

# Математическая логика

Ипатов Марк

8 апреля 2022 г.

## Содержание

<b>1. Множества, мощность множеств</b>	<b>1</b>
1.1 Равномощные множества . . . . .	1

# 1. Множества, мощность множеств

## 1.1. Равномощные множества

...тут я ещё не начинал записывать

**Определение 1.1.** Множества  $A$  и  $B$  равномощны, если  $\exists$  биекция между  $A$  и  $B$

**Замечание.** Равномощность является отношением эквивалентности. Очев.

Возможная, но не совсем корректная трактовка — равномощные множества — содержащие равное количество элементов. Для конечных это действительно верно.

**Определение 1.2.** Множество называется счётным, если оно равномощно множеству натуральных чисел.

Пояснение: мы считаем натуральными числами множество  $\{1, 2, 3, \dots\}$ , но никакой разницы с  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$  нет, т.к. существует биекция из одного в другое —  $i \rightarrow i - 1$ .

**Пример.** Чётные числа — счётное множество. Биекция —  $i \rightarrow 2 \times i$

**Лемма.**  $A, B$  — счётны  $\Rightarrow A \cup B$  — счётно при  $A \cap B = \emptyset$ .

**Доказательство.**  $\exists f : N \rightarrow A \Rightarrow A : \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

Аналогично  $B : \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$

Тогда запишем:

$C : \{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots\}, c_{2i-1} = a_i, c_{2i} = b_i$

□

**Следствие.**  $\mathbb{Z}$  — счётно.

**Доказательство.**  $\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{-1, -2, -3, \dots\}$ , первое равномощно  $\mathbb{N}$ , как и второе, а значит  $\mathbb{Z}$  — счётно по предыдущей лемме. □

**Лемма.**  $B$  — счётное,  $A \subset B$ , тогда  $A$  — конечное или счётное.

**Доказательство.**  $B$  — счётно, тогда можно записать  $B : \{b_1, b_2, \dots\}$

Раз  $A$  подмножество, то просто часть элементов отсутствует. Тогда мы пойдём сопоставлять числа оставшимся элементам. Первое оставшееся — 1, второе — 2, и т.д. Тогда или в какой-то момент у нас закончатся оставшиеся числа, т.е. найдётся то, после которого нет оставшихся, и тогда  $A$  — конечно, или мы построим биекцию между  $A$  и натуральными числами. Это биекция, поскольку это инъекция и сюръекция (мы каждому натуральному поставили число, и всем элементам  $A$  что-то одно сопоставили) □

**Теорема 1.1 (Лемма).** Любое бесконечное множество содержит счётное подмножество.

**Определение 1.3.** Множество  $X$  бесконечно, если  $\forall i \in \mathbb{N}$  можно найти  $i$  различных элементов из  $X$ .

**Доказательство.** Возьмём элемент из  $X$ . Назовём его  $a_1$ . Если в  $X$  не осталось элементов, значит в нём был всего один элемент. Иначе возьмём из  $X$  какой-то другой элемент, назовём его  $a_2$ . Если снова не осталось, то было всего два элемента. И так далее, построили  $Y = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ , и  $Y \subset X, f : \mathbb{N} \Leftrightarrow Y$ . □

**Пример.** Счётное множество, для которого мы таким процессом не докажем счётность:  $X = \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $Y = \{2, 4, 6, \dots\}$ . Иными словами, мы все элементы из  $X$  далеко не обязательно вытаскиваем.

**Пример.** Множество  $(0, 1)$  не является счётным.

**Следствие.**  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$  — счётны  $\therefore A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$  — счётно

**Доказательство.** Для дизъюнктивных всё хорошо понятно. Для недизъюнктивных:

Посмотрим на  $A_1$  и  $A_2$

$A_1$ . Оба счётны, а тогда  $A_1 \cup A_2 = A_1 \sqcup (A_2 \setminus A_1)$

Теперь воспользуемся индукцией по  $k$ : База:  $A_1, A_2$  счётны по условию, тогда  $A_1 \cup A_2$  тоже счётно. Тогда  $(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots A_k) = ((\dots((A_1 \cup A_2) \cup A_3) \cup \dots) \cup A_k)$   $\square$

**Лемма.**  $A_1, A_2, \dots$  — счётное число счётных множеств, т.е. для любого  $i \exists A_i$ .

Тогда  $A_1 \cup A_2 \cup \dots$  тоже счётно.

**Доказательство.**  $A_1$  счётно, тогда  $A_1 : \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots\}$ . Аналогично  $A_2 : \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots\}$  И так далее ещё счётное число строк.

Теперь нам нужно эту таблицу представить в виде последовательности. Будем ходить по диагоналям:  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \dots$

Утверждение — любой элемент будет выписан. Рассмотрим элемент множества  $i$  номер  $j$ , тогда оно будет на  $i + j$ -ой диагонали, а значит его номер точно не будет превышать  $(i + j)^2$ . Тогда получаем, что любой элемент будет выписан.

Это всё для непересекающихся множеств, а для пересекающихся — давайте просто не выписывать элементы, которые уже выписали.  $\square$

**Упражнение.**  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$  — счётны.  $[0, 1)$  — несчётно (просто знаем), знаем  $\mathbb{R}$  — несчётно.  $\mathbb{Q}$  — счётно или нет?

**Доказательство.**  $\mathbb{Q}_+$  счётно. Давайте представим его в виде  $A_1 \cup A_2 \cup \dots$ , где  $A_i = \{\frac{m}{i} | m \in \mathbb{N}\}$ . Т.к. любое из  $\mathbb{Q}_+$  так представляется, то в такое объединение попадёт всё  $\mathbb{Q}_+$ .  $\square$

**Лемма.**  $A, B$  — счётны, тогда  $A \times B$  — счётно.

**Доказательство.**  $A, B$  — счётны, тогда  $A : \{a_1, a_2, \dots\}$ ,  $B : \{b_1, b_2, \dots\}$  Элементы из  $A \times B$  выглядят так:  $(a_i, b_j)$ , тогда давайте запишем следующее:

$A_1 = a_1 \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), \dots\}$ ,  $A_2$  аналогично, и так далее. Тогда каждое  $A_i$  — счётно, и их счётное число, значит их объединение, которое и есть  $A \times B$  счётно, по доказанной лемме.  $\square$

Двигаемся к несчётным множествам.

**Лемма.** Пусть  $A$  бесконечно, а  $B$  — конечно. Тогда  $A \cup B$  равномощно  $A$ .

**Доказательство.**  $B$  заменим на  $B' = B \setminus A$ .  $B'$  или станет пустым, или останется конечным.

Очевидно, что  $A \cup B = A \sqcup B'$

У  $A$  есть счётное подмножество  $A' = \{a_1, a_2, \dots\}$ , тогда  $A = (A \setminus A') \cup A'$ .

Хотим построить биекцию между  $A = A' \cup (A \setminus A')$  и  $A' \cup B' \cup (A \setminus A')$

Между частями  $(A \setminus A')$  построим тождественную биекцию. А  $a_i$  будем отображать в  $b_i$ , если  $i \leq k$ , а в  $a_{i-k}$  если  $i > k$ . Понятно, что это биекция. Все элементы возьмём как из  $B$ , так и из  $a_i$ .  $\square$

**Замечание.** Доказательство можно модифицировать для случая, когда  $B$  счётно. Тогда давайте на последнем шаге чётные отображать в  $a_i$ , а нечётные — в  $b_i$ .

**Теорема 1.2.** Множество  $X$  последовательностей (бесконечных) из нулей и единиц не счётно. (Бинарные строки бесконечной длины)

**Доказательство.** От противного: пусть счётен, тогда есть биекция  $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ . Тогда выпишем последовательности  $f(1), f(2), f(3), \dots$ . А теперь воспользуемся диагональным (методом Кантора): Посмотрим на элемент  $a_{11}$ , возьмём элемент  $1 - a_{11}$ . Затем на элемент  $a_{22}$ , возьмём  $1 - a_{22}$ . И так далее, строим последовательность  $1 - a_{ii}$ . Получили бесконечную последовательность нулей и единиц, значит она элемент  $X$ . Но при этом она не может быть любой  $i$ -ой последовательностью, поскольку её  $i$ -ый элемент не совпадает с  $i$ -ым элементом строки  $i$  по тому, как мы строили нашу последовательность. Противоречие. Значит мы не можем вот так вот выписать наши элементы  $X$ , значит биекции  $f$  не существует.  $\square$

**Следствие.** Множество чисел из отрезка  $[0, 1]$  несчётно.

**Доказательство.** Покажем равномощность множеству  $X$  из теоремы. Из бесконечной последовательности число получить легко — припишем слева «0,», а все элементы последовательности запишем слитно. Могло показаться, что получили биекцию, но нет. У нас разные последовательности могут соответствовать одному числу —  $0,100000000\dots$  и  $0,011111111\dots$  — разные последовательности, но являются одним числом. Возьмём две последовательности —  $0, a_{11}a_{12}a_{13}\dots$ ,  $0, a_{21}a_{22}a_{23}\dots$ . Утверждение — они задают одно число тогда и только тогда, когда они имеют один префиксы, а затем у одного числа идёт единица и после только нули, а у второго ноль и затем только единицы. Идём слева направо и найдём первый момент, когда они отличаются. В одном ноль, во втором единица. Далее всё идёт сколько-то, как мы предсказали, затем, что-то разойдётся и там можно оценить, что числа у нас уже отличаются на что-то, что не сможем покрыть дальнейшим. Спасибо Близнецу за успешно закрытую собой доску... Но там в любом случае очев =  $D$  А все числа такого вида это просто  $\mathbb{Q}$  (или что-то такого рода) ((На самом деле оно даже не  $\mathbb{Q}$ , там только дроби вида сумма какого-то конечного числа отрицательных степеней двойки, что есть подмножество  $\mathbb{Q}$ )). Тогда  $X \equiv [0, 1] \sqcup (\mathbb{Q} \cap [0, 1])$ . Результат пересечения счётен, а значит объединение равномощно бесконечной левой части, т.е.  $X \equiv [0, 1]$   $\square$

Теперь знаем, что натуральные счётны, чётные счётны, целые счётны, рациональные положительные счётны, просто рациональные счётны. А вот действительные уже несчётны, т.к. содержат  $[0, 1]$ .

**Пример.** Множество точек границ треугольника и вписанного круга равномощны, т.к. можно построить биекцию из центра.