ГУАП

КАФЕДРА № 43

ОТЧЁТ   
ЗАЩИЩЕН С ОЦЕНКОЙ

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| к.т.н., доцент |  |  |  | В. В. Мышко |
| должность, уч. Степень, звание |  | подпись, дата |  | инициалы, фамилия |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ОТЧЁТ О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №4 | | | | | |
| однофакторный регрессионный анализ | | | | | |
| по дисциплине: ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ | | | | | |
|  | | | | | |
| РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ | | | | | |
| СТУДЕНТ ГР. | 4931 |  |  |  | А.А. Кинько |
|  |  |  | подпись, дата |  | инициалы, фамилия |

Санкт-Петербург 2023

**Текст задания**

Согласно варианту №4931-12:

На основе заданного массива данных:

* построить уравнение регрессии в виде *алгебраического полинома второй степени*;
* проверить адекватность уравнения регрессии;
* проверить значимость коэффициентов регрессии.

Расчеты произвести в скалярной и матричной форме.

Порядок выполнения задания:

1. Составить систему нормальных уравнений, используя массив экспериментальных данных (таблица 1);
2. Найти оценки коэффициентов регрессии посредством решения системы нормальных уравнений;
3. При расчетах в матричной форме составить матричное уравнение с вектором неизвестных оценок коэффициентов регрессии и найти его решение;
4. Проверить адекватность построенного уравнения регрессии экспериментальным данным по критерию Фишера при уровне значимости α = 0,01;
5. Проверить значимость коэффициентов регрессии по критерию Стьюдента при таком же уровне значимости;
6. Повторно проверить адекватность уравнения регрессии после исключения незначимых коэффициентов.

*Таблица №1. Экспериментальные данные варианта №4931-12*

| **Массив экспериментальных данных** | | | | | |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -2 | 0 | 1 | 2 | 4 |
| y | 18 | 3 | 1 | 3 | 21 |

**Расчетные формулы**

1. Поиск регрессионных коэффициентов (скалярная форма).

Класс функций задан в условии задания – полином второй степени

где [1]

Для заданного количества опытов (5) система нормальных уравнений принимает вид:

С учетом [1] система уравнений [2] преобразуется следующим образом:

Оценки коэффициентов уравнения регрессии находятся по формулам:

*Таблица №2. Расчетная таблица скалярного вычисления коэффициентов уравнения*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
| -2 | 18 | 4 | -8 | 16 | -36 | 72 |
| 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 4 | 8 | 16 | 6 | 12 |
| 4 | 21 | 16 | 64 | 256 | 84 | 336 |
|  |  |  |  |  |  |  |

Вычисляем оценки коэффициентов:

2. Проверка адекватности регрессионной зависимости экспериментальным данным.

Для этого необходимо вычислить оценки дисперсий.

*Таблица №3. Расчетная таблица вычисления оценок дисперсий*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
| -2 | 18 | 8.8 | 77.44 | 18.145 | -0.145 | 0.021 |
| 0 | 3 | -6.2 | 38.44 | 2.571 | 0.429 | 0.184 |
| 1 | 1 | 8.2 | 67.24 | 0.961 | 0.039 | 0.002 |
| 2 | 3 | -6.2 | 38.44 | 3.469 | -0.469 | 0.22 |
| 4 | 21 | 11.8 | 139.24 | 20.839 | 0.161 | 0.026 |
|  | | | |  | | |

Оценки дисперсий вычисляются по формулам:

Наблюдаемое значение показателя согласованности:

Критическое значение показателя согласованности при уровне значимости и степенях свободы находим в приложении 5:

Так как , нулевая гипотеза о соответствии функции регрессии экспериментальным данных принимается.

3. Проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии.

Для вычисления наблюдаемых значений показателя согласованности необходимо найти диагональные элементы корреляционный матрицы:

Находим произведение транспонированной матрицы на исходную:

Далее требуется найти элементы главной диагонали матрицы . Главная диагональ корреляционной матрицы вектора оценок коэффициентов регрессии:

Вычисляем оценки средних квадратических отклонений коэффициентов

наблюдаемые значения показателя:

Критическое значение показателя согласованности при уровне значимости и степени свободы находим в приложении 6:

Проверяем условия и получаем:

На основе приведенных неравенств делаем вывод, что коэффициенты являются значимыми, а коэффициент принимается равным нулю.

Окончательный вид уравнения регрессии:

Повторная проверка адекватности по критерию Фишера проводится аналогично пункту №2.

4. Поиск регрессионных коэффициентов (матричная форма)

Матричное уравнение имеет вид:

где матрицы и вычислены в пункте №2,

Выражение для вычисления оценок коэффициентов регрессии представляется в виде:

Вычислим правую часть уравнения:

Найдем оценки коэффициентов регрессии: 0.01190476 -0.02380952 -0.03571429]

[-0.02380952 0.09761905 0.02142857]

[-0.03571429 0.02142857 0.35714286]]

Так же, как и в пункте №1 при расчете в скалярной форме, получилось уравнение регрессии:

**Результат выполнения.**

В ходе выполнения данной лабораторной работы была написана программа на языке Python 3.10, решающая задачу в общем виде для всех вариантов – находит коэффициенты регрессии уравнения в виде алгебраического полинома второй степени, проверяет их адекватность и значимость. Так, для варианта №4931-12 были получены следующие результаты:

Загружаем данные для варианта № 12 ...

Значения X: [-2.0, 0.0, 1.0, 2.0, 4.0]

Значения Y: [18.0, 3.0, 1.0, 3.0, 21.0]

Необходимо построить уравнение регрессии y = f(x) в предположении,что оно является алгебраическим полиномом второй степени

Пусть y = a0 \* f0(x) + a1 \* f1(x) + a2 \* f2(x), где

f0(x) = x^2, f1(x) = x, f2(x) = 1

---- Расчетная таблица для скалярного расчета:

x\_i [-2.0, 0.0, 1.0, 2.0, 4.0] - сумма: 5.0

y\_i [18.0, 3.0, 1.0, 3.0, 21.0] - сумма: 46.0

x^2\_i [4.0, 0.0, 1.0, 4.0, 16.0] - сумма: 25.0

x^3\_i [-8.0, 0.0, 1.0, 8.0, 64.0] - сумма: 65.0

x^4\_i [16.0, 0.0, 1.0, 16.0, 256.0] - сумма: 289.0

y\_i \* x\_i [-36.0, 0.0, 1.0, 6.0, 84.0] - сумма: 55.0

y\_i \* x^2\_i [72.0, 0.0, 1.0, 12.0, 336.0] - сумма: 421.0

Матрица A:

[[289. 65. 25.]

[ 65. 25. 5.]

[ 25. 5. 5.]]

Определитель |A|: 8400

Матрица A0:

[[421. 65. 25.]

[ 55. 25. 5.]

[ 46. 5. 5.]]

Определитель |A0|: 17299

Коэффициент a0: 2.059

Матрица A1:

[[289. 421. 25.]

[ 65. 55. 5.]

[ 25. 46. 5.]]

Определитель |A1|: -30820

Коэффициент a1: -3.669

Матрица A2:

[[289. 65. 421.]

[ 65. 25. 55.]

[ 25. 5. 46.]]

Определитель |A2|: 21600

Коэффициент a2: 2.571

[2.059, -3.669, 2.571]

Функция, полученная с помощью скалярного расчета, принимает вид:

2.059 \* x^2 + -3.669 \* x + 2.571

---- Произведем расчеты в матричной форме

Решим уравнение A<3> = (F^T[3;5] F[5;3])^-1 F^T[3;5] Y<5>

Вычисляем обратную матрицу для (F^T F)^-1 для матрицы:

[[289. 65. 25.]

[ 65. 25. 5.]

[ 25. 5. 5.]]

Обратная матрица:

[[ 0.01190476 -0.02380952 -0.03571429]

[-0.02380952 0.09761905 0.02142857]

[-0.03571429 0.02142857 0.35714286]]

Вычисляем матрицу в правой части уравнения - F^T\_[5;3] Y<5>:

F^T\_[5;3]:

[[ 4. 0. 1. 4. 16.]

[-2. 0. 1. 2. 4.]

[ 1. 1. 1. 1. 1.]]

Y<5>:

[[18.]

[ 3.]

[ 1.]

[ 3.]

[21.]]

Полученная правая часть уравнения:

[[421.]

[ 55.]

[ 46.]]

Получим оценки коэффициенты регрессии путем перемножения обратной матрицы с полученной:

Функция, полученная с помощью скалярного расчета, принимает вид:

2.06 \* x^2 + -3.669 \* x + 2.571

---- Проверяем адекватность регрессионной зависимости экспериментальным данным

Расчетная таблица:

x\_i [-2.0, 0.0, 1.0, 2.0, 4.0]

y\_i [18.0, 3.0, 1.0, 3.0, 21.0]

y\_i - y^\* [8.8, -6.2, -8.2, -6.2, 11.8]

(y\_i - y^\*)^2 [77.44, 38.44, 67.24, 38.44, 139.24]

Сумма квадратов разности значения y и оценки мат. ожидания - 360.8

y~\_i [18.145, 2.571, 0.961, 3.469, 20.839]

y\_i - y~\_i [-0.145, 0.429, 0.039, -0.469, 0.161]

(y\_i - y~\_i)^2 [0.021, 0.184, 0.002, 0.22, 0.026]

Сумма квадратов разности значения y и значений полученной функции - 0.453

Вычисляем оценку дисперсий sigma^2: 90.2

Вычисляем оценку дисперсий sigma^2\_1: 0.2265

Значение показателя согласованности: 398.233995584989

Критическое значение показателя согласованности при уровне значимости alpha=0.01 и степенях свободы: f1 = 4,f2 = 2: 99.25

Так как показатель согласованности больше критической точки распределения Фишера,нулевая гипотеза H0 о соответствии функции регрессии экспериментальным данным принимается

---- Проверяем значимость коэффициентов регрессии.

Элементы главной диагонали обратной матрицы: [0.011904761904761906, 0.09761904761904763, 0.35714285714285715]

Перемножим sigma^2\_1 на элементы диагонали и получим дисперсии коэффициентов регрессии:

[0.002696428571428572, 0.02211071428571429, 0.08089285714285714]

Соответствующие средние квадратичные отклонения: [0.05192714676764526, 0.1486967191491268, 0.28441669631520783]

Находим наблюдаемые значения показателя: [39.651706827129594, 24.674384350877226, 9.039553701695002]

Критическое значение показателя согласованности при уровне значимости alpha=0,01 степени свободы f = 2: 9.92

Сравниваем полученные показатели с критическим значением:

Коэффициент a0 является значимым

Коэффициент a1 является значимым

Коэффициент a2 является незначимым

Исключая, незначимые коэффициенты получим уравнение:

2.059 \* x^2 + -3.669 \* x

---- Повторно проверим адекватность для нового уравнения

---- Проверяем адекватность регрессионной зависимости экспериментальным данным

Расчетная таблица:

x\_i [-2.0, 0.0, 1.0, 2.0, 4.0]

y\_i [18.0, 3.0, 1.0, 3.0, 21.0]

y\_i - y^\* [8.8, -6.2, -8.2, -6.2, 11.8]

(y\_i - y^\*)^2 [77.44, 38.44, 67.24, 38.44, 139.24]

Сумма квадратов разности значения y и оценки мат. ожидания - 360.8

y~\_i [15.574, 0.0, -1.61, 0.898, 18.268]

y\_i - y~\_i [2.426, 3.0, 2.61, 2.102, 2.732]

(y\_i - y~\_i)^2 [5.885, 9.0, 6.812, 4.418, 7.464]

Сумма квадратов разности значения y и значений полученной функции - 33.579

Вычисляем оценку дисперсий sigma^2: 90.2

Вычисляем оценку дисперсий sigma^2\_1: 16.7895

Значение показателя согласованности: 5.372405372405373

Критическое значение показателя согласованности при уровне значимости alpha=0.01 и степенях свободы: f1 = 4,f2 = 2: 99.25

Так как показатель согласованности меньше критической точки распределения Фишера,нулевая гипотеза H0 о соответствии функции регрессии экспериментальным данным отклоняется

**Выводы**

В ходе данной лабораторной работы были получены навыки получения уравнения регрессии в виде полинома второй степени, а также проверки его адекватности и значимости его коэффициентов. Так, для варианта №4931-12 было получено уравнение:

**ПРИЛОЖЕНИЕ А. Листинг программы**