1. **Метод градиентного спуска с постоянным шагом.**

**Обязательные входные параметры:**

1. На вход подается функция многих переменных или функция одной переменной(может быть больше, чем две переменных).
2. Функция градиента в аналитическом виде.
3. *Шаг (это константа).*

***Также задается максимальное количество шагов maxk, по умолчанию 500 и критерий останова eps, по умолчанию 0,00001.***

**Выходные данные**: 1) найденная точка 2) значение функции в этой найденной точке 3) Отчет о работе алгоритма (например флаг: 0 – найдено значение с заданной точностью; 1 – достигнуто максимальное количество итераций; 2 – выполнено с ошибкой).

**Алгоритм**

1. Задаем начальную точку х0. Выбираем рандомно (должна лежать в пределах eps), ну или мб можно просто задать х0 = (0;0). Если в функции больше двух переменных, например 3, то точка будет состоять из трех координат х0 =(0;0;0).
2. Находим градиент функции. Он состоит из частных производных функции по каждой переменной. . Пример: F(x1, x2) = 2x1^2 – 3x2^2. .
3. Далее будет вычисляться значение градиента функции в каждой рассматриваемой точке. Формула: . Пример: , в точке (0,0). = 0
4. Вычисляем значение градиента для начальной точки.
5. Вычисляем значение функции в начальной точке.
6. Пока > eps или j (колво итераций) < maxk, то:

6.1. Вычисляем новые координаты точки: x(j) = x(j-1) – h\*.

– это считается в точке x(j-1).

6.2. Вычисляем значение градиента в точке (x(j)).

6.3. Вычисляем значение функции в точке x(j).

**Ответ:** x(j), F(x(j)).

1. **Метод градиентного спуска с дроблением шага.**

**Обязательные входные параметры:**

1. На вход подается функция многих переменных или функция одной переменной(может быть больше, чем две переменных).
2. Функция градиента в аналитическом виде.
3. *Начальный шаг .*
4. *Параметр дробления sigm: может принимать значения (0;1).*

***Также задается максимальное количество шагов maxk, по умолчанию 500 и критерий останова eps, по умолчанию 0,00001.***

**Выходные данные**: 1) найденная точка 2) значение функции в этой найденной точке 3) Отчет о работе алгоритма (например флаг: 0 – найдено значение с заданной точностью; 1 – достигнуто максимальное количество итераций; 2 – выполнено с ошибкой).

**Алгоритм:**

1. Задаем начальную точку х0. Выбираем рандомно (должна лежать в пределах eps), ну или мб можно просто задать х0 = (0;0). Если в функции больше двух переменных, например 3, то точка будет состоять из трех координат х0 =(0;0;0).
2. Находим градиент функции. Он состоит из частных производных функции по каждой переменной. . Пример: F(x1, x2) = 2x1^2 – 3x2^2. .
3. Далее будет вычисляться значение градиента функции в каждой рассматриваемой точке. Формула: . Пример: , в точке (0,0). = 0
4. Вычисляем значение градиента для начальной точки.
5. Вычисляем значение функции в начальной точке.
6. Пока (значение градиента) > eps или j (колво итераций) < maxk, то:

6.1. Вычисляем новые координаты точки: x(j) = x(j-1) – h\*.

– это считается в точке x(j-1).

6.2. Вычисляем значение функции в точке x(j).

6.3. Если F(x(j)) > F(x(j-1)), то h = h/sigm. Если F(j) < F(j-1), то h остается прежним.

6.4. Вычисляем значение градиента в точке (x(j)).

**Ответ:** x(j), F(x(j)).

1. **Поиск экстремума функции многих наискорейшего градиентного спуска;**

**Обязательные входные параметры:**

1. На вход подается функция многих переменных
2. Функция градиента в аналитическом виде.

***Также задается максимальное количество шагов maxk, по умолчанию 500 и критерий останова eps, по умолчанию 0,00001, флаги.***

**Выходные данные**: 1) найденная точка 2) значение функции в этой найденной точке 3) Отчет о работе алгоритма (например флаг: 0 – найдено значение с заданной точностью; 1 – достигнуто максимальное количество итераций; 2 – выполнено с ошибкой).

**Алгоритм:**

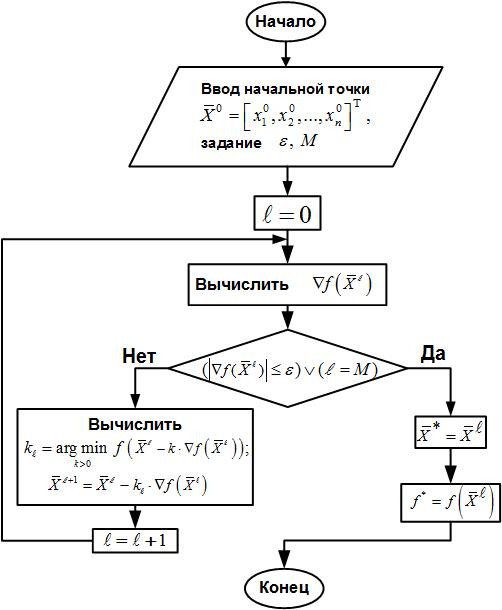
1. Находим градиент функции. Он состоит из частных производных функции по каждой переменной. . Пример: F(x1, x2) = 2x1^2 – 3x2^2. .
2. Далее будет вычисляться значение градиента функции в каждой рассматриваемой точке. Формула: . Пример: , в точке (0,0). = 0
3. Вычисляем значение градиента для начальной точки.
4. Вычисляем значение функции в начальной точке.
5. Находим новый шаг(λ) и новый Х
6. Проверяем условие остановки:

Пока (значение градиента) > eps или k (колво итераций) < maxk, то:

1. Находим следующую точку по ф-ле:



**Блок-схема: (М-кол-во итераций, l-итерация)**



**Пример:**

Найти минимум целевой функции **методом Коши** с точностью ε=0.1.  
f(x) = 8x12+4x1x2+522.

Итерация №1. В качестве направления поиска выберем вектор градиент в текущей точке:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1)▽f(X)= | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | 4\*x2+16\*x1 | | 4\*x1+10\*x2 | |  | |

2)Значение градиента в точке X1:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ▽f(X1) = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | 52 | | -14 | |  | |

3) Проверим **критерий остановки |▽f(X1)|<ε:**

(вычислим .

Пример: , в точке(0,0).

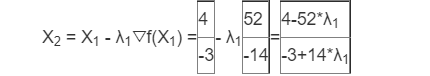
=0):

Имеем:  
|▽f(X1)| = 53.85>0.1 (неудовл)

4)Вычислим значение функции в начальной точке f(X1) = 125.

5)Сделаем шаг вдоль направления антиградиента

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |



6) Вычислим значение функции в новой точке.

f(X2) = 8\*(4-52\*λ1)2+4\*(4-52\*λ1)\*(-3+14\*λ1)+5\*(-3+14\*λ1)2

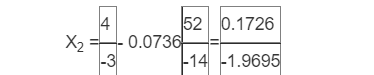
7) Найдем такой шаг, чтобы целевая функция достигала минимума вдоль этого направления.

Из необходимого условия существования экстремума функции (f'(X)=0):

-2900+39400\*λ1 = 0

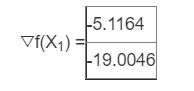
Получим шаг: λ1 = 0.0736

8) Выполнение этого шага приведет в точку:



|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |

Итерация №2. Значение градиента в точке X2:



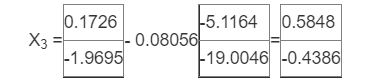
1. Проверим критерий остановки:  
   |▽f(X2)| < ε  
   Имеем:  
   |▽f(X2)| = 19.6812695251094>0.1
2. Вычислим значение функции в начальной точке f(X2) = 18.273.
3. Сделаем шаг вдоль направления антиградиента

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |

1. Вычислим значение функции в новой точке. f(X3)=8\*(0.17260+5.11640\*λ2)2+4\*(0.17260+5.11640\*λ2)\*(1.9695+19.0046\*λ2)+5\*(-1.9695+19.0046\*λ2)2
2. Найдем такой шаг, чтобы целевая функция достигала минимума вдоль этого направления.

Из необходимого условия существования экстремума функции (f'(X)=0):  
-387.35+4808.47\*λ2 = 0  
Получим шаг: λ2 = 0.08056

Выполнение этого шага приведет в точку:



***И так, пока не будет выполнен критерий остановки.***

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |

**Реализация:** [**https://russianblogs.com/article/2986276055/**](https://russianblogs.com/article/2986276055/)

[**https://www.youtube.com/watch?v=xDpe9KlYj9Q**](https://www.youtube.com/watch?v=xDpe9KlYj9Q) **(**[**https://github.com/selfedu-rus/python-algorithms**](https://github.com/selfedu-rus/python-algorithms)**)**

1. **Поиск экстремума функции многих переменной при помощи**

**алгоритма Ньютона-сопряженного градиента;**

[**https://habr.com/ru/post/439288/**](https://habr.com/ru/post/439288/)

[**http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4\_%D1%81%D0%BE%D0%BF%D1%80%D1%8F%D0%B6%D1%91%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D1%85\_%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%B4%D0%B8%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%BE%D0%B2**](http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4_%D1%81%D0%BE%D0%BF%D1%80%D1%8F%D0%B6%D1%91%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D1%85_%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%B4%D0%B8%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%BE%D0%B2)

[**https://fedorsarafanov.github.io/python\_lab/**](https://fedorsarafanov.github.io/python_lab/)

Алгоритм [сопряженных градиентов Ньютона](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4_%D1%81%D0%BE%D0%BF%D1%80%D1%8F%D0%B6%D1%91%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D1%85_%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%B4%D0%B8%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%BE%D0%B2) является модифицированным методом Ньютона.

**Обязательные входные параметры:**

1. На вход подается функция многих переменных

**Выходные данные**:

1) найденная точка

2) значение функции в этой найденной точке

**Алгоритм: (по примеру понятнее)**

* **1 шаг** Вычисляется градиента функции 

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

**• 2 шаг**: Находим 

• **3 шаг:** 0 итерация полностью как в методе наискорейшего спуска

(Проверяем условие 

Вычисляем значение ф-ции в начальной точке

Находим следующую точку по ф-ле:

)

*Далее выполняется итерационный процесс.*

• **4 шаг**: Вычисляем значение градиента в новой точке и т.д (как и раннее)

**НО** **меняется нахождение следующей точки С 1 ИТЕРАЦИИ:**

**X2 = X1 - t1d1**

**d1 = ▽f(X1) + b0▽f(X0)**

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

• **5 шаг**: Подставляем новый X в начальную ф-цию, находим новый шаг t0.

• **6 шаг**: Определяем новые значения аргументов функции после выполнения k-го шага расчета

• **7 шаг:** проверяем критерии останова итерационного процесса. Вычислительный процесс заканчивается, **когда будет достигнута точка, в которой оценка градиента будет равна нулю** ( ∇f(xk+1)dk=0)

В противном случае возвращаемся к шагу 4 и продолжаем итерационный расчет.

**Пример:**

Найти минимум функции методом сопряженных градиентов: *f(X) = 2x12+2x22+2x1x2+20x1+10x2+10*.  
Решение.

1) В качестве направления поиска выберем вектор градиент в текущей точке:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ▽ f(X) = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | 4\*x1+2\*x2+20 | | 2\*x1+4\*x2+10 | |  | |

***Итерация №0*.**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ▽ f(X0) = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | 20 | | 10 | |  | |

2) Проверим критерий остановки: |▽f(X0)| < ε  


(вычислим .

Пример: , в точке(0,0).

=0):

3)Вычислим значение функции в начальной точке f(X0) = 10.

4) Сделаем шаг вдоль направления антиградиента. (как в методе наискорейшего спуска)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |

5)Подставляем в начальную ф-цию:

f(X1) = 2\*(-20.0\*t0)2+2\*(-10.0\*t0)2+2\*(-20.0\*t0)\*(-10.0\*t0)+20\*(-20.0\*t0)+10\*(-10.0\*t0)+10 → min

6)Найдем такой шаг, чтобы целевая функция достигала минимума вдоль этого направления.

Из необходимого условия существования экстремума функции (f '(x1)=0):  
2800\*t1-500 = 0  
Получим шаг: t0 = 0.1786

7)Выполнение этого шага приведет в точку:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X0 = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | 0 | | 0 | |  | | - 0.1786 | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | 20 | | 10 | |  | | = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | -3.5714 | | -1.7857 | |  | |

***Итерация №1*. Значение градиента в новой точке**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ▽ f(X1) = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | 2.143 | | -4.286 | |  | |

8) Проверим критерий остановки: |▽f(X1)| < ε  


9) Вычислим значение функции в новой точке f(X1) = -34.643.

**10) X2 = X1 - t1d1**

**d1 = ▽f(X1) + b0▽f(X0)**

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| d1 = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | 2.143 | | -4.286 | |  | | + 0.0459 | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | 20 | | 10 | |  | | = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | 3.061 | | -3.827 | |  | |

11) Сделаем шаг вдоль направления антиградиента. ***(c этого шага идет отличие от предыдущего метода в нахождении Х)***

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X2 = X1 - t1 d1 = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | -3.5714 | | -1.7857 | |  | | - t1 | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | 3.061 | | -3.827 | |  | | = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | -3.0612\*t1-3.5714 | | 3.8265\*t1-1.7857 | |  | |

f(X2) = 2\*(-3.0612\*t1-3.5714)2+2\*(3.8265\*t1-1.7857)2+2\*(-3.0612\*t1-3.5714)\*(3.8265\*t1-1.7857)+20\*(-3.0612\*t1-3.5714)+10\*(3.8265\*t1-1.7857)+10 → min

12) Найдем такой шаг, чтобы целевая функция достигала минимума вдоль этого направления. Из необходимого условия существования экстремума функции (f '(x2)=0):

49.19825\*t2-22.95918 = 0  
Получим шаг: t0 = 0.4667

Выполнение этого шага приведет в точку:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X2 = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | -3.5714 | | -1.7857 | |  | | - 0.4667 | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | 3.061 | | -3.827 | |  | | = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | -5 | | 0 | |  | |

***Итерация №2*.**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ▽ f(X2) = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | 0 | | 0 | |  | |

Проверим критерий остановки: |▽f(X2)| < ε  
  
**Вычислим значение функции в новой точке f(X2) = -40.**