Методы современной прикладной статистики
1. Введение

Родионов Игорь Владимирович
vecsell@gmail.com

Весна, 2018

Отчетность по курсу

- Будет 13 домашних заданий, в каждом из них будет ≤ 6 задач (в том числе 2 теоретических) с общей суммой в 12 баллов.
- В конце семестра будет практический экзамен, за который можно получить максимум 50 баллов.
- Оценка за курс: $\min([(A + B)/12], 10)$, где A – количество баллов за ДЗ, B – оценка за экзамен, $[\cdot]$ – округление вниз.

Замечания

- Экзамен является необязательным.
- ДЗ отсылается семинаристам.
- ДЗ будет выкладываться на странице курса. Там же можно будет найти программу и презентации лекций.
- Дедлайн по сдаче ДЗ – в 12.00 в четверг, т.е. на выполнение ДЗ дается неделя.
- Если студент попадается на списывании, то в первый раз у него аннулируется одно ДЗ, во второй раз – аннулируются все ДЗ.

Парадигмы

Рассмотрим основную задачу математической статистики: по данным/наблюдениям сделать выводы о распределении этих данных. Эту задачу можно решать в рамках одной из трех парадигм:

1. параметрической;
2. непараметрической;
3. байесовской.

Параметрическая парадигма

В рамках параметрической парадигмы мы считаем, что множество распределений, из которых мы выбираем подходящее, параметризовано: $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$.

Примеры задач и методов:
1) Точечное оценивание;
2) Доверительное оценивание параметра;
3) Линейная регрессия.

Замечание

Замечание.
Точное распределение, которому подчиняются наши данные, найти невозможно. Мы можем лишь подобрать модель, с какой-то степенью точности приближающую наши данные.

Непараметрическая парадигма

В рамках непараметрической парадигмы мы считаем, что множество распределений, из которых мы выбираем подходящее, невозможно параметризовать с помощью конечномерного параметра.

Примеры задач и методов:
1) Ядерные оценки плотности;
2) Непараметрическая регрессия;
3) Критерии проверки нормальности.

Байесовская парадигма

В рамках байесовской парадигмы мы считаем, что на множестве распределений, из которых мы выбираем подходящее, задана некая вероятностная мера Q (априорное распределение).

Априорное распределение выбирается исходя из имеющихся на текущий момент данных о неизвестном распределении. Если данных нет, априорное распределение полагается неинформативным.

Байесовская парадигма

Пусть X – наблюдение из распределения $P \in \mathcal{P}$. Пусть семейство распределений $\mathcal{P}$ параметризовано, $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$, и $q(\theta)$ – априорная плотность на Θ. Формат вывода в рамках байесовского подхода таков:

$$q(\theta|X) = \frac{p(X|\theta)q(\theta)}{\int_\Theta p(X|\theta)q(\theta)d\theta},$$

где $p(X|\theta)$ – функция правдоподобия наблюдения X, а $q(\theta|X)$ – апостериорная плотность.

Характеристики распределений

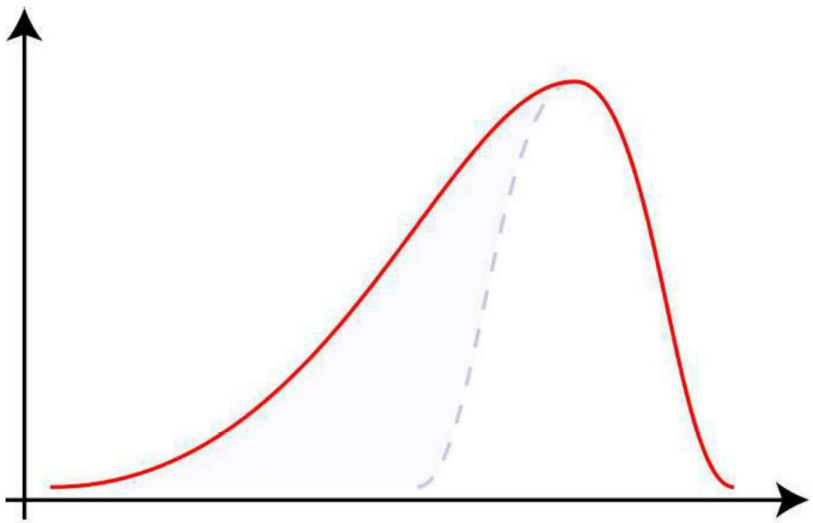
Пусть случайная величина X имеет функцию распределения F. Тогда

- Математическое ожидание: $EX = \int_{\mathbb{R}} x dF(x)$;
- Дисперсия: $DX = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$;
- Квантиль уровня α : $u_\alpha = \inf\{x : F(x) \geq \alpha\}$;
- Медиана: квантиль уровня 1/2.

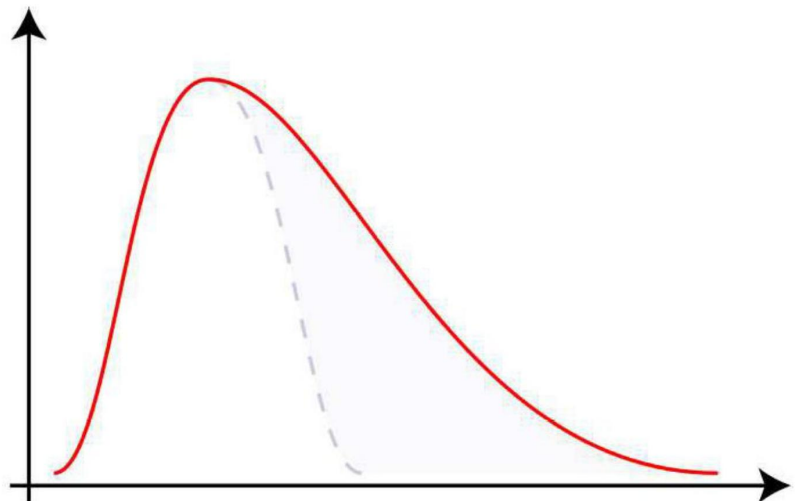
Характеристики распределений

- Коэффициент асимметрии (skewness)

$$Sk = \frac{E(X - EX)^3}{(DX)^{3/2}}$$



Left-skewed

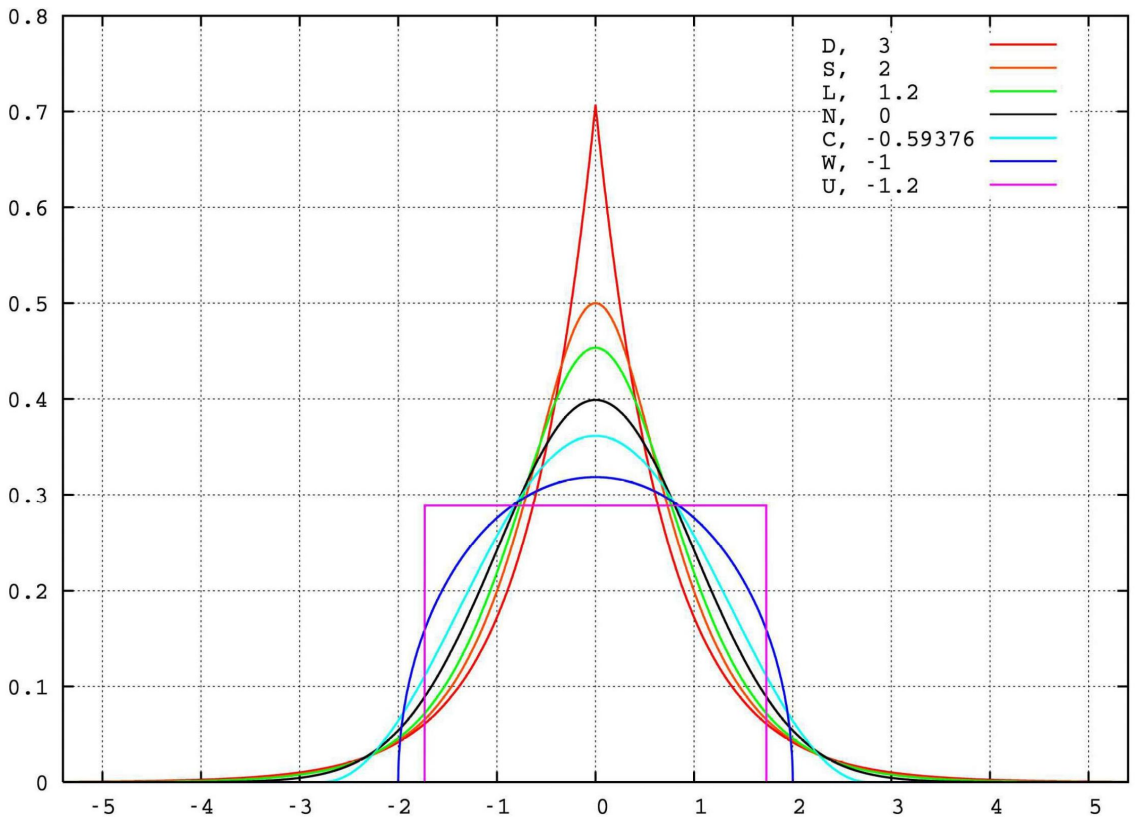


Right-skewed

Характеристики распределений

- Коэффициент эксцесса (excess, без вычитания 3 – kurtosis)

$$K = \frac{E(X - EX)^4}{(DX)^2} - 3$$



Нормальное распределение

$X \sim N(a, \sigma^2)$, если плотность

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Свойства:
1) Является слабым пределом суммы независимых (слабозависимых) случайных величин;
2) $EX = a$; $DX = \sigma^2$;
3) Обозначим $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)dy$, тогда $F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$.

Распределение хи-квадрат

$X \sim \chi^2_n$, если плотность

$$p_X(x) = \frac{x^{n/2-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \exp(-x/2).$$

Свойства:
1) Если $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ – нез. сл.в., $\forall i\ \xi_i \sim N(0,1)$, то $\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \sim \chi^2_n$.
2) $EX = n$, $DX = 2n$.

Распределение Стьюдента

Пусть $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2_n$, X и Y независимы, тогда случайная величина

$$Z \stackrel{d}{=} \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

будет иметь распределение Стьюдента с n степенями свободы, $Z \sim St(n)$ (также пишут $Z \sim T_n$).

Свойства:
1) При $n \to \infty$ $T_n \Rightarrow N(0,1)$.
2) При $n = 1$ Z имеет стандартное распределение Коши.

Распределение Фишера

Пусть $X \sim \chi^2_n$, $Y \sim \chi^2_m$, X и Y независимы, тогда случайная величина

$$Z \stackrel{d}{=} \frac{X/n}{Y/m}$$

будет иметь распределение Фишера с n и m степенями свободы, $Z \sim F(n, m)$.

Свойства:
1) При $n, m \to \infty$ $F(n, m) \Rightarrow 1$.
2) При $n = 1$ $\sqrt{Z} \sim T_m$.

Другие распределения

1. $X \sim Exp(\alpha)$, если $p(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, $x > 0$;
2. $X \sim U[a, b]$, если $p(x) = \frac{1}{b-a} I\{x \in [a, b]\}$;
3. $X \sim Cauchy(\theta)$, если $p(x) = \frac{\theta}{\pi(x^2+\theta^2)}$;
4. $X \sim Gamma(\alpha, \gamma)$, если $p(x) = \frac{x^{\alpha-1}\gamma^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\gamma x}$, $x > 0$;
5. $X \sim Beta(\alpha, \beta)$, если $p(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(\alpha,\beta)} I(x \in [0, 1])$;
6. $X \sim Pareto(\alpha, \kappa)$, если $p(x) = \frac{\alpha\kappa^\alpha}{x^{\alpha+1}} I(x > \kappa)$.

Другие распределения

1. $X \sim Bern(p)$, если $P(X = 0) = p$, $P(X = 1) = 1 - p$, $0 < p < 1$;
2. $X \sim Bin(n, p)$, если $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$, $0 < p < 1$, $k \in \{0 \dots n\}$;
3. $X \sim Pois(\lambda)$, если $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$;
4. $X \sim Geom(p)$, если $P(x = k) = p(1 - p)^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$.

Статистики

Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ – выборка из распределения P. Статистикой $T(X)$ называют любую измеримую функцию выборки. Примеры:

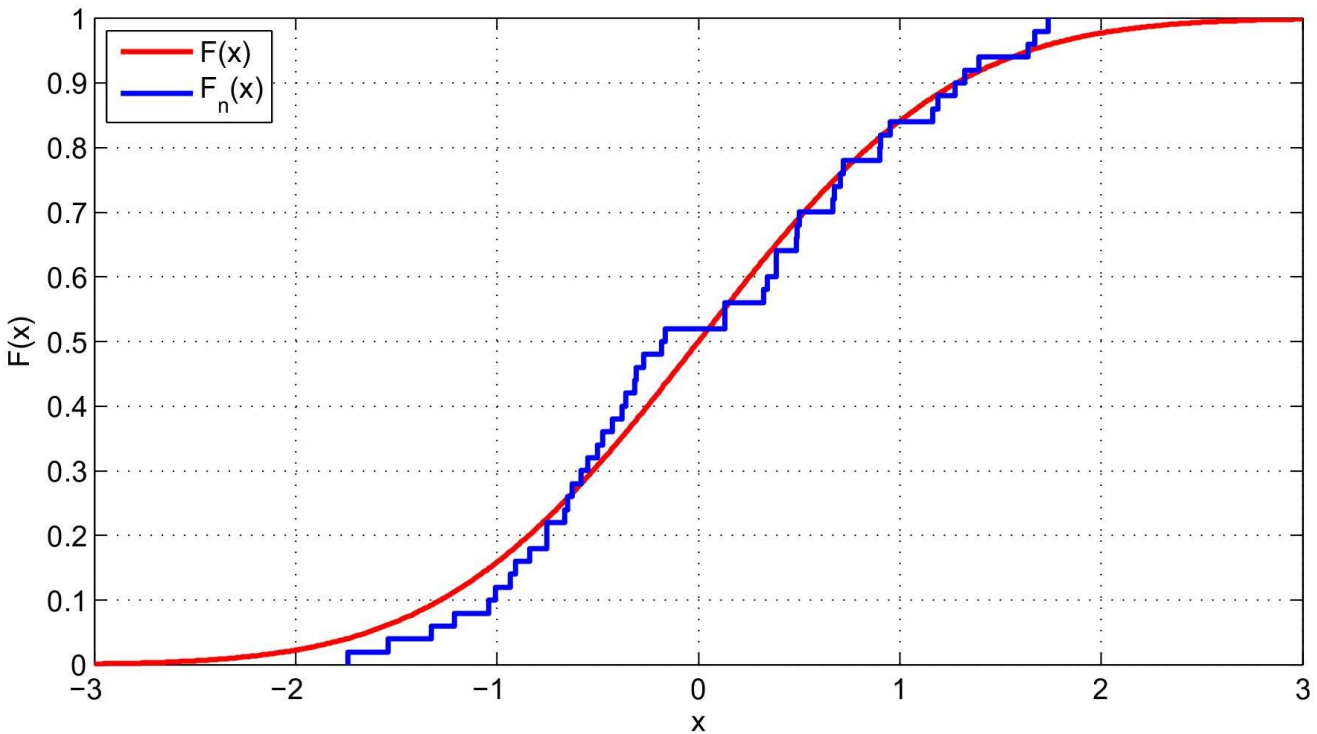
- Выборочные характеристики: $\overline{g(X)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)$; $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ – выборочное среднее, $\overline{X^k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ – выборочный k-тый момент;
- Выборочные центральные моменты: $\overline{X_c^k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k$; $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ – выборочная дисперсия;

Статистики

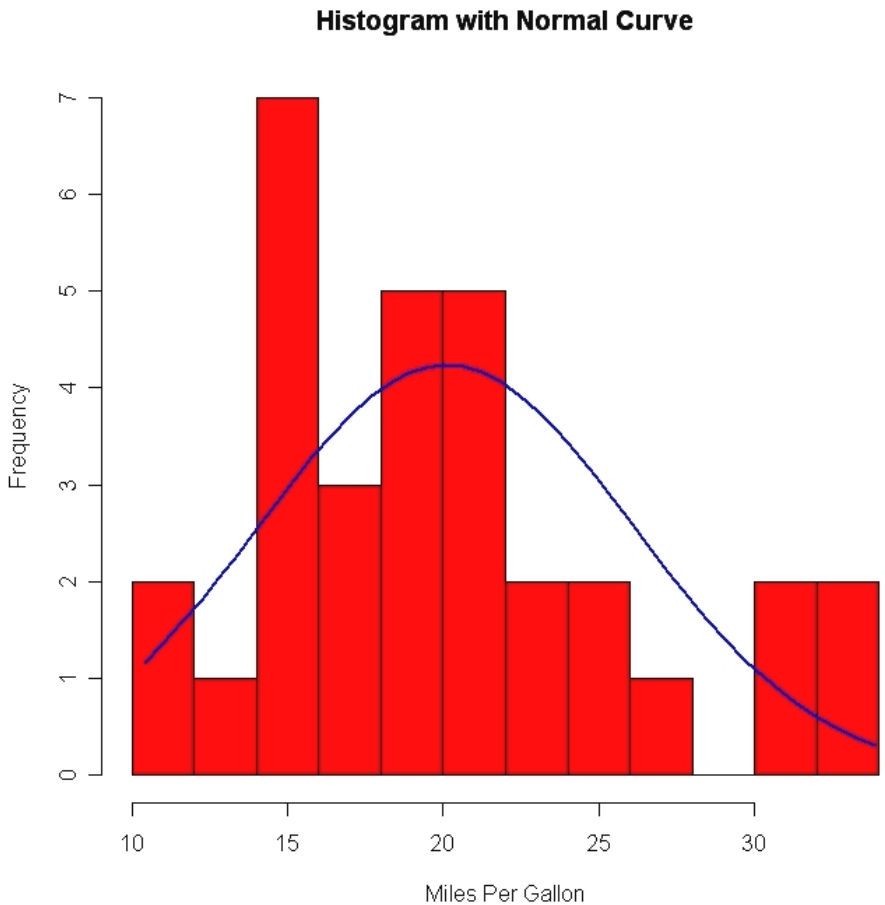
- Порядковые статистики $X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n)$, $X_{(2)} = \min(X_1, \ldots, X_n \backslash X_{(1)}), \ldots$ $X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$;
- Вариационный ряд: $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$;
- Ранг элемента выборки (в вариационном ряду): $R(X_i) = r$, если $X_i = X_{(r)}$;
- Выборочная α-квантиль: $\widehat{Z}_\alpha = X_{([n\alpha])}$;
- Выборочная медиана:

$$\widehat{\mu} = \begin{cases} X_{(k+1)}, & \text{если } n = 2k+1; \\ \frac{1}{2}(X_{(k)} + X_{(k+1)}), & \text{если } n = 2k; \end{cases}$$

- $F_n(x) = \sum_{i=1}^{n} I(X_i \leq x)$ – эмпирическая функция распределения.



- Гистограмма распределения:
  $p_n(x) = \sum_{i,j} I(x \in B_j) I(X_i \in B_j)$, $\{B_j\}_{j=1}^{k}$ – разбиение.



Свойства точечных оценок

Рассмотрим параметрическую модель: $F \in \{F_\theta, \theta \in \Theta\}$. Статистики, имеющие значения в Θ, называются оценками параметра θ. Свойства:

- Несмещенность: $E_\theta \widehat{\theta} = \theta \ \forall \theta \in \Theta$;
- Состоятельность: $\widehat{\theta}_n \xrightarrow{P_\theta} \theta$ при $n \to \infty \ \forall \theta \in \Theta$;
- С/к-оптимальность: $D_\theta \widehat{\theta} = \min\limits_{\overline{\theta}: E_\theta \overline{\theta} = \theta} D_\theta \overline{\theta} \ \forall \theta \in \Theta$;
- Асимптотическая нормальность: $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d_\theta} N(0, \sigma^2(\theta))$ при $n \to \infty \ \forall \theta \in \Theta$;
- Робастность: устойчивость $\widehat{\theta}$ относительно отклонений распределения X от модельного семейства и выбросов, содержащихся в выборке.

Методы нахождения оценок

- **Метод моментов.**
  1) Пусть $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$, выберем k пробных функций $g_1(x), \ldots, g_k(x)$. Положим $m_i(\theta) = E_\theta g(X_1)$.
  2) Составим систему уравнений

$$\begin{cases} \mathrm{m}_1(\theta) = \overline{g_1(X)}; \\ \ldots \\ \mathrm{m}_k(\theta) = \overline{g_k(X)}; \end{cases}$$

  где $\overline{g_i(X)}$ – выборочные характеристики.
  3) Решение этой системы относительно $(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ и будет оценкой θ по методу моментов.

Методы нахождения оценок

Пример.
Пусть $(X_1, \ldots, X_n) \sim N(a, \sigma^2)$, найдем оценки a и σ^2 методом моментов. Выберем $g_1(x) = x$, $g_2(x) = x^2$, тогда $Eg_1(X_1) = EX_1 = a$; $Eg_2(X_1) = \sigma^2 + a^2$. Составим систему:

$$\begin{cases} a = \overline{X}; \\ \sigma^2 + a^2 = \overline{X^2}; \end{cases}$$

откуда $\widehat{a} = \overline{X}$ и $\widehat{\sigma^2} = \overline{X^2} - (\overline{X})^2$.

Свойство. Обозначим $m(\theta) = (m_1(\theta), \ldots, m_k(\theta))$. Если m^{-1} непрерывна, то оценка методом моментов состоятельна, а если непрерывно дифференцируема, то и асимптотически нормальна.

Методы нахождения оценок

- **Метод максимального правдоподобия.**
  Функция праводоподобия выборки

$$f(X_1, \ldots, X_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} p_\theta(X_i),$$

где $p_\theta(x)$ – обобщенная плотность X_1. Тогда оценка методом максимального правдоподобия (ОМП)

$$\widehat{\theta} = \arg\max_\theta f(X_1, \ldots, X_n; \theta).$$

Пример.
Пусть $(X_1, \ldots, X_n) \sim Exp(\alpha)$, найдем оценку α методом максимального правдоподобия. Имеем

$$f(X, \alpha) = f(X_1, \ldots, X_n; \alpha) = \prod_{i=1}^{n} \alpha e^{-\alpha X_i} = \alpha^n e^{-\alpha \sum_i X_i}.$$

Продифференцируем по α логарифмическую функцию правдоподобия, чтобы найти точку максимума:

$$L(X, \alpha) = \ln f(X, \alpha) = n \ln \alpha - \alpha \sum_i X_i;$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L(X, \alpha) = \frac{n}{\alpha} - \sum_i X_i = 0,$$

откуда ОМП $\widehat{\alpha} = 1/\overline{X}$.

Свойство.
При некоторых условиях регулярности (в частности, решение уравнения правдоподобия должно быть единственным) оценка максимального правдоподобия является состоятельной, а при некоторых дополнительных условиях выполнено

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d_\theta} N(0, (i(\theta))^{-1}), \ n \to \infty,$$

где $i(\theta) = E_\theta \left(\frac{d}{d\theta} \ln p_\theta(X_1)\right)^2$ – информация Фишера одного элемента выборки.

Методы нахождения оценок

- **Метод выборочной квантили.**
  При некоторых условиях на плотность распределения
  $$\sqrt{n}(\widehat{Z}_\alpha - u_\alpha) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\alpha(1-\alpha)}{p^2(u_\alpha)}\right), \ n \to \infty;$$
- **Метод спейсингов.**
  Положим $D_i(\theta) = F_\theta(X_{(i+1)}) - F_\theta(X_{(i)})$, $i = 0, \ldots, n$, $X_{(0)} = -\infty$, $X_{(n+1)} = +\infty$. Тогда
  $$\widehat{\theta} = \arg\max_\theta \sum_{i=0}^{n} \ln D_i(\theta).$$
- **M-оценки.**
  $$\widehat{\theta} = \arg\min_\theta \rho(X, \theta),$$
  где $\rho(X, \theta)$ – некая функция потерь.

Доверительные интервалы

Пара статистик $(T_1(X), T_2(X))$ называется доверительным интервалом для параметра θ уровня доверия $1-\alpha$, если $\forall \theta \in \Theta$

$$P_\theta(T_1(X) < \theta < T_2(X)) = 1 - \alpha.$$

Последовательность пар статистик $(T_{1,n}(X), T_{2,n}(X))$ называется асимптотическим доверительным интервалом для параметра θ уровня доверия $1-\alpha$, если $\forall \theta \in \Theta$

$$P_\theta(T_{1,n}(X) < \theta < T_{2,n}(X)) \to 1 - \alpha, \ n \to \infty.$$

Доверительные интервалы

Пример.
Пусть $\widehat{\theta}_n$ – асимптотически нормальная оценка параметра θ,

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d_\theta} N(0, \sigma^2(\theta)), \ n \to \infty,$$

тогда при $n \to \infty$

$$P_\theta \left(\widehat{\theta}_n - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma(\widehat{\theta}_n)}{\sqrt{n}} < \theta < \widehat{\theta}_n + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma(\widehat{\theta}_n)}{\sqrt{n}} \right) \to 1 - \alpha,$$

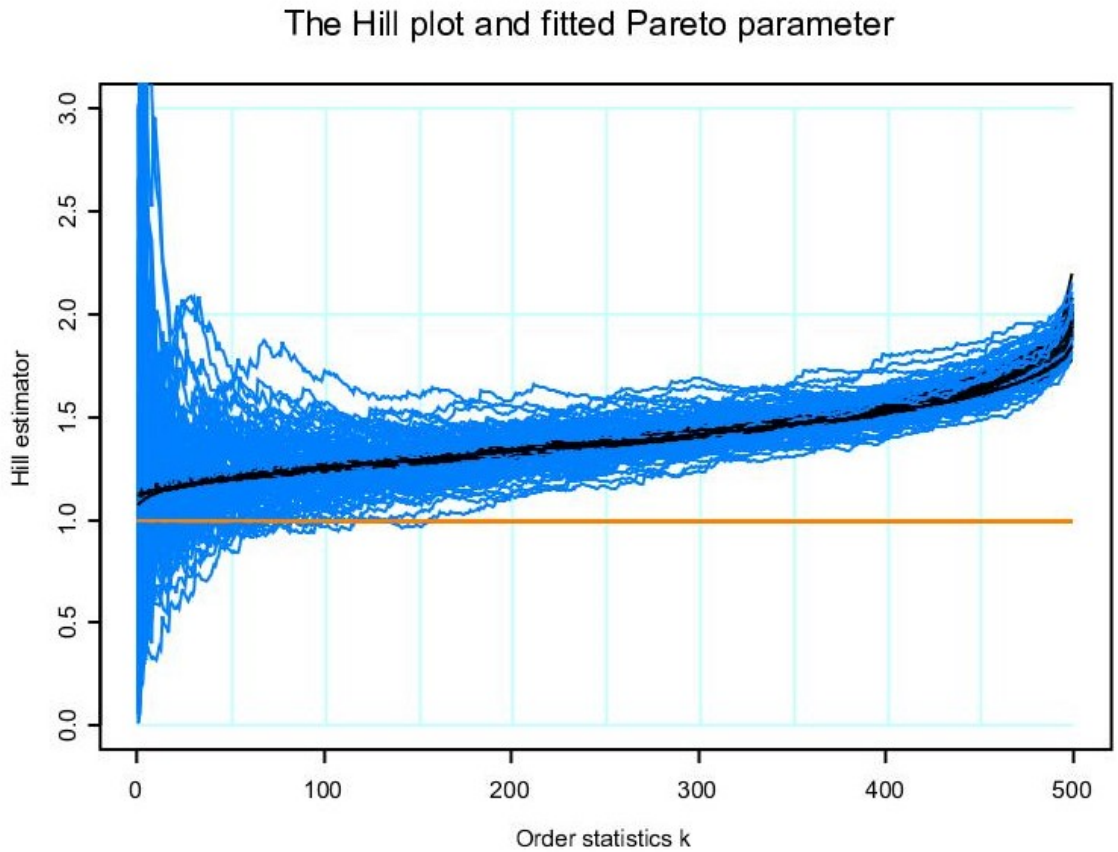
где $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ – $(1 - \frac{\alpha}{2})$-квантиль $N(0, 1)$.

Ключевой вопрос для практика: как ведет себя оценка при конечных значениях n?

- Если оценка состоятельна, каково её смещение при конечных n?
- Если смещение её невелико, каков разброс её значений (т.е. велика ли её дисперсия)?
- Какой объем выборки нужен, чтобы оценить величину с заданной точностью?

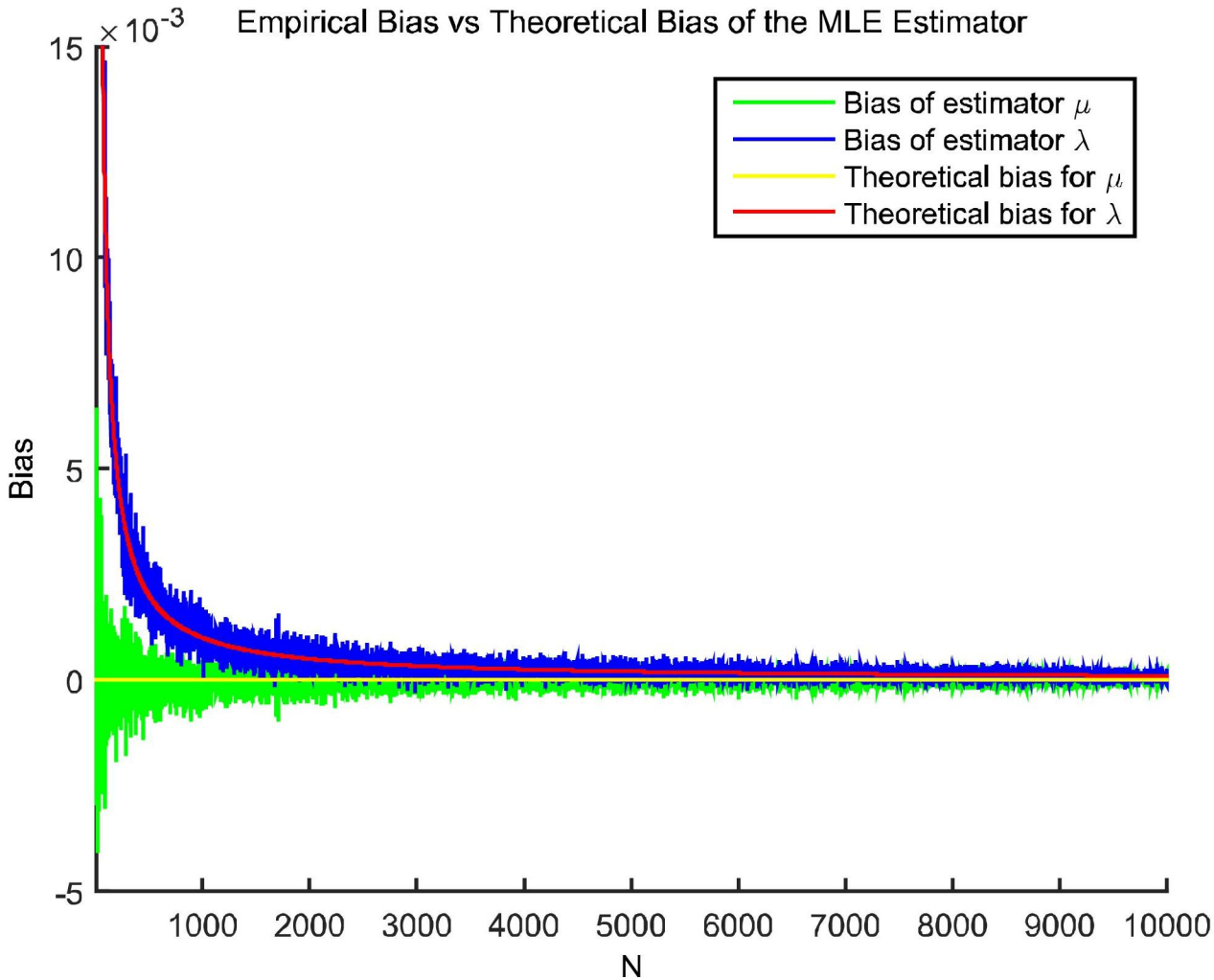
Пояснения

- Смещение: $bias = E_\theta \widehat{\theta} - \theta$.
- Эмпирическое смещение: $Bias(\widehat{\theta}, \theta) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \widehat{\theta}_i - \theta$, если у нас есть несколько выборок и известно θ.
- Эмпирическое квадратичное смещение: $MSE = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(\widehat{\theta}_i - \theta)^2$
- Стандартное отклонение - это корень из дисперсии.
- Эмпирическое стандартное отклонение – корень из выборочной дисперсии оценки, т.е. $EMSD = \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(\widehat{\theta}_i - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\widehat{\theta}_i)^2}$.
- Если θ известно, то $MSE = EMSD^2 + (Bias(\widehat{\theta}, \theta))^2$.



На графике – 100 траекторий значений оценки Хилла индекса экстремального значения $\widehat{\gamma}_H = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} \ln X_{(n-i)} - \ln X_{(n-k)}$, $n = 500$, $k \in \{1, \ldots, 500\}$. Черным выделена медиана значений статистик.

Моделирование



На графике – смещение (bias) и эмпирическое смещение (empirical bias) $\widehat{\theta}_n - \theta$ двух оценок методом максимального правдоподобия.

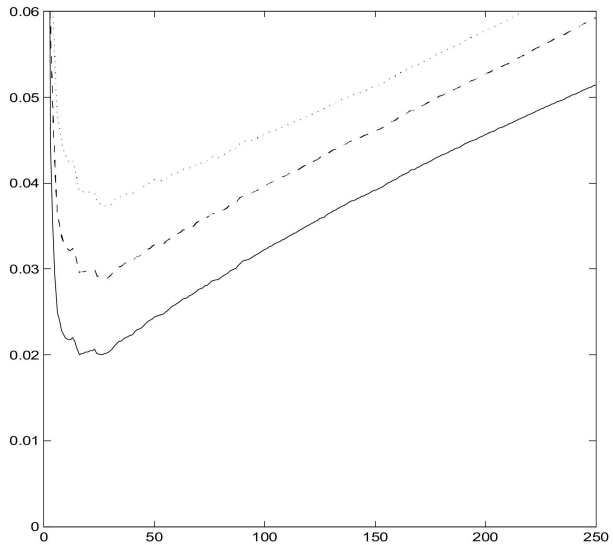
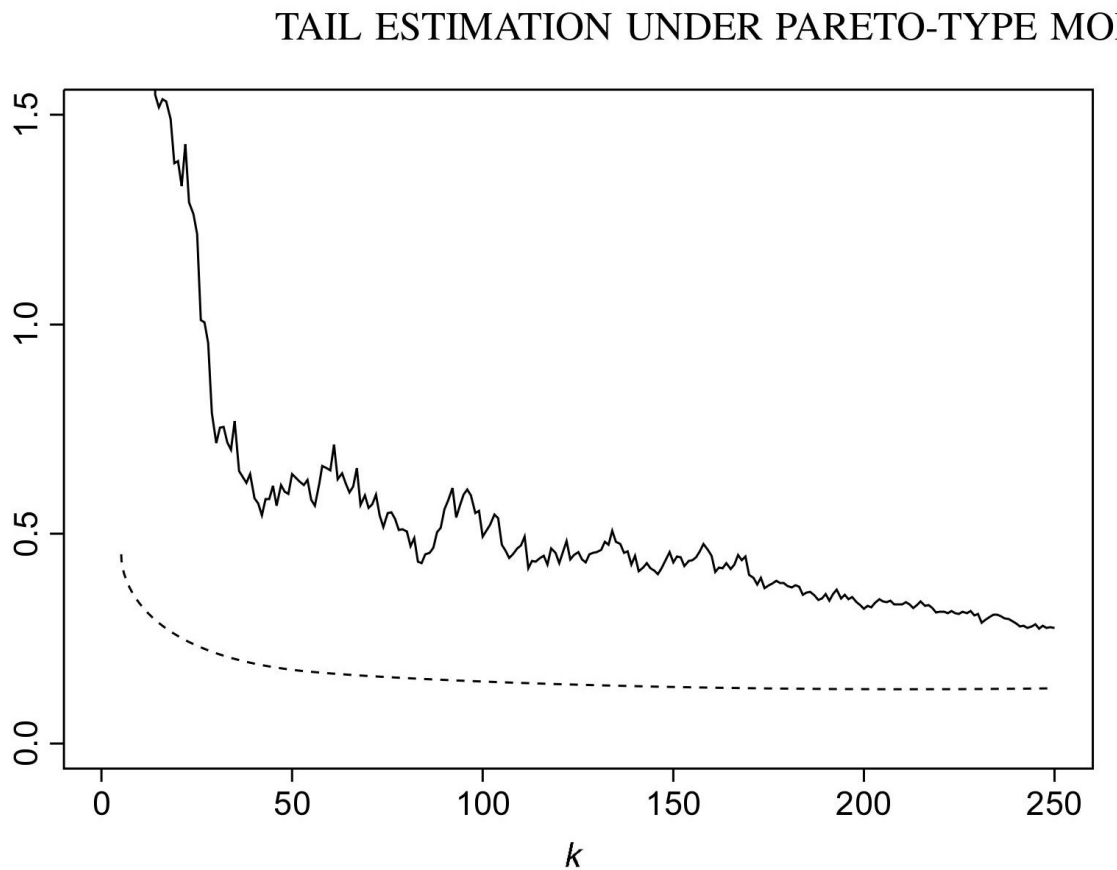


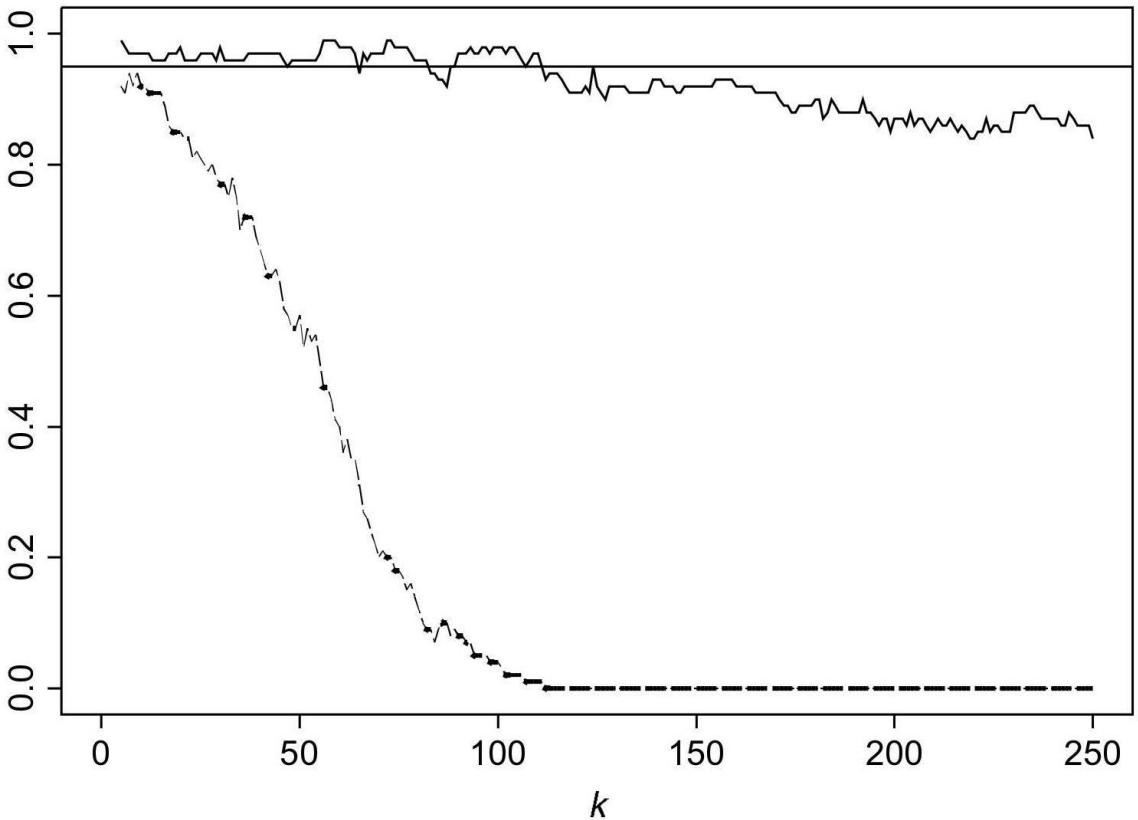
Figure 1: Empirical squared bias as a function of k obtained with $\widehat{\theta}_n$ computed on 500 samples of size 500 from $F_{1/2,\tau,\rho}$. Up: $\rho = -1/2$, down: $\rho = -1/4$, solid line: $\tau = 1$, dashed line: $\tau = 1/2$, dotted line: $\tau = 0$.

На графике – эмпирическое квадратичное смещение (empirical squared bias) значений оценки вейбулловского индекса для трех разных распределений, $n = 500$, $k \in \{1, \ldots, 250\}$, количество выборок – 500.



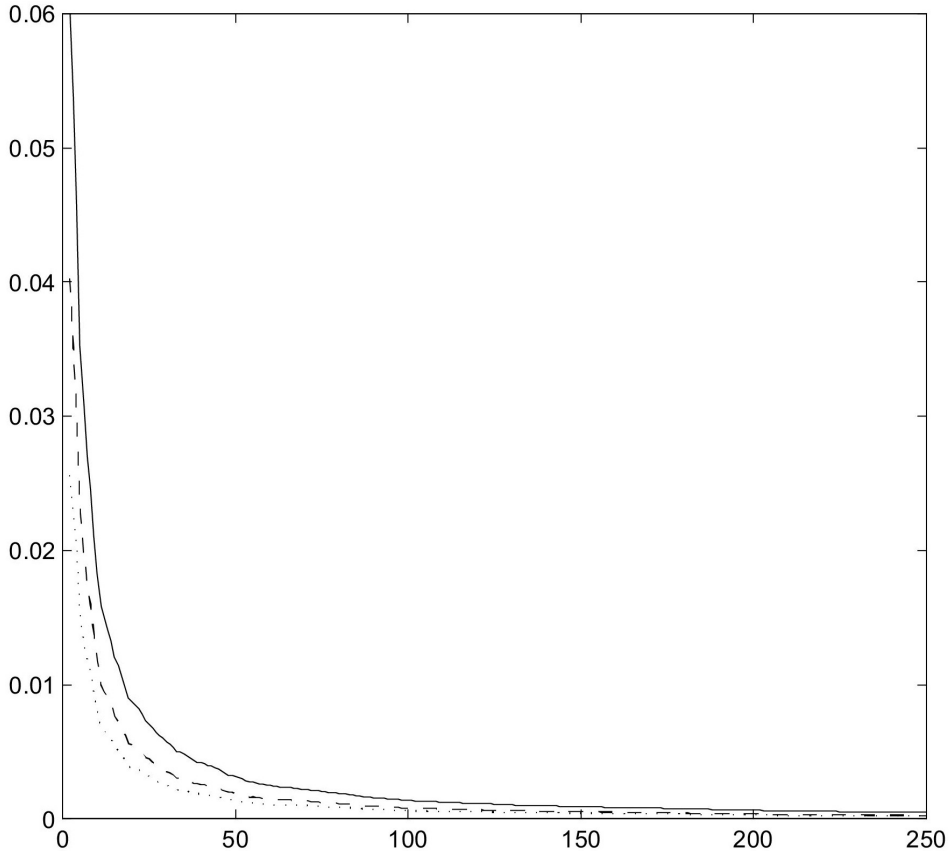
На графике – медиана эмпирического стандартного отклонения $(\widehat{\theta} - \theta)^2$ значений оценки Хилла и ОМП индекса экстремального значения, $n = 500$, $k \in \{5, \ldots, 250\}$.

Моделирование



На графике – вероятность покрытия доверительным интервалом, построенным с помощью оценки Хилла и ОМП экстремального индекса, истинного значения параметра, $n = 500$, $k \in \{5, \ldots, 250\}$.

Моделирование



На графике – выборочная дисперсия значений оценки вейбулловского индекса для трех разных распределений, $n = 500$, $k \in \{1, \ldots, 250\}$, количество выборок – 500.

Finita!