Куприянов Артем.
Идеальное паросочетание
Тип задачи: теоретическая. Баллы: 2.

Пусть дано: $G = (V, E)$ – двудольный граф с долями L и R. Определим для любого X, подмножества V, множество $N(X)$ соседей, т.е. вершин, соединенных с X ребром. Докажите лемму Холла.

Лемма Холла: Паросочетание размера $|L|$ существует тогда и только тогда, когда для любого A, подмножества L, верно $|A| \leq |N(A)|$.

Доказательство леммы Холла:

$\triangleright \Rightarrow$

Пусть существует паросочетание размера $|L|$. Тогда очевидно, что для любого $A \subset L$ выполнено $|A| \leq |N(A)|$. Ведь, у любого подмножества вершин есть по крайней мере столько же соседей по паросочетанию.

$\Leftarrow$ **(По индукции)**

Есть изначально пустое паросочетание P. Будем добавлять на каждом шаге одно ребро и доказывать, что мы можем это сделать, если $|\{\ x \mid x \in P \wedge x \in L\ \}| < |L|$.

База:

Возьмем любую вершину из L. Она соединена хотя бы с одной вершиной из R (из условия, что для любого $A \subset L$ выполнено $|A| \leq |N(A)|$).

Шаг:

Пусть после $k < |L|$ шагов построено какое-то паросочетание P. Докажем, что в это паросочетание можно добавить вершину $v \in L$, еще не насыщенную этим паросочетанием.

Рассмотрим множество вершин H_v – множество вершин, достижимых из v, если из L в R можно ходить по любым ребрам нашего двудольного графа, а из R в L только по ребрам, принадлежащим нашему паросочетанию P.

Покажем, что в H_v есть вершина $u \in R$, не насыщенная текущим паросочетанием P.

От противного: пусть, нет такой вершины. Тогда рассмотрим вершины $H_L \subset H_v$, лежащие в L. Для них будет выполнено условие $|H_L| > |N(H_L)|$ (следует из построения H – из L в R можно ходить по любым ребрам нашего двудольного графа и понятия соседей вершины. $\Rightarrow$ пришли к против противоречию $\Rightarrow$ такая вершина существует.

Тогда существует путь из v в u, который будет удлиняющим для текущего паросочетания P. Значит, мы нашли увеличивающуюся цепь $v \mapsto \dots \mapsto u \Rightarrow$ (По теореме о максимальном паросочетании и дополняющих цепях), паросочетание P не будет являться максимальным и мы можем увеличить текущее паросочетание вдоль найденной цепи. Получим бОльшее паросочетание. Шаг индукции доказан.

$\Rightarrow$ Доказав такую индукцию, получаем в конце процесса искомое паросочетание размера $|L|$.

◀