

Математическая логика

Ипатов Марк

22 апреля 2022 г.

Содержание

1. Множества, мощность множеств	1
1.1 Равномощные множества	1
1.2 Об операциях над мощностями	3
2. Частично упорядоченные множества	5
2.1 Про отношение	5

1. Множества, мощность множеств

1.1. Равномощные множества

...тут я ещё не начинал записывать

Определение 1.1. Множества A и B равномощны, если \exists биекция между A и B

Замечание. Равномощность является отношением эквивалентности. Очев.

Возможная, но не совсем корректная трактовка — равномощные множества — содержащие равное количество элементов. Для конечных это действительно верно.

Определение 1.2. Множество называется счётным, если оно равномощно множеству натуральных чисел.

Пояснение: мы считаем натуральными числами множество $\{1, 2, 3, \dots\}$, но никакой разницы с $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ нет, т.к. существует биекция из одного в другое — $i \rightarrow i - 1$.

Пример. Чётные числа — счётное множество. Биекция — $i \rightarrow 2 \times i$

Лемма. A, B — счётны $\Rightarrow A \cup B$ — счётно при $A \cap B = \emptyset$.

Доказательство. $\exists f : N \rightarrow A \Rightarrow A : \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

Аналогично $B : \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$

Тогда запишем:

$C : \{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots\}, c_{2i-1} = a_i, c_{2i} = b_i$

□

Следствие. \mathbb{Z} — счётно.

Доказательство. $\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{-1, -2, -3, \dots\}$, первое равномощно \mathbb{N} , как и второе, а значит \mathbb{Z} — счётно по предыдущей лемме. □

Лемма. B — счётное, $A \subset B$, тогда A — конечное или счётное.

Доказательство. B — счётно, тогда можно записать $B : \{b_1, b_2, \dots\}$

Раз A подмножество, то просто часть элементов отсутствует. Тогда мы пойдём сопоставлять числа оставшимся элементам. Первое оставшееся — 1, второе — 2, и т.д. Тогда или в какой-то момент у нас закончатся оставшиеся числа, т.е. найдётся то, после которого нет оставшихся, и тогда A — конечно, или мы построим биекцию между A и натуральными числами. Это биекция, поскольку это инъекция и сюръекция (мы каждому натуральному поставили число, и всем элементам A что-то одно сопоставили) □

Теорема 1.1 (Лемма). Любое бесконечное множество содержит счётное подмножество.

Определение 1.3. Множество X бесконечно, если $\forall i \in \mathbb{N}$ можно найти i различных элементов из X .

Доказательство. Возьмём элемент из X . Назовём его a_1 . Если в X не осталось элементов, значит в нём был всего один элемент. Иначе возьмём из X какой-то другой элемент, назовём его a_2 . Если снова не осталось, то было всего два элемента. И так далее, построили $Y = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, и $Y \subset X, f : \mathbb{N} \Leftrightarrow Y$. □

Пример. Счётное множество, для которого мы таким процессом не докажем счётность: $X = \{1, 2, 3, \dots\}$, $Y = \{2, 4, 6, \dots\}$. Иными словами, мы все элементы из X далеко не обязательно вытаскиваем.

Пример. Множество $(0, 1)$ не является счётным.

Следствие. $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ — счётны $\therefore A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ — счётно

Доказательство. Для дизъюнктивных всё хорошо понятно. Для недизъюнктивных:

Посмотрим на A_1 и A_2

A_1 . Оба счётны, а тогда $A_1 \cup A_2 = A_1 \sqcup (A_2 \setminus A_1)$

Теперь воспользуемся индукцией по k : База: A_1, A_2 счётны по условию, тогда $A_1 \cup A_2$ тоже счётно. Тогда $(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_k) = ((\dots((A_1 \cup A_2) \cup A_3) \cup \dots) \cup A_k)$ \square

Лемма. A_1, A_2, \dots — счётное число счётных множеств, т.е. для любого $i \exists A_i$.

Тогда $A_1 \cup A_2 \cup \dots$ тоже счётно.

Доказательство. A_1 счётно, тогда $A_1 : \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots\}$. Аналогично $A_2 : \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots\}$ И так далее ещё счётное число строк.

Теперь нам нужно эту таблицу представить в виде последовательности. Будем ходить по диагоналям: $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \dots$

Утверждение — любой элемент будет выписан. Рассмотрим элемент множества i номер j , тогда оно будет на $i + j$ -ой диагонали, а значит его номер точно не будет превышать $(i + j)^2$. Тогда получаем, что любой элемент будет выписан.

Это всё для непересекающихся множеств, а для пересекающихся — давайте просто не выписывать элементы, которые уже выписали. \square

Упражнение. \mathbb{N}, \mathbb{Z} — счётны. $[0, 1)$ — несчётно (просто знаем), знаем \mathbb{R} — несчётно. \mathbb{Q} — счётно или нет?

Доказательство. \mathbb{Q}_+ счётно. Давайте представим его в виде $A_1 \cup A_2 \cup \dots$, где $A_i = \{\frac{m}{i} | m \in \mathbb{N}\}$. Т.к. любое из \mathbb{Q}_+ так представляется, то в такое объединение попадёт всё \mathbb{Q}_+ . \square

Лемма. A, B — счётны, тогда $A \times B$ — счётно.

Доказательство. A, B — счётны, тогда $A : \{a_1, a_2, \dots\}$, $B : \{b_1, b_2, \dots\}$ Элементы из $A \times B$ выглядят так: (a_i, b_j) , тогда давайте запишем следующее:

$A_1 = a_1 \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), \dots\}$, A_2 аналогично, и так далее. Тогда каждое A_i — счётно, и их счётное число, значит их объединение, которое и есть $A \times B$ счётно, по доказанной лемме. \square

Двигаемся к несчётным множествам.

Лемма. Пусть A бесконечно, а B — конечно. Тогда $A \cup B$ равномощно A .

Доказательство. B заменим на $B' = B \setminus A$. B' или станет пустым, или останется конечным.

Очевидно, что $A \cup B = A \sqcup B'$

У A есть счётное подмножество $A' = \{a_1, a_2, \dots\}$, тогда $A = (A \setminus A') \cup A'$.

Хотим построить биекцию между $A = A' \cup (A \setminus A')$ и $A' \cup B' \cup (A \setminus A')$

Между частями $(A \setminus A')$ построим тождественную биекцию. А a_i будем отображать в b_i , если $i \leq k$, а в a_{i-k} если $i > k$. Понятно, что это биекция. Все элементы возьмём как из B , так и из a_i . \square

Замечание. Доказательство можно модифицировать для случая, когда B счётно. Тогда давайте на последнем шаге чётные отображать в a_i , а нечётные — в b_i .

Теорема 1.2. Множество X последовательностей (бесконечных) из нулей и единиц не счётно. (Бинарные строки бесконечной длины)

Доказательство. От противного: пусть счётен, тогда есть биекция $f: \mathbb{N} \rightarrow X$. Тогда выпишем последовательности $f(1), f(2), f(3), \dots$. А теперь воспользуемся диагональным (методом Кантора): Посмотрим на элемент a_{11} , возьмём элемент $1 - a_{11}$. Затем на элемент a_{22} , возьмём $1 - a_{22}$. И так далее, строим последовательность $1 - a_{ii}$. Получили бесконечную последовательность нулей и единиц, значит она элемент X . Но при этом она не может быть любой i -ой последовательностью, поскольку её i -ый элемент не совпадает с i -ым элементом строки i по тому, как мы строили нашу последовательность. Противоречие. Значит мы не можем вот так вот выписать наши элементы X , значит биекции f не существует. \square

Следствие. Множество чисел из отрезка $[0, 1]$ несчётно.

Доказательство. Покажем равномощность множеству X из теоремы. Из бесконечной последовательности число получить легко — припишем слева «0,», а все элементы последовательности запишем слитно. Могло показаться, что получили биекцию, но нет. У нас разные последовательности могут соответствовать одному числу — $0,100000000\dots$ и $0,011111111\dots$ — разные последовательности, но являются одним числом. Возьмём две последовательности — $0, a_{11}a_{12}a_{13}\dots$, $0, a_{21}a_{22}a_{23}\dots$. Утверждение — они задают одно число тогда и только тогда, когда они имеют один префиксы, а затем у одного числа идёт единица и после только нули, а у второго ноль и затем только единицы. Идём слева направо и найдём первый момент, когда они отличаются. В одном ноль, во втором единица. Далее всё идёт сколько-то, как мы предсказали, затем, что-то разойдётся и там можно оценить, что числа у нас уже отличаются на что-то, что не сможем покрыть дальнейшим. Спасибо Близнецу за успешно закрытую собой доску... Но там в любом случае очев = D А все числа такого вида это просто \mathbb{Q} (или что-то такого рода) (На самом деле оно даже не \mathbb{Q} , там только дроби вида сумма какого-то конечного числа отрицательных степеней двойки, что есть подмножество \mathbb{Q}). Тогда $X \equiv [0, 1] \sqcup (\mathbb{Q} \cap [0, 1])$. Результат пересечения счётен, а значит объединение равномощно бесконечной левой части, т.е. $X \equiv [0, 1]$ \square

Теперь знаем, что натуральные счётны, чётные счётны, целые счётны, рациональные положительные счётны, просто рациональные счётны. А вот действительные уже несчётны, т.к. содержат $[0, 1]$.

Пример. Множество точек границ треугольника и вписанного круга равномощны, т.к. можно построить биекцию из центра.

ТУТ ПРОПУЩЕНА ЛЕКЦИЯ. ДОСАДНО.

1.2. Об операциях над мощностями

Если хотим сложить множества (мощности), то нам нужна мощность следующего множества

$$A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$$

О корректности — если выбирать разные множества одной мощности, то можно построить биекцию и не париться.

Очевидным образом коммутативны.

Произведение мощностей, ожидаемо, мощность произведения множеств.

С возведением в степень чуть сложнее: пусть $|A| = a, |B| = b$, то $a^b = |A^B|$, где последнее — множество всех функций, действующих из B в A .

Хотим проверить, что $A^{B \sqcup C} = A^B \times A^C$. Имеем $g : B \rightarrow A, h : C \rightarrow A$, и функция $f : B \cup C \rightarrow A$ взаимнооднозначно определяет g и h .

Теперь хотим проверить, что $(ab)^c = a^c \times b^c$. Слева имеем $\{f : C \rightarrow A \times B\}$, а справа $\{f : C \rightarrow A\} \times \{g : C \rightarrow B\}$. Но тогда заметим, что там условно у первых функций есть две координаты, мощно рассмотреть проекции на A и на B и всё будет ок.

Остаётся $(a^b)^c = a^{b \times c}$. По сути $a^{b \times c}$ это $\{f | f : B \times C \rightarrow A\}$. Что плюс-минус есть $f_c(x) = f(x, c)$ — как только мы фиксируем c , у нас c отображается в функцию f_c , которая в свою очередь есть функция $B \rightarrow A$, что и написано слева, ура.

Зачем же нам всё это? Ну допустим хотим узнать, чем разны ω^c (ω — мощность счётного множества, c — континуального). Т.е. это есть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$. Знаем, что $\omega^c \leq c^c = (2^\omega)^c = 2^{\omega \times c} \leq 2^{c \times c} = 2^c$, но, в свою очередь $\omega^c \geq 2^c$, т.е. искомое множество зажато между 2^c и 2^c .

Ну или ещё вариант — $c^\omega = (2^\omega)^\omega = 2^{\omega \times \omega} = 2^\omega = c$, но при этом $c^\omega \geq 2^\omega$, снова зажали.

2. Частично упорядоченные множества

2.1. Про отношение

Пусть есть множество A , и ввели отношение эквивалентности $R \subset A \times A$. Оно должно удовлетворять следующим аксиомам:

1. $a \in A, (a, a) \in R$ — рефлексивность
2. $a, b \in A, (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$ — симметричность
3. $a, b, c \in A, (a, b), (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R$ — транзитивность

Это хорошо, но нам оно не нужно, мы хотим отношение порядка R' , оно должно удовлетворять следующим аксиомам:

1. $a \in A, (a, a) \in R$ — рефлексивность
2. $a, b \in A, (a, b) \in R, (b, a) \in R \rightarrow a = b$ — антисимметричность
3. $a, b, c \in A, (a, b), (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R$ — транзитивность

Обычно для него используют значок, например \leq . Можно рисовать более закорючно, но мне влом.

Теперь про частично упорядоченное множество. Возьмём (X, \leq) , всё, получили ЧУМ. Простейшие примеры — натуральные, рациональные, действительные числа и операция меньше-или-равно. Можно взять тривиальное отношение — в нём находятся только пары вида $(a, a), a \in X$, т.е. $a \leq b : a = b$. Ещё отношение порядка — рассмотрим 2^X , с отношением «являться подмножеством». Аксиомы, очевидно, выполняются.

Рассмотрим функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} f(x) \leq g(x)$. Тут уже явно видно, что бывают несравнимые элементы. Тут, например, это пары функций, у которых на первой половине первая больше второй, а на второй половине — вторая больше первой.

Можно строить по \leq и отношение строгого порядка $<$ — $x < y \Leftrightarrow x \leq y, x \neq y$. Его аксиомы:

1. $a \in A, (a, a) \notin R$ — антирефлексивность
2. $a, b, c \in A, (a, b), (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R$ — транзитивность

А теперь давайте размножать ЧУМы.

Пусть X, Y — ЧУМы. Тогда можно строить:

1. $X \sqcup Y$ — внутри одной доли используется старое отношение, а элементы из разных долей просто несравнимы
2. $X + Y$ — считаем, что любой элемент $X \leq$ любого элемента Y . Пример — возьмём натуральные числа и ещё раз натуральные числа. Тогда $5 < 6 < \dots < 1' < 2'$, например.

3. $X \times Y$. Есть два варианта — покоординатно — $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2$ И $y_1 \leq y_2$.
Второй вариант — лексикографически — $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 < x_2)$ ИЛИ $((x_1 = x_2) \text{ И } (y_1 \leq y_2))$

Определение 2.1. ЧУМ — линейный, если \forall два элемента сравнимы.

Определение 2.2. Максимальный элемент — тот, больше которого нет. Наибольший элемент — который больше либо равен всех остальных.

Рассмотрим все подмножества трёхэлементного множества $\{a, b, c\}$. Можно нарисовать картинку, как они расположены, но я пока не гений картинок. В общем, если x наибольший, то он максимальный. В обратную сторону далеко не всегда верно.

Определение 2.3. X, Y — ЧУМы, $\varphi : X \rightarrow Y$ — изоморфизм, тогда и только тогда, когда φ — биекция, и $a \leq b \Leftrightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b)$

Пусть ещё пример — $k \leq n - k$ делитель n . И тут мы вспомним, что можно сужать порядок — резать его множество. Давайте сузим наш порядок на множество $\{1, 2, 3, 6\}$ — порядок делимости.

А ещё давайте рассмотрим $2^{<a,b>} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Можно показать, что оно изоморфно предыдущему множеству. Пример изоморфных есть, какие примеры не изоморфны?

Изоморфно ли \mathbb{N}, \leq и \mathbb{R}, \leq ? Нет, т.к. биекции точно нет. Изоморфно ли \mathbb{N}, \leq и \mathbb{Z}, \leq ? Нет, т.к. во втором множестве нет наименьшего элемента, а в первом — есть, а наименьший должен переходить в наименьший (выводится довольно понятно, как)

Изоморфно ли \mathbb{Z}, \leq и \mathbb{Q}, \leq ? Нет, т.к. давайте возьмём 0 и 1 из \mathbb{Z} и отображим их куда-либо, получили $\varphi(0), \varphi(1)$. Между ними где-то есть $\frac{\varphi(0)+\varphi(1)}{2}$. Подействуем на него φ^{-1} , получим, что прообраз должен жить в \mathbb{Z} между 0 и 1. Но там никого нет! Значит наше предположение о существовании биекции неверно.

Рассмотрим (\mathbb{Z}, \leq) и $(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}, \leq)$ Рассмотрим 0 и 0' во втором, между ними находится бесконечное число элементов. Но рассмотрев прообразы, это какие-то два целых, между ними вся бесконечность должна будет поместиться, но нет, т.к. между двумя целыми конечное число элементов.

Определение 2.4. x, y — соседние, есть $x \leq y$ и между x и y нет элементов и порядок линейный.

Определение 2.5. Линейный порядок называется плотным, если $\forall x, y, x < y \rightarrow \exists z : x < z < y$

Теорема 2.1. X, Y — ЧУМ, если они конечные ЧУМ с линейными порядками, то они изоморфны тогда и только тогда, когда $|X| = |Y|$.

Доказательство. Будем брать наименьшие элементы и попарно отображать их друг в друга и удалять. Отношение относительно минимальных и прочих сохраняется, а на меньшем можем построить дальше по индукции. А если размеры не равны, то мы умерли ещё на этапе биекции. \square

Замечание. Важна конечность! Для просто равномоощных бесконечных мы уже видели контр-примеры.

Теорема 2.2. X, Y — счётные ЧУУ, имеют плотный и линейный порядок, и в X и Y нет наибольшего и наименьшего элементов, то X изоморфно Y . (такие ЧУМы существуют, например (\mathbb{Q}, \leq))

Доказательство. Выпишем подряд x_i, y_i . Отообразим x_1 в y_1 . А дальше есть x_2 , хотим отобразить куда-то. Отообразим x_2 в такой элемент, который относительно y_1 расположен так же, как x_2 расположен относительно y_1 . Такой найдётся, т.к. нет минимума и максимума. Так же поступим с x_3 , но теперь уже смотрим на отношения x_3 с x_1, x_2 . Это получится, т.к. нет минимума, максимума и ещё мы плотны. \square