7. МЕТОДЫ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ О ЗАКОНАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПАРАМЕТРАХ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

7.1. Проверка гипотез о законах распределения

7.1.1. Выравнивание статистических рядов

При обработке экспериментальных данных одним из основных вопросов является обоснование закона распределения исследуемой случайной величины.

Пусть экспериментальным путём получена случайная выборка $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2,\ldots,\hat{x}_n$. В связи с её ограниченностью при обработке статистического материала приходится решать две задачи.

1. Подобрать для полученного статистического ряда теоретическую кривую распределения, выражающую лишь существенные черты статистического материала, но не случайности, связанные с недостаточным объёмом экспериментальных данных (задача выравнивания или сглаживания статистических рядов).

2. Определить, чем объясняются неизбежные расхождения между подобранной теоретической кривой распределения и статистическим распределением: случайными обстоятельствами или тем, что подобранная кривая неудовлетворительно выравнивает данное статистическое распределение (задача проверки гипотезы о законах распределения).

Процедура выравнивания заключается в том, чтобы подобрать теоретическую кривую распределения, с той или иной точки зрения наилучшим образом описывающую данное статистическое распределение.

Задача о наилучшем выравнивании статистических рядов, как и вообще задача о наилучшем аналитическом представлении эмпирических функций, является в значительной мере неопределённой, и решение её зависит от того, что условиться считать «наилучшим». Например, при сглаживании эмпирических зависимостей часто используют метод наименьших квадратов (раздел 8), согласно которому наилучшим приближением к эмпирической зависимости в данном классе функций является такое, при котором сумма квадратов отклонений обращается в минимум. При этом вопрос о том, в каком именно классе функций следует искать наилучшее приближение, решается уже не из математических соображений. Вид функции, выражающей исследуемую зависимость часто известен заранее. Из опыта требуется получить лишь некоторые численные параметры, входящие в выражение функции. Именно эти параметры подбираются с помощью метода наименьших квадратов.

Аналогично обстоит дело и с задачей выравнивания статистических рядов. Как правило, вид теоретической кривой выбирается заранее из соображений, связанных с существом задачи, а в некоторых случаях просто с внешним видом статистического распределения. Аналитическое выражение выбранной кривой распределения зависит от некоторых параметров. Поэтому задача выравнивания статистического ряда переходит в задачу рационального выбора тех значений параметров, при которых соответствие между статистическим и теоретическим распределениями оказывается наилучшим.

Следует иметь в виду, что любая аналитическая функция $f(x)$, с помощью которой выравнивается статистическое распределение, должна обладать основными свойствами плотности распределения:

$$f(x) \geq 0; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \tag{7.7.1}$$

Предположим, что исходя из тех или иных соображений выбрана теоретическая кривая распределения $\varphi_{\hat{x}}(x)$, удовлетворяющая условиям (7.1.1). С помощью данной кривой требуется выровнять данное статистическое распределение. В выражение функции $\varphi_{\hat{x}}(x)$ входят параметры $(a_1, a_2,\ldots,a_m)^{\text{т}} = A_{<m>}$, т.е.

$$\varphi_{\hat{x}}(x) = \varphi_{\hat{x}}(x; A_{<m>}). \tag{7.1.2}$$

Необходимо подобрать эти параметры так, чтобы кривая (7.1.2) наилучшим образом описывала данный статистический материал. Один из методов, применяемых для решения данной задачи – **метод моментов**.

Согласно методу моментов параметры выбираются с таким расчётом, чтобы несколько важнейших числовых характеристик (моментов) теоретического распределения были равны соответствующим статистическим характеристикам. Например, если теоретическая кривая зависит только от двух параметров:

$$\varphi_{\hat{x}}(x) = \varphi_{\hat{x}}(x; A_{<2>}),$$

эти параметры выбираются так, чтобы математическое ожидание $M_{\hat{x}}$ и дисперсия $D_{\hat{x}}$ теоретического распределения совпадали с соответствующими статистическими характеристиками $M^*_{\hat{x}}$ и $D^*_{\hat{x}}$. Если кривая $\varphi_{\hat{x}}(x)$ зависит от трёх параметров, можно подобрать их так, чтобы совпали первые три момента, и т.д.

П р и м е р 7.1. Произведено 500 измерений отклонения по вертикали при стрельбе в мишень. Результаты измерений сведены в статистический ряд, табл.7.1. Требуется выровнять данное распределение с помощью нормального закона.

Таблица 7.1

Интервальный статистический ряд (к примеру 7.1)

J_l	–4; –3	–3; –2	–2; –1	–1; 0	0; 1	1; 2	2; 3	3; 4
m_l	6	25	72	133	120	88	46	10
P_l^*	0,012	0,050	0,144	0,266	0,240	0,176	0,092	0,020

▼ Нормальный закон распределения

$$\varphi_{\hat{x}}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

зависит от двух параметров: $M_{\hat{x}} = m$ и $\sigma_{\hat{x}} = \sigma$. Подберём эти параметры так, чтобы сохранить первые два момента – математическое ожидание и дисперсию статистического распределения. Оценку математического ожидания вычисляем по формуле (5.1.4):

$$\tilde{M}_{\hat{x}} = \sum_{l=1}^{8} \bar{x}_l P_l^* = -3{,}5 \cdot 0{,}012 - 2{,}5 \cdot 0{,}050 - 1{,}5 \cdot 0{,}144 - 0{,}5 \cdot 0{,}266 + 0{,}5 \cdot 240 +$$

$$+ 1{,}5 \cdot 0{,}176 + 2{,}5 \cdot 0{,}092 + 3{,}5 \cdot 0{,}020 = 0{,}168.$$

Оценку дисперсии вычисляем по второй формуле (5.2.14). Для этого находим оценку второго начального момента

$$\tilde{\nu}_2 = \sum_{l=1}^{8} \bar{x}_l^2 P_l^* = 2{,}126.$$

В итоге получаем

$$\tilde{D}_{\hat{x}} = \sum_{l=1}^{8} \bar{x}_l^2 P_l^* - \tilde{M}_{\hat{x}}^2 = 2{,}126 - 0{,}028 = 2{,}098.$$

В соответствии с методом моментов должны выполняться условия

$$m = \tilde{M}_{\hat{x}}, \quad \sigma^2 = \tilde{D}_{\hat{x}}.$$

Это означает, что

$$m = 0{,}168, \qquad \sigma = \sqrt{2{,}098} = 1{,}448.$$

Выражение нормального закона распределения принимает вид

$$\varphi_{\hat{x}}(x) = \frac{1}{1{,}448\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-0{,}168)^2}{2 \cdot 1{,}448^2}}. \qquad (7.1.3)$$

Вычисляем значения функции (7.1.3) на границах разрядов, результаты сводим в табл.7.2.

Таблица 7.2

Значения плотности распределения нормального закона (к примеру 7.1)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$\varphi_{\hat{x}}(x)$	0,004	0,025	0,090	0,199	0,274	0,234	0,124	0,041	0,008

На одном графике (рис.7.1) строим гистограмму и выравнивающую её кривую распределения.

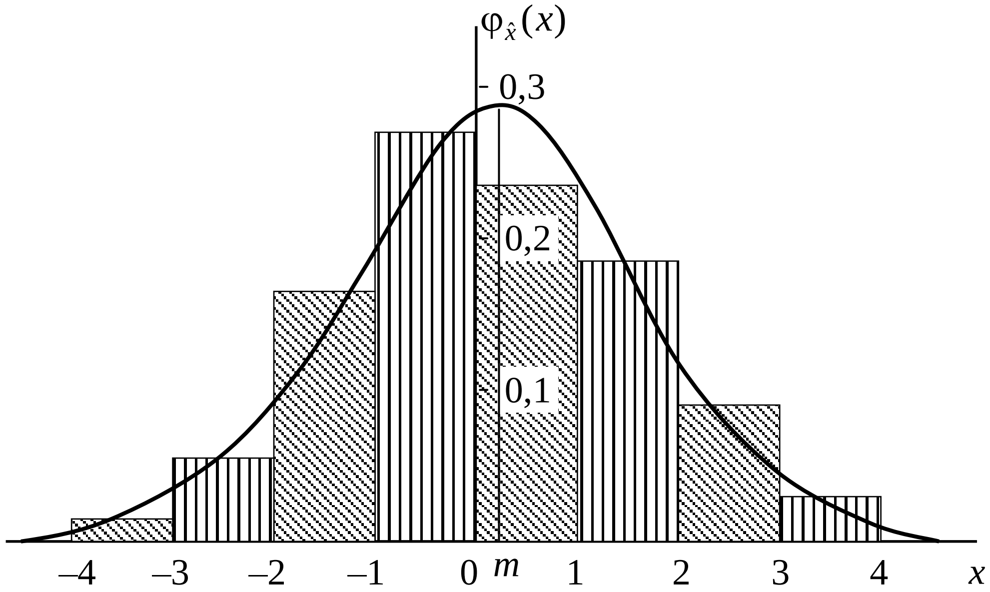

Рис.7.1. Гистограмма и теоретическая кривая распределения (к примеру 7.1)

Из графика видно, что теоретическая кривая распределения $\varphi_{\hat{x}}(x)$ сохраняет в основном существенные особенности статистического распределения. Но при этом она свободна от случайных неправильностей хода гистограммы, которые, по-видимому, могут быть отнесены за счёт случайных причин. Для более серьёзного обоснования последнего суждения необходимо выполнить проверку гипотезы о принятом законе распределения. ▲

Выравнивание статистического ряда теоретической кривой распределения может рассматриваться как выдвижение нулевой гипотезы о виде распределения. Но эта задача может быть решена и аналитически.

7.1.2. Выбор нулевой гипотезы аналитическим способом

Для аналитического выбора нулевой гипотезы может быть использована следующая методика. По данным эксперимента определяются статистические оценки коэффициента асимметрии $\tilde{a}_{\hat{x}}$ и коэффициента эксцесса $\tilde{e}_{\hat{x}}$:

$$\tilde{a}_{\hat{x}} = \frac{\tilde{\mu}_3}{\tilde{\sigma}^3_{\hat{x}}}; \qquad \tilde{e}_{\hat{x}} = \frac{\tilde{\mu}_4}{\tilde{\sigma}^4_{\hat{x}}} - 3, \qquad (7.1.4)$$

где
$$\tilde{\sigma}_{\hat{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{M}_{\hat{x}})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n-1}};$$

$$\tilde{\mu}_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{M}_{\hat{x}})^3}{n}; \qquad \tilde{\mu}_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{M}_{\hat{x}})^4}{n}.$$

При большом объёме выборки оценки центральных моментов третьего и четвёртого порядков могут вычисляться по формулам, аналогичным (5.2.11) для дисперсии:

$$\tilde{\mu}_3 = \sum_{l=1}^{r} (\bar{x}_l - \tilde{M}_{\hat{x}})^3 P_l^* ; \qquad \tilde{\mu}_4 = \sum_{l=1}^{r} (\bar{x}_l - \tilde{M}_{\hat{x}})^4 P_l^* . \qquad (7.1.5)$$

В теории распределений [12] доказано, что каждому закону свойственно определённое соотношение между коэффициентами асимметрии и эксцесса, т.е. может быть построена диаграмма, изображённая на рис.7.2.

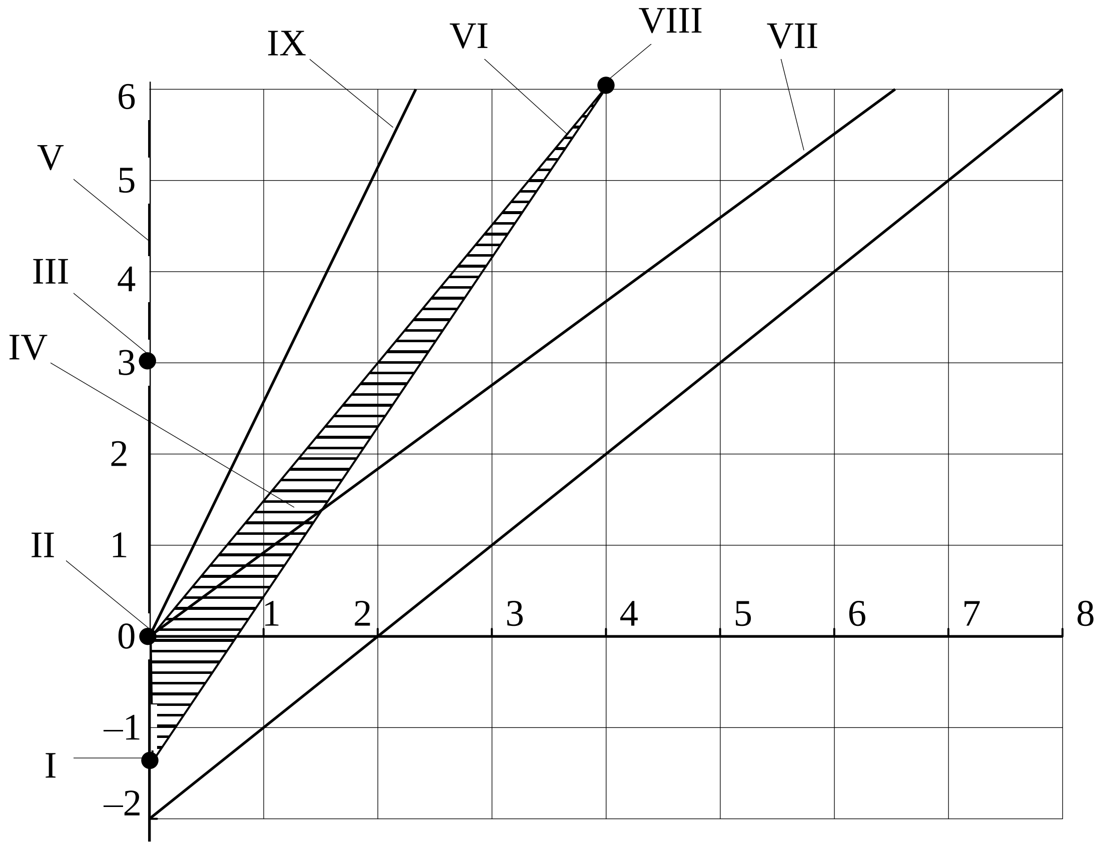

Рис.7.2. Диаграмма соотношений между коэффициентами асимметрии и эксцесса

На представленной диаграмме выделены следующие характерные точки, прямые и области. Точки (0; –1,2), (0; 0), (0; 3), (4; 6) отвечают соответственно равномерному и нормальному распределениям, распределению Лапласа и показательному распределению. Так, для любого нормального закона $a_{\hat{x}} = 0$, $e_{\hat{x}} = 0$, что и определяет координаты точки (0; 0). Гамма-распределение, логарифмически нормальное распределение, распределение Стьюдента и Пуассона показаны на диаграмме прямыми, а бета-распределение представлено областью. При этом обозначения следующие: I – равномерный закон, II – нормальный закон; III – закон Лапласа; IV – бета-распределение; V – закон Стьюдента (прямая, совпадающая с осью ординат); VI – гамма-распределение; VII – закон Пуассона; VIII – показательный закон; IX – логарифмически нормальное распределение.

Знание оценок коэффициентов асимметрии и эксцесса позволяет приближённо определить гипотетический закон распределения. Для этого по полученным значениям оценок на диаграмму наносится точка ($\tilde{a}_{\hat{x}}^2; \tilde{e}_{\hat{x}}$). Если она окажется вблизи точки, прямой или области, соответствующих одному из распределений, то последнее и следует выдвинуть в качестве гипотезы.

При попадании точки в области диаграммы, для которых не определён закон распределения, выдвижение гипотетического закона должно осуществляться на основании каких-либо дополнительных априорных соображений.

<u>П р и м е р 7.2</u>. В условиях примера 7.1 выбрать нулевую гипотезу аналитическим способом.

▼ По формулам (7.1.5) вычисляем оценки центральных моментов третьего и четвёртого порядков:

$$\tilde{\mu}_3 = \sum_{l=1}^{8} (\bar{x}_l - \tilde{M}_{\hat{x}})^3 P_l^* = (-3{,}5 - 0{,}168)^3 0{,}012 + (-2{,}5 - 0{,}168^3 0{,}050 +$$

$$+ (-1{,}5 - 0{,}168)^3 0{,}144 + (-0{,}5 - 0{,}168)^3 0{,}266 + (0{,}5 - 0{,}168)^3 0{,}24 + \quad ;$$

$$+ (1{,}5 - 0{,}168)^3 0{,}176 + (2{,}5 - 0{,}168)^3 0{,}092 + (3{,}5 - 0{,}168)^3 0{,}02 =$$

$$= -0{,}592 - 0{,}950 - 0{,}668 - 0{,}079 + 0{,}009 + 0{,}416 + 1{,}167 + 0{,}740 = 0{,}043;$$

$$\tilde{\mu}_4 = \sum_{l=1}^{8} (\bar{x}_l - \tilde{M}_{\hat{x}})^4 P_l^* = 11{,}64\,.$$

По формулам (7.1.4) вычисляем оценки коэффициента асимметрии и коэффициента эксцесса:

$$\tilde{a}_{\hat{x}} = \frac{\tilde{\mu}_3}{\tilde{\sigma}_{\hat{x}}^3} = \frac{0{,}043}{(1{,}448)^3} = 0{,}014\,;$$

$$\tilde{e}_{\hat{x}} = \frac{\tilde{\mu}_4}{\tilde{\sigma}_{\hat{x}}^4} - 3 = \frac{11{,}64}{(1{,}448)^3} - 3 = -0{,}353\,.$$

Точку ($\tilde{a}_{\hat{x}}^2$; $\tilde{e}_{\hat{x}}$) = (0,0001;–0,353) наносим на диаграмму, рис.7.2. Данная точка находится в непосредственной близости от точки (0; 0). Следовательно, принимается нулевая гипотеза о нормальном распределении отклонений по вертикали при стрельбе в мишень.

▲

Проверка гипотезы о виде закона распределения выполняется после решения предыдущей задачи, т.е. выбора теоретического распределения.

7.1.3. Проверка гипотез о законах распределения по методу К.Пирсона

Задача проверки гипотезы о виде закона распределения формулируется следующим образом.

Пусть в результате эксперимента получена случайная выборка $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2,\ldots,\hat{x}_n$ и для неё выбран теоретический закон распределения, характеризуемый функцией распределения $F_{\hat{x}}(x)$ или плотностью распределения $\varphi_{\hat{x}}(x)$.

Необходимо на основании обработки и анализа полученной выборки проверить гипотезу H_0 о том, что исследуемая случайная величина подчинена выбранному закону распределения.

В настоящее время существует ряд методов решения данной задачи, однако наибольшее распространение получил метод К. Пирсона. Достаточно употребляемыми являются также методы А.Н. Колмогорова и Н.В. Смирнова [4, 6, 12]. Указанные методы отличаются друг от друга видом меры рассогласования между статистическим и гипотетическим законами распределения. Так, в методах А.Н. Колмогорова и Н.В. Смирнова такой мерой является функция разности между статистической функцией распределения $F^*_{\hat{x}}(x)$ и функцией распределения $F_{\hat{x}}(x)$ гипотетического закона:

$$d = f\,(F^*_{\hat{x}}(x) - F_{\hat{x}}\,(x)).$$

В методе К. Пирсона в качестве таковой используется функция разности между частотой и вероятностью попадания случайной величины в заданные интервалы:

$$d = f\,(p^*_j - p_j), \qquad (7.1.6)$$

где j – номер интервала.

Рассмотрим метод К. Пирсона более подробно. Мера расхождения (7.1.6) в явном виде представляется суммой квадратов разностей между частотой и вероятностью попадания случайной величины $\hat{x}$ в интервалы, на которые разбивается множество возможных значений этой величины:

$$\hat{u} = \sum_{l=1}^{r} c_l\,(p^*_l - p_l)^2, \qquad (7.1.7)$$

где r – число интервалов; l – номер интервала.

Коэффициенты c_l введены в выражение (7.1.7) для учёта того, что абсолютные значения разностей $p^*_l - p_l$ неравнозначны при различных значениях p_l. Действительно, одно и то же значение разности $p^*_l - p_l$ является малозначимым при большой величине p_l и представляет собой заметную величину, если вероятность p_l мала.

К. Пирсон показал, что коэффициенты c_l целесообразно брать обратно пропорциональными вероятностям p_l. При этом, если данные коэффициенты определять на основе выражения

$$c_l = \frac{n}{p_l}, \quad l = \overline{1, r},$$

то при больших значениях n закон распределения случайной величины

$$\hat{u} = \sum_{l=1}^{r} \frac{n(p_l^* - p_l)^2}{p_l} \tag{7.1.8}$$

не зависит от вида распределения случайной величины $\hat{x}$ и объёма выборки n, а зависит только от числа интервалов r. Кроме этого при увеличении n закон распределения случайной величины (7.1.8) приближается к распределению хи-квадрат [6].

Докажем это утверждение.

Рассмотрим случайную величину $\hat{m}_l$ – число попаданий случайной величины $\hat{x}$ в l-й интервал. Эта случайная величина распределена по биномиальному закону с характеристиками

$$M_{\hat{m}_l} = np_l, \quad \sigma_{\hat{m}_l} = \sqrt{np_l(1 - p_l)}.$$

Однако при достаточно большом n величину $\hat{m}_l$ на основании теоремы Муавра-Лапласа можно считать распределённой по нормальному закону с теми же характеристиками. Выполняя нормирование случайной величины $\hat{m}_l$, получим

$$\hat{z}_l = \frac{\hat{m}_l - np_l}{\sqrt{np_l(1 - p_l)}}.$$

Нормированные случайные величины $\hat{z}_l$ связаны между собой линейным соотношением

$$\sum_{l=1}^{r} \hat{z}_l \sqrt{np_l(1 - p_l)} = \sum_{l=1}^{r} \hat{m}_l - n\sum_{l=1}^{r} p_l = n - n = 0.$$

На основании этого утверждаем, что случайная величина $\sum_{l=1}^{r} z_l^2$ будет приближённо следовать хи-квадрат (χ^2) распределению. Если эту случайную величину принять за показатель согласованности гипотезы, то получим равенство

$$\hat{u} = \hat{\chi}^2 = \sum_{l=1}^{r} \frac{(\hat{m}_l - np_l)^2}{np_l(1 - p_l)}. \tag{7.1.9}$$

Преобразуем выражение (7.1.9), учитывая, что

$$\sum_{l=1}^{r} \hat{m}_l = n$$

и $1 - p_l \approx 1$ при больших значениях n:

$$\hat{u} = \sum_{l=1}^{r} \frac{n^2\left(\dfrac{\hat{m}_l}{n} - p_l\right)^2}{np_l(1-p_l)} = \sum_{l=1}^{r} \frac{n(p_l^* - p_l)^2}{p_l} \qquad (7.1.10)$$

или

$$\hat{u} = \sum_{l=1}^{r} \frac{\hat{m}_l^2 + 2\hat{m}_l np_l + n^2 p_l^2}{np_l} = \sum_{l=1}^{r} \frac{\hat{m}_l^2}{np_l} - 2\sum_{l=1}^{r} \hat{m}_l + n\sum_{l=1}^{r} p_l =$$
$$= \sum_{l=1}^{r} \frac{\hat{m}_l^2}{np_l} - 2n + n = \sum_{l=1}^{r} \frac{\hat{m}_l^2}{np_l} - n. \qquad (7.1.11)$$

Выражения (7.1.10) или (7.1.11) используются в зависимости от формы представления результатов наблюдения, т.е. в зависимости от того, являются ли исходными данными p_l^* или m_l.

Как известно, распределение χ^2 зависит от числа степеней свободы $f = r - s$, равного числу интервалов r минус число независимых условий (связей), наложенных на частоты p_l^*. В формуле (7.1.10) предполагается наличие только одного условия

$$\sum_{l=1}^{r} p_l^* = 1, \qquad (7.1.12)$$

которое накладывается всегда. Тогда принимаем $s = 1$ и число степеней свободы $f = r - 1$. Равенство (7.1.12) есть сумма вероятностей несовместных событий, образующих полную группу.

В случае, когда теоретическое распределение подбирается так, чтобы совпадали его математическое ожидание и оценка математического ожидания, полученная по результатам наблюдения, т.е.

$$\sum_{l=1}^{r} \bar{x}_l p_l^* = M_{\hat{x}},$$

число связей увеличивается на единицу. Следовательно, $s = 2$ и число степеней свободы $f = r - 2$. Если условие совпадения параметров теоретического и статистического распределения распространяется и на дисперсию

$$\sum_{l=1}^{r} (\bar{x}_l - M_{\hat{x}})^2 p_l^* = D_{\hat{x}},$$

то $s = 3$, $f = r - 3$ и т.д.

Таким образом, число степеней свободы распределения χ^2 зависит при проверке гипотез от условий проведения проверки, что необходимо учитывать, используя показатель согласованности гипотезы (7.1.13) или (7.1.14).

Можно показать, что при невыполнении гипотезы H_0 по мере возрастания n значение показателя согласованности $\hat{u}$ будет неограниченно увеличиваться, т.е. кривая распределения $\varphi_{\hat{u}/H_1}(u)$ сдвинута относительно кривой $\varphi_{\hat{u}/H_0}(u)$ вправо. Поэтому в соответствии с рекомендациями предыдущего раздела в качестве критической целесообразно выбрать правостороннюю критическую область, рис.7.3.

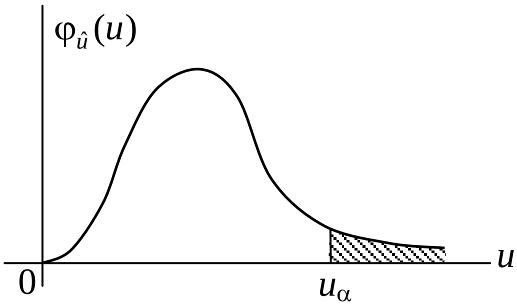

Рис.7.3. Правосторонняя критическая область

В этом случае для определения критической границы u_α можно использовать приложение 7, в котором даны критические точки распределения χ^2 в зависимости от уровня значимости α и числа степеней свободы f.

Порядок проверки гипотезы о виде закона распределения состоит в следующем.

1. Назначается уровень значимости α, и по таблице критических точек распределения χ^2 (приложение 7) определяется критическая граница u_α. Входами в таблицу служат уровень значимости α и число степеней свободы f.

2. Результаты эксперимента представляются в виде интервального статистического (вариационного) ряда (табл.4.5), в котором m_l и p_l^* – число и частота попаданий исследуемой величины $\hat{x}$ в l-й интервал ($l = \overline{1, r}$) соответственно.

3. Вычисляются вероятности p_l попадания случайной величины $\hat{x}$, которая подчиняется гипотетическому закону распределения, в l-й разряд:

$$p_l = P(x_l < \hat{x} < x_{l+1}) = \int_{x_l}^{x_{l+1}} \varphi_{\hat{x}}(x)dx,$$

где $\varphi_{\hat{x}}(x)$ – плотность распределения гипотетического закона. Очевидно, что должно выполняться условие

$$\sum_{l=1}^{r} p_l = 1.$$

4. Рассчитывается значение u показателя согласованности гипотезы по формуле (7.1.10) или (7.1.11).

5. Проверяется условие $u \le u_\alpha$. Если оно выполняется, то расхождение между экспериментальными данными и гипотезой H_0 полагается незначительным. В противном случае нулевая гипотеза отвергается.

Существенное достоинство метода К. Пирсона состоит в возможности его применения тогда, когда априорно известен лишь вид гипотетического распределения, но не известны его параметры. В этом случае параметры распределения заменяются оценками, которые используются в дальнейшем для вычисления вероятностей p_l, а число степеней свободы уменьшается на число заменяемых параметров. Метод К. Пирсона имеет следующие недостатки:

а) он применим только при большой выборке ($n \ge 100$), так как показатель согласованности подчиняется распределению хи-квадрат лишь при достаточно большом n;

б) результаты проверки в значительной степени зависят от способа разбиения выборки на интервалы, причём их число целесообразно делать не менее 8–10, а количество попаданий случайной величины $\hat{x}$ в любой из интервалов должно быть не менее 5.

П р и м е р 7.3. В условиях примера 7.1 проверить согласованность теоретического и статистического распределений.

▼ Назначаем уровень значимости $\alpha = 0{,}05$. Число степеней свободы $f = 8 - 3 = 5$. По таблице приложения 7 определяем критическую границу $u_{0,05} = 11{,}1$.

Пользуясь теоретическим нормальным законом распределения с параметрами $m = 0{,}168$ и $\sigma = 1{,}448$, находим вероятности попадания в разряды по формуле

$$p_l = \Phi_1\left(\frac{x_{l+1} - m}{\sigma}\right) - \Phi_1\left(\frac{x_l - m}{\sigma}\right),$$

где x_l, x_{l+1} – границы l-го разряда. Значения функции Φ_1 находим в таблице приложения 3. Затем составляем расчётную таблицу 7.3.

Т а б л и ц а 7.3

Расчётные данные (к примеру 7.3)

J_l	–4; –3	–3; –2	–2; –1	–1; 0	0; 1	1; 2	2; 3	3; 4
p_l^*	0,012	0,050	0,144	0,266	0,240	0,176	0,092	0,020
p_l	0,012	0,052	0,142	0,244	0,264	0,181	0,076	0,021
$p_l^* - p_l$	0	–0,002	0,002	0,022	–0,024	–0,005	0,012	–0,001
$(p_l^* - p_l)^2$	0	$4\cdot10^{-6}$	$4\cdot10^{-6}$	$484\cdot10^{-6}$	$576\cdot10^{-6}$	$25\cdot10^{-6}$	$144\cdot10^{-6}$	10^{-6}
$\frac{n(p_l^* - p_l)^2}{p_l}$	0	0,038	0,014	0,992	1,091	0,069	0,947	0,024

По формуле (7.1.10) находим значение показателя согласованности гипотезы

$$u = \sum_{l=1}^{8} \frac{500(p_l^* - p_l)^2}{p_l} = 3{,}18.$$

Поскольку $u = 3{,}18$, $u_{0,05} = 11{,}1$, то $u < u_{0,05}$ – гипотеза о нормальном распределении отклонений по вертикали при стрельбе в мишень принимается. ▲

7.2. Проверка гипотез о параметрах законов распределения

7.2.1. Проверка гипотез о равенстве математических ожиданий

Пусть имеются две независимые случайные величины $\hat{x}$ и $\hat{y}$, распределённые по нормальному закону. Эксперимент состоит в том, что над случайными величинами $\hat{x}$ и $\hat{y}$ осуществляется соответственно n и m независимых испытаний, в результате которых получаются случайные выборки $\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ldots,\hat{x}_n$ и $\hat{y}_1,\ \hat{y}_2,\ldots,\hat{y}_m$. По этим выборкам определяются оценки математических ожиданий

$$\tilde{M}_{\hat{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_i, \qquad \tilde{M}_{\hat{y}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\hat{y}_j.$$

Требуется по полученным оценкам проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий $M_{\hat{x}}$ и $M_{\hat{y}}$.

Такая задача ставится потому, что, как правило, оценки математических ожиданий оказываются различными. Причина этого может быть двоякой: либо действительно отличны и оценки и математические ожидания, либо $M_{\hat{x}}$ и $M_{\hat{y}}$ одинаковы, а отличие оценок вызвано случайными причинами, в частности, случайным отбором вариантов выборки. Если окажется, что нулевая гипотеза справедлива ($M_{\hat{x}} = M_{\hat{y}}$), то различие в оценках $\tilde{M}_{\hat{x}}$ и $\tilde{M}_{\hat{y}}$ обусловлено случайными причинами, иначе различными являются математические ожидания. При решении данной задачи остановимся на том случае, когда дисперсии $D_{\hat{x}}$ и $D_{\hat{y}}$ известны.

В качестве показателя согласованности гипотезы выберем случайную величину

$$\hat{u} = \frac{\tilde{M}_{\hat{x}} - \tilde{M}_{\hat{y}}}{\sigma[\tilde{M}_{\hat{x}} - \tilde{M}_{\hat{y}}]}. \qquad (7.2.1)$$

Целесообразность выбора показателя согласованности вида (7.2.1) определяется следующими соображениями.

Введём в рассмотрение случайную величину

$$\hat{z} = \widetilde{M}_{\hat{x}} - \widetilde{M}_{\hat{y}}, \qquad (7.2.2)$$

которая, очевидно, распределена по нормальному закону и имеет числовые характеристики:

$$M_{\hat{z}} = M_{\hat{x}} - M_{\hat{y}}; \quad D_{\hat{z}} = \frac{\sigma_{\hat{x}}^2}{n} + \frac{\sigma_{\hat{y}}^2}{m}; \quad \sigma_{\hat{z}} = \sqrt{\frac{\sigma_{\hat{x}}^2}{n} + \frac{\sigma_{\hat{y}}^2}{m}}.$$

Нормируем случайную величину (7.2.2) и получаем

$$\hat{u} = \frac{\hat{z}}{\sigma_z} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_i - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\hat{y}_j}{\sqrt{\frac{\sigma_{\hat{x}}^2}{n} + \frac{\sigma_{\hat{y}}^2}{m}}}. \qquad (7.2.3)$$

Случайная величина (7.2.3) подчинена нормальному закону распределения, параметры которого известны: $M_{\hat{u}} = 0$, $\sigma_{\hat{u}} = 1$, что существенно упрощает процедуру проверки нулевой гипотезы. Действительно, если гипотеза H_0 справедлива ($M_{\hat{x}} = M_{\hat{y}}$), то случайная величина центрирована, откуда следует, что $M_{\hat{u}} = 0$. Так как выборки независимые, то $\sigma_{\hat{u}} = 1$.

Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы, которая может быть сформулирована тремя различными способами:

$$M_{\hat{x}} \neq M_{\hat{y}}; \;\; M_{\hat{x}} > M_{\hat{y}}; \;\; M_{\hat{x}} < M_{\hat{y}}.$$

Рассмотрим методику проверки гипотезы H_0 для каждого из приведённых способов формулировки конкурирующей гипотезы.

1. H_0: $M_{\hat{x}} = M_{\hat{y}}$; H_1: $M_{\hat{x}} \neq M_{\hat{y}}$.

В этом случае строят двустороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания в неё показателя согласованности в предположении о справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости α.

Наибольшая мощность критерия достигается тогда, когда левая и правая критические точки $u_{\alpha1}$, $u_{\alpha2}$ выбраны так, что вероятность попадания показателя согласованности $\hat{u}$ в каждый из двух интервалов критической области равна $\alpha/2$:

$$P(\hat{u} < u_{\alpha1}) = \frac{\alpha}{2}; \quad P(\hat{u} \geq u_{\alpha2}) = \frac{\alpha}{2}.$$

Поскольку $\hat{u}$ – нормированная нормально распределённая случайная величина и её распределение симметрично относительно нуля, то критические точки также симметричны относительно нуля:

$$|u_{\alpha1}| = |u_{\alpha2}| = |u_{\alpha}|.$$

Используя функцию нормированного нормального распределения (функцию Лапласа), вероятность попадания показателя согласованности в критическую область можно определить выражением

$$1-P(|\hat{u}|<u_\alpha)=1-2\Phi_0(u_\alpha)=\alpha,$$

откуда

$$u_\alpha=\Phi_0^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)=t_{1-\alpha}\,. \tag{7.2.4}$$

Двусторонняя критическая область будет определяться неравенствами $u<-u_\alpha$, $u>u_\alpha$. Таким образом, правило проверки гипотезы H_0 для рассматриваемого случая состоит в следующем.

а). Назначается уровень значимости α и в соответствии с формулой (7.2.4) по таблице приложения 4 определяются границы критической области $u_{\alpha 1}=-u_\alpha$, $u_{\alpha 2}=u_\alpha$.

б). На основе случайных выборок вычисляется наблюдаемое значение показателя u по формуле

$$u=\frac{\tilde{M}_{\hat{x}}-\tilde{M}_{\hat{y}}}{\sqrt{\frac{\sigma_{\hat{x}}^2}{n}+\frac{\sigma_{\hat{y}}^2}{m}}}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_i-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\hat{y}_j}{\sqrt{\frac{\sigma_{\hat{x}}^2}{n}+\frac{\sigma_{\hat{y}}^2}{m}}}\,. \tag{7.2.5}$$

в). Проверяется условие $|u|>u_\alpha$. Если оно выполняется, то гипотеза H_0 отвергается. В противном случае данные эксперимента не противоречат нулевой гипотезе.

П р и м е р 7.4. Производится контрольный отстрел двух партий снарядов, причём из первой партии проверяется 10 снарядов, а из второй – 15. В результате отстрела получены следующие оценки математических ожиданий отклонения точек попадания снарядов от точки прицеливания по дальности: для первой партии отклонение равно –0,8 км, для второй +0,4 км. Среднеквадратические отклонения по дальности для снарядов первой и второй партий известны и равны соответственно 2 и 1,5 км. Необходимо проверить гипотезу о совпадении проекций центров рассеивания на ось дальности в обеих партиях.

▼ Пусть $\hat{x}$ и $\hat{y}$ – отклонение точек попадания снарядов от точки прицеливания по дальности соответственно для первой и второй партий.

По условию задачи $n=10$, $m=15$, $\tilde{M}_{\hat{x}}=-0{,}8$ км, $\tilde{M}_{\hat{y}}=0{,}4$ км, $\sigma_{\hat{x}}=2$ км, $\sigma_{\hat{y}}=1{,}5$ км.

Задаёмся уровнем значимости $\alpha=0{,}05$ и в приложении 4 находим

$$u_\alpha=t_{1-\alpha}=t_\gamma=t_{0,95}=1{,}96.$$

Используя формулу (7.2.5), вычисляем абсолютное значение показателя согласованности:

$$|u| = \left| \frac{-0{,}8 - 0{,}4}{\sqrt{\frac{4}{10} + \frac{2{,}25}{15}}} \right| = 1{,}62 .$$

Так как $|u| < u_\alpha$, нулевая гипотеза $M_{\hat{x}} = M_{\hat{y}}$ не противоречит данным контрольного отстрела.

2. H_0: $M_{\hat{x}} = M_{\hat{y}}$; H_1: $M_{\hat{x}} > M_{\hat{y}}$.

Такой случай возможен, если априорные сведения позволяют предположить, что $M_{\hat{x}} > M_{\hat{y}}$. В этом случае строят такую правостороннюю критическую область, чтобы вероятность попадания в неё показателя согласованности в предположении о справедливости нулевой гипотезы была равна α:

$$P(\hat{u} \geq u_\alpha) = \alpha . \qquad (7.2.6)$$

Для того чтобы критическую точку найти с помощью функции Лапласа, перепишем выражение (7.2.6) в виде

$$P(\hat{u} \geq u_\alpha) = P(u_\alpha \leq \hat{u} < \infty) = 1 - \Phi_1(u_\alpha) = \alpha .$$

Из предыдущего выражения получим

$$\Phi_1(u_\alpha) = 1 - \alpha$$

и, следовательно,

$$u_\alpha = \Phi_1^{-1}(1-\alpha) = t_{1-2\alpha} \qquad (7.2.7)$$

Правило проверки гипотезы для рассматриваемого случая.

а). Назначается уровень значимости α и в соответствии с (7.2.7) по таблице приложения 4 определяется величина u_α. При этом в таблицу следует входить со значением $1–2\alpha$,

б). Определяется величина u по формуле (7.2.5).

в). Проверяется условие $u > u_\alpha$. Если оно выполняется, гипотеза H_0 отвергается, в противном случае принимается.

3. H_0: $M_{\hat{x}} = M_{\hat{y}}$; H_1: $M_{\hat{x}} < M_{\hat{y}}$.

При указанной формулировке конкурирующей гипотезы левостороннюю критическую область строят так, чтобы вероятность попадания в неё показателя согласованности в предположении о справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости: $P(\hat{u} < u_\alpha) = \alpha$.

Учитывая, что показатель $\hat{u}$ имеет симметричное распределение относительно нуля, заключаем, что точка $u_{\alpha 1}$ симметрична такой точке $u_\alpha > 0$, для которой $P(\hat{u} \geq u_\alpha) = \alpha$, это значит $u_{\alpha 1} = -u_\alpha$. Следовательно, методика определения $u_{\alpha 1}$ полностью совпадает с методикой предыдущего случая, только полученное значение берётся с отрицательным знаком.

Правило проверки гипотезы также аналогично рассмотренному выше правилу, за исключением последнего пункта, а именно, если $u < u_{\alpha 1}$, нулевая гипотеза отвергается, в противном случае – принимается.

Выше предполагалось, что случайные величины $\hat{x}$ и $\hat{y}$ распределены нормально, а их дисперсии известны. При этих предположениях показатель согласованности гипотезы распределён по нормальному закону с параметрами $M_{\hat{u}} = 0$, $\sigma_{\hat{u}} = 1$. Если хотя бы одно из предположений не выполняется, описанный метод проверки гипотезы о равенстве математических ожиданий неприменим. Однако при больших объёмах независимых выборок (≥ 30 вариантов каждая) оценки математических ожиданий и дисперсий распределены приближённо нормально и закон распределения $\hat{u}$ можно считать близким к нормальному. В этом случае проверку гипотезы можно проводить по описанной выше методике, подставляя в формулу (7.2.5) оценки дисперсий, но к полученным результатам следует относиться с осторожностью.

7.2.2. Проверка гипотез о равенстве дисперсий

Проверка гипотез о равенстве дисперсий – одна из важнейших задач статистической обработки экспериментальных данных. На практике задача сравнения дисперсий возникает, если требуется сравнить погрешности показаний приборов, точность методов измерений и т.д.

Сформулируем задачу проверки гипотезы о равенстве дисперсий. Пусть имеются две случайные величины $\hat{x}$ и $\hat{y}$, каждая из которых подчиняется нормальному закону распределения с дисперсиями $D_{\hat{x}}$ и $D_{\hat{y}}$. По независимым выборкам $x_1, x_2,\dots,x_n$ и $y_1, y_2,\dots,y_m$ найдены оценки дисперсий:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{D}_{\hat{x}} &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\hat{x}_i - \tilde{M}_{\hat{x}})^2 = \frac{D_{\hat{x}}}{n-1}\hat{\chi}^2_{n-1};\\ \tilde{D}_{\hat{y}} &= \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(\hat{y}_j - \tilde{M}_{\hat{y}})^2 = \frac{D_{\hat{y}}}{m-1}\hat{\chi}^2_{m-1}.\end{aligned}\right\}, \tag{7.2.8}$$

где $\hat{\chi}^2_{n-1}$, $\hat{\chi}^2_{m-1}$ - хи- квадрат распределения с $n - 1$ и $m - 1$ степенями свободы соответственно.

Обычно полученные оценки различны, в связи с чем возникает вопрос, можно ли на основе обработки экспериментальных данных полагать, что $D_{\hat{x}} = D_{\hat{y}}$ (нулевая гипотеза).

Если нулевая гипотеза справедлива, то это означает, что выборочные дисперсии (7.2.8) представляют собой оценки одной и той же характеристики рассеивания генеральной совокупности и их различие определяется случайными причинами. В противном случае различие оценок существенно и является следствием того, что дисперсии генеральных совокупностей различны.

В качестве показателя согласованности гипотезы о равенстве дисперсий примем отношение большей оценки дисперсии к меньшей. Для определённости будет полагать $D_{\hat{x}} > D_{\hat{y}}$, тогда

$$\hat{u} = \frac{D_{\hat{x}}}{D_{\hat{y}}}. \qquad (7.2.9)$$

Учитывая оценки (7.2.8) при условии, что нулевая гипотеза справедлива, на основе отношения (7.2.9) получаем следующее выражение показателя согласованности:

$$\hat{u} = \frac{\hat{\chi}^2_{n-1}(m-1)}{\hat{\chi}^2_{m-1}(n-1)} = \mathsf{F}_{(n-1;\, m-1)}.$$

Таким образом, показатель согласованности представляет собой случайную величину, подчинённую закону распределения Фишера со степенями свободы $f_1 = n - 1$ и $f_2 = m - 1$. Как известно, распределение Фишера зависит только от значений степеней свободы и уровня значимости, а от других параметров не зависит.

Критическая область в зависимости от вида конкурирующей гипотезы строится по-разному. Как и ранее, рассмотрим три вида конкурирующей гипотезы:

$$D_{\hat{x}} \neq D_{\hat{y}}; \quad D_{\hat{x}} > D_{\hat{y}}; \quad D_{\hat{x}} < D_{\hat{y}}.$$

Построение критических областей для каждого из этих видов осуществляется следующим образом.

1. $H_0{:}\, D_{\hat{x}} = D_{\hat{y}}; \quad H_1{:}\, D_{\hat{x}} \neq D_{\hat{y}}$.

В этом случае строят двустороннюю критическую область, исходя из того, чтобы вероятность попадания в неё показателя согласованности в предположении о справедливости нулевой гипотезы была равна уровню значимости α. При этом достигается наибольшая мощность критерия проверки, когда вероятности попадания показателя согласованности в каждый из двух интервалов критической области будут одинаковы и равны $\alpha/2$. Таким образом, при построении критической области должны выполняться следующие условия (рис.7.4):

$$\left.\begin{aligned} P(\hat{u} < u_{\alpha 1}) &= \alpha/2; \\ P(\hat{u} \geq u_{\alpha 2}) &= \alpha/2. \end{aligned}\right\}$$

Правая критическая точка $u_{\alpha 2}$ может быть найдена непосредственно по таблице критических точек распределения Фишера (приложение 5). При этом входами в таблицу будут величины $\alpha/2$, $f_1 = n - 1$, $f_2 = m - 1$. В результате имеем

$$u_{\alpha 2} = \mathsf{F}_{\left(\frac{\alpha}{2};\, n-1;\, m-1\right)} = \mathsf{F}_{\alpha 2}\,.$$

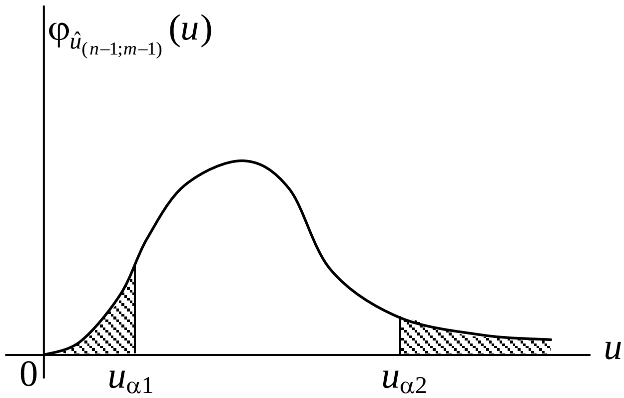

Рис.7.4. Двусторонняя критическая область

Однако левых критических точек данная таблица не содержит и найти непосредственно $u_{\alpha 1}$ невозможно. В связи с этим для нахождения левой критической границы $u_{\alpha 1}$ необходимо использовать следующий приём.

Рассмотрим события

$$\mathsf{F}_{(n-1;\, m-1)} < \mathsf{F}_{\alpha 1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\mathsf{F}_{(n-1;\, m-1)}} \geq \frac{1}{\mathsf{F}_{\alpha 1}}\,.$$

Так как эти события эквивалентны, то их вероятности равны:

$$\frac{\alpha}{2} = P(\hat{\mathsf{F}}_{(n-1;\, m-1)} < \mathsf{F}_{\alpha 1}) = P\left(\frac{1}{\hat{\mathsf{F}}_{(n-1;\, m-1)}} \geq \frac{1}{\mathsf{F}_{\alpha 1}}\right).$$

Как известно [1], случайная величина $1/\hat{\mathsf{F}}_{(n-1;\, m-1)}$ также подчиняется закону распределению Фишера со степенями свободы $f_1 = m - 1$, $f_2 = n - 1$. Поэтому значение $1/\mathsf{F}_{\alpha 1}$ может быть найдено как верхний $100(\alpha/2)$-процентный предел этого закона распределения:

$$\frac{1}{\mathsf{F}_{\alpha 1}} = \mathsf{F}_{\left(\frac{\alpha}{2};\, m-1;\, n-1\right)}.$$

Таким образом, для определения $1/\mathsf{F}_{\alpha 1}$ необходимо войти в таблицу критических точек распределения Фишера с аргументами $\alpha/2$, $f_1 = m - 1$, $f_2 = n - 1$. Значение левой критической границы определяется как величина, обратная значению, найденному по таблице.

Учитывая изложенное выше, правило проверки гипотезы о равенстве дисперсий можно сформулировать в следующем виде.

а). Назначается уровень значимости α и по таблице критических точек распределения Фишера находятся критические границы $u_{\alpha 1}$ и $u_{\alpha 2}$. При нахождении критической границы $u_{\alpha 2}$ в таблицу следует входить с аргументами $\alpha/2$, $f_1 = n - 1$, $f_2 = m - 1$, а при определении критической границы $u_{\alpha 1}$ – с аргументами $\alpha/2$, $f_1 = m - 1$, $f_2 = n - 1$. В последнем случае табличное значение $F_{\left(\frac{\alpha}{2};\, m-1;\, n-1\right)}$ используется для определения критической границы $u_{\alpha 1}$ из выражения

$$u_{\alpha 1} = \frac{1}{F_{\left(\frac{\alpha}{2};\, m-1;\, n-1\right)}}. \qquad (7.2.10)$$

б). Вычисляется значение показателя согласованности

$$u = \frac{\tilde{D}_{\hat{x}}}{\tilde{D}_{\hat{y}}} = \frac{\tilde{\sigma}^2_{\hat{x}}}{\tilde{\sigma}^2_{\hat{y}}}. \qquad (7.2.11)$$

в). Проверяется неравенство

$$u_{\alpha 1} < u < u_{\alpha 2}.$$

Если оно выполняется, то наблюдаемое значение показателя согласованности попадает в область допустимых значений. В этом случае делается вывод об отсутствии существенного различия между сравниваемыми дисперсиями и гипотеза H_0 принимается. Если $u < u_{\alpha 1}$ или $u > u_{\alpha 2}$, то нулевая гипотеза отвергается.

П р и м е р 7.5. При исследовании стабилизатора напряжения проведено семь испытаний и получена оценка дисперсии выходного напряжения, равная 0,06 B^2. После доработки стабилизатора проведено ещё 13 испытаний, в результате чего оценка дисперсии выходного напряжения стала равна 0,10 B^2. Есть ли основание полагать, что в результате доработки точность стабилизатора не изменилась?

▼ Обозначим $\tilde{D}_{\hat{x}} = 0{,}10\ B^2$, $\tilde{D}_{\hat{y}} = 0{,}06 B^2$. Тогда $n = 13$, $m = 7$. Зададимся уровнем значимости $\alpha = 0{,}10$ и в приложении 5 находим $u_{\alpha 2}$ для $\alpha/2 = 0{,}05$, $f_1 = n - 1 = 12$, $f_2 = m - 1 = 6$. Также находим $u_{\alpha 1}$ для $\alpha/2 = 0{,}05$, $f_1 = m - 1 = 6$, $f_2 = n - 1 = 12$. Получаем $u_{\alpha 2} = 4$, $F_{(0{,}05;6;12)} = 3$ и, следовательно, $u_{\alpha 1} = 0{,}33$.

Значение показателя согласованности по формуле (7.2.11):

$$u = \frac{\tilde{D}_{\hat{x}}}{\tilde{D}_{\hat{y}}} = \frac{0{,}10}{0{,}06} = 1{,}67.$$

Так как $u_{\alpha 1} < u < u_{\alpha 2}$, то гипотеза H_0 о том, что доработка не повлияла на точность стабилизатора напряжения, принимается. ▲

2. $H_0\colon D_{\hat{x}} = D_{\hat{y}}$; $\quad H_1\colon D_{\hat{x}} > D_{\hat{y}}$.

В этом случае строят правостороннюю критическую область таким образом, чтобы вероятность попадания в эту область показателя согласованности в предположении о справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости:

$$P(\hat{u} > u_{\alpha}) = \alpha.$$

Критическую точку $u_\alpha = \mathsf{F}_{(\alpha;\, f_1;\, f_2)}$ находят по таблице критических точек распределения Фишера, используя в качестве аргументов α, $f_1 = n - 1$, $f_2 = m - 1$. Наблюдаемое значение показателя согласованности определяется по формуле (7.2.11). Если $u < u_\alpha$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу, в противном случае она отвергается.

3. H_0: $D_{\hat{x}} = D_{\hat{y}}$; H_1: $D_{\hat{x}} < D_{\hat{y}}$.

В данном случае строят левостороннюю критическую область таким образом, чтобы

$$P(\hat{u} < u_\alpha) = \alpha\,.$$

Критическая точка находится по таблице критических точек распределения Фишера на основе отношения

$$u_\alpha = \frac{1}{\mathsf{F}_{(\alpha;\, m-1;\, n-1)}}\,. \qquad (7.2.12)$$

В знаменателе (7.2.12) – табличное значение, найденное при аргументах α, $f_1 = m - 1$, $f_2 = n - 1$.

Наблюдаемое значение показателя согласованности определяется по формуле (7.2.11). Если $u > u_\alpha$, то нулевая гипотеза принимается, в противном случае она должна быть отвергнута.

В заключение следует отметить, что показатель согласованности гипотезы (7.2.9) можно использовать для сравнения дисперсий и в том случае, когда для одной из дисперсий найдена не оценка, а её точное значение. В этом случае число степеней свободы закона распределения Фишера в числителе или знаменателе выражения (7.2.9) следует устремить к бесконечности, в остальном методика проверки гипотезы остаётся прежней.

П р и м е р 7.6. Из партии снарядов с известной характеристикой рассеивания по дальности $\sigma_{\hat{x}_1} = 20\,\text{м}$ испытываются 10 снарядов, хранившихся без специальной тары. Есть ли основание полагать, что по причине такого хранения рассеивание снарядов по дальности возросло, если в результате испытаний получена оценка $\tilde{\sigma}_{\hat{x}_1} = 27\,\text{м}$?

▼ В данном примере кривая распределения характеристики $\hat{u}$ при конкурирующей гипотезе смещена влево, поэтому в качестве критической выбираем левостороннюю область.

Пусть $\alpha = 0{,}05$, тогда для определения u_α входим в таблицу приложения 5 со значениями $\alpha = 0{,}05$, $f_1 = m - 1 = 9$, $f_2 = \infty$. Получим $\mathsf{F}_{(0{,}05;9;\infty)} = 1{,}88$, следовательно,

$$u_\alpha = \frac{1}{1{,}88} = 0{,}53\,.$$

Вычисляем значение показателя согласованности

$$u = \frac{\tilde{\sigma}_{\hat{x}}^2}{\tilde{\sigma}_{\hat{y}}^2} = \left(\frac{27}{20}\right)^2 = 1{,}82\,.$$

Так как $u > u_\alpha$ и значение показателя согласованности попало в область допустимых значений, то нет оснований утверждать, что в результате хранения без специальной тары рассеивание снарядов по дальности возросло.

▲