Математический анализ

Харитонцев-Беглов Сергей

27 апреля 2022 г.

Содержание

1. Интегральное исчисление функции одной переменной

1.1. Первообразная и неопределенный интеграл

***Определение* 1.1.** $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Функция $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — первообразная функции f, если $F'(x) = f(x) \forall x \in \langle a, b\rangle$

Теорема 1.1. Непрерывная на промежутке функция имеет первообразную.

Доказательство. Позже. □

Замечание. $\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{если } x > 0 \\ 0 & \text{если } x = 0 \\ -1 & \text{если } x < 0 \end{cases}$. Не имеет первообразной.

Доказательство. От противного: пусть нашлась $F\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ и $F'(x) = sign(x)$.

Тогда воспользуемся теоремой Дарбу для F на отрезке $[0; 1]$.

Пусть $k = \frac{1}{2} \in (\operatorname{sign}(0), \operatorname{sign}(1))$. Значит $\exists c \in (0, 1)\colon F'(c) = k = \frac{1}{2}$. Противоречие. □

Теорема 1.2. $f, F\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ и F — первообразная для f. Тогда:

1. $F + C$ — первообразная для f.
2. Если $\Phi\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — первообразная для f, то $\Phi = F + C$.

Доказательство.

1. $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$
2. $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow (\Phi - F)' \equiv 0 \implies \Phi - F$ — константа.

□

***Определение* 1.2.** Неопределённый интеграл — множество всех первообразных.

$\int f(x)\,dx = \{F\colon F$ — первообразная f$\}$. Но мы будем записывать $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

Табличка интегралов.

1. $\int 0\,dx = C$.
2. $\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$, при $p \neq -1$.
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$, при $a > 0, a \neq 1$.
5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.
6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$.

12. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln|\frac{1+x}{1-x}| + C$.

Доказательство. Для 3. Если $x > 0$ $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$. Если $x < 0$ $\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C$, то есть $(\ln(-x))' = (\frac{1}{-x})(-x)' = \frac{-1}{x}$.

Для 11. $(\ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}|)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm1}}(x + \sqrt{x^2 \pm 1})' = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2\pm1}}}{x+\sqrt{x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2pm1}+x}{\sqrt{x^2\pm1}}}{\sqrt{x^2\pm1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2\pm1}}$

Для 13. $(\frac{1}{2}(\ln|1+x| - \ln|1-x|))' = \frac{1}{2}(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}) = \frac{1}{1-x^2}$ □

Замечание. $A + B \coloneqq \{a + b \colon a \in A, b \in B\}$, $cA \coloneqq \{ca \colon a \in A\}$.

$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = \{F + C\} + \{G + \widetilde{C}\} = \{F + G + C\}$.

Теорема 1.3 (Арифметические действия с неопределенными интегралами)**.** Пусть $f, g \colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ имеют первообразные. Тогда:

1. $f + g$ имеет первообразную и $\int(f + g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx$

2. αf имеет первообразную и $\int \alpha f\,dx = \alpha \int f\,dx$

Доказательство. Пусть F и G первообразные для f и g.

1. Тогда $F + G$ — первообразная для $f + g$. Тогда $\int(f + g) = F + G + C = \int f + \int g$.

2. Тогда αF — первообразная для $\alpha f \implies \int \alpha F = \alpha F + C = \alpha(F + \frac{C}{\alpha}) = \alpha \int f$.

□

Следствие Линейность неопрделенного интеграла. $f, g \colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ имеют первообразную $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$. Тогда $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$.

Доказательство. Прямое следствие из теоремы выше. □

Теорема 1.4 (Теорема о замене переменной в непопределенном интеграле)**.** $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, \varphi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$, f имеет первообразную F. φ дифференцируемая. Тогда $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C$.

Доказательство. Надо проверить, что $F(\varphi(t))$ — первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi(t)..$$

□

Следствие. $\int f(\alpha x + \beta)\,dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + C$

Доказательство. $\int \alpha f(\alpha x + \beta dx) = F(\alpha x + \beta) + C$. И делим обе части на α. □

Теорема 1.5 (Форумла интегрирования по частям). $f, g\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, дифференцируемые, $f'g$ имеет первообразную.

Тогда fg' имеет первообразную и $\int fg' = fg - \int f'g$

Доказательство. H — первообразная для $f'g$. Тогда $H' = f'g$.

Надо доказать, что $fg - H$ — первообразная для fg'.

$(fg - H)' = f'g + gh' - H' = f'g + fg' - f'g = fg'$. □

1.2. Определенный интеграл

Пусть $\mathcal{F}$ — совокупность (множество) ограниченных плоских фигур.

***Определение* 1.3.** Площадь: $\sigma\colon \mathcal{F} \to [0; +\infty)$, причём

1. $\sigma([a; b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$
2. (Аддитивность). $\forall E_1, E_2 \in \mathcal{F}\colon E_1 \cap E_2 = \varnothing \Rightarrow \sigma(E_1 \cup E_2) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$

Свойство Монотонность площади. $\forall E, \widetilde{E}\colon E \subset \widetilde{E} \Rightarrow \sigma(E) \leqslant \sigma(\widetilde{E})$.

Доказательство. $\widetilde{E} = E \cup (\widetilde{E} \setminus E) \Rightarrow \sigma(\widetilde{E}) = \sigma(E) + \sigma(\widetilde{E} \setminus E)$. □

***Определение* 1.4.** Псевдоплощадь: $\sigma\colon \mathcal{F} \to [0; +\infty)$, причём

1. $\sigma([a; b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$,
2. $\forall E, \widetilde{E} \in \mathcal{F}\colon E \subset \widetilde{E} \Rightarrow \sigma(E) \leqslant \sigma(\widetilde{E})$,
3. Разобьем E вертикальной или горизонтальной прямой, в том числе теми прямыми, которые правее или левее E. Тогда $E = E_- \cup E_+, E_- \cap E_+ = \varnothing$ и $\sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$.

Свойства. 1. Подмножество вертикального или горизонтального отрезка имеет нулевую площадь.

2. В определении E_- и E_+ неважно куда относить точки из l.

   Доказательство. Пусть $\widetilde{E} = E_- \cup (E \cap l) = (E_- \setminus l) \cup (E \cap l)$.

   Тогда $\sigma(\widetilde{E}) = \sigma(E_- \cup (E \cap l)) = \sigma(E_- \setminus l) + \underbrace{\sigma(E \cap l)}_{=0} \Rightarrow$ вообще не имеет разницы куда относить точки из l. □

Пример.

1. $\sigma_1(E) = \inf\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} |P_k|\colon P_k \text{ — прямоугольник}, \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k \supset E\right\}$.
2. $\sigma_2(E) = \inf\left\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} |P_k|\colon P_k \text{ — прямоугольник}, \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k \supset E\right\}$.

Упражнение.

1. Доказать, что $\forall E \quad \sigma_1(E) \geqslant \sigma_2(E)$.
2. $E = ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \times ([0, 1] \cap \mathbb{Q})$. Доказать, что $\sigma_1(E) = 1, \sigma_2(E) = 0$.

Теорема 1.6.

1. σ_1 — квазиплощадь.
2. Если E' — сдвиг E, то $\sigma_1(E) = \sigma_1(E')$.

Доказательство.

2. E' — сдвиг E на вектор v. Пусть P_k — покрытие $E \iff P'_k$ — покрытие E'. Знаем, что площади прямоугольников не меняются при сдвиге, а значит:

   $\sigma_1(E) = \inf\{\sum\limits_{k=1}^{n} |P_k|\} = \inf\{\sum |P'_k|\} = \sigma_1(E')$.

1. $\Rightarrow$ монотонность. Пусть есть $E \subset \widetilde{E}$. Тогда возьмем покрытие P_k для $\widetilde{E}$. $E \subset \widetilde{E} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$.

   А теперь заметим, что σ_1 — inf, и любое покрытие для $\widetilde{E}$ является покрытием и для E, т.е. все суммы из $\sigma_1(\widetilde{E})$ есть в $\sigma_1(E)$, а значит $\sigma_1(E) \leqslant \sigma_1(\widetilde{E})$ как инфинум по более широкому множеству.

1'. Докажем теперь аддитивность.

«$\leqslant$»: $\sigma_1(E) = \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$. Пусть P_k — покрытие E_-, Q_j — покрытие E_+.

Тогда $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k \cup \bigcup\limits_{j=1}^{n} Q_j \supset E_- \cup E_+ = E$.

А значит $\sigma_1(E) \leqslant \inf\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} |P_k| + \sum\limits_{j=1}^{n} |Q_j|\right\} = \inf\{\sum |P_k|\} + \inf\{\sum |Q_j|\} = \sigma_1(E_-) + \sigma(E_+)$.

Заметим, Что переход с разделением инфинумов возможен, так как P и Q выбираются независимо.

«$\geqslant$»: Пусть P_k — покрытие E. Тогда можно пересечь прямой (покрытие и само E) и разбить P_k на P_k^- и P_k^+, а тогда: $|P_k| = |P_k^-| + |P_k^+|$, $\sum |P_k| = \sum |P_k^-| + \sum |P_k^+|$.

$\sum |P_k^-| \geqslant \sigma_1(E_-), \sum |P_k^+| \geqslant \sigma_1(E^+) \Rightarrow \sum |P_k| \geqslant \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$ для любого покрытия P_k, а значит и $\sigma_1(E) \geqslant \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$

Таким образом $\sigma_1(E) = \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$

1". Проверим, что сама площадь прямоугольника не сломалась: $\sigma_1([a,b] \times [c,d]) = (b-a)(d-c)$. Заметим, что $\sigma_1(P) \leqslant |P|$, т.к. прямоугольник можно покрыть им самим.

Чтобы доказать $\sigma_1(P) \geqslant |P|$, посмотрим на P_k. Проведем прямые содержащие все стороны прямоугольников из покрытия (и P). Заметим, что такими прямыми каждый прямоугольник разбивается на подпрямоугольники, сумма площадей которых равна площади исходного прямоугольника. Тогда заметим, что и площадь P это сумма «кусочков из нарезки» P, и некоторые части разбиения встречаются в P_k несколько раз. А значит выкинув все лишнее мы как раз получим $|P|$, а значит $\sigma_1(P) \geqslant |P|$.

Формально: Если $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k \supset P$, то $\sum\limits_{k=1}^{n} |P_k| \geqslant P \Rightarrow \inf\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} |P_k|\right\} \geqslant |P|$.

Таким образом $\sigma_1(P) = |P|$.

□

***Определение* 1.5.** Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Тогда $f_+, f_- : [a,b] \to [0; +\inf)$. Причем $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f_- = \max\{-f(x), 0\}$. f_+ — положительная составляющая, а f_- — отрицательная составляющая.

Свойства. 1. $f = f_+ - f_-$.

2. $|f| = f_+ + f_-$

3. $f_+ = \frac{f+|f|}{2}$, $f_- = \frac{|f|-f}{2}$. (Сложили и вычли первые два свойства)

4. Если $f \in C([a,b])$, то $f_\pm \in C([a,b])$. (Видно из 3-го пункта)

***Определение* 1.6.** Пусть $f\colon [a,b] \to [0;+\infty)$.

Тогда подграфик $P_f([a;b]) \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b], 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$. Подграфик может быть взят и от какого-то подотрезка области определения функции!

***Определение* 1.7.** Пусть $f \in C([a,b])$. Зафиксируем произвольную квазиплощадь σ. Тогда Определённый интеграл: $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f(x)dx = \sigma(P_{f_+}([a;b])) - \sigma(P_{f_-}([a;b]))$.

Определение корректно, поскольку, раз функция непрерывна, то и составляющие непрерывны на отрезке, значит ограничены, значит под σ ограниченные множества, на которых σ определена. А позже проверим, что результат не зависит и от выбора σ.

Свойства. 1. $\int\limits_a^a f = 0$. (Площадь отрезка = 0)

2. $\int\limits_a^b c = c(b-a), c \geqslant 0$ (для отрицательных будет следовать из пунктов ниже)

   Доказательство. По графику очевидно :) □

3. $f \geqslant 0 \Rightarrow \int\limits_a^b = \sigma(P_f)$.

4. $\int\limits_a^b (-f) = -\int\limits_a^b f$.

   Доказательство. $(-f)_+ = \max\{-f, 0\} = f_-$. $(-f)_- = \max\{f, 0\} = f+$, откуда $\int_a^b (-f) = \sigma(P_{(-f)_+}) - \sigma(P_{(-f)_-}) = \sigma(P_{f_-}) - \sigma(P_{f_+}) = -\int_a^b f$ □

5. $f \geqslant 0 \wedge \int\limits_a^b f = 0 \wedge a < b \Rightarrow f = 0$.

   Доказательство. От противного. Пусть $\exists c \in [a,b]\colon f(c) > 0$. Тогда, возьмем $\varepsilon \coloneqq \frac{f(c)}{2}, \delta$ из определения непрерывности в точке c. Если $x \in (c-\delta, c+\delta)$, то $f(x) \in (f(c)-\varepsilon, f(c)+\varepsilon) = (\frac{f(c)}{2}; \frac{3f(c)}{2}) \Rightarrow f(x) \geqslant \frac{f(c)}{2}$ при $x \in (c-\delta; c+\delta) \Rightarrow P_f \supset [c-\frac{\delta}{2}; c+\frac{\delta}{2}] \times [0; \frac{f(c)}{2}] \Rightarrow \int\limits_a^b f = \sigma(P_f) \geqslant \delta \cdot \frac{f(c)}{2} > 0$, противоречие. □

1.3. Свойства интеграла

Теорема 1.7 (Аддитивность интеграла)**.** Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $c \in [a,b]$.

Тогда $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$.

Доказательство. $\int\limits_a^b f = \sigma(P_{f_+}([a,b])) - \sigma(P_{f_-}([a,b]))$. Разделим наш $[a,b]$ и соответствующие множества вертикальной прямой $x = c$. Тогда $\sigma(P_{f_+}[a,b]) - \sigma(P_{f_-}[a,b]) = \sigma_{P_{f_+}[a,c]} + \sigma_{P_{f_+}[c,b]} - \sigma(P_{f_-}[a,c]) - \sigma(P_{f_-}[c,b]) = \int_a^c f + \int_c^b f$ □

Теорема 1.8 (Монотонность интеграла)**.** Пусть $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ и $\forall x \in [a,b]\colon f(x) \leqslant g(x)$.

Тогда $\int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b g$.

Доказательство. $f_+ = \max\{f, 0\} \leqslant \max\{g, 0\} = g_+ \Rightarrow P_{f_+} \subset P_{g_+} \Rightarrow \sigma(P_{f_+}) \leqslant \sigma(P_{g_+})$.

$f_- = \max\{-f, 0\} \geqslant \max\{-g, 0\} = g_- \Rightarrow P_{f_-} \supset P_{g_-} \Rightarrow \sigma(P_{f_-}) \geqslant \sigma(P_{g_-})$.

$\int\limits_a^b f = \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-}) \leqslant \sigma(P_{g_+}) - \sigma(P_{g_-}) = \int\limits_a^b g$. □

Следствие. 1. $|\int\limits_a^b f| \leqslant \int\limits_a^b |f|$.

2. $(b-a)\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) \leqslant \int\limits_a^b f \leqslant (b-a)\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Доказательство. 1. $-|f| \leqslant f \leqslant |f| \Rightarrow$ (Применим теорему к двум неравенствам)

$\int\limits_a^b -|f| \leqslant \int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b |f| \Rightarrow |\int\limits_a^b f| \leqslant \int\limits_a^b |f|$.

2. $m \coloneqq \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M \coloneqq \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. $m \leqslant f(x) \leqslant M \Rightarrow \int\limits_a^b m \leqslant \int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b M \Rightarrow$

$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f \leqslant M(b-a)$.

□

Теорема 1.9 (Интегральная теорема о среднем)**.** Пусть $f \in C([a,b])$.

Тогда $\exists c \in (a,b)\colon \int\limits_a^b f = (b-a)f(c)$.

Доказательство. $m \coloneqq \min f = f(p), M \coloneqq \max f = f(q)$ (по теореме Вейерштрасса). Тогда $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f = f(c) \Rightarrow f(p) \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f \leqslant f(q) \xRightarrow{\text{т. Б-К}} \exists c \in (p,q)$или $(q,p)\colon f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$. □

***Определение* 1.8.** $I_f \coloneqq \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$ — среднее значение f на отрезке $[a,b]$.

***Определение* 1.9.** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Интеграл с переменным верхним пределом $\Phi(x) \coloneqq \int\limits_a^x f$, где $x \in [a,b]$.

***Определение* 1.10.** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Интеграл с переменным нижним пределом $\Psi(x) \coloneqq \int\limits_x^b f$, где $x \in [a,b]$.

Замечание. $\Phi(x) + \Psi(x) = \int\limits_a^b f$.

Теорема 1.10 (Теорема Барроу)**.** Пусть $f \in C([a,b])$. Тогда $\Phi'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$. То есть Φ — первообразная функции f.

Доказательство. Надо доказать, что $\lim\limits_{y \to x} \frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = f(x)$. Проверим для предела справа (слева аналогично, но, возможно, с чуть другим порядком точек).

Тогда $\Phi(y) - \Phi(x) = \int\limits_a^y f - \int\limits_a^x f = \int\limits_x^y f$.

Тогда $\frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \frac{1}{y-x} \int\limits_x^y f = f(c)$ для некоторого $c \in (x,y)$ по интегральной теореме о среднем.

Проверяем определение по Гейне. Берем $y_n > x$ и $y_n \to x$. Тогда $\frac{\Phi(y_n)-\Phi(x)}{y_n-x} = f(c_n)$, где $c_n \in (x, y_n)$, $x < c_n < y_n \to x \Rightarrow c_n \to x \Rightarrow$ в силу непрерывности f $f(c_n) \to f(x)$. □

Следствие. $\Psi'(x) = -f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

Доказательство. $\Psi(x) = \int\limits_a^b f - \Phi(x) = C - \Phi(x) \Rightarrow \Psi' = (C - \Phi(x))' = -\Phi'(x) = -f(x)$. □

Теорема 1.11. Непрерывная на промежутке функция имеет первообразную.

Доказательство. $f\colon \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$.

Возьмём $c \in (a,b)$ Рассмотрим $F(x) := \begin{cases} \int\limits_c^x f & \text{при } x \geqslant c \\ -\int\limits_x^c f & \text{при } x \leqslant c \end{cases}$.

Утверждаем, что $F(x)$ — первообразная $f(x)$. Если $x > c$, то $F'(x) = f(x)$. Если $x < c$, то $F'(x) = -(-f(x)) = f(x)$ Если $x = c$, то, так как производные слева и справа считаются правильно и равны, то и в этой точке производная есть $f(x)$. □

Теорема 1.12 (Формула Ньютона-Лейбница)**.** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ и F – её первообразная. Тогда $\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$.

Доказательство. $\Phi(x) = \int\limits_a^x f$ — первообразная и $F(x) = \Phi(x) + C$ (знаем, что две первообразные отличаются на константу)

Тогда $F(b) - F(a) = (\Phi(b) + C) - (\Phi(a) + C) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int\limits_a^b f$ □

И ровно в этот момент мы поняли, что от выбора псевдоплощади не зависим, поскольку первообразные от них не зависят (отсылка к первому билету/началу конспекта про псевдоплощади)

***Определение* 1.11.** $F \big|_a^b := F(b) - F(a)$

Теорема 1.13 (Линейность интеграла)**.** $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$.

Доказательство. Пусть F, G — первообразные для f, g.

Тогда $\alpha F+\beta G$ — первообразная для $\alpha f+\beta g$. Тогда воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b \alpha f+\beta g=(\alpha F+\beta G)|_a^b=\alpha F(b)+\beta G(b)-\alpha F(a)-\beta G(a)=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g.$$

□

Теорема 1.14 (Формула интегрирования по частям)**.** Пусть $f,g\in C^1[a,b]$.

Тогда $\int\limits_a^b fg'=fg\mid_a^b-\int\limits_a^b f'g$.

Доказательство. Докажем при помощи формулы Ньютона-Лейбница. Пусть H — первообразная $f'g$. Тогда $fg-H$ — первообразная для fg'.

Проверим данный факт: $(fg-H)'=f'g+fg'-f'g=fg'$. А значит нам можно воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница.

$\int\limits_a^b fg'=(fg-H)\mid_a^b=fg\mid_a^b-H\mid_a^b=fg\mid_a^b-\int_a^b f'g$. □

Замечание Соглашение. Если $a>b$, то $\int\limits_a^b f:=-\int\limits_b^a f$.

Мотивация: Если F — первообразная, то $\int\limits_a^b f=F\mid_a^b$.

Теорема 1.15 (Формула замены переменной)**.** Пусть $f\in C[a,b]$, $\varphi\colon[c,d]\to[a,b]$, $\varphi\in C^1[c,d]$, $p,q\in[c,d]$.

Тогда $\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)\mathrm{d}x$.

Доказательство. Пусть F — первообразная f. Тогда $\int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)\mathrm{d}x=F\mid_{\varphi(p)}^{\varphi(q)}=F\circ\varphi\mid_p^q$. Заметим, что $F\circ\varphi$ — первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Проверим это: $(F(\varphi(t)))'=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Тогда: $\int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)\mathrm{d}x=F\circ\varphi|_{\varphi(p)}^{\varphi(q)}=\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ □

Пример.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2t}{1+\sin^4 t}\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Произведем замену $\varphi(t)=\sin^2 t$, $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $\varphi'(t)=2\sin t\cos t=\sin 2t$, $\varphi(0)=0,\varphi(\frac{\pi}{2})=1$:

$$(1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varphi'(t)}{1+(\varphi(t))^2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=\int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\mid_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

1.4. Приложения формулы интегрирования по частям

Пример. $W_n \coloneqq \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \mathrm{d}t = (1)$ Докажем этот момент:

Положим $x = \frac{\pi}{2} - t =: \varphi(t)$, $\varphi'(t) = -1$, $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$.

Тогда $(1) = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \varphi(t) \cdot \varphi'(t) \mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n x \mathrm{d}x$

Частные случаи $W_0 = \frac{\pi}{2}$, $W_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x = -\cos |_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

Общее решение: $W_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \cdot (\cos x)' \mathrm{d}x = (*)$. Воспользовались тем, что $\sin x = -(\cos x)'$, $f'(x) = (n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x$.

Тогда получаем:

$$(*) = -\left(\underbrace{\sin^{n-1} x \cdot \cos x \,|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \underbrace{\cos^2 x}_{=1-\sin^2 x} \mathrm{d}x \right) =$$

$$= (n-1) \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \mathrm{d}x - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x \right) = (n-1)(W_{n-2} - W_n).$$

Посчитаем для четных: $W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot W_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} W_{2n-4} = \ldots = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}$, где $k!!$ — произведение натуральных чисел $\leqslant k$ той же четности, что и k .

Для нечетных: $W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} W_{2n-3} = \ldots = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} W_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$

Теорема 1.16 (Формула Валлиса)**.**

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Доказательство. $\sin^n x \geqslant \sin^{n+1} x$ на $[0, \frac{\pi}{2}]$. Тогда $W_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x \geqslant \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \mathrm{d}x = W_{n+1}$.

Заметим, что $W_{2n+2} \leqslant W_{2n+1} \leqslant W_{2n} \iff \frac{\pi}{2} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \leqslant \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$. Поделим на $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$:

$$\frac{\pi}{2} \frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)((2n-1)!!)^2} \leqslant \frac{\pi}{2} \implies \lim \left(\frac{(2n)!!}{\sqrt{(2n+1)}(2n-1)!!} \right)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Последний переход — по двум милиционерам, т.к. при $n \to +\infty$ $\frac{2n+1}{2n+2} \to 1$ $\square$

Следствие.

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Доказательство. Заметим, что $(2n)! = (2n)!! \cdot (2n-1)!!$, а $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) = 2^n \cdot n!$. Тогда подставим в Cшку:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{\frac{(2n)!!}{2^n} \frac{(2n)!!}{2^n}} = 4^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

При этом из Валлиса, заметим, что $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2n} = \sqrt{\pi n}$. А значит все сойдется. □

Теорема 1.17 (Формула Тейлора (с остатком в интегральной форме))**.** Пусть $f \in C^{n+1}[a,b]$, $x, x_0 \in [a,b]$. Тогда:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Доказательство. Индукция по n:

- База. $n = 0$, $f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t = f(x_0) + f\mid_{x_0}^{x}$
- Переход. $n \to n+1$.
- Доказательство. $f(x) = T_n(x) + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^n}_{g'}\underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{f}\mathrm{d}t$. Проинтегрируем интеграл по частям. $g(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}$.

  Подставим: $\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \cdot f^{(n+1)}(t)\mid_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^{x}\frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t =$ $\underbrace{\frac{1}{n+1}(x-x_0)^{n+1}f^{(n+1)}(x_0)}_{\text{новый член Тейлора!}} + \int_{x_0}^{x}\frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t$

  Вспомнив, что у нас там ещё был $\frac{1}{n!}$ перед исходным интегралом заметим, что мы действительно получили новый член суммы и новый интеграл с $\frac{1}{(n+1)!}$, что доказывает индукционный переход.

□

Пример.

$$H_j := \frac{1}{j!}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j \cos x\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Свойство 1. $0 < H_j \leqslant \frac{1}{j!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j}}{j!}$.

Свойство 2. $\forall c > 0\colon c^j \cdot H_j \xrightarrow{j\to\infty} 0$. $0 < c^jH_j \leqslant \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j}\cdot c^j}{j!} = \frac{\left(\frac{\pi^2}{4}c\right)^j}{j!} \to 0$.
Свойство 3. $H_0 = 1$, $H_1 = 2$ (*упражнение*).
Свойство 4. $H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$, при $j \geqslant 2$.

Доказательство.

$$j!H_j = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j(\sin x)'\mathrm{d}x \tag{3}$$

Заметим, что $\left(\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j\right)' = j\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1} \cdot (-2x)$. Тогда:

$$(3) = \underbrace{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j \sin x \,\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}}_{=0} + 2j\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1} x \underbrace{\sin x}_{=(-\cos x)'} \mathrm{d}x =$$

$$= 2j\left(\underbrace{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1} \cdot x \cdot (-\cos x)\,\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^{\frac{n}{2}} \left((j-1)\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-2}(-2x)x + \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1}\right)(-\cos x)\mathrm{d}x\right)$$

$$= 2j\left((j-1)!H_{j-1} - 2(j-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-2} x^2 \cos x dx\right).$$

В процессе мы дважды интегрировали по частям, а теперь нужно избавиться во втором слагаемом от x^2. Для этого заметим, что $x^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)$, подставим и разобьём интеграл на два, которые есть H_{j-2} и H_{j-1} с нужными коэффициентами:

$$j!H_j = 2j(j-1)!H_{j-1} - 4j(j-1)\left(((j-2)!\left(\frac{\pi}{2}\right)^2)H_{j-2} - (j-1)!H_{j-1}\right)$$

Откуда с легкостью получаем $j!H_j = 2j!H_{j-1} - \pi^2 j!H_{j-2} + 4(j-1)j!H_{j-1} \iff H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$.

Свойство 5. Существует многочлен P_n с целыми коэффициентами степени $\leqslant n$, такой что $H_j = P_j(\pi^2)$.

Доказательство. $P_0 \equiv 1, P_1 \equiv 2, P_n(x) = (4n-2)P_{n-1}(x) - xP_{n-2}(x)$. □

□

Теорема 1.18 (Ламберта, доказательство: Эрмит)**.** Числа π и π^2 иррациональные.

Доказательство. От противного. Пусть π^2 — рационально. Тогда пусть $\pi^2 = \frac{m}{n}$. Тогда $H_j = P_j(\frac{m}{n}) = \frac{\text{целое число}}{n^j} > 0$.
$n^j H_j =$ целое число $> 0 \Rightarrow n^j H_j \geqslant 1$

Но, по свойству 2, при $j \to +\infty$ $n^j H_j \to 0$, противоречие. □

Отступление. Равномерная непрерывность

***Определение* 1.12.** $f\colon E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на E, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E\colon$ $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

***Определение* 1.13.** f непрерывна во всех точках из E:
$\forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in E\colon |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Концептуальное отличие в том, что в первом случае у нас $\delta(\varepsilon)$, а во втором — $\delta(x, \varepsilon)$, т.е. при равномерной непрерывности у нас есть общая дельта по эспилону на всю область, а при непрерывности во всех точках для каждой точки своё δ по ε

Пример. $\sin x$ и $\cos x$ равномерно непрерывны на $\mathbb{R}$.

$|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y| \Rightarrow \delta = \varepsilon$ подходит. $|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|$.

Пример. $f(x) = x^2$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$. Рассмотрим $\varepsilon = 1$, никакое $\delta > 0$ не подходит. x и $x + \frac{\delta}{2}$. $f(x + \frac{\delta}{2}) - f(x) = (x + \frac{\delta}{2})^2 - x^2 = \ldots = \delta x + \frac{\delta^2}{4} > \delta x$. При $x = \frac{1}{\delta}$ противоречие.

Теорема 1.19 (Теорема Кантора)**.** Пусть $f \in C[a, b]$, тогда f равномерно непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. Берем $\varepsilon > 0$ и предположим, что $\delta = \frac{1}{n}$ не подходит, то есть $\exists x_n, y_n \in [a, b]\colon$ $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. По теореме Больцано-Вейерштрасса у последовательности x_n есть сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k} \to c$, то есть $\lim x_{n_k} = c \in [a, b]$.

$\underbrace{x_{n_k} - \dfrac{1}{n_k}}_{\to c} < y_{n_k} < \underbrace{x_{n_k} + \dfrac{1}{n_k}}_{\to c} \implies \lim y_{n_k} = c$. Но f непрерывна в точке $c \implies \lim f(x_{n_k}) = f(c) = \lim f(y_{n_k}) \implies \lim(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = 0$, но $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geqslant \varepsilon$. $\square$

Замечание. Для интервала или полуинтервала неверно. $f(x) = \frac{1}{x}$ на $(0; 1]$. Докажем, что нет равномерной непрерывности на $(0; 1]$.

Пусть $\varepsilon = 1$ и $\delta > 0$. Пусть $0 < x < \delta$, $y = \frac{x}{2}$, $|x - y| = \frac{x}{2} < \delta$. Тогда $f(y) - f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} > 1$.

***Определение* 1.14.** Пусть $f\colon E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Тогда $\omega_f(\delta) \coloneqq \sup\{|f(x) - f(y)| \mid \forall x, y \in E, |x - y| \leqslant \delta\}$ — модуль непрерывности f.

Свойства.

1. $\omega_f(0) = 0$,
2. $|f(x) - f(y)| \leqslant \omega_f(|x - y|)$.
3. $\omega_f \uparrow$.
4. Если f — липшицева функция с константой L, то $\omega_f(\delta) \leqslant L\delta$.

   В частности, если $|f'(x)| \leqslant L \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$.
5. f равномерна и непрерывна на $E \iff \omega_f$ непрерывна в нуле $\iff \lim\limits_{\delta \to 0+} \omega_f(\delta) = 0$.

   Доказательство.
   - $1 \to 2$. $\forall \varepsilon > 0 \exists \gamma > 0 \forall x, y \in E\colon |x - y| < \gamma \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Возьмем $\delta < \gamma$. Тогда $|x - y| \leqslant \delta \implies |x - y| < \gamma \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \implies \sup \leqslant \varepsilon$. Тогда с одной стороны $\omega_f \geqslant 0$, а с другой ограничена ε. Следовательно предел ω_f равен 0.

- $2 \to 1$. Из $\lim\limits_{\delta \to 0+} \omega_f(\delta) = 0$. Возьмем $\delta > 0$ для $\omega_f(\delta) < \varepsilon$: $|f(x) - f(y)| \leqslant \omega_f(\delta) < \varepsilon$ $\forall \varepsilon$, $\forall x, y \in E\colon |x - y| \leqslant \delta$.

$\square$

6. $f \in C[a, b] \iff \omega_f$ непрерывен в нуле $\iff \lim\limits_{\delta \to 0+} \omega_f(\delta) = 0$.

Доказательство. Для функции на отрезке равномерная непрерывность $\iff$ непрерывность $\iff$ теорема Кантора. $\square$

Продолжение главы 1

1.5. Интегральные суммы

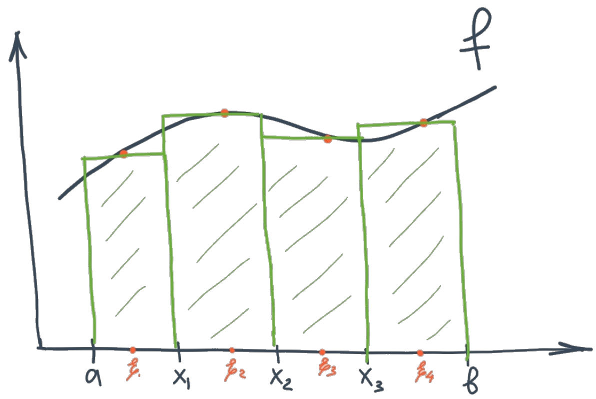
***Определение* 1.15.** Пусть есть $[a,b]$. Тогда дробление (разбиение, пунктир) отрезка: набор точек: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

***Определение* 1.16.** Ранг дробления: $\max\limits_{k=1,2,\ldots,n}(x_k - x_{k-1}) =: |\tau|$, $\tau = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$

***Определение* 1.17.** Оснащение дробления — набор точек $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, такой что $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

***Определение* 1.18.** Интегральная сумма (сумма Римана) $S(f,\tau,\xi) :== \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$,

По факту просто сумма площадей прямоугольников под графиком



Теорема 1.20 (Теорема об интегральных суммах)**.** Пусть $f \in C[a,b]$,

тогда $|\int\limits_a^b - S(f,\tau,\xi)| \leqslant (b-a)\omega_f(|\tau|)$.

Доказательство.

$$\Delta := \int\limits_a^b f - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(\xi_k))\mathrm{d}t.$$

$$|\Delta| \leqslant \sum |\int \ldots| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(\xi_k)|\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\omega_f(|\tau|) = (b-a)\omega_f(|\tau|).$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(\xi_k)|\mathrm{d}t \leqslant \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_f(|\tau|)\mathrm{d}t = (x_k - x_{k-1})\omega_f(|\tau|)..$$

$\square$

Следствие. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall$ дробления ранга $\leqslant \delta$ $\forall$ оснащения $|\int\limits_a^b - S(f,\tau,\xi)| < \varepsilon$

Следствие. Если τ_n — последовательность дроблений, ранг которых $\to 0$, то $S(f,\tau_n,\xi_n) \to \int\limits_a^b f$.

Пример. $S_p(n) \coloneqq 1^p + 2^p + \ldots + n^p$. Посчитаем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_p(n)}{n^{p+1}}$.

Возьмем $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(t) = t^p$ $\frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p = S(f,\tau,\xi)$, где $x_k = \xi_k = \frac{k}{n}$.

Тогда $\lim \frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \int\limits_0^1 t^p \mathrm{d}t = \frac{t^{p+1}}{p+1} \mid_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{p+1}$

***Определение* 1.19.** Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, тогда f интегрируема по Риману, если $\exists I \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall$ дробления ранга $< \delta \forall$ его оснащения $|S(f,\tau,\xi) - I| < \varepsilon$.

I — интеграл по Риману $\int\limits_a^b f$.

Лемма. $f \in C^2[\alpha,\beta]$. Тогда

$$\int\limits_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha) = -\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)\mathrm{d}t.$$

Доказательство. Пусть $\gamma \coloneqq \frac{\alpha+\beta}{2}$. Тогда:

$$\int\limits_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_\alpha^\beta f(t)(t-\gamma)'\mathrm{d}t = f(t)(t-\gamma)\mid_{t=\alpha}^{t=\beta} - \int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)\mathrm{d}t.$$

Заметим, что $f(t)(t-\gamma)\mid_{t=\alpha}^{t=\beta} = f(\beta)(\beta-\gamma) - f(\alpha)(\alpha-\gamma) = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha)$. Продолжим:

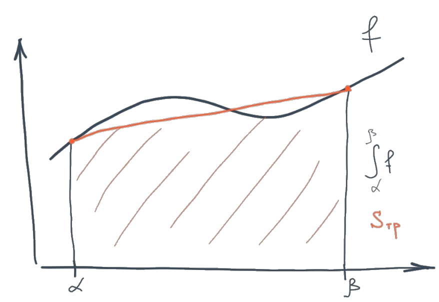
$$\text{левая часть} = -\int_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f'(t)((t-\alpha)(\beta-t))'\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{2} f'(t)(t-\alpha)(\beta-t)\mid_{t=\alpha}^{t=\beta} - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)\mathrm{d}t.$$

Переход к $((t-\alpha)(\beta-t))'$:

$$((t-\alpha)(\beta-t))' = (-t^2 + (\alpha+\beta)t - \alpha\beta)' = -2t + (\alpha+\beta) = -2(t-\gamma).$$

$\square$

Замечание. $\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha)$ — площадь трапеции:



Теорема 1.21 (Оценка погрешности в формуле трапеции)**.** Пусть $f \in C^2[a,b]$.

Тогда :

$$\left|\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})\right| \leqslant \frac{|\tau|^2}{8}\int\limits_a^b |f''|$$

Доказательство. $\Delta \coloneqq \int\limits_a^b - \sum \ldots = \sum\limits_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\mathrm{d}t - \sum\limits_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})$

$$|\Delta| \leqslant \sum_{k=1}^n |\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\mathrm{d}t - \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})| = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t)(t-x_{k-1})(x_k - t)\mathrm{d}t\right|. \quad (4)$$

Тогда вспомним, что $(t-x_{k-1})(x_k-t) \leqslant \left(\frac{x_k-x_{k-1}}{2}\right)^2 \leqslant \frac{|\tau|^2}{4} \implies (4) \leqslant \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)| \cdot \frac{|\tau|^2}{4}\mathrm{d}t =$ $\frac{|\tau|^2}{8}\sum \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f''| = \frac{|\tau|^2}{8} \cdot \int\limits_a^b |f''|$ □

Замечание. Пусть разбиение на n равных отрезков $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} = |\tau|$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2} = \frac{b-a}{n}(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(x_n)}{2}).$$

Замечание. Возьмем разбиение на равные отрезки и $\xi_k = x_k$:

$$S(f,\tau,\xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k).$$

Теорема 1.22 (формула Эйлера-Маклорена)**.** Пусть $f \in C^2[m,n]$, тогда

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int_m^n f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_m^n f''(t)\{t\}(1-\{t\})\mathrm{d}t.$$

Доказательство. Подставим $\alpha = k$ и $\beta = k+1$ в лемму:

$$\int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t = \frac{f(k)+f(k+1)}{2} - \frac{1}{2}\int_k^{k+1} f''(t)(t-k)(k+1-t)\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{f(k)+f(k+1)}{2} - \frac{1}{2}\int_k^{k+1} f''(t)\{t\}(1-\{t\})\mathrm{d}t.$$

Дальше суммируем по k от m до $n-1$:

$$\int_m^n f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=m}^{n-1} \frac{f(k)+f(k+1)}{2} - \frac{1}{2}\int_m^n f''(t)\{t\}(1-\{t\})\mathrm{d}t.$$

Заметим, что $\sum\limits_{k=m}^{n-1} \frac{f(k)+f(k+1)}{2} = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \sum_{k=m+1}^{n-1} f(k)$. И тогда:

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int_m^n f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_m^n f''(t)\{t\}(1-\{t\})\mathrm{d}t.$$

□

Пример. $S_p(n) = 1^p + 2^p + \ldots + n^p$, $f(t) = t^p$, $m = 1$, $f''(t) = p(p-1)t^{p-2}$.

$S_p(n) = \frac{1+n^p}{2} + \int\limits_1^n t^p \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int\limits_1^n p(p-1)t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})\mathrm{d}t$.

При $p \in (-1, 1)$ $\int_1^n t^p \mathrm{d}t = \frac{t^{p+1}}{p+1} \mid_1^n = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \mathcal{O}(1)$.

$$\int_1^n t^{p-2} \underbrace{\{t\}(1-\{t\})}_{\leqslant \frac{1}{4}} \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{4}\int_1^n t^{p-2}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\cdot\frac{t^{p-1}}{p-1} \mid_1^n = \frac{1}{4}\cdot\frac{n^{p-1}-1}{p-1} = \mathcal{O}(1).$$

То есть $S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \mathcal{O}(1)$.

При $p > 1$ $S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \mathcal{O}(n^{p-1})$.

Пример. Гармонические числа: $H_n \coloneqq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. $m = 1, f(t) = \frac{1}{t}, f''(t) = \frac{2}{t^3}$.

$$H_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{1}{2}\int_1^n \frac{2}{t^3}\{t\}(1-\{t\})\mathrm{d}t$$

Откуда получаем ($a_n \coloneqq \int\limits_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^3}$; $\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln t \mid_1^n = \ln n$):

$$H_n = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a_n.$$

Заметим, что $a_{n+1} = a_n + \int\limits_n^{n+1} \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^3}\mathrm{d}t > a_n$. То есть $a_n \uparrow$. Причем $a_n \leqslant \int\limits_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = -\frac{1}{2t^2} \mid_1^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} < \frac{1}{2}$.
А значит a_n имеет предел, а значит $a_n = a + o(1)$.
Вывод: $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$, где $\gamma \approx 0.5772156649$ — постоянная Эйлера.

Замечание. $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$ — точная формула.

Пример Формула Стирлинга. $m = 1, f(t) = \ln t, f''(t) = -\frac{1}{t^2}$.

$$\ln n! = \sum_{k=1}^n \ln k = \underbrace{\frac{\ln 1 + \ln n}{2}}_{=\frac{1}{2}\ln n} + \underbrace{\int_1^n \ln t\mathrm{d}t}_{=t\ln t - t|_1^n = n\ln n - n + 1} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}\mathrm{d}t}_{:=b_n} \Rightarrow \ln n! = \frac{1}{2}\ln n + n\ln n - n + 1 - b_n.$$

Посмотрим на b_n:

$$b_n \leqslant \frac{1}{2}\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{2}(-\frac{1}{t}) \mid_1^n = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{n}) < \frac{1}{2} \implies b_n = \underbrace{b}_{=\lim b_n} + o(1).$$

А значит $\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + (1-b) + o(1)$.
Можем найти b, для этого представим обе части как экспоненты: $n! = n^n e^{-n}\sqrt{n}e^{1-b}e^{o(1)} \sim n^n e^{-n}\sqrt{n}C$.

Вспомним (из следствия формулы Валлиса): $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$. А еще знаем, что $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}C}{(n^n e^{-n}\sqrt{n}C)^2} = \frac{4^n\sqrt{2}}{\sqrt{n}C}$.

Тогда получаем, что $\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{4^n\sqrt{2}}{\sqrt{n}C} \implies C \sim \frac{4^n\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} = \sqrt{2\pi}$.

Итоговый результат (Формула Стирлинга):

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + o(1).$$

Замечание. Если посчитать точнее, то получим $\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + \mathcal{O}(\frac{1}{n})$.

1.6. Несобственные интегралы

***Определение* 1.20.** Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ и $f \in C[a, b)$.

Тогда определим $\int\limits_a^{\to b} f := \lim\limits_{B \to b-} \int\limits_a^B f$ (если он существует).

Если $-\infty \leqslant a < b < +\infty, f \in C(a, b]$, то $\int\limits_{\to a}^{b} f := \lim\limits_{A \to a+} \int\limits_A^b f$ (опять же, если он существует).

Замечание. Если $b < +\infty$ и $f \in C[a, b]$, то определение не дает ничего нового:

$$\int_a^b f = \lim_{B \to b-} \int\limits_a^B f$$

$$\left| \int_a^b f - \int_a^B f \right| = \left| \int_B^b f \right| \leqslant M(b - B) \to 0, M = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

Пример. 1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim\limits_{y \to +\infty} \int\limits_a^y \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim\limits_{\substack{y \to +\infty \\ \text{при } p \neq 1}} -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} \Big|_{x=1}^{x=y} = \frac{1}{p-1} - \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{1}{(p-1)y^{p-1}} = \frac{1}{p-1}$ при $p > 1$, при $p < 1$ получаем $+\infty$, а при $p = 1$ $\lim\limits_{y \to +\infty} \ln x \,\Big|_1^y = \lim\limits_{y \to +\infty} \ln y = +\infty$

То есть, при $p \leqslant 1$ $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = +\infty$,

при $p > 1$ $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{1}{1-p}$.

2. $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim\limits_{y \to 0+} \int\limits_y^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim\limits_{y \to 0+} -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} \Big|_{x=y}^{x=1} = -\frac{1}{p-1} + \lim\limits_{y \to 0+} = \frac{y^{1-p}}{p-1} = \frac{1}{1-p}$ при $p < 1$, при $p > 1$ получаем $+\infty$, а вот при $p = 1$ $\lim\limits_{y \to 0+} \ln x \,\Big|_y^1 = \lim\limits_{y \to 0+} -\ln y = +\infty$.

То есть, при $p < 1$ $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{1}{1-p}$,

при $p \geqslant 1$ $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = +\infty$.

Замечание. Если $f \in C[a, b)$ и F — его первообразная, то $\int\limits_a^b f = \lim\limits_{B \to b-} F(B) - F(a)$.

Если $f \in C(a, b]$ и F — его первообразная, то $\int\limits_a^b f = F(b) - \lim\limits_{A \to a+} F(A)$.

Доказательство. Очевидно по формуле Ньютона-Лейбница. □

***Определение* 1.21.** $F\Big|_a^b := \lim\limits_{B \to b-} F(B) - F(a)$.

***Определение* 1.22.** $\int\limits_a^{\to b} f$ сходится, если lim в его определении существует и конечен. Иначе расходится.

Теорема 1.23 (Критерий Коши)**.** Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, $f \in C[a, b)$.

Тогда $\int\limits_a^{\to b} f$ сходится $\iff \forall \varepsilon \exists c \in (a, b) \colon \forall A, B \in (c, b)$ $\left| \int\limits_A^B f \right| < \varepsilon$.

Замечание. 1. Если $b=+\infty$ это означает, что $\forall\varepsilon\exists c>a\forall A,B>c\colon \left|\int\limits_A^B f\right|<\varepsilon$.

2. Если $b<+\infty$ это означает, что $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall A,B\in(b-\delta;b)\colon \left|\int\limits_A^B f\right|<\varepsilon$.

Доказательство. Для $b<+\infty$ (то есть для конечной точки).

- "$\Rightarrow$" $\int\limits_a^b f$ сходится $\implies$ $\exists$ конечный $I\coloneqq\lim\limits_{B\to b-}\int\limits_a^B f$, обозначим $\int\limits_a^B f$ за $g(B)$. Воспользуемся критерием Коши для функций:

  $$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\begin{array}{ll}\forall B\in(b-\delta,b) & |g(B)-I|<\frac{\varepsilon}{2}\\ \forall A\in(b-\delta,b) & |g(A)-I|<\frac{\varepsilon}{2}\end{array}\implies|g(B)-g(A)|\leqslant|g(B)-I|+|I-g(A)|<\varepsilon$$

- "$\Leftarrow$" $\int\limits_a^B f=:g(B)$.

  $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall A,B\in(b-\delta,b):|g(B)-g(A)|<\varepsilon$ — а это условие из критерия Коши для $\lim\limits_{B\to b-}g(B)$.

□

Замечание. Если существуют $A_n,B_n\in[a,b)\colon\lim A_n=\lim B_n=b\colon\int\limits_{A_n}^{B_n}f\not\to0$, то $\int\limits_a^b f$ расходится.

Доказательство. Возьмем A_{n_k} и $B_{n_k}:|\int\limits_{A_{n_k}}^{B_{n_k}}f|\to C>0\implies|\int\limits_{A_{n_k}}^{B_{n_k}}f|>\frac{C}{2}$ при больших k. Но это противоречит критерию Коши. □

Свойства несобственных интегралов.

1. Аддитивность. Пусть $f\in C[a,b)$, $c\in(a,b)$. Если $\int\limits_a^b f$ сходится, то $\int\limits_c^b f$ сходится и $\int\limits_a^b f=\int\limits_a^c f+\int\limits_c^b f$.
2. Если $\int\limits_a^b f$ сходится, то $\lim\limits_{c\to b-}\int\limits_c^b f=0$
3. Линейность $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ и $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ сходятся. Тогда $\int\limits_a^b(\alpha f+\beta g)$ сходится и $\int\limits_a^b(\alpha f+\beta g)=\alpha\int\limits_a^b f+\beta\int\limits_a^b g$.
4. Монотонность. Пусть $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ существуют в $\overline{R}$ и $f\leqslant g$ на $[a,b)$. Тогда $\int\limits_a^b f\leqslant\int\limits_a^b g$.
5. Интегрирование по частям. $f,g\in C^1[a;b)\implies\int\limits_a^b fg'=fg\Big|_a^b-\int\limits_a^b f'g$.
6. Замена переменных. $\varphi\colon[\alpha,\beta)\to[a,b)$, $\varphi\in C^1[\alpha,\beta)$ и $\exists\lim\limits_{\gamma\to\beta-}\varphi(\gamma)=:\varphi(\beta-)$ и $f\in C[a,b)$.

   Тогда $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)}f(x)\mathrm{d}x$. «Если существует один из $\int$, то существует второй и они равны»

Доказательство. 1. $\int\limits_a^b f = \lim\limits_{B\to b-} F(B) - F(a) \implies \lim_{B\to b-} F(B)$ существует и конечен $\implies$ $\int\limits_c^b = \lim\limits_{B\to b-} F(b) - F(c)$ — сходится ($F(c)$ — просто число какое-то).

$\int\limits_a^b = \lim F(B) - F(a) = \lim F(B) - F(c) + F(c) - F(a) = \int\limits_c^b f + \int\limits_a^c f.$

2. $\int\limits_c^b f = \int\limits_a^b f - \int\limits_a^c f \underset{c\to b-}{\to} \int\limits_a^b f \Rightarrow$ разность $\to 0$

3. $\int\limits_a^b(\alpha f + \beta g) = \lim\limits_{B\to b-} \int\limits_a^B(\alpha f+\beta g) = \lim\limits_{B\to b-}(\alpha\int\limits_a^B f + \beta\int\limits_a^B g) = \alpha\lim\limits_{B\to b-}\int\limits_a^B f + \beta\lim\limits_{B\to b-}\int\limits_a^B g = \alpha\int\limits_a^b f + \beta\int\limits_a^b g.$

4. $\int\limits_a^B f \leqslant \int\limits_a^B g$ (монотонность собственных интегралов), а дальше предельный переход: $\lim\limits_{B\to b-}\int\limits_a^B f \leqslant \lim\limits_{B\to b-}\int\limits_a^B g$

5. $a < B < b$ и пишем формулу интегрирования по частям: $\int\limits_a^B fg' = fg\Big|_a^B - \int\limits_a^B f'g$ и переходим к пределу при $B \to b-$. Так как f, g — непрерывные функции, то $\lim\limits_{B\to b-} fg\Big|_a^B = fg\Big|_a^b$ и получаем, что нужно.

6. $F(y) \coloneqq \int\limits_{\varphi(\alpha)}^y f(x)\mathrm{d}x$, $\Phi(\gamma) \coloneqq \int_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$. Знаем, что $F(\varphi(\gamma)) = \Phi(\gamma)$ при $\alpha < \gamma < \beta$.

Пусть существует правый $\int$, то есть $\exists \lim\limits_{y\to\varphi(\beta-)} F(y)$. Возьмем $\gamma_n \nearrow \beta \implies \varphi(\gamma_n) \to \varphi(\beta-) \implies \Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)) \to \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(x)\mathrm{d}x$. При этом $\Phi(\gamma_n) \to \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

Пусть существует левый $\int$, то есть $\exists \lim\limits_{\gamma\to\beta-}\Phi(\gamma)$. Докажем, что $\exists$ правый $\int$. При $\varphi(\beta-) < b$ нечего доказывать.

Пусть $\varphi(\beta-) = b$. Тогда возьмем $b_n \nearrow b$. Можно считать, что $b_n \in [\varphi(\alpha), b)$. Тогда $\exists \gamma_n \in [\alpha, \beta) \colon \varphi(\gamma_n) = b_n$. Докажем, что $\gamma_n \to \beta$. Пусть это не так. Тогда найдется $\gamma_{n_k} \to \widetilde{\beta} < \beta \implies \varphi(\gamma_{n_k}) \to \varphi(\widetilde{\beta}) < b$ по непрерывности φ в точке $\widetilde{\beta}$. Противоречие.

Итак, $\gamma_n \to \beta$, $F(b_n) = F(\varphi(\gamma_n)) = \Phi(\gamma_n) \to \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

□

Замечание к третьему свойству. 1. Если $\int\limits_a^b f$ сходится, а $\int\limits_a^b g$ расходится, то $\int\limits_a^b(f+g)$ расходится. Доказательство от противного, пусть интеграл сходится, тогда $g = (f+g) - f \implies \int\limits_a^b g$ сходится.

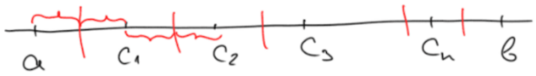
2. Если $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ расходятся, то $\int\limits_a^b(f+g)$ может сходиться. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}$ и $\int\limits_1^{+\infty}-\frac{\mathrm{d}x}{x}$ расходятся.

Замечание к шестому свойству. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Сделаем замену $x = b - \frac{1}{t} = \varphi(t)$, $\varphi'(t) = \frac{1}{t^2}, \varphi(\alpha) = a, \alpha = \frac{1}{b-a}$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(b - \frac{1}{t})\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

***Определение* 1.23.** Пусть f непрерывна на (a, b) за исключением некоторого количества точек $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$.

$\int\limits_a^b f$ сходится, если сходятся интегралы по всем маленьким отрезкам (содержащим только одну выколотую точку).



Несобственные интегралы от неотрицательных функций

Теорема 1.24. Пусть $f \in C[a, b)$ и $f \geqslant 0$.

Тогда $\int\limits_a^b f$ сходится $\iff$ $F(y) := \int\limits_a^y f$ ограничена сверху.

Доказательство. $f \geqslant 0 \implies F$ монотонно возрастает. $\int\limits_a^b f$ сходится $\iff$ $\exists$ конечный $\lim\limits_{y \to b-} F(y) \iff F$ ограничена сверху. □

Замечание. $f \in C[a; b), f \geqslant 0$. Если $\int\limits_a^b f$ расходится, это означает, что $\int\limits_a^b f = +\infty$.

Следствие Признак сравнения. $f, g \in C[a, b)$, $f, g \geqslant 0$ и $f \leqslant g$.

1. Если $\int\limits_a^b g$ сходится, то и $\int\limits_a^b f$ сходится.

2. Если $\int\limits_a^b f$ расходится, то и $\int\limits_a^b g$ расходится.

Доказательство. $F(y) := \int\limits_a^y f$ и $G(y) := \int\limits_a^y g$.

1. Пусть $\int\limits_a^b g$ сходится $\implies G(y)$ ограничена, но $F(y) \leqslant G(y) \implies F(y)$ ограничена $\implies \int\limits_a^b f$ сходится.

2. От противного. Пусть $\int\limits_a^b g$ сходится $\Rightarrow$ см. первый пункт — противоречие.

□

Замечание. 1. Неравенство $f \leqslant g$ может выполняться лишь для аргументов, близких к b.

2. Неравенство $f \leqslant g$ можно заменить на $f = \mathcal{O}(g)$.

   $f = \mathcal{O}(g) \implies f \leqslant cg$. $\int\limits_a^b g$ сходится $\implies \int\limits_a^b cg$ сходится $\implies \int\limits_a^b f$ – сходится.

3. Если $f = \mathcal{O}(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$ для $\varepsilon > 0$, то $\int\limits_a^{+\infty} f$ — сходится.

   $f \in C[a, +\infty), g(x) = \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$ и можно считать, что $a \geqslant 1$ $\int\limits_1^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ — сходится.

Следствие. $f, g \in C[a, b)$, $f, g \geqslant 0$ и $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b-$. Тогда $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ ведут себя одинаково (либо оба сходятся, либо оба расходятся).

Доказательство. $f \sim g \implies f = \varphi \cdot g$, где $\varphi(x) \xrightarrow{x \to b-} 1 \implies$ в окрестности b $\frac{1}{2} \leqslant \varphi \leqslant 2 \implies$ $f \leqslant 2g \wedge g \leqslant 2f$ в окрестности $b \implies$ из сходимости $\int\limits_a^b g$ следует сходимость $\int\limits_a^b f$, и наоборот. $\square$

***Определение* 1.24.** $f \in C[a, b)$. $\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится, если $\int\limits_a^b |f|$ сходится.

Теорема 1.25. $\int\limits_a^b f$ сходится абсолютно $\implies \int\limits_a^b f$ сходится.

Доказательство. $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$. $|f| \geqslant f_\pm \geqslant 0$. Если $\int\limits_a^b f$ сходится абсолютно $\implies \int\limits_a^b |f|$ сходится $\Rightarrow \int\limits_a^b f_\pm$ сходится $\implies \int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f_+ - \int\limits_a^b f_-$ сходится. $\square$

Теорема 1.26 (Признак Дирихле)**.** $f, g \in C[a, +\infty)$. Если

1. f имеет ограниченную первообразную на $[a, +\infty)$ (то есть $\left|\int\limits_a^y f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant K \quad \forall y$)
2. g монотонна
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

$\Rightarrow$ то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ сходится.

Доказательство. Только для случая $g \in C^1[a; +\infty)$.

Надо доказать, что $\exists$ конечный $\lim\limits_{y \to +\infty} \int\limits_a^y f(x)g(x)\mathrm{d}x$, $F(y) \coloneqq \int\limits_a^y f(x)\mathrm{d}x$.

$$\int\limits_a^y f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^y F'(x)g(x)\mathrm{d}x = F(x)g(x)\Big|_a^y - \int_a^y F(x)g'(x)\mathrm{d}x = F(y)g(y) - \int_a^y F(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

Чтобы доказать существование предела у разности каких-то штук, нужно доказать, что он существует у них по отдельности.

$\lim\limits_{y\to+\infty} F(y)g(y) = 0$ — произведение бесконечно малой и ограниченной функции.

Хотим показать, что $\int\limits_a^y F(x)g'(x)\mathrm{d}x$ имеет конечный lim, то есть $\int\limits_a^{+\infty} F(x)g'(x)\mathrm{d}x$ сходится.

Тогда докажем, что он абсолютно сходится. $\int\limits_a^{+\infty} |F(x)||g'(x)|\mathrm{d}x$, $|F(x)||g'(x)| \leqslant K|g'(x)| = Kg'(x)$. (считаем, что $g(x)$ возрастает) $\int_a^{+\infty} g'(x)\mathrm{d}x = g\ |_a^{+\infty} = \lim\limits_{y\to+\infty} g(y) - g(a) = -g(a) \implies$ сходится. □

Теорема 1.27 (Признак Абеля). $f, g \in C[a, +\infty)$, Если

1. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)$dx сходится
2. g монотонна
3. g ограничена

$\Rightarrow$ то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ сходится.

Доказательство. $2) + 3) \implies g$ имеет конечный предел $l \in \mathbb{R} \coloneqq \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Пусть $\widetilde{g}(x) \coloneqq g(x) - l \implies \lim\limits_{x\to+\infty} \widetilde{g}(x) = 0$ и $\widetilde{g}$ монотонна.

Пусть $F(x) \coloneqq \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$. Тогда 1) $\iff$ существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \implies F$ ограничена.

Тогда f и $\widetilde{g}$ удовлетворяют условиям признака Дирихле $\implies \int\limits_a^{+\infty} f(x)\widetilde{g}(x)\mathrm{d}x$ — сходится. Тогда:

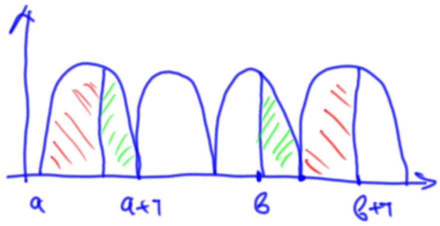
$$\int\limits_a^{+\infty} fg = \int\limits_a^{+\infty} f(\widetilde{g} + l) = \int\limits_a^{+\infty} f\widetilde{g} + l\int\limits_a^{+\infty} f.$$

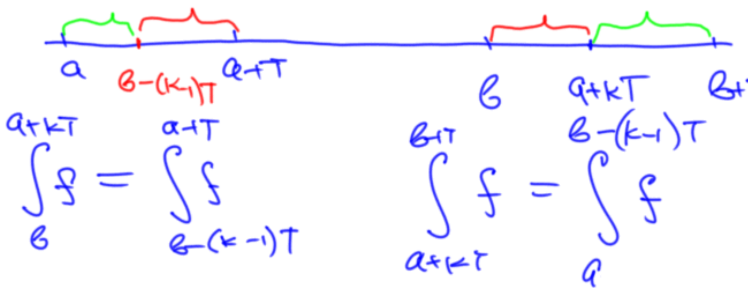
Где $\int\limits_a^{+\infty} f\widetilde{g}$ сходится по доказанному, а $\int\limits_a^{+\infty} f$ — по условию. □

Утверждение 1.28. f — периодическая функция с периодом T. Тогда неважно, по какому периоду интегрировать$\Rightarrow \int\limits_a^{a+T} f = \int\limits_b^{b+T} f$

Доказательство. см. картинку:

$\int\limits_b^{a+kT} f = \int_{b-(k-1)T}^{a+T} f.\ \int\limits_{a+kT}^{b+T} f = \int\limits_a^{b-(k-1)T} f$ □





Следствие. $f, g \in C[a; +\infty)$, f — периодическая с периодом T, g монотонная и $g \xrightarrow{x\to+\infty} 0$ $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ расходится.

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} fg$ сходится $\iff$ $\int\limits_a^{a+T} f = 0$.

Доказательство. $\Leftarrow$. $F(x) = \int\limits_a^x f$ — периодична с периодом T:

$F(x+T) = \int\limits_a^{x+T} f = \int\limits_a^x f + \underbrace{\int\limits_x^{x+T} f}_{=0} = F(x)$. F — непрерывна и периодична $\implies$ ограничена $\implies$ $\int\limits_a^{+\infty} fg$ сходится по признаку Дирихле.

$\Rightarrow$. Пусть $\int\limits_a^{a+T} f =: K \neq 0$. $\widetilde{f}(x) =: f(x) - \frac{K}{T}$ — периодична с периодом T. Тогда $\int\limits_a^{a+T} \widetilde{f} = \int\limits_a^{a+T} (f - \frac{K}{T}) = K - T\cdot\frac{K}{T} = 0 \implies \int\limits_a^{+\infty} \widetilde{f}g$ сходится.

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} fg = \int\limits_a^{+\infty} (\widetilde{f} + \frac{K}{T})g = \int\limits_a^{+\infty} \widetilde{f}g + \frac{K}{T}\int\limits_a^{+\infty} g \implies \int\limits_a^{+\infty} fg$ расходится как сумма сходящегося и расходящегося. $\square$

Пример. Рассмотрим $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$.

1. $p > 1$ интеграл сходится абсолютно: $|\sin x| \leqslant 1 \implies \left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \leqslant \frac{1}{x^p}$, а значит $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ сходится.

2. $0 < p \leqslant 1$ интеграл сходится, но не абсолютно. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ — расходится, $\frac{1}{x^p} \searrow 0$.

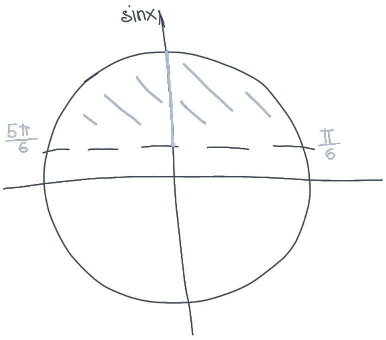
   $g(x) \coloneqq \frac{1}{x^p}, f(x) \coloneqq \sin x$. $\int\limits_0^{2\pi} \sin x\mathrm{d}x = 0 \implies \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ сходится.

   Если взять $f(x) = |\sin x|$, то интеграл по периоду равен 4 ($\int\limits_0^{2\pi} |\sin x|\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^{\pi} \sin x\mathrm{d}x = 4$). Значит исходный интеграл расходится.

3. $p \leqslant 0$ интеграл расходится.

   $a_n := \frac{\pi}{6} + 2\pi n, b_n := \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$. Тогда $\int\limits_{a_n}^{b_n} \frac{\sin x}{x^p} \mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{a_n}^{b_n} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{a_n}^{b_n} \mathrm{d}x = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{\pi}{3}$.

   Предъявили сколь угодно далеко такие отрезки, что интеграл по ним превосходит $\frac{\pi}{3}$ — это отрицание критерия Коши.



2. Анализ в метрических пространствах

2.1. Метрические и нормированные пространства

***Определение* 2.1.** Метрика (расстояние) $\rho\colon X \times X \to [0; +\infty)$, если выполняются следующие условия:

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. (неравенство треугольника) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

***Определение* 2.2.** Метрическое пространство — пара (X, ρ).

Пример. Дискретная метрика (метрика Лентяя) $\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$

Пример. На $\mathbb{R}$: $\rho(x, y) = |x - y|$.

Пример. На $\mathbb{R}^d$ (пространство столбцов = векторов): $\rho(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{d} (x_k - y_k)^2}$. Неравенство треугольника здесь — неравенство Минковского.

Пример. $C[a, b]$. $\rho(f, g) = \int\limits_a^b |f - g|$.

Неравенство треугольника:

$$\rho(f, h) = \int\limits_a^b |f - h| \overset{(*)}{\leqslant} \int_a^b (|f - g| + |g - h|) = \rho(f, g) + \rho(g, h).$$

$(*) \iff |f(x) - h(x)| \leqslant |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|$ — неравенство треугольника для $(\mathbb{R}, |x - y|)$.

Пример. Манхэтеннская метрика: $\mathbb{R}^2$, $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ (с точки зрения пешехода расстояние равно такой штуке).

Пример. Французская железнодорожная метрика. $\mathbb{R}^2$. Есть точка P (Париж), тогда $\rho(A, B) = AB$, если A, B, P на одной прямой, иначе $\rho(A, B) = |AP| + |PB|$.

***Определение* 2.3.** (X, ρ) — метрическое пространство. $B_r(x) \coloneqq \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$ — открытый шар радиуса r с центром в точке x.

***Определение* 2.4.** (X, ρ) — метрическое пространство. $\overline{B}_r(x) \coloneqq \{y \in X \mid \rho(x, y) \leqslant r\}$ — закрытый шар радиуса r с центром в точке x.

То есть если берём контур — это замкнутый шар.

Свойства. 1. $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$.

2. $x \neq y \implies \exists r > 0\colon B_r(x) \cap B_r(y) = \varnothing \wedge \overline{B}_r(x) \cap \overline{B}_r(y) = \varnothing$.

Доказательство. 1. $x \in B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) \iff \begin{cases} \rho(x, a) < r_1 \\ \rho(x, a) < r_2 \end{cases} \iff \rho(x, a) < \min\{r_1, r_2\} \implies x \in B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$.

2. $r \coloneqq \frac{1}{3}\rho(x,y) > 0$. Пусть $\overline{B}_r(x) \cap \overline{B}_r(y) \neq \varnothing$.

   Тогда $\exists z \in \overline{B}_r(x) \cap \overline{B}_r(y) \implies \rho(x,z) \leqslant r \wedge \rho(y,z) \leqslant r \implies \rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y) \leqslant 2r = \frac{2}{3}\rho(x,y) \implies 1 \leqslant \frac{2}{3}$. Противоречие.

   При этом, $B_r(x) \subset \overline{B}_r(x) \implies \exists r : B_r(x) \cap B_r(y) = \varnothing$. То есть если замкнутый шар не пересекает, то и открытый — тем более.

□

***Определение* 2.5.** $A \subset X$. A — открытое множество, если $\forall a \in A \exists B_r(a) \subset A$ $(r > 0)$. То есть для любой точки-центра из A находится шарик, который целиком тоже лежит в A.

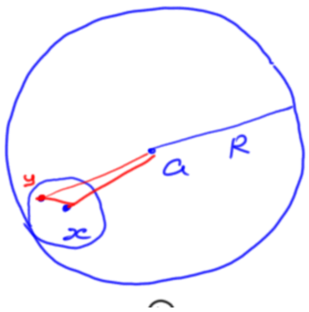
Теорема 2.1 (О свойствах открытых множеств). 1. $\varnothing, X$ — открытые.

2. Объединение любого числа открытых множеств — открытое.
3. Пересечение конечного числа открытых множеств — открытое.
4. $B_R(a)$ — открытое.

Доказательство. 2. Пусть A_α — открытые, $\alpha \in I$. $B =: \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$. Берем $b \in B \implies b \in A_\beta$ для некоторого β. Но A_β — открытое $\implies \exists r > 0 \quad B_r(b) \subset A_\beta \subset B$.

3. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — открытые. $B \coloneqq \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$. Берем $b \in B \implies b \in A_k \forall k = 1, 2, \ldots, n$. Но A_k — открытое $\implies \exists r_k > 0 B_{r_k} \subset A_k$. $r \coloneqq \min\{r_1, r_2, ..., r_n\} > 0 \implies B_r(b) \subset B_{r_k}(b) \subset A_k \forall k \implies B_r(b) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k = B \implies B$ — открытое.

4. $\rho(a,x) < R$, $r \coloneqq R - \rho(a,x) > 0$. Докажем, что $B_r(x) \subset B_R(a)$. Возьмем $y \in B_r(x)$, то есть $\rho(x,y) < r \implies \rho(y,a) \leqslant \rho(y,x) + \rho(x,a) < r + \rho(x,a) = R \implies y \in B_R(a)$.



□

Замечание. В 3 существенна конечность. $\mathbb{R}$. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, 1) = [0, 1)$. А для нуля любой открытый шарик плохой.

***Определение* 2.6.** $A \subset X$, $a \in A$. a — внутренняя точка множества A, если $\exists r > 0$: $B_r(a) \subset A$.

Замечание. A — открытое $\iff$ все его точки внутренние.

***Определение* 2.7.** Внутренность множества $\operatorname{Int} a \coloneqq \{a \in A \mid a$ — внутренняя точка$\}$.

Пример. $A = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Тогда $\operatorname{Int} A = (0, 1)$.

Свойства внутренности. 1. $\operatorname{Int} A \subset A$.

2. $\operatorname{Int} A$ — $\bigcup$ всех открытых множеств, которые содержатся в A.

3. $\operatorname{Int} A$ — открытое множество. (Следствие из предыдущего)

4. A — открытое $\iff A = \operatorname{Int} A$.

5. Если $A \subset B$, то $\operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$.

6. $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$

7. $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$.

Доказательство.

2. $B \coloneqq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, $A_\alpha \subset A$, A_α открытые.

   $B \subset \operatorname{Int} A$. (Потому что:) Берем $b \in B \implies \exists \beta \in I : b \in A_\beta$ — открытое $\implies \exists r > 0 :$ $B_r(b) \subset A_\beta \subset A \implies b$ — внутренняя точка $A \implies b \in \operatorname{Int} A$.

   $\operatorname{Int} A \subset B$. Берем $b \in \operatorname{Int} A \implies \exists r > 0 B_r(b) \subset A$, но $B_r(b)$ — открытое множество $\implies$ оно участвует в объединении $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha \implies B_r(b) \subset B \implies b \in B$.

4. $\Leftarrow$: пользуемся пунктом 3.
   $\Rightarrow$: Если A — открытое, то все его точки внутренние $\implies$ все из внутренности $\implies A = \operatorname{Int} A$.

6. $\subset$: $A \cap B \subset A, \subset B \implies \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} A \wedge \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} B$.

   $\supset$. Пусть $x \in \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \implies \begin{cases} \exists r_1 > 0 & B_{r_1}(x) \subset A \\ \exists r_2 > 0 & B_{r_2}(x) \subset B \end{cases} \implies$ если $r = \min\{r_1, r_2\} \implies$ $B_r(x) \subset A \wedge B_r(x) \subset B \implies B_r(x) \subset A \cap B \implies x \in \operatorname{Int}(A \cap B)$.

7. Пусть $B \coloneqq \operatorname{Int} A$ — открытое $\implies B = \operatorname{Int} B$.

$\square$

***Определение* 2.8.** $A \subset X$. A — замкнутое, если $X \setminus A$ — открытое.

Теорема 2.2 (о свойствах замкнутых множеств)**.** 1. $\varnothing$и X — замкнуты.

2. Пересечение любого числа замкнутых множеств — замкнуто.

3. Объединение конечного числа замкнутых множеств — замкнуто.

4. $\overline{B}_R(a)$ — замкнуто. ($\iff$ замкнутый шар — замкнутое множество)

Доказательство. 2. A_α — замкнуты $\implies X \setminus A_\alpha$ — открытые $\implies \bigcup\limits_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$ — открыто $\implies X \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ — замкнутое.

3. Аналогично.

4. $X \setminus \overline{B}_R(a)$ — открытое. Берем $x \notin \overline{B}_R(a)$ (то есть берём точку из дополнения $\iff$ она не лежит в шарике). Возьмем $r \coloneqq \rho(a, x) - R > 0$. Покажем, что $B_r(x) \subset X \setminus \overline{B_R}(a)$.

   От противного. Пусть $B_r(x) \cap \overline{B}_R(a) \neq \varnothing$. Берем $y \in B_r(x) \cap \overline{B}_R(a) \implies \rho(x, y) < r \wedge \rho(a, y) \leqslant R \implies \rho(a, x) \leqslant \rho(a, y) + \rho(y, x) < R + r = \rho(a, x)$. Противоречие.

$\square$

Замечание. В 3 важна конечность. $\mathbb{R}$. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}, 1] = (0,1]$ — не является замкнутым.

***Определение* 2.9.** Замыкание множества $\operatorname{Cl} A$ (Closure A) — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A.

Теорема 2.3. $X \setminus \operatorname{Cl} A = \operatorname{Int}(X \setminus A)$ и $X \setminus \operatorname{Int} A = \operatorname{Cl}(X \setminus A)$.

Доказательство. $\operatorname{Int}(X \setminus A) = \bigcup B_\alpha$. B_α — открытые, $B_\alpha \subset X \setminus A \iff X \setminus B_\alpha$ — замкнутое. $X \setminus B_\alpha \supset A$.

$$\bigcap(X \setminus B_\alpha) = \operatorname{Cl} A \implies \underbrace{X \setminus \bigcap(X \setminus B_\alpha)}_{=\bigcup B_\alpha} = X \setminus \operatorname{Cl} A \iff \bigcup(B_\alpha) = \operatorname{Int}(X \setminus A). \qquad \square$$

Следствие. $\operatorname{Int} A = X \setminus Cl(X \setminus A)$ и $\operatorname{Cl} A = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)$.

Свойства.

1. $\operatorname{Cl} A \supset A$.
2. $\operatorname{Cl} A$ — замкнутое множество.
3. A — замкнуто $\iff A = \operatorname{Cl} A$.

   Доказательство. $\Leftarrow$ — пункт 2. $\Rightarrow$ A — замкнутое $\Rightarrow$ оно участвует в пересечении из определения $\implies \operatorname{Cl} A \subset A \implies \operatorname{Cl} A = A$. $\square$

4. $A \subset B \implies \operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Cl} B$.

   Доказательство. $X \setminus A \supset X \setminus B \implies \operatorname{Int}(X \setminus A) \supset \operatorname{Int}(X \setminus B) \implies \underbrace{X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)}_{=\operatorname{Cl} A} \subset \underbrace{X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus B)}_{=\operatorname{Cl} B}$ $\square$

5. $\operatorname{Cl}(A \cup B) = \operatorname{Cl} A \cup \operatorname{Cl} B$.
6. $\operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl} A$.

   Доказательство. $B \coloneqq \operatorname{Cl} A$ — замкнуто $\implies \operatorname{Cl} B = B$. $\square$

Упражнение. $\operatorname{Cl}\operatorname{Int}\operatorname{Cl}\operatorname{Int}\dots A$. Какое наибольшее количество различных множеств может получиться.

Теорема 2.4. $x \in \operatorname{Cl} A \iff \forall r > 0 \quad B_r(x) \cap A \neq \varnothing$.

Доказательство. Запишем отрицание условия теоремы: $x \notin \operatorname{Cl} A \iff \exists r > 0 B_r(x) \cap A = \varnothing$.

Что означает, что $x \notin A$? Это значит, что $x \in X \setminus \operatorname{Cl} A = \operatorname{Int}(X \setminus A) \iff x \in \operatorname{Int}(X \setminus A) \iff$ x — внутренняя точка $X \setminus A \iff \exists r > 0 \colon B_r(x) \subset X \setminus A \iff \exists r > 0 \colon B_r(x) \cap A = \varnothing$. $\square$

Следствие. U — открытое, $U \cap A = \varnothing \implies U \cap \operatorname{Cl} A = \varnothing$.

Доказательство. Возьмем $x \in U \implies \exists r > 0 : B_r(x) \subset U \implies B_r(x) \cap A = \varnothing \implies x \notin \operatorname{Cl} A \implies U \cap \operatorname{Cl} A = \varnothing$. $\square$

***Определение* 2.10.** Окрестностью точки x будем называть шар $B_r(x)$ для некоторого $r > 0$. Обозначать будем U_x

***Определение* 2.11.** Проколотой окрестностью точки x — $B_r(x) \setminus \{x\}$. Обозначать будем $\dot{U}_x$.

***Определение* 2.12.** x — предельная точка множества A, если $\forall \dot{U}_x \colon \dot{U}_x \cap A \neq \varnothing$.

Обозначим через A' — множество предельных точек для A.

Свойства.

1. $\operatorname{Cl} A = A \cup A'$.

   Доказательство. $x \in \operatorname{Cl} A \iff \forall U_x \colon U_x \cap A \neq \varnothing \iff \left[\begin{array}{l} x \in A \\ \forall \dot{U}_x \cap A \neq \varnothing \iff x \in A' \end{array}\right.$ □

2. $A \subset B \implies A' \subset B'$. Очевидно.

3. A — замкнуто $\iff A \supset A'$.

   Доказательство. A — замкнуто $\iff A = \operatorname{Cl} A \iff A = A \cup A' \iff A \supset A'$. □

4. $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

   Доказательство. Докажем "$\subset$". Возьмем $x \in (A \cup B)' \colon x \notin A' \implies \exists \dot{U}_x \colon \dot{U}_x \cap A = \varnothing$, но $\dot{U}_x \cap (A \cup B) \neq \varnothing \implies \dot{U}_x \cap B \neq \varnothing \implies x \in B'$.

   Докажем "$\supset$". $A \cup B \supset A \implies (A \cup B)' \supset A'$. Провернем тот же фокус для B, получим $(A \cup B)' \supset A' \cup B'$. □

Теорема 2.5. $x \in A' \iff \forall r > 0\ B_r(x)$ содержит бесконечное количество точек из A.

Доказательство. Докажем "$\Leftarrow$". $B_r(x) \cap A$ содержит бесконечное количество точек $\implies \dot{B}_r(x) \cap A$ содержит бесконечное число точек $\implies \dot{B}_r(x) \cap A \neq \varnothing \Rightarrow x \in A'$.

"$\Rightarrow$". Возьмем радиус $r = 1$. Тогда $\dot{B}_r(x) \cap A \neq \varnothing \implies \exists x_1 \in A \colon 0 < \rho(x, x_1) < 1$. Возьмем $r = \rho(x, x_1)$ $\dot{B}_r(x) \cap A \neq \varnothing \implies \exists x_2 \in A \colon 0 < \rho(x, x_2) < \rho(x, x_1)$. Тогда можно взять $r = \rho(x, x_2)$, и так далее.

В итоге получили, что $r > \rho(x, x_1) > \rho(x, x_2) > \rho(x, x_3) > \ldots > 0 \implies$ все x_n различны. □

Следствие. Конечное множество не имеет предельных точек. (Потому что их должно быть ∞)

Доказательство. Предположим предельная точка существует $\iff \exists r > 0 \colon B_r(x) \cap A$ содержит бесконечное количество точек. Но это невозможно, так как в A конечное число точек. □

***Определение* 2.13.** (X, ρ) — метрическое пространство $Y \subset X$.

Тогда $(Y, \rho\,|_{Y \times Y})$ — подпространство метрического пространства (X, ρ).

Пример. $(\mathbb{R}, |x - y|)$. $Y = [a, b] \subset \mathbb{R}$, например, $Y = [0, 1]$.

$B_1(1) = (0, 1], B_2(0) = [0, 1]$. $B_r^Y(a) = Y \cap B_r^X(a)$. ($B_r^A$— шарик радиуса r на множестве A)

Теорема 2.6 (об открытых и замкнутых множествах в пространстве и подпространстве)**.** (X, ρ) — метрическое пространство, (Y, ρ) — его подпространство, $A \subset Y$. Тогда

1. A — открыто в $Y \iff \exists G$ — открытое в $X \colon A = G \cap Y$.

2. A — замкнуто в $Y \iff \exists F$ — замкнутое в $X \colon A = F \cap Y$.

Доказательство.

1. "$\Rightarrow$" A — открыто в $Y \implies \forall x \in A \exists r_x > 0\colon B^Y_{r_x}(x) \subset A \implies A = \bigcup\limits_{x \in A} B^Y_{r_x}(x)$.

   То есть наше множество будет объединением большего числа шариков (возможно бесконечного). Найдем теперь G: $G \coloneqq \bigcup\limits_{x \in A} B^X_{r_x}(x)$ — открыто в X. Посмотрим теперь на $G \cap Y = \bigcup\limits_{x \in A} (B^X_{r_x}(x) \cap Y) = \bigcup\limits_{x \in A} B^Y_{r_x}(x) = A$.

   В обратную сторону. Пусть $A = G \cap Y$, где G открыто в X. Возьмем $x \in G \cap Y$. G — открыто в $X \implies \forall x \in G \cap Y \exists r > 0\colon B^X_r(x) \subset G \implies B^X_r(x) \cap Y \subset G \cap Y = A \implies B^Y_r(x) \subset A \implies x$ — внутренняя точка $A \implies A$ — открыто в Y.

2. A — замкнутое в $Y \iff Y \setminus A$ — открыто в $Y \iff \exists G$ — открытое в X, такое что $Y \setminus A = Y \cap G \iff A = Y \setminus (Y \cap G) \overset{(1)}{=} Y \setminus G \overset{(2)}{=} Y \cap (X \setminus G) \iff \exists G$ — открытое в X, такое что $A = Y \cap (X \setminus G) \iff \exists F$ — замкнуто в X, такое что $A = Y \cap F$.

   (1) — Можно забить на пересечение с Y, потому что, если элемент G не лежит в Y, то и в $Y \setminus G$ он участия не принимает. (2) — Помним, что $Y \subset X$, а значит такая операция корректна.

$\square$

Пример. $(\mathbb{R}, |x-y|)$. $Y = [0,3)$. $[0,1)$ — открыто в $[0,3)$: $[0,1) = \underbrace{[0,3)}_{Y} \cap \underbrace{(-1,1)}_{G}$.

$[2,3)$ — замкнуто в $[0,3)$: $[2,3) = \underbrace{[0,3)}_{Y} \cap \underbrace{[2,3]}_{F}$.

***Определение* 2.14.** X — векторное пространство над $\mathbb{R}$.

$\|.\|\colon X \to \mathbb{R}$ — норма, если (. — аргумент)

1. $\|x\| \geqslant 0 \quad \forall x \in X$ и $\|x\| = 0 \iff x = \overrightarrow{0}$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
3. (неравенство треугольника): $\forall x, y\colon \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Пример. 1. $|x|$ в $\mathbb{R}$,

2. $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_d|$ в $\mathbb{R}^d$.
3. $\|x\|_\infty = \max\limits_{k=1,2,\ldots,d} |x_k|$.

   Неравенство треугольника: $\|x+y\|_\infty = \max\{|x_k + y_k|\} \leqslant \max\{|x_k| + |y_k|\} \leqslant \max\{|x_k|\} + \max\{|y_k|\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$
4. $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$.
5. $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{d} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ в $\mathbb{R}^d$ при $p \geqslant 1$. Неравенство треугольника — неравенство Минковского.
6. $C[a,b]$. $\|f\| = \max\limits_{t \in [a,b]} |f(t)|$.

***Определение* 2.15.** X — векторное пространство над $\mathbb{R}$. $\langle.,.\rangle\colon X \times X \to \mathbb{R}$ скалярное произведение, если

1. $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ и $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = \overrightarrow{0}$.

2. $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$
3. $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$.
4. $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle \quad \lambda\in\mathbb{R}$.

Пример. 1. $\mathbb{R}^d$. $\langle x,y\rangle = \sum x_i y_i$.

2. Возьмем $w_1,\dots,w_d > 0$. Тогда $\langle x,y\rangle = \sum w_i x_i y_i$.

3. $C[a,b]$. $\langle f,g\rangle = \int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

Свойства. 1. Неравенство Коши-Буняковского. $\langle x,y\rangle^2 \leqslant \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle$.

Доказательство. $f(t) \coloneqq \langle x+ty, x+ty\rangle \geqslant 0$. $f(t) = \langle x,x\rangle + t\langle x,y\rangle + t\langle x,y\rangle + t^2\langle y,y\rangle = t^2\langle y,y\rangle + 2t\langle x,y\rangle + \langle x,x\rangle$ — квадратный трехчлен (если $\langle y,y\rangle = 0 \implies y=0 \implies$ везде нули). Тогда $0 \geqslant D = (2\langle x,y\rangle)^2 - 4\langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle = 4(\langle x,y\rangle^2 - \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle)$. Потому что иначе есть два корня и где-то есть отрицательное значение, а $f(t)\geq 0$.
$\langle x,\overrightarrow{0}\rangle = \langle x, 0\cdot y\rangle = 0\cdot\langle x,y\rangle = 0$. □

2. $\|x\| \coloneqq \sqrt{\langle x,x\rangle}$ — норма.

Доказательство. $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle\lambda x,\lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2\langle x,x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x,x\rangle} = |\lambda|\cdot\|x\|$.

Неравенство треугольника: $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$. Возведем в квадрат, получим $\langle x+y,x+y\rangle \leqslant \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle}$, но теперь вспомним, что $\langle x+y,x+y\rangle = \langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle+2\langle x,y\rangle$. А, сократив общие слагаемые, получим доказанное неравенство Коши-Буняковского. □

3. $\rho(x,y) = \|x-y\|$ — метрика.

Доказательство. $\rho(x,y)\geqslant 0$. $\rho(x,y) = 0 \iff \|x-y\| = 0 \iff x-y = \overrightarrow{0} \iff x=y$.

$\rho(y,x) = \|y-x\| = \|(-1)(x-y)\| = |-1|\|x-y\| = \rho(x,y)$.

$\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$: $\|(x-y)+(y-z)\| = \|x-z\| \leqslant \|x-y\|+\|y-z\|$. □

4. $\|x-y\| \geqslant |\|x\|-\|y\||$.

Доказательство. Надо доказать, что $-\|x-y\| \leqslant \|x\|-\|y\| \leqslant \|x-y\|$.

Левое: $\|y\| = \|(y-x)+x\| \leqslant \|y-x\|+\|x\|$

Правое: $\|x\| = \|(x-y)+y\| \leqslant \|x-y\|+\|y\|$

□

5. Упражненение. Если норма порождается скалярным произведением $\iff \|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2$. Тождество параллелограмма.

***Определение* 2.16.** (X,ρ) — метрическое пространство. $x_1,x_2,\ldots\in X, a\in X$.
$\lim x_n = a$, если

1. Вне любого открытого шара с центром в точке a содержится лишь конечное число членов последовательности.
2. $\forall\varepsilon>0\exists N\forall n\geqslant N \quad \rho(x_n,a)<\varepsilon \iff x_n\in B_\varepsilon(a)$.

***Определение* 2.17.** $A \subset X$.

Тогда A — ограничено, если оно содержится в некотором шаре ($\iff$ его можно запихать в шар).

Свойства. 1. $a = \lim x \iff \rho(x_n, a) \to 0$.

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0 \exists n \geqslant N \quad |\rho(x_n, a)| < \varepsilon$ — предел равен 0. □

2. Предел единственный.

   Доказательство. Пусть $a = \lim x_n$ и $b = \lim x_n$. Тогда возьмем шарики такие, что $B_r(a) \cap B_r(b) = \varnothing \implies \exists N_1, N_2, \forall n \geqslant \max\{N_1, N_2\}\ x_n \in B_r(a) \wedge x_n \in B_r(b)$ — противоречие. □

3. Если $a = \lim x_n, a = \lim y_n$. То для перемешанной последовательности x_n и y_n предел такой же.

4. $a = \lim x_n \implies$ для последовательности, в которой x_n взяты с конечной кратностью, a будет пределом.

5. Если $a = \lim x_n$, то $\lim x_{n_k} = a$.

6. Последовательность имеет предел $\implies$ она ограничена

   Доказательство. $\varepsilon = 1 \exists N \forall n \geqslant N \rho(x_n, a) < 1$. Тогда $R = \max\{\rho(x_1, a), \dots, \rho(x_{N-1}, a)\} + 1 \implies x_n \in B_R(a)$. □

7. Если $a = \lim x_n$, то последовательность, полученная из $\{x_n\}$ перестановкой членов имеет тот же предел (было конечное $\to$ стало конечное).

8. a — предельная точка $A \iff \exists \{x_n\} \neq a \in A \colon \lim x_n = a$.

   Более того, x_n можно выбирать так, что $\rho(x_n, a)$ строго убывает.

   Доказательство. "$\Leftarrow$" Пусть $\lim x_n = a$. Возьмем $B_r(a) \implies \exists N \forall n \geqslant N x_n \in B_r(a) \implies \exists x_n \in \dot{B}_r(a) \implies \dot{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing \implies a$ — предельная точка.

   "$\Rightarrow$" (строим последовательность) Берем $r_1 = 1$. $\dot{B}_{r_1}(a) \cap A \neq \varnothing$. Берем оттуда точку, называем $x_1 \neq a$. $r_2 = \frac{\rho(x_1, a)}{2}$ (для надежности поделили на 2). $\dot{B}_{r_2}(a) \cap A \neq \varnothing$. Берем оттуда точку $x_2 \neq a$. $r_3 = \frac{\rho(x_2, a)}{2}$. И так далее.

   Получили: $x_n \neq a$ и $\rho(x_n, a) < \frac{\rho(x_{n-1}, a)}{2} < \rho(x_{n-1}, a)$. $\rho(x_n, a) < \frac{1}{2^n} \to 0 \implies \lim x_n = a$. □

Теорема 2.7 (об арифметических действиях с пределами)**.** X — нормированное пространство, $x_n, y_n \in X$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$. $\lim x_n = a, \lim y_n = b, \lim \lambda_n = \mu$. Тогда:

1. $\lim(x_n + y_n) = a + b$.

2. $\lim(x_n - y_n) = a - b$.

3. $\lim \lambda_n x_n = \mu a$.

4. $\lim \|x_n\| = \|a\|$.

5. Если в X есть скалярное произведение, то $\lim\langle x_n, y_n \rangle = \langle a, b \rangle$.

Доказательство. 1. $\rho(x_n+y_n, a+b) = \|(x_n+y_n)-(a+b)\| = \|(x_n-a)+(y_n-b)\| \leqslant \|x_n - a\| + \|y_n - b\| = \rho(x_n, a) + \rho(y_n, b) \to 0$.

2. Аналогично.

3. $\rho(\lambda_n x_n, \mu a) = \|\lambda_n x_n - \mu a\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n a + \lambda_n a - \mu a\| \leqslant \|\lambda_n x_n - \lambda_n a\| + \|\lambda_n a - \mu a\| = |\lambda_n|\|x_n - a\| + |\lambda_n - \mu|\|a\| \to 0$, так как $|\lambda_n|$ — ограниченная, $\|x_n - a\| = \rho(x_n - a) \to 0$, $|\lambda_n - \mu| \to 0$, $\|a\|$ — константа.

4. $|\|x_n\| - \|a\|| \leqslant \|x_n - a\| = \rho(x_n, a) \to 0 \implies \lim\|x_n\| = \|a\|$

5. $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \frac{1}{4}(\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle) = \frac{1}{4}(\langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle - (\langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle)) = \frac{1}{4}\cdot 4\langle x,y\rangle$. Тогда получаем $4\langle x_n, y_n\rangle = \|x_n+y_n\|^2 - \|x_n-y_n\|^2 \to \|a+b\|^2 - \|a-b\|^2 = 4\langle a, b\rangle$.

□

***Определение* 2.18.** $\mathbb{R}^d$ — пространство с нормой $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2}$.

***Определение* 2.19.** Покоординатная сходимость в $\mathbb{R}^d$:

$x_n \in \mathbb{R}^d$. $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(d)}) \xrightarrow{\text{покоординатно}} a = (a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(d)})$, если $\lim x_n^{(k)} = a^{(k)}$ $\forall k = 1, 2, ..., d$.

Теорема 2.8. в $\mathbb{R}^d$ сходимость по метрике и покоординатная сходимость совпадают.

Доказательство. Метрика $\implies$ покоординатная. $\rho(x_n, a) \to 0 \implies 0 \leqslant (x_n^{(1)} - a^{(1)})^2 + \ldots + (x_n^{(d)} - a^{(d)})^2 = \rho(x_n, a)^2 \to 0 \implies \lim(x_n^{(k)} - a^{(k)})^2 = 0 \implies \lim x_n^{(k)} = a^{(k)} \implies$ покоординатная сходимость.

Покоординатная $\implies$ метрика. Пусть $|x_n^{(k)} - a^{(k)}| \to 0 \quad \forall k \implies (x_n^{(k)} - a^{(k)})^2 \to 0 \implies \sum\limits_{k=1}^{d}(x_n^{(k)} - a^{(k)})^2 \to 0$. А так как $(\ldots)^2 = \rho(x_n, a)^2 \implies \rho(x_n, a) \to 0$. □

***Определение* 2.20.** $x_n \in X$ — фундаментальная последовательность, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geqslant N \colon \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Свойства. 1. Сходящаяся последовательность фундаментальна.

2. Фундаментальная последовательность ограничена.

3. Если у последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то последовательность имеет предел.

Доказательство. Упражнение! Утверждается, что так же, как и в пределах. □

***Определение* 2.21.** (x, ρ) — метрическое пространство — полное, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Пример. $\mathbb{R}$:, $\rho(x, y) = |x - y|$ — полное.

Упражнение. (X, ρ) — полное метрическое пространство $X \supset Y$ замкнуто. Доказать, что (Y, ρ) — полное.

Пример. $(0, 1)$ не полное. $x_n = \frac{1}{n}$ — фундаментальная, но $\lim \frac{1}{n} = 0 \notin (0; 1)$.

Теорема 2.9. $\mathbb{R}^d$ — полное.

Доказательство. Пусть x_n — фундаментальная, то есть

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geqslant N \colon \rho(x_n, x_m) = \sqrt{(x_n^{(1)} - x_m^{(1)})^2 + \ldots + (x_n^{(d)} - x_m^{(d)})^2} < \varepsilon.$$

Но мы знаем, что $\rho(x_n, x_m) \geqslant |x_n^{(k)} - x_m^{(k)}|$, так как, могут быть еще координаты, а значит еще неотрицательные слагаемые.

Тогда заметим, что $x_n^{(k)}$ — фундаментальная $\implies \exists a^{(k)} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(k)}$. Значит и x_n сходится к a покоординатно $\implies \rho(x_n, a) \to 0 \implies x_n$ сходится к a по метрике. □

2.2. Компактность

***Определение* 2.22.** $A, U_\alpha, \alpha \in I$.

Множества U_α — покрытие множества A, если $A \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$.

***Определение* 2.23.** Открытое покрытие — покрытие открытыми множествами.

***Определение* 2.24.** (X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$.

K — компакт, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

То есть для любого покрытия можно выбрать $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in I \colon K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$

Теорема 2.10 (Теорема о свойствах компактных множеств)**.**

1. $K \subset Y \subset X$. Тогда K — компакт в $(X, \rho) \iff K$ — компакт в (Y, ρ).
2. K — компакт $\implies K$ замкнуто и ограничено.
3. Замкнутое подмножество компакта — компакт.

Доказательство.

1. $\Leftarrow$. Пусть G_α покрытие K множествами, открытыми в X. Тогда $U_\alpha = G_\alpha \cap Y$ — открыты в Y и $K \subset \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha \cap Y = (\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha) \cap Y$.

   U_α — открытое покрытие в $(Y, \rho) \implies$ можно выделить конечное подпокрытие $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, такое что $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$ — конечное подпокрытие $G_\alpha \implies K$ компакт в (X, ρ).

   $\Rightarrow$. Воспользуемся тем же наблюдением: $U_\alpha = G_\alpha \cap Y$. Следовательно можно выбрать $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ в X и они же подойдут и в Y.

2. **Ограниченность**. Возьмем $a \in X$. Тогда $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n(a) = X$ — открытое покрытие K.

   Выделим конечное подпокрытие $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} B_n(a) \implies K \subset B_N(a) \implies K$ — ограничено (то есть объединили в один большой шар).

   Замкнутость. Надо доказать, что $X \setminus K$ — открытое. Возьмем $a \in X \setminus K$ и $x \in K$ и докажем, что a лежит в $X \setminus K$ вместе с некоторым шариком.

   Пусть $U_x = B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x)$. Причем он не пересекается с $B_x = B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(a)$. Возьмем тогда $K \subset \bigcup_{x\in K} U_x$ — открытое покрытие (поскольку каждый шарик точно покрывает свой центр и ещё что-то). Выделим конечное подпокрытие $K \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$, $r = \min\{\frac{\rho(x_i,a)}{2}\}$. Тогда $B_r(a) =$

$\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{x_i}$. $B_r(a) \cap \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i} = \varnothing \implies B_r(a) \cap K = \varnothing \implies B_r(a) \subset X \setminus K \implies a$ — внутренняя точка $X \cap K$.

3. Пусть $\widetilde{K}$ — компакт, K — замкнуто и $K \subset \widetilde{K}$.

   Рассмотрим открытое покрытие K U_α. Тогда $\widetilde{K}$ покрыто $(X \setminus K) \cup \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ – открытое покрытие $\widetilde{K}$. Выделим конечное подпокрытие $X \setminus K, U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$. $K \subset \underbrace{X \setminus K}_{\cap K = \varnothing} \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \implies$

   $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$ — конечное подпокрытие K, а значит K — компакт.

$\square$

Теорема 2.11. K_α — семейство компактов, такое что пересечение любого конечного числа из них непусто. Тогда $\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha \neq \varnothing$.

Следствие. $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \ldots$ непустые компакты. Тогда $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n \neq \varnothing$.

Доказательство теоремы. От противного. Пусть $\bigcap\limits_{\alpha \in I} K_\alpha = \varnothing$. Зафиксируем компакт $K_0 \implies K_0 \cap \bigcap\limits_{\alpha \in I} K_\alpha = \varnothing \implies K_0 \subset X \setminus \bigcap\limits_{\alpha \in I} K_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} X \setminus K_\alpha$ — открытое покрытие K_0. Выделим конечное подпокрытие $K_0 \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} X \setminus K_{\alpha_i} = X \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{n} K_{\alpha_i} \implies K_0 \cap \bigcap\limits_{i=1}^{n} K_{\alpha_i} = \varnothing$.??! $\square$

***Определение* 2.25.** K — секвенциально компактное множество, если из любой последовательности точек из K можно выделить подпоследовательность, которая сходится к какой-то точке из K.

Пример. $[a, b] \in \mathbb{R}$ секвенциально компактно.

$x_n \in [a; b] \xRightarrow{\text{Т. Б-В}} \exists$ подпоследовательность x_{n_k}, имеющая предел $\implies \lim x_{n_k} \in [a, b]$, так как неравенства сохраняются.

Теорема 2.12. Бесконечное подмножество компакта имеет предельную точку.

Доказательство. K — компакт. $A \subset K$. Пусть A' (предельные точки) $= \varnothing$. Тогда A — замкнуто $\implies A$ — компакт и ни одна из его точек не является предельной. $a \in A$ не предельная $\implies \exists r_a > 0$ $\dot{B}_{r_a}(a) \cap A = \varnothing \implies B_{r_a}(a) \cap A = \{a\}$. Рассмотрим открытое покрытие $A \subset \bigcup_{a \in A} B_{r_a}(a)$, но из этого покрытия нельзя убрать ни одного множества, так как мы выбрали радиусы так, что каждый шар в пересечении с A дает только одну точку $\implies$ нет конечного подпокрытия $\implies$ противоречие. $\square$

Следствие. Компактность $\implies$ секвенциальная компактность.

Доказательство. $x_1, x_2, \ldots \in K$. $D = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ — множество значений последовательности.

1. $|D| < +\infty \implies$ в последовательности есть элемент, повторяющийся бесконечно много раз, оставим только его — это нужная подпоследовательность.

2. $|D| = +\infty \implies$ у D есть предельная точка.

   Пусть a — предельная точка $D \implies$ найдутся различные $y_1, y_2, \ldots \in D$, такие что $\lim y_n = a$.

Но y_i — это какой-то x_{n_i} и $\lim x_{n_i} = a$. Осталось переставить x_{n_i} так, что получится подпоследовательность. Ну, а так как K — замкнуто, то $a \in K$.

□

Лемма (Лемма Лебега). K — секвенциальный компакт, $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ — открытое покрытие.

Тогда $\exists r > 0 \colon \forall x \in K \quad B_r(x)$ целиком покрывается каким-то U_α.

Доказательство. От противного. Тогда $r = \frac{1}{n}$ не подходит $\implies \exists x_n \in K \colon B_{\frac{1}{n}}(x_n)$ не содержится целиком ни в каком U_α.

Выберем подпоследовательность x_{n_k}, такую что $\lim x_{n_k} = a \in K$.

Тогда $a \in U_\beta$ для некоторого $\beta \in I \implies \exists B_\varepsilon(a) \subset U_\beta$. Возьмем $N_1 \colon \forall k \geqslant N_1 \quad \rho(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. А еще можно взять $N_2 \colon \forall k \geqslant N_2 \quad \frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2}$. А значит $B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subset B_\varepsilon(a) \subset U_\beta$ при $k \geqslant \max\{N_1, N_2\}$?!!

Докажем $B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subset B_\varepsilon(a)$: Если $x \in B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k})$ $\rho(x_{n_k}, x) < \frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2} \wedge \rho(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} \implies \rho(x, a) \leqslant \rho(x_{n_k}, x) + \rho(a, x_{n_k}) < \varepsilon$ □

Теорема 2.13. Компактность = секвенциальная компактность.

Доказательство. $\Leftarrow$ Пусть $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ — открытое покрытие. Возьмем $r > 0$ из леммы Лебега. Рассмотрим открытое покрытие $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B_r(x)$.

Достаточно из него выделить конечное подпокрытие. Возьмем $x_1 \in K$. Если $B_r(x_1) \supset K$, то выбрали конечное покрытие. Иначе берем $x_2 \in K \setminus B_r(x_1)$. Если объединение шариков $\supset K$, то выбрали конечное подпокрытие. Иначе продолжаем процесс: $x_n \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_r(x_i)$. Если процесс оборвался, то выделили конечное подпокрытие.

Если он не оборвался, то мы построили подпоследовательность $x_1, x_2, \ldots$. Причем $\rho(x_n, x_k) \geqslant r \forall n > k \implies \rho(x_i, x_j) \geqslant r \forall i \neq j$. Из такой последовательности не выбрать сходящуюся подпоследовательность, так как любая подпоследовательность не фундаментальная, — противоречие с секвенциальной компактностью. □

***Определение* 2.26.** $A \subset X$. (X, ρ) — метрическая пространство.

$E \subset A$, ε-сеть множества A, если $\forall a \in A \exists x \in E \colon \rho(x, a) < \varepsilon$.

Конечная ε-сеть — E-конечное множество.

То есть $\{x_1, x_2, .., x_n\} \subset A$ — ε-сеть, если $\forall a \in A \exists k \quad \rho(a, x_k) < \varepsilon$.

***Определение* 2.27.** A — вполне ограничено, если $\forall \varepsilon > 0 \exists$ конечная ε-сеть A.

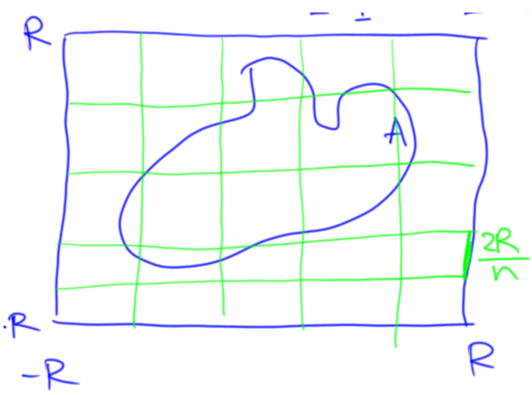
Свойства. 1. Вполне ограниченность $\implies$ ограниченность.

Доказательство. $\varepsilon = 1$ и конечная 1-сеть $x_1, x_2, \ldots, x_n$. $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_1(x_k) \subset B_{r+1}(x_1)$, где $r = \max\limits_{i \neq j} \rho(x_i, x_j)$. □

2. В $\mathbb{R}^d$ ограниченность $\implies$ вполне ограниченность.

Доказательство. $A \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченное. $A \subset B_R(O) \subset [-R, R]^d$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмем $n \in \mathbb{N}$. $\rho(x_i, a) \leqslant$ главная диагональ $= \sqrt{d}\frac{2R}{n} < \varepsilon$ при $n > \frac{\sqrt{d}2R}{\varepsilon}$ получается ε-сеть ($\sqrt{d}$ — диагональ в d-мерном кубе). □



Теорема 2.14 (Хаусдорфа). 1. Компактное множество вполне ограничено.

2. Если (X, ρ) — полное метрическое пространство, то замкнутое вполне ограниченное подмножество X — компактно.

Доказательство. 1. Берем $\varepsilon > 0$ $K \subset \bigcup_{x \in K} B_\varepsilon(x)$ — открытое покрытие. Выделим конечное подпокрытие $\implies K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i) \implies x_1, \ldots, x_n$ — ε-сеть.

2. Проверим секвенциальную компактность. Берем $x_1, x_2, \ldots \in K$. Возьмем 1-сеть $K \subset \bigcup_{i=1}^{n_1} B_1(y_{1i})$. В каком-то шарике $B_1(z_1)$ бесконечное число членов последовательности. Выкинем все, кроме них, останутся $x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots$. Возьмем $\frac{1}{2}$-сеть. $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n_2} B_{\frac{1}{2}}(y_{2i})$. В каком-то шарике $B_{\frac{1}{2}(z_2)}$ бесконечное число членов последовательности...

   На j-ом шаге $K \subset B_{\frac{1}{j}}(y_{ji})$. Пусть на каждом шаге выбирали шарик $B_{\frac{1}{i}}(z_i)$.

   В итоге получили:

$$\begin{array}{cccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \ldots & B_1(z_1) \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \ldots & B_{\frac{1}{2}}(z_2) \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \ldots & B_{\frac{1}{3}}(z_3) \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & \ldots & B_{\frac{1}{4}}(z_4) \end{array}$$

   Воспользуемся диагональным методом Кантора. Пусть $a_n \coloneqq x_{nn}$. Заметим, что $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ — подпоследовательность $x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \ldots \implies$ все лежат в $B_{\frac{1}{n}}(z_n) \implies \rho(a_i, a_j) \leqslant \rho(a_i, z_n) + \rho(a_j, z_n) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$, при $i, j \geqslant n \implies a_i$ — фундаментальная $\implies$ у нее есть предел $\implies a = \lim a_n \in K$, так как K — замкнуто $\implies K$ — секвенциально компактно.

□

Следствие Характеристика компактов в $\mathbb{R}^d$***.*** $K \subset \mathbb{R}^d . K$ — компакт $\iff K$ — замкнуто и ограничено.

Доказательство. $\Rightarrow$ верна всегда и доказана выше.

А вот $\Leftarrow$ верна не всегда. Поэтому докажем эту штуку для $\mathbb{R}^d$. Мы знаем, что $\mathbb{R}^d$ — полное. А еще мы знаем, что в $\mathbb{R}^d$ ограниченность $\implies$ вполне ограниченность, а значит понятно, что K — компакт. □

Упражнение. (K, ρ) — метрическое пространство, K — компакт. Доказать, что (K, ρ) — полное.

Теорема 2.15 (Теорема Больцано-Вейерштрасса в $\mathbb{R}^d$)**.** Из любой ограниченной последовательности в $\mathbb{R}^d$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. $\{x_n\}$ — ограничено $\implies$ $\exists R \quad x_n \in B_R(a) \subset \overline{B}_R(a)$ — замкнуто и ограничено $\implies$ компактно $\implies$ секвенциально компактно $\implies$ x_n — последовательность точек секвенциального компакта $\implies$ у нее есть сходящаяся подпоследовательность. □

2.3. Непрерывные отображения

***Определение* 2.28.** (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства, $E \subset X$. $f\colon E \to Y$, a — предельная точка E, $b \in Y$.

$b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ означает, что

По Коши: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x\colon \rho_X(x, a) < \delta \land a \neq x \in E \implies \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon$.

В терминах окрестностей: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0\colon f(\underbrace{\dot{B}_\delta(a)}_{\in X} \cap E) \subset \underbrace{B_\varepsilon(b)}_{\in Y}$

По Гейне: $\forall$ последовательности $a \neq x_n \in E\colon \lim x_n = a \implies \lim f(x_n) = b$ единственный.

Теорема 2.16. Все определения равносильны.

Доказательство. Упражнение (смотри доказательство для функций). □

Теорема 2.17 (Критерий Коши)**.** $f\colon E \subset X \to Y$, Y — полное, a — предельная точка E. Тогда

$\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Доказательство. $\Rightarrow$. Упражнение: взять доказательство и заменить модуль на ρ.

$\Leftarrow$. Проверим определение по Гейне. Надо доказать, что $a \neq x_n \in E \land \lim x_n = a \implies \lim f(x_n)$ существует.

$f(x_n)$ — последовательность в Y — полное. Поэтому достаточно проверить, что $f(x_n)$ — фундаментальная последовательность. Возьмем $\varepsilon > 0$, по нему $\delta > 0$ из условия. По $\delta > 0$ берем N, такое что $\forall n \geqslant N : \rho_X(x_n, a) < \delta \implies x_n \in \dot{B}_\delta(a) \cap E$ при $n \geqslant N \implies \forall m, n \geqslant N :$ $\rho_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon \implies f(x_n)$ фундаментальная $\implies f(x_n)$ имеет предел. □

Теорема 2.18 (об арифметических действиях с пределами)**.** $f, g\colon E \subset X \to Y$, Y — нормированное пространство, a — предельная точка E.
Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b, \lim\limits_{x \to a} g(x) = c \land \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда

1. $\lim\limits_{x \to a} \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha b + \beta c$.
2. Если $\lambda\colon E \to \mathbb{R}$, такое что $\lim\limits_{x \to a} \lambda(x) = \mu \in \mathbb{R}$, то $\lim\limits_{x \to a} \lambda(x) f(x) = \mu b$.
3. $\lim\limits_{x \to a} \|f(x)\| = \|b\|$
4. Если Y — пространство со скалярным произведением, то $\lim\limits_{x \to a} \langle f(x), g(x) \rangle = \langle b, c \rangle$.
5. Если $Y = \mathbb{R}$ и $c \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$.

Доказательство. Проверка по Гейне. Берем $x_n \to a$,, тогда $f(x_n) \to b, g(x_n) \to c$ и теорема про пределы последовательности. □

Определение 2.29. (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства, $E \subset X$, $a \in E$.
$f\colon E \to Y$, f непрерывна в точке a, если

1. a не предельная точка или a — предельная и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
2. По Коши. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E\colon \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$.
3. С окрестностями. $\forall B_\varepsilon(f(a)) \exists B_\delta(a)\colon f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$.
4. По Гейне: $\forall x_n \in E\colon \lim x_n = a \implies \lim f(x_n) = f(a)$.

Доказательство. Упражнение! Все определения равносильны. В прошлом доказательстве надо заменить модуль на расстояние. □

Теорема 2.19 (о непрерывности композиции)**.** $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y), (Z, \rho_Z)$ — $D \subset X, E \subset Y, a \in D, f\colon D \to E, g\colon E \to Z$. Если f непрерывна в точке a, а g непрерывна в точке $f(a)$, то $g \circ f$ непрерывна в точке a.

Доказательство. Запишем определения непрерывности для g и f в терминах окрестностей (в определении для f мы дописали $\cap E$, но заметим, что это никак не повлияет по определению E):

$$\left.\begin{array}{l} \forall B_\varepsilon(g(f(a)))\ \exists B_\delta(f(a)) \text{ такой, что } g(B_\delta(f(a)) \cap E) \subset B_\varepsilon(g(f(a))) \\ \forall B_\delta(f(a))\ \exists B_\gamma(a) \text{ такой, что } f(B_\gamma(a) \cap D) \subset B_\delta(f(a)) \cap E \end{array}\right\}$$
$$\implies g(f(B_\gamma(a) \cap D)) \subset g(B_\delta(f(a)) \cap E) \subset B_\varepsilon(g(f(a))) \implies g \circ f \text{ непрерывна в точке } a$$

□

Теорема 2.20 (Характеристика непрерывности в терминах открытых множеств)**.** $f: X \to Y$. Тогда

f непрерывна во всех точках $\iff$ $\forall U$ — открытого в Y: $f^{-1}(U) := \{x \in X \mid f(x) \in U\}$ — открыто в X (то есть они переходят в U).

Доказательство. $\Rightarrow$. Берем $a \in f^{-1}(U) \implies f(a) \in U$ – открыто $\implies \exists \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(f(a)) \subset U$.

f непрерывна в точке $a \implies \exists \delta > 0\colon f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \subset U \implies B_\delta(a) \subset f^{-1}(U) \implies a$ — внутренняя точка $f^{-1}(U) \implies f^{-1}(U)$ — открыто.

$\Leftarrow$. $U := B_\varepsilon(f(a))$ — открытое множество $\implies f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ — открыто и $a \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) \implies$

$\exists \delta > 0 \quad B_\delta(a) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) \implies f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \implies f$ непрерывна в точке a. □

Теорема 2.21 (Непрерывный образ компакта — компакт)**.** $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ — метрические пространства, $K \subset X$, K — компакт.

$f\colon K \to Y$ непрерывна во всех точках. Тогда $f(K)$ — компакт.

Доказательство. Рассмотрим открытое покрытие $f(K) \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ — открытые $\implies K \subset f^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} f^{-1}(U_\alpha)$ по непрерывности f $f^{-1}(U_\alpha)$ — открыто $\implies$ это открытое покрытие K, но K — компакт $\implies$ выбираем конечное подпокрытие $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} f^{-1}(U_{\alpha_j}) = f^{-1}(\bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{\alpha_j}) \implies f(K) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{\alpha_j}$. Нашли конечное подпокрытие $\implies f(K)$ — компакт. □

***Определение* 2.30.** $f : E \subset X \to Y$ — ограниченное отображение, если $f(E)$ — ограниченное множество.

Следствие. Непрерывный образ компакта замкнут и ограничен.

Доказательство. Знаем, что непрерывный образ компакта — компакт. А следовательно, образ замкнут и ограничен. $\square$

Следствие. Если K — компакт и f непрерывна на K, то f — ограниченное отображение.

Следствие Теорема Вейерштрасса. $f : K \to \mathbb{R}$, K — компакт, f непрерывна на K.

Тогда $\exists a, b \in K : f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b) \quad \forall x \in K$.

Доказательство. $f(K)$ — ограниченное множество в $\mathbb{R} \implies B \coloneqq \sup\limits_{x\in K} f(x) \in \mathbb{R} \implies \exists x_n \in K : \lim f(x_n) = B$. При этом $x_n \in K$ — секвенциальный компакт $\implies$ существует сходящаяся подпоследовательность x_{n_k}.

Тогда $\lim x_{n_k} =: b \in K \implies \underbrace{\lim f(x_{n_k})}_{=B} = f(b) \implies f(b) = \sup\limits_{x\in K} f(x) = B \implies f(x) \leqslant f(b) \quad \forall x \in K$. $\square$

Теорема 2.22. $f : X \to Y$ непрерывна во всех точках, биекция и X — компакт. Тогда f^{-1} непрерывна во всех точках.

Доказательство. Проверяем непрерывность f^{-1} в терминах открытых множеств. Надо для f^{-1} проверить , что прообраз открытого — открыт, то есть для f проверить, что образ открытого открыт.

U — открыто в $X \implies X \setminus U$ — замкнуто и $\subset X$ — компакт $\implies X \setminus U$ — компакт $\xRightarrow{\text{непрер.}} f(X \setminus U) = Y \setminus f(U)$ — компакт $\implies Y \setminus f(U)$ — замкнуто $\implies f(U)$ — открыто. $\square$

***Определение* 2.31.** $f : E \subset X \to Y$ равномерно непрерывна, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E : \rho_X(x, y) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Теорема 2.23 (Теорема Кантора)**.** $f : K \to Y$ непрерывна, K — компакт. Тогда f равномерно непрерывна.

Доказательство. Берем $x \in K$, f непрерывна в точке $x \implies \exists r_x > 0 \colon f(B_{r_x}(x)) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x))$.

Тогда $K \subset \bigcup\limits_{x\in K} B_{r_x}(x)$ — открытое покрытие K. Возьмем $\delta > 0$ из леммы Лебега, то есть $\forall x \in K \ B_\delta(x)$ целиком попал в какой-то элемент покрытия.

Проверим, что это $\delta > 0$ подходит в определение равномерной непрерывности.

$\forall x, y \in K \ \rho_X(x, y) < \delta \implies y \in B_\delta(x) \implies \exists a \in K : B_\delta(x) \subset B_{r_a}(a) \implies x, y \in B_{r_a}(a) \implies f(x), f(y) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(a)) \implies \rho_Y(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2} \wedge \rho_Y(f(y), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2} \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ по неравенству треугольника. $\square$

***Определение* 2.32.** X — векторное пространство и $\|.\|$ и $|||.|||$ — нормы в X.

Нормы эквиваленты, если $\exists C_1, C_2 > 0$:

$$C_1\|x\| \leqslant |||x||| \leqslant C_2\|x\| \quad \forall x \in X.$$

Замечание. 1. Это отношение эквивалентности. (упражнение)

2. Пределы последовательности для эквивалентных норм совпадают. Док-во: Пусть $\lim x_n = a$ по норме $\|.\|$, т.е. $\lim \|x_n - a\| = 0$. А $0 \leqslant |||x_n - a||| \leqslant C_2\|x_n - a\| \to 0$, значит $\lim x_n = a$ и по норме $|||.|||$.

3. Непрерывность отображений для эквивалентных норм совпадают (записываем по Гейне, а для последовательностей мы всё знаем).

Теорема 2.24. В $\mathbb{R}^d$ все нормы эквивалентны.

Доказательство. $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2}$. Достаточно доказать, что остальные нормы эквиваленты $\|.\|$,.

Пусть $p(x)$ — другая норма в $\mathbb{R}^d$. e_k — вектор с нулями и единицей на k-ой позиции.

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) = \sum\limits_{k=1}^{d} x_k e_k$.

$$p(x-y) = p(\sum_{k=1}^{d}(x_k - y_k)e_k) \overset{(1)}{\leqslant} \sum_{k=1}^{d} p((x_k - y_k)e_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{d}|x_k - y_k|p(e_k) \leqslant \text{(Коши-Буняковский)} \left(\sum_{k=1}^{d}(x_k - y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{d} p(e_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{d} p(e_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x - y\| \overset{(2)}{\Longrightarrow} p(x) \leqslant \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{d} p(e_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{:=M} \|x\|.$$

(1) $\iff$ $\|a + b\| \leqslant \|a\| + \|b\|$ и $p(a+b) \leqslant p(a) + p(b)$

(2) $\iff$ $p(x)$ — непрерывная функция.

$S \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^d \colon x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2 = 1\}$ — компакт $\implies \exists a \in S \colon 0 < p(a) \leqslant p(x) \quad \forall x \in S$.

$p(x) = p(\frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|) = \|x\|p(\underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{\in 1-Sphere}) \geqslant \|x\|p(a)$, так как норма $\frac{x}{\|x\|}$ будет равна 1.

Тогда $p(a)\|x\| \leqslant p(x) \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$. ☐

2.4. Длина кривой

***Определение* 2.33.** (X, ρ) — метрическое пространство. ($\mathbb{R}^d$ — ключевой случай).

Непрерывное $\gamma \colon [a, b] \to X$ непрерывное — путь.

$\gamma(a)$ — начало пути, $\gamma(b)$ — конец пути. $\gamma([a, b])$ носитель пути.

Замкнутый путь $\gamma(a) = \gamma(b)$. Простой (самонепересекающийся) путь: $\gamma(u) \neq \gamma(v) \quad \forall u, v \in [a, b]$. Возможно, за исключением равенства $\gamma(a) = \gamma(b)$.

***Определение* 2.34.** Эквивалентные пути: $\gamma_1 \colon [a, b] \to X$, $\gamma_2 \colon [c, d] \to X$. Если $\exists u \colon [a, b] \to [c, d]$, u — непрерывна и строго монотонно возрастает, $u(a) = c, u(b) = d$, такой, что $\gamma_1 = \gamma_2 \circ u$.

Неформально говоря, мы считаем, что пути эквивалентны, если у них отличается только время прохождения.
(*) u — допустимое преобразование параметра.

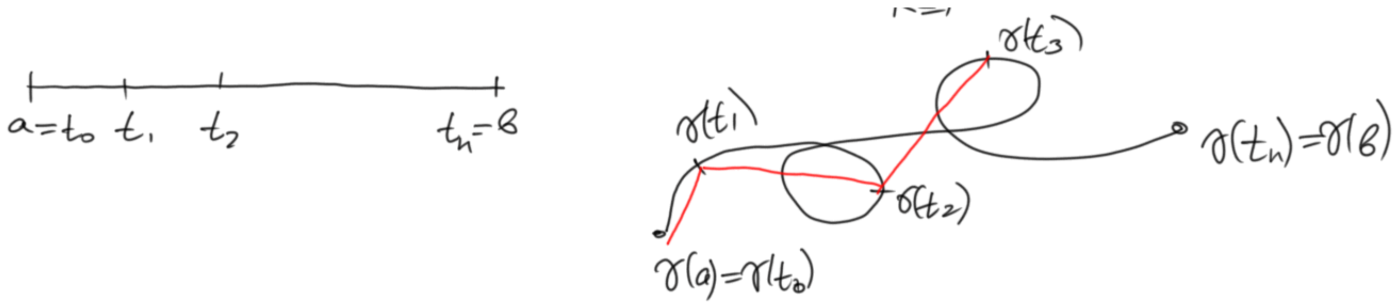
***Определение* 2.35.** Класс эквивалентных путей — кривая.

Конкретный представитель класса — параметризация кривой.

***Определение* 2.36.** $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$. r-гладкий путь, если $\gamma = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_d\end{pmatrix}$, $\gamma_j : [a,b] \to \mathbb{R}$ — r-гладкие функции, то есть $\gamma_j \in C^r[a,b]$.

Кривая гладкая, если у нее есть гладкая параметризация. Если r опущено, то $r = 1$.

***Определение* 2.37.** Длина пути $l(\gamma) = \sup \sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\gamma(t_k), \gamma(t_{k-1}))$, где t_k — дробление отрезка. То есть считаем все и берем супремум.



Замечание. Длины эквивалентных путей равны.

Свойства.

1. $l(\gamma) \geqslant \rho(\gamma(a), \gamma(b))$ (то есть $\geqslant$ прямой). Можно просто взять дробление состоящее из двух точек.
2. $l(\gamma) \geqslant$ длина вписанной в нее ломаной.

Теорема 2.25. Пусть есть $\gamma\colon [a,b] \to X$. $c \in [a,b]$.

$l(\gamma) = l(\gamma\Big|_{[a,c]}) + l(\gamma\Big|_{[c,b]})$.

Обозначим куски за γ_1, γ_2.

Доказательство. Нам нужно доказать какое-то равенство, поэтому докажем два неравенства!

- $\geqslant$. Давайте вписывать ломанные. Впишем какую-то ломанную в γ_1 и еще какую-то в γ_2. Пусть получились дробления $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = u_0 < \ldots < u_m = b$ — получилось дробление $[a,b]$.

  Тогда посчитаем сумму: $\sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) + \sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\gamma(u_{k-1}), \gamma(u_k)) \leqslant l(\gamma)$. Заменим первое слагаемое на sup: $\sup \ldots + \sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\gamma(u_{k-1}), u_k) \leqslant l(\gamma)$. А этот sup — длина γ_1. Встает вопрос почему можно переходить. Мы знаем, что все числа меньше, то и супремум меньше, поэтому переход корректный. Дальше заменяем правый sup. В итоге получаем $l(\gamma_1) + l(\gamma_2) \leqslant l(\gamma)$.

- Возьмем дробление γ t_i. Посмотрим на сумму $S = \sum\limits_{j=1}^{n} \rho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j))$.

  Возьмем дробление t_i и добавим в него точку c. Получаем:

$$S \leqslant \sum_{j=1}^{k} \rho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) + \rho(\gamma(t_k), \gamma(c)) + \rho(\gamma(c), \gamma(t_{k+1})) + \sum_{j=k+2}^{n} \rho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j))$$

А теперь увидим, что первые два слагаемых $\leqslant l(\gamma_1)$, а вторые два $\leqslant l(\gamma_2)$.
То есть $l(\gamma) \leqslant l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$.

□

Теорема 2.26. $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$ — гладкий путь. $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_d \end{pmatrix}$. Тогда:

$$l(\gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 + \ldots + \gamma_d'(t)^2}\mathrm{d}t = \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\|\mathrm{d}t$$

Лемма. $\Delta \subset [a,b]$ — отрезок, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$. $m_\Delta^{(i)} \coloneqq \min\limits_{t\in\Delta} |\gamma_i'(t)|, M_\Delta^{(i)} \coloneqq \max\limits_{t\in\Delta} |\gamma_i'(t)|$, $m_\Delta \coloneqq \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{d} (m_\Delta^{(i)})^2}, M_\Delta \coloneqq \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{d} (M_\Delta^{(i)})^2}$

Тогда $m_\Delta l(\Delta) \leqslant l(\gamma\Big|_\Delta) \leqslant M_\Delta l(\Delta)$.

Доказательство. Впишем в $\gamma\Big|_\Delta$ ломаную. Пусть a_k — длина k-го звена.

По теореме Лагранжа: $\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1}) = \underbrace{\gamma_i'(\xi_{ik})(t_k - t_{k-1})}_{\geqslant m_\Delta^{(i)}(t_k - t_{k-1})} \leqslant M_\Delta^{(i)}(t_k - t_{k-1})$

Тогда $m_\Delta(t_k - t_{k-1}) \leqslant a_k \leqslant M_\Delta(t_k - t_{k-1})$. Просуммируя все такие неравенства получим исходное. □

Доказательство теоремы. По лемме длина звена:

$$m_k(x_k - x_{k-1}) \leqslant l(\gamma\Big|_{[x_{k-1},x_k]}) \leqslant M_k(x_k - x_{k-1})$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leqslant l(\gamma) \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

$$m_k(x_k - x_{k-1}) \leqslant \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \ldots + \gamma_d'(t)^2}\mathrm{d}t \leqslant M_k(x_k - x_{k-1}) \qquad (*)$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leqslant \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \|\gamma'(t)\|dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

Заметим, что $(*)$ получается просто из того, что m_k — минимум, а M_k — максимум. Также заметим, что суммы в первой и четвертой строчке равны.

Докажем, что сумма с M_k минус сумма с m_k стремится к нулю. По факту хотим доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \to 0$.

$$M_k - m_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{d}(M^{(i)}_{[x_{k-1},x_k]})^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{d}(m^{(i)}_{[x_{k-1},x_k]})^2} \leqslant (\text{Минковский})\sqrt{\sum_{i=1}^{d}(M^{(i)}_{[x_{k-1},x_k]} - m^{(i)}_{[x_{k-1},x_k]})^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{d}(M^{(i)}_{[x_{k-1},x_k]} - m^{(i)}_{[x_{k-1},x_k]}) = \sum_{i=1}^{d}(\gamma_i(\xi_k) - \gamma_i(\eta_k)) \leqslant \sum_{l=1}^{d}\omega_k(|\tau|). \qquad (\xi_k, \eta_k \in [x_{k-1}, x_k]).$$

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \leqslant \underbrace{\sum_{i=1}^{d}\omega_k(|\tau|)}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})}_{=b-a}$$

$\square$

Следствие. 1. $\|\gamma'\| \leqslant C \implies l(\gamma) \leqslant C(b-a)$. Бежали со скоростью $\leqslant C \Rightarrow$ пробежали $\leqslant C \cdot (b-a)$.

2. Длина графика функции $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x$.

3. Длина в полярных координатах. $r\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Тогда $l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi$.

Доказательство. 2. $\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$, $\gamma_1'(x) = 1, \gamma_2'(x) = f'(x)$, а дальше применить функцию.

3. $\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos\varphi \\ r(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix}$. Подставим и возьмем производную.

$\square$

***Определение* 2.38.** A — связное множество, если $\forall$ покрытие из U, V $A \subset U \cup V, U \cap V = \varnothing \implies$ либо $A \subset U$, либо $A \subset V$, где U, V — открытые.

Пример. 1. $[a,b]$ — связное множество в $\mathbb{R}$.

2. $\mathbb{Q}$ — несвязное множество в $\mathbb{R}$. Пример $\mathbb{Q} \subset (-\infty; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

Теорема 2.27. Непрерывный образ связного множества — связное множество.

Доказательство. A — связное, $f\colon A \subset X \to Y$ непрерывное. Хотим показать, что $f(A) \subset U, V$ — открытые множества в Y, причем $U \cap V = \varnothing$. Тогда образ лежит либо в U, либо в V. Так как множества открытые, то и $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ будут открытыми, причем $A \subset f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ и пересечение прообразов будет пустым.

Так как A связно, то оно будет лежать ровно в одном из прообразов, а значит и образ будет лежать ровно в одном множестве. $\square$

Следствие Теорема Больцано-Коши. Пусть A — связное, $a, b \in A$. $f\colon A \to \mathbb{R}$ непрерывная.

Тогда f принимает все промежуточные значения, лежащие между $f(a)$ и $f(b)$.

Доказательство. От противного. Пусть $f(a) < C < f(b)$ и C — не значение. Тогда $f(A) \subset (-\infty, C) \cup (C, +\infty)$. Заметим, что данные множества открытые и не пересекаются. Тогда получили противоречие со связностью $f(A)$. $\square$

Теорема 2.28. $\langle a, b\rangle$ — связное подмножество $\mathbb{R}$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Доказательство. От противного. Пусть $\langle a, b\rangle \subset U \cup V$, $U \cap V = \varnothing$.

Пусть $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R} = f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle a, b\rangle \cap U \neq \varnothing \\ 1 & x \in \langle a, b\rangle \cap V \neq \varnothing \end{cases}$ — непрерывная функция. Её прообразы: $\varnothing, \langle a, b\rangle, \langle a, b\rangle \cap U, \langle a, b\rangle \cap V$ — открытые в $\langle a, b\rangle$ множества, но значение $\frac{1}{2}$ не принимается, а значения 0 и 1 точно принимаются, так как иначе бы $\langle a, b\rangle$ лежал бы ровно в 1 множестве. $\square$

***Определение* 2.39.** A — линейно связно, если $\forall u, v \in A \exists \gamma\colon [a, b] \to A\colon \gamma(a) = u, \gamma(b) = v$.

Теорема 2.29. Линейно связное множество связно.

Доказательство. A — линейно связно, пусть оно не связно $\implies$ $A \subset U \cup V \quad U \cap V = \varnothing$. $A \cap U \neq \varnothing$ и $A \cap V \neq \varnothing$.

Возьмем $u \in A \cap U, v \in A \cap V$ и соединим их путем γ. $\gamma[a, b]$ — связное (как образ отрезка), $\gamma[a, b] \subset A \subset U \cup V \implies \underbrace{\gamma[a, b] \subset U}_{\text{нет}\gamma(b)}$ или $\underbrace{\gamma[a, b] \subset V}_{\text{нет}\gamma(a)}$. Противоречие. $\square$

***Определение* 2.40.** Область — открытое, линейно связное множество (из теоремы область связна).

Замечание. Если A открыто, то A — связно $\iff$ A — линейно связно.

2.5. Линейные операторы

***Определение* 2.41.** X, Y — векторные пространства,

$A\colon X \to Y$ — линейный оператор, если $\forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$.

Свойства.

1. $A0_X = 0_Y$. Доказательство: $\alpha = 0, \beta = 0$.
2. $A(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k A(x_k)$. Доказательство: индукция.

***Определение* 2.42.** A, B — линейный оператор: $X \to Y$.

$(A + B)(x) \coloneqq A(x) + B(x)$.

$(\lambda A)(x) = \lambda A(x)$.

То есть получили векторное пространство линейных операторов.

***Определение* 2.43.** $A\colon X \to Y, B\colon Y \to Z$ — линейные операторы $B \circ A\colon X \to Z$. $(B \circ A)(x) \coloneqq B(A(x))$.

Замечание. Это линейный оператор.

***Определение* 2.44.** Обратный оператор: $A\colon X \to Y$, $B\colon Y \to X$ обратный к A, если $A \circ B = Id_Y$ и $B \circ A = Id_x$. Обозначается A^{-1}.

Свойства.

1. Если обратный оператор $\exists$, то он единственный.
2. $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$.
3. $A\colon X \to X$ — обратимые операторы образуют группу по операции композиции.

Доказательство. 1. $B \circ A = Id_X \implies$ A — инъекция. Если $A(x) = A(y) \implies x = B(A(x)) = B(A(y)) = y$.

$A \circ B = Id_Y \implies A$ — сюръекция. $A(B(y)) = y \implies$ просто биекция.

Пусть B, C — обратные к A. $B(A(x)) = B \circ A(x) = x = C \circ A(x) = C(A(x)) \implies B = C$ на множестве значений A, но A — сюръекция.

2. $((\frac{1}{\lambda}A^{-1}) \circ (\lambda A))(x) = \frac{1}{\lambda}A^{-1}(\lambda A(x)) = x$.

□

Пример для 3 свойства. $X = \mathbb{R}^n, Y = R^m$. Можно рассматривать линейные операторы как матрицы $\Rightarrow Ax = y$ (m на n матрица).

***Определение* 2.45** (Матричная запись)**.** $A\colon R^n \to R^m$. Возьмем базисный вектор e_k — везде 0, кроме k-ой позиции —там 1.

Пусть $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. Тогда $Ax = A(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \underbrace{A_{e_k}}_{:= A_k \in \mathbb{R}^m}$.

То есть получили набор столбцов. Из которого можно получить матрицу.

***Определение* 2.46.** X и Y — нормированные пространства. $A\colon X \to Y$ — линейный оператор.

$\|A\| := \sup\limits_{\|x\|_X \leqslant 1} \|A_x\|_Y$.

Оператор ограниченный, если его норма конечна.

Замечание. Ограниченный оператор $\neq$ ограниченное отображение.

Линейное отображение + ограниченность $\implies = 0$.

Доказательство. Пусть $Ax \neq 0$, тогда $A(\lambda x) = \lambda Ax$, а это уже не ограничено. □

Свойства. 1. $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$

2. $\|\lambda A\| = \lambda \|A\|$.

3. $\|A\| = 0 \iff A \equiv 0$.

Доказательство. 1. $\|(A + B)x\|_Y = \|Ax + Bx\|_Y \leqslant \|Ax\|_Y + \|Bx\|_Y \iff \sup\limits_{\|x\|_x \leqslant 1} \|(A + B)x\| = \|A + B\| \leqslant \sup\limits_{\|x\|_x \leqslant 1} \|Ax\|_Y + \sup\limits_{\|x\|_x \leqslant 1} \|Bx\|_Y = \|A\| + \|B\|$.

2. $\|\lambda Ax\| = |\lambda| \cdot \|Ax\|$. $\sup\limits_{\|x\|_x \leqslant 1} \|\lambda Ax\| = |\lambda| \sup\limits_{\|x\|_x \leqslant 1} \|Ax\| = |\lambda| \|A\|$.

3. $\Rightarrow \|A\| = 0 \implies \|Ax\| = 0 \implies Ax = 0 \implies Ax = A(\frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|) = \|x\| A(\frac{x}{\|x\|}) = 0$.

□

Теорема 2.30. $A\colon X \to Y$ — линейный оператор. Тогда

$\|A\| = \sup\limits_{\|x\|_x < 1} \|Ax\|_Y = \sup\limits_{\|x\|_x = 1} \|Ax\|_Y = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_x} = \inf\{c > 0 \mid \|A_x\|_Y \leqslant C\|x\|_X\}$.

Доказательство. Обозначим за N_i i-ый элемент этой цепочки.

$N_1 \geqslant N_2$ и $N_1 \geqslant N_3$, так как $N_2, N_3 \subset N_1$.

$N_3 \geqslant N_4$. $\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \frac{1}{\|x\|}\|Ax\|_Y = \|A\frac{x}{\|x\|}\|_X \leqslant N_3$.

$N_4 = N_5$. $N_5 = \inf\{c > 0 \mid \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} < c\}$

Теперь докажем, что $N_1 \leqslant N_2$. Пусть $\|x\| \leqslant 1 \implies \|(1-\varepsilon)x\| < 1 \implies \|A((1-\varepsilon)x)\| \leqslant N_2$. Воспользуемся линейностью A: вытащим $(1-\varepsilon)$ за скобку. После этого устремим ε к 0. Тогда $\|Ax\| \leqslant N_2 \implies N_1 = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| \leqslant N_2$.

Теперь докажем, что $N_1 \leqslant N_4$. $\|x\| \leqslant 1$. Тогда $y := \frac{x}{\|x\|}$, $\|y\| = 1 \implies \|A_y\| \leqslant N_4 \implies \|Ax\| \leqslant \frac{1}{\|x\|} \cdot \|Ax\| \leqslant N_4 \implies \|A_x\| \leqslant N_4 \implies N_1 = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| \leqslant N_4$. □

Теорема 2.31. $A\colon X \to Y$ — линейный оператор. Следующие условия равносильны:

1. A — ограниченный оператор.
2. A — непрерывен в нуле.
3. A — непрерывен во всех точках.
4. A — равномерно непрерывен.

Доказательство. $4 \implies 3 \implies 2$ — очевидно.

$1 \implies 4$ $\|Ax - Ay\|_Y = \|A(x-y)\|_Y \leqslant \|A\| \cdot \|x-y\|_X$. Если $\|x-y\|_X < \frac{\varepsilon}{\|A\|}$, то $\|Ax - Ay\| < \varepsilon$, а это есть равномерность.

$2 \implies 1$. Возьмем $\varepsilon = 1$ и $\delta > 0$ из определения непрерывности. $\forall x \in X\colon \|x\| < \delta \implies \|Ax\| < 1$.

Пусть $\|y\| < 1$. Тогда $\|\delta y\| < \delta \implies \|A(\delta y)\| < 1 \implies \|Ay\| < \frac{1}{\delta} \implies \sup\limits_{\|y\|<1} \|Ay\| \leqslant \frac{1}{\delta}$. □

Следствие. 1. $\|Ax\|_Y \leqslant \|A\|\|x\|_X \quad \forall x \in X$.

2. $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.

Доказательство. 2. $\|A(Bx)\| \leqslant \|A\| \cdot \|Bx\| \leqslant \|A\|\|B\|\|x\|$.

$\|AB\| = \inf\{c > 0 \mid \|A(Bx)\| \leqslant C\|x\|\} \implies \|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

1. а где

□

Теорема 2.32. $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Тогда $\|A\|^2 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{jk}^2$. В частности, все такие операторы ограничены.

Доказательство. $\|Ax\|^2 = \sum\limits_{j=1}^{m} \underbrace{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}x_k\right)^2}_{\text{Минковский}} \leqslant$ (Коши-Буняковский) $\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}^2 \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}_{=\|x\|^2}$. Следовательно, $\|Ax\| \leqslant \|x\|\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{jk}^2} \geqslant \|A\|$. □

Замечание. В бесконечномерном случае бывают неограниченные операторы.

3. Ряды

3.1. Ряды в нормированных пространствах

***Определение* 3.1.** X — пространство с нормой, $x_n \in X$.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ — ряд. Частичная сумма ряда $S_n \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.

Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty}$, то он называется суммой ряда.

Ряд сходится, если у него есть сумма (и для $\mathbb{R}$ эта сумма конечна), иначе она бесконечна.

Теорема 3.1 (Необходимое условие сходимости)**.** Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_k$ — сходится, то $\lim x_n = 0$.

Доказательство. $S_n \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \to S \implies \underbrace{S_n - S_{n-1}}_{x_n} \to S - S = 0$. □

Свойства.

1. Линейность. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n + \beta \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.
2. Расстановка скобок. В ряду произвольным образом можно ставить скобки, расстановка скобок дает тот же результат.

   Набросок доказательства: мы просто смотрим на предел подпоследовательности.
3. В $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^n$ сходимость равносильна покоординатной сходимости.

Теорема 3.2 (Критерий Коши)**.** X — полное нормированное пространство.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geqslant N \colon \|\sum\limits_{k=m}^{n} x_k\| < \varepsilon$.

Доказательство. $S_n \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Последовательность S_n сходится $\iff$ S_n — фундаментальная $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \colon \|S_n - S_m\| < \varepsilon \iff \|\sum\limits_{k=m+1}^{n} x_k\| < \varepsilon$. □

***Определение* 3.2.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится абсолютно, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ сходится.

Замечание. В частности, в $\mathbb{R}$ абсолютная сходимость — сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$.

Теорема 3.3. X — полное нормированное пространство.

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ — сходится. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geqslant N \colon \sum\limits_{k=m+1}^{n} \|x_k\| < \varepsilon$. Воспользуемся свойством о том, что сумма норм не меньше, чем норма суммы. А значит получили $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geqslant N \colon \|\sum\limits_{k=m+1}^{n} x_k\| < \varepsilon$, что является критерием Коши для исходной последовательности. □

Теорема 3.4. 1. X — нормированное пространство. Если $\lim x_n = 0$ и в каждой скобке $\leqslant M$ слагаемых то из сходимости ряда после расстановки скобок следует сходимость исходнного

2. $\mathbb{R}$. Если в каждой скобке все члены одного знака, то из сходимости ряда после расстановки скобок следует сходимость исходного.

Доказательство. $S_n \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ и $S_{n_k} \to S$.

1. Возьмем n: $n_k \leqslant n < n_{k+1}$. $S_n = S_{n_k} + x_{n_k} + x_{n_k+1} + x_{n_k+2} + \ldots + x_n$. $\|S_n - S\| \leqslant \|S_{n_k} - S\| + \|x_{n_k+1}\| + \ldots + \|x_n\|$. Мы знаем, что $S_{n_k} \to S \implies \exists K \forall k \geqslant K\colon \|S_{n_k} - S\| < \varepsilon$.

   $\lim x_j = 0 \implies \exists J \forall j \geqslant J \|x_j\| < \varepsilon$. Следовательно исходная сумма не более $(M+1)\varepsilon$.

2. $n_k \leqslant n < n_{k+1}$. Пусть в этом блоке неотрицательные слагаемые. $S_n = S_{n_k} + x_{n_k+1} + x_{n_k+2} + \ldots + x_n \geqslant S_{n_k}$. А еще знаем, что $S_n = S_{n_{k+1}} - x_{n_{k+1}} - x_{n_{k+1}-1} - \ldots - x_{n+1} \leqslant S_{n_{k+1}}$. Откуда получаем, что $S_{n_k} \leqslant S_n \leqslant S_{n_{k+1}}$, где всё $\to S$.

□

3.2. Знакопостоянные ряды

Теорема 3.5. Пусть $a_n \geqslant 0$.

Тогда сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ равносильная ограниченности последовательности $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Доказательство. $S_1 \leqslant S_2 \leqslant \ldots$. Монотонная возрастающая последовательность имеет предел $\iff$ она ограничена. □

Теорема 3.6 (Признак сравнения)**.** Пусть $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$. Тогда

1. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходится.

2. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — расходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

Доказательство. 1. $A_n \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = B_n$.

   $\sum b_n$ — сходится $\implies$ B_n — ограничена $\implies$ A_n ограничена $\implies$ $\sum a_n$ сходится.

2. Отрицание 1.

□

Следствие. 1. Пусть $a_n, b_n \geqslant 0$. Если $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходится.

2. Пусть $a_n, b_n \geqslant 0$, Если $a_n \sim b_n$, то ряды ведут себя одинаково.

Доказательство. 1. $a_n = \mathcal{O}(b_n) \implies 0 \leqslant a_n \leqslant Cb_n$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Cb_n = C\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — сходится $\implies \sum a_n$ — сходится.

2. $a_n = b_n c_n$, где $\lim c_n = 1 \implies \frac{1}{2} \leqslant c_n \leqslant 2$ при $n \geqslant N$. Тогда $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ и $b_n = \mathcal{O}(a_n)$.

□

Теорема 3.7 (Признак Коши)**.** Пусть $a_n \geqslant 0$.

1. Если $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$, то ряд сходится.
2. $\sqrt[n]{a_n} > 1$, то ряд расходится.
3. Пусть $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} =: q^*$. Если $q^* > 1$, то ряд расходится, если $q^* < 1$, то ряд сходится.

Замечание. Если $q^* = 1$, то ряд может сходиться, а может расходиться. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ — сходится, $\sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}} \to 1$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — расходится. $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$.

Доказательство.

1. $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1 \implies a_n \leqslant q^n$. По признаку сравнения с геометрической прогрессией $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ — сходится.
2. $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1 \implies a_n \not\to 0 \implies$ расходится.
3. Если $q^* > 1$. Найдется $n_k :\ \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \to q^* > 1$ (по определению верхнего предела) $\implies$ начиная с некоторого номера $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1 \implies a_{n_k} > 1 \implies a_n \not\to 0$ и ряд расходится.

   Если $q^* < 1$, $q^* = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geqslant n} \sqrt[k]{a_k} \implies$ для больших n $\sup_{k\geqslant n} \sqrt[k]{a_k} < q < 1$. Но при этом $\sqrt[n]{a_n} \leqslant \sup\limits_{k\geqslant n} \sqrt[k]{a_k}$, а значит $\sqrt[n]{a_n} < q$ при больших $n \implies$ ряд сходится.

□

Теорема 3.8 (Признак Даламбера)**.** Пусть $a_n > 0$. Тогда

1. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant d < 1$, то ряд сходится.
2. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, то ряд расходится.
3. Пусть $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^*$. Если $d^* < 1$, то ряд сходится. Если $d^* > 1$, то ряд расходится.

Замечание. С единицей все еще ничего непонятно. Смотри предыдущие примеры.

Доказательство.

1. $\frac{a_n}{a_1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_2}{a_1} \leqslant d^{n-1}$. $a_n \leqslant d^{n-1} \cdot a_1$ и ряд мажорируется геометрической прогрессией $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot d^{n-1}$. Она сходится $\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходится.
2. $a_{n+1} \geqslant a_n \implies a_n \geqslant a_1 > 0$ и $a_n \not\to 0 \implies$ ряд расходится.
3. Если $d^* > 1$. Тогда $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ при $n \geqslant N \implies a_n \geqslant a_N > 0 \quad \forall n \geqslant N \implies a_n \not\to 0$ и ряд расходится.

   Если $d^* < 1$. Так как $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^* \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} < d$ при $n \geqslant N \implies$ ряд сходится по признаку 1.

□

Пример. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Даламбер. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{n+1} \to 0 < 1$. Ряд сходится.

Коши. $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{x}{\sqrt[n]{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}} = \frac{x}{ne^{-1}\sqrt[2n]{2\pi n}} \sim \frac{xe}{n} \to 0$.

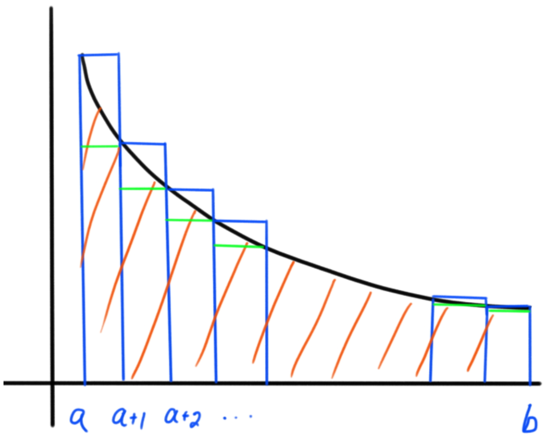
Теорема 3.9. Пусть $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^*$. Тогда $\lim \sqrt[n]{a_n} = d^*$.

Доказательство. $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^* \implies \lim \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{(n+1)-n} = \ln d^* \xrightarrow{\text{т. Штольца}} \lim \frac{\ln a_n}{n} = \ln d^* \implies \lim \sqrt[n]{a_n} = d^*$. $\square$

Теорема 3.10. Пусть f неотрицательная монотонная $: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$. Тогда:

$$\left| \sum_{k=a}^{b} f(k) - \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \leqslant \max\{f(a), f(b)\}.$$

Доказательство. $\sum\limits_{k=a}^{b-1} f(k) \geqslant \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \sum\limits_{k=a+1}^{b} f(k)$. Не поняли? Рисуем картинку!



$$\sum_{k=a}^{b} f(k) - \int\limits_a^b \leqslant \sum_{k=a}^{b} - \sum_{k=a-1}^{b} = f(a) \text{ (аналогично } f(b) = \sum_{k=a}^{b} - \sum_{k=a}^{b-1})$$

$\square$

Теорема 3.11 (интегральный признак сходимости ряда)**.** Пусть $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ неотрицательная, монотонно убывающая.

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ и $\int\limits_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ ведут себя одинаково.

Доказательство. По предыдущей теореме $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) \geqslant \int\limits_1^n f(x)\mathrm{d}x \geqslant \sum\limits_{k=2}^{n} f(k) = S_n - f(1)$.

Если ряд сходится, то S_n — ограничена $\implies \int\limits_1^n f(x)\mathrm{d}x$ ограничена $\implies F(x) = \int\limits_1^x f$ — ограничена $\implies \int\limits_1^{\infty} f(x)$ сходится.

Если $\int$ сходится $\implies \int\limits_1^n f$ — ограничена $\implies S_n$ — ограничена $\implies$ ряд сходится. $\square$

Пример. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$ (иначе члены ряда $\not\to 0$ и ряд расходится).

$f(x) = \frac{1}{x^p}$. Монотонно убывает. $\sum \frac{1}{n^p}$ и $\int\limits_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ ведут себя одинаково: сходятся при $p > 1$.

2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ монотонно убывает. Поэтому $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$ и $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ ведут себя одинаково.

   Там можно посчитать интеграл (разойдется).

Следствие. 1. Если $a_n > 0$ и $a_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n^p})$ при $p > 1$ — ряд $\sum a_n$ — сходится.

2. Если $a_n > 0$ и $a_n \sim \frac{c}{n^p}$, то при $p > 1$ ряд $\sum a_n$ — сходится, а иначе расходится.

3.3. Знакопеременные ряды

***Определение* 3.3.** $\sum a_n$ — сходится, но не абсолютно = ряд сходится условно.

Теорема 3.12 (Преобразование Абеля)**.** $\sum\limits_{k=1}^{n} a_n b_n$. $A_k \coloneqq a_1 + a_2 + \ldots + a_k$. Хочется заменить $a_n \to A_n$.

Формулу сложнее запомнить, чем вывести, поэтому сначала выпишем её.

Доказательство.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{j=2}^{n} A_{j-1} b_j \overset{k=j-1}{=} \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} =$$
$$= A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

□

Теорема 3.13 (Признак Дирихле)**.** 1. A_n (частичные суммы) — ограничены ($|A_n| \leqslant M$),

2. b_n монотонны,

3. $b_n \to 0$.

   Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ — сходится.

Доказательство.

$$S_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \underbrace{A_n b_n}_{\text{огр. на б.м.}} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Надо показать, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$ — сходится. Для этого докажем, что ряд абсолютно сходится: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |A_k| |b_k - b_{k+1}|$ — сходится.

Мы знаем, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |A_k| |b_k - b_{k+1}| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} M \cdot |b_k - b_{k+1}| \overset{(*)}{=} M |\sum\limits_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1})| \leqslant M |b_1|$.

$(*)$ — у нас постоянная монотонность, следовательно все слагаемые одного знака. □

Теорема 3.14 (Признак Абеля)**.** 1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходится,

2. b_n — монотонны,

3. b_n — ограничены.

Следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Доказательство. $2)+3) \implies \exists \mathbb{R} \ni b := \lim b_n$. Тогда $\widetilde{b}_n := b_n - b$ монотонны и $\to 0$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходится $\implies A_n$ имеет предел $\implies A_n$ — ограничены.

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\widetilde{b}_n$ — сходится по признаку Дирихле. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\widetilde{b}_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b) \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n = b\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{\text{по усл.}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n\widetilde{b}_n}_{\text{выяснили}}$. □

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n)}{n^p}$ - сходится при $p > 0 : a_n = \sin n, b_n = \frac{1}{n^p}, |A_n| \leq 2$.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sin^2 n}$ - сходимость неизвестна.

***Определение* 3.4.** Знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, $a_n \geqslant 0$.

Теорема 3.15 (Признак Лейбница)**.** Пусть есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$. $a_n \geqslant 0$ и монотонно стремится к 0.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ сходится (по Дирихле: $a_n = (-1)^{n-1}, b_n = a_n$). Более того, $S_{2n} \leqslant S \leqslant S_{2n+1}$.

Доказательство. $S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geqslant S_{2n}$. $S_{2n+3} = S_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3} \leqslant S_{2n+1}$.

$[0, S_1] \supset [S_2, S_3] \supset [S_4, S_5] \supset \ldots \supset [S_{2n}, S_{2n+1}] \supset \ldots$. $S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \to 0$.

Пусть S их общая точка. Тогда $\lim S_{2n} = \lim S_{2n+1} = S$. □

Пример Ряд Лейбница.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = H_{2n} - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}) = H_{2n} - H_n =$$
$$= \ln 2n + \gamma + o(1) - (\ln n + \gamma + o(1)) = \ln 2 + o(1).$$

Здесь заменили в изначальной сумме все отрицательные слагаемые на положительные и вычли их удвоенную сумму.

Пример. $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots$.

$\widetilde{S}_{3n} = (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}) + \ldots + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}) = \sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}) = \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{n}(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}) = \frac{S_{2n}}{2} \to \frac{\ln 2}{2}$.

***Определение* 3.5.** $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — биекция $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ — перестановка ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теорема 3.16. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Доказательство. 1. $a_n \geqslant 0$. $S_n \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leqslant S \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

$\widetilde{S}_n \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} \leqslant S_{\max \varphi(1),\ldots,\varphi(n)} \leqslant S \implies \lim \widetilde{S}_n \leqslant S \implies \widetilde{S} \leqslant S$. Но ϕ - биекция и, т.к. любая перестановка не увеличивает сумму ряда, то можем сделать обратную перестановку и получим $S \leqslant \widetilde{S} \implies S = \widetilde{S}$

2. $a_n \in \mathbb{R}$. $a_n = (a_n)_+ - (a_n)_-$, где $(a)_+ \coloneqq \max\{a, 0\}, (a)_- \coloneqq \max\{-a, 0\}$. $|a_n| = (a)_- + (a)_+ \geqslant (a_n)_\pm \geqslant 0$.

   Если $\sum |a_n|$ — сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n)_\pm$ — сходится. $\sum(a_{\varphi(n)})_+ = \sum(a_n)_+$ и $\sum(a_{\varphi(n)})_- = \sum(a_n)_- \implies$ ряд сходится.

□

Замечание. 1. Теорема верна в полном нормированном пространстве.

2. В $\mathbb{R}^d$ верно обратное: если любая перестановка не меняет суммы, то ряд абсолютно сходится.

3. Если ряд $a_n \in \mathbb{R}$ сходится условно, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n)_+ = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n)_- = +\infty$.

   Доказательство. Если $\sum(a_n)_+ < +\infty$, то $\sum |a_n| = 2\sum a_n - \sum(a_n)_+$ — противоречие.
   $|a_n| = 2(a_n)_+ - a_n$. □

4. Если $a_n \geqslant 0$, то $\sum a_{\varphi(n)} = \sum a_n$ верно и для расходящегося.

Теорема 3.17 (Теорема Римана)**.** Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, тогда $\forall s \in \overline{\mathbb{R}}$ найдется такая перестановка, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = s$.

Так же существует перестановка, для которой нет суммы.

Доказательство. Запишем сумму $a_1 + a_2 + \ldots$. Сотрем все отрицательные слагаемые: $b_1 + b_2 + \ldots = \sum(a_n)_+ = +\infty$. Сотрем все положительные: $c_1 + c_2 + \ldots = \sum(a_n)_- = +\infty$.

1. Случай $s \in \mathbb{R}$. $b_1 + b_2 + \ldots + b_n > s \geqslant b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1}$.

   Теперь будем набирать c_i, пока сумма больше s. Потом снова начнем набирать b...

   Обозначим за S_i сумму на i-ом шаге. Тогда знаем, что $a_n \to 0$. $S_1 > S \geqslant S_1 - b_{n_1}$, $S_2 + c_{m_1} \geqslant S > S_2$, $S_3 > S \geqslant S_3 - b_{n_2}$, $S_4 + c_{m_2} \geqslant S > S_4$.

   $S_{2n+1} > S \geqslant S_{2n+1} - b_{n_k}$. $\underbrace{S + b_{n_k}}_{\to s} \geqslant S_{2k+1} > \underbrace{S}_{\to s}$.

2. Случай $\pm\infty$.

   Очев + упражнение.

3. Случай безпредела.

   Ежу понятно.

$\square$

Теорема 3.18 (Теорема Коши о произведении рядов)**.** Пусть $A \coloneqq \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $B \coloneqq \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и ряды абсолютно сходятся.

Тогда ряд, составленный из $a_k b_n$ в произвольном порядке абсолютно сходится и его сумма AB.

Доказательство. $A^* \coloneqq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|, A_n^* \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$. $A_n^* \leqslant A^*, B_n^* \leqslant B^*$.

S_m^* — частичная сумма для ряда из $|a_k b_j|$. $S_N \leqslant (|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|)(|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_m|) = A_n^* B_m^* \leqslant A^* B^*$, где n — максимальный индекс у a_k в слагаемом из S_N^*, m — то же самое для b_k.

S_N^* ограничены $\implies$ ряд абсолютно сходится. Тогда можем попереставлять ашки и бшки и посмотреть на табличку.

$$
\begin{array}{ccccc}
a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & a_1 b_4 & \ldots \\
a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & a_2 b_4 & \ldots \\
a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 & a_3 b_4 & \ldots \\
a_4 b_1 & a_4 b_2 & a_3 b_3 & a_4 b_4 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

Посмотрим на частичные суммы в квадратиках $i \times i$. $S_{n^2} = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_k b_j = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \sum\limits_{j=1}^{n} b_j = A_n B_n \to AB$. $\square$

***Определение* 3.6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ произведение этих рядов — ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, где $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \ldots + a_n b_1$.

Теорема 3.19 (Теорема Мертенса)**.** $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, B = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — сходятся, причем один из них абсолютно.

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ — сходится и его сумма AB.

Доказательство. Не доказывалось в курсе. $\square$

Замечание. Абсолютной сходимости нет, важен порядок слагаемых.

Замечание. Обычной сходимости не хватает.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ сходится по признаку Лейбница.

$a_n = b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

$$c_n = (-1)^{n-1} (\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} 1}_{\geqslant n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n}}}).$$

А значит $|c_n| \geqslant 1$, а необходимое условие сходимости отсутствует.

Теорема 3.20 (Теорема Абеля)**.** $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, B = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и $C = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ — произведение рядов.

Если все три ряда сходятся, то $AB = C$.

Лемма. Пусть $x_n \to x$ и $y_n \to y$. Тогда:

$$\frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + \ldots + x_ny_1}{n} \to xy.$$

Доказательство леммы. Случай $y = 0$. Надо доказать, что $x_1y_n + \ldots + x_ny_1 = o(n)$. $|x_n| \leqslant M, |y_n| \leqslant M$. $\forall \varepsilon > 0 \exists N\colon |y_n| \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant N$.

Тогда в сумме все слагаемые с y_n, где $n \geqslant N$ будут $\leqslant \varepsilon M$, а первые N — $\leqslant M^2$. Тогда сумма $\frac{|\ldots|}{n} < \varepsilon M + \frac{NM^2}{n} < 2\varepsilon M$ при больших n.

Случай $y_n \equiv y$. Тогда сумма $\frac{\ldots}{n} = y\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \to xy$ по теореме Штольца.

Общий случай: $y_n = y + \widetilde{y_n}, \widetilde{y_n} \to 0$. Тогда сумма с $\widetilde{y_n}$ стремится к нулю, а, следовательно исходная стремится к xy. Складываем и получаем что нужно. $\square$

Доказательство теоремы. Рассмотрим $AB \leftarrow \frac{A_1B_n+A_2B_{n-1}+\ldots+A_nB_2}{n} = \frac{C_1+C_2+\ldots+C_n}{n} \to C$.

Для доказательства равенства посчитаем количество вхождений слагаемых вида a_ib_j в C и AB. c_{i+j} встречается $n-(i+j)+1$ раз в C_{i+j} и последующих и столько же раз в A_kB_l при $k \geqslant i$ и $l \geqslant j$. $\square$

3.4. Бесконечные произведения

***Определение* 3.7.** $\prod\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, сходящийся, если $\exists \lim P_n$, он конечен и $\neq 0$. P_n - частичные произведения, аналогично суммам.

Пример. 1. $\prod\limits_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$. Оно очевидным образом равно $\frac{1}{2}$.

2. $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{4n^2}) = \frac{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot\ldots\cdot(2n)^2} = \frac{((2n-1)!!)^2(2n+1)}{((2n)!!)^2} \xrightarrow{\text{ф-ла Валиса}} \frac{2}{\pi}$

Свойства. 1. Добавление / выкидывание конечного числа ненулевых сомножителей не влияет на сходимость.

2. Если $\prod\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ — сходится, то $\lim b_k = 1$.

   Доказательство. $b_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \to \frac{P}{P} = 1$, так как $P \neq 0$ и ∞. $\square$

3. У сходящегося произведения начиная с некоторого места все множители > 0.

4. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ для $b_n > 0$.

   $\prod\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — сходится $\iff \sum\limits_{n=0}^{\infty} \ln b_n$ — сходится. Причем произведение — exp от суммы.

   Доказательство. $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n} b_k$. $\ln P_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln b_k =: S_n$.

   P_n имеет предел из $(0; +\infty) \iff \ln P_n = S_n$ — имеет конечный lim $\iff \sum \ln b_n$ — сходящийся. $\square$

Пример. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{p_n-1}=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{1}{p_n^j}$ — где p_n — n-ое простое число.

$\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{p_k}{p_k-1}\geqslant H_n$.

$\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{p_k}{p_k-1}=\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}>\prod\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=0}^{n}\frac{1}{p_k^j}=\sum\frac{1}{p_1^{\alpha_1}\ldots p_n^{\alpha_n}}>\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=H_n\to\infty$.

Теорема 3.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$ — расходится. Более того $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}\geqslant\ln\ln n-2$.

Доказательство. $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}>H_n\implies\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}})>\ln H_n>\ln\ln n$.

Очевидно (по разложению $\ln(1-x)$ по Тейлору), что $\ln(1-x)\geqslant -x-x^2$.

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}})\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k^2}}_{\leqslant 2}$ □

Замечание.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}=\ln\ln n+O(1).$$

Упражнение.
1. Доказать, что $S(k)=\sum\limits_{k<p\leqslant k^2}\frac{1}{p}<\frac{4}{3}$.

   Указание: Посчитать количество чисел $\leqslant k^2$, которые делятся на такие p.

2. Доказать, что $\sum\limits_{\substack{p\geqslant n\\ p\text{ — простое}}}\frac{1}{p}<2\ln\ln n+4$.

3.5. Функциональные последовательности и ряды

***Определение* 3.8.** $f,f_n\colon E\to\mathbb{R}$, f_n поточечно сходится к f, если $\forall x\in E\colon\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$.

В кванторах: $\forall x\in E\forall\varepsilon>0\exists N=N(x,\varepsilon)\colon\forall n\geqslant N|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

***Определение* 3.9.** f_n равномерно сходится к f на E $f_n\rightrightarrows f$ на E:

$$\forall\varepsilon>0\exists N=N(\varepsilon)\forall n\geqslant N\forall x\in E\colon|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

Замечание. Из равномерной сходимости следует поточечная.

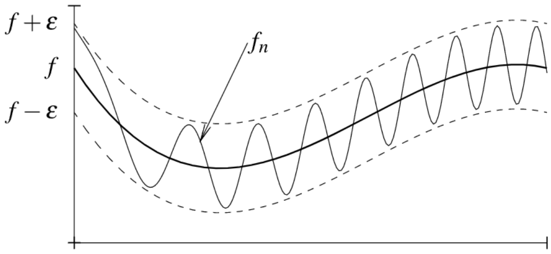
Пример. $f_n(x)=x^n$, $E=(0,1)$.

$\lim f_n(x)=\lim x^n=0$. $f(x)\equiv 0\implies f_n$ поточечно сходится к f. При этом, если взять $x>\sqrt[n]{\varepsilon}$, то мы проиграли, следовательно равномерной сходимости нет.

Замечание. Равномерная сходимость на графике — графики f_n начиная с некоторого места попадают в полоску графика f.

Теорема 3.22. $f_n,f\colon E\to\mathbb{R}$.

Тогда $f_n\underset{E}{\rightrightarrows}f\iff\sup\limits_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|\to 0$



Доказательство. $\Rightarrow$: $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geqslant N: \forall x \in E |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Из части с $\forall x \in E$ как раз прямо и следует условие на sup.
$\Leftarrow$: $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geqslant N \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Из супремума следует $\forall x \in E |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
Здесь мы пользовались тем, что $\sup |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x) - f(x)|$. □

Следствие.

1. Если $\forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n$ и $\lim a_n = 0$, то $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$.
2. Если $x_n \in E$: $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$, то нет равномерной сходимости $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$.

Доказательство.

1. $\implies 0 \leqslant \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n \to 0 \implies \sup \to 0 \implies f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$.
2. $\sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \geqslant |f_n(x_n) - f(x_n)| \not\to 0 \implies \sup \not\to 0 \implies$ нет равномерной сходимости.
   Здесь x_n — какая-то конкретная точка.

□

Пример. $E = (0,1), f(x) \equiv 0, f_n(x) = x^n$. $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, $f_n(x_n) - f(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} \neq 0 \implies$ нет равномерной сходимости.

***Определение* 3.10.** $g_n \colon E \to \mathbb{R}$ — равномерно ограничена, если найдется M, такой что $|g_n(x)| \leqslant M \quad \forall x \in E \quad \forall n$

Утверждение 3.23. Произведение равномерно ограниченной и равномерно сходящейся к нулю равномерно — сходится к нулю.

Доказательство. g_n — равномерно ограничена, $|g_n(x)| \leqslant M, f_n(x) \rightrightarrows 0, \sup\limits_{x\in E} |f_n(x)| \to 0$.

$$\sup_{x\in E} |f_n(x) g_n(x)| \leqslant M \sup \to 0 \implies f_n g_n \rightrightarrows 0.$$ □

Замечание.

1. $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f \iff f_n - f \underset{E}{\rightrightarrows} 0$.
2. Если $f_n \rightrightarrows f, g_n \rightrightarrows g \implies \alpha f_n + \beta g_n \rightrightarrows \alpha f + \beta g$.

Теорема 3.24 (Критерий Коши для равномерной сходимости последовательности функций)**.** $f_n \colon E \to \mathbb{R}$ тогда f_n равномерно сходится к некоторой функции $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geqslant N \forall x \in E |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Доказательство. $\implies: f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \begin{matrix} \forall n \geqslant N \forall x \in E |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall m \geqslant N \forall x \in E |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \end{matrix}$.

$$\forall m, n \geqslant N \forall x \in E |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Leftarrow$: $\forall\varepsilon > 0\exists N\forall m, n \geqslant N_e\forall x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Зафиксируем $x \in E$. Если $m_n \geqslant N_\varepsilon$, то знаем заклинание $\implies$ $f_n(x)$ — фундаментальная последовательность $\implies$ она имеет конечный предел. Пусть $f(x) \coloneqq \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Тогда $\forall\varepsilon > 0\exists N\forall m \geqslant n \geqslant N\forall x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ — критерий Коши. Устремим тут $m \to \infty$. Тогда $\forall\varepsilon > 0\exists N\forall n \geqslant N\forall x \in E|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \implies f_n$ равномерно сходится к f. $\square$

***Определение* 3.11.** Пространство $C(K)$, K — компакт.

$C(K) \coloneqq \{f\colon K \to \mathbb{R} \land f$ непрерывна во всех точках$\}$ — векторное пространство.

$f, g\colon K \to \mathbb{R}, (\alpha f + \beta g)(x) \coloneqq \alpha f(x) + \beta g(x)$.

Можно завести норму $\|f\|_{C(K)} \coloneqq \max\limits_{x\in K} |f(x)|$ — нормированное пространство.

Убедимся, что это действительно норма. Интересно только неравенство треугольника: $\|f + g\| = |f(x_0) + g(x_0)| \leqslant |f(x_0)| + |g(x_0| \leqslant \|f\| + \|g\|$.

***Определение* 3.12.** Пространство $l^\infty(E)$.

$l^\infty(E) \coloneqq \{f\colon E \to \mathbb{R} \land f$ — ограничена$\}$ — векторное пространство.

$\|f\|_{l^\infty(E)} \coloneqq \sup_{x\in E} |f(x)|$ — нормированное пространство.

Замечание. $C(K) \subset l^\infty(K)$.

Теорема 3.25. $l^\infty(E)$ — полное пространство.

Доказательство. f_n — фундаментальная последовательность $\iff \forall\varepsilon > 0\exists N\forall m, n \geqslant N \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f_m(y)| = \|f_n - f_m\| < \varepsilon \implies \forall\varepsilon > 0\exists N\forall m, n \geqslant N\forall x \in E|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \implies f_n$ — равномерно сходится на $E \implies \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_{l^\infty(E)} \to 0$. Надо проверить, что $f \in l^\infty(E)$.

$f_n(x) \leqslant \underbrace{|f(x) - f_n(x)}_{\leqslant\|f - f_n\| < 1} + \underbrace{|f_n(x)|}_{\leqslant\|f_n\|}$. $\square$

Теорема 3.26. $f_n, f\colon E \to \mathbb{R}, a \in E, f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$ и f_n непрерывна в точке a. Тогда f непрерывна в точке a.

Доказательство. Берем $\varepsilon > 0$. Найдем N, такой что $\forall n \geqslant N\forall x \in E|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

$|f(x) - f(a)| \leqslant \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(a)|}_{<\varepsilon,\ \text{если } |x-a|<\delta} + \underbrace{|f_N(a) - f(a)|}_{<\varepsilon} < 3\varepsilon$.

$\exists\delta > 0\forall|x - a| < \delta \quad |f_N(x) - f_N(a)| < \varepsilon \implies f$ — непрерывна в a. $\square$

Следствие Теорема Стокса-Зайделя. $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$ и f_n непрерывна во всех точках $E \implies f$ непрерывна во всех точках из E. Пользуемся предыдущей теоремой для каждой точки.

Теорема 3.27. $C(K)$ — полное.

Лемма. (X, ρ) — полное метрическое пространство, $Y \subset X$ — замкнутое $\implies (Y, \rho)$ — полное.

Доказательство леммы. Возьмем $y_n \in Y$ — фундаментальная последовательность в $Y \implies$ она фундаментальна в $X \implies \exists y_* \in X\colon y_* = \lim y_n \implies y_*$ — предельная точка $Y \implies y_* \in Y$. $\square$

Доказательство теоремы. $C(K)$ — замкнутое подпространство $l^\infty(K)$. $\sup\limits_{x\in K} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_{l^\infty(K)} \to 0$. Тогда если $f_n \in C(K), f_n \underset{K}{\rightrightarrows} f \implies f \in C(K)$ по т.Стокса-Зайделя. $\square$

***Определение* 3.13.** $u_n\colon E\to\mathbb{R}$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ — функциональный ряд.

$S_n(x) \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)\colon E\to\mathbb{R}$ — частичная сумма ряда.

Если S_n поточечно сходится к S, то ряд сходится поточечно.

Если $S_n \underset{E}{\rightrightarrows} S$, то ряд равномерно сходится на E.

***Определение* 3.14.** Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится поточечно, то $r_n(x) \coloneqq \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ — остаток (хвост) ряда.

Теорема 3.28. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $E \iff r_n \underset{E}{\rightrightarrows} 0$.

Доказательство. $S_n \underset{E}{\rightrightarrows} S \iff S - S_n \rightrightarrows 0$. $(S - S_n = r_n)$. □

Замечание. Необходимые условия равномерной сходимости. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится, то $u_n \rightrightarrows 0$.

Доказательство. Равномерная сходимость $\implies S_n \rightrightarrows S \implies S_n - S_{n-1} \rightrightarrows S - S = 0$. □

Замечание. Если $x_n\in E\colon \underbrace{u_n(x_n) \not\to 0}_{\text{нет равномерной сходимости }\to 0}$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ не может равномерно сходиться.

Замечание. Из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_n)$ ничего не следует.

$u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x\in(\frac{1}{n+1}, n] \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$.

$x_n = \frac{1}{n} \implies u_n(x_n) = \frac{1}{n}$ и ряд $\sum u_n(x_n)$ — расходится.

Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится. $0 \leqslant r_n(x) \leqslant \frac{1}{n+1}.r_n \rightrightarrows 0$.

Теорема 3.29 (Критерий Коши для равномерной сходимости ряда)**.** $u_n\colon E\to\mathbb{R}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на $E \iff$

$$\forall\varepsilon>0\exists N\forall m,n\geqslant N\forall x\in E|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(x)| < \varepsilon..$$

Доказательство. $\sum u_n(x)$ равномерно сходится $\iff S_n(x) \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ равномерно сходится $\iff \forall\varepsilon>0\exists N\forall m>n\geqslant N\forall x\in E|S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon$, а эта разность как раз то, что надо. □

Теорема 3.30 (Признак сравнения)**.** $u_n, v_n\colon E\to\mathbb{R}$, $|u_n(x)| \leqslant v_n(x) \quad \forall x\in E, \forall n$.

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ сходится равномерно на E, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E.

Доказательство. Применим к левой части критерий Коши: $\forall\varepsilon > 0\exists N\forall m > n \geqslant N\forall x \in E \quad |\sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k(x)| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{m} |u_k(x)| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{m} v_k(x) < \varepsilon$. Откуда получаем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходится на E. □

Следствие.

1. Если $\sum |u_n(x)|$ сходится равномерно на E, то $\sum u_n(x)$ сходится равномерно на E.
2. Признак Вейерштрасса. Если $|u_n(x)| \leqslant a_n \quad \forall x \in E \forall n$ и ряд $\sum a_n$ — сходится, то $\sum u_n(x)$ сходится равномерно на E.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ равномерная сходимость на $\mathbb{R}$.

$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — сходится.

Замечание. Ряд может сходиться равномерно, но не абсолютно $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

Ряд сходится абсолютно, но не сходится равномерно $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ при $x \in (-1, 1)$.

Ряд сходится абсолютно, ряд сходится равномерно, но ряд $\sum |u_n(x)|$ сходится неравномерно.

Теорема 3.31 (Признак Дирихле)**.** $a_n, b_n \colon E \to \mathbb{R}$.

1. $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \leqslant M \quad \forall x \in E \forall n$.
2. $b_n(x)$ монотонно при любом фиксированном $x \in E$.
3. $b_n \rightrightarrows 0$.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на E.

Доказательство. $S_n(x) \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(x) = A_n(x) b_n(x) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$, где A_n — частичная сумма a.

$A_n b_n \rightrightarrows 0$, так как A_n равномерно ограничена и $b_n \rightrightarrows 0$.

Докажем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$ равномерно сходится.

$|A_k(x)||b_k(x) - b_{k+1}(x)| \leqslant M|b_k(x) - b_{k+1}(x)| =: v_k(x)$. Надо доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ равномерно сходится, то есть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |b_k(x) - b_{k+1}(x)|$ равномерно сходится. $\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k(x) - b_{k+1}(x)| = |\sum\limits_{k=1}^{n} (b_k(x) - b_{k+1}(x))| = b_1(x) - b_n(x) \rightrightarrows b_1(x)$ □

Теорема 3.32 (Признак Абеля)**.** $a_n, b_n \colon E \to \mathbb{R}$.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ — равномерно сходится.
2. $b_n(x)$ монотонно при любом фиксированном $x \in E$.
3. $b_n(x)$ равномерно ограничена.

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на E.

Доказательство. $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{n+k}(x)b_{n+k}(x) = (A_{n+p}(x) - A_p(x))b_{n+p}(x) + \sum\limits_{k=1}^{p-1}(A_{n+k}(x) - A_k(x))(b_{n+k}(x) - b_{n+k+1}(x))$.

$\sum\limits_{k=1}^{m} a_{n+k}(x) = A_{n+m}(x) - A_n(x)$.

$A_n(x) \rightrightarrows A(x) \implies \forall\varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geqslant N \forall x \in E\colon |A_n(x) - A_m(x)| < \varepsilon$.

Тогда $|A_{n+p}(x) - A_n(x)| < \varepsilon$ и $|A_{n+k}(x) - A_n(x)| < \varepsilon$.

$|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)| \leqslant \underbrace{|A_{n+p}(x) - A_n(x)|}_{<\varepsilon} \cdot \underbrace{|b_{n+p}(x)|}_{\leqslant M} + \sum\limits_{k=1}^{p-1} \underbrace{|A_{n+k}(x) - A_n(x)}_{\leqslant\varepsilon} |b_{n+k}(x) - b_{n+k+1}(x)| \leqslant \varepsilon M + \varepsilon \sum\limits_{k=1}^{p-1} |b_{n+k}(x) - b_{n+k+1}(x)| = \varepsilon M + \varepsilon |\sum\limits_{k=1}^{p-1}(b_{n+k}(x) - b_{n+k+1}(x))| \leqslant \varepsilon M + \varepsilon \cdot 2M = 3M\varepsilon$.

По критерию Коши для $\sum a_n b_n$ он равномерно сходится. ☐

Теорема 3.33 (Признак Лейбница)**.** $b_n\colon E \to \mathbb{R}$, $b_n \rightrightarrows 0, b_n(x)$ монотонна при любом фиксированном $x \in E$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_n(x)$ равномерно сходится на E.

Доказательство. $a_n(x) = (-1)^n$, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x) = 0$ или $-1 \implies$ равномерно ограничен. Применим признак Дирихле. ☐

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ при $x \in (0, 1)$.

Ряд абсолютно сходится $\forall x \in (0, 1)\colon \left|\frac{(-1)^n}{n} x^n\right| \leqslant x^n$.

Ряд сходится равномерно $b_n(x) = \frac{x^n}{n} \rightrightarrows 0, 0 \leqslant b_n(x) \leqslant \frac{1}{n}, x_n(x) \searrow$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n} x^n\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Нет равномерной сходимости. $\sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{x^k}{k} \geqslant n\frac{x^{2n}}{2n} = \frac{x^{2n}}{2} \to \frac{1}{2e}$, $x = 1 - \frac{1}{2n}$.

Теорема 3.34 (Признак Дини)**.** $0 \leqslant u_n \in C(K)$, K — компакт и $S_x \coloneqq \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \in C(k)$. Тогда ряд сходится равномерно на K.

Доказательство. $r_n(x) = S(x) - S_n(x) \in C(K), S(x) - S_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x), 0 \leqslant r_{n+1} \leqslant r_n(x)$.

Надо доказать, что $r_n \underset{K}{\rightrightarrows} 0$. $r_n(x_n) = \sup\limits_{x \in K} r_n(x) \to 0$ для некоторого $x_n \in K$.

От противного. Пусть нет стремления к нулю. $r_{n_k}(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon$, $x_{n_k} \in K$. Выберем сходящуюся подпоследовательность $x_{m_k} \to x_* \in K$.

$r_{m_k}(x_{m_k}) \geqslant \varepsilon$. $x_{m_k} \to x_*$. Тогда $r_n(x_{m_k}) \geqslant r_{n+1}(x_{m_k}) \geqslant r_{n+2}(x_{m_k}) \geqslant \ldots \geqslant r_{m_k}(x_{m_k}) \geqslant \varepsilon$, при этом $r_n(x_{m_k}) \to r_n(x_*) \implies r_n(x_*) \geqslant \varepsilon \quad \forall x$. Но $r_n(x_*) \to 0$. Противоречие. ☐

3.6. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Теорема 3.35. $f_n, f\colon E \to \mathbb{R}$, a — предельная точка E, $f_n \rightrightarrows f$ на E и $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) =\colon b_n \in \mathbb{R}$. Тогда $\lim b_n, \lim\limits_{x \to a} f(x)$ существуют, конечны и равны.

В частности, $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$.

Доказательство. Запишем Критерий Коши:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geqslant N \forall x \in E\colon |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Устремим в этом неравенстве $x \to a$ (тогда $f_n(x) \to b_n$, $f_m(x) \to b_m$):

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geqslant N \forall x \in E\colon |b_n - b_m| \leqslant \varepsilon.$$

А это критерий Коши для последовательности $b_n \implies \lim b_n = b \in \mathbb{R}$.

Остается показать, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Честно проверим. Что такое $|f(x) - b|$? Это $\leqslant |f_n(x) - f(x)| + |b_n - f_n(x)| + |b - b_n|$. Мы знаем, что $b_n \to b \implies |b - b_n|$ при $n \geqslant N_1$ не больше ε. При $n \geqslant N_2$ $|f_n(x) - f(x)| M \varepsilon$.

Тогда, взяв $N \coloneqq \max(N_1, N_2)$, получаем $|f(x) - b| < 2\varepsilon + |b_n - f_n(x)|$. Но оставшаяся разность стремится к нулю при $x \to a$. Тогда можно выбрать δ-окрестность, чтобы эта разность была меньше ε. Следовательно, $|f(x) - b| < 3\varepsilon$. □

Теорема 3.36. $u_n : E \to \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится и $\lim\limits_{x\to a} u_n(x) = c_n$, a — предельная точка.
Тогда, $\lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x\to a} u_n(x)$ и ряд сходится.
То есть, в случае равномерной сходимости ряда мы можем менять предел суммы.

Доказательство. $f_n(x) \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) \rightrightarrows f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $b_n = \lim\limits_{x\to a} f_n(x) \overset{(*)}{=} \lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lim\limits_{x\to a} u_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k$.
Тогда $\exists \lim b_n$, то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.
$(*)$ — тут конечная сумма, поэтому все переходы конечны. □

Следствие. Если u_n непрерывны в точке a и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится, то $\sum u_n(x)$ непрерывна в точке a.

Доказательство. $c_n = u_n(a)$. □

Теорема 3.37. Пусть $f_n \in C[a, b]$ и $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$, $c \in [a, b]$.

Тогда $\int\limits_c^x f_n(t)\mathrm{d}t \rightrightarrows \int\limits_c^x f(t)\mathrm{d}t$. В частности $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_c^x f_n(t)\mathrm{d}t = \int\limits_c^x \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$

Доказательство. $F_n(x) \coloneqq \int\limits_c^x f_n(t)\mathrm{d}t$. Тогда $|F_n(x) - F(x)| = \left|\int\limits_c^x f_n(t)\mathrm{d}t - \int\limits_c^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int\limits_c^x |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \leqslant |x-c| \max\limits_{t\in[c,x]} |f_n(t) - f(t)| \leqslant (b-a) \sum\limits_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)|$, но по свойству равномерной сходимости $\sup \to 0$. Значит равномерная сходимость есть. □

Следствие. $u_n \in C[a, b]$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится, то $\int\limits_c^x \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t)\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_c^x u_n(t)\mathrm{d}t$.

Доказательство. $\int\limits_c^x \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(t)\mathrm{d}t = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_c^x u_k(t)\mathrm{d}t$. А дальше можно просто устремить к бесконечности по предыдущей теореме. □

Замечание. Поточечной сходимости не хватает. Пример: $f_n(x) nxe^{-nx^2}$ на $[0,1]$. $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. То $\int\limits_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 nxe^{-nx^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{-nx^2}(nx^2) = -\frac{e^{-nx^2}}{2}\Big|_0^1 = \frac{1-e^{-n}}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0 = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Теорема 3.38. $f_n \in C^1[a,b], c \in [a,b], f_n(c) \to A$ и $f_n' \rightrightarrows g$ на $[a,b]$.

Тогда $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$, $f \in C^1[a,b]$ и $f' = g$.

В частности, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))'$

Доказательство. $\int\limits_c^x g(t)\mathrm{d}t = \int\limits_c^x \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(t)\mathrm{d}t \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty}\int)c^x f_n'\mathrm{d}t = \lim\limits_{n\to\infty}(f_n(x) - f_n(c)) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) - \lim\limits_{n\to\infty} f_n(c) = f(x) - A$. $(*)$ — предыдущая теорема.

Тогда $f(x) = A + \int\limits_c^x g(y)\mathrm{d}t \implies f \in C^1[a,b]$ и $f'(x) = g(x)$.

Осталось понять, что $f_n \rightrightarrows f$.

$f_n(x) = \int\limits_c^x f_n'(t)\mathrm{d}t + f_n(c)$, $f(x) = \int\limits_c^x g(t)\mathrm{d}t + A$.

Мы знаем, что $\int\limits_c^x f_n'(t)\mathrm{d}t \rightrightarrows \int\limits_c^x g(t)\mathrm{d}t$, а $f_n(c) \to A \implies f_n(c) \rightrightarrows A$. □

Следствие. $u_n \in C^1[a,b]$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ равномерно сходится на $[a,b)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(c)$ сходится.

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится к дифференцируемой функции и $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$.

Доказательство. $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) \in C^1[a,b]$ и $f_n'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k'(x) \rightrightarrows \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x) =: g(x)$.

$f_n' \rightrightarrows g$ и $f_n(c)$ сходятся.

Тогда по теорема $f_n \rightrightarrows f$, f — дифференцируемая функция и $f' = g$.

То есть мы поняли, что $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$. □

Замечание. Равномерной сходимости исходных функций недостаточно. Пример: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ равномерно сходится: $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$ и признак Вейерштрасса. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nx}{n^2}\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ расходится в $x = 0$.