

# Математический анализ

Харитонцев-Беглов Сергей

20 июня 2022 г.

## Содержание

<b>1. Интегральное исчисление функции одной переменной</b>	<b>1</b>
1.1 Первообразная и неопределенный интеграл . . . . .	1
1.2 Определенный интеграл . . . . .	3
1.3 Свойства интеграла . . . . .	5
1.4 Приложения формулы интегрирования по частям . . . . .	9
<b>Отступление. Равномерная непрерывность</b>	<b>12</b>
<b>Продолжение главы 1</b>	<b>14</b>
1.5 Интегральные суммы . . . . .	14
1.6 Несобственные интегралы . . . . .	18
<b>2. Анализ в метрических пространствах</b>	<b>26</b>
2.1 Метрические и нормированные пространства . . . . .	26
2.2 Компактность . . . . .	35
2.3 Непрерывные отображения . . . . .	39
2.4 Длина кривой . . . . .	42
2.5 Линейные операторы . . . . .	46
<b>3. Ряды</b>	<b>49</b>
3.1 Ряды в нормированных пространствах . . . . .	49
3.2 Знакопостоянные ряды . . . . .	50
3.3 Знакопеременные ряды . . . . .	53
3.4 Бесконечные произведения . . . . .	57
3.5 Функциональные последовательности и ряды . . . . .	58
3.6 Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов . . . . .	63
3.7 Степенные ряды . . . . .	65
<b>4. Дифференциальное исчисление функции многих переменных</b>	<b>70</b>
4.1 Дифференцируемость функции многих переменных . . . . .	70

4.2	Непрерывная дифференцируемость . . . . .	73
4.3	Частные производные высших порядков . . . . .	74
4.4	Обратные и неявные функции . . . . .	76
4.5	Вступление к неявным функциям . . . . .	80
4.6	Экстремум . . . . .	80

# 1. Интегральное исчисление функции одной переменной

## 1.1. Первообразная и неопределенный интеграл

**Определение 1.1.**  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Функция  $F: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — первообразная функции  $f$ , если  $F'(x) = f(x) \forall x \in \langle a, b \rangle$

**Теорема 1.1.** Непрерывная на промежутке функция имеет первообразную.

**Доказательство.** Позже. □

**Замечание.**  $\text{sign } x = \begin{cases} 1 & \text{если } x > 0 \\ 0 & \text{если } x = 0. \text{ Не имеет первообразной.} \\ -1 & \text{если } x < 0 \end{cases}$

**Доказательство.** От противного: пусть нашлась  $F: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  и  $F'(x) = \text{sign}(x)$ .

Тогда воспользуемся теоремой Дарбу для  $F$  на отрезке  $[0; 1]$ .

Пусть  $k = \frac{1}{2} \in (\text{sign}(0), \text{sign}(1))$ . Значит  $\exists c \in (0, 1): F'(c) = k = \frac{1}{2}$ . Противоречие. □

**Теорема 1.2.**  $f, F: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  и  $F$  — первообразная для  $f$ . Тогда:

1.  $F + C$  — первообразная для  $f$ .
2. Если  $\Phi: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — первообразная для  $f$ , то  $\Phi = F + C$ .

**Доказательство.**

1.  $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$
2.  $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow (\Phi - F)' \equiv 0 \Rightarrow \Phi - F$  — константа. □

**Определение 1.2.** Неопределённый интеграл — множество всех первообразных.

$\int f(x) dx = \{F: F \text{ — первообразная } f\}$ . Но мы будем записывать  $\int f(x) dx = F(x) + C$

**Табличка интегралов.**

1.  $\int 0 dx = C$ .
2.  $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$ , при  $p \neq -1$ .
3.  $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$ .
4.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ , при  $a > 0, a \neq 1$ .
5.  $\int \sin x dx = -\cos x + C$ .
6.  $\int \cos x dx = \sin x + C$ .

7.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
8.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
9.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$
10.  $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$
11.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C.$
12.  $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$

**Доказательство.** Для 3. Если  $x > 0$   $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ . Если  $x < 0$   $\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C$ , то есть  $(\ln(-x))' = (\frac{1}{-x})(-x)' = \frac{-1}{x}$ .

$$\text{Для 11. } (\ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}|)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm 1}} (x + \sqrt{x^2 \pm 1})' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm 1}}}{x + \sqrt{x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2 \pm 1} + x}{\sqrt{x^2 \pm 1}}}{x + \sqrt{x^2 \pm 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$$

$$\text{Для 13. } (\frac{1}{2}(\ln |1+x| - \ln |1-x|))' = \frac{1}{2}(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}) = \frac{1}{1-x^2}$$

□

**Замечание.**  $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$ ,  $cA := \{ca : a \in A\}$ .

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx = \{F + C\} + \{G + \tilde{C}\} = \{F + G + C\}.$$

**Теорема 1.3** (Арифметические действия с неопределенными интегралами). Пусть  $f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  имеют первообразные. Тогда:

1.  $f + g$  имеет первообразную и  $\int (f + g) dx = \int f dx + \int g dx$
2.  $\alpha f$  имеет первообразную и  $\int \alpha f dx = \alpha \int f dx$

**Доказательство.** Пусть  $F$  и  $G$  первообразные для  $f$  и  $g$ .

1. Тогда  $F + G$  — первообразная для  $f + g$ . Тогда  $\int (f + g) = F + G + C = \int f + \int g$ .
2. Тогда  $\alpha F$  — первообразная для  $\alpha f \implies \int \alpha f = \alpha F + C = \alpha(F + \frac{C}{\alpha}) = \alpha \int f$ .

□

**Следствие Линейность неопределенного интеграла.**  $f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  имеют первообразную  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ . Тогда  $\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$ .

**Доказательство.** Прямое следствие из теоремы выше.

□

**Теорема 1.4** (Теорема о замене переменной в неопределенном интеграле).  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi : \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ ,  $f$  имеет первообразную  $F$ .  $\varphi$  дифференцируемая. Тогда  $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C$ .

**Доказательство.** Надо проверить, что  $F(\varphi(t))$  — первообразная для  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ .

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

□

**Следствие.**  $\int f(\alpha x + \beta) dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + C$

**Доказательство.**  $\int \alpha f(\alpha x + \beta) dx = F(\alpha x + \beta) + C$ . И делим обе части на  $\alpha$ .

□

**Теорема 1.5** (Формула интегрирования по частям).  $f, g: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , дифференцируемые,  $f'g$  имеет первообразную.

Тогда  $fg'$  имеет первообразную и  $\int fg' = fg - \int f'g$

**Доказательство.**  $H$  — первообразная для  $f'g$ . Тогда  $H' = f'g$ .

Надо доказать, что  $fg - H$  — первообразная для  $fg'$ .

$$(fg - H)' = f'g + gh' - H' = f'g + fg' - f'g = fg'.$$

□

## 1.2. Определенный интеграл

Пусть  $\mathcal{F}$  — совокупность (множество) ограниченных плоских фигур.

**Определение 1.3.** Площадь:  $\sigma: \mathcal{F} \rightarrow [0; +\infty)$ , причём

1.  $\sigma([a; b] \times [c; d]) = (b - a)(d - c)$
2. (Аддитивность).  $\forall E_1, E_2 \in \mathcal{F}: E_1 \cap E_2 = \emptyset \Rightarrow \sigma(E_1 \cup E_2) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$

**Свойство Монотонность площади.**  $\forall E, \tilde{E}: E \subset \tilde{E} \Rightarrow \sigma(E) \leq \sigma(\tilde{E})$ .

**Доказательство.**  $\tilde{E} = E \cup (\tilde{E} \setminus E) \Rightarrow \sigma(\tilde{E}) = \sigma(E) + \sigma(\tilde{E} \setminus E)$ .

□

**Определение 1.4.** Псевдоплощадь:  $\sigma: \mathcal{F} \rightarrow [0; +\infty)$ , причём

1.  $\sigma([a; b] \times [c; d]) = (b - a)(d - c)$ ,
2.  $\forall E, \tilde{E} \in \mathcal{F}: E \subset \tilde{E} \Rightarrow \sigma(E) \leq \sigma(\tilde{E})$ ,
3. Разобьем  $E$  вертикальной или горизонтальной прямой, в том числе теми прямыми, которые правее или левее  $E$ . Тогда  $E = E_- \cup E_+$ ,  $E_- \cap E_+ = \emptyset$  и  $\sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$ .

**Свойства.** 1. Подмножество вертикального или горизонтального отрезка имеет нулевую площадь.

2. В определении  $E_-$  и  $E_+$  неважно куда относить точки из  $l$ .

**Доказательство.** Пусть  $\tilde{E} = E_- \cup (E \cap l) = (E_- \setminus l) \cup (E \cap l)$ .

Тогда  $\sigma(\tilde{E}) = \sigma(E_- \cup (E \cap l)) = \sigma(E_- \setminus l) + \underbrace{\sigma(E \cap l)}_{=0} \Rightarrow$  вообще не имеет разницы куда относить точки из  $l$ .

□

**Пример.**

1.  $\sigma_1(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^n |P_k| : P_k \text{ — прямоугольник, } \bigcup_{k=1}^n P_k \supset E \right\}$ .
2.  $\sigma_2(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |P_k| : P_k \text{ — прямоугольник, } \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supset E \right\}$ .

**Упражнение.**

1. Доказать, что  $\forall E \quad \sigma_1(E) \geq \sigma_2(E)$ .
2.  $E = ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \times ([0, 1] \cap \mathbb{Q})$ . Доказать, что  $\sigma_1(E) = 1, \sigma_2(E) = 0$ .

**Теорема 1.6.**

1.  $\sigma_1$  — квазиплощадь.
2. Если  $E'$  — сдвиг  $E$ , то  $\sigma_1(E) = \sigma_1(E')$ .

**Доказательство.**

2.  $E'$  — сдвиг  $E$  на вектор  $v$ . Пусть  $P_k$  — покрытие  $E \iff P'_k$  — покрытие  $E'$ . Знаем, что площади прямоугольников не меняются при сдвиге, а значит:

$$\sigma_1(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^n |P_k|\right\} = \inf\left\{\sum |P'_k|\right\} = \sigma_1(E').$$

1.  $\Rightarrow$  монотонность. Пусть есть  $E \subset \tilde{E}$ . Тогда возьмем покрытие  $P_k$  для  $\tilde{E}$ .  $E \subset \tilde{E} \subset \bigcup_{k=1}^n P_k$ .

А теперь заметим, что  $\sigma_1 = \inf$ , и любое покрытие для  $\tilde{E}$  является покрытием и для  $E$ , т.е. все суммы из  $\sigma_1(\tilde{E})$  есть в  $\sigma_1(E)$ , а значит  $\sigma_1(E) \leq \sigma_1(\tilde{E})$  как инфимум по более широкому множеству.

- 1'. Докажем теперь аддитивность.

« $\leq$ »:  $\sigma_1(E) = \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$ . Пусть  $P_k$  — покрытие  $E_-$ ,  $Q_j$  — покрытие  $E_+$ .

Тогда  $\bigcup_{k=1}^n P_k \cup \bigcup_{j=1}^n Q_j \supset E_- \cup E_+ = E$ .

А значит  $\sigma_1(E) \leq \inf\left\{\sum_{k=1}^n |P_k| + \sum_{j=1}^n |Q_j|\right\} = \inf\{\sum |P_k|\} + \inf\{\sum |Q_j|\} = \sigma_1(E_-) + \sigma(E_+)$ .

Заметим, что переход с разделением инфимумов возможен, так как  $P$  и  $Q$  выбираются независимо.

« $\geq$ »: Пусть  $P_k$  — покрытие  $E$ . Тогда можно пересечь прямой (покрытие и само  $E$ ) и разбить  $P_k$  на  $P_k^-$  и  $P_k^+$ , а тогда:  $|P_k| = |P_k^-| + |P_k^+|$ ,  $\sum |P_k| = \sum |P_k^-| + \sum |P_k^+|$ .

$\sum |P_k^-| \geq \sigma_1(E_-)$ ,  $\sum |P_k^+| \geq \sigma_1(E_+) \Rightarrow \sum |P_k| \geq \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$  для любого покрытия  $P_k$ , а значит и  $\sigma_1(E) \geq \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$

Таким образом  $\sigma_1(E) = \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$

- 1''. Проверим, что сама площадь прямоугольника не сломалась:  $\sigma_1([a, b] \times [c, d]) = (b-a)(d-c)$ . Заметим, что  $\sigma_1(P) \leq |P|$ , т.к. прямоугольник можно покрыть им самим.

Чтобы доказать  $\sigma_1(P) \geq |P|$ , посмотрим на  $P_k$ . Проведем прямые содержащие все стороны прямоугольников из покрытия (и  $P$ ). Заметим, что такими прямыми каждый прямоугольник разбивается на подпрямоугольники, сумма площадей которых равна площади исходного прямоугольника. Тогда заметим, что и площадь  $P$  это сумма «кусочков из нарезки»  $P$ , и некоторые части разбиения встречаются в  $P_k$  несколько раз. А значит выкинув все лишнее мы как раз получим  $|P|$ , а значит  $\sigma_1(P) \geq |P|$ .

Формально: Если  $\bigcup_{k=1}^n P_k \supset P$ , то  $\sum_{k=1}^n |P_k| \geq |P| \Rightarrow \inf\left\{\sum_{k=1}^n |P_k|\right\} \geq |P|$ .

Таким образом  $\sigma_1(P) = |P|$ .

□

**Определение 1.5.** Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $f_+, f_- : [a, b] \rightarrow [0; +\infty)$ . Причем  $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ ,  $f_- = \max\{-f(x), 0\}$ .  $f_+$  — положительная составляющая, а  $f_-$  — отрицательная составляющая.

**Свойства.** 1.  $f = f_+ - f_-$ .

2.  $|f| = f_+ + f_-$

3.  $f_+ = \frac{f+|f|}{2}, f_- = \frac{|f|-f}{2}$ . (Сложили и вычли первые два свойства)

4. Если  $f \in C([a, b])$ , то  $f_{\pm} \in C([a, b])$ . (Видно из 3-го пункта)

**Определение 1.6.** Пусть  $f: [a, b] \rightarrow [0; +\infty)$ .

Тогда подграфик  $P_f([a; b]) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$ . Подграфик может быть взят и от какого-то подотрезка области определения функции!

**Определение 1.7.** Пусть  $f \in C([a, b])$ . Зафиксируем произвольную квазиплощадь  $\sigma$ . Тогда Определённый интеграл:  $\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = \sigma(P_{f_+}([a; b])) - \sigma(P_{f_-}([a; b]))$ .

Определение корректно, поскольку, раз функция непрерывна, то и составляющие непрерывны на отрезке, значит ограничены, значит под  $\sigma$  ограниченные множества, на которых  $\sigma$  определена. А позже проверим, что результат не зависит и от выбора  $\sigma$ .

**Свойства.** 1.  $\int_a^a f = 0$ . (Площадь отрезка = 0)

2.  $\int_a^b c = c(b - a), c \geq 0$  (для отрицательных будет следовать из пунктов ниже)

**Доказательство.** По графику очевидно :) □

3.  $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f = \sigma(P_f)$ .

4.  $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$ .

**Доказательство.**  $(-f)_+ = \max\{-f, 0\} = f_-$ .  $(-f)_- = \max\{f, 0\} = f_+$ , откуда  $\int_a^b (-f) = \sigma(P_{(-f)_+}) - \sigma(P_{(-f)_-}) = \sigma(P_{f_-}) - \sigma(P_{f_+}) = -\int_a^b f$  □

5.  $f \geq 0 \wedge \int_a^b f = 0 \wedge a < b \Rightarrow f = 0$ .

**Доказательство.** От противного. Пусть  $\exists c \in [a, b]: f(c) > 0$ . Тогда, возьмем  $\varepsilon := \frac{f(c)}{2}, \delta$  из определения непрерывности в точке  $c$ . Если  $x \in (c - \delta, c + \delta)$ , то  $f(x) \in (f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon) = (\frac{f(c)}{2}, \frac{3f(c)}{2}) \Rightarrow f(x) \geq \frac{f(c)}{2}$  при  $x \in (c - \delta; c + \delta) \Rightarrow P_f \supset [c - \frac{\delta}{2}; c + \frac{\delta}{2}] \times [0; \frac{f(c)}{2}] \Rightarrow \int_a^b f = \sigma(P_f) \geq \delta \cdot \frac{f(c)}{2} > 0$ , противоречие. □

### 1.3. Свойства интеграла

**Теорема 1.7** (Аддитивность интеграла). Пусть  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, c \in [a, b]$ .

Тогда  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ .

**Доказательство.**  $\int_a^b f = \sigma(P_{f_+}([a, b])) - \sigma(P_{f_-}([a, b]))$ . Разделим наш  $[a, b]$  и соответствующие множества вертикальной прямой  $x = c$ . Тогда  $\sigma(P_{f_+}[a, b]) - \sigma(P_{f_-}[a, b]) = \sigma_{P_{f_+}[a, c]} + \sigma_{P_{f_+}[c, b]} - \sigma(P_{f_-}[a, c]) - \sigma(P_{f_-}[c, b]) = \int_a^c f + \int_c^b f$   $\square$

**Теорема 1.8** (Монотонность интеграла). Пусть  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\forall x \in [a, b]: f(x) \leq g(x)$ .

$$\text{Тогда } \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

**Доказательство.**  $f_+ = \max\{f, 0\} \leq \max\{g, 0\} = g_+ \Rightarrow P_{f_+} \subset P_{g_+} \Rightarrow \sigma(P_{f_+}) \leq \sigma(P_{g_+})$ .

$$f_- = \max\{-f, 0\} \geq \max\{-g, 0\} = g_- \Rightarrow P_{f_-} \supset P_{g_-} \Rightarrow \sigma(P_{f_-}) \geq \sigma(P_{g_-}).$$

$$\int_a^b f = \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-}) \leq \sigma(P_{g_+}) - \sigma(P_{g_-}) = \int_a^b g. \quad \square$$

**Следствие.** 1.  $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$ .

$$2. (b-a) \min_{x \in [a, b]} f(x) \leq \int_a^b f \leq (b-a) \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

**Доказательство.** 1.  $-|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow$  (Применим теорему к двум неравенствам)

$$\int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \Rightarrow \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

$$2. m := \min_{x \in [a, b]} f(x), M := \max_{x \in [a, b]} f(x). m \leq f(x) \leq M \Rightarrow \int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M \Rightarrow$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

 $\square$ 

**Теорема 1.9** (Интегральная теорема о среднем). Пусть  $f \in C([a, b])$ .

$$\text{Тогда } \exists c \in (a, b): \int_a^b f = (b-a)f(c).$$

**Доказательство.**  $m := \min f = f(p), M := \max f = f(q)$  (по теореме Вейерштрасса). Тогда

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f = f(c) \Rightarrow f(p) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq f(q) \xrightarrow{\text{т. Б-К}} \exists c \in (p, q) \text{ или } (q, p): f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f. \quad \square$$

**Определение 1.8.**  $I_f := \frac{1}{b-a} \int_a^b f$  — среднее значение  $f$  на отрезке  $[a, b]$ .

**Определение 1.9.**  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Интеграл с переменным верхним пределом  $\Phi(x) := \int_a^x f$ , где  $x \in [a, b]$ .

**Определение 1.10.**  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Интеграл с переменным нижним пределом  $\Psi(x) := \int_x^b f$ , где  $x \in [a, b]$ .

$$\text{Замечание. } \Phi(x) + \Psi(x) = \int_a^b f.$$



**Теорема 1.10** (Теорема Барроу). Пусть  $f \in C([a, b])$ . Тогда  $\Phi'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$ . То есть  $\Phi$  — первообразная функции  $f$ .

**Доказательство.** Надо доказать, что  $\lim_{y \rightarrow x} \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = f(x)$ . Проверим для предела справа (слева аналогично, но, возможно, с чуть другим порядком точек).

$$\text{Тогда } \Phi(y) - \Phi(x) = \int_a^y f - \int_a^x f = \int_x^y f.$$

Тогда  $\frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \frac{1}{y - x} \int_x^y f = f(c)$  для некоторого  $c \in (x, y)$  по интегральной теореме о среднем.

Проверяем определение по Гейне. Берем  $y_n > x$  и  $y_n \rightarrow x$ . Тогда  $\frac{\Phi(y_n) - \Phi(x)}{y_n - x} = f(c_n)$ , где  $c_n \in (x, y_n)$ ,  $x < c_n < y_n \rightarrow x \Rightarrow c_n \rightarrow x \Rightarrow$  в силу непрерывности  $f$   $f(c_n) \rightarrow f(x)$ .  $\square$

**Следствие.**  $\Psi'(x) = -f(x) \quad \forall x \in [a, b]$ .

**Доказательство.**  $\Psi(x) = \int_a^b f - \Phi(x) = C - \Phi(x) \Rightarrow \Psi' = (C - \Phi(x))' = -\Phi'(x) = -f(x)$ .  $\square$

**Теорема 1.11.** Непрерывная на промежутке функция имеет первообразную.

**Доказательство.**  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\text{Возьмём } c \in (a, b) \text{ Рассмотрим } F(x) := \begin{cases} \int_c^x f & \text{при } x \geq c \\ -\int_x^c f & \text{при } x \leq c \end{cases}.$$

Утверждаем, что  $F(x)$  — первообразная  $f(x)$ . Если  $x > c$ , то  $F'(x) = f(x)$ . Если  $x < c$ , то  $F'(x) = -(-f(x)) = f(x)$ . Если  $x = c$ , то, так как производные слева и справа считаются правильно и равны, то и в этой точке производная есть  $f(x)$ .  $\square$

**Теорема 1.12** (Формула Ньютона-Лейбница).  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  и  $F$  — её первообразная. Тогда  $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ .

**Доказательство.**  $\Phi(x) = \int_a^x f$  — первообразная и  $F(x) = \Phi(x) + C$  (знаем, что две первообразные отличаются на константу)

$$\text{Тогда } F(b) - F(a) = (\Phi(b) + C) - (\Phi(a) + C) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f \quad \square$$

И ровно в этот момент мы поняли, что от выбора псевдоплощади не зависим, поскольку первообразные от них не зависят (отсылка к первому билету/началу конспекта про псевдоплощади)

**Определение 1.11.**  $F|_a^b := F(b) - F(a)$

**Теорема 1.13** (Линейность интеграла).  $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ .

**Доказательство.** Пусть  $F, G$  — первообразные для  $f, g$ .

Тогда  $\alpha F + \beta G$  — первообразная для  $\alpha f + \beta g$ . Тогда воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b \alpha f + \beta g = (\alpha F + \beta G)|_a^b = \alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(a) - \beta G(a) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

□

**Теорема 1.14** (Формула интегрирования по частям). Пусть  $f, g \in C^1[a, b]$ .

$$\text{Тогда } \int_a^b f g' = f g |_a^b - \int_a^b f' g.$$

**Доказательство.** Докажем при помощи формулы Ньютона-Лейбница. Пусть  $H$  — первообразная  $f'g$ . Тогда  $f g - H$  — первообразная для  $f g'$ .

Проверим данный факт:  $(f g - H)' = f'g + f g' - f'g = f g'$ . А значит нам можно воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница.

$$\int_a^b f g' = (f g - H) |_a^b = f g |_a^b - H |_a^b = f g |_a^b - \int_a^b f' g.$$

□

**Замечание Соглашение.** Если  $a > b$ , то  $\int_a^b f := - \int_b^a f$ .

Мотивация: Если  $F$  — первообразная, то  $\int_a^b f = F |_a^b$ .

**Теорема 1.15** (Формула замены переменной). Пусть  $f \in C[a, b]$ ,  $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ ,  $\varphi \in C^1[c, d]$ ,  $p, q \in [c, d]$ .

$$\text{Тогда } \int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx.$$

**Доказательство.** Пусть  $F$  — первообразная  $f$ . Тогда  $\int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx = F |__{\varphi(p)}^{\varphi(q)} = F \circ \varphi |_p^q$ . Заметим, что  $F \circ \varphi$  — первообразная для  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ .

Проверим это:  $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ .

$$\text{Тогда: } \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx = F \circ \varphi |_p^q = \int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

□

**Пример.**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t}{1 + \sin^4 t} dt. \quad (1)$$

Произведем замену  $\varphi(t) = \sin^2 t$ ,  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $\varphi'(t) = 2 \sin t \cos t = \sin 2t$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$ :

$$(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi'(t)}{1 + (\varphi(t))^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x |_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

## 1.4. Приложения формулы интегрирования по частям

**Пример.**  $W_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt = (1)$  Докажем этот момент:

Положим  $x = \frac{\pi}{2} - t =: \varphi(t)$ ,  $\varphi'(t) = -1$ ,  $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$ .

Тогда  $(1) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \varphi(t) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n x dx$

Частные случаи  $W_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

Общее решение:  $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \cdot (\cos x)' dx = (*)$ . Воспользовались тем, что  $\sin x = -(\cos x)'$ ,  $f'(x) = (n-1) \sin^{n-2} x \cdot \cos x$ .

Тогда получаем:

$$\begin{aligned} (*) &= - \left( \underbrace{\sin^{n-1} x \cdot \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \underbrace{\cos^2 x}_{=1-\sin^2 x} dx \right) = \\ &= (n-1) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \right) = (n-1)(W_{n-2} - W_n). \end{aligned}$$

Посчитаем для четных:  $W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot W_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} W_{2n-4} = \dots = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}$ , где  $k!!$  — произведение натуральных чисел  $\leq k$  той же четности, что и  $k$ .

Для нечетных:  $W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} W_{2n-3} = \dots = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} W_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$

**Теорема 1.16** (Формула Валлиса).

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

**Доказательство.**  $\sin^n x \geq \sin^{n+1} x$  на  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Тогда  $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x dx = W_{n+1}$ .

Заметим, что  $W_{2n+2} \leq W_{2n+1} \leq W_{2n} \iff \frac{\pi}{2} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \leq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ . Поделим на  $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ :

$$\frac{\pi}{2} \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)((2n-1)!!)^2} \leq \frac{\pi}{2} \implies \lim \left( \frac{(2n)!!}{\sqrt{(2n+1)(2n-1)!!}} \right)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Последний переход — по двум милиционерам, т.к. при  $n \rightarrow +\infty$   $\frac{2n+1}{2n+2} \rightarrow 1$  □

**Следствие.**

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

**Доказательство.** Заметим, что  $(2n)! = (2n)!! \cdot (2n-1)!!$ , а  $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n) = 2^n \cdot n!$ . Тогда подставим в Сшку:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{\frac{(2n)!!}{2^n} \frac{(2n)!!}{2^n}} = 4^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

При этом из Валлиса, заметим, что  $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2n} = \sqrt{\pi n}$ . А значит все сойдется.  $\square$

**Теорема 1.17** (Формула Тейлора (с остатком в интегральной форме)). Пусть  $f \in C^{n+1}[a, b]$ ,  $x, x_0 \in [a, b]$ . Тогда:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

**Доказательство.** Индукция по  $n$ :

- База.  $n = 0$ ,  $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt = f(x_0) + f' \Big|_{x_0}^x$
- Переход.  $n \rightarrow n + 1$ .
- Доказательство.  $f(x) = T_n(x) + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x \underbrace{(x - t)^n}_{g'} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_f dt$ . Проинтегрируем интеграл по частям.

$$g(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Подставим: } \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt &= -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \cdot f^{(n+1)}(t) \Big|_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^x \frac{1}{n+1} (x - t)^{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t) dt = \\ &= \underbrace{\frac{1}{n+1} (x - x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(x_0)}_{\text{новый член Тейлора!}} + \int_{x_0}^x \frac{1}{n+1} (x - t)^{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t) dt \end{aligned}$$

Вспомнив, что у нас там ещё был  $\frac{1}{n!}$  перед исходным интегралом заметим, что мы действительно получили новый член суммы и новый интеграл с  $\frac{1}{(n+1)!}$ , что доказывает индукционный переход.  $\square$

**Пример.**

$$H_j := \frac{1}{j!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \cos x dx. \quad (2)$$

$$\text{Свойство 1. } 0 < H_j \leq \frac{1}{j!} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{2j} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{\left( \frac{\pi}{2} \right)^{2j}}{j!}.$$

$$\text{Свойство 2. } \forall c > 0: c^j \cdot H_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0. \quad 0 < c^j H_j \leq \frac{\left( \frac{\pi}{2} \right)^{2j} \cdot c^j}{j!} = \frac{\left( \frac{\pi^2}{4} c \right)^j}{j!} \rightarrow 0.$$

$$\text{Свойство 3. } H_0 = 1, H_1 = 2 \text{ (упражнение).}$$

$$\text{Свойство 4. } H_j = (4j - 2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}, \text{ при } j \geq 2.$$

**Доказательство.**

$$j! H_j = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j (\sin x)' dx \quad (3)$$

Заметим, что  $\left(\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j\right)' = j \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1} \cdot (-2x)$ . Тогда:

$$\begin{aligned}
 (3) &= \underbrace{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j \sin x \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}}_{=0} + 2j \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1} x \underbrace{\sin x}_{=(-\cos x)'} dx = \\
 &= 2j \left( \underbrace{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1} \cdot x \cdot (-\cos x) \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( (j-1) \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-2} (-2x)x + \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1} \right) (-\cos x) dx \right) \\
 &= 2j \left( (j-1)! H_{j-1} - 2(j-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-2} x^2 \cos x dx \right).
 \end{aligned}$$

В процессе мы дважды интегрировали по частям, а теперь нужно избавиться во втором слагаемом от  $x^2$ . Для этого заметим, что  $x^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)$ , подставим и разобьём интеграл на два, которые есть  $H_{j-2}$  и  $H_{j-1}$  с нужными коэффициентами:

$$j! H_j = 2j(j-1)! H_{j-1} - 4j(j-1) \left( ((j-2)! \left(\frac{\pi}{2}\right)^2) H_{j-2} - (j-1)! H_{j-1} \right)$$

Откуда с легкостью получаем  $j! H_j = 2j! H_{j-1} - \pi^2 j! H_{j-2} + 4(j-1)j! H_{j-1} \iff H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$ .

**Свойство 5.** Существует многочлен  $P_n$  с целыми коэффициентами степени  $\leq n$ , такой что  $H_j = P_j(\pi^2)$ .

**Доказательство.**  $P_0 \equiv 1, P_1 \equiv 2, P_n(x) = (4n-2)P_{n-1}(x) - xP_{n-2}(x)$ . □

□

**Теорема 1.18** (Ламберта, доказательство: Эрмит). Числа  $\pi$  и  $\pi^2$  иррациональные.

**Доказательство.** От противного. Пусть  $\pi^2$  — рационально. Тогда пусть  $\pi^2 = \frac{m}{n}$ . Тогда  $H_j = P_j\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{\text{целое число}}{n^j} > 0$ .

$n^j H_j = \text{целое число} > 0 \Rightarrow n^j H_j \geq 1$

Но, по свойству 2, при  $j \rightarrow +\infty$   $n^j H_j \rightarrow 0$ , противоречие. □

# Отступление. Равномерная непрерывность

**Определение 1.12.**  $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  равномерно непрерывна на  $E$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E: |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

**Определение 1.13.**  $f$  непрерывна во всех точках из  $E$ :  
 $\forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in E: |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Концептуальное отличие в том, что в первом случае у нас  $\delta(\varepsilon)$ , а во втором —  $\delta(x, \varepsilon)$ , т.е. при равномерной непрерывности у нас есть общая дельта по эсilonу на всю область, а при непрерывности во всех точках для каждой точки своё  $\delta$  по  $\varepsilon$

**Пример.**  $\sin x$  и  $\cos x$  равномерно непрерывны на  $\mathbb{R}$ .

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \Rightarrow \delta = \varepsilon \text{ подходит. } |\cos x - \cos y| \leq |x - y|.$$

**Пример.**  $f(x) = x^2$  не является равномерно непрерывной на  $\mathbb{R}$ . Рассмотрим  $\varepsilon = 1$ , никакое  $\delta > 0$  не подходит.  $x$  и  $x + \frac{\delta}{2}$ .  $f(x + \frac{\delta}{2}) - f(x) = (x + \frac{\delta}{2})^2 - x^2 = \dots = \delta x + \frac{\delta^2}{4} > \delta x$ . При  $x = \frac{1}{\delta}$  противоречие.

**Теорема 1.19** (Теорема Кантора). Пусть  $f \in C[a, b]$ , тогда  $f$  равномерно непрерывна на  $[a, b]$ .

**Доказательство.** Берем  $\varepsilon > 0$  и предположим, что  $\delta = \frac{1}{n}$  не подходит, то есть  $\exists x_n, y_n \in [a, b]: |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$  и  $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ . По теореме Больцано-Вейерштрасса у последовательности  $x_n$  есть сходящаяся подпоследовательность  $x_{n_k} \rightarrow c$ , то есть  $\lim x_{n_k} = c \in [a, b]$ .

$$\underbrace{x_{n_k} - \frac{1}{n_k}}_{\rightarrow c} < y_{n_k} < \underbrace{x_{n_k} + \frac{1}{n_k}}_{\rightarrow c} \Rightarrow \lim y_{n_k} = c. \text{ Но } f \text{ непрерывна в точке } c \Rightarrow \lim f(x_{n_k}) = f(c) = \lim f(y_{n_k}) \Rightarrow \lim (f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = 0, \text{ но } |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon. \quad \square$$

**Замечание.** Для интервала или полуинтервала неверно.  $f(x) = \frac{1}{x}$  на  $(0; 1]$ . Докажем, что нет равномерной непрерывности на  $(0; 1]$ .

$$\text{Пусть } \varepsilon = 1 \text{ и } \delta > 0. \text{ Пусть } 0 < x < \delta, y = \frac{x}{2}, |x - y| = \frac{x}{2} < \delta. \text{ Тогда } f(y) - f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} > 1.$$

**Определение 1.14.** Пусть  $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Тогда  $\omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| \mid \forall x, y \in E, |x - y| \leq \delta\}$  — модуль непрерывности  $f$ .

**Свойства.** 1.  $\omega_f(0) = 0$ ,

$$2. |f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x - y|).$$

$$3. \omega_f \uparrow.$$

$$4. \text{ Если } f \text{ — липшицева функция с константой } L, \text{ то } \omega_f(\delta) \leq L\delta.$$

$$\text{В частности, если } |f'(x)| \leq L \quad \forall x \in \langle a, b \rangle.$$

$$5. f \text{ равномерна и непрерывна на } E \iff \omega_f \text{ непрерывна в нуле} \iff \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0.$$

**Доказательство.** •  $1 \rightarrow 2$ .  $\forall \varepsilon > 0 \exists \gamma > 0 \forall x, y \in E: |x - y| < \gamma \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

Возьмем  $\delta < \gamma$ . Тогда  $|x - y| \leq \delta \Rightarrow |x - y| < \gamma \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \Rightarrow \sup \leq \varepsilon$ . Тогда с одной стороны  $\omega_f \geq 0$ , а с другой ограничена  $\varepsilon$ . Следовательно предел  $\omega_f$  равен 0.

- $2 \rightarrow 1$ . Из  $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0$ . Возьмем  $\delta > 0$  для  $\omega_f(\delta) < \varepsilon$ :  $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(\delta) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon, \forall x, y \in E: |x - y| \leq \delta$ .

□

$$6. f \in C[a, b] \iff \omega_f \text{ непрерывен в нуле} \iff \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0.$$

**Доказательство.** Для функции на отрезке равномерная непрерывность  $\iff$  непрерывность  $\iff$  теорема Кантора. □

# Продолжение главы 1

## 1.5. Интегральные суммы

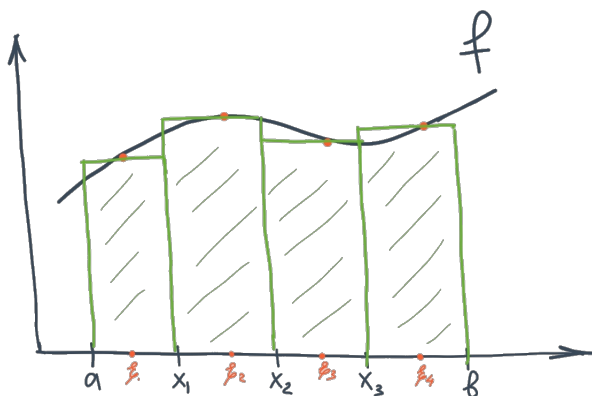
**Определение 1.15.** Пусть есть  $[a, b]$ . Тогда дробление (разбиение, пунктир) отрезка: набор точек:  $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ .

**Определение 1.16.** Ранг дробления:  $\max_{k=1,2,\dots,n} (x_k - x_{k-1}) =: |\tau|$ ,  $\tau = (x_0, x_1, \dots, x_n)$

**Определение 1.17.** Оснащение дробления — набор точек  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , такой что  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ .

**Определение 1.18.** Интегральная сумма (сумма Римана)  $S(f, \tau, \xi) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ ,

По факту просто сумма площадей прямоугольников под графиком



**Теорема 1.20** (Теорема об интегральных суммах). Пусть  $f \in C[a, b]$ ,

тогда  $\left| \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| \leq (b - a)\omega_f(|\tau|)$ .

**Доказательство.**

$$\Delta := \int_a^b f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt - \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)dt = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(\xi_k))dt.$$

$$|\Delta| \leq \sum \left| \int \dots \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(\xi_k)|dt \leq \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})\omega_f(|\tau|) = (b - a)\omega_f(|\tau|).$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(\xi_k)|dt \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_f(|\tau|)dt = (x_k - x_{k-1})\omega_f(|\tau|)..$$

□

**Следствие.**  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall$  дробления ранга  $\leq \delta \forall$  оснащения  $\left| \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| < \varepsilon$



**Следствие.** Если  $\tau_n$  — последовательность дроблений, ранг которых  $\rightarrow 0$ , то  $S(f, \tau_n, \xi_n) \rightarrow \int_a^b f$ .

**Пример.**  $S_p(n) := 1^p + 2^p + \dots + n^p$ . Посчитаем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_p(n)}{n^{p+1}}$ .

Возьмем  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$   $f(t) = t^p$   $\frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p = S(f, \tau, \xi)$ , где  $x_k = \xi_k = \frac{k}{n}$ .

Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \int_0^1 t^p dt = \frac{t^{p+1}}{p+1} \Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{p+1}$

**Определение 1.19.** Пусть  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , тогда  $f$  интегрируема по Риману, если  $\exists I \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall$  дробления ранга  $< \delta \forall$  его оснащения  $|S(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon$ .

$I$  — интеграл по Риману  $\int_a^b f$ .

**Лемма.**  $f \in C^2[\alpha, \beta]$ . Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt - \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} (\beta - \alpha) = -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t) (t - \alpha) (\beta - t) dt.$$

**Доказательство.** Пусть  $\gamma := \frac{\alpha + \beta}{2}$ . Тогда:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) (t - \gamma)' dt = f(t) (t - \gamma) \Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t) (t - \gamma) dt.$$

Заметим, что  $f(t) (t - \gamma) \Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} = f(\beta) (\beta - \gamma) - f(\alpha) (\alpha - \gamma) = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} (\beta - \alpha)$ . Продолжим:

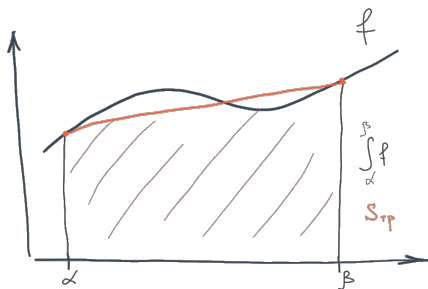
$$\begin{aligned} \text{левая часть} &= - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t) (t - \gamma) dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f'(t) ((t - \alpha) (\beta - t))' dt = \\ &= \frac{1}{2} f'(t) (t - \alpha) (\beta - t) \Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t) (t - \alpha) (\beta - t) dt. \end{aligned}$$

Переход к  $((t - \alpha) (\beta - t))'$ :

$$((t - \alpha) (\beta - t))' = (-t^2 + (\alpha + \beta)t - \alpha\beta)' = -2t + (\alpha + \beta) = -2(t - \gamma).$$

□

**Замечание.**  $\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} (\beta - \alpha)$  — площадь трапеции:



**Теорема 1.21** (Оценка погрешности в формуле трапеции). Пусть  $f \in C^2[a, b]$ .

Тогда :

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) \right| \leq \frac{|\tau|^2}{8} \int_a^b |f''|$$

**Доказательство.**  $\Delta := \int_a^b - \sum \dots = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1})$

$$|\Delta| \leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt - \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) \right| = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t)(t - x_{k-1})(x_k - t)dt \right|. \quad (4)$$

Тогда вспомним, что  $(t - x_{k-1})(x_k - t) \leq \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{2}\right)^2 \leq \frac{|\tau|^2}{4} \implies (4) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)| \cdot \frac{|\tau|^2}{4} dt =$

$$\frac{|\tau|^2}{8} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''| = \frac{|\tau|^2}{8} \cdot \int_a^b |f''| \quad \square$$

**Замечание.** Пусть разбиение на  $n$  равных отрезков  $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} = |\tau|$ :

$$\sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} = \frac{b-a}{n} \left( \frac{f(x_0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(x_n)}{2} \right).$$

**Замечание.** Возьмем разбиение на равные отрезки и  $\xi_k = x_k$ :

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

**Теорема 1.22** (формула Эйлера-Маклорена). Пусть  $f \in C^2[m, n]$ , тогда

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \frac{f(m) + f(n)}{2} + \int_m^n f(t)dt + \frac{1}{2} \int_m^n f''(t)\{t\}(1 - \{t\})dt.$$

**Доказательство.** Подставим  $\alpha = k$  и  $\beta = k + 1$  в лемму:

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} f(t)dt &= \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \frac{1}{2} \int_k^{k+1} f''(t)(t - k)(k + 1 - t)dt = \\ &= \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \frac{1}{2} \int_k^{k+1} f''(t)\{t\}(1 - \{t\})dt. \end{aligned}$$

Дальше суммируем по  $k$  от  $m$  до  $n - 1$ :

$$\int_m^n f(t)dt = \sum_{k=m}^{n-1} \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \frac{1}{2} \int_m^n f''(t)\{t\}(1 - \{t\})dt.$$

Заметим, что  $\sum_{k=m}^{n-1} \frac{f(k) + f(k+1)}{2} = \frac{f(m) + f(n)}{2} + \sum_{k=m+1}^{n-1} f(k)$ . И тогда:

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \frac{f(m) + f(n)}{2} + \int_m^n f(t)dt + \frac{1}{2} \int_m^n f''(t)\{t\}(1 - \{t\})dt.$$

□

**Пример.**  $S_p(n) = 1^p + 2^p + \dots + n^p$ ,  $f(t) = t^p$ ,  $m = 1$ ,  $f''(t) = p(p-1)t^{p-2}$ .

$$S_p(n) = \frac{1+n^p}{2} + \int_1^n t^p dt + \frac{1}{2} \int_1^n p(p-1)t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})dt.$$

$$\text{При } p \in (-1, 1) \int_1^n t^p dt = \frac{t^{p+1}}{p+1} \Big|_1^n = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \mathcal{O}(1).$$

$$\int_1^n \underbrace{t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})}_{\leq \frac{1}{4}} dt \leq \frac{1}{4} \int_1^n t^{p-2} dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{p-1}}{p-1} \Big|_1^n = \frac{1}{4} \cdot \frac{n^{p-1}-1}{p-1} = \mathcal{O}(1).$$

$$\text{То есть } S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \mathcal{O}(1).$$

$$\text{При } p > 1 \quad S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \mathcal{O}(n^{p-1}).$$

**Пример.** Гармонические числа:  $H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ .  $m = 1$ ,  $f(t) = \frac{1}{t}$ ,  $f''(t) = \frac{2}{t^3}$ .

$$H_n = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} + \int_1^n \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} \int_1^n \frac{2}{t^3} \{t\}(1-\{t\})dt$$

$$\text{Откуда получаем } (a_n := \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^3}; \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_1^n = \ln n):$$

$$H_n = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a_n.$$

$$\text{Заметим, что } a_{n+1} = a_n + \int_n^{n+1} \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^3} dt > a_n. \text{ То есть } a_n \uparrow. \text{ Причем } a_n \leq \int_1^n \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2} \Big|_1^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} < \frac{1}{2}.$$

А значит  $a_n$  имеет предел, а значит  $a_n = a + o(1)$ .

Вывод:  $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ , где  $\gamma \approx 0.5772156649$  — постоянная Эйлера.

**Замечание.**  $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$  — точная формула.

**Пример Формула Стирлинга.**  $m = 1$ ,  $f(t) = \ln t$ ,  $f''(t) = -\frac{1}{t^2}$ .

$$\ln n! = \sum_{k=1}^n \ln k = \underbrace{\frac{\ln 1 + \ln n}{2}}_{=\frac{1}{2} \ln n} + \underbrace{\int_1^n \ln t dt}_{=t \ln t - t \Big|_1^n = n \ln n - n + 1} - \underbrace{\frac{1}{2} \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2} dt}_{:=b_n} \Rightarrow \ln n! = \frac{1}{2} \ln n + n \ln n - n + 1 - b_n.$$

Посмотрим на  $b_n$ :

$$b_n \leq \frac{1}{2} \int_1^n \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{t}\right) \Big|_1^n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2} \Rightarrow b_n = \underbrace{b}_{=\lim b_n} + o(1).$$

$$\text{А значит } \ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + (1 - b) + o(1).$$

Можем найти  $b$ , для этого представим обе части как экспоненты:  $n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{1-b} e^{o(1)} \sim n^n e^{-n} \sqrt{n} C$ .

$$\text{Вспомним (из следствия формулы Валлиса): } \binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}. \text{ А еще знаем, что } \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n} C}{(n^n e^{-n} \sqrt{n} C)^2} = \frac{4^n \sqrt{2}}{\sqrt{n} C}.$$

$$\text{Тогда получаем, что } \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{4^n \sqrt{2}}{\sqrt{n} C} \Rightarrow C \sim \frac{4^n \sqrt{2}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} = \sqrt{2\pi}.$$

Итоговый результат (Формула Стирлинга):

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + o(1).$$

**Замечание.** Если посчитать точнее, то получим  $\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + \mathcal{O}(\frac{1}{n})$ .

## 1.6. Несобственные интегралы

**Определение 1.20.** Пусть  $-\infty < a < b \leq +\infty$  и  $f \in C[a, b)$ .

Тогда определим  $\int_a^{\rightarrow b} f := \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f$  (если он существует).

Если  $-\infty \leq a < b < +\infty$ ,  $f \in C(a, b]$ , то  $\int_a^b f := \lim_{A \rightarrow a+} \int_A^b f$  (опять же, если он существует).

**Замечание.** Если  $b < +\infty$  и  $f \in C[a, b]$ , то определение не дает ничего нового:

$$\int_a^b f = \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f$$

$$\left| \int_a^b f - \int_a^B f \right| = \left| \int_B^b f \right| \leq M(b - B) \rightarrow 0, M = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

**Пример.** 1.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_1^y \frac{dx}{x^p} = \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ \text{при } p \neq 1}} -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} \Big|_{x=1}^{x=y} = \frac{1}{p-1} - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{(p-1)y^{p-1}} = \frac{1}{p-1}$  при  $p > 1$ ,  
при  $p < 1$  получаем  $+\infty$ , а при  $p = 1$   $\lim_{y \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y = +\infty$

То есть, при  $p \leq 1$   $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = +\infty$ ,

при  $p > 1$   $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$ .

2.  $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{y \rightarrow 0+} \int_y^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{y \rightarrow 0+} -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} \Big|_{x=y}^{x=1} = -\frac{1}{p-1} + \lim_{y \rightarrow 0+} = \frac{y^{1-p}}{p-1} = \frac{1}{1-p}$  при  $p < 1$ , при  $p > 1$  получаем  $+\infty$ , а вот при  $p = 1$   $\lim_{y \rightarrow 0+} \ln x \Big|_y^1 = \lim_{y \rightarrow 0+} -\ln y = +\infty$ .

То есть, при  $p < 1$   $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$ ,

при  $p \geq 1$   $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = +\infty$ .

**Замечание.** Если  $f \in C[a, b)$  и  $F$  — его первообразная, то  $\int_a^b f = \lim_{B \rightarrow b-} F(B) - F(a)$ .

Если  $f \in C(a, b]$  и  $F$  — его первообразная, то  $\int_a^b f = F(b) - \lim_{A \rightarrow a+} F(A)$ .

**Доказательство.** Очевидно по формуле Ньютона-Лейбница. □

**Определение 1.21.**  $F \Big|_a^b := \lim_{B \rightarrow b-} F(B) - F(a)$ .

**Определение 1.22.**  $\int_a^{\rightarrow b} f$  сходится, если  $\lim$  в его определении существует и конечен. Иначе расходится.

**Теорема 1.23** (Критерий Коши). Пусть  $-\infty < a < b \leq +\infty$ ,  $f \in C[a, b)$ .

Тогда  $\int_a^{\rightarrow b} f$  сходится  $\iff \forall \varepsilon \exists c \in (a, b): \forall A, B \in (c, b) \left| \int_A^B f \right| < \varepsilon$ .

- Замечание.** 1. Если  $b = +\infty$  это означает, что  $\forall \varepsilon \exists c > a \forall A, B > c: \left| \int_A^B f \right| < \varepsilon$ .
2. Если  $b < +\infty$  это означает, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A, B \in (b - \delta; b): \left| \int_A^B f \right| < \varepsilon$ .

**Доказательство.** Для  $b < +\infty$  (то есть для конечной точки).

- " $\Rightarrow$ "  $\int_a^b f$  сходится  $\Rightarrow \exists$  конечный  $I := \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f$ , обозначим  $\int_a^B f$  за  $g(B)$ . Воспользуемся критерием Коши для функций:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \begin{matrix} \forall B \in (b - \delta, b) & |g(B) - I| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall A \in (b - \delta, b) & |g(A) - I| < \frac{\varepsilon}{2} \end{matrix} \Rightarrow |g(B) - g(A)| \leq |g(B) - I| + |I - g(A)| < \varepsilon$$

- " $\Leftarrow$ "  $\int_a^B f =: g(B)$ .

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A, B \in (b - \delta, b): |g(B) - g(A)| < \varepsilon$  — а это условие из критерия Коши для  $\lim_{B \rightarrow b-} g(B)$ .

□

**Замечание.** Если существуют  $A_n, B_n \in [a, b): \lim A_n = \lim B_n = b: \int_{A_n}^{B_n} f \not\rightarrow 0$ , то  $\int_a^b f$  расходится.

**Доказательство.** Возьмем  $A_{n_k}$  и  $B_{n_k}: \left| \int_{A_{n_k}}^{B_{n_k}} f \right| \rightarrow C > 0 \Rightarrow \left| \int_{A_{n_k}}^{B_{n_k}} f \right| > \frac{C}{2}$  при больших  $k$ . Но это противоречит критерию Коши. □

**Свойства несобственных интегралов.** 1. Аддитивность. Пусть  $f \in C[a, b)$ ,  $c \in (a, b)$ .

Если  $\int_a^b f$  сходится, то  $\int_c^b f$  сходится и  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ .

2. Если  $\int_a^b f$  сходится, то  $\lim_{c \rightarrow b-} \int_c^b f = 0$

3. Линейность  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  и  $\int_a^b f$  и  $\int_a^b g$  сходятся. Тогда  $\int_a^b (\alpha f + \beta g)$  сходится и  $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ .

4. Монотонность. Пусть  $\int_a^b f$  и  $\int_a^b g$  существуют в  $\overline{R}$  и  $f \leq g$  на  $[a, b)$ . Тогда  $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ .

5. Интегрирование по частям.  $f, g \in C^1[a, b) \Rightarrow \int_a^b f g' = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g$ .

6. Замена переменных.  $\varphi: [\alpha, \beta) \rightarrow [a, b)$ ,  $\varphi \in C^1[\alpha, \beta)$  и  $\exists \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \varphi(\gamma) =: \varphi(\beta-)$  и  $f \in C[a, b)$ .

Тогда  $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(x) dx$ . «Если существует один из  $\int$ , то существует второй и они равны»

**Доказательство.** 1.  $\int_a^b f = \lim_{B \rightarrow b-} F(B) - F(a) \implies \lim_{B \rightarrow b-} F(B)$  существует и конечен  $\implies$

$\int_c^b f = \lim_{B \rightarrow b-} F(B) - F(c)$  — сходится ( $F(c)$  — просто число какое-то).

$$\int_a^b f = \lim_{B \rightarrow b-} F(B) - F(a) = \lim_{B \rightarrow b-} F(B) - F(c) + F(c) - F(a) = \int_c^b f + \int_a^c f.$$

$$2. \int_c^b f = \int_a^b f - \int_a^c f \xrightarrow{c \rightarrow b-} \int_a^b f \Rightarrow \text{разность} \rightarrow 0$$

$$3. \int_a^b (\alpha f + \beta g) = \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B (\alpha f + \beta g) = \lim_{B \rightarrow b-} (\alpha \int_a^B f + \beta \int_a^B g) = \alpha \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f + \beta \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

$$4. \int_a^B f \leq \int_a^B g \text{ (монотонность собственных интегралов), а дальше предельный переход:}$$

$$\lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f \leq \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B g$$

5.  $a < B < b$  и пишем формулу интегрирования по частям:  $\int_a^B f g' = f g \Big|_a^B - \int_a^B f' g$  и переходим к пределу при  $B \rightarrow b-$ . Так как  $f, g$  — непрерывные функции, то  $\lim_{B \rightarrow b-} f g \Big|_a^B = f g \Big|_a^b$  и получаем, что нужно.

$$6. F(y) := \int_{\varphi(\alpha)}^y f(x) dx, \Phi(\gamma) := \int_{\alpha}^{\gamma} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \text{ Знаем, что } F(\varphi(\gamma)) = \Phi(\gamma) \text{ при } \alpha < \gamma < \beta.$$

Пусть существует правый  $\int$ , то есть  $\exists \lim_{y \rightarrow \varphi(\beta-)} F(y)$ . Возьмем  $\gamma_n \nearrow \beta \implies \varphi(\gamma_n) \rightarrow$

$$\varphi(\beta-) \implies \Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)) \rightarrow \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(x) dx. \text{ При этом } \Phi(\gamma_n) \rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Пусть существует левый  $\int$ , то есть  $\exists \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma)$ . Докажем, что  $\exists$  правый  $\int$ . При  $\varphi(\beta-) < b$  нечего доказывать.

Пусть  $\varphi(\beta-) = b$ . Тогда возьмем  $b_n \nearrow b$ . Можно считать, что  $b_n \in [\varphi(\alpha), b)$ . Тогда  $\exists \gamma_n \in [\alpha, \beta) : \varphi(\gamma_n) = b_n$ . Докажем, что  $\gamma_n \rightarrow \beta$ . Пусть это не так. Тогда найдется  $\gamma_{n_k} \rightarrow \tilde{\beta} < \beta \implies \varphi(\gamma_{n_k}) \rightarrow \varphi(\tilde{\beta}) < b$  по непрерывности  $\varphi$  в точке  $\tilde{\beta}$ . Противоречие.

$$\text{Итак, } \gamma_n \rightarrow \beta, F(b_n) = F(\varphi(\gamma_n)) = \Phi(\gamma_n) \rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

□

**Замечание к третьему свойству.** 1. Если  $\int_a^b f$  сходится, а  $\int_a^b g$  расходится, то  $\int_a^b (f + g)$  расходится. Доказательство от противного, пусть интеграл сходится, тогда  $g = (f + g) - f \implies \int_a^b g$  сходится.

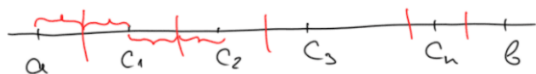
$$2. \text{ Если } \int_a^b f \text{ и } \int_a^b g \text{ расходятся, то } \int_a^b (f + g) \text{ может сходиться. } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} \text{ и } \int_1^{+\infty} -\frac{dx}{x} \text{ расходятся.}$$

**Замечание к шестому свойству.**  $\int_a^b f(x)dx$ . Сделаем замену  $x = b - \frac{1}{t} = \varphi(t)$ ,  $\varphi'(t) = \frac{1}{t^2}$ ,  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\alpha = \frac{1}{b-a}$ .

$$\text{Тогда } \int_a^b f(x)dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2} dt.$$

**Определение 1.23.** Пусть  $f$  непрерывна на  $(a, b)$  за исключением некоторого количества точек  $c_1 < c_2 < \dots < c_n$ .

$\int_a^b f$  сходится, если сходятся интегралы по всем маленьким отрезкам (содержащим только одну выколотую точку).



## Несобственные интегралы от неотрицательных функций

**Теорема 1.24.** Пусть  $f \in C[a, b)$  и  $f \geq 0$ .

Тогда  $\int_a^b f$  сходится  $\iff F(y) := \int_a^y f$  ограничена сверху.

**Доказательство.**  $f \geq 0 \implies F$  монотонно возрастает.  $\int_a^b f$  сходится  $\iff \exists$  конечный  $\lim_{y \rightarrow b-} F(y) \iff F$  ограничена сверху. □

**Замечание.**  $f \in C[a; b)$ ,  $f \geq 0$ . Если  $\int_a^b f$  расходится, это означает, что  $\int_a^b f = +\infty$ .

**Следствие Признак сравнения.**  $f, g \in C[a, b)$ ,  $f, g \geq 0$  и  $f \leq g$ .

1. Если  $\int_a^b g$  сходится, то и  $\int_a^b f$  сходится.
2. Если  $\int_a^b f$  расходится, то и  $\int_a^b g$  расходится.

**Доказательство.**  $F(y) := \int_a^y f$  и  $G(y) := \int_a^y g$ .

1. Пусть  $\int_a^b g$  сходится  $\implies G(y)$  ограничена, но  $F(y) \leq G(y) \implies F(y)$  ограничена  $\implies \int_a^b f$  сходится.
2. От противного. Пусть  $\int_a^b g$  сходится  $\Rightarrow$  см. первый пункт — противоречие.

□

**Замечание.** 1. Неравенство  $f \leq g$  может выполняться лишь для аргументов, близких к  $b$ .

2. Неравенство  $f \leq g$  можно заменить на  $f = \mathcal{O}(g)$ .

$$f = \mathcal{O}(g) \implies f \leq cg. \int_a^b g \text{ сходится} \implies \int_a^b cg \text{ сходится} \implies \int_a^b f - \text{сходится.}$$

3. Если  $f = \mathcal{O}(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$  для  $\varepsilon > 0$ , то  $\int_a^{+\infty} f$  — сходится.

$$f \in C[a, +\infty), g(x) = \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} \text{ и можно считать, что } a \geq 1 \int_1^{+\infty} g(x)dx - \text{сходится.}$$

**Следствие.**  $f, g \in C[a, b)$ ,  $f, g \geq 0$  и  $f(x) \sim g(x)$  при  $x \rightarrow b-$ . Тогда  $\int_a^b f$  и  $\int_a^b g$  ведут себя одинаково (либо оба сходятся, либо оба расходятся).

**Доказательство.**  $f \sim g \implies f = \varphi \cdot g$ , где  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow b-} 1 \implies$  в окрестности  $b$   $\frac{1}{2} \leq \varphi \leq 2 \implies f \leq 2g \wedge g \leq 2f$  в окрестности  $b \implies$  из сходимости  $\int_a^b g$  следует сходимость  $\int_a^b f$ , и наоборот.  $\square$

**Определение 1.24.**  $f \in C[a, b)$ .  $\int_a^b f$  абсолютно сходится, если  $\int_a^b |f|$  сходится.

**Теорема 1.25.**  $\int_a^b f$  сходится абсолютно  $\implies \int_a^b f$  сходится.

**Доказательство.**  $f = f_+ - f_-$ ,  $|f| = f_+ + f_-$ .  $|f| \geq f_{\pm} \geq 0$ . Если  $\int_a^b f$  сходится абсолютно  $\implies \int_a^b |f|$  сходится  $\implies \int_a^b f_{\pm}$  сходится  $\implies \int_a^b f = \int_a^b f_+ - \int_a^b f_-$  сходится.  $\square$

**Теорема 1.26** (Признак Дирихле).  $f, g \in C[a, +\infty)$ . Если

1.  $f$  имеет ограниченную первообразную на  $[a, +\infty)$  (то есть  $\left| \int_a^y f(x)dx \right| \leq K \quad \forall y$ )

2.  $g$  монотонна

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

$\implies$  то  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$  сходится.

**Доказательство.** Только для случая  $g \in C^1[a; +\infty)$ .

Надо доказать, что  $\exists$  конечный  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_a^y f(x)g(x)dx$ ,  $F(y) := \int_a^y f(x)dx$ .

$$\int_a^y f(x)g(x)dx = \int_a^y F'(x)g(x)dx = F(x)g(x) \Big|_a^y - \int_a^y F(x)g'(x)dx = F(y)g(y) - \int_a^y F(x)g'(x)dx.$$



Чтобы доказать существование предела у разности каких-то штук, нужно доказать, что он существует у них по отдельности.

$\lim_{y \rightarrow +\infty} F(y)g(y) = 0$  — произведение бесконечно малой и ограниченной функции.

Хотим показать, что  $\int_a^y F(x)g'(x)dx$  имеет конечный  $\lim$ , то есть  $\int_a^{+\infty} F(x)g'(x)dx$  сходится.

Тогда докажем, что он абсолютно сходится.  $\int_a^{+\infty} |F(x)||g'(x)|dx, |F(x)||g'(x)| \leq K|g'(x)| = Kg'(x)$ . (считаем, что  $g(x)$  возрастает)  $\int_a^{+\infty} g'(x)dx = g|_a^{+\infty} = \lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) - g(a) = -g(a) \implies$  сходится.  $\square$

**Теорема 1.27** (Признак Абеля).  $f, g \in C[a, +\infty)$ , Если

1.  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  сходится
2.  $g$  монотонна
3.  $g$  ограничена

$\implies$  то  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$  сходится.

**Доказательство.** 2) + 3)  $\implies g$  имеет конечный предел  $l \in \mathbb{R} := \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .

Пусть  $\tilde{g}(x) := g(x) - l \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{g}(x) = 0$  и  $\tilde{g}$  монотонна.

Пусть  $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ . Тогда 1)  $\iff$  существует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \implies F$  ограничена.

Тогда  $f$  и  $\tilde{g}$  удовлетворяют условиям признака Дирихле  $\implies \int_a^{+\infty} f(x)\tilde{g}(x)dx$  — сходится. Тогда:

$$\int_a^{+\infty} fg = \int_a^{+\infty} f(\tilde{g} + l) = \int_a^{+\infty} f\tilde{g} + l \int_a^{+\infty} f.$$

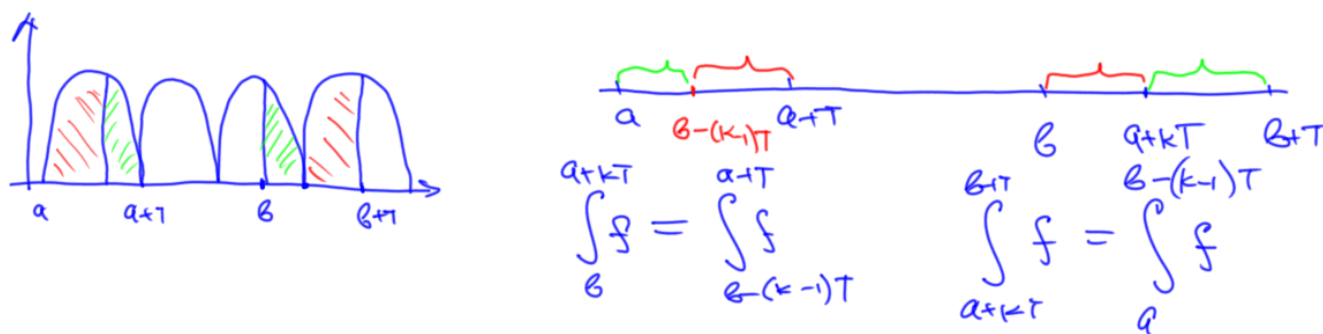
Где  $\int_a^{+\infty} f\tilde{g}$  сходится по доказанному, а  $\int_a^{+\infty} f$  — по условию.  $\square$

**Утверждение 1.28.**  $f$  — периодическая функция с периодом  $T$ . Тогда неважно, по какому периоду интегрировать  $\implies \int_a^{a+T} f = \int_b^{b+T} f$

**Доказательство.** см. картинку:

$$\int_b^{a+kT} f = \int_{b-(k-1)T}^{a+T} f. \int_{a+kT}^{b+T} f = \int_a^{b-(k-1)T} f$$

$\square$



**Следствие.**  $f, g \in C[a; +\infty)$ ,  $f$  — периодическая с периодом  $T$ ,  $g$  монотонная и  $g \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ . Тогда  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  расходится.

Тогда  $\int_a^{+\infty} fg$  сходится  $\iff \int_a^{a+T} f = 0$ .

**Доказательство.**  $\Leftarrow$ .  $F(x) = \int_a^x f$  — периодична с периодом  $T$ :

$$F(x+T) = \int_a^{x+T} f = \int_a^x f + \underbrace{\int_x^{x+T} f}_{=0} = F(x). \quad F \text{ — непрерывна и периодична} \implies \text{ограничена} \implies$$

$\int_a^{+\infty} fg$  сходится по признаку Дирихле.

$\Rightarrow$ . Пусть  $\int_a^{a+T} f =: K \neq 0$ .  $\tilde{f}(x) =: f(x) - \frac{K}{T}$  — периодична с периодом  $T$ . Тогда  $\int_a^{a+T} \tilde{f} = \int_a^{a+T} (f - \frac{K}{T}) = K - T \cdot \frac{K}{T} = 0 \implies \int_a^{+\infty} \tilde{f}g$  сходится.

Тогда  $\int_a^{+\infty} fg = \int_a^{+\infty} (\tilde{f} + \frac{K}{T})g = \int_a^{+\infty} \tilde{f}g + \frac{K}{T} \int_a^{+\infty} g \implies \int_a^{+\infty} fg$  расходится как сумма сходящегося и расходящегося.  $\square$

**Пример.** Рассмотрим  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ .

1.  $p > 1$  интеграл сходится абсолютно:  $|\sin x| \leq 1 \implies \left| \frac{\sin x}{x^p} \right| \leq \frac{1}{x^p}$ , а значит  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  сходится.

2.  $0 < p \leq 1$  интеграл сходится, но не абсолютно.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  — расходится,  $\frac{1}{x^p} \searrow 0$ .

$$g(x) := \frac{1}{x^p}, f(x) := \sin x. \quad \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0 \implies \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \text{ сходится.}$$

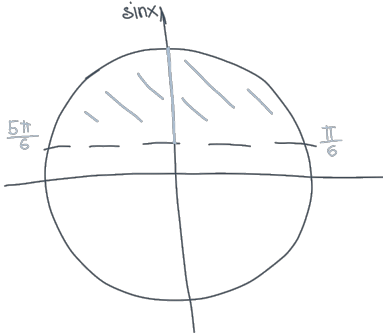
Если взять  $f(x) = |\sin x|$ , то интеграл по периоду равен  $4 \left( \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = 2 \int_0^{\pi} \sin x dx = 4 \right)$ .

Значит исходный интеграл расходится.

3.  $p \leq 0$  интеграл расходится.

$$a_n := \frac{\pi}{6} + 2\pi n, b_n := \frac{5\pi}{6} + 2\pi n. \text{ Тогда } \int_{a_n}^{b_n} \frac{\sin x}{x^p} dx \geq \frac{1}{2} \int_{a_n}^{b_n} \frac{dx}{x^p} \geq \frac{1}{2} \int_{a_n}^{b_n} dx = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Предъявили сколь угодно далеко такие отрезки, что интеграл по ним превосходит  $\frac{\pi}{3}$  — это отрицание критерия Коши.



## 2. Анализ в метрических пространствах

### 2.1. Метрические и нормированные пространства

**Определение 2.1.** Метрика (расстояние)  $\rho: X \times X \rightarrow [0; +\infty)$ , если выполняются следующие условия:

1.  $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$ ,
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ,
3. (неравенство треугольника)  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ .

**Определение 2.2.** Метрическое пространство — пара  $(X, \rho)$ .

**Пример.** Дискретная метрика (метрика Лентяя)  $\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$

**Пример.** На  $\mathbb{R}$ :  $\rho(x, y) = |x - y|$ .

**Пример.** На  $\mathbb{R}^d$  (пространство столбцов = векторов):  $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^d (x_k - y_k)^2}$ . Неравенство треугольника здесь — неравенство Минковского.

**Пример.**  $C[a, b]$ .  $\rho(f, g) = \int_a^b |f - g|$ .

Неравенство треугольника:

$$\rho(f, h) = \int_a^b |f - h| \stackrel{(*)}{\leq} \int_a^b (|f - g| + |g - h|) = \rho(f, g) + \rho(g, h).$$

(\*)  $\iff |f(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|$  — неравенство треугольника для  $(\mathbb{R}, |x - y|)$ .

**Пример.** Манхэттенская метрика:  $\mathbb{R}^2$ ,  $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$  (с точки зрения пешехода расстояние равно такой штуке).

**Пример.** Французская железнодорожная метрика.  $\mathbb{R}^2$ . Есть точка  $P$  (Париж), тогда  $\rho(A, B) = AB$ , если  $A, B, P$  на одной прямой, иначе  $\rho(A, B) = |AP| + |PB|$ .

**Определение 2.3.**  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.  $B_r(x) := \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$  — открытый шар радиуса  $r$  с центром в точке  $x$ .

**Определение 2.4.**  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.  $\overline{B}_r(x) := \{y \in X \mid \rho(x, y) \leq r\}$  — закрытый шар радиуса  $r$  с центром в точке  $x$ .

То есть если берём контур — это замкнутый шар.

**Свойства.** 1.  $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$ .

2.  $x \neq y \implies \exists r > 0: B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset \wedge \overline{B}_r(x) \cap \overline{B}_r(y) = \emptyset$ .

**Доказательство.** 1.  $x \in B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) \iff \begin{cases} \rho(x, a) < r_1 \\ \rho(x, a) < r_2 \end{cases} \iff \rho(x, a) < \min\{r_1, r_2\} \implies x \in B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$ .

2.  $r := \frac{1}{3}\rho(x, y) > 0$ . Пусть  $\overline{B}_r(x) \cap \overline{B}_r(y) \neq \emptyset$ .

Тогда  $\exists z \in \overline{B}_r(x) \cap \overline{B}_r(y) \implies \rho(x, z) \leq r \wedge \rho(y, z) \leq r \implies \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \leq 2r = \frac{2}{3}\rho(x, y) \implies 1 \leq \frac{2}{3}$ . Противоречие.

При этом,  $B_r(x) \subset \overline{B}_r(x) \implies \exists r : B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset$ . То есть если замкнутый шар не пересекает, то и открытый — тем более.

□

**Определение 2.5.**  $A \subset X$ .  $A$  — открытое множество, если  $\forall a \in A \exists B_r(a) \subset A$  ( $r > 0$ ). То есть для любой точки-центра из  $A$  находится шарик, который целиком тоже лежит в  $A$ .

**Теорема 2.1** (О свойствах открытых множеств). 1.  $\emptyset, X$  — открытые.

2. Объединение любого числа открытых множеств — открытое.

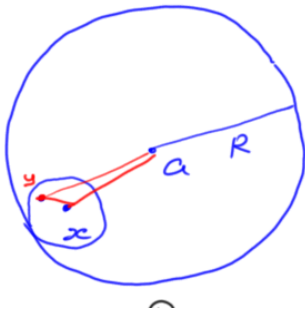
3. Пересечение конечного числа открытых множеств — открытое.

4.  $B_R(a)$  — открытое.

**Доказательство.** 2. Пусть  $A_\alpha$  — открытые,  $\alpha \in I$ .  $B = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ . Берем  $b \in B \implies b \in A_\beta$  для некоторого  $\beta$ . Но  $A_\beta$  — открытое  $\implies \exists r > 0 \quad B_r(b) \subset A_\beta \subset B$ .

3. Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — открытые.  $B := \bigcap_{k=1}^n A_k$ . Берем  $b \in B \implies b \in A_k \forall k = 1, 2, \dots, n$ . Но  $A_k$  — открытое  $\implies \exists r_k > 0 \quad B_{r_k} \subset A_k$ .  $r := \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\} > 0 \implies B_r(b) \subset B_{r_k}(b) \subset A_k \forall k \implies B_r(b) \subset \bigcap_{k=1}^n A_k = B \implies B$  — открытое.

4.  $\rho(a, x) < R$ ,  $r := R - \rho(a, x) > 0$ . Докажем, что  $B_r(x) \subset B_R(a)$ . Возьмем  $y \in B_r(x)$ , то есть  $\rho(x, y) < r \implies \rho(y, a) \leq \rho(y, x) + \rho(x, a) < r + \rho(x, a) = R \implies y \in B_R(a)$ .



□

**Замечание.** В 3 существенна конечность.  $\mathbb{R}. \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, 1) = [0, 1)$ . А для нуля любой открытый шарик плохой.

**Определение 2.6.**  $A \subset X$ ,  $a \in A$ .  $a$  — внутренняя точка множества  $A$ , если  $\exists r > 0 : B_r(a) \subset A$ .

**Замечание.**  $A$  — открытое  $\iff$  все его точки внутренние.

**Определение 2.7.** Внутренность множества  $\text{Int } A := \{a \in A \mid a \text{ — внутренняя точка}\}$ .

**Пример.**  $A = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ . Тогда  $\text{Int } A = (0, 1)$ .

**Свойства внутренности.** 1.  $\text{Int } A \subset A$ .

2.  $\text{Int } A = \bigcup$  всех открытых множеств, которые содержатся в  $A$ .
3.  $\text{Int } A$  — открытое множество. (Следствие из предыдущего)
4.  $A$  — открытое  $\iff A = \text{Int } A$ .
5. Если  $A \subset B$ , то  $\text{Int } A \subset \text{Int } B$ .
6.  $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B$
7.  $\text{Int}(\text{Int } A) = \text{Int } A$ .

**Доказательство.**

2.  $B := \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha, A_\alpha \subset A, A_\alpha$  открытые.

$B \subset \text{Int } A$ . (Потому что:) Берем  $b \in B \implies \exists \beta \in I : b \in A_\beta$  — открытое  $\implies \exists r > 0 : B_r(b) \subset A_\beta \subset A \implies b$  — внутренняя точка  $A \implies b \in \text{Int } A$ .

$\text{Int } A \subset B$ . Берем  $b \in \text{Int } A \implies \exists r > 0 B_r(b) \subset A$ , но  $B_r(b)$  — открытое множество  $\implies$  оно участвует в объединении  $\bigcup_{\alpha} A_\alpha \implies B_r(b) \subset B \implies b \in B$ .

4.  $\Leftarrow$ : пользуемся пунктом 3.

$\Rightarrow$ : Если  $A$  — открытое, то все его точки внутренние  $\implies$  все из внутренности  $\implies A = \text{Int } A$ .

6.  $\subset : A \cap B \subset A, \subset B \implies \text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int } A \wedge \text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int } B$ .

$\supset$ . Пусть  $x \in \text{Int } A \cap \text{Int } B \implies \begin{cases} \exists r_1 > 0 & B_{r_1}(x) \subset A \\ \exists r_2 > 0 & B_{r_2}(x) \subset B \end{cases} \implies \text{если } r = \min\{r_1, r_2\} \implies B_r(x) \subset A \wedge B_r(x) \subset B \implies B_r(x) \subset A \cap B \implies x \in \text{Int}(A \cap B)$ .

7. Пусть  $B := \text{Int } A$  — открытое  $\implies B = \text{Int } B$ .

□

**Определение 2.8.**  $A \subset X$ .  $A$  — замкнутое, если  $X \setminus A$  — открытое.

**Теорема 2.2** (о свойствах замкнутых множеств). 1.  $\emptyset$  и  $X$  — замкнуты.

2. Пересечение любого числа замкнутых множеств — замкнуто.
3. Объединение конечного числа замкнутых множеств — замкнуто.
4.  $\overline{B}_R(a)$  — замкнуто. ( $\iff$  замкнутый шар — замкнутое множество)

**Доказательство.** 2.  $A_\alpha$  — замкнуты  $\implies X \setminus A_\alpha$  — открытые  $\implies \bigcup_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$  — открыто  $\implies X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$  — замкнутое.

3. Аналогично.

4.  $X \setminus \overline{B}_R(a)$  — открытое. Берем  $x \notin \overline{B}_R(a)$  (то есть берём точку из дополнения  $\iff$  она не лежит в шарике). Возьмем  $r := \rho(a, x) - R > 0$ . Покажем, что  $B_r(x) \subset X \setminus \overline{B}_R(a)$ .

От противного. Пусть  $B_r(x) \cap \overline{B}_R(a) \neq \emptyset$ . Берем  $y \in B_r(x) \cap \overline{B}_R(a) \implies \rho(x, y) < r \wedge \rho(a, y) \leq R \implies \rho(a, x) \leq \rho(a, y) + \rho(y, x) < R + r = \rho(a, x)$ . Противоречие.

□

**Замечание.** В 3 важна конечность.  $\mathbb{R}. \bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1] = (0, 1]$  — не является замкнутым.

**Определение 2.9.** Замыкание множества  $\text{Cl } A$  (Closure  $A$ ) — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих  $A$ .

**Теорема 2.3.**  $X \setminus \text{Cl } A = \text{Int}(X \setminus A)$  и  $X \setminus \text{Int } A = \text{Cl}(X \setminus A)$ .

**Доказательство.**  $\text{Int}(X \setminus A) = \bigcup B_{\alpha}$ .  $B_{\alpha}$  — открытые,  $B_{\alpha} \subset X \setminus A \iff X \setminus B_{\alpha}$  — замкнутое.  $X \setminus B_{\alpha} \supset A$ .

$$\bigcap (X \setminus B_{\alpha}) = \text{Cl } A \implies \underbrace{X \setminus \bigcap (X \setminus B_{\alpha})}_{= \bigcup B_{\alpha}} = X \setminus \text{Cl } A \iff \bigcup (B_{\alpha}) = \text{Int}(X \setminus A). \quad \square$$

**Следствие.**  $\text{Int } A = X \setminus \text{Cl}(X \setminus A)$  и  $\text{Cl } A = X \setminus \text{Int}(X \setminus A)$ .

**Свойства.** 1.  $\text{Cl } A \supset A$ .

2.  $\text{Cl } A$  — замкнутое множество.

3.  $A$  — замкнуто  $\iff A = \text{Cl } A$ .

**Доказательство.**  $\Leftarrow$  — пункт 2.  $\Rightarrow A$  — замкнутое  $\Rightarrow$  оно участвует в пересечении из определения  $\implies \text{Cl } A \subset A \implies \text{Cl } A = A$ .  $\square$

4.  $A \subset B \implies \text{Cl } A \subset \text{Cl } B$ .

**Доказательство.**  $X \setminus A \supset X \setminus B \implies \text{Int}(X \setminus A) \supset \text{Int}(X \setminus B) \implies \underbrace{X \setminus \text{Int}(X \setminus A)}_{=\text{Cl } A} \subset \underbrace{X \setminus \text{Int}(X \setminus B)}_{=\text{Cl } B}$   $\square$

5.  $\text{Cl}(A \cup B) = \text{Cl } A \cup \text{Cl } B$ .

6.  $\text{Cl}(\text{Cl } A) = \text{Cl } A$ .

**Доказательство.**  $B := \text{Cl } A$  — замкнуто  $\implies \text{Cl } B = B$ .  $\square$

**Упражнение.**  $\text{Cl } \text{Int } \text{Cl } \text{Int} \dots A$ . Какое наибольшее количество различных множеств может получиться.

**Теорема 2.4.**  $x \in \text{Cl } A \iff \forall r > 0 \quad B_r(x) \cap A \neq \emptyset$ .

**Доказательство.** Запишем отрицание условия теоремы:  $x \notin \text{Cl } A \iff \exists r > 0 \quad B_r(x) \cap A = \emptyset$ .

Что означает, что  $x \notin A$ ? Это значит, что  $x \in X \setminus \text{Cl } A = \text{Int}(X \setminus A) \iff x \in \text{Int}(X \setminus A) \iff x$  — внутренняя точка  $X \setminus A \iff \exists r > 0: B_r(x) \subset X \setminus A \iff \exists r > 0: B_r(x) \cap A = \emptyset$ .  $\square$

**Следствие.**  $U$  — открытое,  $U \cap A = \emptyset \implies U \cap \text{Cl } A = \emptyset$ .

**Доказательство.** Возьмем  $x \in U \implies \exists r > 0: B_r(x) \subset U \implies B_r(x) \cap A = \emptyset \implies x \notin \text{Cl } A \implies U \cap \text{Cl } A = \emptyset$ .  $\square$

**Определение 2.10.** Окрестностью точки  $x$  будем называть шар  $B_r(x)$  для некоторого  $r > 0$ . Обозначать будем  $U_x$ .

**Определение 2.11.** Проколотой окрестностью точки  $x$  —  $B_r(x) \setminus \{x\}$ . Обозначать будем  $\dot{U}_x$ .

**Определение 2.12.**  $x$  — предельная точка множества  $A$ , если  $\forall \dot{U}_x: \dot{U}_x \cap A \neq \emptyset$ .

Обозначим через  $A'$  — множество предельных точек для  $A$ .

**Свойства.**

$$1. \text{Cl } A = A \cup A'.$$

**Доказательство.**  $x \in \text{Cl } A \iff \forall U_x: U_x \cap A \neq \emptyset \iff \left[ \begin{array}{l} x \in A \\ \forall \dot{U}_x: \dot{U}_x \cap A \neq \emptyset \iff x \in A' \end{array} \right. \quad \square$

$$2. A \subset B \implies A' \subset B'. \text{ Очевидно.}$$

$$3. A \text{ — замкнуто} \iff A \supset A'.$$

**Доказательство.**  $A \text{ — замкнуто} \iff A = \text{Cl } A \iff A = A \cup A' \iff A \supset A'. \quad \square$

$$4. (A \cup B)' = A' \cup B'.$$

**Доказательство.** Докажем " $\subset$ ". Возьмем  $x \in (A \cup B)'$ :  $x \notin A' \implies \exists \dot{U}_x: \dot{U}_x \cap A = \emptyset$ , но  $\dot{U}_x \cap (A \cup B) \neq \emptyset \implies \dot{U}_x \cap B \neq \emptyset \implies x \in B'$ .

Докажем " $\supset$ ".  $A \cup B \supset A \implies (A \cup B)' \supset A'$ . Проверим тот же фокус для  $B$ , получим  $(A \cup B)' \supset A' \cup B'$ .  $\square$

**Теорема 2.5.**  $x \in A' \iff \forall r > 0 \ B_r(x)$  содержит бесконечное количество точек из  $A$ .

**Доказательство.** Докажем " $\Leftarrow$ ".  $B_r(x) \cap A$  содержит бесконечное количество точек  $\implies \dot{B}_r(x) \cap A$  содержит бесконечное число точек  $\implies \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \implies x \in A'$ .

" $\Rightarrow$ ". Возьмем радиус  $r = 1$ . Тогда  $\dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \implies \exists x_1 \in A: 0 < \rho(x, x_1) < 1$ . Возьмем  $r = \rho(x, x_1)$ .  $\dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \implies \exists x_2 \in A: 0 < \rho(x, x_2) < \rho(x, x_1)$ . Тогда можно взять  $r = \rho(x, x_2)$ , и так далее.

В итоге получили, что  $r > \rho(x, x_1) > \rho(x, x_2) > \rho(x, x_3) > \dots > 0 \implies$  все  $x_n$  различны.  $\square$

**Следствие.** Конечное множество не имеет предельных точек. (Потому что их должно быть  $\infty$ )

**Доказательство.** Предположим предельная точка существует  $\iff \exists r > 0: B_r(x) \cap A$  содержит бесконечное количество точек. Но это невозможно, так как в  $A$  конечное число точек.  $\square$

**Определение 2.13.**  $(X, \rho)$  — метрическое пространство  $Y \subset X$ .

Тогда  $(Y, \rho|_{Y \times Y})$  — подпространство метрического пространства  $(X, \rho)$ .

**Пример.**  $(\mathbb{R}, |x - y|)$ .  $Y = [a, b] \subset \mathbb{R}$ , например,  $Y = [0, 1]$ .

$$B_1(1) = (0, 1], B_2(0) = [0, 1]. \ B_r^Y(a) = Y \cap B_r^X(a). \ (B_r^A — шарик радиуса  $r$  на множестве  $A$ )$$

**Теорема 2.6** (об открытых и замкнутых множествах в пространстве и подпространстве).  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $(Y, \rho)$  — его подпространство,  $A \subset Y$ . Тогда

$$1. A \text{ — открыто в } Y \iff \exists G \text{ — открытое в } X: A = G \cap Y.$$

$$2. A \text{ — замкнуто в } Y \iff \exists F \text{ — замкнутое в } X: A = F \cap Y.$$

**Доказательство.**



1.  $\Rightarrow$   $A$  — открыто в  $Y \Rightarrow \forall x \in A \exists r_x > 0: B_{r_x}^Y(x) \subset A \Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} B_{r_x}^Y(x)$ .

То есть наше множество будет объединением большего числа шариков (возможно бесконечного). Найдем теперь  $G$ :  $G := \bigcup_{x \in A} B_{r_x}^X(x)$  — открыто в  $X$ . Посмотрим теперь на

$$G \cap Y = \bigcup_{x \in A} (B_{r_x}^X(x) \cap Y) = \bigcup_{x \in A} B_{r_x}^Y(x) = A.$$

В обратную сторону. Пусть  $A = G \cap Y$ , где  $G$  открыто в  $X$ . Возьмем  $x \in G \cap Y$ .  $G$  — открыто в  $X \Rightarrow \forall x \in G \cap Y \exists r > 0: B_r^X(x) \subset G \Rightarrow B_r^X(x) \cap Y \subset G \cap Y = A \Rightarrow B_r^Y(x) \subset A \Rightarrow x$  — внутренняя точка  $A \Rightarrow A$  — открыто в  $Y$ .

2.  $A$  — замкнутое в  $Y \iff Y \setminus A$  — открыто в  $Y \iff \exists G$  — открытое в  $X$ , такое что  $Y \setminus A = Y \cap G \iff A = Y \setminus (Y \cap G) \stackrel{(1)}{=} Y \setminus G \stackrel{(2)}{=} Y \cap (X \setminus G) \iff \exists G$  — открытое в  $X$ , такое что  $A = Y \cap (X \setminus G) \iff \exists F$  — замкнуто в  $X$ , такое что  $A = Y \cap F$ .

(1) — Можно забыть на пересечение с  $Y$ , потому что, если элемент  $G$  не лежит в  $Y$ , то и в  $Y \setminus G$  он участия не принимает. (2) — Помним, что  $Y \subset X$ , а значит такая операция корректна.

□

**Пример.**  $(\mathbb{R}, |x - y|)$ .  $Y = [0, 3)$ .  $[0, 1)$  — открыто в  $[0, 3)$ :  $[0, 1) = \underbrace{[0, 3)}_Y \cap \underbrace{(-1, 1)}_G$ .

$[2, 3)$  — замкнуто в  $[0, 3)$ :  $[2, 3) = \underbrace{[0, 3)}_Y \cap \underbrace{[2, 3]}_F$ .

**Определение 2.14.**  $X$  — векторное пространство над  $\mathbb{R}$ .

$\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$  — норма, если  $(\cdot$  — аргумент)

- $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$  и  $\|x\| = 0 \iff x = \vec{0}$ .
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .
- (неравенство треугольника):  $\forall x, y: \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**Пример.** 1.  $|x|$  в  $\mathbb{R}$ ,

2.  $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_d|$  в  $\mathbb{R}^d$ .

3.  $\|x\|_\infty = \max_{k=1,2,\dots,d} |x_k|$ .

Неравенство треугольника:  $\|x + y\|_\infty = \max\{|x_k + y_k|\} \leq \max\{|x_k| + |y_k|\} \leq \max\{|x_k|\} + \max\{|y_k|\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

4.  $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ .

5.  $\|x\|_p = \left( \sum_{k=1}^d |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$  в  $\mathbb{R}^d$  при  $p \geq 1$ . Неравенство треугольника — неравенство Минковского.

6.  $C[a, b]$ .  $\|f\| = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$ .

**Определение 2.15.**  $X$  — векторное пространство над  $\mathbb{R}$ .  $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  скалярное произведение, если

- $\langle x, x \rangle \geq 0$  и  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = \vec{0}$ .

2.  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
3.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ .
4.  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \lambda \in \mathbb{R}$ .

**Пример.** 1.  $\mathbb{R}^d$ .  $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$ .

2. Возьмем  $w_1, \dots, w_d > 0$ . Тогда  $\langle x, y \rangle = \sum w_i x_i y_i$ .

3.  $C[a, b]$ .  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ .

**Свойства.** 1. Неравенство Коши-Буняковского.  $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$ .

**Доказательство.**  $f(t) := \langle x + ty, x + ty \rangle \geq 0$ .  $f(t) = \langle x, x \rangle + t\langle x, y \rangle + t\langle x, y \rangle + t^2\langle y, y \rangle = t^2\langle y, y \rangle + 2t\langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle$  — квадратный трехчлен (если  $\langle y, y \rangle = 0 \implies y = 0 \implies$  везде нули). Тогда  $0 \geq D = (2\langle x, y \rangle)^2 - 4\langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle = 4(\langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle)$ . Потому что иначе есть два корня и где-то есть отрицательное значение, а  $f(t) \geq 0$ .

$$\langle x, \vec{0} \rangle = \langle x, 0 \cdot y \rangle = 0 \cdot \langle x, y \rangle = 0.$$

□

2.  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  — норма.

**Доказательство.**  $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|$ .

Неравенство треугольника:  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ . Возведем в квадрат, получим  $\langle x + y, x + y \rangle \leq \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}$ , но теперь вспомним, что  $\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\langle x, y \rangle$ . А, сократив общие слагаемые, получим доказанное неравенство Коши-Буняковского. □

3.  $\rho(x, y) = \|x - y\|$  — метрика.

**Доказательство.**  $\rho(x, y) \geq 0$ .  $\rho(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x - y = \vec{0} \iff x = y$ .

$$\rho(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1| \|x - y\| = \rho(x, y).$$

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z): \|(x - y) + (y - z)\| = \|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|.$$

□

4.  $\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$ .

**Доказательство.** Надо доказать, что  $-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ .

$$\text{Левое: } \|y\| = \|(y - x) + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|$$

$$\text{Правое: } \|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

□

5. Упражнение. Если норма порождается скалярным произведением  $\iff \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ . Тождество параллелограмма.

**Определение 2.16.**  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.  $x_1, x_2, \dots \in X, a \in X$ .

$\lim x_n = a$ , если

1. Вне любого открытого шара с центром в точке  $a$  содержится лишь конечное число членов последовательности.
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon \iff x_n \in B_\varepsilon(a)$ .

**Определение 2.17.**  $A \subset X$ .

Тогда  $A$  — ограничено, если оно содержится в некотором шаре ( $\iff$  его можно записать в шар).

**Свойства.** 1.  $a = \lim x \iff \rho(x_n, a) \rightarrow 0$ .

**Доказательство.**  $\forall \varepsilon > 0 \exists n \geq N \quad |\rho(x_n, a)| < \varepsilon$  — предел равен 0.  $\square$

2. Предел единственный.

**Доказательство.** Пусть  $a = \lim x_n$  и  $b = \lim x_n$ . Тогда возьмем шарики такие, что  $B_r(a) \cap B_r(b) = \emptyset \implies \exists N_1, N_2, \forall n \geq \max\{N_1, N_2\} \quad x_n \in B_r(a) \wedge x_n \in B_r(b)$  — противоречие.  $\square$

3. Если  $a = \lim x_n, a = \lim y_n$ . То для перемешанной последовательности  $x_n$  и  $y_n$  предел такой же.

4.  $a = \lim x_n \implies$  для последовательности, в которой  $x_n$  взяты с конечной кратностью,  $a$  будет пределом.

5. Если  $a = \lim x_n$ , то  $\lim x_{n_k} = a$ .

6. Последовательность имеет предел  $\implies$  она ограничена

**Доказательство.**  $\varepsilon = 1 \exists N \forall n \geq N \rho(x_n, a) < 1$ . Тогда  $R = \max\{\rho(x_1, a), \dots, \rho(x_{N-1}, a)\} + 1 \implies x_n \in B_R(a)$ .  $\square$

7. Если  $a = \lim x_n$ , то последовательность, полученная из  $\{x_n\}$  перестановкой членов имеет тот же предел (было конечное  $\rightarrow$  стало конечное).

8.  $a$  — предельная точка  $A \iff \exists \{x_n\} \neq a \in A: \lim x_n = a$ .

Более того,  $x_n$  можно выбирать так, что  $\rho(x_n, a)$  строго убывает.

**Доказательство.** " $\Leftarrow$ " Пусть  $\lim x_n = a$ . Возьмем  $B_r(a) \implies \exists N \forall n \geq N x_n \in B_r(a) \implies \exists x_n \in \dot{B}_r(a) \implies \dot{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \implies a$  — предельная точка.

" $\Rightarrow$ " (строим последовательность) Берем  $r_1 = 1$ .  $\dot{B}_{r_1}(a) \cap A \neq \emptyset$ . Берем оттуда точку, называем  $x_1 \neq a$ .  $r_2 = \frac{\rho(x_1, a)}{2}$  (для надежности поделили на 2).  $\dot{B}_{r_2}(a) \cap A \neq \emptyset$ . Берем оттуда точку  $x_2 \neq a$ .  $r_3 = \frac{\rho(x_2, a)}{2}$ . И так далее.

Получили:  $x_n \neq a$  и  $\rho(x_n, a) < \frac{\rho(x_{n-1}, a)}{2} < \rho(x_{n-1}, a)$ .  $\rho(x_n, a) < \frac{1}{2^n} \rightarrow 0 \implies \lim x_n = a$ .  $\square$

**Теорема 2.7** (об арифметических действиях с пределами).  $X$  — нормированное пространство,  $x_n, y_n \in X, \lambda_n \in \mathbb{R}$ .  $\lim x_n = a, \lim y_n = b, \lim \lambda_n = \mu$ . Тогда:

$$1. \lim(x_n + y_n) = a + b.$$

$$2. \lim(x_n - y_n) = a - b.$$

$$3. \lim \lambda_n x_n = \mu a.$$

$$4. \lim \|x_n\| = \|a\|.$$

$$5. \text{Если в } X \text{ есть скалярное произведение, то } \lim \langle x_n, y_n \rangle = \langle a, b \rangle.$$

**Доказательство.** 1.  $\rho(x_n + y_n, a + b) = \|(x_n + y_n) - (a + b)\| = \|(x_n - a) + (y_n - b)\| \leq \|x_n - a\| + \|y_n - b\| = \rho(x_n, a) + \rho(y_n, b) \rightarrow 0$ .

2. Аналогично.

3.  $\rho(\lambda_n x_n, \mu a) = \|\lambda_n x_n - \mu a\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n a + \lambda_n a - \mu a\| \leq \|\lambda_n x_n - \lambda_n a\| + \|\lambda_n a - \mu a\| = |\lambda_n| \|x_n - a\| + |\lambda_n - \mu| \|a\| \rightarrow 0$ , так как  $|\lambda_n|$  — ограниченная,  $\|x_n - a\| = \rho(x_n, a) \rightarrow 0$ ,  $|\lambda_n - \mu| \rightarrow 0$ ,  $\|a\|$  — константа.

4.  $\| \|x_n\| - \|a\| \| \leq \|x_n - a\| = \rho(x_n, a) \rightarrow 0 \implies \lim \|x_n\| = \|a\|$

5.  $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = \frac{1}{4}(\langle x + y, x + y \rangle - \langle x - y, x - y \rangle) = \frac{1}{4}(\langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle - (\langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle)) = \frac{1}{4} \cdot 4\langle x, y \rangle$ . Тогда получаем  $4\langle x_n, y_n \rangle = \|x_n + y_n\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 \rightarrow \|a + b\|^2 - \|a - b\|^2 = 4\langle a, b \rangle$ .

□

**Определение 2.18.**  $\mathbb{R}^d$  — пространство с нормой  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}$ .

**Определение 2.19.** Покоординатная сходимость в  $\mathbb{R}^d$ :

$x_n \in \mathbb{R}^d$ .  $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)}) \xrightarrow{\text{покоординатно}} a = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(d)})$ , если  $\lim x_n^{(k)} = a^{(k)}$   $\forall k = 1, 2, \dots, d$ .

**Теорема 2.8.** в  $\mathbb{R}^d$  сходимость по метрике и покоординатная сходимость совпадают.

**Доказательство.** Метрика  $\implies$  покоординатная.  $\rho(x_n, a) \rightarrow 0 \implies 0 \leq (x_n^{(1)} - a^{(1)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - a^{(d)})^2 = \rho(x_n, a)^2 \rightarrow 0 \implies \lim (x_n^{(k)} - a^{(k)})^2 = 0 \implies \lim x_n^{(k)} = a^{(k)} \implies$  покоординатная сходимость.

Покоординатная  $\implies$  метрика. Пусть  $|x_n^{(k)} - a^{(k)}| \rightarrow 0 \quad \forall k \implies (x_n^{(k)} - a^{(k)})^2 \rightarrow 0 \implies \sum_{k=1}^d (x_n^{(k)} - a^{(k)})^2 \rightarrow 0$ . А так как  $(\dots)^2 = \rho(x_n, a)^2 \implies \rho(x_n, a) \rightarrow 0$ . □

**Определение 2.20.**  $x_n \in X$  — фундаментальная последовательность, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N: \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

**Свойства.** 1. Сходящаяся последовательность фундаментальна.

2. Фундаментальная последовательность ограничена.

3. Если у последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то последовательность имеет предел.

**Доказательство.** Упражнение! Утверждается, что так же, как и в пределах. □

**Определение 2.21.**  $(X, \rho)$  — метрическое пространство — полное, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

**Пример.**  $\mathbb{R}$ :  $\rho(x, y) = |x - y|$  — полное.

**Упражнение.**  $(X, \rho)$  — полное метрическое пространство  $X \supset Y$  замкнуто. Доказать, что  $(Y, \rho)$  — полное.

**Пример.**  $(0, 1)$  не полное.  $x_n = \frac{1}{n}$  — фундаментальная, но  $\lim \frac{1}{n} = 0 \notin (0, 1)$ .

**Теорема 2.9.**  $\mathbb{R}^d$  — полное.

**Доказательство.** Пусть  $x_n$  — фундаментальная, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N: \rho(x_n, x_m) = \sqrt{(x_n^{(1)} - x_m^{(1)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - x_m^{(d)})^2} < \varepsilon.$$

Но мы знаем, что  $\rho(x_n, x_m) \geq |x_n^{(k)} - x_m^{(k)}|$ , так как, могут быть еще координаты, а значит еще неотрицательные слагаемые.

Тогда заметим, что  $x_n^{(k)}$  — фундаментальная  $\implies \exists a^{(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(k)}$ . Значит и  $x_n$  сходится к  $a$  по координатам  $\implies \rho(x_n, a) \rightarrow 0 \implies x_n$  сходится к  $a$  по метрике.  $\square$

## 2.2. Компактность

**Определение 2.22.**  $A, U_\alpha, \alpha \in I$ .

Множества  $U_\alpha$  — покрытие множества  $A$ , если  $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ .

**Определение 2.23.** Открытое покрытие — покрытие открытыми множествами.

**Определение 2.24.**  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $K \subset X$ .

$K$  — компакт, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

То есть для любого покрытия можно выбрать  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in I: K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$

**Теорема 2.10** (Теорема о свойствах компактных множеств). 1.  $K \subset Y \subset X$ . Тогда  $K$  — компакт в  $(X, \rho) \iff K$  — компакт в  $(Y, \rho)$ .

2.  $K$  — компакт  $\implies K$  замкнуто и ограничено.

3. Замкнутое подмножество компакта — компакт.

**Доказательство.** 1.  $\Leftarrow$ . Пусть  $G_\alpha$  покрытие  $K$  множествами, открытыми в  $X$ . Тогда  $U_\alpha = G_\alpha \cap Y$  — открыты в  $Y$  и  $K \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \cap Y = (\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha) \cap Y$ .

$U_\alpha$  — открытое покрытие в  $(Y, \rho) \implies$  можно выделить конечное подпокрытие  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , такое что  $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$  — конечное подпокрытие  $G_\alpha \implies K$  компакт в  $(X, \rho)$ .

$\Rightarrow$ . Воспользуемся тем же наблюдением:  $U_\alpha = G_\alpha \cap Y$ . Следовательно можно выбрать  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  в  $X$  и они же подойдут и в  $Y$ .

2. **Ограниченность.** Возьмем  $a \in X$ . Тогда  $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a) = X$  — открытое покрытие  $K$ .

Выделим конечное подпокрытие  $K \subset \bigcup_{n=1}^N B_n(a) \implies K \subset B_N(a) \implies K$  — ограничено (то есть объединили в один большой шар).

**Замкнутость.** Надо доказать, что  $X \setminus K$  — открытое. Возьмем  $a \in X \setminus K$  и  $x \in K$  и докажем, что  $a$  лежит в  $X \setminus K$  вместе с некоторым шариком.

Пусть  $U_x = B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x)$ . Причем он не пересекается с  $B_x = B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(a)$ . Возьмем тогда  $K \subset \bigcup_{x \in K} U_x$  — открытое покрытие (поскольку каждый шарик точно покрывает свой центр и ещё что-то). Выделим конечное подпокрытие  $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ ,  $r = \min\{\frac{\rho(x_i, a)}{2}\}$ . Тогда  $B_r(a) =$

$\bigcap_{i=1}^n B_{x_i} \cdot B_r(a) \cap \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} = \emptyset \implies B_r(a) \cap K = \emptyset \implies B_r(a) \subset X \setminus K \implies a$  — внутренняя точка  $X \cap K$ .

3. Пусть  $\tilde{K}$  — компакт,  $K$  — замкнуто и  $K \subset \tilde{K}$ .

Рассмотрим открытое покрытие  $K \cup U_\alpha$ . Тогда  $\tilde{K}$  покрыто  $(X \setminus K) \cup \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$  — открытое покрытие  $\tilde{K}$ . Выделим конечное подпокрытие  $X \setminus K, U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ .  $K \subset \underbrace{X \setminus K}_{\cap K = \emptyset} \cup \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \implies K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$  — конечное подпокрытие  $K$ , а значит  $K$  — компакт.

□

**Теорема 2.11.**  $K_\alpha$  — семейство компактов, такое что пересечение любого конечного числа из них непусто. Тогда  $\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha \neq \emptyset$ .

**Следствие.**  $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$  непустые компакты. Тогда  $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$ .

*Доказательство теоремы.* От противного. Пусть  $\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha = \emptyset$ . Зафиксируем компакт  $K_0 \implies K_0 \cap \bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha = \emptyset \implies K_0 \subset X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} X \setminus K_\alpha$  — открытое покрытие  $K_0$ . Выделим конечное подпокрытие  $K_0 \subset \bigcup_{i=1}^n X \setminus K_{\alpha_i} = X \setminus \bigcap_{i=1}^n K_{\alpha_i} \implies K_0 \cap \bigcap_{i=1}^n K_{\alpha_i} = \emptyset$ .??!

□

**Определение 2.25.**  $K$  — секвенциально компактное множество, если из любой последовательности точек из  $K$  можно выделить подпоследовательность, которая сходится к какой-то точке из  $K$ .

**Пример.**  $[a, b] \in \mathbb{R}$  секвенциально компактно.

$x_n \in [a; b] \xrightarrow{\text{Т. Б-В}} \exists$  подпоследовательность  $x_{n_k}$ , имеющая предел  $\implies \lim x_{n_k} \in [a, b]$ , так как неравенства сохраняются.

**Теорема 2.12.** Бесконечное подмножество компакта имеет предельную точку.

*Доказательство.*  $K$  — компакт.  $A \subset K$ . Пусть  $A'$  (предельные точки)  $= \emptyset$ . Тогда  $A$  — замкнуто  $\implies A$  — компакт и ни одна из его точек не является предельной.  $a \in A$  не предельная  $\implies \exists r_a > 0 \ B_{r_a}(a) \cap A = \emptyset \implies B_{r_a}(a) \cap A = \{a\}$ . Рассмотрим открытое покрытие  $A \subset \bigcup_{a \in A} B_{r_a}(a)$ , но из этого покрытия нельзя убрать ни одного множества, так как мы выбрали радиусы так, что каждый шар в пересечении с  $A$  дает только одну точку  $\implies$  нет конечного подпокрытия  $\implies$  противоречие.

□

**Следствие.** Компактность  $\implies$  секвенциальная компактность.

*Доказательство.*  $x_1, x_2, \dots \in K$ .  $D = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  — множество значений последовательности.

1.  $|D| < +\infty \implies$  в последовательности есть элемент, повторяющийся бесконечно много раз, оставим только его — это нужная подпоследовательность.

2.  $|D| = +\infty \implies$  у  $D$  есть предельная точка.

Пусть  $a$  — предельная точка  $D \implies$  найдутся различные  $y_1, y_2, \dots \in D$ , такие что  $\lim y_n = a$ .

Но  $y_i$  — это какой-то  $x_{n_i}$  и  $\lim x_{n_i} = a$ . Осталось переставить  $x_{n_i}$  так, что получится подпоследовательность. Ну, а так как  $K$  — замкнуто, то  $a \in K$ .

□

**Лемма (Лемма Лебега).**  $K$  — секвенциальный компакт,  $K \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$  — открытое покрытие.

Тогда  $\exists r > 0: \forall x \in K \quad B_r(x)$  целиком покрывается каким-то  $U_\alpha$ .

**Доказательство.** От противного. Тогда  $r = \frac{1}{n}$  не подходит  $\implies \exists x_n \in K: B_{\frac{1}{n}}(x_n)$  не содержится целиком ни в каком  $U_\alpha$ .

Выберем подпоследовательность  $x_{n_k}$ , такую что  $\lim x_{n_k} = a \in K$ .

Тогда  $a \in U_\beta$  для некоторого  $\beta \in I \implies \exists B_\varepsilon(a) \subset U_\beta$ . Возьмем  $N_1: \forall k \geq N_1 \quad \rho(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ . А еще можно взять  $N_2: \forall k \geq N_2 \quad \frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2}$ . А значит  $B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subset B_\varepsilon(a) \subset U_\beta$  при  $k \geq \max\{N_1, N_2\}$  ???

Докажем  $B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subset B_\varepsilon(a)$ : Если  $x \in B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k})$   $\rho(x_{n_k}, x) < \frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2} \wedge \rho(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} \implies \rho(x, a) \leq \rho(x_{n_k}, x) + \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$  □

**Теорема 2.13.** Компактность = секвенциальная компактность.

**Доказательство.**  $\Leftarrow$  Пусть  $K \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$  — открытое покрытие. Возьмем  $r > 0$  из леммы Лебега. Рассмотрим открытое покрытие  $K \subset \bigcup_{x \in K} B_r(x)$ .

Достаточно из него выделить конечное подпокрытие. Возьмем  $x_1 \in K$ . Если  $B_r(x_1) \supset K$ , то выбрали конечное покрытие. Иначе берем  $x_2 \in K \setminus B_r(x_1)$ . Если объединение шариков  $\supset K$ , то выбрали конечное подпокрытие. Иначе продолжаем процесс:  $x_n \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_r(x_i)$ . Если процесс оборвался, то выделили конечное подпокрытие.

Если он не оборвался, то мы построили подпоследовательность  $x_1, x_2, \dots$ . Причем  $\rho(x_n, x_k) \geq r \forall n > k \implies \rho(x_i, x_j) \geq r \forall i \neq j$ . Из такой последовательности не выбрать сходящуюся подпоследовательность, так как любая подпоследовательность не фундаментальная, — противоречие с секвенциальной компактностью. □

**Определение 2.26.**  $A \subset X$ .  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.

$E \subset A$ ,  $\varepsilon$ -сеть множества  $A$ , если  $\forall a \in A \exists x \in E: \rho(x, a) < \varepsilon$ .

Конечная  $\varepsilon$ -сеть —  $E$ -конечное множество.

То есть  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset A$  —  $\varepsilon$ -сеть, если  $\forall a \in A \exists k \quad \rho(a, x_k) < \varepsilon$ .

**Определение 2.27.**  $A$  — вполне ограничено, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  конечная  $\varepsilon$ -сеть  $A$ .

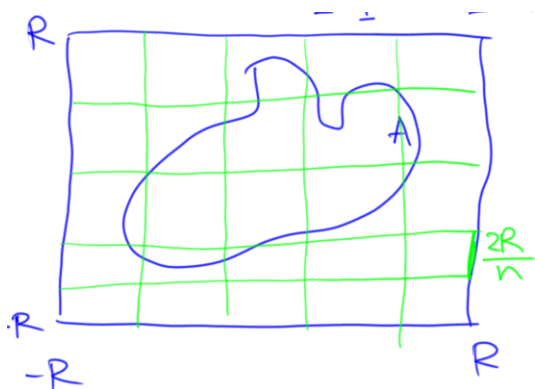
**Свойства.** 1. Вполне ограниченность  $\implies$  ограниченность.

**Доказательство.**  $\varepsilon = 1$  и конечная 1-сеть  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .  $A \subset \bigcup_{k=1}^n B_1(x_k) \subset B_{r+1}(x_1)$ , где  $r = \max_{i \neq j} \rho(x_i, x_j)$ . □

2. В  $\mathbb{R}^d$  ограниченность  $\implies$  вполне ограниченность.

**Доказательство.**  $A \subset \mathbb{R}^d$  — ограниченное.  $A \subset B_R(O) \subset [-R, R]^d$ .

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$  и возьмем  $n \in \mathbb{N}$ .  $\rho(x_i, a) \leq$  главная диагональ  $= \sqrt{d} \frac{2R}{n} < \varepsilon$  при  $n > \frac{\sqrt{d} 2R}{\varepsilon}$  получается  $\varepsilon$ -сеть ( $\sqrt{d}$  — диагональ в  $d$ -мерном кубе). □



**Теорема 2.14** (Хаусдорфа). 1. Компактное множество вполне ограничено.

2. Если  $(X, \rho)$  — полное метрическое пространство, то замкнутое вполне ограниченное подмножество  $X$  — компактно.

**Доказательство.** 1. Берем  $\varepsilon > 0$   $K \subset \bigcup_{x \in K} B_\varepsilon(x)$  — открытое покрытие. Выделим конечное подпокрытие  $\Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i) \Rightarrow x_1, \dots, x_n$  —  $\varepsilon$ -сеть.

2. Проверим секвенциальную компактность. Берем  $x_1, x_2, \dots \in K$ . Возьмем 1-сеть  $K \subset \bigcup_{i=1}^{n_1} B_1(y_{1i})$ .

В каком-то шарике  $B_1(z_1)$  бесконечное число членов последовательности. Выкинем все, кроме них, останутся  $x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots$ . Возьмем  $\frac{1}{2}$ -сеть  $K \subset \bigcup_{i=1}^{n_2} B_{\frac{1}{2}}(y_{2i})$ . В каком-то шарике  $B_{\frac{1}{2}}(z_2)$  бесконечное число членов последовательности...

На  $j$ -ом шаге  $K \subset B_{\frac{1}{j}}(y_{ji})$ . Пусть на каждом шаге выбирали шарик  $B_{\frac{1}{j}}(z_j)$ .

В итоге получили:

$$\begin{array}{cccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \dots & B_1(z_1) \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \dots & B_{\frac{1}{2}}(z_2) \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \dots & B_{\frac{1}{3}}(z_3) \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & \dots & B_{\frac{1}{4}}(z_4) \end{array}$$

Воспользуемся диагональным методом Кантора. Пусть  $a_n := x_{nn}$ . Заметим, что  $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$  — подпоследовательность  $x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \dots \Rightarrow$  все лежат в  $B_{\frac{1}{n}}(z_n) \Rightarrow \rho(a_i, a_j) \leq \rho(a_i, z_n) + \rho(a_j, z_n) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$ , при  $i, j \geq n \Rightarrow a_i$  — фундаментальная  $\Rightarrow$  у нее есть предел  $\Rightarrow a = \lim a_n \in K$ , так как  $K$  — замкнуто  $\Rightarrow K$  — секвенциально компактно.

□

**Следствие Характеристика компактов в  $\mathbb{R}^d$ .**  $K \subset \mathbb{R}^d$ .  $K$  — компакт  $\iff K$  — замкнуто и ограничено.

**Доказательство.**  $\Rightarrow$  верна всегда и доказана выше.

А вот  $\Leftarrow$  верна не всегда. Поэтому докажем эту штуку для  $\mathbb{R}^d$ . Мы знаем, что  $\mathbb{R}^d$  — полное. А еще мы знаем, что в  $\mathbb{R}^d$  ограниченность  $\Rightarrow$  вполне ограниченность, а значит понятно, что  $K$  — компакт. □

**Упражнение.**  $(K, \rho)$  — метрическое пространство,  $K$  — компакт. Доказать, что  $(K, \rho)$  — полное.



**Теорема 2.15** (Теорема Больцано-Вейерштрасса в  $\mathbb{R}^d$ ). Из любой ограниченной последовательности в  $\mathbb{R}^d$  можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

**Доказательство.**  $\{x_n\}$  — ограничено  $\implies \exists R \ x_n \in B_R(a) \subset \bar{B}_R(a)$  — замкнуто и ограничено  $\implies$  компактно  $\implies$  секвенциально компактно  $\implies x_n$  — последовательность точек секвенциального компакта  $\implies$  у нее есть сходящаяся подпоследовательность.  $\square$

## 2.3. Непрерывные отображения

**Определение 2.28.**  $(X, \rho_X)$  и  $(Y, \rho_Y)$  — метрические пространства,  $E \subset X$ .  $f: E \rightarrow Y$ ,  $a$  — предельная точка  $E$ ,  $b \in Y$ .

$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  означает, что

По Коши:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x: \rho_X(x, a) < \delta \wedge a \neq x \in E \implies \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon$ .

В терминах окрестностей:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: f(\underbrace{\dot{B}_\delta(a) \cap E}_{\in X}) \subset \underbrace{B_\varepsilon(b)}_{\in Y}$

По Гейне:  $\forall$  последовательности  $a \neq x_n \in E: \lim x_n = a \implies \lim f(x_n) = b$  единственный.

**Теорема 2.16.** Все определения равносильны.

**Доказательство.** Упражнение (смотри доказательство для функций).  $\square$

**Теорема 2.17** (Критерий Коши).  $f: E \subset X \rightarrow Y$ ,  $Y$  — полное,  $a$  — предельная точка  $E$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

**Доказательство.**  $\Rightarrow$ . Упражнение: взять доказательство и заменить модуль на  $\rho$ .

$\Leftarrow$ . Проверим определение по Гейне. Надо доказать, что  $a \neq x_n \in E \wedge \lim x_n = a \implies \lim f(x_n)$  существует.

$f(x_n)$  — последовательность в  $Y$  — полное. Поэтому достаточно проверить, что  $f(x_n)$  — фундаментальная последовательность. Возьмем  $\varepsilon > 0$ , по нему  $\delta > 0$  из условия. По  $\delta > 0$  берем  $N$ , такое что  $\forall n \geq N: \rho_X(x_n, a) < \delta \implies x_n \in \dot{B}_\delta(a) \cap E$  при  $n \geq N \implies \forall m, n \geq N: \rho_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon \implies f(x_n)$  фундаментальная  $\implies f(x_n)$  имеет предел.  $\square$

**Теорема 2.18** (об арифметических действиях с пределами).  $f, g: E \subset X \rightarrow Y$ ,  $Y$  — нормированное пространство,  $a$  — предельная точка  $E$ .

Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \wedge \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Тогда

1.  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha b + \beta c$ .
2. Если  $\lambda: E \rightarrow \mathbb{R}$ , такое что  $\lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) = \mu \in \mathbb{R}$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) f(x) = \mu b$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow a} \|f(x)\| = \|b\|$
4. Если  $Y$  — пространство со скалярным произведением, то  $\lim_{x \rightarrow a} \langle f(x), g(x) \rangle = \langle b, c \rangle$ .
5. Если  $Y = \mathbb{R}$  и  $c \neq 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$ .

**Доказательство.** Проверка по Гейне. Берем  $x_n \rightarrow a$ , тогда  $f(x_n) \rightarrow b, g(x_n) \rightarrow c$  и теорема про пределы последовательности.  $\square$

**Определение 2.29.**  $(X, \rho_X)$  и  $(Y, \rho_Y)$  — метрические пространства,  $E \subset X$ ,  $a \in E$ .  
 $f: E \rightarrow Y$ ,  $f$  непрерывна в точке  $a$ , если

1.  $a$  не предельная точка или  $a$  — предельная и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .
2. По Коши.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E: \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ .
3. С окрестностями.  $\forall B_\varepsilon(f(a)) \exists B_\delta(a): f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$ .
4. По Гейне:  $\forall x_n \in E: \lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = f(a)$ .

**Доказательство.** Упражнение! Все определения равносильны. В прошлом доказательстве надо заменить модуль на расстояние.  $\square$

**Теорема 2.19** (о непрерывности композиции).  $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y), (Z, \rho_Z) — D \subset X, E \subset Y, a \in D, f: D \rightarrow E, g: E \rightarrow Z$ . Если  $f$  непрерывна в точке  $a$ , а  $g$  непрерывна в точке  $f(a)$ , то  $g \circ f$  непрерывна в точке  $a$ .

**Доказательство.** Запишем определения непрерывности для  $g$  и  $f$  в терминах окрестностей (в определении для  $f$  мы дописали  $\cap E$ , но заметим, что это никак не повлияет по определению  $E$ ):

$$\left. \begin{array}{l} \forall B_\varepsilon(g(f(a))) \exists B_\delta(f(a)) \text{ такой, что } g(B_\delta(f(a)) \cap E) \subset B_\varepsilon(g(f(a))) \\ \forall B_\delta(f(a)) \exists B_\gamma(a) \text{ такой, что } f(B_\gamma(a) \cap D) \subset B_\delta(f(a)) \cap E \end{array} \right\} \\ \Rightarrow g(f(B_\gamma(a) \cap D)) \subset g(B_\delta(f(a)) \cap E) \subset B_\varepsilon(g(f(a))) \Rightarrow g \circ f \text{ непрерывна в точке } a$$

 $\square$ 

**Теорема 2.20** (Характеристика непрерывности в терминах открытых множеств).  $f: X \rightarrow Y$ . Тогда

$f$  непрерывна во всех точках  $\iff \forall U$  — открытого в  $Y: f^{-1}(U) := \{x \in X \mid f(x) \in U\}$  — открыто в  $X$  (то есть они переходят в  $U$ ).

**Доказательство.**  $\Rightarrow$ . Берем  $a \in f^{-1}(U) \Rightarrow f(a) \in U$  — открыто  $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(f(a)) \subset U$ .

$f$  непрерывна в точке  $a \Rightarrow \exists \delta > 0: f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \subset U \Rightarrow B_\delta(a) \subset f^{-1}(U) \Rightarrow a$  — внутренняя точка  $f^{-1}(U) \Rightarrow f^{-1}(U)$  — открыто.

$\Leftarrow$ .  $U := B_\varepsilon(f(a))$  — открытое множество  $\Rightarrow f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$  — открыто и  $a \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) \Rightarrow$

$\exists \delta > 0 \quad B_\delta(a) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) \Rightarrow f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \Rightarrow f$  непрерывна в точке  $a$ .  $\square$

**Теорема 2.21** (Непрерывный образ компакта — компакт).  $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$  — метрические пространства,  $K \subset X$ ,  $K$  — компакт.

$f: K \rightarrow Y$  непрерывна во всех точках. Тогда  $f(K)$  — компакт.

**Доказательство.** Рассмотрим открытое покрытие  $f(K) \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$  — открытые  $\Rightarrow K \subset$

$f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(U_\alpha)$  по непрерывности  $f$   $f^{-1}(U_\alpha)$  — открыто  $\Rightarrow$  это открытое покрытие

$K$ , но  $K$  — компакт  $\Rightarrow$  выбираем конечное подпокрытие  $K \subset \bigcup_{j=1}^n f^{-1}(U_{\alpha_j}) = f^{-1}(\bigcup_{j=1}^n U_{\alpha_j}) \Rightarrow$

$f(K) \subset \bigcup_{j=1}^n U_{\alpha_j}$ . Нашли конечное подпокрытие  $\Rightarrow f(K)$  — компакт.  $\square$

**Определение 2.30.**  $f: E \subset X \rightarrow Y$  — ограниченное отображение, если  $f(E)$  — ограниченное множество.

**Следствие.** Непрерывный образ компакта замкнут и ограничен.

**Доказательство.** Знаем, что непрерывный образ компакта — компакт. А следовательно, образ замкнут и ограничен.  $\square$

**Следствие.** Если  $K$  — компакт и  $f$  непрерывна на  $K$ , то  $f$  — ограниченное отображение.

**Следствие Теорема Вейерштрасса.**  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $K$  — компакт,  $f$  непрерывна на  $K$ .

Тогда  $\exists a, b \in K: f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in K$ .

**Доказательство.**  $f(K)$  — ограниченное множество в  $\mathbb{R} \implies B := \sup_{x \in K} f(x) \in \mathbb{R} \implies \exists x_n \in K: \lim f(x_n) = B$ . При этом  $x_n \in K$  — секвенциальный компакт  $\implies$  существует сходящаяся подпоследовательность  $x_{n_k}$ .

Тогда  $\lim x_{n_k} =: b \in K \implies \underbrace{\lim f(x_{n_k})}_{=B} = f(b) \implies f(b) = \sup_{x \in K} f(x) = B \implies f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in K$ .

$K$ .  $\square$

**Теорема 2.22.**  $f: X \rightarrow Y$  непрерывна во всех точках, биекция и  $X$  — компакт. Тогда  $f^{-1}$  непрерывна во всех точках.

**Доказательство.** Проверяем непрерывность  $f^{-1}$  в терминах открытых множеств. Надо для  $f^{-1}$  проверить, что прообраз открытого — открыт, то есть для  $f$  проверить, что образ открытого открыт.

$U$  — открыто в  $X \implies X \setminus U$  — замкнуто и  $\subset X$  — компакт  $\implies X \setminus U$  — компакт  $\xRightarrow{\text{непрер.}} f(X \setminus U) = Y \setminus f(U)$  — компакт  $\implies Y \setminus f(U)$  — замкнуто  $\implies f(U)$  — открыто.  $\square$

**Определение 2.31.**  $f: E \subset X \rightarrow Y$  равномерно непрерывна, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E: \rho_X(x, y) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ .

**Теорема 2.23** (Теорема Кантора).  $f: K \rightarrow Y$  непрерывна,  $K$  — компакт. Тогда  $f$  равномерно непрерывна.

**Доказательство.** Берем  $x \in K$ ,  $f$  непрерывна в точке  $x \implies \exists r_x > 0: f(B_{r_x}(x)) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x))$ .

Тогда  $K \subset \bigcup_{x \in K} B_{r_x}(x)$  — открытое покрытие  $K$ . Возьмем  $\delta > 0$  из леммы Лебега, то есть  $\forall x \in K B_{\delta}(x)$  целиком попал в какой-то элемент покрытия.

Проверим, что это  $\delta > 0$  подходит в определение равномерной непрерывности.

$\forall x, y \in K \rho_X(x, y) < \delta \implies y \in B_{\delta}(x) \implies \exists a \in K: B_{\delta}(x) \subset B_{r_a}(a) \implies x, y \in B_{r_a}(a) \implies f(x), f(y) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(a)) \implies \rho_Y(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2} \wedge \rho_Y(f(y), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2} \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$  по неравенству треугольника.  $\square$

**Определение 2.32.**  $X$  — векторное пространство и  $\|\cdot\|$  и  $\|\cdot\|$  — нормы в  $X$ .

Нормы эквиваленты, если  $\exists C_1, C_2 > 0$

$$C_1\|x\| \leq \|x\| \leq C_2\|x\| \quad \forall x \in X.$$

**Замечание.** 1. Это отношение эквивалентности. (упражнение)

2. Пределы последовательности для эквивалентных норм совпадают. Док-во: Пусть  $\lim x_n = a$  по норме  $\|\cdot\|$ , т.е.  $\lim \|x_n - a\| = 0$ . А  $0 \leq \|x_n - a\| \leq C_2 \|x_n - a\| \rightarrow 0$ , значит  $\lim x_n = a$  и по норме  $\|\cdot\|$ .
3. Непрерывность отображений для эквивалентных норм совпадают (записываем по Гейне, а для последовательностей мы всё знаем).

**Теорема 2.24.** В  $\mathbb{R}^d$  все нормы эквивалентны.

**Доказательство.**  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}$ . Достаточно доказать, что остальные нормы эквивалентны  $\|\cdot\|$ .

Пусть  $p(x)$  — другая норма в  $\mathbb{R}^d$ .  $e_k$  — вектор с нулями и единицей на  $k$ -ой позиции.

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_d) = \sum_{k=1}^d x_k e_k.$$

$$\begin{aligned} p(x - y) &= p\left(\sum_{k=1}^d (x_k - y_k) e_k\right) \stackrel{(1)}{\leq} \sum_{k=1}^d p((x_k - y_k) e_k) = \\ &= \sum_{k=1}^d |x_k - y_k| p(e_k) \leq (\text{Коши-Буняковский}) \left(\sum_{k=1}^d (x_k - y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^d p(e_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\sum_{k=1}^d p(e_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x - y\| \stackrel{(2)}{\Rightarrow} p(x) \leq \underbrace{\left(\sum_{k=1}^d p(e_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{:=M} \|x\|. \end{aligned}$$

$$(1) \iff \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \text{ и } p(a + b) \leq p(a) + p(b)$$

$$(2) \iff p(x) - \text{непрерывная функция.}$$

$$S := \{x \in \mathbb{R}^d : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2 = 1\} - \text{компакт} \implies \exists a \in S : 0 < p(a) \leq p(x) \quad \forall x \in S.$$

$$p(x) = p\left(\frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|\right) = \|x\| p\left(\underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{\in 1\text{-Sphere}}\right) \geq \|x\| p(a), \text{ так как норма } \frac{x}{\|x\|} \text{ будет равна } 1.$$

$$\text{Тогда } p(a)\|x\| \leq p(x) \leq M\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad \square$$

## 2.4. Длина кривой

**Определение 2.33.**  $(X, \rho)$  — метрическое пространство. ( $\mathbb{R}^d$  — ключевой случай).

Непрерывное  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  непрерывное — путь.

$\gamma(a)$  — начало пути,  $\gamma(b)$  — конец пути.  $\gamma([a, b])$  носитель пути.

Замкнутый путь  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Простой (самонепересекающийся) путь:  $\gamma(u) \neq \gamma(v) \quad \forall u, v \in [a, b]$ . Возможно, за исключением равенства  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

**Определение 2.34.** Эквивалентные пути:  $\gamma_1: [a, b] \rightarrow X$ ,  $\gamma_2: [c, d] \rightarrow X$ . Если  $\exists u: [a, b] \rightarrow [c, d]$ ,  $u$  — непрерывна и строго монотонно возрастает,  $u(a) = c$ ,  $u(b) = d$ , такой, что  $\gamma_1 = \gamma_2 \circ u$ .

Неформально говоря, мы считаем, что пути эквивалентны, если у них отличается только время прохождения.

(\*)  $u$  — допустимое преобразование параметра.

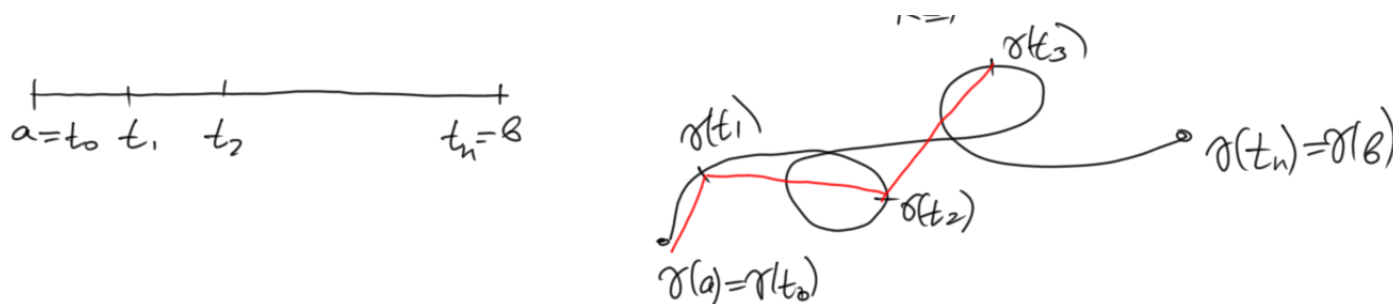
**Определение 2.35.** Класс эквивалентных путей — кривая.

Конкретный представитель класса — параметризация кривой.

**Определение 2.36.**  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ .  $r$ -гладкий путь, если  $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_d \end{pmatrix}$ ,  $\gamma_j: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  —  $r$ -гладкие функции, то есть  $\gamma_j \in C^r[a, b]$ .

Кривая гладкая, если у нее есть гладкая параметризация. Если  $r$  опущено, то  $r = 1$ .

**Определение 2.37.** Длина пути  $l(\gamma) = \sup \sum_{k=1}^n \rho(\gamma(t_k), \gamma(t_{k-1}))$ , где  $t_k$  — дробление отрезка. То есть считаем все и берем супремум.



**Замечание.** Длины эквивалентных путей равны.

**Свойства.** 1.  $l(\gamma) \geq \rho(\gamma(a), \gamma(b))$  (то есть  $\geq$  прямой). Можно просто взять дробление состоящее из двух точек.

2.  $l(\gamma) \geq$  длина вписанной в нее ломаной.

**Теорема 2.25.** Пусть есть  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ .  $c \in [a, b]$ .

$$l(\gamma) = l(\gamma|_{[a, c]}) + l(\gamma|_{[c, b]}).$$

Обозначим куски за  $\gamma_1, \gamma_2$ .

**Доказательство.** Нам нужно доказать какое-то равенство, поэтому докажем два неравенства!

- $\geq$ . Давайте вписывать ломанные. Впишем какую-то ломанную в  $\gamma_1$  и еще какую-то в  $\gamma_2$ . Пусть получились дробления  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = u_0 < \dots < u_m = b$  — получилось дробление  $[a, b]$ .

Тогда посчитаем сумму:  $\sum_{k=1}^n \rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) + \sum_{k=1}^m \rho(\gamma(u_{k-1}), \gamma(u_k)) \leq l(\gamma)$ . Заменим первое слагаемое на  $\sup$ :  $\sup \dots + \sum_{k=1}^m \rho(\gamma(u_{k-1}), \gamma(u_k)) \leq l(\gamma)$ . А этот  $\sup$  — длина  $\gamma_1$ . Встает вопрос почему можно переходить. Мы знаем, что все числа меньше, то и супремум меньше, поэтому переход корректный. Дальше заменяем правый  $\sup$ . В итоге получаем  $l(\gamma_1) + l(\gamma_2) \leq l(\gamma)$ .

- Возьмем дробление  $\gamma$   $t_i$ . Посмотрим на сумму  $S = \sum_{j=1}^n \rho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j))$ .

Возьмем дробление  $t_i$  и добавим в него точку  $c$ . Получаем:

$$S \leq \sum_{j=1}^k \rho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) + \rho(\gamma(t_k), \gamma(c)) + \rho(\gamma(c), \gamma(t_{k+1})) + \sum_{j=k+2}^n \rho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j))$$

А теперь увидим, что первые два слагаемых  $\leq l(\gamma_1)$ , а вторые два  $\leq l(\gamma_2)$ .  
То есть  $l(\gamma) \leq l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$ .

□

**Теорема 2.26.**  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  — гладкий путь.  $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_d \end{pmatrix}$ . Тогда:

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 + \dots + \gamma_d'(t)^2} dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

**Лемма.**  $\Delta \subset [a, b]$  — отрезок,  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ .  $m_\Delta^{(i)} := \min_{t \in \Delta} |\gamma_i'(t)|$ ,  $M_\Delta^{(i)} := \max_{t \in \Delta} |\gamma_i'(t)|$ ,  $m_\Delta :=$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^d (m_\Delta^{(i)})^2}, M_\Delta := \sqrt{\sum_{i=1}^d (M_\Delta^{(i)})^2}$$

Тогда  $m_\Delta l(\Delta) \leq l(\gamma|_\Delta) \leq M_\Delta l(\Delta)$ .

**Доказательство.** Впишем в  $\gamma|_\Delta$  ломаную. Пусть  $a_k$  — длина  $k$ -го звена.

По теореме Лагранжа:  $\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1}) = \underbrace{\gamma_i'(\xi_{ik})(t_k - t_{k-1})}_{\geq m_\Delta^{(i)}(t_k - t_{k-1})} \leq M_\Delta^{(i)}(t_k - t_{k-1})$

Тогда  $m_\Delta(t_k - t_{k-1}) \leq a_k \leq M_\Delta(t_k - t_{k-1})$ . Просуммируя все такие неравенства получим исходное. □

*Доказательство теоремы.* По лемме длина звена:

$$\begin{aligned} m_k(x_k - x_{k-1}) &\leq l(\gamma|_{[x_{k-1}, x_k]}) \leq M_k(x_k - x_{k-1}) \\ \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) &\leq l(\gamma) \leq \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) \\ m_k(x_k - x_{k-1}) &\leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \dots + \gamma_d'(t)^2} dt \leq M_k(x_k - x_{k-1}) \quad (*) \\ \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) &\leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} \|\gamma'(t)\| dt \leq \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

Заметим, что  $(*)$  получается просто из того, что  $m_k$  — минимум, а  $M_k$  — максимум. Также заметим, что суммы в первой и четвертой строчке равны.

Докажем, что сумма с  $M_k$  минус сумма с  $m_k$  стремится к нулю. По факту хотим доказать, что  $\sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned}
M_k - m_k &= \sqrt{\sum_{i=1}^d (M_{[x_{k-1}, x_k]}^{(i)})^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^d (m_{[x_{k-1}, x_k]}^{(i)})^2} \leq (\text{Минковский}) \sqrt{\sum_{i=1}^d (M_{[x_{k-1}, x_k]}^{(i)} - m_{[x_{k-1}, x_k]}^{(i)})^2} \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^d (M_{[x_{k-1}, x_k]}^{(i)} - m_{[x_{k-1}, x_k]}^{(i)}) = \sum_{i=1}^d (\gamma_i(\xi_k) - \gamma_i(\eta_k)) \leq \sum_{l=1}^d \omega_k(|\tau|). \quad (\xi_k, \eta_k \in [x_{k-1}, x_k]). \\
0 \leq \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) &\leq \underbrace{\sum_{i=1}^d \omega_k(|\tau|)}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})}_{=b-a}
\end{aligned}$$

□

**Следствие.** 1.  $\|\gamma'\| \leq C \implies l(\gamma) \leq C(b-a)$ . Бежали со скоростью  $\leq C \implies$  пробежали  $\leq C \cdot (b-a)$ .

2. Длина графика функции  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ .

3. Длина в полярных координатах.  $r: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} d\varphi$ .

**Доказательство.** 2.  $\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ ,  $\gamma'_1(x) = 1$ ,  $\gamma'_2(x) = f'(x)$ , а дальше применить функцию.

3.  $\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi) \cos \varphi \\ r(\varphi) \sin \varphi \end{pmatrix}$ . Подставим и возьмем производную.

□

**Определение 2.38.**  $A$  — связное множество, если  $\forall$  покрытие из  $U, V$   $A \subset U \cup V, U \cap V = \emptyset \implies$  либо  $A \subset U$ , либо  $A \subset V$ , где  $U, V$  — открытые.

**Пример.** 1.  $[a, b]$  — связное множество в  $\mathbb{R}$ .

2.  $\mathbb{Q}$  — несвязное множество в  $\mathbb{R}$ . Пример  $\mathbb{Q} \subset (-\infty; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$ .

**Теорема 2.27.** Непрерывный образ связного множества — связное множество.

**Доказательство.**  $A$  — связное,  $f: A \subset X \rightarrow Y$  непрерывное. Хотим показать, что  $f(A) \subset U, V$  — открытые множества в  $Y$ , причем  $U \cap V = \emptyset$ . Тогда образ лежит либо в  $U$ , либо в  $V$ . Так как множества открытые, то и  $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$  будут открытыми, причем  $A \subset f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$  и пересечение прообразов будет пустым.

Так как  $A$  связно, то оно будет лежать ровно в одном из прообразов, а значит и образ будет лежать ровно в одном множестве. □

**Следствие Теорема Больцано-Коши.** Пусть  $A$  — связное,  $a, b \in A$ .  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывная.

Тогда  $f$  принимает все промежуточные значения, лежащие между  $f(a)$  и  $f(b)$ .

**Доказательство.** От противного. Пусть  $f(a) < C < f(b)$  и  $C$  — не значение. Тогда  $f(A) \subset (-\infty, C) \cup (C, +\infty)$ . Заметим, что данные множества открытые и не пересекаются. Тогда получили противоречие со связностью  $f(A)$ . □

**Теорема 2.28.**  $\langle a, b \rangle$  — связное подмножество  $\mathbb{R}$ ,  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ .

**Доказательство.** От противного. Пусть  $\langle a, b \rangle \subset U \cup V$ ,  $U \cap V = \emptyset$ .

Пусть  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R} = f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle a, b \rangle \cap U \neq \emptyset \\ 1 & x \in \langle a, b \rangle \cap V \neq \emptyset \end{cases}$  — непрерывная функция. Её прообразы:  $\emptyset, \langle a, b \rangle, \langle a, b \rangle \cap U, \langle a, b \rangle \cap V$  — открытые в  $\langle a, b \rangle$  множества, но значение  $\frac{1}{2}$  не принимается, а значения 0 и 1 точно принимаются, так как иначе бы  $\langle a, b \rangle$  лежал бы ровно в 1 множестве.  $\square$

**Определение 2.39.**  $A$  — линейно связно, если  $\forall u, v \in A \exists \gamma: [a, b] \rightarrow A: \gamma(a) = u, \gamma(b) = v$ .

**Теорема 2.29.** Линейно связное множество связно.

**Доказательство.**  $A$  — линейно связно, пусть оно не связно  $\implies A \subset U \cup V$ ,  $U \cap V = \emptyset$ .  $A \cap U \neq \emptyset$  и  $A \cap V \neq \emptyset$ .

Возьмем  $u \in A \cap U, v \in A \cap V$  и соединим их путем  $\gamma$ .  $\gamma[a, b]$  — связное (как образ отрезка),  $\gamma[a, b] \subset A \subset U \cup V \implies \underbrace{\gamma[a, b] \subset U}_{\text{нет } \gamma(b)}$  или  $\underbrace{\gamma[a, b] \subset V}_{\text{нет } \gamma(a)}$ . Противоречие.  $\square$

**Определение 2.40.** Область — открытое, линейно связное множество (из теоремы область связна).

**Замечание.** Если  $A$  открыто, то  $A$  — связно  $\iff A$  — линейно связно.

## 2.5. Линейные операторы

**Определение 2.41.**  $X, Y$  — векторные пространства,

$A: X \rightarrow Y$  — линейный оператор, если  $\forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$ .

**Свойства.** 1.  $A0_X = 0_Y$ . Доказательство:  $\alpha = 0, \beta = 0$ .

2.  $A(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k A(x_k)$ . Доказательство: индукция.

**Определение 2.42.**  $A, B$  — линейный оператор:  $X \rightarrow Y$ .

$$(A + B)(x) := A(x) + B(x).$$

$$(\lambda A)(x) = \lambda A(x).$$

То есть получили векторное пространство линейных операторов.

**Определение 2.43.**  $A: X \rightarrow Y, B: Y \rightarrow Z$  — линейные операторы  $B \circ A: X \rightarrow Z$ .  $(B \circ A)(x) := B(A(x))$ .

**Замечание.** Это линейный оператор.

**Определение 2.44.** Обратный оператор:  $A: X \rightarrow Y, B: Y \rightarrow X$  обратный к  $A$ , если  $A \circ B = Id_Y$  и  $B \circ A = Id_X$ . Обозначается  $A^{-1}$ .

**Свойства.** 1. Если обратный оператор  $\exists$ , то он единственный.

$$2. (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}.$$

3.  $A: X \rightarrow X$  — обратимые операторы образуют группу по операции композиции.



**Доказательство.** 1.  $B \circ A = Id_X \implies A$  — инъекция. Если  $A(x) = A(y) \implies x = B(A(x)) = B(A(y)) = y$ .

$A \circ B = Id_Y \implies A$  — сюръекция.  $A(B(y)) = y \implies$  просто биекция.

Пусть  $B, C$  — обратные к  $A$ .  $B(A(x)) = B \circ A(x) = x = C \circ A(x) = C(A(x)) \implies B = C$  на множестве значений  $A$ , но  $A$  — сюръекция.

$$2. ((\frac{1}{\lambda}A^{-1}) \circ (\lambda A))(x) = \frac{1}{\lambda}A^{-1}(\lambda A(x)) = x.$$

□

**Пример для 3 свойства.**  $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m$ . Можно рассматривать линейные операторы как матрицы  $\implies Ax = y$  ( $m$  на  $n$  матрица).

**Определение 2.45** (Матричная запись).  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Возьмем базисный вектор  $e_k$  — везде 0, кроме  $k$ -ой позиции — там 1.

$$\text{Пусть } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i. \text{ Тогда } Ax = A\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n x_k \underbrace{A e_k}_{:= A_k \in \mathbb{R}^m}.$$

То есть получили набор столбцов. Из которого можно получить матрицу.

**Определение 2.46.**  $X$  и  $Y$  — нормированные пространства.  $A: X \rightarrow Y$  — линейный оператор.

$$\|A\| := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|A x\|_Y.$$

Оператор ограниченный, если его норма конечна.

**Замечание.** Ограниченный оператор  $\neq$  ограниченное отображение.

Линейное отображение + ограниченность  $\implies = 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $Ax \neq 0$ , тогда  $A(\lambda x) = \lambda Ax$ , а это уже не ограничено. □

**Свойства.** 1.  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$$2. \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|.$$

$$3. \|A\| = 0 \iff A \equiv 0.$$

**Доказательство.** 1.  $\|(A + B)x\|_Y = \|Ax + Bx\|_Y \leq \|Ax\|_Y + \|Bx\|_Y \iff \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|(A + B)x\|_Y =$

$$\|A + B\| \leq \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y + \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Bx\|_Y = \|A\| + \|B\|.$$

$$2. \|\lambda Ax\| = |\lambda| \cdot \|Ax\|. \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|\lambda Ax\| = |\lambda| \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\| = |\lambda| \|A\|.$$

$$3. \implies \|A\| = 0 \implies \|Ax\| = 0 \implies Ax = 0 \implies Ax = A\left(\frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|\right) = \|x\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 0.$$

□

**Теорема 2.30.**  $A: X \rightarrow Y$  — линейный оператор. Тогда

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X < 1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \inf\{c > 0 \mid \|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X\}.$$

**Доказательство.** Обозначим за  $N_i$   $i$ -ый элемент этой цепочки.

$$N_1 \geq N_2 \text{ и } N_1 \geq N_3, \text{ так как } N_2, N_3 \subset N_1.$$

$$N_3 \geq N_4. \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \frac{1}{\|x\|} \|Ax\|_Y = \|A \frac{x}{\|x\|}\|_Y \leq N_3.$$

$$N_4 = N_5. N_5 = \inf\{c > 0 \mid \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} < c\}$$

Теперь докажем, что  $N_1 \leq N_2$ . Пусть  $\|x\| \leq 1 \implies \|(1 - \varepsilon)x\| < 1 \implies \|A((1 - \varepsilon)x)\| \leq N_2$ . Воспользуемся линейностью  $A$ : вытащим  $(1 - \varepsilon)$  за скобку. После этого устремим  $\varepsilon$  к 0. Тогда  $\|Ax\| \leq N_2 \implies N_1 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq N_2$ .

Теперь докажем, что  $N_1 \leq N_4$ .  $\|x\| \leq 1$ . Тогда  $y := \frac{x}{\|x\|}$ ,  $\|y\| = 1 \implies \|A_y\| \leq N_4 \implies \|Ax\| \leq \frac{1}{\|x\|} \cdot \|Ax\| \leq N_4 \implies \|A_x\| \leq N_4 \implies N_1 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq N_4$ .  $\square$

**Теорема 2.31.**  $A: X \rightarrow Y$  — линейный оператор. Следующие условия равносильны:

1.  $A$  — ограниченный оператор.
2.  $A$  — непрерывен в нуле.
3.  $A$  — непрерывен во всех точках.
4.  $A$  — равномерно непрерывен.

**Доказательство.**  $4 \implies 3 \implies 2$  — очевидно.

$1 \implies 4$   $\|Ax - Ay\|_Y = \|A(x - y)\|_Y \leq \|A\| \cdot \|x - y\|_X$ . Если  $\|x - y\|_X < \frac{\varepsilon}{\|A\|}$ , то  $\|Ax - Ay\| < \varepsilon$ , а это есть равномерность.

$2 \implies 1$ . Возьмем  $\varepsilon = 1$  и  $\delta > 0$  из определения непрерывности.  $\forall x \in X: \|x\| < \delta \implies \|Ax\| < 1$ .

Пусть  $\|y\| < 1$ . Тогда  $\|\delta y\| < \delta \implies \|A(\delta y)\| < 1 \implies \|Ay\| < \frac{1}{\delta} \implies \sup_{\|y\| < 1} \|Ay\| \leq \frac{1}{\delta}$ .  $\square$

**Следствие.** 1.  $\|Ax\|_Y \leq \|A\| \|x\|_X \quad \forall x \in X$ .

2.  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ .

**Доказательство.** 2.  $\|A(Bx)\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\|$ .

$$\|AB\| = \inf\{c > 0 \mid \|A(Bx)\| \leq c \|x\|\} \implies \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

1. а где

$\square$

**Теорема 2.32.**  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ .

Тогда  $\|A\|^2 \leq \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{jk}^2$ . В частности, все такие операторы ограничены.

**Доказательство.**  $\|Ax\|^2 = \sum_{j=1}^m \left( \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k}_{\text{Минковский}} \right)^2 \leq (\text{Коши-Буняковский}) \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk}^2 \underbrace{\sum_{k=1}^n x_k^2}_{=\|x\|^2}$ . Следова-

тельно,  $\|Ax\| \leq \|x\| \sqrt{\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n a_{jk}^2} \geq \|A\|$ .  $\square$

**Замечание.** В бесконечномерном случае бывают неограниченные операторы.

## 3. Ряды

### 3.1. Ряды в нормированных пространствах

**Определение 3.1.**  $X$  — пространство с нормой,  $x_n \in X$ .

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  — ряд. Частичная сумма ряда  $S_n := \sum_{k=1}^n x_k$ .

Если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty}$ , то он называется суммой ряда.

Ряд сходится, если у него есть сумма (и для  $\mathbb{R}$  эта сумма конечна), иначе она бесконечна.

**Теорема 3.1** (Необходимое условие сходимости). Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} x_k$  — сходится, то  $\lim x_n = 0$ .

**Доказательство.**  $S_n := \sum_{k=1}^n x_k \rightarrow S \implies \underbrace{S_n - S_{n-1}}_{x_n} \rightarrow S - S = 0$ . □

**Свойства.** 1. Линейность.  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ .

2. Расстановка скобок. В ряду произвольным образом можно ставить скобки, расстановка скобок дает тот же результат.

**Набросок доказательства:** мы просто смотрим на предел подпоследовательности.

3. В  $\mathbb{C}$  и  $\mathbb{R}^n$  сходимость равносильна покоординатной сходимости.

**Теорема 3.2** (Критерий Коши).  $X$  — полное нормированное пространство.

Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  сходится  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N: \left\| \sum_{k=m}^n x_k \right\| < \varepsilon$ .

**Доказательство.**  $S_n := \sum_{k=1}^n x_k$ . Последовательность  $S_n$  сходится  $\iff S_n$  — фундаментальная  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N: \|S_n - S_m\| < \varepsilon \iff \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\| < \varepsilon$ . □

**Определение 3.2.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  сходится абсолютно, если  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$  сходится.

**Замечание.** В частности, в  $\mathbb{R}$  абсолютная сходимость — сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ .

**Теорема 3.3.**  $X$  — полное нормированное пространство.

Если  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  абсолютно сходится, то он сходится.

**Доказательство.** Пусть  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$  — сходится. Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N: \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| < \varepsilon$ . Воспользуемся свойством о том, что сумма норм не меньше, чем норма суммы. А значит получили  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N: \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\| < \varepsilon$ , что является критерием Коши для исходной последовательности. □

- Теорема 3.4.** 1.  $X$  — нормированное пространство. Если  $\lim x_n = 0$  и в каждой скобке  $\leq M$  слагаемых то из сходимости ряда после расстановки скобок следует сходимость исходного
2.  $\mathbb{R}$ . Если в каждой скобке все члены одного знака, то из сходимости ряда после расстановки скобок следует сходимость исходного.

**Доказательство.**  $S_n := \sum_{k=1}^n x_k$  и  $S_{n_k} \rightarrow S$ .

1. Возьмем  $n$ :  $n_k \leq n < n_{k+1}$ .  $S_n = S_{n_k} + x_{n_k+1} + x_{n_k+2} + \dots + x_n$ .  $\|S_n - S\| \leq \|S_{n_k} - S\| + \|x_{n_k+1}\| + \dots + \|x_n\|$ . Мы знаем, что  $S_{n_k} \rightarrow S \implies \exists K \forall k \geq K: \|S_{n_k} - S\| < \varepsilon$ .  
 $\lim x_j = 0 \implies \exists N \forall j \geq N: \|x_j\| < \varepsilon$ . Следовательно исходная сумма не более  $(M+1)\varepsilon$ .
2.  $n_k \leq n < n_{k+1}$ . Пусть в этом блоке неотрицательные слагаемые.  $S_n = S_{n_k} + x_{n_k+1} + x_{n_k+2} + \dots + x_n \geq S_{n_k}$ . А еще знаем, что  $S_n = S_{n_{k+1}} - x_{n_k+1} - x_{n_k+2} - \dots - x_{n_{k+1}} \leq S_{n_{k+1}}$ . Откуда получаем, что  $S_{n_k} \leq S_n \leq S_{n_{k+1}}$ , где всё  $\rightarrow S$ .

□

## 3.2. Знакопостоянные ряды

**Теорема 3.5.** Пусть  $a_n \geq 0$ .

Тогда сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  равносильная ограниченности последовательности  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ .

**Доказательство.**  $S_1 \leq S_2 \leq \dots$ . Монотонная возрастающая последовательность имеет предел  $\iff$  она ограничена. □

**Теорема 3.6** (Признак сравнения). Пусть  $0 \leq a_n \leq b_n$ . Тогда

1. Если  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится, то  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  — сходится.
2. Если  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  — расходится, то  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  расходится.

**Доказательство.** 1.  $A_n := \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k = B_n$ .

$\sum b_n$  — сходится  $\implies B_n$  — ограничена  $\implies A_n$  ограничена  $\implies \sum a_n$  сходится.

2. Отрицание 1.

□

**Следствие.** 1. Пусть  $a_n, b_n \geq 0$ . Если  $a_n = \mathcal{O}(b_n)$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  — сходится, то  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  — сходится.

2. Пусть  $a_n, b_n \geq 0$ , Если  $a_n \sim b_n$ , то ряды ведут себя одинаково.

**Доказательство.** 1.  $a_n = \mathcal{O}(b_n) \implies 0 \leq a_n \leq Cb_n$ .  $\sum_{n=1}^{\infty} Cb_n = C \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  — сходится  $\implies \sum a_n$  — сходится.

2.  $a_n = b_n c_n$ , где  $\lim c_n = 1 \implies \frac{1}{2} \leq c_n \leq 2$  при  $n \geq N$ . Тогда  $a_n = \mathcal{O}(b_n)$  и  $b_n = \mathcal{O}(a_n)$ .

□

**Теорема 3.7** (Признак Коши). Пусть  $a_n \geq 0$ .

1. Если  $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ , то ряд сходится.
2.  $\sqrt[n]{a_n} > 1$ , то ряд расходится.
3. Пусть  $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = q^*$ . Если  $q^* > 1$ , то ряд расходится, если  $q^* < 1$ , то ряд сходится.

**Замечание.** Если  $q^* = 1$ , то ряд может сходиться, а может расходиться.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  — сходится,  $\sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}} \rightarrow 1$ .

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  — расходится.  $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1$ .

**Доказательство.** 1.  $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \implies a_n \leq q^n$ . По признаку сравнения с геометрической прогрессией  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  — сходится.

2.  $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \implies a_n \not\rightarrow 0 \implies$  расходится.

3. Если  $q^* > 1$ . Найдется  $n_k : \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \rightarrow q^* > 1$  (по определению верхнего предела)  $\implies$  начиная с некоторого номера  $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1 \implies a_{n_k} > 1 \implies a_n \not\rightarrow 0$  и ряд расходится.

Если  $q^* < 1$ ,  $q^* = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} \implies$  для больших  $n$   $\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{a_k} < q < 1$ . Но при этом  $\sqrt[n]{a_n} \leq \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{a_k}$ , а значит  $\sqrt[n]{a_n} < q$  при больших  $n \implies$  ряд сходится.

□

**Теорема 3.8** (Признак Даламбера). Пусть  $a_n > 0$ . Тогда

1.  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq d < 1$ , то ряд сходится.
2. Если  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ , то ряд расходится.
3. Пусть  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^*$ . Если  $d^* < 1$ , то ряд сходится. Если  $d^* > 1$ , то ряд расходится.

**Замечание.** С единицей все еще ничего непонятно. Смотри предыдущие примеры.

**Доказательство.** 1.  $\frac{a_n}{a_1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_2}{a_1} \leq d^{n-1}$ .  $a_n \leq d^{n-1} \cdot a_1$  и ряд мажорируется геометрической прогрессией  $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot d^{n-1}$ . Она сходится  $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  — сходится.

2.  $a_{n+1} \geq a_n \implies a_n \geq a_1 > 0$  и  $a_n \not\rightarrow 0 \implies$  ряд расходится.

3. Если  $d^* > 1$ . Тогда  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$  при  $n \geq N \implies a_n \geq a_N > 0 \quad \forall n \geq N \implies a_n \not\rightarrow 0$  и ряд расходится.

Если  $d^* < 1$ . Так как  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^* \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} < d$  при  $n \geq N \implies$  ряд сходится по признаку 1.

□

**Пример.**  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ .

Даламбер.  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{n+1} \rightarrow 0 < 1$ . Ряд сходится.

Коши.  $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{x}{\sqrt[n]{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}} = \frac{x}{ne^{-1} \sqrt[n]{2\pi n}} \sim \frac{xe}{n} \rightarrow 0$ .

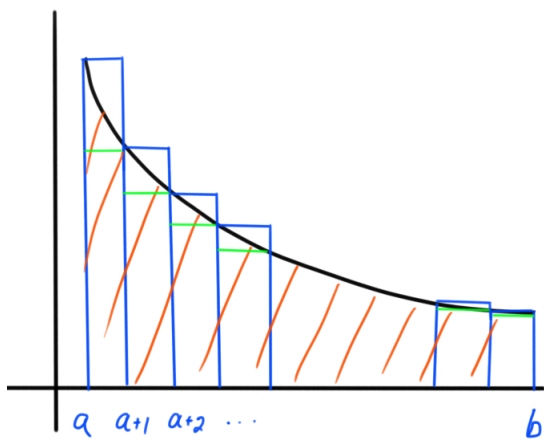
**Теорема 3.9.** Пусть  $a_n > 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^*$ . Тогда  $\lim \sqrt[n]{a_n} = d^*$ .

**Доказательство.**  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^* \implies \lim \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{(n+1) - n} = \ln d^* \xrightarrow{\text{т. Штольца}} \lim \frac{\ln a_n}{n} = \ln d^* \implies \lim \sqrt[n]{a_n} = d^*.$   $\square$

**Теорема 3.10.** Пусть  $f$  неотрицательная монотонная:  $[1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда:

$$\left| \sum_{k=a}^b f(k) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \max\{f(a), f(b)\}.$$

**Доказательство.**  $\sum_{k=a}^{b-1} f(k) \geq \int_a^b f(x) dx \geq \sum_{k=a+1}^b f(k)$ . Не поняли? Рисуем картинку!



$$\sum_{k=a}^b f(k) - \int_a^b f(x) dx \leq \sum_{k=a}^b f(k) - \sum_{k=a+1}^b f(k) = f(a) \quad (\text{аналогично } f(b) = \sum_{k=a}^b f(k) - \sum_{k=a+1}^b f(k))$$

 $\square$ 

**Теорема 3.11** (интегральный признак сходимости ряда). Пусть  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  неотрицательная, монотонно убывающая.

Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  и  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  ведут себя одинаково.

**Доказательство.** По предыдущей теореме  $S_n := \sum_{k=1}^n f(k) \geq \int_1^n f(x) dx \geq \sum_{k=2}^n f(k) = S_n - f(1)$ .

Если ряд сходится, то  $S_n$  — ограничена  $\implies \int_1^n f(x) dx$  ограничена  $\implies F(x) = \int_1^x f(x) dx$  — ограничена  $\implies \int_1^{\infty} f(x) dx$  сходится.

Если  $\int$  сходится  $\implies \int_1^n f(x) dx$  — ограничена  $\implies S_n$  — ограничена  $\implies$  ряд сходится.  $\square$

**Пример.** 1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ,  $p > 0$  (иначе члены ряда  $\not\rightarrow 0$  и ряд расходится).

$f(x) = \frac{1}{x^p}$ . Монотонно убывает.  $\sum \frac{1}{n^p}$  и  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$  ведут себя одинаково: сходятся при  $p > 1$ .

2.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \cdot f(x) = \frac{1}{x \ln x}$  монотонно убывает. Поэтому  $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$  и  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  ведут себя одинаково.

Там можно посчитать интеграл (разойдется).

**Следствие.** 1. Если  $a_n > 0$  и  $a_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n^p})$  при  $p > 1$  — ряд  $\sum a_n$  — сходится.

2. Если  $a_n > 0$  и  $a_n \sim \frac{c}{n^p}$ , то при  $p > 1$  ряд  $\sum a_n$  — сходится, а иначе расходится.

### 3.3. Знакопеременные ряды

**Определение 3.3.**  $\sum a_n$  — сходится, но не абсолютно = ряд сходится условно.

**Теорема 3.12** (Преобразование Абеля).  $\sum_{k=1}^n a_k b_k$ .  $A_k := a_1 + a_2 + \dots + a_k$ . Хочется заменить  $a_n \rightarrow A_n$ .

Формулу сложнее запомнить, чем вывести, поэтому сначала выпишем её.

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b_k &= \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{j=2}^n A_{j-1} b_j \stackrel{k=j-1}{=} \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} = \\ &= A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}). \end{aligned}$$

□

**Теорема 3.13** (Признак Дирихле). 1.  $A_n$  (частичные суммы) — ограничены ( $|A_n| \leq M$ ),

2.  $b_n$  монотонны,

3.  $b_n \rightarrow 0$ .

Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  — сходится.

**Доказательство.**

$$S_n := \sum_{k=1}^n a_k b_k = \underbrace{A_n b_n}_{\text{огр. на б.м.}} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Надо показать, что  $\sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$  — сходится. Для этого докажем, что ряд абсолютно сходится:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| |b_k - b_{k+1}| \text{ — сходится.}$$

Мы знаем, что  $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| |b_k - b_{k+1}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} M \cdot |b_k - b_{k+1}| \stackrel{(*)}{=} M \left| \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) \right| \leq M |b_1|$ . А еще мы знаем, что из ограниченности суммы знакопостоянного ряда следует его сходимости. Следовательно ряд абсолютно сходится.

(\*) — у нас постоянная монотонность, следовательно все слагаемые одного знака. □

**Теорема 3.14** (Признак Абеля). 1. Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  — сходится,

2.  $b_n$  — монотонны,

3.  $b_n$  — ограничены.

Следовательно,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  сходится.

**Доказательство.** 2) + 3)  $\implies \exists \mathbb{R} \ni b := \lim b_n$ . Тогда  $\tilde{b}_n := b_n - b$  монотонны и  $\rightarrow 0$ .

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  — сходится  $\implies A_n$  имеет предел  $\implies A_n$  — ограничены.

Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{b}_n$  — сходится по признаку Дирихле.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{b}_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - b) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n =$   
 $b \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{\text{по усл.}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{b}_n}_{\text{выяснили}}.$  □

**Пример.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}$  — сходится при  $p > 0 : a_n = \sin n, b_n = \frac{1}{n^p}, |A_n| \leq 2$ .

**Пример.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sin^2 n}$  — сходимость неизвестна.

**Определение 3.4.** Знакопередающийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, a_n \geq 0$ .

**Теорема 3.15** (Признак Лейбница). Пусть есть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, a_n \geq 0$  и монотонно стремится к 0.

Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  сходится (по Дирихле:  $a_n = (-1)^{n-1}, b_n = a_n$ ). Более того,  $S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}$ .

**Доказательство.**  $S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n}$ .  $S_{2n+3} = S_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3} \leq S_{2n+1}$ .

$[0, S_1] \supset [S_2, S_3] \supset [S_4, S_5] \supset \dots \supset [S_{2n}, S_{2n+1}] \supset \dots$   $S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \rightarrow 0$ .

Пусть  $S$  их общая точка. Тогда  $\lim S_{2n} = \lim S_{2n+1} = S$ . □

**Пример Ряд Лейбница.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = H_{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = H_{2n} - H_n = \\ &= \ln 2n + \gamma + o(1) - (\ln n + \gamma + o(1)) = \ln 2 + o(1). \end{aligned}$$

Здесь заменили в изначальной сумме все отрицательные слагаемые на положительные и вычли их удвоенную сумму.

**Пример.**  $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{3n} &= (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}) + \dots + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}) = \sum_{k=1}^n (\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}) = \frac{S_{2n}}{2} \rightarrow \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$



**Определение 3.5.**  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  — биекция  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$  — перестановка ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

**Теорема 3.16.** Если  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  абсолютно сходится, то  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

**Доказательство.** 1.  $a_n \geq 0$ .  $S_n := \sum_{k=1}^n a_k \leq S := \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

$\tilde{S}_n := \sum_{k=1}^n a_{\varphi(k)} \leq S_{\max \varphi(1), \dots, \varphi(n)} \leq S \implies \lim \tilde{S}_n \leq S \implies \tilde{S} \leq S$ . Но  $\phi$  — биекция и, т.к. любая перестановка не увеличивает сумму ряда, то можем сделать обратную перестановку и получим  $S \leq \tilde{S} \implies S = \tilde{S}$

2.  $a_n \in \mathbb{R}$ .  $a_n = (a_n)_+ - (a_n)_-$ , где  $(a)_+ := \max\{a, 0\}$ ,  $(a)_- := \max\{-a, 0\}$ .  $|a_n| = (a_n)_- + (a_n)_+ \geq (a_n)_{\pm} \geq 0$ .

Если  $\sum |a_n|$  — сходится, то  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)_{\pm}$  — сходится.  $\sum (a_{\varphi(n)})_+ = \sum (a_n)_+$  и  $\sum (a_{\varphi(n)})_- = \sum (a_n)_- \implies$  ряд сходится. Причем после применения пункта 1 мы получаем равенство сумм.

□

**Замечание.** 1. Теорема верна в полном нормированном пространстве.

2. В  $\mathbb{R}^d$  верно обратное: если любая перестановка не меняет суммы, то ряд абсолютно сходится.

3. Если ряд  $a_n \in \mathbb{R}$  сходится условно, то  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)_+ = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)_- = +\infty$ .

**Доказательство.** Если  $\sum (a_n)_+ < +\infty$ , то  $\sum |a_n| = 2 \sum a_n - \sum (a_n)_+$  — противоречие.

$|a_n| = 2(a_n)_+ - a_n$ .

□

4. Если  $a_n \geq 0$ , то  $\sum a_{\varphi(n)} = \sum a_n$  верно и для расходящегося.

**Теорема 3.17** (Теорема Римана). Пусть  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится условно, тогда  $\forall s \in \overline{\mathbb{R}}$  найдется такая перестановка, что  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = s$ .

Так же существует перестановка, для которой нет суммы.

**Доказательство.** Запишем сумму  $a_1 + a_2 + \dots$ . Сотрем все отрицательные слагаемые:  $b_1 + b_2 + \dots = \sum (a_n)_+ = +\infty$ . Сотрем все положительные:  $c_1 + c_2 + \dots = \sum (a_n)_- = +\infty$ .

1. Случай  $s \in \mathbb{R}$ .  $b_1 + b_2 + \dots + b_n > s \geq b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}$ .

Теперь будем набирать  $c_i$ , пока сумма больше  $s$ . Потом снова начнем набирать  $b...$

Обозначим за  $S_i$  сумму на  $i$ -ом шаге. Тогда знаем, что  $a_n \rightarrow 0$ .  $S_1 > S \geq S_1 - b_{n_1}$ ,  $S_2 + c_{m_1} \geq S > S_2$ ,  $S_3 > S \geq S_3 - b_{n_2}$ ,  $S_4 + c_{m_2} \geq S > S_4$ .

$S_{2n+1} > S \geq S_{2n+1} - b_{n_k}$ .  $\underbrace{S + b_{n_k}}_{\rightarrow s} \geq S_{2k+1} > \underbrace{S}_{\rightarrow s}$ .

2. Случай  $\pm\infty$ .

Очев + упражнение.

## 3. Случай безпредела.

Ежу понятно.

□

**Теорема 3.18** (Теорема Коши о произведении рядов). Пусть  $A := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $B := \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  и ряды абсолютно сходятся.

Тогда ряд, составленный из  $a_k b_n$  в произвольном порядке абсолютно сходится и его сумма  $AB$ .

**Доказательство.**  $A^* := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, A_n^* := \sum_{k=1}^n |a_k|. A_n^* \leq A^*, B_n^* \leq B^*.$

$S_m^*$  — частичная сумма для ряда из  $|a_k b_j|$ .  $S_N \leq (|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|)(|b_1| + |b_2| + \dots + |b_m|) = A_n^* B_m^* \leq A^* B^*$ , где  $n$  — максимальный индекс у  $a_k$  в слагаемом из  $S_N^*$ ,  $m$  — то же самое для  $b_k$ .

$S_N^*$  ограничены  $\implies$  ряд абсолютно сходится. Тогда можем попереставлять ашки и бшки и посмотреть на табличку.

$$\begin{array}{cccccc} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & a_1 b_4 & \dots \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & a_2 b_4 & \dots \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 & a_3 b_4 & \dots \\ a_4 b_1 & a_4 b_2 & a_4 b_3 & a_4 b_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Посмотрим на частичные суммы в квадратиках  $i \times i$ .  $S_{n^2} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k b_j = \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^n b_j = A_n B_n \rightarrow AB$ .

□

**Определение 3.6.**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  произведение этих рядов — ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ , где  $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \dots + a_n b_1$ .

**Теорема 3.19** (Теорема Мертенса).  $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  — сходятся, причем один из них абсолютно.

Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  — сходится и его сумма  $AB$ .

**Доказательство.** Не доказывалось в курсе.

□

**Замечание.** Абсолютной сходимости нет, важен порядок слагаемых.

**Замечание.** Обычной сходимости не хватает.

**Пример.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$  сходится по признаку Лейбница.

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}.$$

$$c_n = (-1)^{n-1} \underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)}_{\geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

А значит  $|c_n| \geq 1$ , а необходимое условие сходимости отсутствует.

**Теорема 3.20** (Теорема Абеля).  $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  и  $C = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$  — произведение рядов.

Если все три ряда сходятся, то  $AB = C$ .

**Лемма.** Пусть  $x_n \rightarrow x$  и  $y_n \rightarrow y$ . Тогда:

$$\frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots + x_n y_1}{n} \rightarrow xy.$$

*Доказательство леммы.* Случай  $y = 0$ . Надо доказать, что  $x_1 y_n + \dots + x_n y_1 = o(n)$ .  $|x_n| \leq M, |y_n| \leq M. \forall \varepsilon > 0 \exists N: |y_n| \leq \varepsilon$  при  $n \geq N$ .

Тогда в сумме все слагаемые с  $y_n$ , где  $n \geq N$  будут  $\leq \varepsilon M$ , а первые  $N - \leq M^2$ . Тогда сумма  $\frac{|\dots|}{n} < \varepsilon M + \frac{NM^2}{n} < 2\varepsilon M$  при больших  $n$ .

Случай  $y_n \equiv y$ . Тогда сумма  $\frac{\dots}{n} = y \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \rightarrow xy$  по теореме Штольца.

Общий случай:  $y_n = y + \tilde{y}_n, \tilde{y}_n \rightarrow 0$ . Тогда сумма с  $\tilde{y}_n$  стремится к нулю, а, следовательно исходная стремится к  $xy$ . Складываем и получаем что нужно.  $\square$

*Доказательство теоремы.* Рассмотрим  $AB \leftarrow \frac{A_1 B_n + A_2 B_{n-1} + \dots + A_n B_1}{n} = \frac{C_1 + C_2 + \dots + C_n}{n} \rightarrow C$ .

Для доказательства равенства посчитаем количество вхождений слагаемых вида  $a_i b_j$  в  $C$  и  $AB$ .  $c_{i+j}$  встречается  $n - (i + j) + 1$  раз в  $C_{i+j}$  и последующих и столько же раз в  $A_k B_l$  при  $k \geq i$  и  $l \geq j$ .  $\square$

### 3.4. Бесконечные произведения

**Определение 3.7.**  $\prod_{k=1}^{\infty} b_k$ , сходящийся, если  $\exists \lim P_n$ , он конечен и  $\neq 0$ .  $P_n$  — частичные произведения, аналогично суммам.

**Пример.** 1.  $\prod_{k=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{k^2})$ . Оно очевидным образом равно  $\frac{1}{2}$  из того, что  $\frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} \implies$  частичная сумма равна  $\frac{2 \cdot n \cdot n+1}{2^2 \cdot n^2} = \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} \rightarrow \frac{1}{2}$

$$2. \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{4n^2}) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \dots \cdot (2n)^2} = \frac{((2n-1)!!)^2 (2n+1)}{((2n)!!)^2} \xrightarrow{\text{Ф-ла Валиса}} \frac{2}{\pi}$$

**Свойства.** 1. Добавление / выкидывание конечного числа ненулевых сомножителей не влияет на сходимость.

2. Если  $\prod_{k=1}^{\infty} b_k$  — сходится, то  $\lim b_k = 1$ .

**Доказательство.**  $b_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \rightarrow \frac{P}{P} = 1$ , так как  $P \neq 0$  и  $\infty$ .  $\square$

3. У сходящегося произведения начиная с некоторого места все множители  $> 0$ .

4.  $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$  для  $b_n > 0$ .

$\prod_{n=1}^{\infty} b_n$  — сходится  $\iff \sum_{n=0}^{\infty} \ln b_n$  — сходится. Причем произведение — exp от суммы.

**Доказательство.**  $P_n = \prod_{k=1}^n b_k. \ln P_n = \sum_{k=1}^n \ln b_k =: S_n$ .

$P_n$  имеет предел из  $(0; +\infty)$   $\iff \ln P_n = S_n$  — имеет конечный  $\lim \iff \sum \ln b_n$  — сходящийся.  $\square$

**Пример.**  $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1} = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^j}$  — где  $p_n$  —  $n$ -ое простое число.

$$\prod_{k=1}^n \frac{p_k}{p_k-1} \geq H_n.$$

$$\prod_{k=1}^n \frac{p_k}{p_k-1} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} > \prod_{k=1}^n \sum_{j=0}^n \frac{1}{p_k^j} = \sum \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}} > \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n \rightarrow \infty.$$

**Теорема 3.21.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$  — расходится. Более того  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} \geq \ln \ln n - 2$ .

**Доказательство.**  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} > H_n \implies \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right) > \ln H_n > \ln \ln n$ .

Очевидно (по разложению  $\ln(1-x)$  по Тейлору), что  $\ln(1-x) \geq -x - x^2$ .

$$\text{Тогда } \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} + \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k^2}}_{\leq 2}$$

□

**Замечание.**

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} = \ln \ln n + O(1).$$

**Упражнение.** 1. Доказать, что  $S(k) = \sum_{k < p \leq k^2} \frac{1}{p} < \frac{4}{3}$ .

**Указание:** Посчитать количество чисел  $\leq k^2$ , которые делятся на такие  $p$ .

2. Доказать, что  $\sum_{\substack{p \geq n \\ p - \text{простое}}} \frac{1}{p} < 2 \ln \ln n + 4$ .

### 3.5. Функциональные последовательности и ряды

**Определение 3.8.**  $f, f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n$  поточечно сходится к  $f$ , если  $\forall x \in E: \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ .

В кванторах:  $\forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(x, \varepsilon): \forall n \geq N |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

**Определение 3.9.**  $f_n$  равномерно сходится к  $f$  на  $E$   $f_n \rightrightarrows f$  на  $E$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \forall n \geq N \forall x \in E: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

**Замечание.** Из равномерной сходимости следует поточечная.

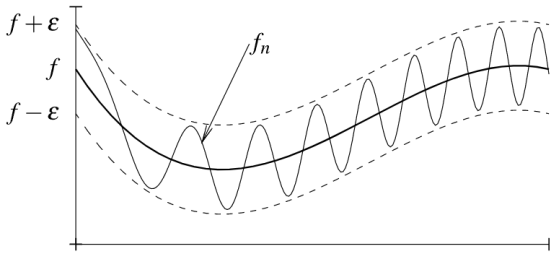
**Пример.**  $f_n(x) = x^n$ ,  $E = (0, 1)$ .

$\lim f_n(x) = \lim x^n = 0$ .  $f(x) \equiv 0 \implies f_n$  поточечно сходится к  $f$ . При этом, если взять  $x > \sqrt[n]{\varepsilon}$ , то мы проиграли, следовательно равномерной сходимости нет.

**Замечание.** Равномерная сходимоть на графике — графики  $f_n$  начиная с некоторого места попадают в полосу графика  $f$ .

**Теорема 3.22.**  $f_n, f: E \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\text{Тогда } f_n \rightrightarrows f \iff \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$



**Доказательство.**  $\Rightarrow: f_n \rightrightarrows_E f \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N: \forall x \in E |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ . Из части с  $\forall x \in E$  как раз прямо и следует условие на  $\sup$ .

$\Leftarrow: \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ . Из супремума следует  $\forall x \in E |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

Здесь мы пользовались тем, что  $\sup |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x) - f(x)|$ . □

**Следствие.** 1. Если  $\forall x \in E |f_n(x) - f(x)| \leq a_n$  и  $\lim a_n = 0$ , то  $f_n \rightrightarrows_E f$ .

2. Если  $x_n \in E: f_n(x_n) - f(x_n) \not\rightarrow 0$ , то нет равномерной сходимости  $f_n \rightrightarrows_E f$ .

**Доказательство.** 1.  $\implies 0 \leq \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leq a_n \rightarrow 0 \implies \sup \rightarrow 0 \implies f_n \rightrightarrows_E f$ .

2.  $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| \not\rightarrow 0 \implies \sup \not\rightarrow 0 \implies$  нет равномерной сходимости.  
Здесь  $x_n$  — какая-то конкретная точка. □

**Пример.**  $E = (0, 1), f(x) \equiv 0, f_n(x) = x^n$ .  $x_n = 1 - \frac{1}{n}, f_n(x_n) - f(x_n) = (1 - \frac{1}{n})^n \rightarrow \frac{1}{e} \neq 0 \implies$  нет равномерной сходимости.

**Определение 3.10.**  $g_n: E \rightarrow \mathbb{R}$  — равномерно ограничена, если найдется  $M$ , такой что  $|g_n(x)| \leq M \quad \forall x \in E \quad \forall n$

**Утверждение 3.23.** Произведение равномерно ограниченной и равномерно сходящейся к нулю равномерно — сходится к нулю.

**Доказательство.**  $g_n$  — равномерно ограничена,  $|g_n(x)| \leq M, f_n(x) \rightrightarrows 0, \sup_{x \in E} |f_n(x)| \rightarrow 0$ .

$$\sup_{x \in E} |f_n(x)g_n(x)| \leq M \sup \rightarrow 0 \implies f_n g_n \rightrightarrows 0. \quad \square$$

**Замечание.** 1.  $f_n \rightrightarrows_E f \iff f_n - f \rightrightarrows_E 0$ .

2. Если  $f_n \rightrightarrows f, g_n \rightrightarrows g \implies \alpha f_n + \beta g_n \rightrightarrows \alpha f + \beta g$ .

**Теорема 3.24** (Критерий Коши для равномерной сходимости последовательности функций).  $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$  тогда  $f_n$  равномерно сходится к некоторой функции  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N \forall x \in E |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ .

**Доказательство.**  $\implies: f_n \rightrightarrows_E f \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall x \in E |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$   
 $\forall m \geq N \forall x \in E |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

$$\forall m, n \geq N \forall x \in E |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Leftarrow$ :  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N \forall x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ . Зафиксируем  $x \in E$ . Если  $m_n \geq N_\varepsilon$ , то знаем  $f_n(x) - f_m(x) \rightarrow 0$  — фундаментальная последовательность  $\Rightarrow$  она имеет конечный предел. Пусть  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m \geq n \geq N \forall x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$  — критерий Коши. Устремим тут  $m \rightarrow \infty$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow f_n$  равномерно сходится к  $f$ .  $\square$

**Определение 3.11.** Пространство  $C(K)$ ,  $K$  — компакт.

$C(K) := \{f: K \rightarrow \mathbb{R} \wedge f \text{ непрерывна во всех точках}\}$  — векторное пространство.

$f, g: K \rightarrow \mathbb{R}, (\alpha f + \beta g)(x) := \alpha f(x) + \beta g(x)$ .

Можно завести норму  $\|f\|_{C(K)} := \max_{x \in K} |f(x)|$  — нормированное пространство.

Убедимся, что это действительно норма. Интересно только неравенство треугольника:  $\|f + g\| = |f(x_0) + g(x_0)| \leq |f(x_0)| + |g(x_0)| \leq \|f\| + \|g\|$ .

**Определение 3.12.** Пространство  $l^\infty(E)$ .

$l^\infty(E) := \{f: E \rightarrow \mathbb{R} \wedge f \text{ ограничена}\}$  — векторное пространство.

$\|f\|_{l^\infty(E)} := \sup_{x \in E} |f(x)|$  — нормированное пространство.

**Замечание.**  $C(K) \subset l^\infty(K)$ .

**Теорема 3.25.**  $l^\infty(E)$  — полное пространство.

**Доказательство.**  $f_n$  — фундаментальная последовательность  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N \sup_{x \in E} |f_n(x) - f_m(x)| = \|f_n - f_m\| < \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N \forall x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \Rightarrow f_n$  равномерно сходится на  $E \Rightarrow \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_{l^\infty(E)} \rightarrow 0$ . Надо проверить, что  $f \in l^\infty(E)$ .

$$f(x) \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq \|f - f_n\| < 1} + \underbrace{|f_n(x)|}_{\leq \|f_n\|}.$$

$\square$

**Теорема 3.26.**  $f_n, f: E \rightarrow \mathbb{R}, a \in E, f_n \xrightarrow{E} f$  и  $f_n$  непрерывна в точке  $a$ . Тогда  $f$  непрерывна в точке  $a$ .

**Доказательство.** Берем  $\varepsilon > 0$ . Найдем  $N$ , такой что  $\forall n \geq N \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

$$|f(x) - f(a)| \leq \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(a)|}_{< \varepsilon, \text{ если } |x-a| < \delta} + \underbrace{|f_N(a) - f(a)|}_{< \varepsilon} < 3\varepsilon.$$

$$\exists \delta > 0 \forall |x - a| < \delta \quad |f_N(x) - f_N(a)| < \varepsilon \Rightarrow f \text{ — непрерывна в } a.$$

$\square$

**Следствие Теорема Стокса-Зайделя.**  $f_n \xrightarrow{E} f$  и  $f_n$  непрерывна во всех точках  $E \Rightarrow f$  непрерывна во всех точках из  $E$ . Пользуемся предыдущей теоремой для каждой точки.

**Теорема 3.27.**  $C(K)$  — полное.

**Лемма.**  $(X, \rho)$  — полное метрическое пространство,  $Y \subset X$  — замкнутое  $\Rightarrow (Y, \rho)$  — полное.

**Доказательство леммы.** Возьмем  $y_n \in Y$  — фундаментальная последовательность в  $Y \Rightarrow$  она фундаментальна в  $X \Rightarrow \exists y_* \in X: y_* = \lim y_n \Rightarrow y_*$  — предельная точка  $Y \Rightarrow y_* \in Y$ .  $\square$

**Доказательство теоремы.**  $C(K)$  — замкнутое подпространство  $l^\infty(K)$ .  $\sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_{l^\infty(K)} \rightarrow 0$ . Тогда если  $f_n \in C(K), f_n \xrightarrow{K} f \Rightarrow f \in C(K)$  по т.Стокса-Зайделя.  $\square$

**Определение 3.13.**  $u_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  — функциональный ряд.

$S_n(x) := \sum_{k=1}^n u_k(x): E \rightarrow \mathbb{R}$  — частичная сумма ряда.

Если  $S_n$  поточечно сходится к  $S$ , то ряд сходится поточечно.

Если  $S_n \rightrightarrows_E S$ , то ряд равномерно сходится на  $E$ .

**Определение 3.14.** Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  сходится поточечно, то  $r_n(x) := \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$  — остаток (хвост) ряда.

**Теорема 3.28.** Ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_n(x)$  сходится равномерно на  $E \iff r_n \rightrightarrows_E 0$ .

**Доказательство.**  $S_n \rightrightarrows_E S \iff S - S_n \rightrightarrows 0$ . ( $S - S_n = r_n$ ). □

**Замечание.** Необходимые условия равномерной сходимости. Если  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходится, то  $u_n \rightrightarrows 0$ .

**Доказательство.** Равномерная сходимость  $\implies S_n \rightrightarrows S \implies S_n - S_{n-1} \rightrightarrows S - S = 0$ . □

**Замечание.** Если  $x_n \in E: \underbrace{u_n(x_n) \not\rightarrow 0}_{\text{нет равномерной сходимости} \rightarrow 0}$ , то  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  не может равномерно сходиться.

**Замечание.** Из расходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_n)$  ничего не следует.

$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$x_n = \frac{1}{n} \implies u_n(x_n) = \frac{1}{n}$  и ряд  $\sum u_n(x_n)$  — расходится.

Но ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходится.  $0 \leq r_n(x) \leq \frac{1}{n+1} \cdot r_n \rightrightarrows 0$ .

**Теорема 3.29** (Критерий Коши для равномерной сходимости ряда).  $u_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ . Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходится на  $E \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N \forall x \in E \left| \sum_{k=n+1}^m u_k(x) \right| < \varepsilon.$$

**Доказательство.**  $\sum u_n(x)$  равномерно сходится  $\iff S_n(x) := \sum_{k=1}^n u_k(x)$  равномерно сходится  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m > n \geq N \forall x \in E |S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ , а эта разность как раз то, что надо. □

**Теорема 3.30** (Признак сравнения).  $u_n, v_n: E \rightarrow \mathbb{R}, |u_n(x)| \leq v_n(x) \quad \forall x \in E, \forall n$ .

Если  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$  сходится равномерно на  $E$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходится на  $E$ .

**Доказательство.** Применим к левой части критерий Коши:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m > n \geq N \forall x \in E \left| \sum_{k=n+1}^m u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m v_k(x) < \varepsilon$ . Откуда получаем, что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  равномерно сходится на  $E$ . □

**Следствие.** 1. Если  $\sum |u_n(x)|$  сходится равномерно на  $E$ , то  $\sum u_n(x)$  сходится равномерно на  $E$ .

2. Признак Вейерштрасса. Если  $|u_n(x)| \leq a_n \quad \forall x \in E \forall n$  и ряд  $\sum a_n$  — сходится, то  $\sum u_n(x)$  сходится равномерно на  $E$ .

**Пример.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$  равномерная сходимость на  $\mathbb{R}$ .

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ — сходится.}$$

**Замечание.** Ряд может сходиться равномерно, но не абсолютно  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

Ряд сходится абсолютно, но не сходится равномерно  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$  при  $x \in (-1, 1)$ .

Ряд сходится абсолютно, ряд сходится равномерно, но ряд  $\sum |u_n(x)|$  сходится неравномерно.

**Теорема 3.31** (Признак Дирихле).  $a_n, b_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ .

1.  $\left| \sum_{k=1}^n a_k(x) \right| \leq M \quad \forall x \in E \forall n$ .
2.  $b_n(x)$  монотонно при любом фиксированном  $x \in E$ .
3.  $b_n \Rightarrow 0$ .

Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$  сходится равномерно на  $E$ .

**Доказательство.**  $S_n(x) := \sum_{k=1}^n a_k(x)b_k(x) = A_n(x)b_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$ , где  $A_n$  — частичная сумма  $a$ .

$A_nb_n \Rightarrow 0$ , так как  $A_n$  равномерно ограничена и  $b_n \Rightarrow 0$ .

Докажем, что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$  равномерно сходится.

$|A_k(x)||b_k(x) - b_{k+1}(x)| \leq M|b_k(x) - b_{k+1}(x)| =: v_k(x)$ . Надо доказать, что  $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$  равномерно сходится, то есть  $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k(x) - b_{k+1}(x)|$  равномерно сходится.  $\sum_{k=1}^n |b_k(x) - b_{k+1}(x)| = \left| \sum_{k=1}^n (b_k(x) - b_{k+1}(x)) \right| = |b_1(x) - b_{n+1}(x)| \Rightarrow b_1(x)$  □

**Теорема 3.32** (Признак Абеля).  $a_n, b_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ .

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  — равномерно сходится.
2.  $b_n(x)$  монотонно при любом фиксированном  $x \in E$ .
3.  $b_n(x)$  равномерно ограничена.

Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$  сходится равномерно на  $E$ .



**Доказательство.**  $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x) = \sum_{k=1}^p a_{n+k}(x)b_{n+k}(x) = (A_{n+p}(x) - A_n(x))b_{n+p}(x) + \sum_{k=1}^{p-1} (A_{n+k}(x) - A_{n+k-1}(x))(b_{n+k}(x) - b_{n+k-1}(x)).$

$$\sum_{k=1}^m a_{n+k}(x) = A_{n+m}(x) - A_n(x).$$

$$A_n(x) \Rightarrow A(x) \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N \forall x \in E: |A_n(x) - A_m(x)| < \varepsilon.$$

Тогда  $|A_{n+p}(x) - A_n(x)| < \varepsilon$  и  $|A_{n+k}(x) - A_n(x)| < \varepsilon$ .

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x) \right| &\leq \underbrace{|A_{n+p}(x) - A_n(x)|}_{<\varepsilon} \cdot \underbrace{|b_{n+p}(x)|}_{\leq M} + \sum_{k=1}^{p-1} \underbrace{|A_{n+k}(x) - A_n(x)|}_{\leq \varepsilon} |b_{n+k}(x) - b_{n+k-1}(x)| \leq \\ &\varepsilon M + \varepsilon \sum_{k=1}^{p-1} |b_{n+k}(x) - b_{n+k-1}(x)| = \varepsilon M + \varepsilon \left| \sum_{k=1}^{p-1} (b_{n+k}(x) - b_{n+k-1}(x)) \right| \leq \varepsilon M + \varepsilon \cdot 2M = 3M\varepsilon. \end{aligned}$$

По критерию Коши для  $\sum a_n b_n$  он равномерно сходится.  $\square$

**Теорема 3.33** (Признак Лейбница).  $b_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b_n \Rightarrow 0$ ,  $b_n(x)$  монотонна при любом фиксированном  $x \in E$ . Тогда ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_n(x)$  равномерно сходится на  $E$ .

**Доказательство.**  $a_n(x) = (-1)^n$ ,  $\sum_{k=1}^n a_k(x) = 0$  или  $-1 \implies$  равномерно ограничен. Применим признак Дирихле.  $\square$

**Пример.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$  при  $x \in (0, 1)$ .

Ряд абсолютно сходится  $\forall x \in (0, 1): \left| \frac{(-1)^n}{n} x^n \right| \leq x^n$ .

Ряд сходится равномерно  $b_n(x) = \frac{x^n}{n} \Rightarrow 0, 0 \leq b_n(x) \leq \frac{1}{n}, x_n(x) \searrow$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} x^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Нет равномерной абсолютной сходимости.  $\sum_{k=n}^{2n} \frac{x^k}{k} \geq n \frac{x^{2n}}{2n} = \frac{x^{2n}}{2} \rightarrow \frac{1}{2e}, x = 1 - \frac{1}{2n}$ .

**Теорема 3.34** (Признак Дини).  $0 \leq u_n \in C(K)$ ,  $K$  — компакт и  $S_x := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \in C(K)$ . Тогда ряд сходится равномерно на  $K$ .

**Доказательство.**  $r_n(x) = S(x) - S_n(x) \in C(K), S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x), 0 \leq r_{n+1} \leq r_n(x)$ .

Надо доказать, что  $r_n \Rightarrow 0$ .  $r_n(x_n) = \sup_{x \in K} r_n(x) \rightarrow 0$  для некоторого  $x_n \in K$ .

От противного. Пусть нет стремления к нулю.  $r_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varepsilon, x_{n_k} \in K$ . Выберем сходящуюся подпоследовательность  $x_{m_k} \rightarrow x_* \in K$ .

$r_{m_k}(x_{m_k}) \geq \varepsilon, x_{m_k} \rightarrow x_*$ . Тогда  $r_n(x_{m_k}) \geq r_{n+1}(x_{m_k}) \geq r_{n+2}(x_{m_k}) \geq \dots \geq r_{m_k}(x_{m_k}) \geq \varepsilon$ , при этом  $r_n(x_{m_k}) \rightarrow r_n(x_*) \implies r_n(x_*) \geq \varepsilon \quad \forall x$ . Но  $r_n(x_*) \rightarrow 0$ , так как ряд в точке  $x_*$  сходится. Противоречие.  $\square$

### 3.6. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

**Теорема 3.35.**  $f_n, f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  — предельная точка  $E$ ,  $f_n \Rightarrow f$  на  $E$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) =: b_n \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow a} b_n, \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  существуют, конечны и равны.

В частности,  $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ .

**Доказательство.** Запишем Критерий Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N \forall x \in E: |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Устремим в этом неравенстве  $x \rightarrow a$  (тогда  $f_n(x) \rightarrow b_n, f_m(x) \rightarrow b_m$ ):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N \forall x \in E: |b_n - b_m| \leq \varepsilon.$$

А это критерий Коши для последовательности  $b_n \implies \lim b_n = b \in \mathbb{R}$ .

Остается показать, что  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ . Честно проверим. Что такое  $|f(x) - b|$ ? Это  $\leq |f_n(x) - f(x)| + |b_n - f_n(x)| + |b - b_n|$ . Мы знаем, что  $b_n \rightarrow b \implies |b - b_n|$  при  $n \geq N_1$  не больше  $\varepsilon$ . При  $n \geq N_2$   $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

Тогда, взяв  $N := \max(N_1, N_2)$ , получаем  $|f(x) - b| < 2\varepsilon + |b_n - f_n(x)|$ . Но оставшаяся разность стремится к нулю при  $x \rightarrow a$ . Тогда можно выбрать  $\delta$ -окрестность, чтобы эта разность была меньше  $\varepsilon$ . Следовательно,  $|f(x) - b| < 3\varepsilon$ .  $\square$

**Теорема 3.36.**  $u_n: E \rightarrow \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходится и  $\lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = c_n$ ,  $a$  — предельная точка.

Тогда,  $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} u_n(x)$  и ряд сходится.

То есть, в случае равномерной сходимости ряда мы можем менять предел суммы.

**Доказательство.**  $f_n(x) := \sum_{k=1}^n u_k(x) \rightrightarrows f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), b_n = \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=1}^n u_k(x) = \sum_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow a} u_k(x) = \sum_{k=1}^n c_k$ .

Тогда  $\exists \lim b_n$ , то есть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  сходится и  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ .

(\*) — тут конечная сумма, поэтому все переходы конечны.  $\square$

**Следствие.** Если  $u_n$  непрерывны в точке  $a$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходится, то  $\sum u_n(x)$  непрерывна в точке  $a$ .

**Доказательство.**  $c_n = u_n(a)$ .  $\square$

**Теорема 3.37.** Пусть  $f_n \in C[a, b]$  и  $f_n \rightrightarrows f$  на  $[a, b]$ ,  $c \in [a, b]$ .

Тогда  $\int_c^x f_n(t) dt \rightrightarrows \int_c^x f(t) dt$ . В частности  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^x f_n(t) dt = \int_c^x \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt$

**Доказательство.**  $F_n(x) := \int_c^x f_n(t) dt$ . Тогда  $|F_n(x) - F(x)| = \left| \int_c^x f_n(t) dt - \int_c^x f(t) dt \right| \leq \int_c^x |f_n(t) - f(t)| dt \leq |x - c| \max_{t \in [c, x]} |f_n(t) - f(t)| \leq (b - a) \sup_{t \in [a, b]} |f_n(t) - f(t)|$ , но по свойству равномерной сходимости  $\sup \rightarrow 0$ . Значит равномерная сходимость есть.  $\square$

**Следствие.**  $u_n \in C[a, b]$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходится, то  $\int_c^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n(t) dt$ .

**Доказательство.**  $\int_c^x \sum_{k=1}^n u_k(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_c^x u_k(t) dt$ . А дальше можно просто устремить к бесконечности по предыдущей теореме.  $\square$

**Замечание.** Поточечной сходимости не хватает. Пример:  $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$  на  $[0, 1]$ .  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Но  $\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 nxe^{-nx^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-nx^2} (nx^2) = -\frac{e^{-nx^2}}{2} \Big|_0^1 = \frac{1-e^{-n}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 f(x) dx$ .

**Теорема 3.38.**  $f_n \in C^1[a, b]$ ,  $c \in [a, b]$ ,  $f_n(c) \rightarrow A$  и  $f'_n \rightrightarrows g$  на  $[a, b]$ .

Тогда  $f_n \rightrightarrows f$  на  $[a, b]$ ,  $f \in C^1[a, b]$  и  $f' = g$ .

В частности,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))'$

**Доказательство.**  $\int_c^x g(t) dt = \int_c^x \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(t) dt \stackrel{(*)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^x f'_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - f_n(c)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(c) = f(x) - A$ .  $(*)$  — предыдущая теорема.

Тогда  $f(x) = A + \int_c^x g(y) dy \implies f \in C^1[a, b]$  и  $f'(x) = g(x)$ .

Осталось понять, что  $f_n \rightrightarrows f$ .

$$f_n(x) = \int_c^x f'_n(t) dt + f_n(c), \quad f(x) = \int_c^x g(t) dt + A.$$

Мы знаем, что  $\int_c^x f'_n(t) dt \rightrightarrows \int_c^x g(t) dt$ , а  $f_n(c) \rightarrow A \implies f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ . □

**Следствие.**  $u_n \in C^1[a, b]$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$  равномерно сходится на  $[a, b]$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c)$  сходится.

Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходится к дифференцируемой функции и  $\left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ .

**Доказательство.**  $f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) \in C^1[a, b]$  и  $f'_n(x) = \sum_{k=1}^n u'_k(x) \rightrightarrows \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x) =: g(x)$ .

$f'_n \rightrightarrows g$  и  $f_n(c)$  сходятся.

Тогда по теореме  $f_n \rightrightarrows f$ ,  $f$  — дифференцируемая функция и  $f' = g$ .

То есть мы поняли, что  $\left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ . □

**Замечание.** Равномерной сходимости исходных функций недостаточно. Пример:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$  равномерно сходится:  $\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$  и признак Вейерштрасса.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin nx}{n^2} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$  расходится в  $x = 0$ .

### 3.7. Степенные ряды

**Определение 3.15.**  $a_n \in \mathbb{C}$ ,  $z, z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  — степенной ряд. Здесь  $a_n$  — закрепленная последовательность,  $z_0$  — константа. Поэтому можно делать формулы проще и использовать  $w = z - z_0$ .

**Теорема 3.39.** Пусть ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  сходится при некотором  $z = z_0$ . Тогда ряд абсолютно сходится  $\forall z: |z| < |z_0|$ .

**Доказательство.**  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$  — сходящийся  $\implies |a_n z_0^n| \rightarrow 0 \implies |a_n z_0^n| \leq M$ .

Тогда скажем, что  $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \Rightarrow$  ряд сходится, так как мажорируется геометрической прогрессией.  $\square$

**Следствие.** Если ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  расходится при  $z = z_0$ , то он расходится  $\forall z : |z| > |z_0|$  (от противного).

**Определение 3.16.**  $R$  — радиус сходимости ряда, если ряд  $\sum a_n z^n$  сходится  $\forall z : |z| < R$  и расходится  $\forall z : |z| > R$ . Для равного  $R$  — непонятно.

**Теорема 3.40.** Радиус сходимости существует  $\in [0, +\infty]$  и  $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$  — формула Коши-Адамара (Hadamard).

**Доказательство.** Докажем, что  $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$  подходит. Для этого применим к этому ряд признак Коши с  $K := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |z| \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|}{R}$ . Признак Коши:  $K < 1 \Rightarrow$  ряд сходится, если  $K > 1 \Rightarrow$  ряд расходится.  $\square$

**Пример.** 1.  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ .  $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = +\infty$ . Ряд расходится всегда.

2.  $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ ,  $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}} = 0$ . Ряд сходится только при  $z = 0$ .

3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$ ,  $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}}} = 1$ . Ряд точно сходится при  $|z| < 1$ . При  $|z| \leq 1$  ряд сходится при  $p = 2$ . А вот при  $p = 1$  ряд расходится при  $z = 1$  и сходится при  $z = -1$ .

**Определение 3.17.**  $R$  — радиус сходимости  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ .

Круг  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$  — круг сходимости.

**Теорема 3.41.**  $R$  — радиус сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  и  $0 < r < R$ .

Тогда ряд  $\sum a_n z^n$  сходится равномерно при  $|z| \leq r$ .

**Доказательство.**  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$  — абсолютно сходится  $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < +\infty$ .

Если  $|z| \leq r$ , то  $|a_n z^n| \leq |a_n| r^n \Rightarrow$  равномерно сходится по признаку Вейерштрасса.  $\square$

**Следствие.** Сумма степенного ряда — непрерывная в круге сходимости функция.

**Доказательство.** Проверим непрерывность в точке  $z = w$ .

$|w| < r < R \Rightarrow$  ряд сходится равномерно в круге  $|z| \leq r \Rightarrow$  сумма ряда непрерывна в круге  $|z| < r \Rightarrow$  в точке  $z = w$  есть непрерывность.  $\square$

**Теорема 3.42** (Теорема Абеля). Пусть  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  сходится при  $z = R$ , где  $R$  — радиус сходимости.

Тогда ряд сходится равномерно на  $[0; R]$  и его сумма непрерывна на  $[0; R]$ .

В том числе  $\lim_{x \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ .

**Доказательство.**  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$ .

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$  — равномерно сходящийся.  $\left(\frac{x}{R}\right)^n$  монотонна и равномерно ограничена  $\xrightarrow{\text{пр. Абеля}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

равномерно сходится  $\implies f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  непрерывна на  $[0; R]$ .  $\square$

**Лемма.**  $x_n, y_n \geq 0$ .  $\lim x_n \in (0; +\infty)$ .

Тогда  $\overline{\lim} x_n y_n = \lim x_n \overline{\lim} y_n$ .

**Доказательство.** Берем  $x_{n_k} y_{n_k} \rightarrow \overline{\lim} x_n y_n = b$ .

$x_{n_k} \rightarrow a \implies y_{n_k} \rightarrow \frac{b}{a} \leq c := \overline{\lim} y_n \implies b \leq ac$ .

Берем  $y_{n_k} \rightarrow c \implies x_{n_k} y_{n_k} \rightarrow ac \leq b \implies b = ac$ .  $\square$

**Следствие.**  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$  имеют одинаковые радиусы сходимости.

**Доказательство.** Заметим, что  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n+1}$  имеют одинаковые радиусы сходимости, т.к. отличаются домножением на  $z$ .

Заметим, что  $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n$  имеют одинаковые радиусы сходимости.

$R_1 = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$ ,  $R_2 = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}}}$ ,  $R_3 = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n| \cdot n}}$ .  $\square$

**Теорема 3.43** (о почленном интегрировании степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = f(x)$ ).  $R$  — его радиус сходимости. Тогда  $\int_{x_0}^y f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(y - x_0)^{n+1}}{n+1}$ , где  $|y - x_0| < R$ .

**Доказательство.** Ряд  $\sum a_n (x - x_0)^n$  равномерно сходится при  $|x - x_0| \leq |y - x_0|$ . На  $[x_0, y]$  есть равномерная сходимость. Тогда

$$\int_{x_0}^y \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^y a_n (x - x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(y - x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

$\square$

**Определение 3.18.**  $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in \text{Int } E$ .

$f$  — дифференцируема в точке  $z_0$ , если  $f(z) = f(z_0) + k(z - z_0) + o(z - z_0)$  при  $z \rightarrow z_0$ .

**Определение 3.19.**  $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ .

**Замечание.** Дифференцируемость  $\iff f'(z_0)$  конечна и  $k = f'(z_0)$ .

**Теорема 3.44.**  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ ,  $|z - z_0| < R$  — радиус сходимости.

Тогда  $f$  бесконечно дифференцируема в круге сходимости и  $f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n n(n-1) \dots (n-m+1)(z - z_0)^{n-m}$

**Доказательство.** Ряд справа имеет тот же радиус сходимости.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \implies \text{при } |z - z_0| \leq r < R \text{ он равномерно сходится.}$$

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \lim_{w \rightarrow z} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{w - z} = \lim_{w \rightarrow z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{w^n - z^n}{w - z} = \\ &= \lim_{w \rightarrow z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + wz^{n-2} + z^{n-1}) \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{w \rightarrow z} a_n (w^{n-1} + \dots + z^{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1} \end{aligned}$$

Разберемся с вопросом:  $|a_n(w^{n-1} + \dots + z^{n-1})| \leq |a_n|nr^{n-1}$ , а  $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}$  сходится, потому что  $r < R$ .  $\square$

**Теорема 3.45.** Разложение функции в степенной ряд единственно.

$$\text{Если } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ то } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

**Доказательство.**  $f^{(m)}(z_0) = a_m m(m-1) \dots 1 = m! a_m$ .  $\square$

**Определение 3.20.**  $f$  аналитическая в точке  $x_0$ , если в окрестности  $x_0$   $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$

**Замечание.** Бесконечно дифференцируемая функция  $\not\Rightarrow$  аналитичность.

**Пример.**  $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \end{cases}$ . Это бесконечно дифференцируемая функция.

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3}, f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} = 0.$$

$$f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{\text{многочлен}}{x^{3n}}, f^{(n+1)}(0) = 0.$$

Получается, что по индукции все производные в нуле — 0, тогда Тейлор равен 0, а  $f \not\equiv 0$ .

**Пример.**  $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ,  $\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ ,  $\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ .

**Упражнение.**  $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ ,  $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ ,  $e^w e^z = e^{w+z}$ .

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

**Пример.** При  $|x| < 1$ .

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

**Доказательство.**  $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ .

$$\ln(1+y) = \int_0^y \frac{dx}{1+x} = \int_0^y \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{n+1}}{n+1}.$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

$$\operatorname{arctg} y = \int_0^y \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^y \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{2n+1}.$$

□

**Пример.**  $(1+x)^p = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!} x^n$  при  $|x| < 1$ .

**Доказательство.**  $(1+x)^p = \sum_{k=0}^n \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!} x^k + \frac{1}{n!} \int_0^x p(p-1)\dots(p-n)(1+t)^{p-n-1}(x-t)^n dt.$

$$\text{Посчитаем } \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{|p-n-1|}{n+1} \cdot \left| \frac{\int_0^x (x-t)^{n+1} (1+t)^{p-n-2} dt}{\int_0^x (x-t)^n (1+t)^{p-n-1} dt} \right| = \frac{|p-n-1|}{n} \left| \frac{\int_0^x (1+t)^{p-n-1} (x-t)^n \frac{x-t}{1+t} dt}{\int_0^x (1+t)^{p-n-1} (x-t)^n dt} \right|.$$

Тогда  $\left| \frac{x-t}{1+t} \right| \leq |x|$  (при  $x > 0$  понятно, а при  $x < 0$ :  $\frac{t-x}{1+t} \leq -x \iff t-x \leq -x-tx \iff t \leq -tx \iff t(1+x) \leq 0 \iff -1 < x, t \leq 0$ ) А значит отношение  $\leq \frac{|p-n-1|}{n+1} |x| \rightarrow |x| < 1$ . □

**Пример.** Частный случай при  $p = -\frac{1}{2}$ .

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \dots \cdot (n - \frac{1}{2})}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!! (-1)^n}{2^n n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} (-1)^n}{4^n} x^n$$

**Пример.**

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

**Доказательство.**

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^{2n}$$

Но мы знаем, что  $\arcsin y = \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{y^{2n+1}}{2n+1}.$

□

## 4. Дифференциальное исчисление функции многих переменных

### 4.1. Дифференцируемость функции многих переменных

**Определение 4.1.**  $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $a \in \text{Int } E$ .

$f$  — дифференцируема в точке  $a$ , если  $f(a+h) = f(a) + Th + o(\|h\|)$  при  $h \rightarrow \vec{0}$ , где  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — линейное отображение.

**Замечание.** Если  $f$  дифференцируема в точке  $a$ , то  $T$  определена однозначно.

**Доказательство.**  $f(a+th) = f(a) + T(th) + o(\|th\|) = f(a) + tTh + o(t\|h\|) = f(a) + tTh + o(t)$ .  $\|h\|$  — константа, поэтому можно выкинуть.

$$Th = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

□

**Замечание.** Если  $f$  дифференцируем в точке  $a$ , то  $f$  непрерывна в точке  $a$ .

$$f(a+h) = f(a) + Th + o(\|h\|) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(a).$$

**Определение 4.2.**  $T$  — дифференциал  $f$  в точке  $a$ . Обозначается  $d_a f$ .

**Определение 4.3.** Матрицу отображения  $d_a f$  назовем матрицей Якоби  $f$  в точке  $a$ .

Важный частный случай  $m = 1$ .  $f(a+h) = f(a) + \langle v, h \rangle + o(\|h\|)$ .  $v$  — градиент функции  $f$  в точке  $a$ . Обозначается  $\text{grad } f$ ,  $\nabla f(a)$  (набла).

**Теорема 4.1.** Пусть  $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $a \in \text{Int } E$ .

Тогда  $f$  — дифференцируема в точке  $a \iff f_j$  дифференцируема в точке  $a \forall j$ .

**Доказательство.**  $f(a+h) = f(a) + Th + \alpha(h)$ , где  $\frac{\alpha(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .

•  $\Rightarrow$ .  $f_j(a+h) = f_j(a) + (Th)_j + \alpha_j(h)$ . Надо доказать, что  $\frac{\alpha_j(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$ .  $|\alpha_j(h)| \leq \|\alpha(h)\|$ . Значит,  $\frac{|\alpha_j(h)|}{\|h\|} \leq \frac{\|\alpha(h)\|}{\|h\|} \rightarrow 0$ .

•  $\Leftarrow$ . Знаем, что  $f_j(a+h) = f_j(a) + T_j h + \alpha_j(h)$ , где  $\frac{\alpha_j(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$ .

$$\alpha(h) = \begin{pmatrix} \alpha_1(h) \\ \vdots \\ \alpha_m(h) \end{pmatrix}. \text{ Надо доказать, что } \frac{\|\alpha(h)\|}{\|h\|} \rightarrow 0.$$

$$\text{Заметим, что } \frac{\|\alpha(h)\|}{\|h\|} = \frac{\sqrt{\alpha_1(h)^2 + \dots + \alpha_m(h)^2}}{\|h\|} \leq \frac{|\alpha_1(h)| + \dots + |\alpha_m(h)|}{\|h\|} \rightarrow 0.$$

□

**Следствие.** Строки матрицы Якоби — градиенты координатных функций



**Доказательство.** 
$$Th = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_m \end{pmatrix} (h) = \begin{pmatrix} T_1 h \\ \vdots \\ T_m h \end{pmatrix}.$$

□

**Определение 4.4.** Производная по направлению.  $f: E \rightarrow \mathbb{R}, \|h\| = 1$ .

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}.$$

**Замечание.**  $\frac{\partial f}{\partial h}(a) = d_a f(h)$ .

**Теорема 4.2** (экстремальное свойство градиента).  $|\frac{\partial f}{\partial h}(a)| \leq \|\nabla f(a)\|$ , причем равенство достигается при  $h = \pm \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$ .

**Доказательство.**  $\frac{\partial f}{\partial h}(a) = d_a f(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$ .  
 $|\frac{\partial f}{\partial h}(a)| = |\langle \nabla f(a), h \rangle| \leq \|\nabla f(a)\| \cdot \|h\| = \|\nabla f(a)\|$ .

В неравенстве Коши-Буняковского равенство  $\iff$  векторы пропорциональны  $\implies h = \pm \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$ . □

**Определение 4.5.** Частные производные.  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  (это  $\iff f$  — скалярная),  $e_k$  — базисный вектор (везде нули кроме  $k$ -й позиции).

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}, f'_{x_k}, D_{x_k} f, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) := \frac{\partial f}{\partial e_k}(a).$$

**Замечание.**  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1+t, a_2, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{t} = g'(a_1)$ , где  $g(s) := f(s, a_2, \dots, a_n)$ .

**Пример.**  $f(x, y) = x^y$ .  $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$ .

**Теорема 4.3.**  $\nabla f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$ .

**Доказательство.**  $\frac{\partial f}{\partial h} = \langle \nabla f(a), h \rangle$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \frac{\partial f}{\partial e_k}(a) = \langle \nabla f(a), e_k \rangle = (\nabla f(a))_k.$$

□

**Следствие.**  $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, a \in \text{Int } E, f$  — дифференцируема в точке  $a$ .

Тогда  $f'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$

**Теорема 4.4.** (линейность дифференциала)  $f, g: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, a \in \text{Int } E, \lambda \in \mathbb{R}, f, g$  дифференцируемы в точке  $a$ .

Тогда  $f + g, \lambda f$  — дифференцируемы в  $a$  и  $d_a(f + g) = d_a f + d_a g$  и  $d_a(\lambda f) = \lambda d_a f$ .

**Доказательство.**  $f(a + h) = f(a) + d_a f(h) + \alpha(h), \frac{\alpha(h)}{\|h\|} \rightarrow 0, g(a + h) = g(a) + d_a g(h) + \beta(h), \frac{\beta(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$ .

Тогда  $f(a + h) + g(a + h) = f(a) + g(a) + d_a f(h) + d_a g(h) + \alpha(h) + \beta(h)$ . Считаем, что  $\alpha(h) + \beta(h) = o(\|h\|)$ .

$$\lambda f(a + h) = \lambda f(a) + \lambda d_a f(h) + \lambda \alpha(h).$$

□

**Теорема 4.5** (дифференцируемость композиции).  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow D \subset \mathbb{R}^m$ ,  $g : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ ,  $a \in \text{Int } E$ ,  $b = f(a) \in \text{Int } D$ .

Тогда, если  $f$  дифференцируема в  $a$ ,  $g$  дифференцируема в  $b = f(a)$ , то  $g \circ f$  дифференцируема в точке  $a$  и  $d_a(g \circ f) = d_{f(a)}g \circ d_af$ .

**Доказательство.**  $f(a+h) = \underbrace{f(a)}_{=b} + \underbrace{d_af(h) + \alpha(h)}_{=k}$ , где  $\frac{\alpha(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .

$$g(b+k) = g(b) + d_bg(k) + \beta(k), \text{ где } \frac{\beta(k)}{\|k\|} \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0.$$

$$g \circ f(a+h) = g(b+k) = g(b) + \underbrace{d_bg(d_af(h) + \alpha(h))}_{d_bg(d_af(h)) + d_bg(\alpha(h))} = g \circ f(a) + d_bg \circ d_af(h) + d_bg(\alpha(h)) + \beta(k).$$

Хотим показать, что все корректно.

$$\frac{\|d_bg(\alpha(h))\|}{\|h\|} \leq \|d_bg\| \cdot \underbrace{\frac{\|\alpha(h)\|}{\|h\|}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0} \cdot \|k\| = d_af(h) + \alpha(h). \|k\| \leq \|d_af(h)\| + \|\alpha(h)\| \leq \|d_af\| \cdot \|h\| + \|\alpha(h)\| \rightarrow$$

$$0, \text{ откуда } \frac{\|k\|}{\|h\|} \leq \|d_af\| + \frac{\|\alpha(h)\|}{\|h\|}.$$

$$\text{В итоге, } \frac{\|\beta(k)\|}{\|k\|} \cdot \frac{\|k\|}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

□

**Следствие.**  $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$ .

**Теорема 4.6** (Дифференциал произведения скалярной и векторной функции).  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a \in \text{Int } E$ ,  $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\lambda$  и  $f$  дифференцируемы в точке  $a$ . Тогда  $\lambda f$  дифференцируема в точке  $a$  и  $d_a(\lambda f)(h) = d_a\lambda(h)f(a) + \lambda(a) \cdot d_af(h)$ .

**Доказательство.**  $f(a+h) = f(a) + d_af(h) + \alpha(h)$ ,  $\frac{\alpha(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$ .  $\lambda(a+h) = \lambda(a) + d_a\lambda(h) + \beta(h)$ ,  $\frac{\beta(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$ .

$$\lambda(a+h)f(a+h) = \lambda(a)f(a) + \underbrace{d_a\lambda(h)f(a)}_{\text{оранж}} + \underbrace{\lambda(a)d_af(h)}_{\text{син}} + \underbrace{d_a\lambda(h) \cdot d_af(h)}_{\text{розов}} + \lambda(a) \cdot \alpha(h) + f(a)\beta(h) + \underbrace{d_af(h)\beta(h)}_{\text{голуб}} + \underbrace{d_a\lambda(h)\alpha(h)}_{\text{зел}} + \alpha(h)\beta(h).$$

Заметим, что **второе и третье** слагаемые очевидно подходят под наше свойство. Теперь заметим, что **const**  $\cdot \|h\|^2 = o(\|h\|)$  и **const**  $\cdot \|h\|\beta(h) = o(\|h\|)$  и **const** $\|h\|\|\alpha(h)\| = o(\|h\|)$ . И всё получается. □

**Теорема 4.7** (о дифференциале скалярного произведения).  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $a \in \text{Int } E$ ,  $f, g$  — дифференцируемы в  $a$ .

$$\text{Тогда } \langle f, g \rangle \text{ дифференцируемы в } a. d_a\langle f, g \rangle(h) = \langle d_af(h), g(a) \rangle + \langle f(a), d_ag(h) \rangle.$$

**Доказательство.**  $\langle f(x), g(x) \rangle = \sum_{j=1}^m f_j(x)g_j(x)$ .

$$d_a\langle f, g \rangle(h) = \sum_{j=1}^m d_a(f_jg_j)(h) = \sum_{j=1}^m (d_ag_j(h)f_j(a) + g_j(a)d_af_j(h)) = \sum_{j=1}^m f_j(a)d_ag_j(h) + \sum_{j=1}^m d_af_j(h)g_j(a) = \langle f(a), d_ag(h) \rangle + \langle d_af(h), g(a) \rangle. \quad \square$$

**Замечание.** При  $n = 1$   $\langle f, g \rangle'(a) = \langle f'(a), g(a) \rangle + \langle f(a), g'(a) \rangle$ .

**Теорема 4.8** (Лагранжа для векторзначных функций).  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f$  — дифференцируема во всех точках из  $(a, b)$  и непрерывна на  $[a, b]$ .

$$\text{Тогда существует } c \in (a, b), \text{ такая что } \|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)\|(b-a).$$

**Доказательство.**  $\varphi(t) := \langle f(t), f(b) - f(a) \rangle$  — дифференцируемая функция  $\implies \exists c \in (a, b) : \|f(b) - f(a)\|^2 = \langle f(b), f(b) - f(a) \rangle - \langle f(a), f(b) - f(a) \rangle = \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b-a) = (b-a)\langle f'(c), f(b) - f(a) \rangle$

$$f(a) \rangle \leq (b-a) \|f'(c)\| \|f(b) - f(a)\|.$$

$$\varphi'(t) = \langle f'(t), f(b) - f(a) \rangle.$$

□

**Пример.**  $m = 2$ ,  $[a, b] = [0, 2\pi]$ ,  $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ ,  $f'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ .  $f(2\pi) - f(0) = \vec{0}$ ,  $\|f'(t)\| = 1$ . Тогда получаем  $\|f(2\pi) - f(0)\| = 0 < 2\pi \|f'(c)\|$ .

Тут не достигается равенства вообще никогда.

## 4.2. Непрерывная дифференцируемость

**Теорема 4.9.**  $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \text{Int } E$ . Все частные производные функции  $f$  существуют в окрестности  $a$  и непрерывны в ней. Тогда  $f$  дифференцируема в точке  $a$ .

**Доказательство.**  $f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + o(\|h\|)$ ,  $R(h) = f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$ .

Хочется показать, что  $R(h) = o(\|h\|)$ , тогда мы победили и дифференцируемость есть.

$$b_0 = a, b_1 = (a_1 + h_1, a_2, \dots, a_n), b_k = (a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_k + h_k, a_{k+1}, \dots, a_n).$$

$f(b_k) - f(b_{k-1}) = f(a_1 + h_1, \dots, a_{k-1} + h_{k-1}, a_k + h_k, a_{k+1}, \dots, a_n) - f(a_1 + h_1, \dots, a_{k-1} + h_{k-1}, a_k, \dots, a_n) = h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(b_{k-1} + \Theta_k h_k e_k)$  ( $0 < \Theta_k < 1$ ). Здесь  $b_{k-1} + \Theta_k h_k e_k$  — какая-то точка из  $(a_k, a_k + h_k)$  полученная путем теоремы Лагранжа.

$$\text{Тогда } f(a+h) - f(a) = f(b_n) - f(b_0) = \sum_{k=1}^n h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(b_{k-1} + \Theta_k h_k e_k) = \sum_{k=1}^n h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) + \sum_{k=1}^n h_k \left( \frac{\partial f}{\partial x_k}(b_{k-1} + \Theta_k h_k e_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right).$$

$$\text{Тогда } |R(h)| = \left| \sum_{k=1}^n h_k \left( \frac{\partial f}{\partial x_k}(b_{k-1} + \Theta_k h_k e_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right) \right| \leq \|h\| (\sum (\dots)^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ а } (\sum (\dots)^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0 \text{ из непрерывности частных производных.}$$

□

**Замечание.** Дифференциал функции в точке не влечет существования частных производных (и даже непрерывности) в окрестности точки.

Пример:  $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{если } x, y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$ . Дифференциал в точке  $(0, 0)$ :  $f(x, y) = f(0, 0) + o(\sqrt{x^2 + y^2})$  при  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

**Определение 4.6.**  $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $f$  непрерывно дифференцируема в каждой точке и  $d_x f$  непрерывно зависит от точки, то есть  $\|d_x f - d_a f\| \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow a$ .

**Теорема 4.10.**  $f$  непрерывно дифференцируема  $\iff f$  дифференцируема во всех точка и все частные производные непрерывны.

**Замечание.**  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$ ,  $a_{jk} = \langle A e_k, e_j \rangle$ ,  $|a_{jk}| = |\langle A e_k, e_j \rangle| \leq \|A e_k\| \underbrace{\|e_j\|}_{=1} \leq \|A\| \cdot \|e_k\| = \|A\|$ .

**Доказательство.** •  $\Rightarrow$ .  $\|d_x f - d_a f\| \rightarrow 0$ .

$$\text{Матрица для } d_x f - d_a f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) - \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

$$\left| \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a) \right| \leq \|d_x f - d_a f\| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \implies \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \text{ непрерывна в } a.$$

$$\bullet \quad \|d_x f - d_a f\|^2 \leq \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a) \right)^2 \rightarrow 0.$$

□

**Следствие.**  $f$  — непрерывно дифференцируема  $\iff$  существуют все частные производные и они непрерывны.

**Теорема 4.11.** Линейная комбинация, композиция, скалярное произведение, непрерывной дифференцируемой функции — непрерывно дифференцируема.

### 4.3. Частные производные высших порядков

**Определение 4.7.**  $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}: E \rightarrow \mathbb{R}. \text{ Тогда считаем, что } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

**Определение 4.8** (Обозначения).  $f''_{x_j, x_i}$  или  $D_{x_i, x_j} f$ .

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \partial x_{i_{r-1}} \dots \partial x_{i_1}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \left( \frac{\partial^{r-1} f}{\partial x_{i_{r-1}} \dots \partial x_{i_1}} \right)$$

**Замечание.** Всего  $n^r$  частных производных порядка  $r$ .

**Пример.**  $f(x, y) = x^y, \frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}, \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$ .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^y (\ln x)^2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x.$$

**Пример.**  $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left( \frac{x^2 y - xy^2}{x^2 + y^2} \right)'_X = \frac{(3x^2 y - y^3)(x^2 + y^2) - 2x(x^3 y - xy^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 y - y^5 + 4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y - 0}{y} = -1. \text{ А если в другом порядке, то } 1.$$

**Теорема 4.12.**  $f: E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_0, y_0) \in \text{Int } E$ .

$f'_x, f'_y, f''_{xy}$  существуют в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  и  $f''_{xy}$  непрерывны в точке  $(x_0, y_0)$ .

Тогда существует  $f''_{yx}(x_0, y_0)$  и  $f''_{yx}(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0, y_0)$ .

**Доказательство.**  $\varphi(s) := f(s, y_0 + k) - f(s, y_0), \varphi'(s) = f'_x(s, y_0 + k) - f'_x(s, y_0)$ .

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = h\varphi'(x_0 + \Theta h) = h(f'_x(x_0 + \Theta h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \Theta h, y_0)) = hk f''_{xy}(x_0 + \Theta h, y_0 + \tilde{\Theta} k),$$

где  $0 < \tilde{\Theta} < 1$ .

$$\frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{hk} - f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0 + \Theta h, y_0 + \tilde{\Theta} k) - f''_{xy}(x_0, y_0) \rightarrow 0, \text{ при } (h, k) \rightarrow (0, 0).$$

При малых  $h$  и  $k$ :

$$\left| \frac{1}{h} \left( \frac{\varphi(x_0 + h)}{k} - \frac{\varphi(x_0)}{k} \right) - f''_{xy}(x_0, y_0) \right| < \varepsilon \xrightarrow{k \rightarrow 0} \left| \frac{1}{h} (f'_y(x_0 + h, y_0) - f'_y(x_0, y_0)) - f''_{xy}(x_0, y_0) \right| \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_y(x_0 + h, y_0) - f'_y(x_0, y_0)}{h} = f''_{xy}(x_0, y_0).$$

□

**Определение 4.9.**  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D$  — открытое),  $f$   $r$  раз непрерывно дифференцируема, если у нее существуют все частные производные порядка  $\leq r$  и они непрерывны.

Обозначение.  $f \in C^r(D)$ .

**Теорема 4.13.**  $f \in C^r(D)$  и  $(i_1, i_2, \dots, i_r)$  перестановка  $(j_1, j_2, \dots, j_r)$ .

$$\text{Тогда } \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_r} \dots \partial x_{j_1}}.$$

**Доказательство.** Достаточно доказать данное утверждение для одной транспозиции  $(a, b \rightarrow b, a)$ , тогда заметим, что у нас есть общий префикс + общий суффикс + пара различных переменных. □

**Определение 4.10.** Мультииндекс  $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  — набор из  $n$  неотрицательных чисел.

$k! := k_1! k_2! \dots k_n!$ ,  $|k| := k_1 + k_2 + \dots + k_n$  — высота мультииндекса.

$$\binom{|k|}{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{|k|!}{k!}.$$

$$h = (h_1, h_2, \dots, h_n), h^k := h_1^{k_1} \dots h_n^{k_n}.$$

$$f^{(k)} = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}.$$

**Лемма.**  $f \in C^r(D)$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D$  — открытое,  $[x, x + h] \subset D$ ,  $F(t) := f(x + th)$ ,  $t \in [0; 1]$ .

$$\text{Тогда } F \in C^r[0, 1] \text{ и } F^{(l)}(t) = \sum_{|k|=l} \frac{l!}{k!} f^{(k)}(x + th) h^k.$$

**Доказательство.**  $g \in C^1(D)$ ,  $G(t) = g(x + th)$ .  $G'(t) = \sum_{j=1}^n g'_{x_j}(x + th) h_j$ .  $v(t) := x + th$ . Тогда,  $G(t) = g(v(t))$ , а значит:

$$G'(t) = g'(v(t))v'(t) = g'(x + th)h = (g'_{x_1}(x + th) \dots g'_{x_n}(x + th)) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n g'_{x_j}(x + th) h_j.$$

$$\text{А значит } F^{(l)}(t) = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_l=1}^n f^{(l)}_{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_l}}(x + th) h_{j_1} h_{j_2} \dots h_{j_l} = \sum_{|k|=l} \frac{l!}{k!} f^{(k)}(x + th) h^k. \text{ Просто}$$

в  $f^{(l)}_{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_l}}$   $k_1$  раз  $x_1$ ,  $k_2$  раз  $x_2$ , ... □

**Теорема 4.14** (Многомерная формула Тейлора (с остатком в форме Лагранжа)).  $f \in C^{n+1}(D)$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D$  — открытое,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $[x, x + h] \subset D$ .

$$\text{Тогда существует } \Theta \in (0, 1), \text{ что } f(x + h) = \sum_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + \sum_{|k|=r+1} \frac{f^{(k)}(x + \Theta h)}{k!} h^k.$$

**Доказательство.**  $F(t) := f(x + th)$ ,  $F(1) = \sum_{l=0}^r \frac{F^{(l)}(0)}{l!} 1^l + \frac{f^{(k+1)}(\Theta)}{(k+1)!} 1^{r+1}$  □

$$= \underbrace{\sum_{|k|=l} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k}_{|k|=l} + \underbrace{\sum_{|k|=r+1} \frac{f^{(k)}(x+\Theta h)}{k!} h^k}_{|k|=r+1}$$

**Замечание.** 1. Многочлен Тейлора степени  $r$ .  $\sum_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ .

2.  $r = 0$ . Многомерная формула Лагранжа.

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{j=1}^n f'_{x_j}(x + \Theta h) h_j = f(x) \langle \nabla f(x + \Theta h), h \rangle.$$

3.  $n = 2$  в координатной записи.

$$f(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)(x-a) + f'_y(a, b)(y-b) + \frac{1}{2} f''_{xx}(a, b)(x-a)^2 + \frac{1}{2} f''_{yy}(a, b)(y-b)^2 + f''_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) + \dots$$

**Теорема 4.15** (с остатком в форме Пеано).  $f \in C^r(D)$ ,  $a \in D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D$  — открытое. Тогда при  $x \rightarrow a$

$$f(x) = \sum_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o(\|x-a\|^r).$$

**Доказательство.** Пишем формулу с остатком в форме Лагранжа для  $r-1$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{|k| \leq r-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (x-a)^k + \sum_{|k|=r} \frac{f^{(k)}(a + \Theta(x-a))}{k!} (x-a)^k = \\ &= \sum_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \underbrace{\sum_{|k|=r} \frac{f^{(k)}(a + \Theta(x-a)) - f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}_{=o(\|x-a\|^r)}. \end{aligned}$$

Достаточно проверить, что  $\underbrace{(f^{(k)}(a + \Theta(x-a)) - f^{(k)}(a))}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} 0} (x-a)^k = o(\|x-a\|^r)$ .

Надо понять, что  $|(x-a)^k| \leq \|x-a\|^r$ . Заметим, что  $|x_j - a_j| \leq \|x-a\|$ , тогда можно воспользоваться определением мультииндекса. □

**Следствие Полиномиальная (мультиномиальная формула).**  $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^r = \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k!} x^k = \sum_{|k|=r} \binom{r}{k_1, k_2, \dots, k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ .

**Доказательство.**  $f(x) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^r = g^r(x)$ , где  $g(x) = x_1 + \dots + x_n$ .

$f'_{x_j}(x) = r g^{r-1}(x) g'_{x_j}(x) = r g^{r-1}(x)$ . Знаем, что если  $|k| = r$ , то  $f^{(k)}(x) = r!$ . А если  $<$ , то  $f^{(k)}(x) = \dots \cdot g^{r-|k|}(x)$ ,  $f^{(k)}(0) = 0$ . □

## 4.4. Обратные и неявные функции

**Определение 4.11.**  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $f: X \rightarrow X$ .  $f$  — сжатие с коэффициентом  $\lambda$ , если  $\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda \rho(x, y)$ , где  $0 < \lambda < 1$ .

**Теорема 4.16** (Банаха о сжатии). Пусть  $X$  — полное метрическое пространство,  $f$  — сжатие.

Тогда у  $f$  существует единственная неподвижная точка, то есть  $\exists! x: f(x) = x$ .

**Доказательство.** Единственность. Пусть  $x$  и  $y$  — неподвижные точки. Тогда  $\rho(f(x), f(y)) = \rho(x, y)$ , но при это  $\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda \rho(x, y) \implies \rho(x, y) = 0 \implies x = y$ .

Существование. Построим последовательность  $x_n$ .  $x_0 \in X, x_{n+1} := f(x_n)$ .

Докажем, что последовательность  $x_n$  — фундаментальная.  $\rho(x_{n+k}, x_n) = \rho(f(x_{n+k-1}), f(x_{n-1})) \leq \lambda \rho(x_{n+k-1}, x_{n-1}) \leq \dots \leq \lambda^n \rho(x_k, x_0)$ .

Посмотрим на  $\rho(x_k, x_0) \leq \rho(x_k, x_{k-1}) + \rho(x_{k-1}, x_{k-2}) + \dots + \rho(x_1, x_0) \leq (\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2} + \dots + \lambda + 1)\rho(x, x_0) < \frac{\rho(x_1, x_0)}{1-\lambda}$ . А значит,  $\lambda^n \rho(x_k, x_0) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \rho(x_1, x_0) \leq C \lambda^n$ . А значит последовательность фундаментальная.

Тогда  $\exists x_* \in X: \lim x_n = x_*$ .  $x_* \leftarrow x_{n+1} = f(x_n) \rightarrow f(x_*)$ .

Сжатие непрерывно по определению, тогда  $x_* = f(x_*)$ . □

**Замечание.**  $\rho(x_*, x_n) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \rho(x_1, x_0) \implies \rho(x_*, x_n) \leq \lambda^n \rho(x_*, x_0)$ .

**Следствие.** Пусть  $f, g$  — сжатия с коэффициентами  $\lambda$ ,  $x, y$  их неподвижные точки.

Тогда  $\rho(x, y) \leq \frac{\rho(f(x), g(y))}{1-\lambda}$ .

**Доказательство.**  $\rho(x, y) = \rho(f(x), g(y)) \leq \rho(f(x), g(x)) + \underbrace{\rho(g(x), g(y))}_{\leq \lambda \rho(x, y)} \implies (1-\lambda)\rho(x, y) \leq \rho(f(x), g(x))$ . □

**Пример Метод касательных Ньютона.** Мы знаем, что  $\exists a: f(a) = 0$ , но не знаем  $a$ , но зато знаем, что  $f: [a, x_0] \rightarrow \mathbb{R}, f \uparrow, f$  — выпукла,  $f \in C^2$ .

$g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ . Сразу требование:  $f'(a) = \mu > 0$ . Тогда будем делать  $x_{n+1} := g(x_n)$ , Если  $x_*$  — неподвижная точка, то  $g(x_*) = x_* \iff x_* - \frac{f(x_*)}{f'(x_*)} \implies f(x_*) = 0$ .

Картинка...

$$y = f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k), \dots, 0 = f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k) \implies x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) < f'(x)(x - a)$  (теорема Лагранжа для получения  $c \in (a, x)$ )  
 $\Leftarrow f'(c) \leq f'(x)$ , так как  $f$  выпукла.

Тогда  $\frac{f(x)}{f'(x)} < x - a \implies a < x - \frac{f(x)}{f'(x)} = g(x) \implies g: [a, x_0] \rightarrow [a, x_0]$ .

$g(x) - g(y) = g'(c)(x - y), g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$ .  $M = \max_{a \leq x \leq x_0} f''(x), 1 > \frac{Mf(x_0)}{\mu^2} =: \lambda \geq g'(x)$

Но, штука может быть  $> 1$ , это регулируется  $x_0$ , которую можно аккуратнее искать. Получили оценку порядка  $\lambda^n$ .

$f(x) < f'(x)(x - a) \implies 0 \leq \frac{f'(x)(x-a)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f''(x)(x-a)}{f'(x)} \leq \frac{M(x_0-a)}{\mu}$  — нашли границу для стартовой точки.

**Упражнение.** Доказать, что  $x_{n+1} - a \leq \frac{M}{2\mu}(x_n - a)^2 \implies x_n - a \leq \frac{2\mu}{M}(\frac{M}{2\mu}(x_n - a))^2$ .

**Замечание.**  $f(x) = x^k - b, g(x) = x - \frac{x^k - b}{kx^{k-1}} = x - \frac{x}{k} + \frac{b}{kx^{k-1}} = (1 - \frac{1}{k})x + \frac{b}{kx^{k-1}}$ .

**Определение 4.12.**  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, D$  — открытое,  $\exists(x_0, y_0) \in D$ .

Задача Коши:  $\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

**Теорема 4.17** (Пикара).  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, D$  — открытое,  $(x_0, y_0) \in D, |f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq M|y - \tilde{y}| \forall x, y, \tilde{y}, f$  — непрерывна.

Тогда  $\exists \delta > 0$ , что на  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  задача Коши имеет единственное решение.

**Замечание.**  $\begin{cases} y' = -y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases} \implies y(x) = \frac{1}{x}. \text{ В нуле беды с бедами.}$

**Доказательство теоремы.**  $\varphi: [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}, \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \wedge \varphi(x_0) = y_0$ . Переформулируем:  $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$ .

Тогда  $T(\varphi) := \psi, \psi(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$ . То есть  $\varphi_{n+1} := T(\varphi_n)$ .

Возьмем  $\overline{B}_r(x_0, y_0) \subset D, |f(x, y)| \leq K$  на  $\overline{B}_r(x_0, y_0)$ . Выберем  $\delta > 0$ , такое что

1.  $\delta M < 1$ ,
2.  $|x - x_0| \leq \delta, |y - y_0| \leq K\delta \implies (x, y) \in \overline{B}_r(x_0, y_0)$

Возьмем  $C_* := \{\varphi: [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \in C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]: |\varphi(x) - y_0| \leq K\delta\} \subset C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ . Заметим, что  $C_*$  — замкнутое, а значит полное.

Надо доказать, что  $T: C_* \rightarrow C_*$  и это сжатие.

Возьмем  $\psi = T\varphi$ , проверим, что  $|\psi(x) - y_0| \leq K\delta \iff \left| \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt \right| \leq K\delta$ .

$T$  — сжатие  $\iff |\psi(x) - \tilde{\psi}(x)| = \left| y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt - y_0 - \int_{x_0}^x f(t, \tilde{\varphi}(t)) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, \varphi(t)) - f(t, \tilde{\varphi}(t))| dt \leq \int_{x_0}^x M |\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)| dt \leq \underbrace{\delta M}_{<1} \|\varphi - \tilde{\varphi}\|$  □

**Теорема 4.18.** Пусть  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $A$  — линейное,  $m > 0, \|Ax\| \geq m\|x\| \forall x$ .

Тогда  $A$  — обратим и  $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{m}$ .

**Доказательство.**  $A$  — инъекция. Так как линейно достаточно понять, что  $Ax = 0 \implies x = 0$ .  $Ax = 0 \implies \|Ax\| = 0, \|Ax\| \geq m\|x\| \implies \|x\| = 0 \implies x = 0$ .

Так как  $A$  — инъекция  $\implies A$  — суръекция  $\implies A$  — биекция, значит обратим.

$\|A^{-1}\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|} = \sup_{y \neq 0} \frac{\|A^{-1}Ay\|}{\|Ay\|} = \sup_{y \neq 0} \frac{\|y\|}{\|Ay\|} \leq \frac{1}{m}$ . так как  $\|Ay\| \geq m\|y\|$ . □

**Теорема 4.19** (Теорема об операторах, близких к обратным).  $A, B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $A$  — обратим и  $\|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ .

Тогда:

1.  $B$  — обратим,
2.  $\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|}$ ,
3.  $\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|B - A\| \cdot \|A^{-1}\|}{(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|)}$ .

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} 1. \|Bx\| &= \|(B - A)x + Ax\| \geq \underbrace{\|Ax\|}_{\geq \frac{1}{\|A^{-1}\|} \|x\|} - \underbrace{\|(B - A)x\|}_{\geq \|B - A\| \cdot \|x\|} = \underbrace{\left( \frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\| \right)}_{=m} \|x\|. \\ \|A^{-1}\| \cdot \|Ax\| &\geq \|A^{-1}Ax\| = \|x\|. \end{aligned}$$



$$3. \|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \|B^{-1}\| \|A - B\| \|A^{-1}\|, \text{ а так как } \|B^{-1}\| \leq \frac{1}{\|A^{-1}\| - \|B - A\|}.$$

□

**Теорема 4.20.**  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — дифференцируема во всех точках  $D$  и  $\|f'(x)\| \leq C$ ,  $D$  — выпуклая.

Тогда  $\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|$ .

**Доказательство.**  $\varphi(t) = \langle f(x + t(y - x)), f(y) - f(x) \rangle$ .  $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(0) = \langle f(x), f(y) - f(x) \rangle$ ,  $\varphi(1) = \langle f(y), f(y) - f(x) \rangle$ , откуда  $\underbrace{\varphi(1) - \varphi(0)}_{\varphi'(c)(1-0)} = \|f(y) - f(x)\|^2$ .  $\varphi'(c) = \langle f'(x + c(y - x))(y - x), f(y) - f(x) \rangle \leq \|f'(x + c(y - x))(y - x)\| \cdot \|f(y) - f(x)\| \leq C\|y - x\| \|f(y) - f(x)\|$ .  
 $\leq \|f'(\dots)\| \|y - x\| \leq C\|y - x\|$

□

**Теорема 4.21** (теорема об обратной функции).  $D$  — открытое  $\subset \mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in D$ .  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  непрерывно дифференцируема,  $y_0 = f(x_0)$ ,  $A := f'(x_0)$  — обратима.

Тогда  $\exists$  окрестности  $U, V$  точек  $x_0, y_0$ , такие, что  $f: U \rightarrow V$  — обратима и  $f^{-1}: V \rightarrow U$  непрерывна.

**Доказательство.**  $G_y(x) := x + A^{-1}(y - f(x))$ . Если  $x$  — неподвижная точка  $G_y$ , то  $x = x + A^{-1}(y - f(x)) \iff A^{-1}(y - f(x)) = 0$ .

Выбираем  $B_r(x_0)$  так, что  $\|A^{-1}\| \|A - f'(x)\| \leq \frac{1}{2} \forall x \in B_r(x_0)$ .

$G'_y(x) = E + A^{-1}(-f'(x)) = E - A^{-1}f'(x) = A^{-1}(A - f'(x))$ . Тогда  $\|G'_y(x)\| \leq \|A^{-1}\| \|A - f'(x)\| \leq \frac{1}{2} \forall x \in B_r(x_0)$ .

Хотим, чтобы  $G_y: B_r(x_0) \rightarrow B_r(x_0)$ .  $\|G_y(x) - x_0\| = \underbrace{\|G_y(x) - G_y(x_0)\|}_{\leq \frac{1}{2}\|x - x_0\| < \frac{r}{2} \text{ (1)}} + \|G_y(x_0) - x_0\| < \frac{r}{2} +$

$$\|A^{-1}(y - \underbrace{f(x_0)}_{y_0})\| \leq \frac{r}{2} + \|A^{-1}\| \cdot \|y - y_0\| \stackrel{(*)}{\leq} \frac{r}{2} + \|A^{-1}\| R < r.$$

(\*) — берем  $y$  из  $B_R(y_0)$  (причем надо хорошо выбирать  $R$ , чтобы все оставалось верным),  
 (1) — воспользовались предыдущей теоремой, так как оценили производную.

Если  $y \in B_R(y_0)$ , то  $G_y: \overline{B}_r(x_0) \rightarrow \overline{B}_r(x_0)$  и является сжатием  $\implies \forall y \in B_r(x_0) \exists! x_*$  — неподвижная точка для  $G_y \implies x_* = G_y(x_*) = x_* + A^{-1}(y - f(x_*)) \implies y = f(x_*) \implies y \in f(B_r(x_0))$ .

$V := B_R(y_0)$  и  $U := f^{-1}(V)$  — открыто, так как прообраз открыт.

То есть мы поняли, что  $f: U \rightarrow V$  — биекция. Осталось проверить, что  $f^{-1}: V \rightarrow U$  — непрерывна.

Пусть  $\tilde{y} = f(\tilde{x})$  и  $y = f(x)$ ,  $x$  — неподвижная точка  $G_y$  и  $\tilde{x}$  — неподвижная в  $G_{\tilde{y}}$ . Тогда  $\|x - \tilde{x}\| \leq \frac{\|G_y(x) - G_{\tilde{y}}(\tilde{x})\|}{1 - \frac{1}{2}} = 2\|G_y(x) - G_{\tilde{y}}(\tilde{x})\| = 2\|A^{-1}(y - f(x)) - A^{-1}(\tilde{y} - f(\tilde{x}))\| = 2\|A^{-1}(y - \tilde{y})\| \leq 2\|A^{-1}\| \|y - \tilde{y}\|$  □

**Теорема 4.22.**  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D$  — открытое,  $f(a) = b$ ,  $f'(a)$  — обратимая матрица.  $f: U \rightarrow V$  — биекция,  $U, V$  — окрестности в точках  $a, b$ . Тогда  $f^{-1}$  дифференцируема в  $b$  и  $f^{-1}$  непрерывна  $V \rightarrow U$ .

**Доказательство.**  $A = f'(a)$ ,  $f(a + h) = f(a) + Ah + \alpha(h)\|h\|$ , где  $\alpha(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .

$k := f(a + h) - f(a) = Ah + \alpha(h)\|h\|$ ,  $\|k\| = \|\dots\| \geq \|Ah\| - \|\alpha(h)\| \|h\| \geq \|h\| (\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\|) \geq \|h\| m$ , так как  $\|Ah\| \geq \frac{\|h\|}{\|A^{-1}\|}$ .

Тогда  $k \rightarrow 0 \implies h \rightarrow 0$ .  $A^{-1}k = h + A^{-1}(\alpha(h))\|h\| = f^{-1}(b+k) - f(b) - A^{-1}(\alpha(h))\|h\|$ .

$f^{-1}(b+k) = f^{-1}(b) + A^{-1}k - A^{-1}(\alpha(h))\|h\|$ . Осталось доказать, что  $A^{-1}(\alpha(h))\|h\| = o(\|k\|)$ .

$A^{-1}\alpha(h)\frac{\|h\|}{\|k\|}$ : Первый множитель  $\leq \|A^{-1}\|\|\alpha(h)\|$ , второй  $\leq \frac{1}{m}$ .  $\square$

**Следствие.** В условии теоремы об обратной функции  $f^{-1}: V \rightarrow U$  непрерывно дифференцируема.

**Доказательство.**  $(f^{-1})'(b) = (f'(a))^{-1}$   $\square$

## 4.5. Вступление к неявным функциям

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  линейное.

Если  $A(h, 0) = 0 \implies h = 0$ . Тогда уравнение  $A(x, y) = 0$  имеет единственное решение.

$0 = A(x, y) = A(x, 0) + A(0, y) \implies A(x, 0) = -A(0, y)$ . Получилась функция  $y \rightarrow x =: f(y)$ ,  $A(f(y), y) = 0 \forall y \in \mathbb{R}^m$ . Это неявная функция, определяемая уравнением  $A(x, y) = 0$ .

Нелинейный вариант:  $x^2 + y^2 = 1$ .  $F(x, y) = x^2 + y^2 = 1$ ,  $F' = (2x, 2y)$ , если  $y \neq 0$ , то  $(2x, 2y) \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} = 2yk = 0 \iff k = 0$ .

**Теорема 4.23** (о неявной функции).  $f: D \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m, (a, b) \in D, f(a, b) = 0$ .  $f$  — непрерывно дифференцируема,  $A := f'(a, b)$ , такая, что  $A(h, 0) = 0 \implies h = 0$ .

Тогда существует такая окрестность  $W$  такая, что в  $W$  единственная функция.

$g: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ , такая что  $g(b) = a$  и  $f(g(y), y) = 0 \forall y \in W$  и эта функция непрерывно дифференцируема.

**Доказательство.**  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}, F(x, y) := (f(x, y), y)$ .  $F(a, b) = (f(a, b), b) = (0, b)$ .  $F$  — непрерывно дифференцируема,  $F(a + h, b + k) = (f(a + h, b + k), b + k) = (f(a, b), b) + (A(h, k), k) + o(\|(h, k)\|)$ .

Проверим, что  $F'(a, b)$  — обратима.  $(A(h, k), k) = 0 \implies k = 0 \implies A(h, 0) \implies h = 0 \implies (h, k) = 0 \implies$  обратима.

По теореме об обратной функции  $\exists U$  — окрестность  $(a, b)$ ,  $V$  — окрестность в точке  $(a, b)$ , такая что  $F: U \rightarrow V$  — биекция,  $F^{-1} = G: V \rightarrow U$  — непрерывно дифференцируема.

$(x, y) = G(F(x, y)) = G(f(x, y), y)$ ,  $G(u, v) = (g(u, v), v)$  — непрерывно дифференцируема  $\implies g$  — непрерывно дифференцируема. Пусть  $\varphi(v) := g(0, v)$ ,  $W$  — такая, что  $\{0\} \times W \subset V$ .  $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^n, f(\varphi(v), v) \stackrel{?}{=} 0$ .

$F(\varphi(v), v) = (0, v)$ , а так как  $G(0, v) = (g(0, v), v) = (\varphi(v), v)$

Единственность. Пусть для какого-то  $v$  нашлись  $v$  и  $\tilde{v}$ , такая что  $f(u, v) = 0$  и  $f(\tilde{u}, v) = 0 \implies F(u, v) = (0, v) = F(\tilde{u}, v)$ , но  $F$  биекция  $\implies \tilde{u} = u$ .  $\square$

## 4.6. Экстремум

**Определение 4.13.**  $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, a \in \text{Int } E$ .  $a$  — точка строгого локального минимума, если  $\exists U \subset E$  — окрестность точки  $a$ , такая что  $\forall x \in U: f(x) \geq f(a)$ .

Строгий локальный минимум  $x \neq a \implies f(x) > f(a)$ .

Максимум тоже самое.

**Теорема 4.24** (Необходимые условия экстремума).  $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \text{Int } E$ . Пусть  $a$  — точка экстремума. Если существует  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \implies \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$ .

В частности, если  $f$  дифференцируема в точке  $a$ , то  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$ , то есть  $\nabla f(a) = 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $U$  — окрестность  $a$  из определения и  $a$  — точка  $\min$ .

$g(t) := f(t, a_2, a_3, \dots, a_n)$ . Тогда  $g(a_1) \leq g(t) \implies a_1$  — точка минимума для  $g$  и  $g$  дифференцируема в этой точке  $\implies g'(a_1) = 0$ .  $\square$

**Определение 4.14.** Точки, в которой  $\nabla f(a) = 0$  — стационарная.

**Замечание.** Пусть  $a$  — стационарная точка.  $f: D \subset \mathbb{R}^n$ .

$$f(a+h) = f(a) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + o(\|h\|^2).$$

$$\frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k, \quad k \text{ — мультииндекс мощности } 2.$$

**Определение 4.15.**  $Q(h) := \sum_{i,j=1}^n c_{ij} \underbrace{h_i h_j}_{= \langle Ch, h \rangle}$  — квадратичная форма.

$C := (c_{ij})$ . Всегда можно считать, что  $c_{ij} = c_{ji}$ , то есть  $C$  — симметрическая матрица.

**Определение 4.16.**  $Q(h)$  — положительно определена, если  $Q(h) \geq 0 \forall h$ . Отрицательно  $\leq 0$ , строго  $> / <$ .

**Теорема 4.25.** Если  $Q(h)$  строго положительно определена, то  $\exists m > 0$ , такой что  $Q(h) \geq m\|h\|^2 \forall h \in \mathbb{R}^n$ .

**Доказательство.**  $Q$  — непрерывна на  $\mathbb{R}^n$ . Рассмотрим на  $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ .  $S$  — компакт. Тогда  $\exists x_0 \in S$ , такая что  $0 < Q(x_0) =: m$  — наименьшее значение на  $S$ .

$$\text{Рассмотрим } h \neq 0, \frac{h}{\|h\|} \in S \implies \frac{1}{\|h\|^2} Q(h) = Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \geq m \implies Q(h) \geq m\|h\|^2. \quad \square$$

**Теорема 4.26** (Достаточные условия экстремума).  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \text{Int } D$ .

$f$  — дважды дифференцируема в точке  $a$  и  $\nabla f(a) = 0$ ,  $Q(h) := \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$ . Тогда:

1. Если  $Q(h)$  строго положительно определена, то  $a$  — точка строгого  $\min$ , если строго отрицательно  $a$  — строго  $\min$ .
2. Если  $a$  — точка нестрогого  $\min$ , то  $Q$  — нестрого положительно определена.
3.  $a$  — нестрогого  $\max \implies Q$  — нестрого отрицательно.
4. Если  $Q$  не является знакоопределенной, то  $a$  не точка экстремума.

**Доказательство.** 1.  $Q(h)$  — строго положительно  $\implies \exists m > 0 : Q(h) \geq m\|h\|^2$ . Тогда  $f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2}m\|h\|^2 + o(\|h\|^2) = \|h^2\|(\frac{m}{2} + o(1)) > 0$ .

3.  $h := tv, t \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n$ .  $f(a+tv) - f(a) = \frac{1}{2}Q(tv) + o(t^2)$ . При малых  $t$  это равно  $t^2(Q(v) + o(1)) \implies Q(v) \geq 0$

$\square$

**Теорема 4.27** (Критерий Сильвестера).  $Q(h) := \langle Ch, h \rangle$ .  $Q$  — строго положительно определена  $\iff \det$  всех квадратных миноров с левым верхним углом совпадающим с левым верхним углом матрицы.

**Определение 4.17.** Условный экстремум.  $f : D \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}, \Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^m, a = (b, c) \in D$ , внутренняя точка.  $\Phi(a) = 0$ .

$a$  точка условного  $\min$  при условии  $\Phi(x) = 0$ , если  $\exists U$  — окрестность  $a$ , такая что  $\forall x \in U : \Phi(x) = 0, f(a) \leq f(x)$ .

**Утверждение 4.28** (Метод неопределенных множителей Лагранжа).  $f : D \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}, \Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  непрерывно дифференцируема то  $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \dots \\ \Phi_{n+m} \end{pmatrix}$ .

$\nabla f(a), \nabla \Phi_1(a), \nabla \Phi_2(a), \dots, \nabla \Phi_m(a)$  — линейно зависимые.

**Замечание.** 1. Если  $\nabla \Phi_1(a), \dots, \nabla \Phi_m(a)$  зависимые, то тогда теорема ничего не утверждает.

2. Если они линейно независимы, то  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} : \nabla f(a) = \sum_i \lambda_i \nabla \Phi_i(a)$ .

3.  $\Phi'(a) = \begin{pmatrix} \nabla \Phi_1(a) \\ \dots \\ \nabla \Phi_m(a) \end{pmatrix} m$ , а так как ЛНЗ  $\text{rank } \Phi'(a) = m$ .

**Доказательство.**  $a$  — точка условного локального экстремума ( $\min$ ) и  $\Phi'(a)(h, 0) = 0 \implies h = 0$ .  $x = (y, z), y \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^n, a = (b, c)$ .  $\Phi(y, z) = 0$  в окрестности  $(b, c)$ .

По теорема о неявной функции  $\exists \varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ , такая что  $\Phi(\varphi(z), z) \equiv 0 \forall z \in W$ .

Рассмотрим  $g(z) := f(\varphi(z), z), g(c) = f(\varphi(c), c) = f(a) \implies c$  — точка локального  $\min$  для  $g \implies \nabla g(c) = 0$ .

$$g'(z) = f'_z(\varphi(z), z) + f'_y(\varphi(z), z)\varphi'(z). 0 = g'(c) = f'_z(a) + f'_y(a)\varphi'(c).$$

$$\Phi(\varphi(z), z) \equiv 0$$

$$0 = \Phi'_z(a) + \Phi'_y(a)\varphi'(c). \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$0 = g'(c) = f'_z(a) + f'_y(a)\varphi'(c) \text{ и } 0 = \lambda \Phi'_z(a) + \lambda \Phi'_y(a)\varphi'(c). \text{ Тогда } 0 = (f'_z(a) - \lambda \Phi'_z(a)) + \underbrace{(f'_y(a) - \lambda \Phi'_y(a))}_{=0 \text{ при подходящих } \lambda} \varphi'(c)$$

$$f'_y(a) = \lambda \Phi'_y(a) \wedge f'_z(a) = \lambda \Phi'_z(a) \implies f'(a) = \lambda \Phi'(a). \quad \square$$