# Методы современной прикладной статистики
# 7. Дисперсионный анализ.

Родионов Игорь Владимирович
vecsell@gmail.com

Весна, 2018

# Однофакторный дисперсионный анализ

Пусть имеются наблюдения признака $X$ на $N = \sum_i n_i$ объектах.

Хотим проверить, зависят ли значения признака $X$ (а точнее, его среднее) от некого фактора $A$, принимающего значения (уровни) $(A_1, \ldots, A_k)$.

Пусть при $A = A_j$ значения признака $X$ заданы выборкой $\{X_{ij}\}_{i=1}^{n_j}$, $1 \leq j \leq k$.

Линейная (т.н. однофакторная) модель:

$$X_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij},$$

$i = 1, \ldots, n_j$, $j = 1, \ldots, k$.

$\mu$ – глобальное среднее признака $X$;
$\alpha_j$ – отклонение от $\mu$, вызванное влиянием $j$-того уровня фактора $A$;
$\varepsilon_{ij}$ – н.о.р. случайные ошибки.

Т.е. средние значения $X$ во всех выборках одинаковы тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k$.

# Однофакторный дисперсионный анализ

**Идея:** рассмотрим две компоненты разброса значений $X_{ij}$ относительно глобального среднего признака $\overline{X}$ :

$$X_{ij} - \overline{X} = (X_{ij} - \overline{X}_j) + (\overline{X}_j - \overline{X}),$$

где $\overline{X}_j$ – среднее по $j$-той выборке.

Тогда (аналогично bias-variance) имеем:

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \overline{X})^2 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \overline{X}_j)^2 + \sum_{j=1}^{k} n_j (\overline{X}_j - \overline{X})^2.$$

Если средние в группах значительно отличаются, преобладает вторая компонента, если же они примерно одинаковы – первая.

Для проверки гипотезы $H_0 : \alpha_1 = \ldots = \alpha_k$ против альтернативы $H_1 : H_0$ *неверна* используется статистика

$$F = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j(\overline{X}_j - \overline{X})^2}{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij} - \overline{X}_j)^2} \cdot \frac{N-k}{k-1}.$$

В случае выполнения гипотезы $H_0$ и предположений метода

$$F \sim F(k-1, N-k).$$

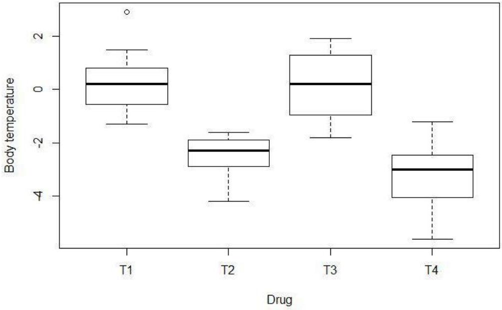
Критерий обычно выбирается правосторонним.

Предположения метода:

1. выборочные распределения средних значений признака во всех группах нормальны;
2. дисперсия значений признака во всех выборках одинакова;
3. наблюдения независимы.

- Первое предположение считается выполненным, если распределение признака во всех группах нормально, или если объёмы выборок примерно одинаковы и $N - k - 1 \geq 20$.
- Второе предположение считается выполненным, если отношение наибольшей выборочной дисперсии к наименьшей не превосходит 10.
- При $n_1 = \ldots = n_k$ метод устойчив к нарушению первых двух предположений.
- Если объёмы выборок различаются, нарушение предположения о равенстве дисперсий может привести к росту вероятности ошибки первого рода.
- Выбросы могут оказывать существенное влияние на результат.

**Пример:** исследуется эффективность четырёх жаропонижающих средств, в составе которых один и тот же активный ингредиент присутствует в разных дозировках. Для каждой из четырёх групп из 15 морских свинок известно изменение температуры после введения жаропонижающего. Есть ли различия в действии препаратов?




Критерий Фишера проверки гипотезы $H_0$ об отсутствии различий в действии препаратов дает p-value $= 5.43 \times 10^{-14}$.

Что делать, если предположения критерия Фишера не выполнены? Стоит переходить к непараметрическим критериям.

Пусть $\{X_{ij}\}, 1 \leq i \leq n_j, 1 \leq j \leq k$ – независимые выборки с ф.р. $F_j(x) = F(x - \alpha_j)$. Проверим гипотезу об отсутствии сдвига $H_0 : \alpha_1 = \ldots = \alpha_k$ против альтернативы $H_1 : H_0$ *неверна*.

Пусть $R_{ij} = R(X_{ij})$ – ранг наблюдения $X_{ij}$ в общей совокупности, $\overline{R}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} R_{ij}$, $\overline{R} = \frac{1}{N} \sum_{i,j} R_{ij} = \frac{N+1}{2}$.

# Критерий Краскела-Уоллиса

Статистика критерия Краскела-Уоллиса

$$W = (N-1)\frac{\sum_{j=1}^{k} n_j(\overline{R}_j - \overline{R})^2}{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(R_{ij} - \overline{R})^2}$$

имеет табличное распределение при верной гипотезе $H_0$ об отсутствии сдвига, которое при $n_j > 5\ \forall j$ приближается распределением $\chi^2_{k-1}$.

Если не были использованы средние ранги, то

$$W = \frac{12}{N(N+1)}\sum_{j=1}^{k} n_j\overline{R}_j^2 - 3(N+1).$$

Данный критерий является многомерным обобщением критерия Манна-Уитни и используется для проверки гипотезы $H_0 : \alpha_1 = \ldots = \alpha_k$ против альтернативы $H_1' : \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_k$. Статистика критерия

$$S = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} a_{ij},$$

где $a_{ij}$ – количество наблюдений из первых $j-1$ выборок, меньших $X_{ij}$. При верности гипотезы $H_0$ имеет табличное распределение.

# Критерий Джонкхиера

Если все $n_j > 10$, то при верной гипотезе $H_0$ распределение статистики критерия приближается распределением $N(\mu, \sigma^2)$, где

$$\mu = \frac{1}{4}(N^2 - \sum_{j=1}^{k} n_j^2), \; \sigma^2 = \frac{1}{72}\left(N^2(2N+3) - \sum_{j=1}^{k} n_j^2(2n_j+3)\right).$$

На альтернативе $H_1'$ критерий Джонкхиера имеет большую мощность, чем критерий Краскела-Уоллиса, чем и объясняется его использование.

Кроме того, оба этих критерия являются устойчивыми к наличию выбросов в данных.

# Виды эффектов модели

Прежде чем переходить к вопросу, средние (медианы) в каких группах отличаются (в независимости от того, отклонили мы гипотезу однородности или нет), следует понять, чем вызваны различия между выборками. Наиболее популярными являются 2 модели: *модель со случайным эффектом*

$$X_{ij} = a_j + \varepsilon_{ij},$$

где $\{a_j\}$ – н.о.р. случайные величины (как правило, нормальные) со средним $\mu$ и дисперсией $\sigma_\alpha^2$, независимые с $\{\varepsilon_{ij}\}$, и *модель с фиксированным эффектом*

$$X_{ij} = \mu + a_j + \varepsilon_{ij},$$

где $a_j$ – неслучайны.

# Модель со случайным эффектом

Свойства модели:
1) Характеристика, определяющая разбиение на группы, не представляет непосредственного интереса.
2) Группы случайно выбраны из множества возможных.
3) Если между группами есть неоднородность, ожидается, что она сохранится при повторе эксперимента, но соотношения между средними могут измениться.

**Пример.** Наблюдаем вкусовые качества персиков с 10 различных деревьев; планируется сравнить различия во вкусовых качествах персиков с разных деревьев с различиями у персиков с одного (“лучшего”) дерева. Если последние больше (что эквивалентно принятию гипотезы однородности, см. слайд 5), то бессмысленно выбрать для размножения дерево с лучшей средней оценкой.

# Модель с фиксированным эффектом

Проверять гипотезы об однородности пар выборок внутри совокупности в модели со случайным эффектом бессмысленно, потому что различия будут вызваны случаем. Однако в модели с фиксированным эффектом такая задача интересна.

Свойства модели:
1) Разбиение на группы определено до получения данных.
2) При повторе эксперимента ожидается, что соотношения между средними групп сохранятся.
3) Если между средними есть различия, на следующем этапе анализируется, какие именно группы различаются.

# Различия эффектов

ANOVA: переменные

Факторы

FIXED

Исследователь: Сравню-ка я эффективность анальгина и лекарства СтопБобо, под контролем плацебо!

Как бы ни было поставлено это исследование, группы будут три, и именно эти, **других нет**.

RANDOM

Исследователь: Изучу-ка я, различается ли масса лягушек в разных прудах!

Количество прудов в исследовании может быть разным, **существуют неисследованные** пруды.

# Модель с фиксированным эффектом

Если используется модель с фиксированным эффектом, то в случае отклонения гипотезы однородности проводятся дополнительные проверки с целью уточнения характера различий. Проверка может быть:

- запланированной, когда группы для дальнейшего сравнения отобраны до начала сбора данных.
- незапланированной, когда группы для сравнения выбираются по результатам первичного анализа данных.

Для запланированного попарного сравнения групп можно просто использовать подходящий двухвыборочный критерий. Для незапланированного сравнения всё сложнее, потому что номера выбранных для сравнения групп по сути являются случайными величинами.

Пусть $\{X_{ij}\}_{i=1}^{n_j} \sim N(\mu_j, \sigma^2), 1 \leq j \leq k$. Критерий проверяет гипотезу $H_0 : \sum_j c_j\alpha_j = 0$, где $\sum_j c_j = 0$, а средние выборок $\alpha_j$ упорядочены по возрастанию выборочных средних $\overline{X}_j$. Введем статистику

$$S = \frac{(\sum_{j=1}^k c_j \overline{X}_j)^2}{(k-1)S_{in}^2(\sum_{j=1}^k c_j^2/n_j)},$$

где $S_{in}^2 = \frac{1}{N-k}\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij} - \overline{X}_j)^2$. При верной $H_0$ $S \sim F(k-1, N-k)$, используется односторонний критерий.

Критерий Шеффе является более грубым, чем критерий LSD Фишера, однако более устойчив к нарушению предположения о равенстве дисперсий.

# LSD Фишера

Пусть $\{X_{ij}\}_{i=1}^{n_j} \sim N(\mu_j, \sigma^2), 1 \le j \le k$. Критерий проверяет гипотезы $H_{0j} : \alpha_j = \alpha_{j+1}$, где $\alpha_j$ снова упорядочены по возрастанию выборочных средних $\overline{X}_j$. Рассмотрим

$$LSD_j = t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{n_j + n_{j+1}}{n_j n_{j+1}}} \sqrt{\frac{(n_j - 1)S_j^2 + (n_{j+1} - 1)S_{j+1}^2}{n_j + n_{j+1} - 2}}.$$

где $t_\gamma$ – $\gamma$-квантиль распределения Стьюдента с $n_j + n_{j+1} - 2$ степенями свободы, $S_j^2$ и $S_{j+1}^2$ – выборочные дисперсии $j$-той и $(j+1)$-ой выборки соответственно.

Если $|\overline{X}_j - \overline{X}_{j+1}| > LSD_j$, то частная нулевая гипотеза $H_{0j} : \alpha_j = \alpha_{j+1}$ отклоняется в пользу двусторонней альтернативы. LSD можно использовать только в случае отклонения общей гипотезы однородности, и при этом стоит применять множественную проверку гипотез.

Непараметрический аналог критерия HSD Тьюки. Пусть в каждой из $k$ выборок $n$ наблюдений. Пусть $R_{ij}$ – ранг наблюдения $X_{ij}$ в общей совокупности, $\overline{R}_j = \frac{1}{n}\sum_i R_{ij}$ – средний ранг по $j$-той выборке.

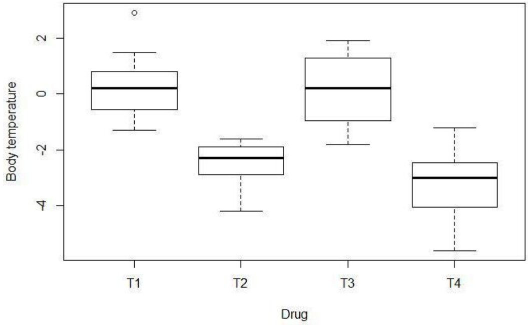
Введем

$$CD = q'_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{k+1}{6n},$$

где $q'_\gamma$ – $\gamma$-квантиль из распределения стьюдентизированного размаха с $k$ степенями свободы.

Проверим серию гипотез $H_{0j} : \alpha_j = \alpha_{j+1}$, где $\alpha_j$ упорядочены по возрастанию $\overline{R}_j$. Если $|\overline{R}_j - \overline{R}_{j+1}| > CD$, то отвергаем гипотезу $H_{0j}$. Для проверки $H_{0j}$ следует пользоваться методами множественной проверки гипотез.

Действие жаропонижающих на морских свинок:




**LSD Фишера**

| | |
|---|---|
| $T_1$ vs. $T_3$ | 0.9983 |
| $T_3$ vs. $T_2$ | $3.5 \times 10^{-8}$ |
| $T_2$ vs. $T_4$ | 0.2949 |

**Критерий Неменьи**

| | |
|---|---|
| $T_1$ vs. $T_3$ | 0.9999 |
| $T_3$ vs. $T_2$ | $1.8 \times 10^{-4}$ |
| $T_2$ vs. $T_4$ | 0.7942 |

# Критерий Бартлетта

Пусть $\{X_{ij}\}_{i=1}^{n_j} \sim N(\mu_j, \sigma_j^2), 1 \le j \le k$. Критерий проверяет гипотезу $H_0 : \sigma_1^2 = \ldots = \sigma_k^2$ против альтернативы $H_1 : H_0$ *неверна*. Статистика критерия

$$B = \frac{1}{C}\left((N-k)\ln\left(\frac{1}{N-k}\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)s_j^2\right) - \sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\ln s_j^2\right),$$

где $C = 1 + \frac{1}{3k+1}\left(\sum_j \frac{1}{n_j-1} - \frac{1}{N-k}\right)$. При $n_j > 3\ \forall j$ и верной $H_0$ распределение статистики $B$ приближается распределением $\chi^2_{k-1}$.

Критерий крайне чувствителен к отклонению от нормальности распределений выборок (в отличие от критерия Левина). Если есть малейшие сомнения в нормальности данных, то критерием пользоваться не стоит.

# Критерий Флайнера-Киллиана

Пусть $\{X_{ij}\}_{i=1}^{n_j}, 1 \leq j \leq k$ – независимые выборки с ф.р. $F_j(x) = F(\mu_j + \sigma_j x)$. Проверим гипотезу $H_0 : \sigma_1 = \ldots = \sigma_k$ против $H_1 : H_0$ *неверна*.

Определим $R_{ij}$ – ранг $|X_{ij} - \widehat{\mu}_j|$ в общей совокупности, где $\widehat{\mu}_j$ – выборочная медиана $j$-той выборки,

$$a_{ij} = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{R_{ij}}{2(N+1)}\right), \quad \overline{a}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} a_{ij}, \quad \overline{a} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} a_{ij} \quad \text{и}$$

$$V^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(a_{ij} - \overline{a})^2,$$

где $\Phi(x)$ – ф.р. $N(0,1)$. Тогда при верной $H_0$ статистика

$$\chi = \frac{1}{V^2}\sum_{j=1}^{k} n_j(\overline{a}_j - \overline{a})^2$$

приближается распределением $\chi^2_{k-1}$.

# Двухфакторный дисперсионный анализ

Пусть имеются наблюдения признака $X$ на $N$ объектах. Хотим проверить, зависят ли значения признака $X$ (а точнее, его среднее или медиана) от факторов $A$ и $B$, принимающих значения $(A_1, \ldots, A_k)$ и $(B_1, \ldots, B_m)$ соответственно.

Пусть при $A = A_j$ и $B = B_l$ значения признака $X$ заданы выборкой $\{X_{ijl}\}_{i=1}^{n_{jl}}, 1 \le j \le k, 1 \le l \le m$.

Поскольку двухфакторный анализ для выборок разного размера довольно сложен, будет считать, что $n_{11} = \ldots = n_{km} = n$. Часто будем полагать, что $n = 1$.

Линейная двухфакторная модель:

$$X_{ijl} = \mu + \alpha_j + \beta_l + \gamma_{jl} + \varepsilon_{ijl},$$

$i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, k$; $l = 1, \dots, m$.

$\mu$ – глобальное среднее признака $X$;
$\alpha_j$ – воздействие $j$-того уровня фактора $A$;
$\beta_l$ – воздействие $l$-того уровня фактора $B$;
$\gamma_{jl}$ – дополнительное воздействие комбинации уровней $j$ и $l$ факторов $A$ и $B$ соответственно;
$\varepsilon_{ijl}$ – н.о.р. случайные ошибки.

Если $\gamma_{jl} = 0\ \forall j, l$, то решить задачу дисперсионного анализа гораздо проще (ведь задачу однофакторного анализа для связанных выборок можно рассматривать как задачу двухфакторного анализа, см. далее). Иначе приходится рассматривать следующие гипотезы:

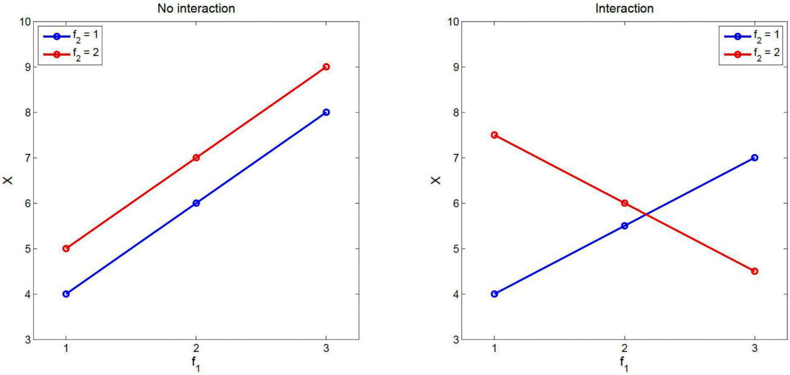
$H_0^1 : \alpha_j = 0\ \forall j$ (т.е. фактор $A$ не влияет на значения признака $X$) против $H_1^1 : H_0^1$ *неверна*,

$H_0^2 : \beta_l = 0\ \forall l$ (т.е. фактор $B$ не влияет на значения признака $X$) против $H_1^2 : H_0^2$ *неверна*,

$H_0^{12} : \gamma_{jl} = 0\ \forall j, l$ (т.е. между факторами $A$ и $B$ нет взаимодействия) против $H_1^{12} : H_0^{12}$ *неверна*.

# Двухфакторный дисперсионный анализ

**Пример:** $X$ – успешность решения кейса командой (в баллах от 0 до 10), $f_1$ – размер команды (1 – маленькая, 2 – средняя, 3 – большая), $f_2$ – наличие назначенного лидера (1 – нет, 2 – есть).



# Нормальный двухфакторный дисперсионный анализ

Пусть $X_{ijl} \sim N(\mu_{jl}, \sigma^2)$, $\mu_{jl} = \mu + \alpha_j + \beta_l + \gamma_{jl}$. Обозначим

$\overline{X}_{jl}$ – выборочное среднее по ячейке;

$\overline{X}_{j*}$ – выборочное среднее по значению фактора $A = A_j$;

$\overline{X}_{*l}$ – выборочное среднее по значению фактора $B = B_j$;

$\overline{X}$ – выборочное среднее по всей таблице.

Внутрифакторные дисперсии:

$$S_1^2 = \frac{nm}{(k-1)} \sum_{j=1}^{k} (\overline{X}_{j*} - \overline{X})^2, \quad S_2^2 = \frac{nk}{(m-1)} \sum_{l=1}^{m} (\overline{X}_{*l} - \overline{X})^2,$$

$$S_{12}^2 = \frac{n}{(k-1)(m-1)} \sum_{j,l} (\overline{X}_{jl} - \overline{X}_{j*} - \overline{X}_{*l} + \overline{X})^2,$$

$$S_{int}^2 = \frac{1}{km(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j,l} (X_{ijl} - \overline{X}_{jl})^2.$$

Проверка значимости факторов и взаимодействия между ними:

1) при $n > 1$

$$F_1 = \frac{S_1^2}{S_{int}^2} \sim F(k-1, km(n-1)) \text{ при верной } H_0^1;$$

$$F_2 = \frac{S_2^2}{S_{int}^2} \sim F(m-1, km(n-1)) \text{ при верной } H_0^2;$$

$$F_{12} = \frac{S_{12}^2}{S_{int}^2} \sim F((k-1)(m-1), km(n-1)) \text{ при верной } H_0^{12};$$

2) при $n = 1$ (предполагаем, что гипотеза $H_0^{12}$ верна)

$$F_1 = \frac{S_1^2}{S_{12}^2} \sim F(k-1, (k-1)(m-1)) \text{ при верной } H_0^1;$$

$$F_2 = \frac{S_2^2}{S_{12}^2} \sim F(m-1, (k-1)(m-1)) \text{ при верной } H_0^2.$$

# Пример

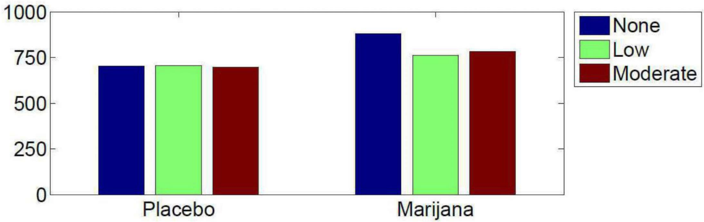
Изучалось воздействие марихуаны на скорость реакции. В качестве испытуемых были выбраны по 12 человек из каждой категории:

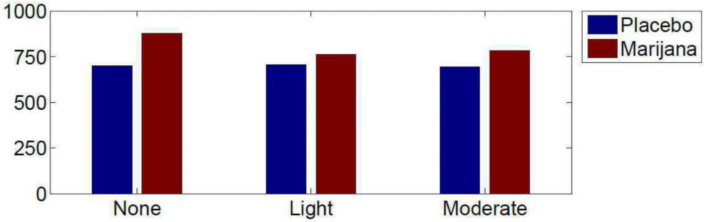
- никогда не пробовали марихуану;
- иногда употребляют марихуану;
- регулярно употребляют марихуану.

Испытуемые были разделены на две равные группы; половине из них дали выкурить две сигареты с марихуаной, вторая половина выкурила две обычные сигареты с запахом и вкусом марихуаны. Сразу после этого все испытуемые прошли тест на скорость реакции.

Требуется оценить влияние марихуаны на скорость реакции, учитывая фактор предыдущего опыта употребления.

# Пример


1000
750
500
250
0
Placebo
Marijana
None
Low
Moderate


1000
750
500
250
0
None
Light
Moderate
Placebo
Marijana

# Пример

$H_0^1$ : средняя скорость реакции одинакова при употреблении и марихуаны, и сигарет;

$H_0^2$ : средняя скорость реации не зависит от предыдущего опыта употребления марихуаны;

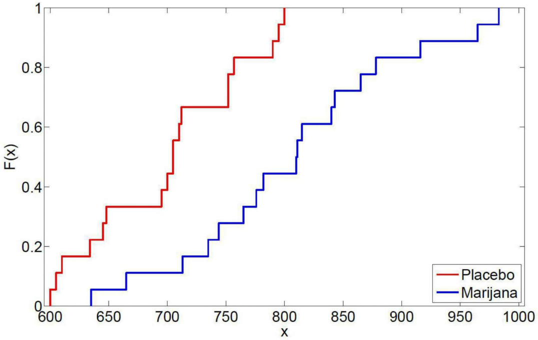
$H_0^{12}$ : отсутствует межфакторное взаимодействие между употребляемым веществом и предыдущим опытом употребления марихуаны.

| Source | F | p-value |
|---|---|---|
| Group | 17.58 | 0.0002 |
| Past use | 2.02 | 0.15 |
| Interaction | 2.02 | 0.15 |

# Пример

Вывод: гипотеза о том, что предыдущий опыт употребления не влияет на скорость реакции, не отклоняется – значит, данные по группам можно объединить.

Для объединенных данных:
1) p-value однофакторного дисперсионного анализа – 0.00036;
2) p-value критерия Манна-Уитни – 0.00059;
3) p-value двухвыборочного t-критерия – 0.00018.



Пусть $\{X_{ij}\}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k$, – наблюдения признака $X$ на $n$ объектах при разных значениях фактора $A$. Рассмотрим линейную модель

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij},$$

где $\mu$ – глобальное среднее значение признака $X$,

$\alpha_i$ – отклонение от $\mu$, вызванное влиянием особенностей $i$-го объекта,

$\beta_j$ – отклонение от $\mu + \alpha_i$, вызванное влиянием $j$-го уровня фактора $A$,

$\varepsilon_{ij}$ – случайные н.о.р. ошибки.

Хотим понять, влияет ли фактор $A$ на значения признака $X$ на разных объектах.

# Критерий Фишера

Для этого проверим гипотезу $H_0 : \beta_1 = \ldots = \beta_k$ против альтернативы $H_1 : H_0$ *неверна*. Рассмотрим статистику

$$F = \frac{n(n-1)\sum_j(\overline{X}_j - \overline{X})^2}{\sum_i\sum_j(X_{ij} - \overline{X})^2 - k\sum_i(\overline{X}_i - \overline{X})^2},$$

где $\overline{X}_i = \frac{1}{k}\sum_j X_{ij}$, $\overline{X}_j = \frac{1}{n}\sum_i X_{ij}$, $\overline{X} = \frac{1}{nk}\sum_{i,j} X_{ij}$.

В случае выполнения предположений метода и верности гипотезы $H_0$ распределение статистики критерия аппроксимируется распределением $F(k-1, (n-1)(k-1))$.

Предположения метода:

1) $\{\varepsilon_{ij}\}$ имеют нормальное распределение с нулевым средним и независимы в совокупности;

2) свойство сферичности: $\forall j_1 \neq j_2 \ \forall i$ выполнено $D(X_{ij_1} - X_{ij_2}) = \sigma^2$.

Предположение сферичности на практике нарушается наиболее часто, причём это может привести к росту вероятности ошибки первого рода. Проверить гипотезу сферичности можно с помощью критерия Маухли. Если она отвергается, то следует изменить число степеней свободы распределения Фишера в критерии.

По-прежнему рассматриваем линейную модель и гипотезу $H_0 : \beta_1 = \ldots = \beta_k$ против альтернативы $H_1 : H_0$ *неверна*. Нормальность выборок не предполагается.

Обозначим $R_{ij}$ – ранг $i$-того элемента в $j$-том столбце, $R_i = \sum_j R_{ij}$. Распределение статистики

$$F = \frac{12}{nk(k+1)} \sum_{i=1}^{n} R_i^2 - 3n(k+1)$$

при верной $H_0$ и при $k > 4, n > 15$ приближается распределением $\chi^2_{k-1}$. Более точная аппроксимация

$$\frac{(n-1)F}{n(k-1)-F} \sim F(n-1, (n-1)(k-1)).$$

# Критерий Пейджа

Критерий проверяет гипотезу $H_0 : \beta_1 = \ldots = \beta_k$ против альтернативы $H_1' : \beta_1 \leq \ldots \leq \beta_k$. Статистика критерия

$$L = \sum_{i=1}^{n} iR_i,$$

причем ранговые суммы $R_i$ следует располагать в порядке возрастания. В случае выполнения гипотезы $H_0$ при $n > 15$ и $k > 10$ можно пользоваться аппроксимацией

$$L^* = \frac{L - \frac{1}{4}nk(k+1)^2}{\sqrt{\frac{1}{144(k-1)}n(k^3-k)^2}} \sim N(0,1).$$

# Замечания

1) В случае невыполнения предположений критерия Фишера стоит пользоваться ранговыми критериями Фридмана и Пейджа.

2) Все три критерия подходят и для проверки гипотез об отсутствии эффекта в рамках двухфакторного анализа с независимыми выборками в случае, если между факторами нет взаимодействия.

3) На альтернативе $H_1'$ критерий Пейджа мощнее критерия Фридмана.

# Finita!