

Критерии согласия, проверка нормальности, бутстреп.

- 1** (2 балла) Научная экспедиция Университета де Сантьяго де Чили измерила рост 10471 самца галапагосского пингвина с точностью до миллиметров. Ученые хотели проверить гипотезу о нормальности распределения роста пингвинов и получили следующие значения p-value: p-value критерия хи-квадрат оказалось равным 0.54, критерия Лил-лиефорса – 0.23, критерия K^2 – 0.047, критерия Шапиро-Уилка 0.007. Можно ли принять гипотезу о нормальности в данном случае и если да, то на каком уровне значимости? Если нет, то почему? Объясните своё решение.

- 2** (2 балла) Доказать, что при выполнении гипотезы $H_0 : F = F_0$ статистика критерия Андерсона-Дарлинга

$$\Omega_n^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{(\hat{F}_n(y) - F_0(y))^2}{(1 - F_0(y))F_0(y)} dF_0(y),$$

где $\hat{F}_n(y)$ – эмпирическая функция распределения выборки, не зависит от функции распределения F_0 .

- 3** (2 балла) Выдана выборка X_1, \dots, X_n . Определить, из какого распределения эта выборка.
- 4** (2 балла) Выдана выборка X_1, \dots, X_n . Определить, из какого распределения эта выборка.
- 5** (2 балла) Для критерия Андерсона-Дарлинга $\{n\Omega_n^2 > u_{1-\alpha}\}$ с помощью моделирования найти критические значения $u_{1-\alpha}$ при $n = 25, 100, 500, 2000$ и $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$. Пользуясь полученными критическими значениями, сравнить мощности критериев Андерсона-Дарлинга и Колмогорова при проверке гипотезы $H_0 : P = N(0, 1)$ против альтернативы $H_1 : P = T(10)$, где $T(10)$ – распределение Стьюдента с 10 степенями свободы.
- 6** (2 балла) Смоделировать выборку размера $n = 1000$ из экспоненциального распределения с плотностью $p(x) = \lambda \exp\{-\lambda(x-a)\}I(x > a)$, взять $(a, \lambda) = (N, 40 - N)$, где N – ваш номер в таблице курса. Для каждого $n:5$ построить асимптотический и бутстрепный (центральный) доверительные интервалы для параметра a уровня доверия 0.95. На следующем графике вывести вероятности покрытия данными интервалами истинного значения a , вероятности искать эмпирически. Сделать выводы и объяснить полученные результаты.

Замечание. В задачах 3 и 4 пользоваться критериями принадлежности определённому типу распределения (которые не были рассказаны на лекции) можно, если вы объясните необходимость применения этого критерия.