (об открытых и замкнутых множествах в пространстве и подпространстве).  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $(Y, \rho)$  — его подпространство,  $A \subset Y$ . Тогда

1.  $A$  — открыто в  $Y \iff \exists G$  — открытое в  $X: A = G \cap Y$ .

2.  $A$  — замкнуто в  $Y \iff \exists F$  — замкнутое в  $X: A = F \cap Y$ .

**Доказательство.**

1. " $\Rightarrow$ ".  $A$  — открыто в  $Y \implies \forall x \in A \exists r_x > 0: B_{r_x}^Y(x) \subset A \implies A = \bigcup_{x \in A} B_{r_x}^Y(x)$ .

То есть наше множество будет объединением большего числа шариков (возможно бесконечного). Найдем теперь  $G$ :  $G := \bigcup_{x \in A} B_{r_x}^X(x)$  — открыто в  $X$ . Посмотрим теперь на

$$G \cap Y = \bigcup_{x \in A} (B_{r_x}^X(x) \cap Y) = \bigcup_{x \in A} B_{r_x}^Y(x) = A.$$

В обратную сторону. Пусть  $A = G \cap Y$ , где  $G$  открыто в  $X$ . Возьмем  $x \in G \cap Y$ .  $G$  — открыто в  $X \implies \forall x \in G \cap Y \exists r > 0: B_r^X(x) \subset G \implies B_r^X(x) \cap Y \subset G \cap Y = A \implies B_r^Y(x) \subset A \implies x$  — внутренняя точка  $A \implies A$  — открыто в  $Y$ .



2.  $A$  — замкнутое в  $Y \iff Y \setminus A$  — открыто в  $Y \iff \exists G$  — открытое в  $X$ , такое что  $Y \setminus A = Y \cap G \iff A = Y \setminus (Y \cap G) \stackrel{(1)}{=} Y \setminus G \stackrel{(2)}{=} Y \cap (X \setminus G) \iff \exists G$  — открытое в  $X$ , такое что  $A = Y \cap (X \setminus G) \iff \exists F$  — замкнуто в  $X$ , такое что  $A = Y \cap F$ .

(1) — Можно забыть на пересечение с  $Y$ , потому что, если элемент  $G$  не лежит в  $Y$ , то и в  $Y \setminus G$  он участия не принимает. (2) — Помним, что  $Y \subset X$ , а значит такая операция корректна.

□

**Пример.**  $(\mathbb{R}, |x - y|)$ .  $Y = [0, 3)$ .  $[0, 1)$  — открыто в  $[0, 3)$ :  $[0, 1) = \underbrace{[0, 3)}_Y \cap \underbrace{(-1, 1)}_G$ .

$[2, 3)$  — замкнуто в  $[0, 3)$ :  $[2, 3) = \underbrace{[0, 3)}_Y \cap \underbrace{[2, 3]}_F$ .

## Билет 31

**Определение 31.1.**  $X$  — векторное пространство над  $\mathbb{R}$ .

$\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$  — норма, если  $(\cdot$  — аргумент)

$$1. \|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X \text{ и } \|x\| = 0 \iff x = \vec{0}.$$

$$2. \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$3. (\text{неравенство треугольника}): \forall x, y: \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

**Пример.** 1.  $|x|$  в  $\mathbb{R}$ ,

$$2. \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_d| \text{ в } \mathbb{R}^d.$$

$$3. \|x\|_\infty = \max_{k=1,2,\dots,d} |x_k|.$$

Неравенство треугольника:  $\|x + y\|_\infty = \max\{|x_k + y_k|\} \leq \max\{|x_k| + |y_k|\} \leq \max\{|x_k|\} + \max\{|y_k|\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

$$4. \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

$$5. \|x\|_p = \left( \sum_{k=1}^d |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ в } \mathbb{R}^d \text{ при } p \geq 1. \text{ Неравенство треугольника — неравенство Минковского.}$$

$$6. C[a, b]. \|f\| = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|.$$

**Определение 31.2.**  $X$  — векторное пространство над  $\mathbb{R}$ .  $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  скалярное произведение, если

$$1. \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ и } \langle x, x \rangle = 0 \iff x = \vec{0}.$$

$$2. \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$3. \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle.$$

$$4. \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

**Пример.** 1.  $\mathbb{R}^d$ .  $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$ .

2. Возьмем  $w_1, \dots, w_d > 0$ . Тогда  $\langle x, y \rangle = \sum w_i x_i y_i$ .

3.  $C[a, b]$ .  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ .

**Свойства.** 1. Неравенство Коши-Буняковского.  $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$ .

**Доказательство.**  $f(t) := \langle x + ty, x + ty \rangle \geq 0$ .  $f(t) = \langle x, x \rangle + t\langle x, y \rangle + t\langle x, y \rangle + t^2\langle y, y \rangle = t^2\langle y, y \rangle + 2t\langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle$  — квадратный трехчлен (если  $\langle y, y \rangle = 0 \implies y = 0 \implies$  везде нули). Тогда  $0 \geq D = (2\langle x, y \rangle)^2 - 4\langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle = 4(\langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle)$ . Потому что иначе есть два корня и где-то есть отрицательное значение, а  $f(t) \geq 0$ .

$$\langle x, \vec{0} \rangle = \langle x, 0 \cdot y \rangle = 0 \cdot \langle x, y \rangle = 0. \quad \square$$

2.  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  — норма.

**Доказательство.**  $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|$ .

Неравенство треугольника:  $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ . Возведем в квадрат, получим  $\langle x+y, x+y \rangle \leq \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}$ , но теперь вспомним, что  $\langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\langle x, y \rangle$ . А, сократив общие слагаемые, получим доказанное неравенство Коши-Буняковского.  $\square$

3.  $\rho(x, y) = \|x - y\|$  — метрика.

**Доказательство.**  $\rho(x, y) \geq 0$ .  $\rho(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x - y = \vec{0} \iff x = y$ .

$$\rho(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1| \|x - y\| = \rho(x, y).$$

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z): \|(x - y) + (y - z)\| = \|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|. \quad \square$$

4.  $\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$ .

**Доказательство.** Надо доказать, что  $-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ .

$$\text{Левое: } \|y\| = \|(y - x) + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|$$

$$\text{Правое: } \|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \quad \square$$

5. Упражнение. Если норма порождается скалярным произведением  $\iff \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ . Тождество параллелограмма.

## Билет 32

**Определение 32.1.**  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.  $x_1, x_2, \dots \in X, a \in X$ .

$\lim x_n = a$ , если

1. Вне любого открытого шара с центром в точке  $a$  содержится лишь конечное число членов последовательности.

2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon \iff x_n \in B_\varepsilon(a)$ .

**Определение 32.2.**  $A \subset X$ .

Тогда  $A$  — ограничено, если оно содержится в некотором шаре ( $\iff$  его можно записать в шар).

**Свойства.** 1.  $a = \lim x \iff \rho(x_n, a) \rightarrow 0$ .

**Доказательство.**  $\forall \varepsilon > 0 \exists n \geq N \quad |\rho(x_n, a)| < \varepsilon$  — предел равен 0.  $\square$

2. Предел единственный.

**Доказательство.** Пусть  $a = \lim x_n$  и  $b = \lim x_n$ . Тогда возьмем шарики такие, что  $B_r(a) \cap B_r(b) = \emptyset \implies \exists N_1, N_2, \forall n \geq \max\{N_1, N_2\} \quad x_n \in B_r(a) \wedge x_n \in B_r(b)$  — противоречие.  $\square$

3. Если  $a = \lim x_n, a = \lim y_n$ . То для перемешанной последовательности  $x_n$  и  $y_n$  предел такой же.

4.  $a = \lim x_n \implies$  для последовательности, в которой  $x_n$  взяты с конечной кратностью,  $a$  будет пределом.

5. Если  $a = \lim x_n$ , то  $\lim x_{n_k} = a$ .

6. Последовательность имеет предел  $\implies$  она ограничена

**Доказательство.**  $\varepsilon = 1 \exists N \forall n \geq N \quad \rho(x_n, a) < 1$ . Тогда  $R = \max\{\rho(x_1, a), \dots, \rho(x_{N-1}, a)\} + 1 \implies x_n \in B_R(a)$ .  $\square$

7. Если  $a = \lim x_n$ , то последовательность, полученная из  $\{x_n\}$  перестановкой членов имеет тот же предел (было конечное  $\rightarrow$  стало конечное).

8.  $a$  — предельная точка  $A \iff \exists \{x_n\} \neq a \in A: \lim x_n = a$ .

Более того,  $x_n$  можно выбирать так, что  $\rho(x_n, a)$  строго убывает.

**Доказательство.** " $\Leftarrow$ " Пусть  $\lim x_n = a$ . Возьмем  $B_r(a) \implies \exists N \forall n \geq N \quad x_n \in B_r(a) \implies \exists x_n \in \dot{B}_r(a) \implies \dot{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \implies a$  — предельная точка.

" $\Rightarrow$ " (строим последовательность) Берем  $r_1 = 1$ .  $\dot{B}_{r_1}(a) \cap A \neq \emptyset$ . Берем оттуда точку, называем  $x_1 \neq a$ .  $r_2 = \frac{\rho(x_1, a)}{2}$  (для надежности поделили на 2).  $\dot{B}_{r_2}(a) \cap A \neq \emptyset$ . Берем оттуда точку  $x_2 \neq a$ .  $r_3 = \frac{\rho(x_2, a)}{2}$ . И так далее.

Получили:  $x_n \neq a$  и  $\rho(x_n, a) < \frac{\rho(x_{n-1}, a)}{2} < \rho(x_{n-1}, a)$ .  $\rho(x_n, a) < \frac{1}{2^n} \rightarrow 0 \implies \lim x_n = a$ .  $\square$

## Билет 33

**Теорема 33.1** (об арифметических действиях с пределами).  $X$  — нормированное пространство,  $x_n, y_n \in X$ ,  $\lambda_n \in \mathbb{R}$ .  $\lim x_n = a, \lim y_n = b, \lim \lambda_n = \mu$ . Тогда:

1.  $\lim(x_n + y_n) = a + b$ .

2.  $\lim(x_n - y_n) = a - b$ .

3.  $\lim \lambda_n x_n = \mu a$ .

4.  $\lim \|x_n\| = \|a\|.$

5. Если в  $X$  есть скалярное произведение, то  $\lim \langle x_n, y_n \rangle = \langle a, b \rangle.$

**Доказательство.** 1.  $\rho(x_n + y_n, a + b) = \|(x_n + y_n) - (a + b)\| = \|(x_n - a) + (y_n - b)\| \leq \|x_n - a\| + \|y_n - b\| = \rho(x_n, a) + \rho(y_n, b) \rightarrow 0.$

2. Аналогично.

3.  $\rho(\lambda_n x_n, \mu a) = \|\lambda_n x_n - \mu a\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n a + \lambda_n a - \mu a\| \leq \|\lambda_n x_n - \lambda_n a\| + \|\lambda_n a - \mu a\| = |\lambda_n| \|x_n - a\| + |\lambda_n - \mu| \|a\| \rightarrow 0$ , так как  $|\lambda_n|$  — ограниченная,  $\|x_n - a\| = \rho(x_n, a) \rightarrow 0$ ,  $|\lambda_n - \mu| \rightarrow 0$ ,  $\|a\|$  — константа.

4.  $\|x_n\| - \|a\| \leq \|x_n - a\| = \rho(x_n, a) \rightarrow 0 \implies \lim \|x_n\| = \|a\|$

5.  $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = \frac{1}{4}(\langle x + y, x + y \rangle - \langle x - y, x - y \rangle) = \frac{1}{4}(\langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle - (\langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle)) = \frac{1}{4} \cdot 4\langle x, y \rangle.$  Тогда получаем  $4\langle x_n, y_n \rangle = \|x_n + y_n\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 \rightarrow \|a + b\|^2 - \|a - b\|^2 = 4\langle a, b \rangle.$

□

**Определение 33.1.**  $\mathbb{R}^d$  — пространство с нормой  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}.$

**Определение 33.2.** Покоординатная сходимость в  $\mathbb{R}^d$ :

$x_n \in \mathbb{R}^d$ .  $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)}) \xrightarrow{\text{покоординатно}} a = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(d)})$ , если  $\lim x_n^{(k)} = a^{(k)}$   $\forall k = 1, 2, \dots, d.$

**Теорема 33.2.** в  $\mathbb{R}^d$  сходимость по метрике и покоординатная сходимость совпадают.

**Доказательство.** Метрика  $\implies$  покоординатная.  $\rho(x_n, a) \rightarrow 0 \implies 0 \leq (x_n^{(1)} - a^{(1)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - a^{(d)})^2 = \rho(x_n, a)^2 \rightarrow 0 \implies \lim (x_n^{(k)} - a^{(k)})^2 = 0 \implies \lim x_n^{(k)} = a^{(k)} \implies$  покоординатная сходимость.

Покоординатная  $\implies$  метрика. Пусть  $|x_n^{(k)} - a^{(k)}| \rightarrow 0 \quad \forall k \implies (x_n^{(k)} - a^{(k)})^2 \rightarrow 0 \implies \sum_{k=1}^d (x_n^{(k)} - a^{(k)})^2 \rightarrow 0$ . А так как  $(\dots)^2 = \rho(x_n, a)^2 \implies \rho(x_n, a) \rightarrow 0.$  □

## Билет 34

**Определение 34.1.**  $x_n \in X$  — фундаментальная последовательность, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N: \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

**Свойства.** 1. Сходящаяся последовательность фундаментальна.

2. Фундаментальная последовательность ограничена.

3. Если у последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то последовательность имеет предел.

**Доказательство.** Упражнение! Утверждается, что так же, как и в пределах. □

**Определение 34.2.**  $(x, \rho)$  — метрическое пространство — полное, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

**Пример.**  $\mathbb{R}$ ;  $\rho(x, y) = |x - y|$  — полное.

**Упражнение.**  $(X, \rho)$  — полное метрическое пространство  $X \supset Y$  замкнуто. Доказать, что  $(Y, \rho)$  — полное.

**Пример.**  $(0, 1)$  не полное.  $x_n = \frac{1}{n}$  — фундаментальная, но  $\lim \frac{1}{n} = 0 \notin (0, 1)$ .

**Теорема 34.1.**  $\mathbb{R}^d$  — полное.

**Доказательство.** Пусть  $x_n$  — фундаментальная, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N: \rho(x_n, x_m) = \sqrt{(x_n^{(1)} - x_m^{(1)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - x_m^{(d)})^2} < \varepsilon.$$

Но мы знаем, что  $\rho(x_n, x_m) \geq |x_n^{(k)} - x_m^{(k)}|$ , так как, могут быть еще координаты, а значит еще неотрицательные слагаемые.

Тогда заметим, что  $x_n^{(k)}$  — фундаментальная  $\implies \exists a^{(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(k)}$ . Значит и  $x_n$  сходится к  $a$  по координатам  $\implies \rho(x_n, a) \rightarrow 0 \implies x_n$  сходится к  $a$  по метрике.  $\square$

## Билет 35

**Определение 35.1.**  $A, U_\alpha, \alpha \in I$ .

Множества  $U_\alpha$  — покрытие множества  $A$ , если  $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ .

**Определение 35.2.** Открытое покрытие — покрытие открытыми множествами.

**Определение 35.3.**  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $K \subset X$ .

$K$  — компакт, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

То есть для любого покрытия можно выбрать  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in I: K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$

**Теорема 35.1** (Теорема о свойствах компактных множеств). 1.  $K \subset Y \subset X$ . Тогда  $K$  — компакт в  $(X, \rho) \iff K$  — компакт в  $(Y, \rho)$ .

2.  $K$  — компакт  $\implies K$  замкнуто и ограничено.

3. Замкнутое подмножество компакта — компакт.

**Доказательство.** 1.  $\Leftarrow$ . Пусть  $G_\alpha$  покрытие  $K$  множествами, открытыми в  $X$ . Тогда  $U_\alpha = G_\alpha \cap Y$  — открыты в  $Y$  и  $K \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \cap Y = (\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha) \cap Y$ .

$U_\alpha$  — открытое покрытие в  $(Y, \rho) \implies$  можно выделить конечное подпокрытие  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , такое что  $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$  — конечное подпокрытие  $G_\alpha \implies K$  компакт в  $(X, \rho)$ .

$\Rightarrow$ . Воспользуемся тем же наблюдением:  $U_\alpha = G_\alpha \cap Y$ . Следовательно можно выбрать  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  в  $X$  и они же подойдут и в  $Y$ .

2. **Ограниченность.** Возьмем  $a \in X$ . Тогда  $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a) = X$  — открытое покрытие  $K$ .

Выделим конечное подпокрытие  $K \subset \bigcup_{n=1}^N B_n(a) \implies K \subset B_N(a) \implies K$  — ограничено (то есть объединили в один большой шар).

**Замкнутость.** Надо доказать, что  $X \setminus K$  — открытое. Возьмем  $a \in X \setminus K$  и  $x \in K$  и докажем, что  $a$  лежит в  $X \setminus K$  вместе с некоторым шариком.

Пусть  $U_x = B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x)$ . Причем он не пересекается с  $B_x = B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(a)$ . Возьмем тогда  $K \subset \bigcup_{x \in K} U_x$  — открытое покрытие (поскольку каждый шарик точно покрывает свой центр и ещё что-то). Выделим конечное подпокрытие  $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ ,  $r = \min\{\frac{\rho(x_i,a)}{2}\}$ . Тогда  $B_r(a) = \bigcap_{i=1}^n B_{x_i}$ .  $B_r(a) \cap \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} = \emptyset \implies B_r(a) \cap K = \emptyset \implies B_r(a) \subset X \setminus K \implies a$  — внутренняя точка  $X \cap K$ .

3. Пусть  $\tilde{K}$  — компакт,  $K$  — замкнуто и  $K \subset \tilde{K}$ .

Рассмотрим открытое покрытие  $K \cup U_\alpha$ . Тогда  $\tilde{K}$  покрыто  $(X \setminus K) \cup \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$  — открытое покрытие  $\tilde{K}$ . Выделим конечное подпокрытие  $X \setminus K, U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ .  $K \subset \underbrace{X \setminus K}_{\cap K = \emptyset} \cup \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \implies$

$K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$  — конечное подпокрытие  $K$ , а значит  $K$  — компакт.

□

## Билет 36

**Теорема 36.1.**  $K_\alpha$  — семейство компактов, такое что пересечение любого конечного числа из них непусто. Тогда  $\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha \neq \emptyset$ .

**Следствие.**  $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$  непустые компакты. Тогда  $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$ .

*Доказательство теоремы.* От противного. Пусть  $\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha = \emptyset$ . Зафиксируем компакт  $K_0 \implies K_0 \cap \bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha = \emptyset \implies K_0 \subset X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} X \setminus K_\alpha$  — открытое покрытие  $K_0$ . Выделим конечное подпокрытие  $K_0 \subset \bigcup_{i=1}^n X \setminus K_{\alpha_i} = X \setminus \bigcap_{i=1}^n K_{\alpha_i} \implies K_0 \cap \bigcap_{i=1}^n K_{\alpha_i} = \emptyset$ .??!

□

## Билет 37

**Определение 37.1.**  $K$  — секвенциально компактное множество, если из любой последовательности точек из  $K$  можно выделить подпоследовательность, которая сходится к какой-то точке из  $K$ .

**Пример.**  $[a, b] \in \mathbb{R}$  секвенциально компактно.

$x_n \in [a; b] \xrightarrow{\text{Т. В-В}} \exists$  подпоследовательность  $x_{n_k}$ , имеющая предел  $\implies \lim x_{n_k} \in [a, b]$ , так как неравенства сохраняются.

**Теорема 37.1.** Бесконечное подмножество компакта имеет предельную точку.

**Доказательство.**  $K$  — компакт.  $A \subset K$ . Пусть  $A'$  (предельные точки)  $= \emptyset$ . Тогда  $A$  — замкнуто  $\implies A$  — компакт и ни одна из его точек не является предельной.  $a \in A$  не предельная  $\implies \exists r_a > 0 \ B_{r_a}(a) \cap A = \emptyset \implies B_{r_a}(a) \cap A = \{a\}$ . Рассмотрим открытое покрытие  $A \subset \bigcup_{a \in A} B_{r_a}(a)$ , но из этого покрытия нельзя убрать ни одного множества, так как мы выбрали радиусы так, что каждый шар в пересечении с  $A$  дает только одну точку  $\implies$  нет конечного подпокрытия  $\implies$  противоречие.  $\square$

**Следствие.** Компактность  $\implies$  секвенциальная компактность.

**Доказательство.**  $x_1, x_2, \dots \in K$ .  $D = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  — множество значений последовательности.

1.  $|D| < +\infty \implies$  в последовательности есть элемент, повторяющийся бесконечно много раз, оставим только его — это нужная подпоследовательность.
2.  $|D| = +\infty \implies$  у  $D$  есть предельная точка.

Пусть  $a$  — предельная точка  $D \implies$  найдутся различные  $y_1, y_2, \dots \in D$ , такие что  $\lim y_n = a$ .

Но  $y_i$  — это какой-то  $x_{n_i}$  и  $\lim x_{n_i} = a$ . Осталось переставить  $x_{n_i}$  так, что получится подпоследовательность. Ну, а так как  $K$  — замкнуто, то  $a \in K$ .

$\square$

## Билет 38

**Лемма (Лемма Лебега).**  $K$  — секвенциальный компакт,  $K \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$  — открытое покрытие.

Тогда  $\exists r > 0: \forall x \in K \ B_r(x)$  целиком покрывается каким-то  $U_\alpha$ .

**Доказательство.** От противного. Тогда  $r = \frac{1}{n}$  не подходит  $\implies \exists x_n \in K: B_{\frac{1}{n}}(x_n)$  не содержится целиком ни в каком  $U_\alpha$ .

Выберем подпоследовательность  $x_{n_k}$ , такую что  $\lim x_{n_k} = a \in K$ .

Тогда  $a \in U_\beta$  для некоторого  $\beta \in I \implies \exists B_\varepsilon(a) \subset U_\beta$ . Возьмем  $N_1: \forall k \geq N_1 \ \rho(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ . А еще можно взять  $N_2: \forall k \geq N_2 \ \frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2}$ . А значит  $B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subset B_\varepsilon(a) \subset U_\beta$  при  $k \geq \max\{N_1, N_2\}$ !!!

Докажем  $B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subset B_\varepsilon(a)$ : Если  $x \in B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \ \rho(x_{n_k}, x) < \frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2} \wedge \rho(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} \implies \rho(x, a) \leq \rho(x_{n_k}, x) + \rho(a, x_{n_k}) < \varepsilon$   $\square$

**Теорема 38.1.** Компактность = секвенциальная компактность.

**Доказательство.**  $\Leftarrow$  Пусть  $K \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$  — открытое покрытие. Возьмем  $r > 0$  из леммы Лебега. Рассмотрим открытое покрытие  $K \subset \bigcup_{x \in K} B_r(x)$ .

Достаточно из него выделить конечное подпокрытие. Возьмем  $x_1 \in K$ . Если  $B_r(x_1) \supset K$ , то выбрали конечное покрытие. Иначе берем  $x_2 \in K \setminus B_r(x_1)$ . Если объединение шариков  $\supset K$ , то выбрали конечное подпокрытие. Иначе продолжаем процесс:  $x_n \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_r(x_i)$ . Если процесс оборвался, то выделили конечное подпокрытие.

Если он не оборвался, то мы построили подпоследовательность  $x_1, x_2, \dots$ . Причем  $\rho(x_n, x_k) \geq r \forall n > k \implies \rho(x_i, x_j) \geq r \forall i \neq j$ . Из такой последовательности не выбрать сходящуюся подпоследовательность, так как любая подпоследовательность не фундаментальная, — противоречие с секвенциальной компактностью.  $\square$

## Билет 39

**Определение 39.1.**  $A \subset X$ .  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.

$E \subset A$ ,  $\varepsilon$ -сеть множества  $A$ , если  $\forall a \in A \exists x \in E: \rho(x, a) < \varepsilon$ .

Конечная  $\varepsilon$ -сеть —  $E$ -конечное множество.

То есть  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset A$  —  $\varepsilon$ -сеть, если  $\forall a \in A \exists k \quad \rho(a, x_k) < \varepsilon$ .

**Определение 39.2.**  $A$  — вполне ограничено, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  конечная  $\varepsilon$ -сеть  $A$ .

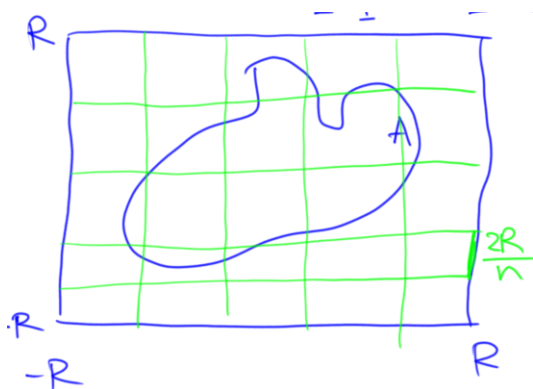
**Свойства.** 1. Вполне ограниченность  $\implies$  ограниченность.

**Доказательство.**  $\varepsilon = 1$  и конечная 1-сеть  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .  $A \subset \bigcup_{k=1}^n B_1(x_k) \subset B_{r+1}(x_1)$ , где  $r = \max_{i \neq j} \rho(x_i, x_j)$ .  $\square$

2. В  $\mathbb{R}^d$  ограниченность  $\implies$  вполне ограниченность.

**Доказательство.**  $A \subset \mathbb{R}^d$  — ограниченное.  $A \subset B_R(O) \subset [-R, R]^d$ .

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$  и возьмем  $n \in \mathbb{N}$ .  $\rho(x_i, a) \leq$  главная диагональ  $= \sqrt{d} \frac{2R}{n} < \varepsilon$  при  $n > \frac{\sqrt{d} 2R}{\varepsilon}$  получается  $\varepsilon$ -сеть ( $\sqrt{d}$  — диагональ в  $d$ -мерном кубе).  $\square$





# Билет 40

**Теорема 40.1** (Хаусдорфа). 1. Компактное множество вполне ограничено.

2. Если  $(X, \rho)$  — полное метрическое пространство, то замкнутое вполне ограниченное подмножество  $X$  — компактно.

**Доказательство.** 1. Берем  $\varepsilon > 0$   $K \subset \bigcup_{x \in K} B_\varepsilon(x)$  — открытое покрытие. Выделим конечное подпокрытие  $\Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i) \Rightarrow x_1, \dots, x_n$  —  $\varepsilon$ -сеть.

2. Проверим секвенциальную компактность. Берем  $x_1, x_2, \dots \in K$ . Возьмем 1-сеть  $K \subset \bigcup_{i=1}^{n_1} B_1(y_{1i})$ . В каком-то шарике  $B_1(z_1)$  бесконечное число членов последовательности. Выкинем все, кроме них, останутся  $x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots$ . Возьмем  $\frac{1}{2}$ -сеть  $K \subset \bigcup_{i=1}^{n_2} B_{\frac{1}{2}}(y_{2i})$ . В каком-то шарике  $B_{\frac{1}{2}}(z_2)$  бесконечное число членов последовательности...

На  $j$ -ом шаге  $K \subset B_{\frac{1}{j}}(y_{ji})$ . Пусть на каждом шаге выбирали шарик  $B_{\frac{1}{j}}(z_j)$ .

В итоге получили:

$$\begin{array}{cccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \dots & B_1(z_1) \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \dots & B_{\frac{1}{2}}(z_2) \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \dots & B_{\frac{1}{3}}(z_3) \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & \dots & B_{\frac{1}{4}}(z_4) \end{array}$$

Воспользуемся диагональным методом Кантора. Пусть  $a_n := x_{nn}$ . Заметим, что  $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$  — подпоследовательность  $x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \dots \Rightarrow$  все лежат в  $B_{\frac{1}{n}}(z_n) \Rightarrow \rho(a_i, a_j) \leq \rho(a_i, z_n) + \rho(a_j, z_n) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$ , при  $i, j \geq n \Rightarrow a_i$  — фундаментальная  $\Rightarrow$  у нее есть предел  $\Rightarrow a = \lim a_n \in K$ , так как  $K$  — замкнуто  $\Rightarrow K$  — секвенциально компактно.

□

**Следствие Характеристика компактов в  $\mathbb{R}^d$ .**  $K \subset \mathbb{R}^d$ .  $K$  — компакт  $\iff K$  — замкнуто и ограничено.

**Доказательство.**  $\Rightarrow$  верна всегда и доказана выше.

А вот  $\Leftarrow$  верна не всегда. Поэтому докажем эту штуку для  $\mathbb{R}^d$ . Мы знаем, что  $\mathbb{R}^d$  — полное. А еще мы знаем, что в  $\mathbb{R}^d$  ограниченность  $\Rightarrow$  вполне ограниченность, а значит понятно, что  $K$  — компакт. □

**Упражнение.**  $(K, \rho)$  — метрическое пространство,  $K$  — компакт. Доказать, что  $(K, \rho)$  — полное.

**Теорема 40.2** (Теорема Больцано-Вейерштрасса в  $\mathbb{R}^d$ ). Из любой ограниченной последовательности в  $\mathbb{R}^d$  можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

**Доказательство.**  $\{x_n\}$  — ограничено  $\Rightarrow \exists R \ x_n \in B_R(a) \subset \overline{B}_R(a)$  — замкнуто и ограничено  $\Rightarrow$  компактно  $\Rightarrow$  секвенциально компактно  $\Rightarrow x_n$  — последовательность точек секвенциального компакта  $\Rightarrow$  у нее есть сходящаяся подпоследовательность. □

# Билет 41

**Определение 41.1.**  $(X, \rho_X)$  и  $(Y, \rho_Y)$  — метрические пространства,  $E \subset X$ .  $f: E \rightarrow Y$ ,  $a$  — предельная точка  $E$ ,  $b \in Y$ .

$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  означает, что

По Коши:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x: \rho_X(x, a) < \delta \wedge a \neq x \in E \implies \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon$ .

В терминах окрестностей:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \underbrace{\dot{B}_\delta(a) \cap E}_{\in X} \subset \underbrace{B_\varepsilon(b)}_{\in Y}$

По Гейне:  $\forall$  последовательности  $a \neq x_n \in E: \lim x_n = a \implies \lim f(x_n) = b$  единственный.

**Теорема 41.1.** Все определения равносильны.

**Доказательство.** Упражнение (смотри доказательство для функций). □

**Теорема 41.2** (Критерий Коши).  $f: E \subset X \rightarrow Y$ ,  $Y$  — полное,  $a$  — предельная точка  $E$ . Тогда

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

**Доказательство.**  $\implies$ . Упражнение: взять доказательство и заменить модуль на  $\rho$ .

$\Leftarrow$ . Проверим определение по Гейне. Надо доказать, что  $a \neq x_n \in E \wedge \lim x_n = a \implies \lim f(x_n)$  существует.

$f(x_n)$  — последовательность в  $Y$  — полное. Поэтому достаточно проверить, что  $f(x_n)$  — фундаментальная последовательность. Возьмем  $\varepsilon > 0$ , по нему  $\delta > 0$  из условия. По  $\delta > 0$  берем  $N$ , такое что  $\forall n \geq N: \rho_X(x_n, a) < \delta \implies x_n \in \dot{B}_\delta(a) \cap E$  при  $n \geq N \implies \forall m, n \geq N: \rho_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon \implies f(x_n)$  фундаментальная  $\implies f(x_n)$  имеет предел. □

**Теорема 41.3** (об арифметических действиях с пределами).  $f, g: E \subset X \rightarrow Y$ ,  $Y$  — нормированное пространство,  $a$  — предельная точка  $E$ .

Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \wedge \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Тогда

1.  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha b + \beta c$ .
2. Если  $\lambda: E \rightarrow \mathbb{R}$ , такое что  $\lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) = \mu \in \mathbb{R}$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) f(x) = \mu b$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow a} \|f(x)\| = \|b\|$
4. Если  $Y$  — пространство со скалярным произведением, то  $\lim_{x \rightarrow a} \langle f(x), g(x) \rangle = \langle b, c \rangle$ .
5. Если  $Y = \mathbb{R}$  и  $c \neq 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$ .

**Доказательство.** Проверка по Гейне. Берем  $x_n \rightarrow a$ , тогда  $f(x_n) \rightarrow b, g(x_n) \rightarrow c$  и теорема про пределы последовательности. □

# Билет 42

**Определение 42.1.**  $(X, \rho_X)$  и  $(Y, \rho_Y)$  — метрические пространства,  $E \subset X$ ,  $a \in E$ .  
 $f: E \rightarrow Y$ ,  $f$  непрерывна в точке  $a$ , если

1.  $a$  не предельная точка или  $a$  — предельная и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .
2. По Коши.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E: \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ .
3. С окрестностями.  $\forall B_\varepsilon(f(a)) \exists B_\delta(a): f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$ .
4. По Гейне:  $\forall x_n \in E: \lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = f(a)$ .

**Доказательство.** Упражнение! Все определения равносильны. В прошлом доказательстве надо заменить модуль на расстояние.  $\square$

**Теорема 42.1** (о непрерывности композиции).  $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y), (Z, \rho_Z) — D \subset X, E \subset Y, a \in D, f: D \rightarrow E, g: E \rightarrow Z$ . Если  $f$  непрерывна в точке  $a$ , а  $g$  непрерывна в точке  $f(a)$ , то  $g \circ f$  непрерывна в точке  $a$ .

**Доказательство.** Запишем определения непрерывности для  $g$  и  $f$  в терминах окрестностей (в определении для  $f$  мы дописали  $\cap E$ , но заметим, что это никак не повлияет по определению  $E$ ):

$$\left. \begin{array}{l} \forall B_\varepsilon(g(f(a))) \exists B_\delta(f(a)) \text{ такой, что } g(B_\delta(f(a)) \cap E) \subset B_\varepsilon(g(f(a))) \\ \forall B_\delta(f(a)) \exists B_\gamma(a) \text{ такой, что } f(B_\gamma(a) \cap D) \subset B_\delta(f(a)) \cap E \end{array} \right\} \\ \Rightarrow g(f(B_\gamma(a) \cap D)) \subset g(B_\delta(f(a)) \cap E) \subset B_\varepsilon(g(f(a))) \Rightarrow g \circ f \text{ непрерывна в точке } a$$

 $\square$ 

**Теорема 42.2** (Характеристика непрерывности в терминах открытых множеств).  $f: X \rightarrow Y$ . Тогда

$f$  непрерывна во всех точках  $\iff \forall U$  — открытого в  $Y: f^{-1}(U) := \{x \in X \mid f(x) \in U\}$  — открыто в  $X$  (то есть они переходят в  $U$ ).

**Доказательство.**  $\Rightarrow$ . Берем  $a \in f^{-1}(U) \Rightarrow f(a) \in U$  — открыто  $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(f(a)) \subset U$ .

$f$  непрерывна в точке  $a \Rightarrow \exists \delta > 0: f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \subset U \Rightarrow B_\delta(a) \subset f^{-1}(U) \Rightarrow a$  — внутренняя точка  $f^{-1}(U) \Rightarrow f^{-1}(U)$  — открыто.

$\Leftarrow$ .  $U := B_\varepsilon(f(a))$  — открытое множество  $\Rightarrow f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$  — открыто и  $a \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) \Rightarrow$

$\exists \delta > 0 \quad B_\delta(a) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) \Rightarrow f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \Rightarrow f$  непрерывна в точке  $a$ .  $\square$

## Билет 43

**Теорема 43.1** (Непрерывный образ компакта — компакт).  $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$  — метрические пространства,  $K \subset X$ ,  $K$  — компакт.

$f: K \rightarrow Y$  непрерывна во всех точках. Тогда  $f(K)$  — компакт.

**Доказательство.** Рассмотрим открытое покрытие  $f(K) \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$  — открытые  $\implies K \subset f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(U_\alpha)$  по непрерывности  $f$   $f^{-1}(U_\alpha)$  — открыто  $\implies$  это открытое покрытие  $K$ , но  $K$  — компакт  $\implies$  выбираем конечное подпокрытие  $K \subset \bigcup_{j=1}^n f^{-1}(U_{\alpha_j}) = f^{-1}(\bigcup_{j=1}^n U_{\alpha_j}) \implies f(K) \subset \bigcup_{j=1}^n U_{\alpha_j}$ . Нашли конечное подпокрытие  $\implies f(K)$  — компакт.  $\square$

**Определение 43.1.**  $f: E \subset X \rightarrow Y$  — ограниченное отображение, если  $f(E)$  — ограниченное множество.

**Следствие.** Непрерывный образ компакта замкнут и ограничен.

**Доказательство.** Знаем, что непрерывный образ компакта — компакт. А следовательно, образ замкнут и ограничен.  $\square$

**Следствие.** Если  $K$  — компакт и  $f$  непрерывна на  $K$ , то  $f$  — ограниченное отображение.

**Следствие Теорема Вейерштрасса.**  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $K$  — компакт,  $f$  непрерывна на  $K$ .

Тогда  $\exists a, b \in K: f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in K$ .

**Доказательство.**  $f(K)$  — ограниченное множество в  $\mathbb{R} \implies B := \sup_{x \in K} f(x) \in \mathbb{R} \implies \exists x_n \in K: \lim f(x_n) = B$ . При этом  $x_n \in K$  — секвенциальный компакт  $\implies$  существует сходящаяся подпоследовательность  $x_{n_k}$ .

Тогда  $\lim x_{n_k} =: b \in K \implies \underbrace{\lim f(x_{n_k})}_{=B} = f(b) \implies f(b) = \sup_{x \in K} f(x) = B \implies f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in K$ .  $\square$

## Билет 44

**Теорема 44.1.**  $f: X \rightarrow Y$  непрерывна во всех точках, биекция и  $X$  — компакт. Тогда  $f^{-1}$  непрерывна во всех точках.

**Доказательство.** Проверяем непрерывность  $f^{-1}$  в терминах открытых множеств. Надо для  $f^{-1}$  проверить, что прообраз открытого — открыт, то есть для  $f$  проверить, что образ открытого открыт.

$U$  — открыто в  $X \implies X \setminus U$  — замкнуто и  $\subset X$  — компакт  $\implies X \setminus U$  — компакт  $\xrightarrow{\text{непрер.}} f(X \setminus U) = Y \setminus f(U)$  — компакт  $\implies Y \setminus f(U)$  — замкнуто  $\implies f(U)$  — открыто.  $\square$

**Определение 44.1.**  $f: E \subset X \rightarrow Y$  равномерно непрерывна, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E: \rho_X(x, y) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ .

**Теорема 44.2** (Теорема Кантора).  $f: K \rightarrow Y$  непрерывна,  $K$  — компакт. Тогда  $f$  равномерно непрерывна.

**Доказательство.** Берем  $x \in K$ ,  $f$  непрерывна в точке  $x \implies \exists r_x > 0: f(B_{r_x}(x)) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x))$ .

Тогда  $K \subset \bigcup_{x \in K} B_{r_x}(x)$  — открытое покрытие  $K$ . Возьмем  $\delta > 0$  из леммы Лебега, то есть  $\forall x \in K B_\delta(x)$  целиком попал в какой-то элемент покрытия.

Проверим, что это  $\delta > 0$  подходит в определение равномерной непрерывности.

$\forall x, y \in K \quad \rho_X(x, y) < \delta \implies y \in B_\delta(x) \implies \exists a \in K : B_\delta(x) \subset B_{r_a}(a) \implies x, y \in B_{r_a}(a) \implies f(x), f(y) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(a)) \implies \rho_Y(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2} \wedge \rho_Y(f(y), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2} \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$  по неравенству треугольника.  $\square$

## Билет 45

**Определение 45.1.**  $X$  — векторное пространство и  $\|\cdot\|$  и  $|||\cdot|||$  — нормы в  $X$ .

Нормы эквивалентны, если  $\exists C_1, C_2 > 0$

$$C_1\|x\| \leq |||x||| \leq C_2\|x\| \quad \forall x \in X.$$

**Замечание.** 1. Это отношение эквивалентности. (упражнение)

- Пределы последовательности для эквивалентных норм совпадают. Док-во: Пусть  $\lim x_n = a$  по норме  $\|\cdot\|$ , т.е.  $\lim \|x_n - a\| = 0$ . А  $0 \leq |||x_n - a||| \leq C_2\|x_n - a\| \rightarrow 0$ , значит  $\lim x_n = a$  и по норме  $|||\cdot|||$ .
- Непрерывность отображений для эквивалентных норм совпадают (записываем по Гейне, а для последовательностей мы всё знаем).

**Теорема 45.1.** В  $\mathbb{R}^d$  все нормы эквивалентны.

**Доказательство.**  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}$ . Достаточно доказать, что остальные нормы эквивалентны  $\|\cdot\|, \cdot$ .

Пусть  $p(x)$  — другая норма в  $\mathbb{R}^d$ .  $e_k$  — вектор с нулями и единицей на  $k$ -ой позиции.

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_d) = \sum_{k=1}^d x_k e_k.$$

$$\begin{aligned} p(x-y) &= p\left(\sum_{k=1}^d (x_k - y_k)e_k\right) \stackrel{(1)}{\leq} \sum_{k=1}^d p((x_k - y_k)e_k) = \\ &= \sum_{k=1}^d |x_k - y_k| p(e_k) \leq (\text{Коши-Буняковский}) \left(\sum_{k=1}^d (x_k - y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^d p(e_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\sum_{k=1}^d p(e_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x - y\| \stackrel{(2)}{\implies} p(x) \leq \underbrace{\left(\sum_{k=1}^d p(e_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{:=M} \|x\|. \end{aligned}$$

$$(1) \iff \|a+b\| \leq \|a\| + \|b\| \text{ и } p(a+b) \leq p(a) + p(b)$$

$$(2) \iff p(x) \text{ — непрерывная функция.}$$

$$S := \{x \in \mathbb{R}^d : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2 = 1\} \text{ — компакт} \implies \exists a \in S : 0 < p(a) \leq p(x) \quad \forall x \in S.$$

$$p(x) = p\left(\frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|\right) = \|x\| p\left(\underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{\in 1\text{-}Sphere}\right) \geq \|x\| p(a), \text{ так как норма } \frac{x}{\|x\|} \text{ будет равна } 1.$$

$$\text{Тогда } p(a)\|x\| \leq p(x) \leq M\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad \square$$

## Билет 46

**Определение 46.1.**  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.  $(\mathbb{R}^d$  — ключевой случай).

Непрерывное  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  непрерывное — путь.

$\gamma(a)$  — начало пути,  $\gamma(b)$  — конец пути.  $\gamma([a, b])$  носитель пути.

Замкнутый путь  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Простой (самонепересекающийся) путь:  $\gamma(u) \neq \gamma(v) \quad \forall u, v \in [a, b]$ . Возможно, за исключением равенства  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

**Определение 46.2.** Эквивалентные пути:  $\gamma_1: [a, b] \rightarrow X$ ,  $\gamma_2: [c, d] \rightarrow X$ . Если  $\exists u: [a, b] \rightarrow [c, d]$ ,  $u$  — непрерывна и строго монотонно возрастает,  $u(a) = c, u(b) = d$ , такой, что  $\gamma_1 = \gamma_2 \circ u$ .

Неформально говоря, мы считаем, что пути эквивалентны, если у них отличается только время прохождения.

(\*)  $u$  — допустимое преобразование параметра.

**Определение 46.3.** Класс эквивалентных путей — кривая.

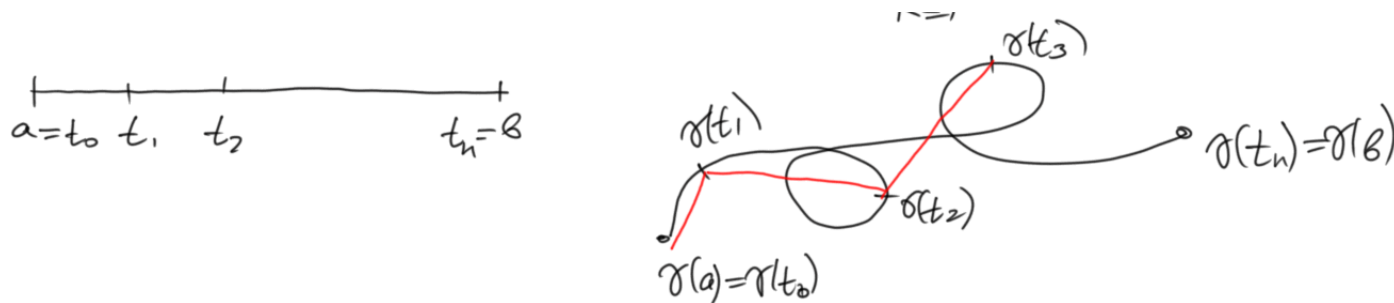
Конкретный представитель класса — параметризация кривой.

**Определение 46.4.**  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ .  $r$ -гладкий путь, если  $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_d \end{pmatrix}$ ,  $\gamma_j: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  —  $r$ -гладкие функции, то есть  $\gamma_j \in C^r[a, b]$ .

Кривая гладкая, если у нее есть гладкая параметризация. Если  $r$  опущено, то  $r = 1$ .

## Билет 47

**Определение 47.1.** Длина пути  $l(\gamma) = \sup \sum_{k=1}^n \rho(\gamma(t_k), \gamma(t_{k-1}))$ , где  $t_k$  — разбиение отрезка. То есть считаем все и берем супремум.



**Замечание.** Длины эквивалентных путей равны.

**Свойства.** 1.  $l(\gamma) \geq \rho(\gamma(a), \gamma(b))$  (то есть  $\geq$  прямой). Можно просто взять разбиение состоящее из двух точек.

2.  $l(\gamma) \geq$  длина вписанной в нее ломаной.

**Теорема 47.1.** Пусть есть  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ .  $c \in [a, b]$ .

$$l(\gamma) = l(\gamma|_{[a, c]}) + l(\gamma|_{[c, b]}).$$

Обозначим куски за  $\gamma_1, \gamma_2$ .

**Доказательство.** Нам нужно доказать какое-то равенство, поэтому докажем два неравенства!

- $\geq$ . Давайте вписывать ломанные. Впишем какую-то ломанную в  $\gamma_1$  и еще какую-то в  $\gamma_2$ . Пусть получились дробления  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = u_0 < \dots < u_m = b$  — получилось дробление  $[a, b]$ .

Тогда посчитаем сумму:  $\sum_{k=1}^n \rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) + \sum_{k=1}^n \rho(\gamma(u_{k-1}), \gamma(u_k)) \leq l(\gamma)$ . Заменим первое слагаемое на  $\sup$ :  $\sup \dots + \sum_{k=1}^n \rho(\gamma(u_{k-1}), \gamma(u_k)) \leq l(\gamma)$ . А этот  $\sup$  — длина  $\gamma_1$ . Встает вопрос почему можно переходить. Мы знаем, что все числа меньше, то и супремум меньше, поэтому переход корректный. Дальше заменяем правый  $\sup$ . В итоге получаем  $l(\gamma_1) + l(\gamma_2) \leq l(\gamma)$ .

- Возьмем дробление  $\gamma$   $t_i$ . Посмотрим на сумму  $S = \sum_{j=1}^n \rho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j))$ .

Возьмем дробление  $t_i$  и добавим в него точку  $c$ . Получаем:

$$S \leq \sum_{j=1}^k \rho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) + \rho(\gamma(t_k), \gamma(c)) + \rho(\gamma(c), \gamma(t_{k+1})) + \sum_{j=k+2}^n \rho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j))$$

А теперь увидим, что первые два слагаемых  $\leq l(\gamma_1)$ , а вторые два  $\leq l(\gamma_2)$ .  
То есть  $l(\gamma) \leq l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$ .

□

## Билет 48

**Теорема 48.1.**  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  — гладкий путь.  $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_d \end{pmatrix}$ . Тогда:

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 + \dots + \gamma_d'(t)^2} dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

**Лемма.**  $\Delta \subset [a, b]$  — отрезок,  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ .  $m_\Delta^{(i)} := \min_{t \in \Delta} |\gamma_i'(t)|$ ,  $M_\Delta^{(i)} := \max_{t \in \Delta} |\gamma_i'(t)|$ ,  $m_\Delta :=$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^d (m_\Delta^{(i)})^2}, M_\Delta := \sqrt{\sum_{i=1}^d (M_\Delta^{(i)})^2}$$

Тогда  $m_\Delta l(\Delta) \leq l(\gamma|_\Delta) \leq M_\Delta l(\Delta)$ .

**Доказательство.** Впишем в  $\gamma|_{\Delta}$  ломаную. Пусть  $a_k$  — длина  $k$ -го звена.

$$\text{По теореме Лагранжа: } \gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1}) = \underbrace{\gamma'_i(\xi_{ik})(t_k - t_{k-1})}_{\geq m_{\Delta}^{(i)}(t_k - t_{k-1})} \leq M_{\Delta}^{(i)}(t_k - t_{k-1})$$

Тогда  $m_{\Delta}(t_k - t_{k-1}) \leq a_k \leq M_{\Delta}(t_k - t_{k-1})$ . Просуммируя все такие неравенства получим исходное.  $\square$

*Доказательство теоремы.* По лемме длина звена:

$$\begin{aligned} m_k(x_k - x_{k-1}) &\leq l(\gamma|_{[x_{k-1}, x_k]}) \leq M_k(x_k - x_{k-1}) \\ \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) &\leq l(\gamma) \leq \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) \\ m_k(x_k - x_{k-1}) &\leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \dots + \gamma_d'(t)^2} dt \leq M_k(x_k - x_{k-1}) \quad (*) \\ \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) &\leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} \|\gamma'(t)\| dt \leq \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

Заметим, что  $(*)$  получается просто из того, что  $m_k$  — минимум, а  $M_k$  — максимум. Также заметим, что суммы в первой и четвертой строчке равны.

Докажем, что сумма с  $M_k$  минус сумма с  $m_k$  стремится к нулю. По факту хотим доказать, что  $\sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} M_k - m_k &= \sqrt{\sum_{i=1}^d (M_{[x_{k-1}, x_k]}^{(i)})^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^d (m_{[x_{k-1}, x_k]}^{(i)})^2} \leq (\text{Минковский}) \sqrt{\sum_{i=1}^d (M_{[x_{k-1}, x_k]}^{(i)} - m_{[x_{k-1}, x_k]}^{(i)})^2} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^d (M_{[x_{k-1}, x_k]}^{(i)} - m_{[x_{k-1}, x_k]}^{(i)}) = \sum_{i=1}^d (\gamma_i(\xi_k) - \gamma_i(\eta_k)) \leq \sum_{l=1}^d \omega_k(|\tau|). \quad (\xi_k, \eta_k \in [x_{k-1}, x_k]). \\ 0 &\leq \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \underbrace{\sum_{i=1}^d \omega_k(|\tau|)}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})}_{=b-a} \end{aligned}$$

$\square$

**Следствие.** 1.  $\|\gamma'\| \leq C \implies l(\gamma) \leq C(b-a)$ . Бежали со скоростью  $\leq C \implies$  пробежали  $\leq C \cdot (b-a)$ .

2. Длина графика функции  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ .

3. Длина в полярных координатах.  $r: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} d\varphi$ .

**Доказательство.** 2.  $\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ ,  $\gamma_1'(x) = 1$ ,  $\gamma_2'(x) = f'(x)$ , а дальше применить функцию.



3.  $\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi) \cos \varphi \\ r(\varphi) \sin \varphi \end{pmatrix}$ . Подставим и возьмем производную.

□

## Билет 49

**Определение 49.1.**  $A$  — связное множество, если  $\forall$  покрытие из  $U, V$   $A \subset U \cup V, U \cap V = \emptyset \implies$  либо  $A \subset U$ , либо  $A \subset V$ , где  $U, V$  — открытые.

**Пример.** 1.  $[a, b]$  — связное множество в  $\mathbb{R}$ .

2.  $\mathbb{Q}$  — несвязное множество в  $\mathbb{R}$ . Пример  $\mathbb{Q} \subset (-\infty; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$ .

**Теорема 49.1.** Непрерывный образ связного множества — связное множество.

**Доказательство.**  $A$  — связное,  $f: A \subset X \rightarrow Y$  непрерывное. Хотим показать, что  $f(A) \subset U, V$  — открытые множества в  $Y$ , причем  $U \cap V = \emptyset$ . Тогда образ лежит либо в  $U$ , либо в  $V$ . Так как множества открытые, то и  $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$  будут открытыми, причем  $A \subset f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$  и пересечение прообразов будет пустым.

Так как  $A$  связно, то оно будет лежать ровно в одном из прообразов, а значит и образ будет лежать ровно в одном множестве. □

**Следствие Теорема Больцано-Коши.** Пусть  $A$  — связное,  $a, b \in A$ .  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывная.

Тогда  $f$  принимает все промежуточные значения, лежащие между  $f(a)$  и  $f(b)$ .

**Доказательство.** От противного. Пусть  $f(a) < C < f(b)$  и  $C$  — не значение. Тогда  $f(A) \subset (-\infty, C) \cup (C, +\infty)$ . Заметим, что данные множества открытые и не пересекаются. Тогда получили противоречие со связностью  $f(A)$ . □

**Теорема 49.2.**  $\langle a, b \rangle$  — связное подмножество  $\mathbb{R}$ ,  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ .

**Доказательство.** От противного. Пусть  $\langle a, b \rangle \subset U \cup V, U \cap V = \emptyset$ .

Пусть  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R} = f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle a, b \rangle \cap U \neq \emptyset \\ 1 & x \in \langle a, b \rangle \cap V \neq \emptyset \end{cases}$  — непрерывная функция. Её прообразы:

$\emptyset, \langle a, b \rangle, \langle a, b \rangle \cap U, \langle a, b \rangle \cap V$  — открытые в  $\langle a, b \rangle$  множества, но значение  $\frac{1}{2}$  не принимается, а значения 0 и 1 точно принимаются, так как иначе бы  $\langle a, b \rangle$  лежал бы ровно в 1 множестве. □

**Определение 49.2.**  $A$  — линейно связно, если  $\forall u, v \in A \exists \gamma: [a, b] \rightarrow A: \gamma(a) = u, \gamma(b) = v$ .

**Теорема 49.3.** Линейно связное множество связно.

**Доказательство.**  $A$  — линейно связно, пусть оно не связно  $\implies A \subset U \cup V, U \cap V = \emptyset, A \cap U \neq \emptyset$  и  $A \cap V \neq \emptyset$ .

Возьмем  $u \in A \cap U, v \in A \cap V$  и соединим их путем  $\gamma$ .  $\gamma[a, b]$  — связное (как образ отрезка),  $\gamma[a, b] \subset A \subset U \cup V \implies \underbrace{\gamma[a, b] \subset U}_{\text{нет } \gamma(b)} \text{ или } \underbrace{\gamma[a, b] \subset V}_{\text{нет } \gamma(a)}$ . Противоречие. □

**Определение 49.3.** Область — открытое, линейно связное множество (из теоремы область связна).

**Замечание.** Если  $A$  открыто, то  $A$  — связно  $\iff A$  — линейно связно.

## Билет 50

**Определение 50.1.**  $X, Y$  — векторные пространства,

$A: X \rightarrow Y$  — линейный оператор, если  $\forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$ .

**Свойства.** 1.  $A0_X = 0_Y$ . Доказательство:  $\alpha = 0, \beta = 0$ .

2.  $A(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k A(x_k)$ . Доказательство: индукция.

**Определение 50.2.**  $A, B$  — линейный оператор:  $X \rightarrow Y$ .

$$(A + B)(x) := A(x) + B(x).$$

$$(\lambda A)(x) = \lambda A(x).$$

То есть получили векторное пространство линейных операторов.

**Определение 50.3.**  $A: X \rightarrow Y, B: Y \rightarrow Z$  — линейные операторы  $B \circ A: X \rightarrow Z$ .  $(B \circ A)(x) := B(A(x))$ .

**Замечание.** Это линейный оператор.

**Определение 50.4.** Обратный оператор:  $A: X \rightarrow Y, B: Y \rightarrow X$  обратный к  $A$ , если  $A \circ B = Id_Y$  и  $B \circ A = Id_X$ . Обозначается  $A^{-1}$ .

**Свойства.** 1. Если обратный оператор  $\exists$ , то он единственный.

$$2. (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}.$$

3.  $A: X \rightarrow X$  — обратимые операторы образуют группу по операции композиции.

**Доказательство.** 1.  $B \circ A = Id_X \implies A$  — инъекция. Если  $A(x) = A(y) \implies x = B(A(x)) = B(A(y)) = y$ .

$A \circ B = Id_Y \implies A$  — сюръекция.  $A(B(y)) = y \implies$  просто биекция.

Пусть  $B, C$  — обратные к  $A$ .  $B(A(x)) = B \circ A(x) = x = C \circ A(x) = C(A(x)) \implies B = C$  на множестве значений  $A$ , но  $A$  — сюръекция.

$$2. ((\frac{1}{\lambda} A^{-1}) \circ (\lambda A))(x) = \frac{1}{\lambda} A^{-1}(\lambda A(x)) = x.$$

□

**Пример для 3 свойства.**  $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m$ . Можно рассматривать линейные операторы как матрицы  $\implies Ax = y$  ( $m$  на  $n$  матрица).

**Определение 50.5** (Матричная запись).  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Возьмем базисный вектор  $e_k$  — везде 0, кроме  $k$ -ой позиции — там 1.

$$\text{Пусть } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i. \text{ Тогда } Ax = A\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n x_k \underbrace{A e_k}_{:= A_k \in \mathbb{R}^m}.$$

То есть получили набор столбцов. Из которого можно получить матрицу.

# Билет 51

**Определение 51.1.**  $X$  и  $Y$  — нормированные пространства.  $A: X \rightarrow Y$  — линейный оператор.

$$\|A\| := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y.$$

Оператор ограниченный, если его норма конечна.

**Замечание.** Ограниченный оператор  $\neq$  ограниченное отображение.

Линейное отображение + ограниченность  $\implies = 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $Ax \neq 0$ , тогда  $A(\lambda x) = \lambda Ax$ , а это уже не ограничено. □

**Свойства.** 1.  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$$2. \|\lambda A\| = \lambda \|A\|.$$

$$3. \|A\| = 0 \iff A \equiv 0.$$

**Доказательство.** 1.  $\|(A + B)x\|_Y = \|Ax + Bx\|_Y \leq \|Ax\|_Y + \|Bx\|_Y \iff \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|(A + B)x\|_Y = \|A + B\| \leq \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y + \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Bx\|_Y = \|A\| + \|B\|.$

$$2. \|\lambda Ax\| = |\lambda| \cdot \|Ax\|. \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|\lambda Ax\| = |\lambda| \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\| = |\lambda| \|A\|.$$

$$3. \Rightarrow \|A\| = 0 \implies \|Ax\| = 0 \implies Ax = 0 \implies Ax = A\left(\frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|\right) = \|x\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 0.$$

□

# Билет 52

**Теорема 52.1.**  $A: X \rightarrow Y$  — линейный оператор. Тогда

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \inf\{c > 0 \mid \|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X\}.$$

**Доказательство.** Обозначим за  $N_i$   $i$ -ый элемент этой цепочки.

$$N_1 \geq N_2 \text{ и } N_1 \leq N_3, \text{ так как } N_2, N_3 \subset N_1.$$

$$N_3 \geq N_4. \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \frac{1}{\|x\|} \|Ax\|_Y = \|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\|_Y \leq N_3.$$

$$N_4 = N_5. N_5 = \inf\{c > 0 \mid \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} < c\}$$

Теперь докажем, что  $N_1 \leq N_2$ . Пусть  $\|x\| \leq 1 \implies \|(1 - \varepsilon)x\| \leq 1 \implies \|A((1 - \varepsilon)x)\| \leq N_2$ . Воспользуемся линейностью  $A$ : вытащим  $(1 - \varepsilon)$  за скобку. После этого устремим  $\varepsilon$  к 0. Тогда  $\|Ax\| \leq N_2 \implies N_1 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq N_2$ .

Теперь докажем, что  $N_1 \leq N_4$ .  $\|x\| \leq 1$ . Тогда  $y := \frac{x}{\|x\|}$ ,  $\|y\| = 1 \implies \|A_y\| \leq N_4 \implies \|Ax\| \leq \frac{1}{\|x\|} \cdot \|Ax\| = \|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| \leq N_4 \implies N_1 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq N_4$ . □

## Билет 53

**Теорема 53.1.**  $A: X \rightarrow Y$  — линейный оператор. Следующие условия равносильны:

1.  $A$  — ограниченный оператор.
2.  $A$  — непрерывен в нуле.
3.  $A$  — непрерывен во всех точках.
4.  $A$  — равномерно непрерывен.

**Доказательство.**  $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$  — очевидно.

$1 \Rightarrow 4$   $\|Ax - Ay\|_Y = \|A(x - y)\|_Y \leq \|A\| \cdot \|x - y\|_X$ . Если  $\|x - y\|_X < \frac{\varepsilon}{\|A\|}$ , то  $\|Ax - Ay\|_Y < \varepsilon$ , а это есть равномерность.

$2 \Rightarrow 1$ . Возьмем  $\varepsilon = 1$  и  $\delta > 0$  из определения непрерывности.  $\forall x \in X: \|x\| < \delta \Rightarrow \|Ax\| < 1$ .

Пусть  $\|y\| < 1$ . Тогда  $\|\delta y\| < \delta \Rightarrow \|A(\delta y)\| < 1 \Rightarrow \|Ay\| < \frac{1}{\delta} \Rightarrow \sum_{\|y\| < 1} \|Ay\| \leq \frac{1}{\delta}$ . □

**Следствие.** 1.  $\|Ax\|_Y \leq \|A\| \|x\|_X \quad \forall x \in X$ .

2.  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ .

**Доказательство.** 2.  $\|A(Bx)\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\|$ .

$\|AB\| = \inf\{c > 0 \mid \|A(Bx)\| \leq c \|x\|\} \Rightarrow \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

1. а где □

**Теорема 53.2.**  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ .

Тогда  $\|A\|^2 \leq \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{jk}^2$ . В частности, все такие операторы ограничены.

**Доказательство.**  $\|Ax\|^2 = \sum_{j=1}^m \left( \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k}_{\text{Минковский}} \right)^2 \leq (\text{Коши-Буняковский}) \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk}^2 \underbrace{\sum_{k=1}^n x_k^2}_{=\|x\|^2}$ . Следова-

тельно,  $\|Ax\| \leq \|x\| \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{jk}^2} \geq \|A\|$ . □

**Замечание.** В бесконечномерном случае бывают неограниченные операторы.

## Билет 54

**Определение 54.1.**  $X$  — пространство с нормой,  $x_n \in X$ .

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  — ряд. Частичная сумма ряда  $S_n := \sum_{k=1}^n x_k$ .

Если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty}$ , то он называется суммой ряда.

Ряд сходится, если у него есть сумма (и для  $\mathbb{R}$  эта сумма конечна), иначе она бесконечна.

**Теорема 54.1** (Необходимое условие сходимости). Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} x_k$  — сходится, то  $\lim x_n = 0$ .

**Доказательство.**  $S_n := \sum_{k=1}^n x_k \rightarrow S \implies \underbrace{S_n - S_{n-1}}_{x_n} \rightarrow S - S = 0.$  □

**Свойства.** 1. Линейность.  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$

2. Расстановка скобок. В ряду произвольным образом можно ставить скобки, расстановка скобок дает тот же результат.

**Набросок доказательства:** мы просто смотрим на предел подпоследовательности.

3. В  $\mathbb{C}$  и  $\mathbb{R}^n$  сходимость равносильна покоординатной сходимости.

**Теорема 54.2** (Критерий Коши).  $X$  — полное нормированное пространство.

Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  сходится  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N: \left\| \sum_{k=m}^n x_k \right\| < \varepsilon.$

**Доказательство.**  $S_n := \sum_{k=1}^n x_k$ . Последовательность  $S_n$  сходится  $\iff S_n$  — фундаментальная   
  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N: \|S_n - S_m\| < \varepsilon \iff \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\| < \varepsilon.$  □

## Билет 55

**Определение 55.1.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  сходится абсолютно, если  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$  сходится.

**Замечание.** В частности, в  $\mathbb{R}$  абсолютная сходимость — сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$

**Теорема 55.1.**  $X$  — полное нормированное пространство.

Если  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  абсолютно сходится, то он сходится.

**Доказательство.** Пусть  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$  — сходится. Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N: \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| < \varepsilon.$  Воспользуемся свойством о том, что сумма норм не меньше, чем норма суммы. А значит получили  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N: \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\| < \varepsilon,$  что является критерием Коши для исходной последовательности. □

- Теорема 55.2.** 1.  $X$  — нормированное пространство. Если  $\lim x_n = 0$  и в каждой скобке  $\leq M$  слагаемых то из сходимости ряда после расстановки скобок следует сходимость исходного
2.  $\mathbb{R}$ . Если в каждой скобке все члены одного знака, то из сходимости ряда после расстановки скобок следует сходимость исходного.

**Доказательство.**  $S_n := \sum_{k=1}^n x_k$  и  $S_{n_k} \rightarrow S$ .

- Возьмем  $n: n_k \leq n < n_{k+1}$ .  $S_n = S_{n_k} + x_{n_k} + x_{n_k+1} + x_{n_k+2} + \dots + x_n$ .  $\|S_n - S\| \leq \|S_{n_k} - S\| + \|x_{n_k+1}\| + \dots + \|x_n\|$ . Мы знаем, что  $S_{n_k} \rightarrow S \implies \exists K \forall k \geq K: \|S_{n_k} - S\| < \varepsilon$ .  
 $\lim x_j = 0 \implies \exists N \forall j \geq N: \|x_j\| < \varepsilon$ . Следовательно исходная сумма не более  $(M+1)\varepsilon$ .
- $n_k \leq n < n_{k+1}$ . Пусть в этом блоке неотрицательные слагаемые.  $S_n = S_{n_k} + x_{n_k+1} + x_{n_k+2} + \dots + x_n \geq S_{n_k}$ . А еще знаем, что  $S_n = S_{n_{k+1}} - x_{n_{k+1}} - x_{n_{k+1}-1} - \dots - x_{n+1} \leq S_{n_{k+1}}$ . Откуда получаем, что  $S_{n_k} \leq S_n \leq S_{n_{k+1}}$ , где всё  $\rightarrow S$ .

□

## Билет 56

**Теорема 56.1.** Пусть  $a_n \geq 0$ .

Тогда сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  равносильная ограниченности последовательности  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ .

**Доказательство.**  $S_1 \leq S_2 \leq \dots$ . Монотонная возрастающая последовательность имеет предел  $\iff$  она ограничена. □

**Теорема 56.2** (Признак сравнения). Пусть  $0 \leq a_n \leq b_n$ . Тогда

- Если  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится, то  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  — сходится.
- Если  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  — расходится, то  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  расходится.

**Доказательство.** 1.  $A_n := \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k = B_n$ .

$\sum b_n$  — сходится  $\implies B_n$  — ограничена  $\implies A_n$  ограничена  $\implies \sum a_n$  сходится.

- Отрицание 1.

□

**Следствие.** 1. Пусть  $a_n, b_n \geq 0$ . Если  $a_n = \mathcal{O}(b_n)$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  — сходится, то  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  — сходится.

- Пусть  $a_n, b_n \geq 0$ , Если  $a_n \sim b_n$ , то ряды ведут себя одинаково.

**Доказательство.** 1.  $a_n = \mathcal{O}(b_n) \implies 0 \leq a_n \leq Cb_n$ .  $\sum_{n=1}^{\infty} Cb_n = C \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  — сходится  $\implies \sum a_n$  — сходится.

2.  $a_n = b_n c_n$ , где  $\lim c_n = 1 \implies \frac{1}{2} \leq c_n \leq 2$  при  $n \geq N$ . Тогда  $a_n = \mathcal{O}(b_n)$  и  $b_n = \mathcal{O}(a_n)$ .

□

## Билет 57

**Теорема 57.1** (Признак Коши). Пусть  $a_n \geq 0$ .

1. Если  $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ , то ряд сходится.
2.  $\sqrt[n]{a_n} > 1$ , то ряд расходится.
3. Пусть  $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} =: q^*$ . Если  $q^* > 1$ , то ряд расходится, если  $q^* < 1$ , то ряд сходится.

**Замечание.** Если  $q^* = 1$ , то ряд может сходиться, а может расходиться.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  — сходится,  $\sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}} \rightarrow 1$ .

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  — расходится.  $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1$ .

**Доказательство.** 1.  $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \implies a_n \leq q^n$ . По признаку сравнения с геометрической прогрессией  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  — сходится.

2.  $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \implies a_n \not\rightarrow 0 \implies$  расходится.

3. Если  $q^* > 1$ . Найдется  $n_k : \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \rightarrow q^* > 1$  (по определению верхнего предела)  $\implies$  начиная с некоторого номера  $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1 \implies a_{n_k} > 1 \implies a_n \not\rightarrow 0$  и ряд расходится.

Если  $q^* < 1$ ,  $q^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{a_k} \implies$  для больших  $n$   $\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{a_k} < q < 1$ . Но при этом  $\sqrt[n]{a_n} \leq \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{a_k}$ , а значит  $\sqrt[n]{a_n} < q$  при больших  $n \implies$  ряд сходится.

□

## Билет 58

**Теорема 58.1** (Признак Даламбера). Пусть  $a_n > 0$ . Тогда

1.  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq d < 1$ , то ряд сходится.
2. Если  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ , то ряд расходится.
3. Пусть  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^*$ . Если  $d^* < 1$ , то ряд сходится. Если  $d^* > 1$ , то ряд расходится.

**Замечание.** С единицей все еще ничего непонятно. Смотри предыдущие примеры.

**Доказательство.** 1.  $\frac{a_n}{a_1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_2}{a_1} \leq d^{n-1}$ .  $a_n \leq d^{n-1} \cdot a_1$  и ряд мажорируется геометрической прогрессией  $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot d^{n-1}$ . Она сходится  $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  — сходится.

2.  $a_{n+1} \geq a_n \implies a_n \geq a_1 > 0$  и  $a_n \not\rightarrow 0 \implies$  ряд расходится.

3. Если  $d^* > 1$ . Тогда  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$  при  $n \geq N \implies a_n \geq a_N > 0 \quad \forall n \geq N \implies a_n \not\rightarrow 0$  и ряд расходится.

Если  $d^* < 1$ . Так как  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^* \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} < d$  при  $n \geq N \implies$  ряд сходится по признаку 1.

□

**Пример.**  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ .

Даламбер.  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{n+1} \rightarrow 0 < 1$ . Ряд сходится.

Коши.  $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{x}{\sqrt[n]{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}} = \frac{x}{ne^{-1} \sqrt[n]{2\pi n}} \sim \frac{xe}{n} \rightarrow 0$ .

**Теорема 58.2.** Пусть  $a_n > 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^*$ . Тогда  $\lim \sqrt[n]{a_n} = d^*$ .

**Доказательство.**  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^* \implies \lim \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{(n+1) - n} = \ln d^* \xrightarrow{\text{т. Штольца}} \lim \frac{\ln a_n}{n} = \ln d^* \implies \lim \sqrt[n]{a_n} = d^*$ .

□

## Билет 59

**Теорема 59.1.** Пусть  $f$  неотрицательная монотонная:  $[1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда:

$$\left| \sum_{k=a}^b f(k) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \max\{f(a), f(b)\}.$$

**Доказательство.** Картинка : (

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) \geq \int_a^b f(x) dx \geq \sum_{k=a+1}^b f(k).$$

TODO.

□

**Теорема 59.2** (интегральный признак сходимости ряда). Пусть  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  неотрицательная, монотонно убывающая.

Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  и  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  ведут себя одинаково.

**Доказательство.** По предыдущей теореме  $S_n := \sum_{k=1}^n f(k) \geq \int_1^n f(x) dx \geq \sum_{k=2}^n f(k) = S_n - f(1)$ .

Если ряд сходится, то  $S_n$  — ограничена  $\implies \int_1^n f(x) dx$  ограничена  $\implies F(x) = \int_1^x f(x) dx$  — ограничена  $\implies \int_1^{\infty} f(x) dx$  сходится.

Если  $\int$  сходится  $\implies \int_1^n f(x) dx$  — ограничена  $\implies S_n$  — ограничена  $\implies$  ряд сходится.

□



**Пример.** 1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ,  $p > 0$  (иначе члены ряда  $\nrightarrow 0$  и ряд расходится).

$f(x) = \frac{1}{x^p}$ . Монотонно убывает.  $\sum \frac{1}{n^p}$  и  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$  ведут себя одинаково: сходятся при  $p > 1$ .

2.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ .  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$  монотонно убывает. Поэтому  $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$  и  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  ведут себя одинаково.

Там можно посчитать интеграл (разойдется).

**Следствие.** 1. Если  $a_n > 0$  и  $a_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n^p})$  при  $p > 1$  — ряд  $\sum a_n$  — сходится.

2. Если  $a_n > 0$  и  $a_n \sim \frac{c}{n^p}$ , то при  $p > 1$  ряд  $\sum a_n$  — сходится, а иначе расходится.