- **Линейное программирование на Python:** https://proglib.io/p/lineynoe-programmirovanie-praktika-resheniya-zadach-optimizacii-na-python-2020-11-26/amp/

## Методы поиска локальных экстремумов функции:

**Точка Мо (хо; уо) называется точкой локального экстремума (максимума или минимума) функции двух переменных z=f (x; y), если значение функции в точке Мо (хо; уо) является наибольшим или наименьшим в некоторой окрестности этой точки.**
**/studopedia.ru/4_163102_tema--nahozhdenie-naibolshego-i-naimenshego-znacheniy-neprerivnoy-funktsii-na-otrezke.html https:/# нахождение наибольшего или наименьшего значения функции на отрезке.**
**https://math24.net/local-extrema-functions.html # инфа про локальные экстремумы.**

1) **Метод частных производных (для задач без ограничений).**

$$z = 3x^2 + xy + 2y^2 - x - 4y$$

а) В первую очередь находим частные производные z'x = 6x + y - 1 и z'y = x + 4y - 4. Далее приравниваем полученные частные производные к нулю и решаем систему уравнений.

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + y - 1 = 0 \\ x + 4y - 4 = 0 \end{cases}$$

Полученная точка M0(x0, y0) - стационарная точка (еще не экстремум).
Если уравнение не решается, то стационарной точки нет.
б) Достаточное условие экстремума функции двух переменных.
Здесь находятся уже **частные производные второго порядка** в точке M0.

$$A = z''_{xx}(M_0), \quad B = z''_{xy}(M_0), \quad C = z''_{yy}(M_0)$$

в) Далее проверяем неравенство: если значение AC - B^2 > 0, то функция имеет экстремум в точку M0, если $AC - B^2 < 0$, то в точке M0 нет экстремума (седловая точка).

!!! Если же $AC - B^2 = 0$, то требуется дополнительное исследование (нигде нет, но говорят, что такое невозможно встретить). По заданию поняла, что в ответе если что просто можно написать требуется дополнительное исследование.

г) Определение максимум или минимум.
Если $A > 0$, то это минимум, а если $A < 0$ – то максимум.
Седловая точка — такая точка из области определения функции, которая является стационарной для данной функции, однако не является её локальным экстремумом. Седловая точка — частный случай стационарной.

2) **Метод градиентного спуска (для задач без ограничений).**
https://habr.com/ru/post/547424/
Применяется только для нахождения минимума функции, поэтому не стала рассматривать.

3) **Муравьиный метод**

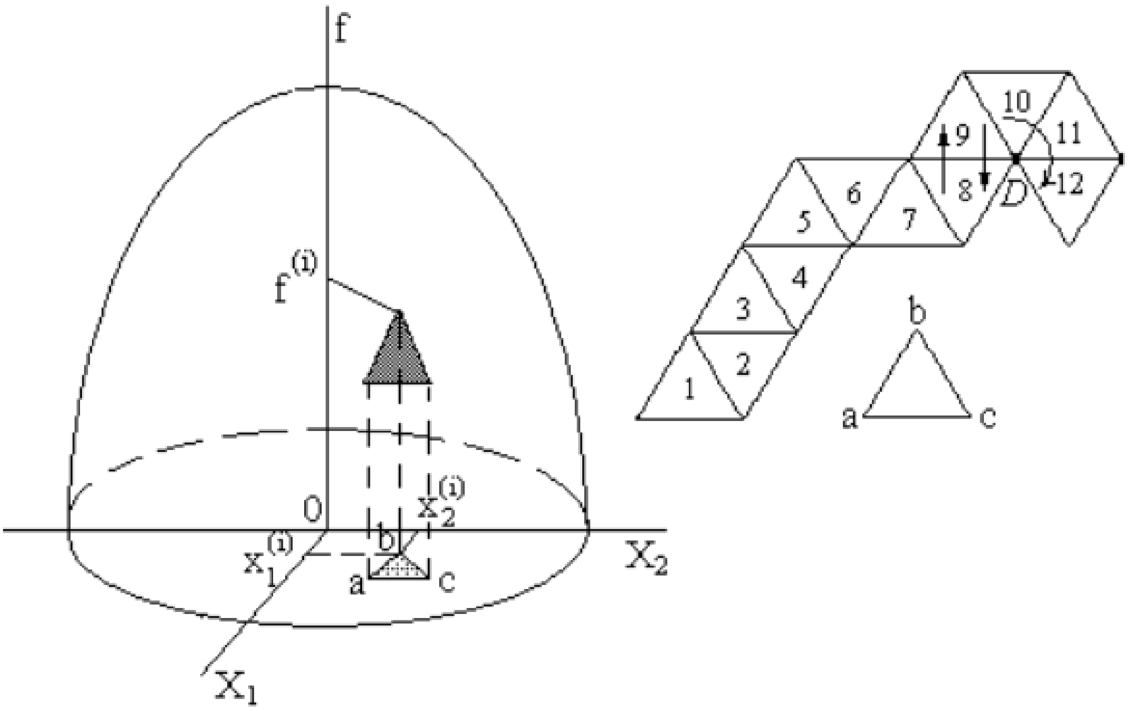
https://russianblogs.com/article/44531487438/
реализация на питоне

4) **Симплекс метод**
экстремум в задачах линейного программирования - единственный, т. е. локальный экстремум одновременно является и глобальным и достигается на границе области допустимых значений, как правило, в вершине.
симплекс-метод обеспечивает сходимость к экстремальной точке за конечное число шагов (конечность симплекс-метода), так как он предусматривает последовательный оптимальный просмотр вершин многогранника
**Исходная формулировка задачи должна содержать только положительные переменные и равенства.**

**Геометрический + аналитический:**

1. В горизонтальной плоскости параметров $x_1Ox_2$ методами аналитической геометрии создается модель равностороннего

треугольника *abc* – симплекса




2. Рассчитывают значения функционала во всех точках – проекциях вершин симплекса на поверхность отклика функции цели:

$f_i^{(a)} = f(x_1^{(a)}; x_2^{(a)})$, $f_i^{(b)} = f(x_1^{(b)}; x_2^{(b)})$, $f_i^{(c)} = f(x_1^{(c)}; x_2^{(c)})$.

3. Производят количественное сравнение полученных значений функционала.

4. Если ищется максимальное значение функции цели, то из анализируемых значений выбирается наименьшее $f_i = \min$.

На плоскости $x_1 O x_2$ строят второе положение симплекса путем поворота предыдущего относительно той стороны треугольника, которая расположена против вершины, имеющей проекцию с минимальным значением функции цели.

5. Повторяют действия по п.п. 1-4 (перемещения симплекса на рис.22 показаны под номерами итерационных шагов) до тех пор, пока симплекс не начнет совершать периодические перемещения. Они

могут быть двух типов: систематический поворот относительно одной из сторон (позиции 8-9, рис.22), вращение вокруг какой-либо точки (например, точки *D*).

6. При появлении в поведении симплекса повторяемости в положениях следует уменьшить размер стороны симплекса и, взяв за базу одно из положений симплекса, продолжить вычисления.
7. Действия по п.п.1-6 повторяют до тех пор, пока размер стороны симплекса не достигнет заданной минимальной величины.
8. Определяют значение функции цели и оптимальный план по координатам той вершины симплекса в его окончательном положении, для которой значение функционала будет максимальным.

https://vk.com/doc161125583_588393595?hash=7fcd424b9f9fd03973&dl=e013767eea139d64f9 (стр 30) **вспомнить как решать вручную через симплекс-таблицы**.

## Поиск локальных экстремумов функции двух переменных с ограничениями (метод Лагранжа);

**Можно решать не методом лагранжа, а методом частных производных, выразив одну переменную через другую.**

Метод множителей Лагранжа состоит в том, что для отыскания условного экстремума составляют функцию Лагранжа:

$$F(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y),$$

φ(x,y) - функция ограничений.

### Алгоритм исследования функции двух переменных на условный экстремум

1. Составить функцию Лагранжа $F(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$

2. Решить систему $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0; \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases}$

3) Составить определитель H.

$$H = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & \boxed{F''_{xx}} & \boxed{F''_{xy}} \\ \varphi'_y & \boxed{F''_{xy}} & \boxed{F''_{yy}} \end{vmatrix}$$

4) Если H > 0, то условный максимум. Если H < 0, то минимум. Если H = 0, то требуются дополнительные исследования.

**Пример №1**

Найти условный экстремум функции $z(x,y) = x + 3y$ при условии $x^2 + y^2 = 10$.

*Решение*

Геометрическая интерпретация данной задачи такова: требуется найти наибольшее и наименьшее значение аппликаты плоскости $z = x + 3y$ для точек ее пересечения с цилиндром $x^2 + y^2 = 10$.

Выразить одну переменную через другую из уравнения связи и подставить ее в функцию $z(x,y) = x + 3y$ несколько затруднительно, поэтому будем использовать метод Лагранжа.

Обозначив $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 10$, составим функцию Лагранжа:

$$F(x,y) = z(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = x + 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 10);$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x; \ \frac{\partial F}{\partial y} = 3 + 2\lambda y.$$

Запишем систему уравнений для определения стационарных точек функции Лагранжа:

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0; \\ 3 + 2\lambda y = 0; \\ x^2 + y^2 - 10 = 0. \end{cases}$$

$$x_1 = 1; \ y_1 = 3; \ \lambda_1 = -\frac{1}{2} \ \text{и} \ x_2 = -1; \ y_2 = -3; \ \lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

Вычислим определитель H в каждой из точек.

$$\varphi'_x = 2x; \ \varphi'_y = 2y; \ F''_{xx} = 2\lambda; \ F''_{xy} = 0; \ F''_{yy} = 2\lambda.$$

$$H = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & F''_{xx} & F''_{xy} \\ \varphi'_y & F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ x & \lambda & 0 \\ y & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

H (x=1;y=3;λ = ½) = 40 > 0 => условный максимум.

$H\ (x=-1; y=-3; \lambda = -\frac{1}{2}) = -40 < 0 \Rightarrow$ условный минимум.

**Локальный условный экстремум это точка, в которой достигается наибольшее (или наименьшее) значение функции в НЕКОТОРОЙ (сколь угодно малой) ОКРЕСТНОСТИ данной точки, НА МНОЖЕСТВЕ, удовлетворяющем условию связи.**