РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

На правах рукописи

УДК

Савватеев А.В.

ЗАДАЧА МНОГОМЕРНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ: ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ ПОДХОД

08.00.13 – Математические и инструментальные методы экономики

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научные консультанты:

академик В.Л.Макаров
профессор Шломо Вебер

Москва 2013

Оглавление

Глава 0

Введение

Многие научные результаты появляются на стыке двух или нескольких дисциплин, подходов и направлений. Это происходит от того, что на предмет исследования смотрят под совершенно разными, часто дополняющими друг друга углами зрения. Происходит нечто вроде “перекрёстного опыления”. Настоящее диссертационное исследование, как видится автору, представляет собой как раз такой пример синтеза идей из разных областей знания.

0.1 Описание изучаемой проблемы

Исследование посвящено теоретико-игровому анализу оптимизационной задачи, называемой *задачей многомерного размещения* (ЗМР всюду в дальнейшем). Так как соискатель претендует на физико-математическую степень, уместно первым делом дать строгую формулировку изучаемой проблемы, а потом уже говорить о ряде её приложений.

0.1.1 Постановка задачи: формальная модель

Задан распределённый в d *-мерном нормированном пространстве* $\left(\mathbf{R}^d,\ ||\cdot||\right)$ *спрос со стороны множества индивидов на доступ к определённому виду общественного блага. Благо поставляется в отдельных пунктах,* мощностях*, количество и места расположения которых нужно выбрать. Стоимость поддержания мощности равна* g *и не зависит от её адреса.*

Эти мощности имеют вид чистого общественного блага, то есть любая из них способна полностью удовлетворить спрос всех людей. В то же *время существуют затраты прикрепления каждого индивида к любой из мощностей, равные измеренному в заданной норме расстоянию от адреса предъявления спроса со стороны индивида до мощности, в которой спрос индивида будет удовлетворяться.*

Требуется выбрать места для открытия мощностей, а также прикрепить к открытым мощностям всех пользователей, минимальным по суммарной стоимости образом.

Для каждой открытой мощности рассмотрим группу её пользователей. Если внимание фокусируется на числе и композиции полученных групп, то для ЗМР используется синоним: *задача формирования групп.*

Выше не сказано, как именно выглядит “распределённый спрос”, и не случайно. Дело в том, что с точки зрения разумных приложений (см. ниже) существуют три принципиально разных класса распределений спроса.

Первый — простейший, назовём его F, когда в пространстве просто задано несколько точек (случай конечного числа игроков). Второй, D — абсолютно непрерывный, когда некое компактное подмножество пространства (или даже всё пространство целиком!) заселено людьми с непрерывной плотностью расселения. Такая постановка характерна для решения задачи обеспечения общественным благом жителей некоторого города.

Наконец, третий случай T является логической комбинацией первых двух и предназначен для описания задачи поставки благ на некоторой большой территории, в пределах которой люди живут в нескольких населённых пунктах. Последний случай (с конечным числом *типов* игроков), насколько автору известно, вводится в научной литературе, посвящённой поставке клубных благ, впервые.

Основная часть диссертации делится на главы соответственно изучаемым в них классам постановок: главы 1 и 2 посвящены конечной постановке, глава 3 — непрерывным расселениям, глава 4 — расселениям с конечным числом типов. Помимо этих глав, в диссертации присутствует введение (текущая глава!) и заключение (про которое будет сказано ниже).

Вернёмся теперь к описанию изучаемой в диссертационной работе задачи.

Проблема, если её переформулировать на содержательном языке “анализа конфликтов", состоит в следующем. Имеется многомерное "пространство конфликта", или разногласия, и заданное распределение участников конфликта внутри этого пространства (каждый участник располагается в той точке пространства, которая насыщает его предпочтения). Удаление от оптимальной точки влечёт *издержки разногласия*, измеряемые с помощью заданной *нормы* на пространстве конфликта.

Решением задачи ("допустимым планом") называется набор из нескольких точек пространства, или "вариантов разрешения конфликта", вместе с правилом соотнесения с каждым участником одного варианта, или точки разрешения конфликта, соответствующей лично ему. Каждый "вариант" стоит фиксированных денежных затрат.

Чем больше вариантов разрешения конфликта предложено, тем ниже суммарные издержки от разногласия, и одновременно тем выше затраты на обеспечение этих вариантов. В работе исследуются способы разрешения конфликтов, устойчивые по отношению к угрозам теоретико-игрового характера.

Теоретико-игровой аспект описанной проблемы состоит в том, чтобы протестировать получаемые в решении ЗМР сети пунктов открытия мощностей (вместе со способом прикрепления индивидуумов к мощностям) на устойчивость относительно *миграционных* и *коалиционных* угроз. При первом подходе устойчивости угрожает любой потребитель блага, желающий прикрепиться к иному, нежели предписанному ему, пункту. При втором подходе принимаются во внимание целые группы потребителей, координирующиеся с целью основания собственного "клуба" и открытия пункта удовлетворения спроса только для членов такого клуба. Более того, на устойчивость будут проверяться не только оптимальные решения, но и любые допустимые: иногда свойство устойчивости решения важнее свойства его оптимальности.

В настоящей главе дается описание ряда приложений задачи многомерного размещения (формирование стран, партий и клубов, а также обеспечение потребителей доступом к конкретным видам локального общественного блага).

0.1.2 На стыке дисциплин

Исследуемая в работе проблема, а именно вопрос устойчивости в задаче многомерного размещения по отношению к теоретико-игровым угрозам, лежит на стыке теории исследования операций, как её понимают "математики", и политэкономических дисциплин (в ключе современной западной "political economics").

В исследовании операций задача, как правило, ставится абстрактно и дискретно — задаётся конечное множество предъявителей спроса и конечное множество "вариантов открытия мощностей", в которых спрос может быть удовлетворён, а также вектор стоимостей открытия мощностей и матрица издержек прикрепления людей (предъявителей спроса) к мощностям. Требуется решить задачу обеспечения всех предъявителей спроса доступом к мощностям.

Эта задача называется Uncapacitated Facility Location Problem (UFLP), и про неё ниже во введении будет рассказано более подробно.

В политико-экономическом ключе ставятся вопросы устойчивости различных политических объединений, процессов формирования партий, клубов по интересам, аспектов "отделения регионов", миграции и т.п. В последние 20 лет эта теория стала популярной из-за её перехода на рельсы теории игр. Про историю становления современной политической экономики также будет рассказано в настоящей главе с соответствующими библиографическими ссылками.

Мостом между политической экономикой и теорией исследования операций служит предположение о том, что многообразие политического конфликта может быть "оцифровано" так называемым *пространством разногласия*, то есть конечномерным пространством, на котором заданы "вкусы и предпочтения" жителей мира/страны — участников изучаемого конфликта. Размерность пространства разногласия совпадает с количеством параметров разногласия. Каждый участник конфликта отождествляется с точкой в пространстве разногласия, а само пространство разногласия объявляется множеством X из задачи UFLP.

Если теперь предположить, что издержки от разногласия измеряются в некоторой норме на пространстве разногласия $X = \mathbf{R}^d$, а также что стоимость формирования одной группы составляет величину g в тех же единицах измерения, в каких "измеряется" разногласие, то мы придём к формулировке задачи многомерного размещения, приведённой выше.

Политэкономические аспекты проблемы напрямую приводят нас к вопросам теоретико-игровой устойчивости решений ЗМР.

Кроме того, полученные результаты можно интерпретировать и осмыслять в духе общей теории пространственного размещения, пионерами которого можно считать таких учёных, как А.Вебер, Кристаллер, Лёш, затем позже Стерн, Боллобаш, Морган, Болтон, Хаймович, Маньянти, Тотс и другие исследователи. ЗРМ можно интерпретировать и как задачу поставки клубных благ — бассейнов, медпунктов, полицейских участков, домов быта и др. в большом городе или в данной провинции (А.Васин, Д.Степанов, С.Вартанов, Ю.Сосина) или как задачу приближения непрерывных мер дискретными (как, к примеру, это делает Э.Рапопорт [27]).

Методологией настоящего исследования является современная теория игр — как коалиционная, так и стратегическая.

0.1.3 Фундаментальный конфликт, изучаемый в работе, и его конкретные воплощения

Лейтмотивом диссертационного исследования служит конфликт, присутствующий при организации и ведении практически любой коллективной деятельности. Это — конфликт между экономией от масштаба, во имя которой и происходит любая "коллективизация", с одной стороны, и растущими при объединении людей разногласиями, с другой.

Анализом этого конфликта занимались многие учёные, и в течение всей диссертационной работы у нас будут встречаться ссылки на те или иные ранее полученные результаты. Данный конфликт прослеживается во многих сюжетах, и ниже я привожу список наиболее интересных, с моей точки зрения, его проявлений.

Сюжет 1: Странообразование, имперское строительство

Никогда ещё за всю историю планеты не существовало империи размером в целый мир. При этом империи часто росли до очень внушительных размеров (Британская империя в 1922 году составляла более 1/5 суши, Монгольская империя много веков назад занимала приблизительно столько же, затем Российская Империя и после неё СССР со знаменитой 1/6 частью суши, да и современная Россия занимает 1/8 часть суши, что весьма внушительно на фоне общей тенденции мира к измельчению).

Но чем больше империи росли, тем сложнее бывало улаживать явные или неявные конфликты внутри них — конфликты самой разной природы (религиозной, национальной, культурной, географической). Начиная с определённого размера, каждая империя становилась неуправляемой и распадалась (либо теряла часть своих территорий).

Несмотря на это, во все времена нации и народы стремились к имперскому строительству (исключение составляют, возможно, лишь последние 30-40 лет воинствующего сепаратизма). Это обусловлено целым рядом факторов, обсуждение которых является предметом других наук о социуме. Мы здесь можем лишь суммировать эти факторы в виде следующего конфликта, попытка моделирования которого приведёт нас к задаче, изучаемой в диссертации:

Маленькие страны слабы и не выдерживают внешнего напора, а большие страны вынуждены всё время решать проблемы разногласий и/или управляемости.

Сюжет 2: Клубы по интересам

В интернете часто возникают некие “виртуальные сообщества” по интересам, прообразом которых прежде служили “клубы”. Любое такое сообщество объединяет людей, увлечённых чем-нибудь — футболом, музыкой, собачками. Эти люди объединяются и обсуждают своих любимцев; однако объединение это, как правило, “упирается” в существенные вкусовые расхождения. Футбол даже в одной Москве — это и Спартак, и ЦСКА, и Локомотив, и Динамо, а музыка — это и классика, и джаз, и русский рок, и даже, с определённой натяжкой, русская эстрада (попса и шансон).

Ясно, что вкусовые разногласия препятствуют созданию единого клуба "всех любителей музыки". Пример с футболом является более запутанным: в России на уровне любви к сборной всё-таки объединяются вместе фанаты всех клубов! Но, например, в Великобритании действует сразу несколько сборных, и тут налицо реализация вышеупомянутого конфликта один в один: потенциальная сборная Великобритании, вероятно, способна победить на любом чемпионате, но её успех не смогут разделить, скажем, шотландцы: они не воспримут его как СВОЙ успех, не станут этот успех отождествлять с собственным!

Сюжет 3: Политические партии

Задача в данном случае состоит в нахождении оптимальной композиции парламента (то есть в выборе количества партий и определения политических программ). Реализация фундаментального конфликта проходит по оси "большая партия более влиятельна, но и менее консолидирована".

Это особенно хорошо заметно на Западе, но даже и у нас всё не так прямолинейно, как кажется на первый взгляд. В самом деле, даже если Единая Россия и имеет решающий голос по многим вопросам, этот голос не всегда может быть, так сказать, использован — внутри самой ЕР имеются конфликтующие группировки.

Сюжет 4: Теория размещения, географический конфликт

Самую непосредственную, явную роль постулированный выше конфликт между размером и разногласиями играет в задачах пространственного размещения. Приведу его схематичную форму, которую мы назовём "деревенской историей".

Есть деревня, расположенная вдоль одной улицы. Нужно построить колодец (один или несколько), чтобы снабдить жителей доступом к воде. Если построить один колодец, то это дёшево (в среднем с дома), но жители на краю села (более далёком от колодца) будут носить воду очень далеко.

Вероятно, при достаточной длине деревни решено будет построить не один, а сразу несколько колодцев, в разных местах улицы, однако вряд ли каждый дом станет рыть свой собственный колодец. Общественный выбор остановится на чём-то промежуточном.

В реальной жизни пространственным воплощением ЗМР может служить задача оптимального размещения сети центров обслуживания — госпиталей, школ, бассейнов, стадионов, музеев, почтамтов, библиотек и т.п., задача о формировании юрисдикций и городских округов и многие другие проблемы.

Подведём предварительный итог.

В каждом из описанных сюжетов намечается определённая тенденция к формированию групп компромиссного размера. От каких факторов зависит этот “компромиссный размер”? Какие групповые структуры мы признаём устойчивыми, и в каком точном смысле слова? Эти, а также многие другие близкие по духу вопросы ставятся и анализируются в диссертационном исследовании.

0.1.4 Союз постулата Тьебу и принципа медианного избирателя

Для дальнейшего построения теории необходимо обратиться к двум научным прозрениям прошлых лет. Первое из них произошло в 1956 году в небольшой по объёму работе [131].

Чарльз Тьебу был географом, но он перевернул взгляд экономистов на тот мир, в котором они (а также обычные люди) живут. Его статья, процитированная выше, а также принцип “голосования ногами” до сих пор являются одной из наиболее цитируемых публикаций и одним из самых обсуждаемых идеологических постулатов в научно-экономическом мире. Они по сути дела распространяют идеологию “невидимой руки” Адама Смита на экономику общественного сектора: юрисдикции с их разными внутренними законами и характеристиками, налогами и общественными благами привлекают тех жителей, которым наиболее близко по предпочтениям конкретное жизнеустройство, принятое в каждой из юрисдикций.

Это чисто американская идея — в других частях света люди привязаны к месту своего рождения, и неохотно меняют среду обитания. Работа Тьебу, написанная без применения какого-либо аппарата, будоражила и продолжает будоражить учёных, пытающихся придать ей точный научный смысл, "доказать" гипотезу Тьебу в рамках какой-нибудь строгой её формализации. Этой цели посвящён целый ряд работ (речь о них пойдёт в разделе 1.5, посвящённом обзору литературы).

Настоящее исследование во многом продолжает данную традицию, обобщая её с изначального аспекта физической миграции (то есть перемещения людей с места на место) на все случаи смены клубов по интересам, партий и объединений.

Иными словами, в конфликт размера и разногласия мы "вдыхаем" теоретико-игровую жизнь. То есть мы не просто ищем *оптимальную* структуру разбиения на группы/страны/клубы/юрисдикции, а ставим вопрос об устойчивости разбиения: не захотят ли участники конфликта ("игроки") сменить в индивидуальном порядке группу, в которую их слепо определил жребий нахождения оптимума?

Можно зайти и с другой стороны: учитывая такую угрозу, есть ли способ снабдить общественно оптимальное разрешение конфликта такими "трансфертами" между игроками, при которых им не захочется идти наперекор оптимуму?

Более того, во многих случаях (в том числе рассмотренных ниже в работе) оптимальность и теоретико-игровая устойчивость несовместимы друг с другом. И не так очевидно, что в качестве критерия функционирования общества нужно тогда выбирать оптимальность. В самом деле, если угрозы разрушения от самоорганизации людей реальны, то можно пожертвовать оптимальностью ради их парирования. Поэтому теоретико-игровой подход к анализу задач "обустройства общества" может оказаться не менее значимым, нежели подход простой оптимизации суммарных издержек.

Далее, угрозы могут проистекать не только от перемещения отдельных игроков, но и от их объединений, "коалиций". Последние тоже имеют возможность саботировать общественный оптимум, в уведомительном порядке организовывая общественную деятельность внутри себя. Как реагировать "обществу" в этом случае? Возможно ли парировать все такие угрозы?

При попытке формализации подобных задач возникает необходимость выработки правила, согласно которому в потенциальной группе происходит выбор вида, типа, конкретной формы общественной деятельности. В общем виде данный вопрос принципиально не имеет решения, ибо упирается в знаменитую теорему Эрроу ([34]). Однако хорошо известны те ограничения на совместные профили предпочтений игроков, при которых вопрос решается удовлетворительным образом.

А именно, мы обращаемся ко второй хорошо знакомой экономистам теоретической конструкции — "теореме о медианной альтернативе", "медианном избирателе" или же просто "принципу медианы". Литература по данному направлению весьма обширна, и даже сходу трудно найти ссылку на первоисточник. Тем не менее он существует: это Дункан Блэк [42]. Многочисленные дополняющие работы перечислены в книге уже упомянутого выше выдающегося учёного, нашего современника — Кеннета Эрроу [34].

Ниже я суммирую основные выводы этой теории и излагаю их на своём языке.

Принцип говорит о том, чего можно ожидать, если во "множестве разногласия" существует линейный порядок типа "больше-меньше", "левее-правее" или "выше-ниже" — это во-первых; и каждый из конфликтующих игроков обладает оптимальной альтернативой, такой, что удаление от неё в любом направлении ухудшает его положение — это во-вторых.

Такая ситуация достаточно часто встречается в конфликтных ситуациях. Достаточно представить себе вопрос об оптимальной температуре в лекционном зале или в плацкартном вагоне, или же вспомнить нашу задачу о колодцах, обсуждавшуюся выше.

Так вот, в подобных случаях надо найти такого игрока, чей оптимум находится "посередине", то есть центриста — в том смысле, что число игроков, чей оптимум расположен левее оптимума данного игрока, совпадает ("уравновешивается") с числом игроков, чей оптимум лежит правее. Выбор такого центриста и объявляется "выбором группы".[1]

[1]Это означает, что всего игроков — нечётное число. Ситуация чётного числа игроков немного более

Оправданий такого решения существует как минимум два (на самом деле гораздо больше). Одно из них универсально для линейно-упорядоченных пространств альтернатив любого вида, а другое годится для постановок "на обычной прямой".

Первое состоит в том, что вдоль линейно-упорядоченного множества как бы натянут канат, и все его перетягивают: если узел каната заходит за вашу любимую альтернативу в одну из сторон, вы его начинаете тянуть в другую. Равновесием в этой "игре перетягивания каната" как раз и является положение оптимума медианного игрока.[2]

Можно это переформулировать и иначе, на сухом научном языке: точка оптимума для медианного игрока ("избирателя") выигрывает при голосовании большинством против любой другой альтернативы (то есть является так называемым "победителем по Кондорсе").

Второе оправдание годится для нашей деревенской истории, и тоже хорошо известно — со времён школы. А именно, если некая группа домов строит колодец, то (при равной численности каждой семьи) выбирается место, минимизирующее общую "стоптанность сапог" (то есть суммарное расстояние, которое будут проходить за водой все жители, эксплуатирующие данный колодец). Это тоже приведёт нас к медианному домику!

Вторая интерпретация допускает очень важное и далеко идущее обобщение, которое мы и примем во всём дальнейшем анализе в качестве рабочего предположения. Соответствующее обобщение введено на плоскости Якобом Штейнером в начале 19-го века (см. подробное описание в [17], стр. 382-388), а мы используем эту концепцию в произвольных нормированных пространствах.

Но об этом чуть позже. Пока что отметим, что всё вышесказанное неплохо формализуется уже упоминавшейся задачей UFLP. Задача многомерного размещения (ЗМР), изучаемая в диссертации, является, с одной стороны, частным случаем UFLP, но с другой стороны, обобщает её до произвольных,

запутанная, см. [110], стр. 801-804. В работе [72] описанная ситуация обобщается до так называемой системы *промежуточных предпочтений* (intermediate preferences).

[2]Надо лишь дополнительно предположить, что все участники конфликта обладают одинаковой физической силой!

не обязательно конечных или счётных, начальных данных. Остановимся более подробно на формализации задачи.

0.2 Формализация конфликта: UFLP и ЗМР

В теории исследования операций есть несколько “культовых” задач, каждая из которых возникла из целого ряда народно-хозяйственных приложений. Про каждую из них написаны тысячи статей, обзоров и книг.

Uncapacitated Facility Location Problem (UFLP, по-русски назовём её *задачей о размещении мощностей неограниченной вместимости*), является одной из таких культовых задач. Для глубокого знакомства с этой задачей рекомендуются следующие работы: [58], [56], [91], [129], [111]. Здесь же приведём формализацию одной из модификаций UFLP, наиболее близкую по духу к исследуемой в диссертации ЗМР.

Имеется множество N игроков, а также “пространство разногласия”, которое мы обозначим за X — множество потенциальных мест (вариантов, модификаций, спецификаций) создания мощностей, каждая из которых может удовлетворять некий специфический спрос со стороны множества индивидов N. Мощности эти имеют вид чистого общественного блага — любая из них способна полностью удовлетворить спрос всех людей.[3] Стоимость создания/поддержания одной мощности не зависит от места и фиксирована раз и навсегда. Обозначим её за g.

0.2.1 Постановка задачи UFLP и переход к ЗМР

В то же время, существуют затраты прикрепления людей к мощностям — заданные в виде матрицы затрат $(c_{ij})_{i\in N,j\in X}$. Идейное наполнение этих затрат, как мы уже обсуждали, может быть самым разным, начиная от географических расстояний и издержек перемещения, и кончая индивидуальными преференциями относительно того, в какой из мощностей

[3] В противном случае задача превращается в (C)FLP — (Capacitated) Facility Location Problem, которой мы в настоящей работе заниматься не будем.

спрос может быть удовлетворён более качественно с точки зрения данного лица.

Требуется открыть мощности и приписать к ним людей наиболее экономным способом, то есть решить задачу

$$\min_{K\subset X;h:N\to K}\left\{g|K| + \sum_{i\in N} c_{i,h(i)}\right\}, \tag{1}$$

где минимум берётся по множеству пар, каждая из которых состоит из набора (адресов) открываемых мощностей $K \subset X$, а также правила прикрепления $h \in K^N$, то есть функции на пространстве игроков со значениями во множестве открытых мощностей: каждый человек $i \in N$ приписан к конкретной мощности $j = h(i) \in K \subset X$. Минимизируется суммарная стоимость открытия $|K|$ мощностей, равная $g|K|$, плюс суммарные издержки прикрепления.

На самом деле можно перебирать при поиске минимума просто непустые подмножества $K \subset X$, потому что в любом решении задачи (1) функция прикрепления после этого будет иметь вид *прикрепления к ближайшей мощности*:

$$\forall i \in N \quad h^*(i) \in Arg \min_{j\in K^*} c_{i,j}, \tag{2}$$

где неопределённости в выборе самой дешёвой мощности можно разрешать любым способом. Таким образом, эквивалентная формулировка задачи UFLP принимает следующий вид:

$$\min_{K\subset X}\left\{g|K| + \sum_{i\in N} c_{i,h^*(i)}\right\}, \tag{3}$$

где при каждом i значение $h^*(i)$ берётся из решения задачи (2).

Далее, в зависимости от конкретных приложений, вводятся уточняющие специфические предположения и ограничения.[4]

Множества X и N в задаче UFLP предполагаются конечными — потому что в теории исследования операций учёных, прежде всего, интересуют вычислительные аспекты (сложность алгоритмов и т.д.), которые для бесконечных множеств теряют непосредственно осязаемый смысл.

[4]См., например, работы [7], [15], [14], [2].

Теоремы существования, а также характеризация оптимальных и устойчивых решений при этом играют второстепенную роль.

Результаты же, полученные в диссертационном исследовании, носят преимущественно теоретический характер, и уже поэтому по духу относятся скорее к чистой математике, нежели к теории исследования операций. Соответственно, мы ослабляем предположения о конечности пространства X,[5] одновременно конкретизировав его структуру. После этого на месте задачи UFLP рождается ЗМР – задача многомерного размещения (различные формулировки которой будут даны в последующих главах).

0.2.2 Конкретная реализация ЗМР: география, вкусы, взгляды

Все сюжеты, рассмотренные выше, с различной степенью изящности ложатся внутрь рассмотренной математической формализации. Более того, во всех без исключения известных важных приложениях множество X является простым подмножеством $\mathbf{R}^d$ (при некотором $d \geq 1$) — например, прямой, отрезком, целой плоскостью, сферой, окружностью.

Во всех приложениях также верно и то, что само множество N "живёт" внутри X. Это означает, что задано отображение $x : N \to X$ (не обязательно вложение — разные люди могут "жить" по одному и тому же адресу в X), произвольное для конечного N и измеримое для континуального случая.[6]

После этого элементы матрицы $\{c_{i,j}\}_{i \in N,\, j \in X}$ принимают вид $c(i,j) = ||x(i) - j||$, где $||\cdot||$ — заданная на X норма, и интерпретируются как издержки по достижению человеком i, живущим по адресу $x(i) \in X$, мощности $j \in X$. Таким образом мы переходим от абстрактной задачи UFLP к более специальной, но и более "обозримой" задаче — ЗМР. В дальнейшем (при изучении дискретных расселений) адрес игрока i будет обозначаться за x_i, вместо $x(i)$.

Пройдёмся теперь последовательно по каждому из сюжетов.

---

[5] А также условие конечности пространства игроков N в главах 3 и 4 ниже.

[6] Впрочем, об этом никогда не нужно будет беспокоиться, потому что в континуальной постановке либо множество N совпадает X (глава 3), либо отображается в конечное число точек внутри пространства X (глава 4).

Сюжет 1. В случае “имперского строительства” за N имеет смысл взять список всех народов мира. Структурной единицей здесь более разумно считать именно народ, а не отдельного человека, так как имперское строительство шло всегда, а идея оторванности человека от его народа, идея всеобщего методологического индивидуализма сравнительно нова (и неочевидно, сколько десятилетий, не говоря уже о веках, она ещё продержится).

Что же касается множества X — то это множество, так сказать, имперских укладов, законодательств, конституций, правил имперского строительства. Матрица расстояний показывает, сколь обременяющим является тот или иной имперский уклад для того или иного народа, потенциально входящего в рассматриваемую империю — для народных традиций, культуры, религии и иных важных характеристик бытия.

Сюжет 2. В случае формирования клубов по интересам N, напротив, представляет собой просто множество людей, увлекающихся изучаемой клубной деятельностью, а X есть пространство возможных характеристик, “пространство вкусов”, которое, скажем, в музыке принимает вид пространства музыкальных стилей и направлений. Что же касается матрицы расстояний, то она измеряет степень дискомфорта от прослушивания данным человеком музыкальных произведений данного стиля (нулевой дискомфорт — его любимая музыка).

Сюжет 3. Политические партии внутри страны оставляют для N некоторую свободу выбора: либо это множество политиков, либо это множество, так сказать, актуальных политических идей.

В обоих вариантах X есть множество политических программ, платформ, решений, принимаемых партиями. Матрица разногласий более-менее такая же, как в сюжете 1: насколько данному человеку претит подписываться под данной программой (соответственно, насколько далека программа партии от политической идеи из N, включённой в эту партию в процессе партийного строительства).

Сюжет 4. В географической истории, подобной задаче о колодцах в деревенской истории, вообще всё очевидно и прозрачно: N — это множество домов, X — множество точек улицы. Матрица разногласия — матрица расстояний между точками на прямой.

Мы видим, что, действительно, во всех перечисленных случаях множество участников конфликта N естественным образом отображалось внутрь X (не обязательно инъективно): каждому “игроку” из N соответствовала идеальная точка в пространстве X. Как мы отметили выше, это наблюдение послужило оправданием определённого ограничения общности при выборе пространства разногласия, X, и замены задачи UFLP на ЗМР в рамках настоящего исследования.

0.2.3 Подробнее о поставке клубных благ

Выбор наиболее интересных формулировок как для теорем, так и контрпримеров, у нас будет продиктован идейным наполнением из теории пространственного размещения, а также из теории клубных благ. В то время как географическая интерпретация наглядно очевидна, понимание конфликта поставки клубных (то есть, локальных общественных) благ требует более развёрнутого описания. Приведём его здесь.

Имеется экономика, состоящая из конечного числа (вариация: континуума) потребителей. Требуется обеспечить всех потребителей доступом к данному горизонтально дифференцированному общественному благу (которого можно произвести несколько разновидностей). Эпитет “клубное” по отношению к рассматриваемому благу используется в силу того, что любого потребителя можно не допустить к потреблению блага. Соответственно, “проблема безбилетника” не принимается в расчёт при исследовании поставленной задачи.

Разные потребители имеют различные предпочтения относительно набора характеристик потребляемого блага, и возникает такой выбор (так называемый trade-off): чем меньше вариаций общественного блага будет произведено, тем, с одной стороны, ниже налоговое бремя на потребителей, а с другой — интенсивнее конфликт касательно того, какие именно вариации нужно производить.

Рассматриваемое общественное благо имеет вид чистого, лишённого эффекта переиспользования, поэтому одно из возможных решений — произвести для всех потребителей ровно одну вариацию блага.

Этот крайний случай характеризуется максимально низким налоговым бременем и максимально интенсивным конфликтом интересов.

Другой крайностью будет произвести для каждого из потребителей идеально подобранную, в соответствии с его предпочтениями, разновидность общественного блага. Тогда конфликта интересов не будет вовсе, зато налоговое бремя в таком решении будет максимально возможным (и даже бесконечным, если мы рассматриваем континуальную постановку).

В оптимальном решении производится некоторое количество разновидностей общественного блага, и ему ставится в соответствие разбиение на клубы, в котором сбалансированы две описанные выше тенденции. Требования устойчивости решения также приводят, как правило, к выбору некоторого компромисса между двумя крайностями.

0.2.4 Две трактовки задачи: дробная и неделимая

Для описанной интерпретации характерно предположение о том, что спрос каждого из людей одинаков и попросту нормирован к единице; именно так мы и будем повсюду в дальнейшем считать в течение четырёх основных глав работы (главы 1-4). В заключении (глава 5) будут упомянуты альтернативные постановки.

А вот дальше возникает "развилка". А именно, существуют две различные трактовки задачи.

Первая. Этот единичный спрос может удовлетворяться в разных местах (но суммарно должен быть полностью удовлетворён).

Послабление такого рода — лишь дань принципу "искать под фонарём, а не там, где потеряли". В дальнейшем мы убедимся в том, что содержательные и нетривиальные результаты возникают именно после отказа от этого послабления, когда вид задачи не допускает разбиения спроса на составляющие, и весь спрос каждого из людей должен быть удовлетворён ровно в одной из мощностей. **Вторая** трактовка, базовая для настоящей работы, состоит именно в этом.

Более того, *дробный* характер задачи создаёт дополнительные трудности для её правдоподобной интерпретации. Однако, он хорош тем, что полностью решается с позиций как миграционных, так и коалиционных угроз (так часто бывает в науке). Тем самым, с точки зрения математики, он тривиален. Полное решение приведено в обзорной статье [100] (там же формализуются теоретико-игровые угрозы в дробной трактовке).

Трудности интерпретации связаны с составлением согласованного, внутренне непротиворечивого расписания посещения участниками рассматриваемой конфликтной ситуации мест удовлетворения спроса. Правильно думать, что "овыпукление" поставленной задачи, приводящее к дробной трактовке, намечает лишь точку отсчёта (по-английски "reference point") для дальнейшего анализа.

Тем не менее, существует пример содержательной постановки, в которой дробная трактовка не выглядит слишком уж притянутой за уши.

Пример: бассейны. Представьте себе, что некоторая организация хочет обеспечить всех своих работников доступом к плаванью в бассейне. Скажем, всем полагается, по мнению организации, плавать по 10 часов в месяц (мнение это поддерживается реально имеющимся свободным от работы временем, то есть как бы соответствует спросу работников).

Имеется сеть бассейнов, раскинутых по городу. Все они требуют одинаковой рыночной арендной платы за плавание в единицу времени.

В данном бассейне возможно плавание в течение суммарного времени, не превосходящего длительность сеанса, оплаченного данной организацией, но при этом его одновременно могут использовать хоть все работники. (Аналогичная ситуация возникает в том случае, если бассейн заменяется баней, или же каким-либо иным культурно-развлекательным центром.)

Однако люди проживают каждый по своему адресу. Поэтому для каждого работника и каждого потенциального бассейна возникают дополнительные издержки[7] за каждый визит этого человека в бассейн, помимо его доли в

[7]Транспортные либо временные, но в любом случае можно попытаться выразить их в одинаковых

стоимости аренды бассейна.

Для того, чтобы интерпретация нашей постановки была близка к истории с бассейнами, осталось предположить, что один визит в бассейн может продолжаться не более (условно) часа, неделим между бассейнами, а временной горизонт задачи достаточно велик для того, чтобы считать один визит пренебрежимо малым по продолжительности.[8]

Задача данной организации — выбрать интенсивность (долю от общего времени функционирования) аренды каждого бассейна, а также матрицу прикрепления работников к бассейнам.

Вторая, основная, "неделимая" трактовка задачи возникает в том случае, если считать, что организация не может приписать одного работника к разным бассейнам. Иными словами, в этом случае выбирается множество арендуемых (на 10 часов в месяц) бассейнов, и каждый работник приписывается к одному из них (но разные работники по-прежнему могут плавать в одном и том же бассейне, не ограничивая его плавательных свойств).[9]

Уже на примере этой истории видно, что неделимая трактовка выглядит более натуральной. В следующей истории неделимость является жизненно необходимым предположением.

Пример: санитарные пункты. А теперь рассмотрим иную ситуацию, на этот раз несколько "вольную".

Пусть речь идёт не о бассейнах, а об обеспечении санитарными пунктами[10] данного музыкального фестиваля.

денежных единицах.

[8]По сравнению с общим временем плавания в течение рассматриваемого временного горизонта.

[9]Если людей можно приписывать к разным бассейнам, но нельзя снять бассейн на "дробное" время, то такая постановка эквивалентна стандартной целочисленной; см. об этом подробнее в главе 4, посвящённой расселениям континуума жителей по конечному числу адресов.

[10]Туалетами. Эта чудесная интерпретация впервые появилась в столовой городка Лювен-Ля-Нёв, где я обедал вместе со своими соавторами Шломо Вебером и Жаком Дрезом и обсуждал одну из вариаций данной задачи. Жак тогда сказал, что в случае недовольства рецензент попросит оставить нашу статью в одном из этих самых "санитарных пунктов". Затем Валерий Иванович Зоркальцев "переоткрыл" туалетную интерпретацию во время моего выступления в ИДСТУ СО РАН в марте 2011-го года. Впервые, впрочем, эта аналогия мне пришла на ум в 2000-м году во время посещения мной Грушинского фестиваля, влекущего эмпирическое исследование обсуждаемого вопроса.

Тогда спрос всех участников фестиваля в первом приближении можно считать одинаковым и неварьируемым с ещё б‘ольшими основаниями, нежели в ситуации с бассейнами, а вопросы вместимости, по сути, решаются предположением о том, что сообщество участников фестиваля выходит не на ограничение по вместимости, а на ограничение по пространственной достижимости санитарных пунктов.[11] Ниже мы иногда будем санитарные пункты сокращать до аббревиатуры “СП”.

Что бросается в глаза при данной интерпретации? Что любой СП функционирует круглосуточно. Здесь нет речи об открытии СП на дробную долю времени, ибо издержки строительства несутся один раз за весь фестиваль.[12]

По сути, решается целочисленная задача минимизации (задача целочисленного программирования), когда выбираются не степени интенсивности функционирования мощностей, а решаются вопросы бинарного вида (открыть/не открыть мощность в данной точке). В этом случае, очевидно, в оптимуме каждый житель может быть приписан просто к ближайшему СП, или к одному из ближайших, если таковых окажется несколько.

Иными словами, при правильном моделировании данной истории **первая,** дробная трактовка является не вполне адекватной реальности. Поэтому наибольший интерес вызывает именно неделимая, гораздо более сложная для анализа модель. И диссертация целиком посвящена трудному, но адекватному реальности неделимому случаю.

0.2.5 Странообразование (модель Алесины и Сполаоре)

Выше я уже приводил в пример имперское строительство как одну из реализаций изучаемого в диссертационной работе конфликта. Так вот, позвольте мне упомянуть в связи с эим ещё двух действующих лиц.

Их имена — Альберто Алесина и Энрике Сполаоре. В 1997 году они поставили задачу об оптимальном разбиении мира на страны, а также

[11] Существуют санитарные нормы, достаточно жёсткие для того, чтобы на первый план выходил именно вопрос быстрой достижимости санитарных пунктов.

[12] И они одинаковы для всех СП, как правило, в силу тех же санитарных норм.

об угрозах устойчивости для оптимального разбиения. Их статья ([36]), несмотря на предельно упрощенную базовую модель, положила начало новой интеллектуальной традиции в политической экономике. Ниже описан их подход к процессу образования стран.

Задачу авторы сформулировали следующим образом: рассмотрим "мир", который является отрезком $[0,1]$ и который равномерно заселён людьми. Адрес человека интерпретируется как обобщённый показатель индивидуальности, включающий политические взгляды, культурно-национальную самоидентификацию, язык, вкусы, и т.д.[13]

Если некоторое (измеримое) подмножество отрезка $[0,1]$ выделяется из мира в форме отдельной страны, то эта страна должна выбрать "столицу", то есть такой набор характеристик, выраженный точкой отрезка-мира, который бы в максимальной степени отражал средние характеристики жителей страны. Иными словами, "столица" выбирается в медианной точке, то есть в такой точке, в которой минимизируется сумма (интеграл) расстояний от неё до адресов жителей страны (об этом *принципе медианы* уже подробно говорилось выше, он красной нитью проходит сквозь всё диссертационное исследование).

В рассмотренном Алесиной и Сполаоре случае такая точка для любой страны-отрезка будет совпадать с его серединой. (Издержки "разногласия" каждого жителя страны выражаются в этой работе простым расстоянием до столицы.)

Первым делом авторами ставится задача оптимального разбиения мира на страны при условии, что стоимость поддержания страны, которую мы, так же как и выше, обозначим за g[14] не зависит от количества жителей,[15] а суммарные издержки разногласия просто прибавляются к суммарным издержкам поддержания всех столиц.

Конечно, это та же самая задача многомерного размещения, только

[13] В статье [123] предпринята попытка "оцифровать" предпочтения подданных разных стран. Оказывается, одномерность — не такое уж дикое предположение для жителей США; а двух параметров уже более-менее хватает для описания пространства разногласия в России.

[14] Траты на столичных чиновников.

[15] То есть от меры страны как измеримого подмножества отрезка $[0,1]$.

теперь N совпадает с отрезком $[0,1]$, который одновременно является подмножеством пространства разногласия $\mathbf{R}$.

Математически поставленная задача тривиальна. Но статья эта интересна другим: в ней впервые сформулированы в рамках (сверхупрощённой версии) модели ЗМР многочисленные вопросы именно теоретико-игрового характера.

Заметим, что история с колодцами в деревне отличается от вышеописанной модели Алесины и Сполаоре лишь конечностью множества игроков, а также произвольностью их расселения.

0.2.6 Первичная формализация теоретико-игровых угроз

Перейдём теперь к обсуждению основных вопросов, анализируемых в диссертационном исследовании.

Удобная переформулировка ЗМР. Вернёмся к фестивальной трактовке, и применим следующий приём. Его же можно применить и для общей постановки задачи UFLP, см. постановку (1) выше.

Подробнее об этом приёме мы поговорим в следующей главе — на уровне математической строгости, а здесь скажем про него вводные слова.

В силу того, что в оптимуме каждый человек приписан ровно к одному СП, исходная задача оказывается эквивалентной задаче о выборе оптимального разбиения людей на подмножества — с последующими оптимизирующими выборами СП, каждый из которых будет обслуживать одно подмножество пользователей (СП выбирается таким образом, чтобы суммарные издержки прикрепления членов группы к нему были минимальными).

Конструкция получается двуступенчатой. Сначала для каждого мыслимого списка людей (для каждой “коалиции”, как мы будем часто ниже говорить, пользуясь теоретико-игровой терминологией) мы ставим и решаем задачу выбора оптимального СП — который с минимальными издержками удовлетворит спрос всех людей из данного списка. Решение этой задачи называется *медианой* данной коалиции или данного подмножества. Медиан может быть много; тогда в оптимуме можно выбрать любую из них.[16]

[16]Можно было бы назвать её, в соответствии со сказанным выше в тексте работы, *точкой Штейнера*, но мы хотим сохранить в названии информативную составляющую.

Значение целевого функционала на любой медиане минимизирует издержки функционирования данной группы, при условии открытия членами группы ровно одной мощности.

На втором этапе перебираются все разбиения людей по группам, и на множестве всех разбиений минимизируется выражение, равное сумме минимальных издержек функционирования каждой из групп, к которой прибавлена стоимость открытия всех мощностей — то есть число элементов разбиения, помноженное на g.

Теперь понятно, почему данная проблема чрезвычайно трудна с точки зрения методов нахождения оптимума. Ведь речь идёт о минимизации на пространстве *всех вообще* разбиений данного множества на произвольное количество "кусков" — на пространстве со сложнейшей внутренней структурой. Чуда не происходит, и задача эта в общем случае NP-трудна (см. [58]).

Принципы распределения издержек в ЗМР. Нас, однако, не будут интересовать способы решения этой задачи. В фокусе нашего внимания будут находиться вопросы теоретико-игрового характера. На строгом уровне речь о них, опять-таки, пойдёт в следующей главе. Однако уже здесь мы словесно опишем, что за проблематика является центральной для настоящего исследования.

А именно, мы будем интересоваться такими решениями поставленной ЗМР, которые устойчивы относительно двух принципиально разных по смыслу видов теоретико-игровых угроз. Более того, мы будем искать устойчивые конфигурации не только среди оптимальных решений, но и среди всех допустимых.

Что же означает "устойчивые"? В какой ситуации может возникать угроза устойчивости допустимого плана? Чтобы придать понятию устойчивости точный смысл, нужно снабдить решение задачи, при котором целевой функционал принимает некоторое конкретное значение, способом распределения этого значения, то есть общих издержек, между участниками конфликта. Иными словами, надо договориться о том, кто сколько платит.

На этот счёт существует множество мнений. Бывает так, что издержки разрешается распределять между участниками произвольным образом; тогда говорят о случае *трансферабельной полезности*, или случае с побочными платежами. Может быть, напротив, и так, что индивидуальные издержки несовпадения потребляемого блага с идеальной разновидностью каждый участник несёт сам, а издержки поставки блага g распределяются внутри каждой из групп поровну. В таком случае говорят о *принципе равнодолевого участия*. Можно также *суммарные* издержки[17] внутри каждой группы поровну распределить между её участниками, достигая полного равенства. В последнем случае говорят о *принципе внутригруппового выравнивания издержек,* или о *принципе Ролса*, по имени учёного, подвергшего данный случай экономическому анализу (см. [117]).

В диссертации будут изучаться три вышеописанных принципа. Подробнее о них будет сказано в следующей главе.

Договоримся ещё об одном допущении. А именно, внутригрупповой выбор способа ведения деятельности всегда будет осуществляться путём минимизации суммарных издержек прикрепления (то есть посредством выбора *медианы*), даже тогда, когда в рассматриваемой постановке не все схемы перераспределения издержек между игроками допустимы (NTU-game, одна из постановок с нетрансферабельной полезностью).

Для постановок, относящихся к однопиковому случаю, то есть для одномерного пространства разногласия, это предположение выделяется тем, что оно *постфактум устойчиво*: коль скоро группа уже оформила свою автономию, внутригрупповое согласование интересов приведёт в точку, оптимальную для медианного участника.

Теперь всё готово для обсуждения двух основных видов угроз устойчивости в задачах многомерного размещения.

Миграционная угроза, или M-угроза: разбиение на клубы (не обязательно оптимальное!) называется *миграционно-устойчивым*, если ни один из членов ни одного из клубов не хочет перейти в другой клуб[18] либо организовать клуб, состоящий из одного себя.

[17] Сумму g и всех индивидуальных.

[18] Без разрешения членов последнего.

Тонкости, связанные с этим определением, мы вскроем ниже. Также мы захотим его частично видоизменить в случае, когда множество N игроков бесконечное (что лучше соответствует ситуациям типа “население всей страны”).

Коалиционная угроза, или K-угроза: разбиение на клубы называется *коалиционно-устойчивым*, если никакая *коалиция*, то есть непустое подмножество людей, не желает, порвав прошлые узы, организовать новый, свой собственный клуб.

Здесь никаких дополнительных тонкостей, кроме требования измеримости отделяющейся коалиции (а также групп, входящих в любые предлагаемые в качестве решения разбиения), для бесконечных N не появляется.

0.3 Обзор полученных в работе результатов

0.3.1 Краткое содержание следующих глав работы

Настало время кратко охарактеризовать полученные в исследовании результаты. Б‘ольшая часть из них представляет собой теоремы существования тех или иных решений (то есть существования групповых структур, устойчивых по отношению к тем или иным угрозам), либо контрпримеры, показывающие, что определённые угрозы устойчивости не могут быть ликвидированы. Опишем их более конкретно.

В первой и второй главах исследуется классическая (конечная) постановка (назовём её F) задачи многомерного размещения.

Сначала приводится строгая математическая формализация, потом двойственная формулировка, акцентирующая внимание на оптимизацию в пространстве разбиений. Здесь же вводится ключевая для всей диссертации задача поиска медианной локации, или задача Штейнера в многомерном пространстве с нормой, для любой возможной коалиции игроков. После этого мы переходим к обсуждению угроз теоретико-игровой природы, которое сразу же потребует введения понятия принципа распределения издержек.

В основной части работы анализу подвергаются три ниже следующих принципа: принцип трансферабельной полезности S, принцип равенства платежей внутри группы R и принцип равнодолевого участия E. Поэтому в конечной постановке возникнут три ветви анализа, которые можно назвать FS, FR и FE.

Кроме того, последняя ветвь FE оставляет задачу не до конца определённой. Самые сильные результаты получены при $d = 1$, то есть на прямой, где медиана зачастую определена неоднозначно, и случай FE может быть подразбит на подслучаи, о чём будет сказано в следующих двух главах более подробно. Кроме того, на прямой возникает естественный линейный порядок на множестве игроков: тот порядок, который диктует следование вдоль прямой адресов (или локаций) участников конфликта. Этот порядок естественным образом рождает целый ряд дополнительных вопросов, связанных с понятием *интервальности* — как коалиции, так и разбиения на группы.

Затем в первой главе вводится понятие миграционной устойчивости (литера M), которое можно ввести для случаев FR и FE (в последней постановке это понятие вводится только на прямой, и для каждого из упомянутых выше подслучаев отдельно). Завершается первая глава сводкой результатов, касающихся свойств миграционной устойчивости разбиений для постановок FR и FE (превращающихся таким образом в постановки FRM и пару аббревиатур, связанных с подслучаями на прямой).

Самая последняя теорема первой главы — теорема существования миграционно устойчивого разбиения на группы для любого расселения на прямой при некоторых дополнительных требованиях — доказывается путём построения *потенциала*. Это такой функционал на пространстве всех разбиений, который уменьшается при любом выгодном переходе игрока из одной группы в другую (и при образовании собственной одиночной группы также).

Следующая, вторая глава целиком посвящена анализу *коалиционной* устойчивости разбиений. Случай FRC приводит к самой общей теореме существования (этот случай можно определить для абстрактной постановки $UFLP$, и существование устойчивого решения всегда будет гарантировано) и фактически закрывает родственные случаи DRC и TRC. Иными словами, все случаи под рубрикой RC оказываются полностью закрытыми.

Случай FS (его можно назвать FSC, но это было бы лишним, ибо в случае FS понятие миграционной устойчивости не изучается в работе) был подвергнут интенсивному анализу предшественниками, но так как этот анализ вплотную подводит нас к насущным вопросам для случая FE, то обзор его результатов приводится в следующем разделе 1.4, который посвящён обзору литературы.

Оставшаяся часть главы целиком посвящена случаю FEC, в котором (особенно при $d = 1$) получен целый ряд результатов. Ключевым результатом главы 2, безусловно, является универсальный контрпример для постановок FEC даже на обычной прямой. Он включает 13 игроков и повествует о том, что в рамках правила FE (как уже выше было сказано, весьма расплывчатого) нельзя вообще никак "извернуться", чтобы парировать все угрозы устойчивости, то есть для данного расселения ни при какой спецификации правила FE не существует коалиционно устойчивого разбиения на группы. Так как такой феномен обнаружен уже в размерности 1, то тем самым про какие-либо общие теоремы существования коалиционно устойчивых разбиений с принципом равнодолевого участия можно забыть.

Вообще же, диссертация неравномерно распределяет имеющиеся результаты по логически выделяемым "трёхбуквенным" разделам. Это фактически свидетельствует о том, что в работе содержится значительный потенциал для дальнейшей большой исследовательской программы.

Глава 3 посвящена анализу непрерывных расселений с плотностью (аббревиатура случая: D). После общего определения ЗМР для расселений на выпуклом компактном носителе, которое в общем и целом не представляет труда, изложение переходит к понятиям миграционной (DM) и коалиционной (DC) устойчивости, адаптированным под этот случай.

Миграционная устойчивость в неатомарном случае оказывается идеологически даже более простым понятием, чем в случае F. Суть здесь в том (подробности в главе 3!), что перемещение одного игрока в неатомарном случае не влияет на "макропоказатели".

Так как, судя по всему, верна общая теорема существования для случая RM в континуальной постановке (она не успела войти в материал диссертации), то в разделе 3.2 главы 3, посвящённом миграционной устойчивости, рассматривается только случай DEM. Там доказывается достаточно общий результат: для любого расселения на отрезке с невырожденной плотностью **существует** миграционно устойчивое разбиение на предписанное (любое!) количество групп. В процессе доказательства используется лемма Гейла-Никайдо-Дебрэ.

"Коалиционная" часть главы 3, представленная далее, венчает всю диссертационную работу. А именно, в разделе 3.3 доказывается "теорема об 0.018-устойчивости" для случая DSC с равномерным расселением на плоскости. Оставляя пока интригу, что же это такое, отметим, что при доказательстве ключевых утверждений используется достаточно тонкая техника из математического анализа и теории меры. Последний результат недавно был мной и соавторами обобщён до случая равномерного расселения в произвольном нормированном d-мерном пространстве; но будучи ещё не опубликованным, он на защиту не выносится.

Помимо двух упомянутых теорем в постановках DEM и DSC соответственно, подробному анализу был подвергнут случай равномерного расселения на отрезке $[0, 1]$, с целью выявления взаимосвязей и мостов между различными требованиями теоретико-игровой устойчивости разбиений. Отдельного внимания заслуживает новая концепция *локально устойчивого миграционного разбиения*, усиливающая во многом механическое понятие миграционной устойчивости. Её анализ проведён пока лишь для равномерного расселения на отрезке, но это первый шаг большого пути! Путь этот продолжается в заключительной, пятой главе.

В *главе 4* исследуется случай "конечного числа типов" игроков. Постановка самой задачи многомерного размещения здесь представляет собой идеологическую смесь постановок F и D; понятия группы и коалиции уступают место понятиям *группового* и *коалиционного шаблонов*. Все определения устойчивости также меняют свой внешний вид (сохраняя внутреннюю суть неизменной).

Миграционных аспектов в этой главе я не касаюсь (случай TRM уже упоминался как решённый, а случай TEM пока что, на сегодня, остаётся практически неизученным — хотя там и удалось, по аналогии с конечным случаем, построить потенциал, но последний пока "плохо себя ведёт").

Коалиционная устойчивость в случае TRC уже упоминалась как общий результат, а анализ случая $TS = TSC$ по смыслу особо не отличается от анализа постановки FSC, о которой речь пойдёт ниже во введении.

Таким образом, остаётся лишь случай TEC, причём он, по аналогии с постановкой FEC, дробится далее на подслучаи. Только одна из его модификаций изучалась до сих пор. Конкретно, на сегодня проведён исчерпывающий анализ одного из подслучаев TEC для расселений с (не более, чем) двумя типами игроков.[19] Результаты анализа этого подслучая, тем не менее, включают в себя доказательство длиной более 30 страниц, и завершают основную часть диссертационной работы. Там обнаруживаются весьма удивительные вещи (не буду говорить, какие — когда до конца дочитаете, тогда и узнаете!).

Заключительная *глава 5* суммирует основные результаты, а также повествует о тех достижениях и планах, которые выходят за пределы логического "кубика Рубика" диссертационных постановок.

0.3.2 Основные результаты диссертационного исследования

Только что был упомянут некий таинственный "кубик Рубика".

Этот кубик строится следующим образом: сперва класс расселений, один из трёх F, D, T, декартово домножается на идеологию, тоже одну из трёх — оптимизация (без буквы), миграционная устойчивость M, коалиционная устойчивость C. Затем все блоки, за исключением оптимизационных, ещё раз домножаются на один из трёх принципов распределения издержек S, R, E. Не все 27 ячеек кубика-рубика различны (ибо оптимизационные блоки так и остаются без дробления), зато некоторые из ячеек с буквой

[19] В этом случае совершенно неважно, чему равно d и какая задана на $\mathbf{R}^d$ норма: всё рассмотрение фактически происходит вдоль прямой, соединяющей наши "два города", а на прямой все нормы одинаковы и пропорциональны обычному модулю.

E содержат подслучаи, то есть в одной ячейке может жить несколько различных постановок.

Но в общем и целом такой подход помогает структурировать и систематизировать все полученные в работе результаты.

В каждом случае-ячейке я старался придерживаться следующей схемы (хотя и не всегда это удавалось осуществить). Первым делом ставится вопрос о том, нет ли для изучаемой спецификации задачи общей теоремы существования устойчивого разбиения. Если есть, то на этом, как правило, анализ заканчивается — до подробностей типа "алгоритмы нахождения устойчивого решения" речь не доходит. (Единственное исключение — тривиальный случай RC, где ход доказательства теоремы существования подсказывает и алгоритм решения задачи.) В некоторых сюжетах устойчивое решение сравнивается с оптимальным.

Как правило, в тех случаях, в которых нет доказательства, есть, наоборот, контрпример. Тогда я его привожу с самым подробным доказательством. Однако в таких случаях на этом дело может не закончиться: иногда изучаются классы постановок, в которых существование решения можно доказать. Обычно это бывают постановки с равномерным расселением. Их анализ бывает довольно муторным — но всегда остаётся в рамках элементарных методов.

Также изучаются свойства интервальности решений для постановок на обычной прямой. Для постановки T с двумя типами игроков проведена полная классификация устойчивых решений в зависимости от реализаций параметров расселения, но это единственный такой случай. Большинство постановок изобилуют нерешёнными вопросами и неотвеченными вызовами!

Ниже в форме перечня, разбитого по случаям, приведены все постановки, рассмотренные и частично решённые в диссертации. В скобках указаны разделы, в которых соответствующий(е) результат(ы) могут быть найдены. Вот как описательно выглядит „кубик Рубика" из исследуемых в работе вопросов и полученных результатов .

F**:** постановка, двойственная переформулировка, лемма о медиане, концепция интервальности для $d = 1$ (глава 1, разделы 1.1 и 1.2);

FRM: определение, контрпример даже при $d = 1$. Случаи DRM и TRM в работе не разобраны — в обоих недавно доказана общая теорема существования, готовится к печати (раздел 1.3);

FRC: общая теорема существования устойчивого разбиения, неинтервальность для $d = 1$. Отмечено существование решения для случаев DRC и TRC с похожими доказательствами (раздел 2.2);

$FS(C)$: определение решения, интервальность и оптимальность всех устойчивых разбиений. За компанию закрыт случай TSC, а случай FSM не рассматривается, как и случаи DSM и TSM (раздел 2.2);

FEM: контрпример для $FEFM$, существование для равноотстоящего расселения, теорема существования для $FEMM$, интервальность, разъяснения для многомерного случая (разделы 1.3 и 1.4);

FEC: куча мелких наблюдений и существование для $n \leq 4$, контрпример и неинтервальность для $FEFC$, полная независимость $C-$ и M-устойчивости, контрпример для $FEMC$, универсальный контрпример для всех постановок ($FEAC$), существование для равноотстоящего расселения (разделы 2.3 и 2.4);

D: постановка, двойственная формулировка, лемма о медиане, модификация угроз устойчивости (раздел 3.1);

$DS(C)$: равномерное расселение на бесконечной во все стороны плоскости, характеризация “0.0018-ядра” (раздел 3.3);

DEM: теорема существования для любого непрерывного расселения на отрезке, анализ равномерного расселения на отрезке (разделы 3.2 и 3.4);

DEC: анализ устойчивых структур для равномерного расселения на отрезке (раздел 3.4);

T: постановка, понятия коалиционного и группового шаблона, модификации определений теоретико-игровой устойчивости (раздел 4.1);

TEM: есть наработки (потенциальность игры !), не вошедшие в текст диссертации;

TEC: полный анализ случая $TEMC$ для двух типов, при этом случай $TEFC$ не изучался совершенно, как и случай более, чем двух типов игроков (разделы 4.2 и 4.3).

Для удобства изучения диссертации перечень, приведённый выше, представлен в форме двух таблиц, так сказать “горизонтальных срезов” теоретико-игрового подбруса изучаемого кубика Рубика.

Таблица 1. Анализ коалиционной (C) устойчивости разбиений

	S	R	C
F	FSC, разд. 2.2 и 1.4	FRC, раздел 2.2	$FEFC$, $FEMC$, $FEAC$: 2.3 и 2.4
D	DSC, раздел 3.3	DRC, похож на FRC	DEC, раздел 3.4
T	TSC, почти FSC	TRC, похож на FRC	TEC, разделы 4.2 и 4.3

Таблица 2. Анализ миграционной (M) устойчивости разбиений

	S	R	C
F	FSM, не рассм.	FRM, раздел 1.3	$FEFM$ и $FEMM$, разд. 1.3 и 1.4
D	DSM, не рассм.	DRM есть, но не привед.	DEM, разделы 3.2 и 3.4
T	TSM, не рассм.	TRM есть, но не привед.	TEM, не доказан

0.4 Обзор литературы по смежным направлениям

Остановимся на обзоре литературы, чтобы обрисовать, каким образом результаты диссертации вписываются в конструкцию научного здания.

Помимо уже цитированных основополагающих статей, есть ещё довольно много работ, находящихся в той или иной степени родства с настоящим исследованием. Ниже приведён обзор статей, относящихся к нескольким основным родственным ветвям современной научной мысли — математической, экономической, и даже вычислительной. Обзор литературы, приведённый ниже, содержит лишь часть нужных ссылок, другая же их часть разбросана по главам самой диссертации, в тех случаях, когда такое расположение казалось более естественным.

0.4.1 Вокруг UFLP: дробная релаксация и зазор устойчивости

Задача о размещении мощностей подробно рассмотрена, как уже отмечалось выше, в [58], как части книги-сборника статей по дискретной теории размещения [111]. Её формулировка в урезанном виде была приведена выше. Если же рассматривать её в более общей форме, то нужно считать фиксированные затраты на открытие и поддержание мощностей различными для разных вариантов из X. Помимо UFLP, существует родственная задача CFLP, которой мы не касались (см. там же в [58]).

Задача UFLP является NP-трудной (что продемонстрировано в вышеупомянутой работе), и даже $\max SNP$*-трудная* ([82]), то есть существует такая константа, что задача приближения к максимуму ближе, чем на эту константу (в процентном отношении от общего диапазона принимаемых на допустимых планах значений) является NP-трудной. Однако константа эта очень близка к единице, и целый ряд авторов гонялся за этой константой. Впервые нетривиальная константа была получена в [127], затем улучшена в [56]. Погоня ведётся до сих пор.

Ещё одна вычислительная проблема, связанная с задачей UFLP, примыкает непосредственно к теме диссертационного исследования. Расскажем о ней более подробно, ибо фактически этот сюжет составляет содержание ячейки FSC, единственной из 18-ти “теоретико-игровых” ячеек, изученных достаточно хорошо до настоящего исследования.

Предположим, что в формулировке (1) задачи UFLP вместо однозначной функции прикрепления $h(\cdot)$ разрешается перебирать все *матрицы* прикрепления q_{ij} потребителя i к мощности j, неотрицательные и *стохастические*, то есть для любого i имеем $\sum_j q_{ij} = 1$. Кроме того, разрешается использовать любую мощность “не на полную мощность”, а на произвольную долю $f_j \in [0,1]$ от полной загрузки (в последнем случае мы потребуем $\forall i \quad q_{ij} \leq f_j$).

Такая модификация задачи UFLP называется *дробной*; на вербальном уровне она уже обсуждалась в вышеприведенном сюжете с бассейнами.

Понятно, что значение в такой задаче (сводящейся к классичекой задаче линейного программирования в работах [114], [124], посвящённых анализу более общего класса *задач назначения*) не может превышать значения в исходной, классической задаче UFLP,[20] но возможно и строгое снижение значения целевого функционала. Зазор между значениями целочисленной (обычной) и дробной задач UFLP получил название *integrality gap*, "целочисленный зазор"; этот зазор как раз и был подвергнут приближённому вычислению.

Более того, именно целочисленный зазор и находится в центре внимания сюжета FSC, о чём мы сейчас и поговорим. Прежде всего отметим, что для дробной модификации UFLP также можно задать вопрос коалиционной устойчивости получаемых решений.[21] А именно, по дробной задаче UFLP строится кооперативная игра — каждой коалиции S сопоставляется не что иное, как значение дробной задачи, решаемой только для членов коалиции S. После этого ставится вопрос о непустоте ядра.

Универсальный ответ — ядро всегда непусто (!) — получен впервые в работе [91], затем для общих игр назначения в статье [119]; более того, в упомянутых работах приводится конкретный рецепт получения векторов распределения издержек, лежащих в ядре. А именно, нужно записать двойственную задачу линейного программирования: любой её оптимальный план задаёт распределение, лежащее в ядре. Комбинируя идеи и методы предшественников, мы в статье [100] показываем, что ядро *совпадает* с пространством решений двойственной задачи UFLP. Этот финальный аккорд полностью закрывает дробную постановку как UFLP, так и любой конкретной задачи многомерного размещения (легко понять, что это утверждение без потери общности переносится и на постановки непрерывного класса, D и T).

Вооружившись полным решением дробной задачи UFLP, мы можем вернуться к изучаемой в диссертации целочисленной ЗМР, метрического

[20] Ибо любое решение исходной задачи UFLP является допустимым планом и для её дробной версии.

[21] Вопросы устойчивости относительно угроз миграционной природы здесь не столь понятны с точки зрения формализации; отметим здесь лишь то, что попытка адекватно их определить сразу же приведёт к хорошо известной экономистам концепции *цен Линдаля*, см., например, [110], стр. 363-364. При таком подходе становится ясно, что для дробной задачи UFLP миграционные угрозы преодолимы, впрочем, как и коалиционные (подробности можно прочитать в работе [101]).

конечномерного воплощения идеи UFLP. Но сперва, в свете вышесказанного, скажем пару слов про общую задачу UFLP. В работе [71], на которую мы уже ссылались и будем ещё ссылаться в дальнейшем, доказана следующая теорема: *коалиционно устойчивые решения задачи UFLP существуют в том и только том случае, когда целочисленный зазор равен нулю*, иными словами, когда дробная релаксация задачи не нужна.

Более того, в общем случае *целочисленный зазор равен минимальному значению δ, при котором δ-ядро непусто.* Поясним сказанное (см. [108] для более подробного ознакомления с этой теорией). Если ядро (определение и обсуждение см. в разделе 2.1 главы 2) в коалиционной игре пусто, то можно попытаться субсидировать игроков пропорционально их издержкам в том случае, если они не образуют отклоняющихся коалиций. Если же какая-то группа хочет отклониться, то она теряет эту "государственную субсидию". δ-ядром называется множество распределений издержек, устойчивых при субсидии размера $\delta \in [0, 1]$.

При некотором минимальном значении субсидии ядро становится непустым; в этот момент оно называется "минимальным ядром" (least core в работе [108]). Десятью годами ранее, Шмейдлер в [125] ввёл понятие *нуклеолуса*; авторами [108] было доказано, что этот вектор (нуклеолус) всегда лежит в минимальном ядре. Так вот, из сказанного выше следует тот факт, что минимальное ядро является δ-ядром при δ, совпадающим с целочисленным зазором между дробной и стандартной постановками UFLP.

Поэтому оценка зазора устойчивости, как его ещё называют, является особо важной задачей для анализа. Для произвольных постановок UFLP этот зазор может оказаться сколь угодно большим (не ограничен сверху ничем, кроме тривиальной константы 1).[22] Однако задача многомерного размещения, исследуемая в работе, обладает дополнительными свойствами, позволяющими получать более аккуратные и оптимистические оценки.

Начнём с предположения, что исходная задача UFLP является *метрической.* Последнее означает, что N и X уживаются внутри одного и того

[22]К сожалению, я не смог найти ссылки на этот результат; на вскидку он кажется очевидным, но, возможно, таит в себе подводные камни.

же метрического пространства, и расстояния c_{ij} берутся из него же.[23] Аккуратный анализ целочисленного зазора для метрических постановок UFLP выполнен в работе [130], где показано, что этот зазор уже чем-то содержательно ограничен. После этого оценка на максимально возможный зазор в метрических постановках была несколько раз улучшена, последний известный мне результат — где-то в районе $1/3$, см. работу [129].

Однако задача, изучаемая в настоящей работе, "живёт" не в абы каком метрическом пространстве, а в конечномерном и нормированном. Это может накладывать дополнительные ограничения на зазор. Ничего про самую общую постановку сказать не могу, но в разделе 3.4 третьей главы этот зазор вычислен для равномерного расселения на плоскости. Примечательно, что он ничтожно мал, и составляет величину, приблизительно равную 0.002.

0.4.2 Обзор других родственных теорий и областей науки

Кратко расскажем об исследованиях, оказавших влияние на научную работу автора, а также во многом дополняющих результаты, представленные к защите. Разобьём все ссылки условно на несколько тематических разделов.

Классическая теория пространственного размещения.

Впервые "задача о многомерном размещении", начиная с работы [55], возникла в работах немецкой довоенной школы, посвящённых теории оптимального размещения сети пунктов обслуживания на равномерно заселённой плоскости (см. также целую книгу [106]). Грубо говоря, нужно наиболее экономным способом раскидать сеть больниц, филиалов, банков, домов быта и т.п.

Стоимость поддержания пункта обслуживания фиксирована; также предполагается, что стоимость достижения пункта каждым из жителей этого "мира" равняется расстоянию от адреса проживания жителя до адреса пункта назначения. Словом, речь идёт о задаче двумерного размещения с равномерным расселением по всей плоскости целиком.

[23]Можно показать, что метричность эквивалентна выполнению неравенства $c_{ij} + c_{lj} + c_{ik} \geq c_{lk}$ при всех $j, l \in N$ и $j, k \in X$. Об этой эквивалентности мне рассказал математик Фёдор Петров из Санкт-Петербурга, которому я за это очень благодарен!

Проблема состоит в точной формулировке задачи, ведь минимизируемый функционал в любом допустимом решении бесконечен. По мере того, как математика становилась всё более изощрённой, доказательство основного результата (см. ниже его формулировку) также становилось всё строже и строже. Вот далеко не полный список работ, авторы которых уточняли в разное время формулировку этой воистинну “народной теоремы” и её доказательство: [11], [55], [106], [48], [88], [113], [128], [69]. Основной результат таков:

> **Теорема Ноль.** Если предполагать, что расселение людей (т.е. распределение спроса) равномерное и заполняет всю бесконечную плоскость, то *единственным*[24] решением задачи многомерного размещения для обычной евклидовой нормы является сеть пунктов в центрах регулярного шестиугольного разбиения плоскости.

Связь с теорией Тьебу

Выше мы уже упоминали великого американского теоретического географа со звучной фамилией, Чарльза Тьебу. Его визитная карточка, работа [131], смотрит на проблему формирования юрисдикций под “теоретико-игровым углом”: если имеется уже каким-либо способом сформированное множество юрисдикций, то потребители “голосуют ногами”, выбирая оптимальную с точки зрения их предпочтений юрисдикцию для проживания.

Заметим, что как в статье Тьебу, так и в настоящем диссертационном исследовании, речь не обязательно идёт о физическом перемещении: роль географии играет “пространство характеристик” юрисдикций.

Тьебу в своей работе не привёл математической формализации конфликта, фактически не доказал, что его идея может привести к равновесному состоянию экономики, чем вызвал целый ряд попыток уточнения его идей. Работы [137], [135], [75], уже упомянутая [36] и многие другие пытались “доказать” гипотезу Тьебу в различных вариациях намеченной им в описательных терминах модели.

[24] Здесь-то и таится самая большая проблема!

Две последние работы, в которых "голосование ногами" предполагается коллективным действием, то есть целые группы потребителей могут одновременно перемещаться из юрисдикции в юрисдикцию, имеют непосредственное отношение к результатам диссертации; об одной из них было сказано выше, а другая появится в нужном месте соответствующей главы работы.

С гипотезой Тьебу связано ещё (как минимум) одно важное соображение.

Вертикальная дифференциация в модели Тьебу.

В своей работе [131] Тьебу не уточнял, какого рода конфликт в предпочтениях резидентов подлежит рассмотрению. Имеется ли в виду количественное, качественное или иное различие в обеспечении локальным общественным благом жителей той или иной юрисдикции?

Оказывается, что конфликт и его разрешение протекает очень по-разному в зависимости от ответа на поставленный вопрос.

А именно, в голову сразу приходят два альтернативных варианта ответа (а все прочие ответы как бы раскладываются "по осям этих двух"). "Исторически первый" по моим ощущениям (и по годам соответствующих публикаций) вариант ответа на поставленный вопрос состоит в том, что разные юрисдикции поставляют общественные блага разного *качества* (или *количества*, что в данном случае приводит к той же самой математике!): в одних юрисдикциях жить *лучше*, чем в других. Как правило,[25] это сопровождается разным уровнем налогообложения: ради хорошей жизни нужно больше "отстёгивать". И тогда в юрисдикции с высоким качеством проживания (высоким уровнем поставки локального общественного блага) будут ехать люди, ценящие это качество и готовые за него платить. "Пофигисты" же "отберутся" в те районы, где уровень сервиса невысокий (соответственно и уровень налогов ниже).

Такая постановка задачи называется случаем *вертикальной дифференциации общественного блага.* Укажем основные публикации в данном направлении исследований. Работа [135] является "вертикальным" вариантом раздела 3.2 настоящей работы: в ней существование миграционно устойчивого разбиения на группы доказывается для равномерного распределения вдоль

[25] Но в реальности не всегда.

параметра вертикальной дифференциации. У меня есть гипотеза, что приведенное в диссертации доказательство с использованием леммы Гейла-Никайдо-Дебрэ покрывает и тот случай, но пока это аккуратно не проверено.

Целый ряд работ посвящён различным аспектам вертикальной дифференциации, учитывающим эффект переиспользования блага, конкретизирующим начальные данные и т.д. Просто перечислим их: [79], [81], [136], [137], [133], [74], [89], [90], [75]. Большинство из них возникло из анализа различных схем налогообложения — вопроса принципиальной важности для постановки вертикальной дифференциации.

Выделим работу [49], в которой рассмотрена страна, состоящая всего из двух регионов (субъектов). Угроза распада (повышающего издержки обеих стран) вынуждает применять политику субсидирования одного региона другим, повышать налоги, и тем не менее не может устранить угрозу распада во всех случаях. Но в этой работе различны не предпочтения регионов, а их доход.

Такой подход является своего рода “вертикальным аккомпанементом” к базовому для нас подходу, принятому в обсуждавшейся выше статье [36]. И раз уж мы тут снова вспомнили о последней, то переходим ко второму варианту ответа на вопрос о природе конфликта в модели Тьебу.

Горизонтальная дифференциация поставляемого общественного блага немедленно приводит нас к моделям, вплотную примыкающим к рассмотренным в диссертации. В самом деле, горизонтально дифференцированное благо по определению подразумевает разные предпочтения разных потребителей на пространстве всех разновидностей (на пространстве разногласия, следуя принятой нами терминологии). В “вертикальном” случае все полагают, что “лучше пусть будет лучше”, но не все согласны за это платить. В горизонтальном случае параметры дифференциации скорее являются вкусовыми или географическими: кому что ближе, тому то и милее, и деньги тут уходят на второй план.

Упомянем четыре работы, посвящённые случаю горизонтальной дифференциации в модели Тьебу: [77], [78], [76], [80] (ниже в разделе, посвящённом непосредственно результатам-предшественникам, будут указаны и обсуждены ещё несколько работ). Здесь отметим первую из них: в работе [77] показывается, что если не следовать принципу медианы внутри групп, то коалиционно-устойчивое разбиение на группы существует в постановке FEC на прямой для любых (конечных) расселений. Остальные три работы посвящены анализу постановок на прямой с видоизменёнными, по сравнению с принятыми в настоящем исследовании, предположениями модели.

Поставка клубных благ

Ещё одна ветвь литературы, относящаяся скорее к "вертикальному" срезу наследия Тьебу [131], посвящена конкретике монетарно-вкусового конфликта, и носит название "теории клубных благ" (club theory).

Клубное благо — это такое общественное благо, доступ к которому можно ограничить либо даже запретить, дискриминируя в этом отношении любых пользователей. Но название уводит нас в сторону от содержания теории: если судить по названию, то это просто ещё один термин для рассматриваемой в настоящей работе задачи и её вариантов.

На деле же ситуация иная.

А именно, зачастую суть происходящих разногласий оказывается важнее общих результатов "для всех похожих постановок". И вот если работа посвящена какому-нибудь конкретному виду общественного блага, типа "институт" ([22]), "язык общения" (наша статья [12]), "общественный проект" ([109]), или же определённым аспектам либо категориям общественных благ ([52], [105], [120]), то её принято относить как раз к теории клубных благ.

Политическая экономика

В свою очередь, от теории клубных благ отпочковалась и современная политическая экономика, один из основных полигонов приложения для теоретических конструкций диссертации. В самом деле, с точки зрения методического индивидуализма государство — это не что иное, как один из видов клубного блага: паспорт является входным билетом к предоставляемым благам, но и наставлением к уплате налогов за них.

Оставляя за бортом прочие аспекты, в том числе и сакрально-мистические, составляющие на самом деле категорию "государство", сосредоточимся на этом узком определении. Конфликт (trade-off) между выигрышем от деления издержек на содержание правительства, с одной стороны, и неудовлетворённостью политикой, проводимой последним (особенно в удалённых регионах), с другой, сформулирован в публицистической заметке [41].

Алесина и Сполаоре [36], Болтон и Ролан [49], о которых уже с разной степенью подробности говорилось выше, продолжают данную линию рассуждений. Туда же можно отнести и работы [134], [37], [35]. В последней из процитированных работ делается попытка *оцифровать* конфликт между белым и чёрным населением США — по меркам современной Америки это достаточно смелый шаг!

Другие разделы, соприкасающиеся с ЗМР и UFLP

Здесь мы очень кратко упомянем (скорее, даже перечислим) исследования, посвящённые различным вариантам и модификациям задачи размещения мощностей неограниченной вместимости (UFLP), безотносительно к угрозам теоретико-игровой природы в последней.

Одной из ветвей UFLP является задача оптимального размещения с учётом предпочтений клиентов, см. [7], [15], а также ссылки в последней процитированной (диссертационной) работе, например, [8], [9]. Это научное направление рассматривает ситуацию, когда исходно заданы не зависящие от состава коалиции значения ценности для каждого из игроков от прикрепления к тому или иному пункту обслуживания (в дополнение к издержкам прикрепления).

Решаемая в работах данного направления задача — по-прежнему оптимизационная, просто с более сложной системой ограничений.

В диссертационной же работе автора оценка игроком прикреплённости к тем или иным мощностям существенно зависит как от состава группы, так и от выбора схемы распределения издержек, принятой в группе и в обществе в целом. Так сказать, (не)удовольствие эндогенизируется (что критически важно именно для теоретико-игровых постановок).

Задачи размещения логистических объектов также можно рассматривать в качестве (непрерывной) версии задачи многомерного размещения. В этом направлении работает целая команда: [20], [2], [14], в основном авторы упомянутых работ интересуются алгоритмическими аспектами проблемы. В работе [27] приводится теоретическое обоснование изучаемой оптимизационной задачи.

Ну и напоследок отметим, что ЗМР может рассматриваться как один из способов кластеризации или зонирования, наряду с методом плавающих ядер и K-медиан [28]. Здесь уместно упомянуть о работах [115], [21] и [107]. В первой работе кластеризации подлежит ни много ни мало, как вся Западная Европа; вторая и третья публикации посвящены вопросам из других областей знания, но приводящим логичным образом к необходимости кластеризовать "фазовое пространство" задачи.

0.4.3 Результаты, непосредственно примыкающие к полученным в диссертационном исследовании

В этом завершающем вводную главу разделе я приведу описание результатов, имеющих непосредственное отношение к полученным в диссертационном исследовании. Таким образом, мы будем вести изложение уже в рамках поставленной выше задачи многомерного размещения и теоретико-игровых угроз устойчивости в ней.

В работе [102] рассматривается равномерное расселение на отрезке с таким параметром g, чтобы решением ЗМР служила тотальная коалиция. Затем ставится и положительно решается вопрос о существовании схем компенсации, предотвращающих коалиционные угрозы (то есть задача решается в условиях FSC). Показано, что перераспределительные схемы должны лишь частично компенсировать субъекты, находящиеся в рамках данной страны в невыгодном положении. Работы [84], [86], [94] и [87] продолжают это направление исследований.

Схемы распределения вообще являются центральным местом теории. Часто их *эндогенизируют*, как, например, это сделано в [65] на прямой. Последняя из процитированных работ вдохновила нас с соавторами на подвиг по выходу на плоскость, см. раздел 3.3 и нашу работу [66].

Статья [83] посвящена анализу устойчивых групповых структур при фиксации правила внутригруппового выбора вида деятельности. Аналогично, в уже упомянутой работе [77] рассматриваются механизмы принятия внутригрупповых решений, отличные от медианного. Интересно отметить, что большинство стран мира не позволяет просто так отделиться региону, см. [64]!

Случай FSC на прямой допускает общую теорему существования коалиционно устойчивых групповых структур. Работы [85], [71], [62] и [103] устанавливают этот факт и обсуждают его с нескольких различных точек зрения. Оказывается, что в этом случае коалиционно устойчивыми являются оптимальные структуры и только они (см. также обсуждение в разделе 2.2).

Переходим к обсуждению случая FEC. Помимо уже многократно упоминавшейся работы [36], постановкой FEC на прямой занимались авторы работ [89], [90], [53]. В последней из них анализ устойчивых структур проводится для равномерного расселения на *окружности*; там появляются дополнительные тонкости.

Общий результат существования коалиционно устойчивого решения для одномерного расселения в постановке DEC на сегодня установлен для любых расселений с монотонной плотностью в [24]. Ниже в работе приводится ряд контрпримеров для произвольных расселений, они все почерпнуты из работ [45], [47]. Ранняя работа, посвящённая случаю FEC, но не в точности ЗМР, а похожая постановка, – это статья [59].

Постановки с литерой M, то есть изучающие миграционно устойчивые разбиения, намечены и анализируются в работах [92], [96], [93], [95], [97]. Во всех случаях сделаны дополнительные предположения, либо рассмотрены специальные классы расселений, поэтому доказанная в разделе 3.2 общая теорема из статьи [30] является следующим шагом в этом направлении (в литературе до этого не появлялась).

Отметим, что в задаче TEM, возможно, при доказательстве теоремы существования удастся воспользоваться общей теоремой из [126], используя идеи, изложенные в нашей работе [32]. Но это уже в будущем.

Несколько иные требования на устойчивость, нежели вводимые в диссертационной работе, помимо [36], анализируются в целом ряде работ коллег: [90], [54], [6], [5], [4], [3], [132], [33], а также в наших работах [44], [46]. Интервальность решений является предметом анализа в [51], а логичность принципа Ролса и его последствия анализируются в [43], [68] и [40].

Завершаем же мы вводную главу цитированием тех великих прозрений, которые служат обоснованием теоретических конструкций моей работы.

С теоретико-игровой точки зрения речь в постановках с литерой C идёт о (не)пустоте *ядра в форме разбиения на коалиции* — понятия, введённого в статье [39]. Программа, намеченная в [104], служила “прообразом” и вдохновляющим маяком для доброй половины диссертационной работы. Мастерству в общении с пространством разбиений меня научили работы [73] и [76]. Работать с неатомарными играми меня обучила превосходная книга [1], позволившая продраться через трудную математику в нашей работе [116].

Для общего образования также очень пригодилась статья [38], без неё не родилась бы статья [31], благодаря которой я познакомился с профессором Шломо Вебером, после чего и началась работа над темой диссертации. Работа [10] лет 15 назад меня повергла в напряжённые раздумья, облегчившие затем понимание области, к которой относится диссертационное исследование.

Наконец, автор [72] обещал меня зарезать, если я не пришлю ему свою диссертацию на английском языке, а его великие идеи я продолжил изучать по работе [61]. Обещание он пока не выполнил, хотя ничего с моей стороны ему прислано не было! Впрочем, живёт он в Париже.

Глава 1

Случай F: дискретная (конечная) задача многомерного размещения

Основные результаты диссертационной работы изложены в четырёх главах — первой, второй, третьей и четвёртой. Каждая из этих глав открывается кратким описанием её содержания, прямо по разделам. Фактически, начиная с текущей главы 1, диссертацию можно читать независимо от предыдущей (вводной) главы. Все необходимые математические формулировки приводятся ниже.

В настоящей и следующей главах будет подробно разобран случай, когда участников рассматриваемого конфликта — конечное число. Несмотря на то, что почти все практические приложения изучаемой задачи имеют дело с немыслимо большим количеством участников — многими миллионами (то есть с такой ситуацией, которая более адекватно описывается моделями с континнумом игроков), конечный случай выделяется простотой формулировок. Он задаёт, так сказать, точку отсчёта (reference point) для дальнейшего анализа.

Мы начнём с формализации оптимизационной задачи, лежащей в основе диссертационного исследования — задачи многомерного размещения, сокращённо ЗМР (раздел 1.1). Затем (в разделе 1.2) мы переходим к анализу теоретико-игровых угроз устойчивости решениям ЗМР, как оптимальным, так и любым допустимым.

Для этого нам потребуется доопределить задачу многомерного размещения *принципом распределения издержек.* Любой такой принцип предписывает, как распределить издержки на функционирование всех мощностей между всеми игроками, а также, возможно, какая степень (и конкретный вид) компенсации за удалённость от мощностей разрешена. В работе исследуется три основных таких принципа распределения издержек. Выбор определённого принципа позволяет формализовать теоретико-игровые угрозы устойчивости.

В первой главе исследуются угрозы миграционной природы. Разделы 1.3 и 1.4 посвящены результатам, относящимся к миграционной устойчивости разбиений в постановке F: раздел 1.3 содержит два контрпримера (то есть конкретные примеры расселений, причём на обычной прямой, при которых миграционно устойчивые решения доказуемо отсутствуют), а также теорему об интервальности любого миграционно-устойчивого разбиения на группы (при двух принципах, из изучаемых трёх принципов распределения издержек).

Угрозы коалиционной природы составляют предмет анализа в главе 2. Здесь я не буду останавливаться на более подробном описании содержания второй главы — ибо такое описание приводится во введении к последней.

1.1 Постановка задачи в конечном случае

Задача многомерного размещения формулируется следующим образом:

Задан конечный набор точек $(x_1, \ldots, x_n)$ *координатного вещественного* d*-мерного пространства:* $\forall i = 1, \ldots, n$ *имеем* $x_i \in \mathbf{R}^d$. *Объемлющее пространство* $\mathbf{R}^d$ *снабжено нормой* $||\cdot||$, *не обязательно евклидовой. Требуется открыть несколько пунктов, или мощностей* $m_1, \ldots, m_k \in \mathbf{R}^d$, *и прикрепить к ним все точки с помощью* отображения прикрепления $h : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\}$ *с тем, чтобы минимизировать функционал*

$$kg + \sum_{i=1}^{n} ||x_i - m_{h(i)}||. \tag{1.1}$$

Пространство, на котором ищется минимум — это пространство, типовым элементом которого является пара, состоящая из конечного подмножества $\{m_1, \ldots, m_k\}$ *произвольной мощности* k, *а также одного из всех возможных отображений* $h : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\}$.

1.1.1 Пояснения, термины и обозначения

Прежде всего отметим, что в задаче многомерного размещения (в дальнейшем для последней будет часто использоваться аббревиатура ЗМР) объемлющее пространство предполагается нормированным. Несмотря на то, что на сегодня нет почти ни одного содержательного результата для норм, отличных от стандартной евклидовой, я предпочитаю поставить задачу в общем виде, с прицелом на будущее. В самом деле, для задач городского размещения, например, более естественной представляется *Манхэттэнская норма* (см. ниже), не говоря уже о том, что некоторые результаты общезначимы для любых норм (в диссертации таковы, например, разделы 4.2 и 4.3).

В любом учебнике по функциональному анализу приводятся примеры норм, типичных для анализа и важных в приложениях. Воспроизведём их здесь (ниже $y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbf{R}^d$):

1. Евклидова, или стандартная, норма, она задаётся формулой

$$||y||_2 = \sqrt{\sum_{q=1}^{d} y_q^2}; \tag{1.2}$$

2. “Манхэттэнская” норма — это сумма модулей координат, как если бы можно было передвигаться только параллельно осям. Название связано с конфигурацией улиц в известном районе Нью-Йорка:[1]

$$||y||_1 = \sum_{q=1}^{d} |y_q|; \tag{1.3}$$

3. Макс-норма — максимальный модуль координат, как при передвижении по доске по правилам “шахматного короля”:

$$||y||_\infty = \max\{|y_q|\}. \tag{1.4}$$

Все эти нормы являются частными случаями одной общей конструкции в теории нормированных пространств, l*-нормы*:[2]

---

[1] В России можно было бы назвать такую норму *екатеринбургской.*

[2] Макс-норма является пределом l-нормы при $l \to +\infty$.

$$||y||_l = \left(\sum_{q=1}^{d} |y_q|^l \right)^{\frac{1}{l}} . \tag{1.5}$$

Видно, что сформулированная задача практически повторяет задачу (1), сформулированную в разделе 0.2 вводной главы, но с маленькой оговоркой: множество X, участвующее в задаче (1), у нас является бесконечным, и это усложняет задачу, на первый взгляд. На самом же деле задача таким образом упрощается, ибо множество $X = \mathbf{R}^d$ диктует способ построения матрицы $c_{i,j}$: само N отображается в X посредством набора адресов $(x_1, \ldots, x_n)$, после чего матрица $c_{i,j}$ “вырезается” из функции расстояния, измеренного в заданной на $\mathbf{R}^d$ норме $||\cdot||$.

Любой элемент фазового пространства задачи (пространства, на котором осуществляется минимизация функционала) мы назовём, как обычно, *допустимым планом*, или *решением*. Существует два крайних случая решения задачи: когда $k = 1$ (создаётся только один пункт, все прикрепляются к нему), и когда $k = n$ (каждый человек получает доступ к благу там, где живёт, $h(\cdot) \equiv id$). Рассматривать решения при $k > n$ с точки зрения оптимизации бессмысленно. Как правило (“в разумных постановках”) минимум достигается строго внутри этих двух экстремалей: $1 < k < n$.

Как и при решении задачи (1) из раздела 0.2, можно перебирать при поиске минимума просто непустые подмножества $\{m_1, \ldots, m_k\}$, потому что в любом решении задачи (1.1) функция прикрепления $h(\cdot)$ после этого будет иметь вид *прикрепления к ближайшей мощности*:

$$\forall i \in N \quad h^*(i) \in Arg \min_{j=1}^{k} ||x_i - m_j||; \tag{1.6}$$

неопределённость в выборе самой дешёвой мощности можно разрешить любым способом. Таким образом, эквивалентная формулировка нашей задачи принимает следующий вид:

$$\min_{\{m_1, \ldots, m_k\}} \left\{ gk + \sum_{i \in N} ||x_i - m_{h^*(i)}|| \right\} , \tag{1.7}$$

где при каждом i значение $h^*(i)$ берётся из решения задачи (1.6).

Терминология. В дальнейшем множество $\{1, \ldots, n\}$ мы назовём множеством "людей", или "игроков", или "жителей", или "резидентов" (города, страны, района), и обозначим его за N, тогда $n = |N|$ — мощность множества игроков. Вышеупомянутые термины для обозначения элементов множества N будут употребляться везде в дальнейшем синонимично, взаимозаменяемо (наряду с ещё одним термином — "участник").

Жители страны будут обозначаться за i, где $i = 1, 2, \ldots, n$; порядок изначально не задан, но бывает так, что он естественно определён начальными данными (например, если все люди проживают на прямой в разных точках). Всегда предполагается, что на N задана "равномерная" вероятностная мера, при которой каждый игрок имеет меру (вес), равную $\frac{1}{n}$.

Во всём дальнейшем анализе центральную роль будет играть понятие *коалиции*. В рассматриваемом в настоящей и следующей главах конечном случае (случае F) коалицией мы всегда будем называть *любое* непустое подмножество N. Иногда мы будем коалицию называть *группой* (лиц, игроков и т.д.) — как правило, это будет происходить по отношению к элементам *разбиения* (см. ниже обсуждение этого понятия). Наконец, местоположение i-го участника, x_i, чаще всего будет называться "точкой", иногда "локацией", "адресом" или даже "домиком" игрока i.

Задача (1.1) допускает двупараметрическую группу симметрий. А именно, можно растягивать g одновременно со шкалированием нормы $||\cdot||$, а также растягивать g одновременно с гомотетией пространства $\mathbf{R}^d$, при которой адреса проживания $\{x_i\}_{i \in N}$ будут все вместе растягиваться либо сжиматься. При фиксированной норме это позволяет положить $g = 1$ (или любой другой удобной константе).

Помимо этого, любая норма оставляет возможность произвольным образом параллельно переносить весь "ансамбль" адресов $(x_1, \ldots, x_n)$ внутри объемлющего пространства $\mathbf{R}^d$, а в основном для наших рассмотрений евклидовом случае — ещё и произвольным образом вращать (инвариантность относительно полной группы движений аффинного d-мерного евклидова пространства).

Б‘ольшая часть результатов, полученных для случая конечного числа игроков, относится к ситуации $d = 1$, когда для каждого $i \in N$ задан адрес проживания $x_i \in \mathbf{R}$ *на прямой. В этом случае норма существует, с точностью до масштаба, только одна:* $||y|| = |y|$, *просто модуль вещественного числа. Соответственно и расстояния на прямой измеряются тогда обычным способом:* $|x_i - m_{h(i)}|$.

1.1.2 Переформулировка задачи

Для дальнейшего анализа нам будет полезно переформулировать задачу (ЗМР) эквивалентным образом, а именно в два этапа.

Для начала мотивируем это. Рассмотрим некоторое решение задачи (1.1), состоящее из набора $\{m_1, \ldots, m_k\}$ и функции прикрепления, $h^*(\cdot)$. Рассмотрим разбиение множества игроков N, индуцированное этим решением, то есть функцией h^*:

$$\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}, \tag{1.8}$$

где h^* постоянна на каждом S_l, $l = 1, \ldots, k$ и различна на разных S_l. Естественно, мы имеем

$$N = S_1 \sqcup S_2 \sqcup \ldots \sqcup S_k \tag{1.9}$$

— несвязное объединение подмножеств S_l, $l = 1, \ldots, k$ даёт всё множество игроков N. Все игроки из подмножества S_l прикреплены к одной и той же мощности m_l.

Можно ли по разбиению π восстановить оптимальное решение, состоящее из набора $\{m_1, \ldots m_k\}$ и отображения прикрепления h^*? Ответ: да, “почти всегда” можно. Поясняю сказанное.

Если известно, что некая группа лиц (резидентов) $S \subset N$ прикреплена к одной и той же мощности, к которой более не прикреплён никто из N, то в оптимуме надо выбрать её местоположение m самым экономным образом (с учётом того, что g, фиксированные финансовые затраты на открытие мощности, от m не зависят).

Иными словами, члены коалиции S должны решить **задачу поиска медианы для данной коалиции $S \subset N$:**

$$\min_{m \in \mathbf{R}^d} \left\{ \sum_{i \in S} ||x_i - m|| \right\}. \tag{1.10}$$

Эта мета-задача играет настолько важную роль во всей работе, что мы введём специальные названия и обозначения для всех связанных с ней переменных. Отметим (см. [17], стр. 382-388), что впервые такая задача была введена Пьером Ферма для трёх точек на плоскости, а затем подвергнута систематическому исследованию для произвольного плоского подмножества немецким математиком Якобом Штейнером в начале XIX-го века. Впоследствии интерес к ней поугас, ибо она заменилась на задачу поиска *нескольких* точек на плоскости, минимизирующих длину транспортной сети, соединяющей исходные точки. Но нам нужна именно оригинальная, штейнеровская постановка.

Любое решение этой задачи мы будем обозначать за $m[S] \in \mathbf{R}^d$ и называть *медианой* группы S (можно было бы называть его *точкой Штейнера*, но мы хотим, чтобы название отражало суть; кроме того, для подмножеств прямой такая точка действительно будет медианой в смысле [42], теории медианного избирателя). Значение целевого функционала на любом решении обозначим за $D[S]$.[3]

Множество всех медиан группы S мы обозначим за $M[S]$; саму же задачу (1.10) назовём задачей поиска (нахождения) медианы для данной коалиции. Задача эта всегда имеет решение, ибо целевой функционал в (1.10) непрерывен и уходит на бесконечность при неограниченном отдалении точки $m \in \mathbf{R}^d$ (последнее обстоятельство позволяет ограничиться компактом и сослаться на теорему Вейерштрасса).

По вопросу о возможной множественности решений, речь пойдёт ниже. Договоримся лишь, что в случае однозначного решения задачи, когда $M[S] = \{m\}$, точку m мы будем называть просто медианой группы (или коалиции) S, и обозначать её за $m[S]$.

[3] Также в литературе иногда используется обозначение $MAT[S]$ — сокращение от Minimal Aggregate Transportation.

В свете теоретико-игрового анализа ЗМР, мы введём модифицированную версию задачи (1.10), с поправкой на две вещи: прибавление стоимости открытия мощности g, а также деления всех издержек на количество членов коалиции S:[4]

$$c[S] = \min_{m \in \mathbf{R}^d} \left\{ \frac{g + \sum_{i \in S} ||x_i - m||}{|S|} \right\} = \frac{g + D[S]}{|S|}. \tag{1.11}$$

Таким образом, $c[S]$ обозначает величину средних общих издержек (монетарных плюс транспортных) для членов коалиции или группы S, при условии выбора оптимальной (медианной) локации для центра последней.

Теперь можно суммировать наши наблюдения в виде следующего утверждения (истинность которого следует из всего вышесказанного).

> **Утверждение** $F1$**.** В любом решении $\{(m_1, \ldots, m_k);\ h^*(\cdot)\}$ задачи (1.1) имеют место следующие два наблюдения:
>
> [i] разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}$, индуцированное функцией $h^*(\cdot)$ оптимального прикрепления (1.6), является дискретным аналогом *разбиения Вороного*[5] для сетки $(m_1, \ldots, m_k)$, а сами множества $\{x_i\}_{i \in S_j}$ при каждом $j = 1, \ldots, k$ — ячейками Вороного;
>
> [ii] каждая мощность m_j, где $j = 1, \ldots, k$, является одной из медианных локаций для множества S_j, то есть $\forall j = 1, \ldots, k \quad m_j \in M[S_j]$.

Заметим, что вне связи с решением задачи (1.1) сходу неочевидно, что можно вообще указать разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}$ множества игроков N, заданного произвольным набором адресов $(x_1, \ldots, x_n)$, $\forall i = 1, \ldots, n\ x_i \in \mathbf{R}^d$, вместе с набором локаций $(m_1, \ldots, m_k)$ таким образом, чтобы эта пара удовлетворяла взаимным требованиям расположения $[i]$ и $[ii]$ из предыдущего утверждения. Существование же решения задачи (1.1) сразу делает данный факт прозрачным!

[4]Операция минимизации коммутирует в (1.11) с другими используемыми операциями (сложения и деления), ибо при фиксированном составе коалиции S её численность $|S|$ (также как и константа g) инвариантны относительно выбора $m \in \mathbf{R}^d$ и на целевой функционал влияют монотонным образом. Множество же достижения минимума, часто называемое *аргминимумом* и обозначаемое через $Arg \min$, от монотонных преобразований задачи вообще не меняется.

[5]То есть разбиения по принципу прикрепления к ближайшей из имеющихся мощностей.

Переформулировка задачи многомерного размещения. Теперь всё готово для эквивалентной переформулировки ЗМР:

$$\min_{k;\ \pi=\{S_1,\ldots,S_k\}:\ N=S_1\sqcup S_2\sqcup\ldots\sqcup S_k} \left\{\sum_{l=1}^{k} |S_l| c[S_l]\right\} \tag{1.12}$$

Минимум теперь берётся просто по всем возможным разбиениям пространства игроков N на непересекающиеся коалиции (или группы), с заранее не заданным количеством групп в разбиении.

Именно это *пространство разбиений* будет играть во всём дальнейшем материале работы ключевую роль. Что касается целевого функционала, то он состоит в балансировании платы за поддержание k необходимых мощностей, по одному на каждую группу, и суммарных издержек прикрепления, предварительно оптимизированных внутри каждой группы путём выбора мощности в медиане (если их несколько, то в любой из них) каждой группы.

В новой формулировке ЗМР издержки на поддержание мощностей "вшиты" в определение средних суммарных издержек каждой группы S_l. Нам будет полезно интерпретировать задачу ЗМР как задачу оптимального дробления N, состоящую в минимизации усреднённых, с учётом размера, средних издержек внутри каждого "куска" дробления.

Сформулируем теперь точное утверждение об эквивалентности задач, истинность которого следует напрямую из утверждения $F1$.:

> **Теорема об эквивалентности формулировок ЗМР.** Рассмотрим задачи (1.1) и (1.12). Они эквивалентны в следующем формальном смысле: значения их целевых функционалов в точках оптимума совпадают, а между арг-минимумами (то есть множествами решений) двух задач имеется ниже описанная связь. А именно, для любого решения $[(m_1,\ldots,m_k);\, h(\cdot)]$ задачи (1.1) разбиение, индуцированное функцией прикрепления h, доставляет оптимум задаче (1.12), а для любого разбиения $\pi = \{S_1,\ldots,S_k\}$, доставляющего оптимум задаче (1.12) и для *любого* выбора медиан $m_l \in M[S_l]$ внутри каждой из групп S_l разбиения π, набор $\{m_1,\ldots,m_k\}$ вместе с функцией $h : N \to \{1,\ldots,k\}$, определённой по формуле $\forall i \in S_l \quad h(i) = l$, доставляет оптимум исходной задаче (1.1).

Данное утверждение позволяет говорить о нашей разновидности задачи ЗМР как о задаче поиска оптимального разбиения N на непересекающиеся группы. Единственная тонкость состоит в том, что медиан у данной группы (коалиции) S (то есть, решений задач (1.10), (1.11) может быть много. В последнем наблюдении кроется некоторое количество подводных камней, которые мы будем в течение этой и следующей глав “вылавливать”.

1.1.3 Лемма о медиане

Если бы медиана любой коалиции была единственна, то разбиение на группы однозначно определяло бы решение исходной задачи (1.1), которая, в свою очередь, всегда однозначно приводила бы к разбиению. Однако, увы, медиана единственна далеко не всегда. Более того, если коалиция состоит из двух игроков, проживающих в разных местах, то множество медиан совпадает с отрезком, соединяющим их адреса (какая бы норма $||\cdot||$ на $\mathbf{R}^d$ ни была выбрана для анализа).

В евклидовом случае верен следующий более точный результат:

> **Лемма о медиане.** Рассмотрим пространство с обычной евклидовой нормой, задаваемой формулой (1.5). Тогда для любой коалиции S решение $m[S] = M[S]$ задачи (1.10) с евклидовой нормой $||\cdot||$ единственное (и соответствующая точка $m[S]$ называется *медианой* коалиции S), *за исключением одного случая*: все точки $\{x_i\}_{i\in S}$ лежат на одной прямой.
>
> В последнем случае у коалиции может быть целый отрезок медиан. Более того, если упорядочить локации членов коалиции S вдоль их общей прямой, то множеством медиан будет служить отрезок этой прямой между двумя медианными (то есть центральными) локациями — в том случае, если последние не совпадают.

Доказательство. Пускай для некоторой коалиции S есть как минимум два решения задачи (1.10), обозначим их за m и m'. Пусть L — прямая, соединяющая m и m'. Введём в рассмотрение середину отрезка с концами в двух наших медианах: $\bar{m} = \dfrac{m + m'}{2}$.

Для любого $i \in S$ такого, что $x_i \notin L$, выполнено неравенство треугольника в строгой форме (рисунок 0). Точка $\tilde{x}_i$ — симметричный образ точки x_i относительно $\bar{m}$, значит верно $||x_i - m'|| = ||\tilde{x}_i - m||$, а также $2||x_i - \bar{m}|| = ||\tilde{x}_i - x_i||$:

$$\frac{1}{2}(||x_i - m|| + ||x_i - m'||) > ||x_i - \bar{m}||, \tag{1.13}$$

а для любого вообще $i \in S$ это неравенство выполняется в нестрогой форме. После чего, складывая все такие неравенства, получаем, что если хоть одна точка S не лежит на прямой L, то

$$\sum_{i \in S} ||x_i - \bar{m}|| < \frac{1}{2}\left(\sum_{i \in S} ||x_i - m|| + \sum_{i \in S} ||x_i - m'||\right). \tag{1.14}$$

Правая часть (1.14) равна $D[S]$, а левая, значит, ещё меньше — что противоречит выбору m и m' как медиан S. Противоречие получено в предположении о том, что не все адреса проживания членов коалиции S лежат на одной прямой. Оставшиеся утверждения очевидны. **Доказательство леммы о медиане завершено.**

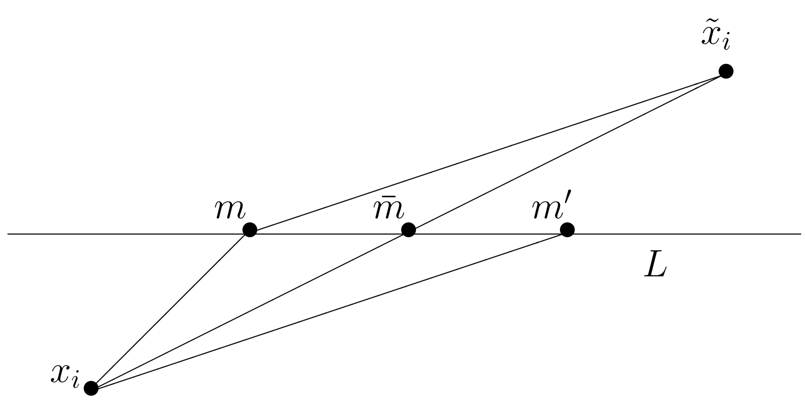

Рисунок 0. Неравенство треугольника, напоминание.

Неоднозначность в выборе медианы коалиции S повлияет на наши рассмотрения теоретико-игровых аспектов ЗМР в следующих разделах.

1.2 Теоретико-игровые угрозы миграционной природы в задаче ЗМР (постановка F)

1.2.1 Об угрозах: вступление

Так или иначе формулируй задачу ЗМР, а сложностей, связанных с её решением, всё равно не избежать: она NP-трудная. Точнее, NP-трудной является задача UFLP (см. [58] и подробное обсуждение во введении), а переход к конечномерным постановкам, судя по всему, не даёт никаких специальных преимуществ при её решении.

Наука, посвящённая разработке алгоритмов решения этой задачи, относится к области исследования операций. В то же время вопросы, которым посвящена диссертационная работа, относятся к теории игр — и по духу, и по методам, и по сути решаемых проблем.

Нас не будет интересовать то, насколько сложно с алгоритмической точки зрения решить задачу многомерного размещения. Решение есть, и хорошо; нас интересуют свойства *устойчивости* получаемых решений, причём устойчивость здесь понимается в смысле поведенческих, теоретико-игровых угроз. Согласятся ли сами резиденты, игроки из N, с навязанным им разбиением π? Если да, то как это доказать? Если нет, то что можно предложить им взамен? Каковы потенциальные угрозы предлагаемым решениям задачи со стороны участников конфликта?

Наш подход не должен выходить за рамки понятий, введённых выше — то есть, за рамки рассуждений в терминах издержек, стоимостей прикрепления, экономии и т.п. Иными словами, мы будем рассматривать только такие угрозы, которые возникают в связи с возможностью резидентов снизить суммарные индивидуальные издержки, таким образом увеличивая свой выигрыш. Исследование остаётся в рамках *экономического* подхода и не принимает во внимание такие угрозы, как “Вася не хочет плавать в одном бассейне с Петей”.[6]

С новой формулировкой ЗМР (с той, которая имеет дело с пространством

[6] Или посещать с ним на фестивале один и тот же СП.

всех разбиений и минимизацией функционала на нём) удобно работать с позиций теории игр. Мы будем рассматривать угрозы по отношению к предлагаемому в решении задачи разбиению π со стороны "перебежчиков" из группы в группу, а также со стороны целых "коалиций" $S \subset N$, которые могут быть как частями групп исходного разбиения π, так и быть сколоченными из частей различных групп-кусков разбиения, и своим созданием саботировать (разрушать) предлагаемое решение π. Конкретно:

Миграционная угроза. Что, если любой человек может самовольно "прикрепиться" к той мощности, к которой он захочет, игнорируя назначенную всем функцию прикрепления h?

Коалиционная угроза. А что, если *любая* коалиция $S \subset N$ имеет возможность сепаратистского поведения, то есть может сама решить свою задачу (1.10), игнорируя назначенное решение $[(m_1, \ldots, m_k);\ h(\cdot)]$, или, что эквивалентно, игнорируя предложенное в решении задачи разбиение π?

Уже сходу ясно, что изучать такие угрозы можно лишь после доопределения понятия решения задачи. В самом деле, что толку резидентам в том, что решение получено оптимальное? Ведь более важный вопрос в сообществе методологических индивидуалистов — "а сколько за всё это буду платить лично я"? То есть, как именно распределены между игроками оптимизированные суммарные издержки?

Но и это ещё не всё. Даже если Центр, решив задачу, как-либо распределит суммарные издержки по людям, встаёт вопрос, на что могут рассчитывать отклоняющиеся, саботирующие группы и индивиды? Что получит Вася, самовольно прикрепившись к некой другой мощности j, внутри новой группы, в которую он автоматически таким образом влился (пополнив её собой)? Какие перспективы у коалиции S, "организовавшей своё собственное дело"?

Мы приходим к центральному понятию теории формирования групп — к понятию *принципа* и *схемы* распределения общих издержек (cost allocation rule по-английски). От того, каковы господствующие представления в обществе относительно того, кто сколько платит и при каких обстоятельствах, критическим образом зависит устойчивость получаемых (оптимальных, но также и просто допустимых) решений по отношению к возникающим угрозам теоретико-игровой природы.

1.2.2 Три механизма распределения издержек: S, R, E

Ниже мы излагаем программу исследований, заявленную в статье [104] для случая расселений вдоль обычной прямой, распространяя её на расселения в пространствах произвольного числа измерений и требуя всюду выполнения медианного принципа.[7]

Для начала введём следующее общее определение (которое является реализацией основных идей из книги [26], модифицированных под нашу задачу.)

Определение FP. *Принципом распределения издержек* мы будем называть сопоставление каждой коалиции S *набора векторов*:

$$P[S] \subset \mathbf{R}^S; \tag{1.15}$$

каждый из векторов $w = \{w_i\}_{i \in S} \in P[S]$ предписывает каждому члену $i \in S$ коалиции S нести суммарные издержки в размере w_i. Вектора предполагаются неотрицательными и *сбалансированными*:

$$\sum_{i \in S} w_i = g + D[S] = |S| \cdot c[S]. \tag{1.16}$$

Векторы из $P[S]$ также будем называть *допустимыми* относительно принципа распределения издержек P.

Далее, принцип P называется *однозначным*, если для каждого S подмножество $P[S]$ является одноточечным, то есть состоит из одого допустимого вектора $t^S \in \mathbf{R}^S$. В противном случае мы называем принцип *многозначным*. Однозначные принципы иногда назваются *схемами* (или *правилами*) распределения издержек, и обозначаются просто одной буквой $t = \{t^S\}_{S \in (2^N) \setminus \{\emptyset\}}$, где $t^S = \{t_i^S\}_{i \in S} \in \mathbf{R}^S$.

[7] Во вводной главе было подробно объяснено, почему именно этот принцип является наиболее важным и выделенным, среди всех прочих возможных соглашений о выборе варианта ведения внутригрупповой деятельности. Работа [77] посвящена ситуации, когда придерживаться такого принципа при выборе центра группы не обязательно.

Ниже мы рассмотрим три различных принципа распределения издержек, для каждого из которых будет дана исчерпывающая формализация исходной задачи, в рамках которой вопросы теоретико-игровой устойчивости могут быть поставлены и частично решены. Один из этих принципов многозначный, другой однозначный, а третий — “почти” однозначный.

Произвольные побочные платежи (FS). Мы будем часто обращаться к этому случаю как к *принципу трансферабельной полезности* (сокращённо, “случай FS”. Буковка F будет сопровождать нас до тех пор, пока мы не расстанемся со случаем конечного множества N игроков; буква S от слово Studied, говорит о том, что этот случай был подвергнут глубокому анализу в работах предшественников).

Он заключается в том, что группа, будучи сформирована, вольна поделить издержки между собой любым способом. Более того, можно также разрешить группе дополнительно дробиться на подгруппы, если это будет более эффективно, и делить дальше уже один раз оптимизированные издержки. С точки зрения угроз устойчивости, как мы увидим ниже, последнее уточнение роли не играет. Так же как не играет роли и выбор конкретной из медиан в сформированной группе, если их несколько: суммарные издержки группы от этого не меняются, а распределять их всё равно можно произвольным образом.

Случай FS — пожалуй, наиболее популярный среди всех; как уже было сказано выше, именно ему посвящены усилия различных учёных при изучении дробной релаксации UFLP и вычислении меры непустоты ядра (см. выше обзор литературы).

Причина, видимо, состоит в том, что этот случай на самом деле логически вытекает из исходной постановки задачи ЗМР, а также классической UFLP, в которых издержки суммировались перед тем, как минимизироваться. Действительно, в каком единственном случае правомерно суммировать издержки? В том случае, когда полезности/выигрыши разных игроков можно передавать друг другу, то есть когда возможны *любые побочные платежи.*

Принцип выравнивания платежей внутри группы (R). К этому случаю мы будем часто обращаться как к принципу *всё собрать и поделить* (сокращённо, случай FR), или как к *принципу Ролса.*

Согласно данному принципу, формирование коалиции (группы) S обязательно сопровождается тем, что суммарные издержки (как общие для всех, g, так и оптимизированные агрегированные издержки разногласия $\sum_{i\in S}||x_i - m||$ при наилучшем выборе $m \in \mathbf{R}^d$) делятся поровну между её членами.

В результате каждый платит в точности величину $c[S]$, определённую в задаче (1.11). При этом, как и выше для случая побочных платежей, не имеет значения выбор конкретной из медиан, когда их много.

Так происходит в коллегиях адвокатов, а также ловцов рыбы (см. [68]). Данный принцип приводит, как мы увидим, к универсальному существованию решения, устойчивого относительно коалиционных угроз. В то же время миграционные угрозы в случае FR могут оказаться непреодолимыми (редкий случай, когда коалиционные угрозы менее обременительные, нежели индивидуальные!).

Равнодолевое участие (Equal-Share). Этот случай ещё может быть назван принципом *каждый платит за себя* (случай FE).

Суть его состоит в том, что внутри каждой группы S издержки на поддержание мощности, g делятся поровну между участниками, а издержки прикрепления $||x_i - m||$, где $m \in M[S]$, каждый несёт сам. Формула для индивидуальных издержек в случае FE следующая:

$$c_i^S = \frac{g}{|S|} + ||x_i - m||, \tag{1.17}$$

но если медиан много, то следует сперва определиться с выбором одной из них! То есть, “случай FE” должен быть доопределён конкретным механизмом выбора медианы из множества $M[S]$.

1.2.3 Случай F при $d = 1$: интервальные разбиения

Наиболее проблемным с точки зрения точных формулировок всех концепций устойчивости является случай одномерного расселения: $d = 1$. Так как именно в этой размерности получены все основные результаты настоящей главы (а за мелкими исключениями, и всей диссертационной работы), то мы посвятим его подробному описанию отдельный подраздел.

Как уже отмечалось выше, размерность 1 "чаще всего" оставляет люфт в выборе медианы (и мы ещё много с этим люфтом провозимся). Кроме того, размерность 1 и только она замечательна тем, что локации игроков естественно упорядочены: слева направо или справа налево. Это естественное упорядочение позволяет ввести концепцию *интервального разбиения* и порождает целый ряд дополнительных вопросов.

Начнём с определения интервального разбиения. На первый взгляд кажется, что интервальное разбиение — это такое разбиение, которое составлено из групп-интервалов, а что такое группа-интервал, "и так ясно". Однако тут есть подводные камни, связанные с возможностью совпадения адресов различных игроков, когда $x_i = x_j$ при $i \neq j$. Например, пускай множество игроков $N = \{1, 2, 3, 4\}$ задано расселением $x_1 = x_2 < x_3 = x_4$. Тогда разумное (для целей, которые вскроются ниже) определение интервальности группы приведёт нас к тому, что все возможные группы $S \subset N$ являются интервальными; однако мы явно не хотим считать, что все *разбиения* интервальны — таковым не должно быть (опять же, в силу духа получаемых ниже результатов), например, разбиение $\{[1, 4]; [2, 3]\}$. Поэтому придётся немного "похлопотать". К определению, данному ниже, надо некоторое время попривыкать, сходу оно на ум не ложится.

Определение $FD1$**:** Группа $S \subset N$ называется *интервальной*, если для любых трёх игроков $i, j, p \in N$, если $i, p \in S$ и $x_i < x_j < x_p$, то непременно $j \in S$. *Носителем* $Supp[S]$ группы S мы назовём выпуклую оболочку множества расселений $\{x_i\}_{i \in S}$. Разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}$ называется *интервальным* в том случае, если для любых двух различных групп $S_l \neq S_q$, входящих в него, внутренности их носителей *не пересекаются.* Договоримся ещё о том, что в интервальных разбиениях $\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}$ группы всегда перечисляются "слева направо".

Вопросы, связанные со введённой выше концепцией, могут быть заданы как для случая FM поиска миграционно устойчивых решений, так и для случая FC поиска коалиционно устойчивых разбиений на группы. Заметим, что для постановочного раздела FU, то есть при поиске оптимальных решений в задаче многомерного размещения, все решения будут интервальными — как уже отмечалось выше, это будут одномерные ячейки Вороного для сетки $(m_1, \ldots, m_k)$.

Вот некоторые из интересных вопросов, связанных с интервальностью:

- Верно ли, что любое (коалиционно, или миграционно) устойчивое разбиение интервально?
- Верно ли, что если существует хотя бы одно устойчивое разбиение, то существует и интервальное (ослабление предыдущего пункта)?
- Верно ли, что если данное (интервальное) разбиение неустойчиво, то существует интервальная коалиция, блокирующая его?
- Верно ли, что для любого расселения на прямой существует разбиение, устойчивое относительно только интервальных угроз?

Все эти вопросы можно также дробить на подпункты, связанные с тем, относительно какого принципа распределения издержек мы их ставим. Они, как это видно невооружённым глазом, тесно связаны друг с другом. На многие из сформулированных вопросов ниже будут даны ответы.

Вооружившись тремя основными способами формализации принципа распределения издержек, мы можем теперь дать строгие определения коалиционной и миграционной устойчивости решений. При этом никаким разумным способом понятие миграционной устойчивости определить для случая FS не получается: непонятно, какая схема должна выбираться в новых группах после того, как кто-то из игроков мигрировал.[8] Вопросы коалиционной устойчивости мы отложим до следующей главы, а в текущей главе речь пойдёт об угрозах миграционной природы.

[8]Это стало понятно только что уже при завершении работы над диссертацией.

1.2.4 Концепция миграционной устойчивости решения

В этом разделе мы подвергаем анализу концепцию *миграционной устойчивости*, которую также иногда называют *индивидуальной* или *Нэшевской*, ввиду её очевидной и прямой связи с концепцией равновесия по Нэшу.[9]

Миграционная устойчивость — свойство полезное: если предложить людям следовать устойчивому разбиению на группы, то в таком решении задачи ЗМР не возникнет стимула к индивидуальному саботажу решения задачи. Миграционно устойчивыми могут быть неоптимальные решения, и наоборот: прямой связи с оптимумом в задаче ЗМР у миграционно-устойчивых разбиений нет. Более того, в достаточно общей ситуации (правда, для непрерывных распределений) можно утверждать "почти наверное" (математический термин, то есть за исключением вырожденных начальных данных) несовместимость этих двух требований, оптимальности и миграционной устойчивости. Об этом речь пойдёт в разделе 3.2 главы 3.

Для однозначных принципов распределения издержек понятие *миграционно устойчивого разбиения* формулируется так:

> **Определение** FM**.** Разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}$, где $N = S_1 \sqcup \ldots \sqcup S_k$, называется *миграционно устойчивым*, *Нэшевским* или *индивидуально устойчивым* (термины взаимозаменяемы) при однозначном принципе распределения издержек $t = \{t_i^S\}_{S \subset N; i \in S}$, если для любого номера $l = 1, \ldots, k$ группы разбиения, любого игрока $i \in S_l$, а также любого W либо пустого ($W = \emptyset$) либо совпадающего с S_h при некотором номере группы $h = 1, \ldots, k$, мы имеем следующее неравенство:
>
> $$t_i^{W \cup \{i\}} \geq t_i^{S_l}. \tag{1.18}$$

[9] Можно даже всю постановку задачи отыскания миграционно-устойчивых разбиений на группы сформулировать в терминах нахождения равновесия в некоторой игре в нормальной форме; но так как подобная переформулировка ничем нам не поможет в плане решения задачи о нахождении устойчивых разбиений, мы не будем здесь плодить сущности без надобности. Интересующегося читателя отсылаем к [104], а также к работам [3], [6], [5]. В последних трёх статьях изучается концепция усиленного Нэшевского равновесия — *равновесия по Нэшу, устойчивого к расколу*. Эта концепция полукоалиционная, и в рамках неё построена нетривиальная теория с яркими результатами.

Что касается миграционной устойчивости по Ролсу, то такое определение можно применить напрямую к постановке FR:

Определение FRM**.** Разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}$, где $N = S_1 \sqcup \ldots \sqcup S_k$, называется *миграционно-устойчивым*, *Нэшевским* или *индивидуально устойчивым* в случае FR, если для любого номера $l = 1, \ldots, k$ группы разбиения, любого игрока $i \in S_l$, а также любого W либо пустого $(W = \emptyset)$ либо совпадающего с S_h при некотором номере группы $h = 1, \ldots, k$, мы имеем неравенство $c[W \sqcup \{i\}] \geq c[S_l]$.

Случай E: "проклятие медианы." Непосредственно перенести определение FM на случай FE, напротив, не получается — из-за уже обсуждавшейся неоднозначности в выборе конкретной медианы в формуле (1.17) в тех случаях, когда медиан много. Но при $d = 1$ есть два варианта уточнения принципа равнодолевого участия, при каждом из которых миграционная устойчивость может быть строго определена. Именно случай $d = 1$ подвергнут доскональному анализу, поэтому ниже приводятся две модификации в этом случае.

Первое уточнение состоит в том, что всегда берётся середина отрезка медиан, в том случае, когда медиана определена неоднозначно (напомним, что при $d = 1$ это происходит тогда и только тогда, когда n чётно, и два центральных жителя не совпадают адресами). На этот подслучай, назовём его **принципом центральной медианы** и обозначим за FEF (последняя буква от английского "Focal point"), опять-таки распространяется определение FM:

Определение $FEFM$**.** Разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}$, где $N = S_1 \sqcup \ldots \sqcup S_k$, называется *миграционно-устойчивым*, *Нэшевским* или *индивидуально устойчивым* в случае FEF, если для любого $l = 1, \ldots, k$, любого игрока $i \in S_l$, а также любого W либо пустого $(W = \emptyset)$ либо совпадающего с S_h при некотором $h = 1, \ldots, k$, мы имеем неравенство $c_i^{W \sqcup \{i\}} \geq c_i^{S_l}$, где все значения c_i^S вычислены по формуле (1.17) с медианами, выбранными совпадающими с серединами соответствующих отрезков медиан (что становится актуальным тогда, когда эти отрезки не схлопываются в точку).

Принцип “минимального насилия при миграции.” Имя этому случаю дадим FEM. Данный принцип, составляющий второй вариант уточнения выбора медианы при рассмотрении миграционно устойчивых разбиений на прямой, более трудно формализуем, однако он играет достаточно важную роль. Как мы увидим ниже, он обеспечивает условия для общей теоремы существования решения на прямой!

Конкретно, мы требуем, чтобы мигрировавший в другую группу участник менял местоположение медианы в принимающей группе *наименьшим* образом. В частности, это означает, что если участник i мигрировал в нечётную по численности группу, то медиана в ней останется там же (теперь — на краю отрезка медиан), где была ранее, то есть в местоположении бывшего центрального для нечётной группы участника. Если же мигрант прибыл в чётную группу, то своим появлением в ней он сделал её нечётной, так что там медиана однозначно определена, и ничего дополнительно требовать не нужно.

Определение $FEMM$**.** Разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}$, где $S_1 \sqcup \ldots \sqcup S_k = N$, вместе с набором медиан $(m_1, \ldots, m_k)$ (для любого $j = 1, \ldots, k$ мы имеем $m_j \in M[S_j]$), называется *миграционно-устойчивым*, *Нэшевским* или *индивидуально устойчивым* в случае FEM, если для любого $l = 1, \ldots, k$, любого игрока $i \in S_l$, а также любого W либо пустого ($W = \emptyset$) либо совпадающего с S_h при некотором $h = 1, \ldots, k$, мы имеем неравенство $c_i^{W \sqcup \{i\}} \geq c_i^{S_l}$; в последнем неравенстве мы снова апеллируем к формуле (1.17), причём для группы S_l берётся медиана $m = m_l$, а для множества $W \sqcup \{i\}$ в случае его чётности медиана берётся совпадающей с медианой $m = m_h = m[S_h] = m[W]$ из исходного набора $(m_1, \ldots, m_k)$ (однозначно определённой в силу нечётности W). Если же множество $W \sqcup \{i\}$ состоит из нечётного числа игроков, то медиана в нём сама по себе определяется однозначно.

1.3 Миграционные угрозы в задаче ЗМР (постановка F): устойчивых решений может не существовать

Настало время "собирать камни". Два раздела — текущий, а также следующий раздел, завершающий главу 1 — содержат сводку основных результатов, связанных с концепцией миграционной устойчивости решений для конечной постановки ЗМР. В текущем разделе упор делается на контрпримеры, в то время как завершающий раздел 1.4, напротив, содержит две теоремы существования решения.

1.3.1 Контрпример, случай FRM

Начнём со случая выравнивания платежей. Оказывается, что даже в случае $d = 1$, то есть в самом простейшем из возможных случаев, нельзя гарантировать существования миграционно-устойчивого решения! Тем самым мы получаем сигнал, что явный вид расселения более важен, нежели сложность или простота того пространства, в котором решается задача. Этот сигнал будет подтверждён и в последующих главах диссертационного исследования.

Отметим, что работа по выявлению классов расселений, попадание в которые гарантирует существование решения, в случае FRM не велась: просто не доходили руки. На вскидку очевидно, что если вся прямая через равные промежутки расселена людьми (такие начальные данные задачи многомерного размещения мы назовём *равноотстоящим расселением*), то миграционно устойчивое решение существует (нужно просто разделить на группы с минимальным $c[S_q]$, где q — число жителей группы S_q). А вот если рассматривается не вся прямая, а конечный её кусок, то тут начинаются краевые "эффекты резонанса", хорошо знакомые по анализу равноотстоящего расселения в случае FE (см. ниже об этом в разделе 3.5).

По сути дела, аккуратный анализ этого случая может составить содержание студенческой курсовой работы (но уже не диплома, наверное). В качестве диплома я бы предложил анализ случая "разбегающихся локаций", когда “домики” (ещё один термин для обозначения локаций участников!) раскиданы внутри плотно, а по краям редко. Для постановки FRM я также ничего не могу сказать про интервальность устойчивых разбиений (в тех случаях, когда последние существуют).

Ниже приводится конкретный пример расселения, не допускающего ни одного миграционно устойчивого разбиения на группы.

> **Контрпример для случая FRM.** Пусть при $g = 1$ расселение задано следующим образом (при $g = 1$): $x_1 = 0$; $x_2 = x_3 = 1.9$; $x_4 = x_5 = x_6 = 4.1$ (см. рисунок 1 ниже). Тогда для любого разбиения $\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}$ множества $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ на группы найдётся такое l и такой игрок $i \in S_l$, что либо $c[\{i\}] < c[S_l]$, либо $c[S_h \sqcup \{i\}] < c[S_l]$ при некотором $h \neq l$.

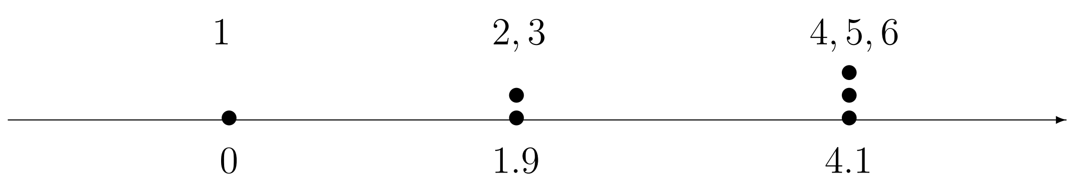

Рисунок 1. Контрпример FRM.

Доказательство: Первым делом перечислим все вообще коалиции, средние издержки которых не превосходят 1 (понятно, что в любом устойчивом разбиении все коалиции должны быть такими — ведь у каждого игрока есть опция организовать индивидуальный клуб).

Лемма $FRM - 1$. Единственные три коалиции, не сосредоточенные по одному адресу, средние издержки которых не превосходят 1, это коалиции $[1, 2, 3]$, $[2, 4, 5, 6]$ и $[3, 4, 5, 6]$.

В самом деле, рассмотрим длину носителя коалиции.[10] Она равна либо 1.9, либо 2.2, либо 4.1. В первом случае суммарные издержки не меньше 2.9, то есть в ней должно быть не менее трёх участников — и так как она,

[10]Понятие носителя коалиции введено в определении $FD1$ выше.

имея длину 1.9, не может содержать жителей адреса 4.1, то единственный вариант — это $[1, 2, 3]$.

Во втором случае коалиция не может включать, наоборот, первого игрока, а жителей в ней должно быть не менее четырёх (ибо её суммарные издержки не меньше 3.2). Заметим, что издержки перемещения должны быть ровно 2.2, ибо иначе они не менее, чем дважды 2.2, то есть 4.4, что даёт общие издержки 5.4 или выше — противоречие с тем, что в ней нет игрока 1, следовательно, рассматриваемая коалиция содержит не более 5-ти игроков. А значит, по одному из адресов проживает ровно один участник рассматриваемой коалиции. Вместе с условием, что всего участников не менее четырёх, получаем, что один участник обязательно проживает по адресу 1.9. Но тогда их ровно четверо, и остальные трое — это игроки $4, 5, 6$. Таких коалиций ровно две — $[2, 4, 5, 6]$ и $[3, 4, 5, 6]$.

Третий случай, когда длина носителя составляет 4.1, подразумевает общие издержки не менее 5.1, то есть в коалиции должны быть все вообще игроки: $[1, 2, 3, 4, 5, 6]$, но у такой коалиции на самом деле общие издержки не 5.1, а $4.1 + 2.2 + 2.2 + g = 9.5$, то есть средние издержки заметно выше единицы. **Лемма $FRM - 1$ доказана.**

Следующий вспомогательный результат достаточно простой.

Лемма $FRM - 2$. В устойчивое разбиение не может входить более одной группы, целиком сосредоточенной по конкретному адресу. (Общий результат, верный для любых расселений!)

В самом деле, рассуждая от противного, мы должны допустить, что есть как минимум две группы, участники которых все живут в некоторой точке x (в нашем случае $x = 1.9$ либо $x = 4.1$). В одной из групп, однако, не более жителей, чем в другой. Вот из этой нестрого меньшей группы любой участник захочет перебежать в нестрого б‘ольшую — от такого перемещения вторая группа станет уже *строго* б‘ольшей, издержек перемещения как не было, так и нет, и средние издержки снизятся. **Лемма $FRM{-}1$ доказана.**[11]

Лемма $FRM{-}3$. Если в устойчивом разбиении нет группы, включающей

[11]Заметим, что такой аргумент *не проходит* для неатомарных игр! Мы ещё с этим фактом непосредственно столкнёмся ниже, в будущих главах.

игроков, проживающих по разным адресам, то такое разбиение обязательно имеет вид “группирования по адресам”, то есть $\pi = \{[1];[2,3];[4,5,6]\}$. **Это утверждение непосредственно следует из Леммы $FRM-2$.**

Подведём итоги. Если в устойчивом разбиении нет группы, включающей игроков, проживающих по разным адресам, то это разбиение имеет вид $\pi = \{[1];[2,3];[4,5,6]\}$. Но оно неустойчиво: первый игрок перебежит в коалицию $[2,3]$, превращая её в $[1,2,3]$ — ему стало чуток лучше $\left(\frac{2.9}{3} < 1\right)$, остальным двоим стало сильно хуже $\left(\frac{2.9}{3} > \frac{1}{2}\right)$, но его последнее соображение нисколько не волнует. Если же в устойчивом разбиении π существует группа, включающая нетривиальные перемещения, то такой группой будет одна из установленных в Лемме $FRM-1$ групп $[1,2,3]$, $[2,4,5,6]$ или $[3,4,5,6]$ (они попарно пересекаются, поэтому лишь одна из них может входить в любое разбиение!).

Разберём теперь все три случая по очереди (точнее, два из трёх, ибо последние два совершенно симметричны). Если в устойчивое разбиение π входит группа $[1,2,3]$, то в силу Леммы $FRM-2$ должно быть $\pi = \{[1,2,3];[4,5,6]\}$. Но такое разбиение неустойчиво — перебежать захочет любой из игроков 2 или 3: в разбиении π средние издержки для него равны $\frac{2.9}{3} > 0.9$, а в новой группе издержки составят $\frac{3.2}{4} = 0.8 < 0.9$.

Как обычно, он этим весьма сильно напряжёт остальных участников $4,5,6$, у которых было $\frac{1}{3}$, а стало тоже 0.8!

Если же в разбиение входит, например, группа $[3,4,5,6]$ (случай группы $[2,4,5,6]$ идентичен), то $\pi = \{[1];[2];[3,4,5,6]\}$ — в силу Леммы $FRM-1$, или просто здравого смысла, группа $[1,2]$ сформироваться не может. Но и такое разбиение также неустойчиво — игрок 3 “убегает” в коалицию 2, ибо $\frac{3.2}{4} = 0.8 > \frac{1}{2}$, на этот раз радуя всех вовлечённых лиц — как игрока 2, его соседа по адресу $\left(1 > \frac{1}{2}\right)$, так и игроков $4,5,6$, от которых он убежал $\left(\frac{3.2}{4} = 0.8 > \frac{1}{3}\right)$. Следовательно, **устойчивых разбиений вообще не существует и Контрпример FRM полностью разобран**.

Замечание: при построении контрпримера был использован следующий приём. Несколько разбиений "переходят" друг в друга по циклу при осуществлении миграционных угроз, в то время как все остальные разбиения неустойчивы по разным другим причинам. Вот, смотрим вместе:

$$\begin{gathered}\{[1];[2];[3,4,5,6]\} \to \{[1];[2,3];[4,5,6]\} \to \{[1,2,3];[4,5,6]\} \\ \to \{[1,2];[3,4,5,6]\} \to \{[1];[2];[3,4,5,6]\},\end{gathered} \tag{1.19}$$

круг замкнулся, устойчивости нет. Данный приём будет ещё очень много раз применён в диссертации, ниже по тексту.

Последнее, что хочется отметить в этом первом разделе, содержащем конкретные результаты, это то, что пример, приведённый выше, является артефактом дискретной модели: если расселение было бы непрерывным (главы 3 и 4), то разбиение на группы, миграционно устойчивое при принципе равнодолевого участия, существовало бы всегда, при любом расселении в любом d-мерном нормированном пространстве!

Но, так как соответствующий результат только что получен и не только не опубликован, но и не проверен надлежащим образом, то он, конечно, в текст диссертации не вошёл. А жаль, ибо иначе он сразу бы закрыл 2 из 27 подразделов: DRM и TRM!

Причина же такого контраста кроется в том, что в дискретном случае мигрирующий агент влияет на выигрыши остальных, а в непрерывных моделях он оказывает нулевое влияние (из-за взятия интегралов). То есть можно догадаться, что, чем больше агентов напичкать в дискретную модель, тем меньший дополнительный выигрыш будет гнать агента из группы в группу при правильно подобранном разбиении. В непрерывном же (или "термодинамическом") пределе его желание сменить группу устремится к нулю. Заметим, что в непрерывной постановке ниже будет введено понятие *локально устойчивого разбиения*, которое подправляет миграционно устойчивое, "напоминая" последнему о ненулевых перемещаемых массах игроков.

1.3.2 Теорема об интервальности, случай FEM

Начиная с этого места и до конца второй “дискретной ”главы (помимо лишь общего результата в разделе FRC), все рассмотрения проводятся для подслучая $d = 1$. Высшие размерности ждут своих доблестных героев первопроходцев. (Но в непрерывных постановках последующих глав диссертации разговор о более высоких размерностях ещё пойдёт!)

Прежде всего докажем следующую *теорему об интервальности.*

> **Теорема FEM об интервальности.** Рассмотрим произвольное расселение $x_1 \leq \ldots \leq x_n$ на прямой. Тогда *любое* миграционно устойчивое разбиение для схемы равнодолевого участия (каким бы из двух способов, $FEFM$ либо $FEMM$, его ни уточнять) является интервальным.

Доказательство: Пусть $\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}$ — миграционно устойчивое разбиение. Заметим, что в обеих подслучаях принципа равнодолевого участия переход игрока $i \in S_l$ в группу S_q при $q \neq l$ влечёт нестрогое смещение медианы группы S_q в сторону игрока i. Это очевидно для подслучая $FEFM$. Что же касается подслучая $FEMM$, то надо просто заметить, что множества $M[S_q]$ и $M[S_q \sqcup \{i\}]$ пересекаются *ровно* по одной точке m, и эта точка нестрого ближе к i, чем любые другие возможные медианные локации $m' \in M[S_q]$: точка m просто является краем отрезка медиан для множества S_q, ближайшим к i (независимо от того, вырождается отрезок медиан $M[S_q]$ в точку или не вырождается, последнее утверждение верно!).

Сделанное только что наблюдение пока зафиксируем в уме, и прежде всего докажем, что если $x_i = x_j$, то игроки $i \neq j$ должны в разбиении π входить в одну и ту же группу. В самом деле, будем рассуждать от противного: пускай $i \in S_l$, в то время как $j \in S_q$, причём, скажем, i в своей группе S_l несёт нестрого б‘ольшие издержки, чем j в своей группе S_q. Если теперь игрок i

переметнётся в группу S_q, то его издержки станут равными

$$\begin{gathered} c_i^{S_q \sqcup \{i\}} = \frac{1}{|S_q|+1} + ||x_i - m|| < \frac{1}{|S_q|} + ||x_i - m_q|| = \\ \frac{1}{|S_q|} + ||x_j - m_q|| = c_j^{S_q} \leq c_i^{S_l}, \end{gathered} \tag{1.20}$$

то есть снизятся по сравнению с издержками того же игрока i в исходном разбиении π. Это противоречит миграционной устойчивости рассматриваемого разбиения.

А раз так, то ясно, что интервальность π с этим дополнительным свойством эквивалентна просто интервальности всех входящих в π групп. Поэтому предположим от противного, что одна из них не будет интервальной: пускай $x_i < x_j < x_p$, но при этом $i, p \in S_l$, в то время как $j \in S_q \neq S_l$. Нежелание игрока i перейти в группу S_q, подразумеваемое миграционной устойчивостью π, означает выполнение неравенства $c_i^{S_l} \leq c_i^{S_q \sqcup \{i\}}$. Последнее неравенство означает следующее (ниже m^l, m^q — центры групп S_l, S_q, а m — центр потенциальной группы $S_q \sqcup \{i\}$ в соответствии с правилом $FEFM$ или $FEMM$):

$$\frac{1}{|S_l|} + ||x_i - m^l|| \leq \frac{1}{|S_q|+1} + ||x_i - m|| < \frac{1}{|S_q|} + ||x_i - m_q||, \tag{1.21}$$

где второе неравенство следует из замечания в начале доказательства о неудалении медианной точки при миграции. Отсюда мы делаем вывод, перегруппировывая члены, что

$$||x_i - m^l|| - ||x_i - m_q|| < \frac{1}{|S_q|} - \frac{1}{|S_l|}. \tag{1.22}$$

Аналогично не хочет менять группу S_l на S_q и $p \in S_l$, из чего точно так же будет следовать неравенство

$$||x_p - m^l|| - ||x_p - m_q|| < \frac{1}{|S_q|} - \frac{1}{|S_l|}. \tag{1.23}$$

Теперь заметим (Sic !!), что функция $||x - m^l|| - ||x - m_q||$ в любом случае монотонна по x (она представляет собой эдакую ступеньку с двумя изломами и одним наклоном). То есть неравенство типа (1.17) должно быть выполнено также и в промежуточной точке $x_j \in (x_i, x_p)$, после чего, перегруппируя члены снова, получаем, что (здесь $\tilde{m}$ — центр потенциальной группы $S_l \sqcup \{j\}$ в соответствии с правилом $FEFM$ или $FEMM$):

$$\frac{1}{|S_l|+1} + ||x_j - \tilde{m}|| < \frac{1}{|S_l|} + ||x_j - m^l|| < \frac{1}{|S_q|} + ||x_j - m_q|| = c_j^{S_q}, \qquad (1.24)$$

где первое неравенство снова следует из замечания в начале доказательства. Неравенство (1.24) в точности означает, что игроку j захочется сменить его группу S_q на группу S_l (превращая её в группу $S_l \sqcup \{j\}$), а последнее наблюдение противоречит миграционной устойчивости разбиения π.

Доказательство теоремы FEM об интервальности завершено.

1.3.3 Контрпример, случай $FEFM$ (центральная медиана)

Тем не менее, это соображение не спасает нас от возможной пустоты множества решений в подслучае $FEFM$:

Контрпример для случая $FEFM$. Пускай расселение при $g = 1$ задано следующим образом: $x_1 = 0$; $x_2 = x_3 = 23/30$; $x_4 = 29/30$; $x_5 = 191/120$ (см. рисунок 2 ниже). Тогда для любого разбиения $\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}$ множества $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ на группы найдётся такое l и такой игрок $i \in S_l$, что либо $c[\{i\}] < c[S_l]$, либо $c[S_h \sqcup \{i\}] < c[S_l]$ при некотором $h \neq l$.

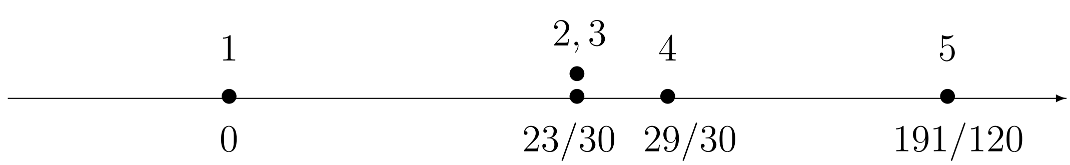

Рисунок 2. Контрпример для подслучая $FEFM$.

Доказательство: Предположим, что миграционно устойчивое разбиение существует, и обозначим его за π, а группу, содержащую игроков $2, 3$ — за S (согласно теореме об интервальности устойчивого разбиения, эти два игрока должны входить в одну и ту же группу). В силу того же условия интервальности, игрок 4 может либо входить в группу S, либо быть одиночкой, либо входить в группу $[4, 5]$ в рамках π.

Докажем, что реализуется непременно первая альтернатива из этих трёх (обычно альтернатив две, но в военное время может быть и три!). В самом деле, если игрок 4 — одиночка, то он несёт издержки, равные 1, а если он входит в группу $[4, 5]$, то несёт издержки, равные $1/2+r/2$, где r равняется расстоянию между x_4 и x_5, то есть $73/120$. В обеих случаях игрок 4 несёт издержки не меньшие, чем $193/240$.

Однако в тех же самых рассматриваемых случаях группа S (в силу всё той же интервальности разбиения π!) либо совпадает с группой $[2, 3]$, либо совпадает с группой $[1, 2, 3]$. Присоединение игрока 4 к группе S тем самым гарантирует выбор медианы для группы $S \sqcup \{4\}$ в точке $x_2 = x_3 = 23/30$. Следовательно, при смене группы на $S \sqcup \{4\}$ игрок 4 меняет издержки не меньшие, нежели $193/240$, на издержки не б‘ольшие, чем $1/3 + 6/30 = 16/30 = 128/240 < 193/240$. Поэтому у него тогда есть стимул мигрировать, что противоречит устойчивости исходного разбиения π. Мы доказали, что $4 \in S$ в (любом) устойчивом π.

Но тогда, в силу всё той же пресловутой интервальности, для разбиения π остаётся ровно четыре варианта — в соответствии с тем, включает или не включает группа S игроков 1 и 5. Как и при доказательстве контрпримера FRM, установим цикл выгодных миграций, связывающих по кругу эти четыре разбиения, тем самым показывая, что ни одно из них не является миграционно устойчивым:

$$\begin{gathered}\{[1]; [2, 3, 4]; [5]\} \to \{[1]; [2, 3, 4, 5]\} \to \{[1, 2, 3, 4, 5]\} \\ \to \{[1, 2, 3, 4]; [5]\} \to \{[1]; [2, 3, 4]; [5]\}.\end{gathered} \tag{1.25}$$

Первый переход осуществится из-за того, что игрок 5 в группе $[2345]$ платит $1/4 + 73/120 + 3/30$ (ибо её медиана расположена в точке $26/30$!), и это выражение равно $115/120 < 1$, его издержек как одиночки. Второй переход означает, что игрок 1 захочет примкнуть к группе $[2345]$, ведь её медиана тогда прыгнет в точку $x_3 = 23/30$, и первый игрок получит $1/5 + 23/30 = 29/30 < 1$. Но после этого (третий переход) игроку 5 станет в этой группе хуже, чем быть одиночкой: $1/5 + 73/120 + 6/30 = 121/120 > 1$! Следовательно, он уйдёт; и тогда, наконец (четвёртый и последний переход!), уйдёт и первый, ибо $1/4 + 23/30 = 61/60 > 1$, и круг замкнулся.

В этом контрпримере реализована известная "игра в прятки": первый хочет примкнуть к центральной группе только в том случае, если пятый тоже к ней примкнёт; пятый же, наоборот, хочет примкнуть к центральной группе только в том случае, если первого в ней не будет.

Следовательно, миграционно устойчивых разбиений при рассматриваемом расселении не существует, и **Контрпример $FEFM$ полностью разобран**.

1.4 Миграционные угрозы в задаче ЗМР на прямой: две теоремы существования

Всегда хочется закончить на мажорной ноте — как всю работу, так и отдельную главу. Поэтому ниже приводятся две теоремы существования миграционно-устойчивых разбиений конечного мира.

1.4.1 Случай $FEFM$, равномерное расселение

Случай $FEFM$ изучен не только в смысле существования контрпримера, но также и в позитивном ключе. А именно, для равномерного расселения (рисунок 3 ниже) миграционно устойчивое разбиение на группы существует всегда.

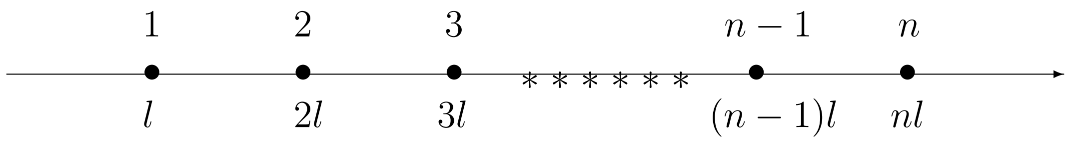

Рисунок 3. Равномерное расселение n игроков на прямой.

Теорема $FEFM$ для равномерного расселения на прямой. Рассмотрим множество $N = \{1, \dots, n\}$ из n игроков, расселённых на прямой через равные (но произвольные) промежутки: $x_1 = l, \quad \dots \quad, x_n = nl$. Тогда существует миграционно устойчивое разбиение, независимо от параметров $n \in \mathbf{N},\ l, g \in \mathbf{R}_{++}$. (Согласно теореме FEM, оно обязательно будет интервальным.)

Доказательство, как ни странно, не самое тривиальное (более того, оно достаточно муторное с технической точки зрения). Начнём с некоторых очевидных замечаний, постепенно вживаясь в суть вопроса. Положим $g = 1$ (понятно, что важно лишь соотношение констант g и l).

Лемма $FEFM$-1. При $l \geq 1$ и любом $n \geq 1$ устойчивым будет разбиение, при котором каждый игрок образует группу-одиночку.

Действительно, присоединение любого игрока к любому другому тогда влечёт издержки, равные $1/2 + r/2$, где r — расстояние между игроками, которое не может быть меньше $l \geq 1$, значит, издержки от такой миграции не могут снизиться. **Лемма $FEFM$-1 доказана.**

Лемма $FEFM$-2. При $l \in [2/3, 1)$ и чётном n устойчивым будет разбиение на соседние пары; для нечётных n устойчивое разбиение можно получить, группируя соседние пары и оставляя краевого игрока (на самом деле, можно и любого другого игрока с нечётным номером) в одиночестве.

Доказательство. Прежде всего заметим, что в данном диапазоне значений дистанции l между соседними локациями издержки краевого жителя связной 2-группы не превосходят 1, ибо равны $1/2 + l/2$; в том же диапазоне значений l издержки краевого жителя *любой* 3-группы, наоборот, не могут быть ниже 1 (ибо они равны, самое меньшее, $1/3 + l$). Следовательно:

(i) Ни один из участников парных групп не хочет отклониться в другую двушку (которая от этого станет трёшкой, а он сам — краевым в ней);

(ii) Ни один из участников парных групп не захочет образовать свою группу-одиночку (и не захочет менять в лучшем случае “шило на мыло” — свою двушку на новую, присоединяясь к одиночке);

(iii) одиночка (существующий при нечётных n) также не хочет стать краевым в новообразованной трёшке, присоединяясь к любой двушке.

Иными словами, построенное выше разбиение на группы является миграционно устойчивым в рассматриваемом диапазоне значений расстояния между локациями, l. **Лемма $FEFM$-2 доказана.**

Дальше (то есть в диапазоне $l < 2/3$) придётся подойти к вопросу системно. Мы будем выяснять, какой размер связной группы наиболее эффективен с точки зрения краевых жителей — ибо именно последние наиболее уязвимы по отношению к миграционным угрозам. Это не означает, что мы будем исследовать только угрозы со стороны краевых игроков — мы, конечно, учтём *все* угрозы. Но поставленный выше вопрос оказывается критически важным для анализа.

Итак, запишем формулу для издержек краевого жителя любой связной k-группы, то есть интервальной группы численности $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$z_l(k) = \frac{1}{k} + l\frac{k-1}{2}. \tag{1.26}$$

Если распространить эту функцию $z_l(x)$ на всю полуось $x \geq 1$, то при типичных для диапазона $(0, 2/3)$ значений l она сперва достаточно быстро убывает от стартовой для всех функций семейства точки $(1,1)$ до своей точки глобального минимума,

$$\left(\sqrt{2/l}, z_l(\sqrt{2/l})\right) = \left(\sqrt{2/l}, \sqrt{2l} - \frac{l}{2}\right), \tag{1.27}$$

и затем “нехотя” возрастает до бесконечности, проходя через точку $(2/l, 1)$.

Кроме того, семейство функций $\{z_l(\cdot)\}_{l\in(0,2/3)}$ возрастает относительно поточечного упорядочения (то есть, при любом $x \geq 1$ значение $z_l(x)$ строго возрастает по l). На рисунке 4 изображены три функции семейства при $l = 2/3$, $l = 2/9$ и $l = 1/8$.

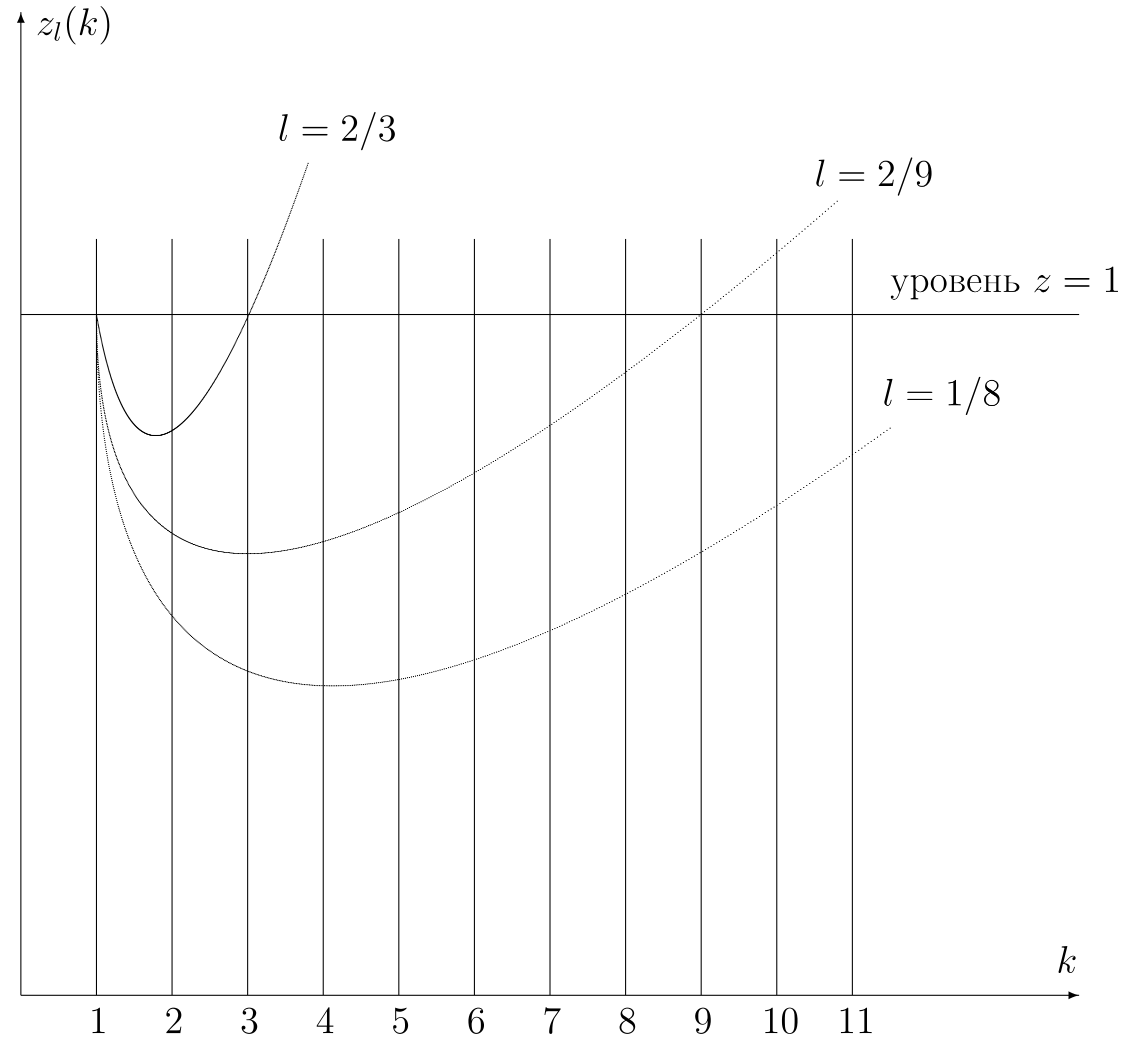

Рисунок 4. Семейство функций $\{z_l(\cdot)\}_{l\in(0,2/3)}$.

Из рисунка 4, а также из сделанных выше замечаний следует целый ряд важных для дальнейшего анализа наблюдений. Соберём их вместе. Каждое из них достаточно очевидно для того, чтобы можно было опустить доказательство.

Лемма $FEFM$-3. Имеют место следующие утверждения:

i При каждом l существуют *два* соседних целых числа, $k = k^l$ и $k = k^l + 1$, первое из которых минимизирует функцию $z_l(\cdot)$ на множестве всех натуральных чисел; второе же в изучаемом диапазоне для параметра

$l \in (0, 2/3)$ *не превосходит значения* $2/l$, *в котором функция* $z_l(\cdot)$ *обращается в единицу* (истинность последнего утверждения станет ясна ниже, в пункте 3 этого списка).

Пару (k^l, k^l+1), введённую выше, мы назовём *актуальной парой*, соответствующей значению параметра l. Для определённости в точке скачка будем брать б‘ольшую из двух соседних пар.

ii Число k^l "монотонно" убывает с ростом l. Более точно это надо формулировать наоборот: при неограниченном убывании l от краевого (правого) значения $l = 2/3$ до нуля, левая координата актуальной пары (k^l, k^l+1) возрастает минимальными скачками, стартуя со значения $k^{2/3} = 2$ неограниченно до бесконечности.

iii При $k \geq 3$ "скачок" от пары $(k-1, k)$ к паре $(k, k+1)$ происходит при $l = \dfrac{2}{k(k-1)}$ — именно в данной точке выполнено равенство $z_l(k-1) = z_l(k)$; так как в точке скачка выполняется $2/l = k(k-1)$ и при $k \geq 3$ мы имеем $k+1 < k(k-1)$, то и для любого значения

$$l \in \left[\frac{2}{k(k+1)}, \frac{2}{k(k-1)}\right]$$

также верно, что $k+1 \leq 2/l$ (при $k \geq 3$). Но именно в этом полуинтервале значений параметра l актуальной парой является пара $(k, k+1)$.

Это доказывает сделанное в первом пункте списка утверждение для всех $k \geq 3$. При $k = 2$ ситуация иная, и именно из-за этого мы отдельно рассмотрели диапазон значений $l \in [2/3, +\infty)$. Утверждение $k^l + 1 < 2/l$, ключевое для всего анализа, *начинает быть верным при* $l = 2/3$ *и далее вниз по* l.

iv Как уже было сказано выше, при каждом $l \leq 2/3$ функция $z_l(q)$ обращается в единицу при значении $q = q^*(l) = \dfrac{2}{l}$; в частности, из этого следует, что при $n \leq q^*(l)$ тривиальное разбиение $\pi = \{1, 2, \ldots, n\}$, состоящее из одной тотальной коалиции игроков, является миграционно устойчивым!

В самом деле, издержки любого игрока в тотальной коалиции не превосходят издержек краевых игроков, а последние по определению равны $z_l(n)$. Осталось вспомнить поведение функции $z_l(\cdot)$ или посмотреть на её график на рисунке 4, чтобы понять, что множество целых чисел, для которых значение рассматриваемой функции не превосходит 1 — это как раз множество целых чисел, не превосходящих $q^*(l)$. Таким образом, при любом $n \le q^*(l)$ издержки краевых, а поэтому и всех вообще, игроков тотальной коалиции не выше 1, и никто из них не пожелает отделиться в одиночную группу (а больше в тривиальном разбиении отделяться и некуда!).

Теперь воспользуемся приведёнными выше фактами для доказательства существования миграционно устойчивого разбиения при любых l и n.

Действовать будем так: каково бы ни было $l < 2/3$, оно попадает в один из полуинтервалов вида

$$\left[\frac{2}{k(k+1)}, \frac{2}{k(k-1)}\right],$$

где $k = 3, 4, \ldots$, либо в "урезанный" интервал

$$\left[\frac{2}{2(2+1)}, \frac{2}{3}\right] = (1/3, 2/3)$$

при $k = 2$. В каждом полуинтервале (как в обычных, так и в урезанном самом правом) актуальной парой будет именно пара $(k, k+1)$ — учитывая нашу договорённость в точках скачка брать правейшую из двух пар.

Более того, как раз в силу проделанного урезания самого правого интервала, издержки краевых жителей связных k-групп и связных $(k+1)$-групп (то есть групп, численность которых принадлежит актуальной паре значений) не будут превосходить значения 1.

Также вспомним, что при $n \le 2/l$ устойчива тотальная коалиция (то есть тривиальное разбиение), и ничего доказывать не надо. Так как в каждом из рассматриваемых диапазонов (включая и самый правый, для $k = 2$, урезанный!) выполнено неравенство $l \le \dfrac{2}{k(k-1)}$, то мы имеем $2/l \ge$

$k(k-1)$. Следовательно, при любом l из любого интервального диапазона значений, в котором актуальна пара $(k, k+1)$, все равномерные расселения вплоть до численности $n = k(k-1)$ заведомо обладают миграционно устойчивым разбиением — а именно, тривиальным.

Осталось доказать, что при любом $l < 2/3$ для всех расселений с численностью $n > k^l(k^l - 1)$ можно предъявить миграционно устойчивое разбиение. Мы разобьём доказательство этого утверждения на две леммы.

Лемма $FEFM$-4. Рассмотрим любое разбиение нашего мира на связные группы, размеры которых либо k^l, либо $k^l + 1$. Такое разбиение непременно будет миграционно устойчивым при $l < 2/3$.

Доказательство. Во-первых, так как в изучаемом диапазоне для l верна оценка $k^l + 1 < 2/l$ (выше именно этого мы так долго добивались!), то все вообще значения издержек для всех жителей мира не превосходят 1. В самом деле, издержки любого члена любой группы не выше, чем у краевого; у краевого же жителя издержки равны либо $z_l(k^l)$, либо $z_l(k^l + 1)$; оба значения численности лежат в диапазоне значений, в которых функция $z_l(\cdot)$ не превосходит 1 (см. рисунок 4).

Как следствие, никто не хочет стать одиночкой.

Помимо ухода в одиночку, угрозы устойчивости могут состоять в том, что член одной группы стал членом другой. Если член $(k^l + 1)$-группы перешёл в k^l-группу, то он её "превратил" тоже в группу размера $k^l + 1$, *причём* непременно стал там краевым (в силу связности групп исходного разбиения!). Тогда его издержки не ниже, чем у краевого игрока связной $(k^l + 1)$-группы, а у последнего, в свою очередь, не ниже, чем у нашего горе-перебежчика в его кровной, исходной группе рассматриваемого разбиения. То есть такая миграция никогда не сможет принести ему выигрыша.

Если член k^l-группы ушёл в $(k^l + 1)$-группу, то он стал краевым игроком $(k^l + 2)$-группы, то есть его издержки стали не менее, чем $z_l(k^l + 2) \geq z_l(k^l)$, в силу выбора k^l как минимизирующего функцию $z_l(\cdot)$. В то же время в исходной, связной k^l-группе издержки этого члена, наоборот, не превосходили $z_l(k^l)$. То есть от такого перемещения он также мог только проиграть.

Осталось рассмотреть два случая: миграция из k^l-группы в точно такую же k^l-группу, и миграция из (k^l+1)-группы в такую же (k^l+1)-группу. Первый случай разбирается в точности так же, как и миграция из k^l-группы в (k^l+1)-группу: из группы оптимального размера никогда не выгодно никуда мигрировать в связном разбиении.

А вот второй, последний случай миграции заслуживает отдельного рассмотрения. Итак, пускай некто из связной (k^l+1)-группы нашего исходного разбиения решил переметнуться в такую же (k^l+1)-группу. Издержки в исходной группе у него были не выше, чем у краевого, то есть не выше, нежели $z_l(k^l+1)$; издержки в новой группе, где он точно краевой, наоборот, не могут быть ниже, нежели $z_l(k^l+2)$.

Для завершения доказательства Леммы $FEFM$-4, то есть миграционной устойчивости нашего рассматриваемого разбиения, осталось показать, что $z_l(k^l+2) \geq z_l(k^l+1)$. В принципе, это очевидно из рисунка 4 — обе точки расположены на растущей ветке графика функции. Рассуждая более формально, абсолютный минимум функции $z_l(\cdot)$, равный $\sqrt{2/l}$, расположен строго левее точки k^l+1: в противном случае было бы $k^l < k^l+1 \leq \sqrt{2/l}$, откуда в силу строго монотонного убывания функции $z_l(\cdot)$ на отрезке $[1, \sqrt{2/l}]$ мы бы заключили, что $z(k^l) > z(k^l+1)$ — противоречие с тем, что целое значение k^l выбрано минимизирующим нашу функцию на пространстве всех натуральных чисел. А коли так, то мы имеем наоборот $\sqrt{2/l} < k^l+1 < k^l+2$, и на этом луче наша функция как раз возрастает, причём тоже строго: $z_l(k^l+2) > z_l(k^l+1)$. Так что и такая миграция игроку ничего не даёт.

Лемма $FEFM$-4 полностью доказана.

Для окончания доказательства теоремы существования миграционно устойчивых разбиений любого равномерного расселения остаётся воспользоваться следующим чисто комбинаторным приёмом.

Лемма $FEFM$-5. Любое число $n > k(k-1)$ может быть представлено в виде $\alpha k + \beta(k+1)$, где α и β — неотрицательные целые числа. (На самом деле и само число $n = k(k-1)$ тоже, но это не нужно — ибо для такого n всё ещё устойчивым будет тривиальное разбиение.)

Доказательство можно было бы опустить, но для полноты картины я его здесь приведу. Рассмотрим остаток от деления n на k, обозначим его за r. Имеем $n = r + tk$, где $t \in \mathbf{Z}$, а $r \in \{0, \ldots, k-1\}$. При этом в силу неравенства $n > k(k-1)$ мы имеем, что $t \geq k-1$ — ибо неполное частное нестрого монотонно возрастает. То есть, в частности, $t \geq r$! Но тогда имеем $n = (t-r)k + r(k+1)$ — искомое разложение, если положить $\alpha = t - r \geq 0$ и $\beta = r \geq 0$. **Лемма $FEFM$-5 доказана.**

Теперь, чтобы построить миграционно устойчивое разбиение, слева направо образуем β групп размера $k+1$, и все остальные α групп — размера k. Такое разбиение будет устойчивым, согласно Лемме $FEFM$-4. **Теорема существования миграционно устойчивого разбиения для равномерного случая $FEFM$ полностью доказана.**

Отметим, что искомое миграционно устойчивое разбиение строится очень по-разному для разных комбинаций параметров, и вообще большим чудом является то, что эти способы построения покрывают всё фазовое пространство задачи! В самом деле, сначала одним способом обрабатываются достаточно "разреженные" поселения: их дробят на пары и/или одиночки.

Но и для более плотных расселений принципиально по-разному строится устойчивое разбиение при различной общей численности игроков! Если их не очень много, то всех собирают "в кучу", и проживающим у границы от этого может быть почти так же трудно за счёт долгого перемещения к центру, как и в группе-одиночке.

А вот при прохождении порога устойчивости цельной группы, наоборот, население разбивается на более-менее оптимальные куски, и всем сразу становится очень хорошо, даже крайним. Чудеса заключаются в том, что такое разбиение становится универсально возможным ровно при том значении общей численности, n, при котором перестаёт быть устойчивым цельная группа! Невозможно отделаться от ощущения, что данный факт носит Божественный характер.

В заключение разбора случая центральной медианы скажу, что и здесь многое пока неясно, и прежде всего не разобран случай "разбегающихся" локаций, уже упоминавшийся в разделе FRM. Не исключено, что он окажется несложным (но гарантии не дам!).

1.4.2 Случай $FEMM$ (принцип минимального насилия)

Раздел FM, посвящённый анализу миграционно устойчивых решений в дискретной постановке, будет завершён на настоящей мажорной ноте. А именно, для *любого* расселения на прямой в подслучае $FEMM$ всегда существует устойчивое разбиение! Доказательство, приведённое ниже, принадлежит перу моего моавтора, коллеги, учителя, старшего друга и научного консультанта по работе над диссертацией, Шломо Вебера. Суть доказательства заключается в том, что соответствующая некооперативная игра оказывается *потенциальной*.

> **Теорема существования для случая $FEMM$.** Рассмотрим произвольное расселение $x_1 \leq \ldots \leq x_n$ на прямой. Для этого расселения существует такое разбиение множества игроков на непересекающиеся коалиции, которое будет миграционно устойчивым при правиле выбора медианы по принципу "минимального насилия при миграции".

Доказательство состоит в построении *потенциала*: такой функции $\mathcal{Q}$ на пространстве всех разбиений $\{\pi\}$ множества игроков N на произвольное число групп, со значениями в $\mathbf{R}$, что любой выгодный (снижающий индивидуальные издержки) переход одного игрока из группы в группу (в том числе и пустую) приводит к снижению значения потенциала. Так как разбиений конечное число, то одно из них доставляет потенциалу минимум, следовательно, является миграционно устойчивым. Как обычно, без ограничения общности положим $g = 1$.

Конкретно, потенциал выглядит следующим образом. Рассмотрим произвольное разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}$. Положим

$$\mathcal{Q}(\pi) := \sum_{l=1}^{k} \left[D[S_l] + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{|S_l|} \right], \tag{1.28}$$

где, согласно задаче (1.10), о которой шла речь в начале главы, $D[S]$ обозначает значение целевого функционала в оптимуме задачи Штейнера о минимизации суммарных транспортных издержек.

Воспроизведём здесь для удобства эту формулу для нашего случая $d = 1$:

$$D[S] = \min_{m\in\mathbf{R}} \sum_{i\in S} |x_i - m|. \tag{1.29}$$

Вторая часть (всё, кроме $D[S_l]$ внутри каждой скобки) представляет собой как бы "дискретный логарифм", целочисленный интеграл от функции $1/l$.

На самом деле мы докажем даже более сильное утверждение: *при любом выборе медианных локаций* $m_l \in M[S_l]$, $l = 1,\dots,k$ разбиение π, доставляющее минимум нашему потенциалу $\mathcal{Q}(\cdot)$, окажется миграционно устойчивым.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим произвольное разбиение $\pi = \{S_1,\dots,S_k\}$ и снабдим его произвольным набором медианных локаций, $m_l \in M[S_l]$, $l = 1,\dots,k$. А теперь по очереди разберём три случая: первый — когда в рассматриваемом разбиении π есть кто-то, кто хочет сменить группу, и при этом в его старой группе есть игроки, кроме него; второй — когда есть кто-то, кто образует группу в одиночестве, но хочет присоединиться к какой-то существующей группе; наконец, третий — когда есть кто-то, кто был частью неодиночной группы и хочет теперь основать свою собственную группу-одиночку. Этими тремя случаями исчерпываются все мыслимые миграционные угрозы разбиению π. В всех трёх случаях мы предъявим такое новое разбиение $\tilde{\pi}$, что $\mathcal{Q}(\pi) > \mathcal{Q}(\tilde{\pi})$.

В первом случае существуют такие $l \neq t;\quad l,t \in \{1,2,\dots,k\}$, и такой игрок $a \in S_l$, что для издержек этого игрока в исходном разбиении π (то есть, внутри группы $S_l \in \pi$ этого разбиения) и в новой группе $S_t \sqcup \{a\}$ выполнено строгое неравенство

$$\frac{1}{|S_l|} + |x_a - m_l| > \frac{1}{|S_t|+1} + |x_a - m'|, \tag{1.30}$$

где m' — единственная (!) точка в пересечении множеств $M[S_t]$ и $M[S_t \sqcup \{a\}]$, см. обсуждения выше про принцип минимального насилия при миграции, согласно которому именно эта локация должна выбираться в расширившейся группе $S_t \sqcup \{a\}$.

Новое разбиение определяем очевидным образом: $\tilde{\pi} = \{\tilde{S}_1,\dots,\tilde{S}_k\}$, где для всех $j \neq l,t$ имеем $\tilde{S}_j = S_j$, затем $\tilde{S}_l = S_l \setminus \{a\}$ и $\tilde{S}_t = S_t \sqcup \{a\}$.

Количество групп в разбиении не меняется именно в силу того, что мы разбираем первый случай.

Исследуем, чему равно выражение $\mathcal{Q}(\pi) - \mathcal{Q}(\tilde{\pi})$.

Изменения касаются только двух вовлечённых групп с номерами l, t; все остальные слагаемые попарно сокращаются. Кроме того в суммах, определяющих дискретный логарифм, сокращаются все члены, кроме двух крайних. Имеем

$$\mathcal{Q}(\pi) - \mathcal{Q}(\tilde{\pi}) = \\ [D[S_l] - D[S_l \setminus \{a\}]] + [D[S_t] - D[S_t \sqcup \{a\}]] + \left[\frac{1}{|S_l|} - \frac{1}{|S_t + 1|}\right]. \tag{1.31}$$

“Разберёмся” с каждым из первых двух слагаемых по отдельности. Так как

$$D[S_l \setminus \{a\}] = \min_{m \in \mathbf{R}} \sum_{i \in S_l \setminus \{a\}} |x_i - m|, \tag{1.32}$$

то

$$D[S_l] = \sum_{i \in S_l} |x_i - m_l| = |x_a - m_l| + \sum_{i \in S_l \setminus \{a\}} |x_i - m_l| \geq \\ |x_a - m_l| + D[S_l \setminus \{a\}], \tag{1.33}$$

и поэтому $D[S_l] - D[S_l \setminus \{a\}] \geq |x_a - m_l|$.

Далее, так как $m' \in M[S_t] \cap M[S_t \sqcup \{a\}]$, то

$$D[S_t \sqcup \{a\}] = \sum_{i \in S_t \sqcup \{a\}} |x_i - m'| = |x_a - m'| + \sum_{i \in S_t} |x_i - m'| = \\ |x_a - m'| + D[S_t], \tag{1.34}$$

а значит, разность $D[S_t] - D[S_t \sqcup \{a\}]$ в точности равняется $-|x_a - m'|$. Теперь из формулы (1.31) получаем

$$\mathcal{Q}(\pi) - \mathcal{Q}(\tilde{\pi}) \geq \\ |x_a - m_l| - |x_a - m'| + \frac{1}{|S_l|} - \frac{1}{|S_t + 1|}, \tag{1.35}$$

и это последнее выражение в силу формулы (1.30) строго больше нуля. Тем самым $\mathcal{Q}(\pi) > \mathcal{Q}(\tilde{\pi})$.

Во втором случае существуют такие $l \neq t; \quad l, t \in \{1, 2, \ldots, k\}$, что $S_l = \{a\}$, и для издержек игрока a в новой группе $S_t \sqcup \{a\}$ выполнено строгое неравенство

$$1 > \frac{1}{|S_t| + 1} + |x_a - m'|, \tag{1.36}$$

где m' — единственная точка в пересечении множеств $M[S_t]$ и $M[S_t \sqcup \{a\}]$.

Новое разбиение в этом случае определяем так: $\tilde{\pi}$ состоит из $(k-1)$-й группы, из которых $(k-2)$ группы совпадают с группами S_j разбиения π при $j \neq l, t$, а последняя, $(k-1)$-я группа совпадает с $[S_t \sqcup \{a\}]$.

Исследуем, чему равно выражение $\mathcal{Q}(\pi) - \mathcal{Q}(\tilde{\pi})$ на этот раз. Опять-таки, изменения касаются только двух вовлечённых групп с номерами l, t, одна из которых в разбиении $\tilde{\pi}$ просто перестаёт существовать. Имеем (так как $D[S_l] = D[\{a\}] = 0$)

$$\mathcal{Q}(\pi) - \mathcal{Q}(\tilde{\pi}) = [D[S_t] - D[S_t \sqcup \{a\}]] + \left[1 - \frac{1}{|S_t + 1|}\right]. \tag{1.37}$$

Как и в предыдущем случае, разность $D[S_t] - D[S_t \sqcup \{a\}]$ в точности равняется $-|x_a - m'|$, поэтому получаем окончательно

$$\mathcal{Q}(\pi) - \mathcal{Q}(\tilde{\pi}) = 1 - |x_a - m'| - \frac{1}{|S_t + 1|}. \tag{1.38}$$

И снова, на этот раз в силу формулы (1.36) оцениваемая разность оказывается строго положительной, и вновь убеждаемся в том, что $\mathcal{Q}(\pi) > \mathcal{Q}(\tilde{\pi})$.

Наконец, в третьем случае существует такое $l \in \{1, 2, \ldots, k\}$, и такой игрок $a \in S_l$, что для издержек этого игрока в исходном разбиении π выполнено строгое неравенство

$$\frac{1}{|S_l|} + |x_a - m_l| > 1. \tag{1.39}$$

Из выполнения данного неравенства уже следует, что группа $S_l \setminus \{a\} \neq \emptyset$. Неравенство означает в точности тот факт, что игроку a лучше стать одиночкой.

В этом последнем случае новое разбиение, состоящее из $(k+1)$-й группы, определяется так: $\tilde{\pi} = \{S_1, \ldots, S_{l-1}, S_l \setminus [a], S_{l+1}, \ldots, S_k, [a]\}$.

Чему равно выражение $\mathcal{Q}(\pi) - \mathcal{Q}(\tilde{\pi})$ в третьем, последнем случае? Изменения теперь касаются только группы S_l, а также вновь рождённой группы $\{a\}$. Имеем

$$\mathcal{Q}(\pi) - \mathcal{Q}(\tilde{\pi}) = [D[S_l] - D[S_l \setminus \{a\}]] - 1 + \frac{1}{|S_l|}. \tag{1.40}$$

Здесь, как и в первом случае, мы оцениваем разницу в транспортировках снизу: $D[S_l] - D[S_l \setminus \{a\}] \geq |x_a - m_l|$, после чего имеем

$$\mathcal{Q}(\pi) - \mathcal{Q}(\tilde{\pi}) \geq |x_a - m_l| - 1 + \frac{1}{|S_l|}. \tag{1.41}$$

И здесь, на этот раз в силу формулы (1.39), делаем вывод о том, что $\mathcal{Q}(\pi) - \mathcal{Q}(\tilde{\pi}) > 0$, и значит, опять у нас налицо неравенство $\mathcal{Q}(\pi) > \mathcal{Q}(\tilde{\pi})$, которое, как и выше, означает, что исходное разбиение не доставляло минимума функционалу (потенциалу) $\mathcal{Q}$.

Во всех мыслимых ситуациях, когда разбиение π не являлось миграционно устойчивым, мы предъявляли конкретное разбиение, значение потенциала на котором было ниже, чем на разбиении π.

Следовательно, в разбиении π^*, доставляющего потенциалу $\mathcal{Q}$ минимум, миграционных угроз нет, и оно обязательно будет миграционно устойчивым. **Теорема $FEMM$ полностью доказана.**

Два важных замечания завершают первую главу.

Замечание 1.

“Потенциальную” технику можно перенести и на непрерывный случай. В результате возникает весьма глубокая и содержательная математическая теория потенциалов на пространстве разбиений данного континуального измеримого пространства игроков. К сожалению, краевые эффекты при стремлении размера одной из групп разбиения к нулю пока оказывают на эту теорию непреодолимое разрушающее воздействие. Я нахожусь в процессе активных раздумий над нахождением света в конце туннеля.

Считаю также своим долгом тут упомянуть те работы, которые меня научили понятию потенциала: [112], [118], [98]. Особо хочу на страницах диссертации с благодарностью отметить то влияние, которое на меня как учёного оказал Н.С. Кукушкин.

Замечание 2.

К сожалению, Теорема $FEMM$ не может быть обобщена до постановок с $d > 1$ — многомерных. Проблема в том, что свойство одноточечности (более важно, непустоты!) пересечения медианных множеств $M[S]$ и $M[S \setminus \{a\}]$ является артефактом расселений на прямой. Это и понятно: в пространстве, *как правило,* медиана однозначно определена (Лемма о медиане выше!), и, конечно, от удаления точки её локация в норме будет меняться. Многомерные постановки в этом плане больше напоминают случай $FEFM$, в котором, как мы знаем, теоремы существования нет, а есть контрпример к ней. Потенциальная техника (и возможность её применения на прямой) являются ещё одним роскошным подарком, ниспосланным нам, математикам, прямо с Небес!

Глава 2

Случай F, продолжение: коалиционные угрозы

Содержательная часть предыдущей главы была посвящена анализу миграционно устойчивых решений в задачах многомерного размещения, заданных на прямой.

В текущей главе речь пойдёт о парировании угроз коалиционной природы в конечной постановке. По сути дела, весь анализ, проведённый впоследствии в ходе диссертационной работы, родился из усилий 10-летней давности в этом направлении. Впрочем, некоторые результаты тут весьма свежие. Например, это касается "универсальной теоремы" раздела 2.4, завершающего эту главу — она опубликована только в конце 2012 года, когда наконец удалось соорудить её безупречное доказательство.

Задача поиска коалиционно-устойчивых разбиений является частным случаем задачи нахождения устойчивых решений в коалиционной теории игр (см. [13], [26]). Тем не менее, здесь есть тонкости.

В то время как в стандартной теории кооперативная игра чаще всего предполагается *супераддитивной*,[1] в кооперативных моделях, построенных на основе ЗМР ниже в текущей главе, это далеко не всегда так. Правильная концепция для игр, не обладающих супераддитивностью, разработана в великой работе Р.Ауманна и Ж.Дреза [39]. Именно этот подход и будет развит в последующих разделах главы 2.

Б'ольшая часть результатов относится к случаю FEC, ему посвящено целых два раздела (2.3 и 2.4). Раздел 2.2 содержит сводку результатов,

[1] См. цитированные выше источники; простым языком это означает, что в решении игрокам выгодно действовать "единым фронтом".

полученных (и известных ранее) в двух других сценариях — FRC и FSC. Вводный раздел 2.1 содержит формальные определения коалиционной устойчивости решений при каждом из трёх изучаемых в работе принципов распределения издержек, а также мотивировку исследования и историческую справку.

2.1 Теоретико-игровые угрозы коалиционной природы

Грубо говоря, коалиционные угрозы устойчивости — это угрозы спонтанного формирования новых структур, юрисдикций, регионов, клубов, партий и т.п.

Никто до конца не понимает, как нужно формализовывать подобные процессы. Существует целый ряд формальных подходов, и принятый в диссертации — лишь один из возможных. Иные подходы обсуждаются, например, в книге [63], а также в других областях знания (в социологии, например).

Подход *экономический* подчёркивает роль издержек в процессе формирования объединений, а также *добровольность участия.* Иными словами, новая группа образуется тогда, когда *каждый* из её членов в этом заинтересован, причём именно в силу того, что его издержки снизятся. Именно такой подход и развивается ниже в текущей главе (и далее в работе).

2.1.1 Исторический экскурс: в погоне за устойчивостью на прямой

Сперва, однако, немного истории: в 2002 году я познакомился с профессором Шломо Вебером, который является моим научным консультантом по настоящей диссертации, и с которым в паре мы работали всё это время (а также ещё с несколькими год от года меняющимися соавторами). Он предложил мне летом 2003 года решить следующую задачу, в которой угадывается основной сюжет:

Заданы n точек-людей на прямой. Требуется разбить их на несколько групп. В каждой группе выбирается медиана — любая из медиан, если их целый отрезок. В медиане расположено “место встреч”, и каждый *член группы туда самостоятельно должен добираться. Издержки по поддержанию места встреч делятся поровну между всеми членами группы. Разбиение на группы должно быть выбрано с соблюдением следующего условия: не существует коалиции S, вместе с центром m в одной из её медиан, такой что каждому из отклонистов в ней лучше по сумме издержек, чем в той группе, куда его определили.*

Совершенно точно и безупречно сформулированная математическая проблема, я такие люблю. Но что-то в течение двух месяцев никак не удавалось в ней преуспеть! И так, и эдак, и "малые миры" перебрал все (где до 4-х точек всего), всё в них хорошо, но вот не удаётся уже при $n = 5$ ничего доказать! Пытался представить эту коалиционную игру как разность супермодулярных, придумал технику "горных хребтов" (пара слов о ней ниже, а подробнее — в [122]), но задача не сдаётся.

И только в 2003 году осенью, по пути в Барнаул из Новосибирска, в котором я тогда жил, догадка озарила меня как вспышка молнии: гипотеза неверна, надо строить контрпример! К вечеру, уже в Барнауле, пример этот был завершён прямо в цифрах. Я его так и назвал — контрпримером Новосибирско-Барнаульским. Вышла такая сказка:

Жители Новосибирска и Барнаула решили присоединиться к российской футбольной семье. В Новосибирске 3 фанатских группировки, в Барнауле — две, все группировки одинаковой численности. Если две или более группировок объединяются ради создания клуба, то стадион клуба строится в том городе, где больше группировок; если поровну, то в любой точке дороги Новосибирск – Барнаул. Поддержание клуба эквивалентно по стоимости регулярному перемещению на 1200 километров до стадиона, если одна группировка его поддерживает. Если клуб поддерживается несколькими фанатскими группировками, то стоимость поддержания клуба делится поровну между ними. Расстояние от Новосибирска до Барнаула равно 380 километров.[2] *Сколько клубов будет организовано и где будут их стадионы, если исходить из принципа коалиционной устойчивости?*

---

[2]Это правда!

Оказалось, что ответа нет — коалиционно устойчивых организаций этого маленького футбольного мира не существует. Ключевым фактом здесь является существенность угроз со стороны *неинтервальных* коалиций, в которую никто до того момента не верил.

Потом, однако, контрпримеры посыпались как из рога изобилия.

Соавторы придумали контрпример для случая центральной медианы (он ниже приведён без подробного доказательства, но суть в нём примерно та же, что и в Новосибирско-Барнаульском).

Затем был разобран "непрерывный" аналог Новосибирско-Барнаульской футбольной сказки, и там (случай TEC, глава 4) были выявлены целые зоны "хронической коалиционной неустойчивости" в фазовом пространстве задачи (то есть в пространстве конфигураций параметров, определяющих конкретную постановку).

Было, однако, заметно, что контрпримеры очень чувствительны к правилу выбора медианы среди множества медиан, когда последнее представляет собой невырожденный отрезок, и все примеры построены "на острие ножа": численно до устойчивости и там, и там, и там "недалеко".

Чтобы закрыть тему, надо было сделать одно из двух. Либо извернуться и придумать такие специальные правила выбора медианы, при которых в отклоняющиеся коалиции засылаются "агенты разведки": последние вынуждают смещать медиану в наиболее неблагоприятную с точки зрения коалиционной угрозы локацию. И если существуют такие правила, что с ними общая теорема существования устойчивого разбиения хотя бы для расселений на прямой верна, то эти правила заслуживают внимания и детального изучения. Либо ни при каких правилах устойчивость не может быть гарантирована.

Я поставил на вторую лошадку, и выиграл суперприз. А именно, мне (повезло, и) удалось построить пример конкретного расселения 13 игроков вдоль одной прямой, удовлетворяющего следующему свойству:

Для любого разбиения множества N *из* 13*-ти игроков на несколько непересекающихся групп,* $N = S_1 \sqcup \ldots \sqcup S_k$*, и произвольного выбора медиан* $m_l \in M[S_l]$, $l = 1, \ldots, k$ *в этих группах, существует коалиция*

S с однозначно определённой медианой $M[S] = \{m\}$, каждый участник которой несёт в последней коалиции строго меньшие издержки, нежели в той группе S_l, при медиане m_l, к которой он был приписан в исходном разбиении.

Этот пример закрывает вопрос об универсальной устойчивости даже на прямой. Тем самым в поисках коалиционной устойчивости надо обратиться к каким-то специальным классам расселений. Например, как ниже будет показано, устойчивое разбиение на группы всегда существует для расселений с равноотстоящими локациями (дискретно-равномерных).[3]

2.1.2 Ядро в форме разбиения на коалиции

Перейдём к строгой формализации коалиционных угроз устойчивости, пока для произвольной размерности d пространства разногласия $\mathbf{R}^d$. Начнём с наведения мостов со стандартной коалиционной теорией игр.

Каждому множеству игроков N, расселение которых задано набором локаций $(x_1, \ldots, x_n)$, где $\forall i = 1, \ldots, n$ имеем $x_i \in \mathbf{R}^d$, *вместе с указанным принципом распределения издержек* P (см. определение P в главе 1), мы сопоставим *кооперативную игру в характеристической форме* V ([13]). А именно, множество $V(S)$ допустимых выигрышей для данной коалиции $S \subset N$, $S \neq \emptyset$ состоит из всех векторов $\{v = (v_i)_{i \in S} \in \mathbf{R}^S\}$,[4] для которых существует вектор $w^S = \{w_i^S\}_{i \in S} \in P[S]$ со свойством

$$\forall i \in S \quad v_i \leq -w_i^S \tag{2.1}$$

Выигрыши все идут со знаком “минус”, так как в настоящем исследовании в фокусе внимания находятся издержки, а не выигрыши, участников.

Это игра удовлетворяет всем стандартным условиям, накладываемым на игры без побочных платежей ([13], [26]). Таким образом, можно применить к ней обычные приёмы исследования кооперативных игр. (Пока

[3] И то, в строгой форме этот результат пока проверен только для принципа центральной медианы, FEF. Я гарантирую, что результат верен и в постановке FEM, но нужно посадить какого-нибудь студента для аккуратного разбора всех возникающих подслучаев — ибо их там жуткое количество.

[4] Разницы между $\mathbf{R}^S$ и $\mathbf{R}^{|S|}$ особой нет, разве что методологическая: в первом случае подчёркивается роль S как конкретного подмножества N. Последнее может быть важно для понимания сути дела.

мы не специфицировали конкретного принципа распределения издержек, все построения годятся для любого из исследуемых принципов.) Ниже приводится ещё одно стандартное определение из кооперативной теории игр.

Определение FND**.** *Недоминируемым распределением (вектором) выигрышей* называется такой вектор $v = \{v = (v_i)_{i \in N}\} \in \mathbf{R}^n$, что для любого непустого $S \subset N$ индуцированный вектор выигрышей $v_S = \{v = (v_i)_{i \in S}\} \in \mathbf{R}^S$ не принадлежит внутренности множества $V(S)$.

Заметим, что определение, данное выше, годится для любого абстрактного вектора из $\mathbf{R}^n$. Теперь, если мы хотим недоминируемый вектор выигрышей получить в качестве *решения задачи*, нам нужно наложить на него *условия допустимости*, иначе говоря, *реализуемости* в рамках рассматриваемой игры. Начнём с определения ядра, воспроизведём его здесь из [13]:

Определение FC**.** *Ядром* кооперативной игры, заданной в характеристической форме, называется множество всех недоминируемых распределений, реализуемых тотальной коалицией: $v \in V(N)$.

Кооперативные игры, построенные по данным изучаемой задачи, не всегда удовлетворяют условию супераддитивности. Это означает, в частности, что образование и функционирование тотальной коалиции не гарантирует Парето-оптимальности допустимых векторов выигрышей игроков. Поэтому определение ядра также нуждается в модификации. Требуемая модификация определения взята из статьи [39], и называется там Core of a coalition partition form:

Определение FCS**.** *Ядром в форме разбиения на коалиции* называется множество таких недоминируемых распределений $v \in \mathbf{R}^n$, для которых существует разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}$ множества игроков, реализующее вектор v “по частям,” то есть $\forall l = 1, \ldots, k$ имеем

$$v^{S_l} = \{v_i\}_{i \in S_l} \in P[S_l] \tag{2.2}$$

Из недоминируемости любого ядерного распределения v, в частности, следует, что при любом l вектор v^{S_l} располагается на Парето-границе множества $P[S_l]$ допустимых распределений выигрышей для группы S_l.

В настоящей главе принята концепция коалиционной устойчивости *решения: мы будем во всех случаях искать ядро в форме разбиения на коалиции.* При этом мы смещаем фокус рассмотрения с *недоминируемых распределений,* $v \in \mathbf{R}^n$, на анализ *разбиений,* реализующих эти недоминируемые распределения выигрышей, а точнее, недоминируемые распределения издержек в задачах многомерного размещения.

Коалиционная устойчивость, или устойчивость против теоретико-игровых угроз коалиционной природы, может быть определена для всех наших трёх принципов FT, FR, FE (а также и для любых иных, но на этом мы не будем останавливаться), согласно выработанному выше единому подходу.

Ниже мы по очереди рассмотрим три введённых выше принципа распределения издержек, и в каждом из них проанализируем концепцию коалиционной устойчивости решений: FRC, FSC и FEC; последний случай при $d = 1$ также распадается на под-случаи $FEFC$ и $FEMC$. Кроме того, будет введён ещё один случай $FEAC$, подводящий итог общему рассмотрению коалиционной устойчивости для дискретных расселений.

2.2 Результаты для постановок FRC и FSC

В текущем разделе мы "расправимся" с двумя из трёх постановок коалиционной устойчивости конечных расселений, одна из которых (FRC) допускает универсальную теорему существования решения, а другая (FSC) была подвергнута анализу в работах предшественников, о чём сказано выше в обзоре литературы во вводной главе; здесь же мы приводим дополнительную характеризацию решений для постановки FSC.

Но сперва переформулируем концепцию коалиционной устойчивости разбиения при произвольном принципе распределения издержек более удобным для дальнейшего образом:

Определение FC**.** Разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}$, где $S_1 \sqcup \ldots \sqcup S_k = N$, называется *коалиционно-устойчивым* или *ядерным* для принципа распределения издержек P, если существует вектор $u = (u_1, \ldots, u_n)$, для которого выполнены следующие два требования:

(i) Для каждой группы разбиения $S_l \in \pi$ проекция вектора u на группу S_l, то есть вектор $\{u_i\}_{i \in S_l}$, является разрешённой схемой относительно принципа P для группы S_l, то есть принадлежит множеству $P[S_l]$;

(ii) для любой потенциальной коалиции S и любой её разрешённой относительно P схемы $w^S \in P[S]$ существует такой член коалиции S, скажем $i \in S$, что для него верно следующее неравенство:

$$w_i^S \geq u_i. \tag{2.3}$$

2.2.1 Случай FRC: универсальная теорема существования

Начнём с самого простого случая, когда коалиционные угрозы устойчивости исследуются в рамках *принципа Ролса*, или *принципа выравнивания издержек*, принятого в некоторых профессиональных сообществах (см. [68]). Определение FC для этого случая оборачивается определением FRC:

Определение FRC. Разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}$, где $S_1 \sqcup \ldots \sqcup S_k = N$, называется *коалиционно-устойчивым* или *ядерным* в случае FR, если для любой потенциальной коалиции S существует группа S_l из исходного разбиения, нетривиально пересекающаяся с S (что означает $S \cap S_l \neq \emptyset$) и такая, что

$$c[S] \geq c[S_l]. \tag{2.4}$$

Иными словами, в любой потенциальной коалиции средние издержки не ниже средних издержек хотя бы одной из групп разбиения, содержащих членов коалиции S. Ведь тогда тот участник отклоняющейся коалиции, чьи издержки в результате не снизились, откажется от “авантюры”.

Приведённая ниже теорема является следствием более общих результатов из ([43]). Доказательство ниже взято из нашей статьи [47], и является совершенно конструктивным.

Его применимость в рассматриваемой ситуации обусловлена подстановкой $v[S] := -c[S]$, и далее всё по тексту (мы время от времени оперируем с понятием выигрыша, который есть “минус издержки”). Читатель может заметить, что речь идёт о совершенно общем результате из коалиционной теории игр.

> **Теорема** FRC**.** Пусть задана игра в коалиционной форме, у которой множество всех допустимых платежей у любой коалиции $S \subset N$ одноточечно и "диагонально", то есть состоит из одной точки[5] с равными координатами $(v[S], \ldots, v[S]) \subset \mathbf{R}^S$.
>
> Тогда, каковы бы ни были эти $2^n - 1$ чисел $\{v[S]\}_{S \subset N,\, S \neq \emptyset}$, всегда существует разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}$, где $N = S_1 \sqcup \ldots \sqcup S_k$, устойчивое в смысле определения FRC.

Доказательство состоит в явной конструкции. Рассмотрим коалицию (любую, если таких более чем одна), доставляющую максимум нашей функции

$$v : 2^N \setminus \emptyset \to \mathbf{R}, \tag{2.5}$$

определённой на множестве непустых подмножеств N. Обозначим такую коалицию за S_1. Это — самая эффективная группа, в ней платёж каждого из игроков наибольший среди всех возможных коалиций.

Если $S_1 = N$, построение окончено. Если нет, рассмотрим любую коалицию (если таких более, чем одна), доставляющую максимум функции

$$v : 2^{N \setminus S_1} \setminus \emptyset \to \mathbf{R}, \tag{2.6}$$

определённой на множестве непустых подмножеств теперь уже множества $N \setminus S_1$. Обозначим её за S_2. Это — "second-best", вторая наилучшая коалиция, которая доставляет наибольший выигрыш оставшимся после отделения коалиции S_1 "неудачникам первого порядка".

И так далее. На каждом следующем шаге (которых может быть не более, чем общее число игроков, n) мы вычленяем самую успешную из коалиций, образованных остающимися игроками, пока все игроки не исчерпаются. Как итог, мы получим некоторое разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}$.

---

[5]Как правило, в теории кооперативных игр принимается соглашение, что, вместе с любым вектором, множество выигрышей коалиции должно содержать и все вектора, худшие по Парето. Тогда, наряду с нашим диагональным вектором, надо включить и весь отрицательный ортант $(v[S], \ldots, v[S]) - \mathbf{R}^S$. На суть рассмотрений это не влияет.

Утверждается, что оно FRC-устойчивое. В самом деле, пусть есть произвольная непустая коалиция $S \subset N$. Рассмотрим минимальный номер j такой, что пересечение $S \cap S_j$ непусто. Тогда мы имеем $S \subset (N \setminus [S_1 \sqcup \ldots \sqcup S_{j-1}])$, и по построению $v[S] \leq v[S_j]$. Для любого $i \in S \cap S_j$ (существующего, ибо это пересечение непусто!) тогда верно, что ему невыгодно участвовать в сепаратистской коалиции S, ибо его выигрыш по сравнению с нахождением в S_j (т.е. при исходном разбиении π) не увеличится. Теорема доказана.[6]

Отметим, что данная теорема является простым следствием результатов Кукушкина об играх с ацикличными порядками коалиционных улучшений, о которых он докладывал на семинаре ЦЭМИ [18].

Два замечания завершают этот подраздел.

Замечание 1. Непрерывный случай. По модулю небольших нюансов, приведённое выше доказательство покрывает оба непрерывных сценария, с плотностью расселения DRC и с конечным числом типов, TRC. Это закрывает ещё два из 27 кирпичиков нашего научного “кубика-рубика”. Вкупе с DRN и TRN, о которых было сказано выше, это даёт нам право попрощаться со случаем выравнивания платежей.

(Тем более удивительно, что принцип Роллса ещё встретится на нашем пути, выскочив из сценария DSC как чёрт из табакерки! Неисповедимы пути Господни в плане внутринаучных параллелей, я давно это замечал.)

Замечание 2. Неинтервальность устойчивых решений. Даже если исходная задача многомерного размещения по факту одномерна, то нет гарантии на то, что полученное в доказательстве разбиение будет интервальным.

Более того, можно привести пример, где *единственным* коалиционно устойчивым решением будет именно “рваное” разбиение на группы. Вот соответствующий пример: $g = 8$ (т.е. достаточно большая величина), а расселение таково: $x_1 = -2$; $x_2 = x_3 = \ldots = x_8 = x_9 = 0$; $x_{10} = 2$ (см. рисунок 5).

[6] Ещё раз отмечу, что по сравнению с определением FRC, мы здесь работаем не с издержками, а с выигрышами, поэтому все знаки у нас “наоборот”.

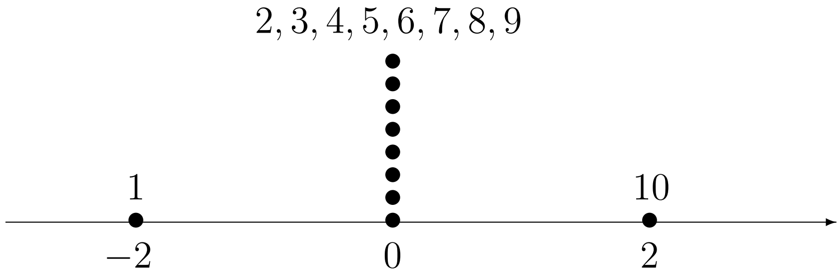

Рисунок 5. Неинтервальная устойчивость для случая FRC.

Ясно, что коалиция $S_1 = \{2, \ldots, 9\}$ со значением $c[S_1] = 1$ доставляет единственный минимум функции $c[S]$ на множестве всех непустых коалиций $S \subset N$.[7] Поэтому в *любом* устойчивом разбиении S_1 будет присутствовать как одна из групп.

Но тогда оставшиеся двое, 1 и 10, вынуждены выбирать между $c = 8$ (поодиночке) и $c = 6$ (если в паре друг с другом), поэтому они предпочтут объединиться. Итог: $\pi = \{S_1, S_2\}$, где $S_1 = [2, \ldots, 9]$ и $S_2 = [1, 10]$ — *единственное* коалиционно-устойчивое разбиение, и это разбиение неинтервально!

2.2.2 Случай FSC: основные определения и пояснения

Переходим к популярному и хорошо изученному до настоящего исследования случаю FSC, то есть поиску устойчивых разбиений при принципе произвольных побочных платежей.

Формализация угроз устойчивости, то есть уточнение расплывчатого определения FC коалиционной устойчивости для рассматриваемого случая, потребует известного воображения.

Итак, что означает устойчивость относительно коалиционных угроз в случае FS? Когда группа готова отделиться от предписанного сообществу

[7] Доказательство: так как $g = 8$, то для коалиций размером меньше 8 значение 1 физически недостижимо. Далее, если коалиция не сосредоточена по одному адресу, то её суммарные издержки не менее $8 + 2 = 10$, поэтому для достижения значения средних издержек, равного 1 (то есть средних издержек в S_1), в ней должно быть не менее 10 участников; но их у нас всего 10! Следовательно, таковой может быть только тотальная коалиция $S = N$. Но в последней суммарные издержки равны уже 12.

N разбиения π? Когда она может, действуя самостоятельно, так перегруппировать индивидуальные платежи внутри себя, чтобы каждому из её участников стало менее затратно, нежели при разбиении π.

Но ведь это, помятуя о произвольном выборе перераспределения издержек внутри S, эквивалентно тому, что группа, отделившись, просто-напросто снизит средние издержки, по сравнению с усреднёнными издержками, предписанными её членам в π.

Чтобы "парировать" подобные перегруппировки, разбиение π также в полной мере вольна использовать свою свободу выбора.

Это означает, что "Центр" перераспределяет любым способом свои собственные суммарные издержки, которые составляют

$$\sum_{l=1}^{k} |S_l| c[S_l] = gk + \sum_{l=1}^{k} D[S_l]. \tag{2.7}$$

Иными словами, правильное определение будет выглядеть так:

Определение FSC. Разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}$, где $S_1 \sqcup \ldots \sqcup S_k = N$, называется *коалиционно-устойчивым* или *ядерным* в случае FS, если существует такой вектор распределения издержек $(x_1, \ldots, x_n)$, что он может быть реализован через разбиение π:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{l=1}^{k} |S_l| c[S_l], \tag{2.8}$$

и что для любой потенциальной непустой коалиции $S \subset N$ имеет место "ядерное неравенство"

$$g + D[S] = |S| c[S] \geq \sum_{i \in S} x_i. \tag{2.9}$$

Случай FSC: пояснения к формализации. Здесь следует сделать одно важное замечание. Может показаться, что мы не в полной мере использовали в определении FTC возможности коалиции S по предъявлению угроз устойчивости разбиению π. В самом деле, даже если средние издержки членов коалиции S не ниже средних издержек при реализации π, всё ещё а приори возможно эффективно подразбить, в свою очередь, саму коалицию S на куски так, чтобы в результате средние издержки уже были ниже, чем при реализации π.

Например, $S = T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_a$, так что теперь неравенство в нужную сторону нарушено:

$$|S|c'[S] := \sum_{l=1}^{a} |T_l|c[T_l] < \sum_{i \in S} x_i. \tag{2.10}$$

Перегруппируя, однако, слагаемые, получаем такое неравенство:

$$\sum_{l=1}^{a} |T_l|c[T_l] < \sum_{l=1}^{a} [\sum_{i \in T_l} x_i], \tag{2.11}$$

а, следовательно, существует такой l, что

$$|T_l|c[T_l] < \sum_{i \in T_l} x_i, \tag{2.12}$$

что в точности означает, что группа T_l предъявит коалиционную угрозу в первоначальном, узком смысле слова.

Следовательно, в определении FSC на самом деле учтены все мыслимые угрозы со стороны потенциальных коалиций.

Ещё пара слов об устойчивых разбиениях для FSC-случая. Сделаем про рассматриваемый случай ещё одно наблюдение, ни в коей мере не выполненное ни в случае FRC, ни в рассмотренном дальше в работе случае FEC, ни для каких из уже рассмотренных выше сценариев с поиском миграционно устойчивых решений.

А именно, оказывается, что любое разбиение π, коалиционно устойчивое для принципа трансферабельной полезности, обязательно решает и исходную задачу, записанную в форме (1.12).

Кроме того, устойчивое разбиение может быть реализовано лишь через такие допустимые вектора издержек $(x_1, \ldots, x_n)$, которые не подразумевают межгрупповых субсидий.

Последнее означает, что для любой группы S_l из устойчивого разбиения π, реализованного через вектор $(x_1, \ldots, x_n)$, имеет место равенство

$$|S_l|c[S_l] = \sum_{i \in S_l} x_i. \tag{2.13}$$

Суммируем эти наблюдения в виде следующей теоремы.

Теорема FSC**.** Рассмотрим устойчивое разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}$, где $N = S_1 \sqcup \ldots \sqcup S_k$, вместе с реализующим его допустимым вектором $(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда справедливы следующие два утверждения:

(i) Разбиение π решает задачу (1.12);

(ii) Для любого $l = 1, \ldots, k$ выполнено *внутригрупповое балансовое условие* —(2.13).

Строгое доказательство практически слово в слово повторяет трюк с эквивалентностью двух вариантов определений FSC-устойчивости, см. выше. Вкратце, если бы (i) не имело места, то всё сообщество N, перегруппировавшись, снизило бы средние издержки (достигая их минимума, см. задача (1.12)!), но тогда сообщество N представило бы угрозу устойчивости при втором способе определить FSC. Значит, одна из групп оптимального дробления N представила бы угрозу устойчивости и согласно данному выше определению FSC.

Что же касается условия сбалансированности (ii), то его нарушение автоматически повлекло бы наличие как групп-акцепторов, так и групп-доноров. Само собой, тогда любая группа-донор угрожает устойчивости разбиения π, реализованного посредством вектора $(x_1, \ldots, x_n)$. **Теорема** FSC **доказана.**

2.2.3 Случай FSC: малые размерности ($d = 1, 2$)

Практически все известные на сегодня результаты про устойчивость процессов формирования групп в задаче многомерного размещения касаются случая $X = \mathbf{R}$. В частности, в работе [104], на основе методов линейного программирования из статьи [71], было показано, что для любого расселения на прямой при принципе произвольных побочных платежей FSC существует коалиционно устойчивое решение (иначе говоря, оптимальное разбиение можно снабдить такими внутригрупповыми трансферами, что оно станет устойчивым).

Ниже мы ещё вернёмся к этому вопросу в главе 3, раздел 3.4, где в фокусе нашего внимания будет *двумерная* постановка с равномерным расселением на целой плоскости. Оказывается, что существование устойчивого разбиения уже для такой простой постановки перестаёт выполняться. На сегодня это, насколько мне известно, *единственный* содержательный существенно многомерный результат в нашей области исследований.

Нехватка многомерных результатов ясно свидетельствует о степени (недо)развитости научной ветви: действительно, в [123] показано, что пространство политического разногласия в России по меньшей мере двумерно, а то и более. Ситуации одномерного конфликта достаточно редки (впрочем, в Америке как раз такой, см. только что процитированную статью).

Но не стоит унывать: когда накопится понимание одномерного мира, можно будет переходить в двумерие. Отдельные (один — отдельный) результаты там уже имеются. Кроме того, надо понимать, что любой контрпример в одномерной ситуации явствует нам о глобальных проблемах, связанных с данным видом постановки, ибо в более общих пространствах, естественно, может быть воспроизведён.

Завершая этот раздел, и переходя к основному в данной главе случаю постановки FEC, отмечу, что вопрос характеризации схем распределения, обеспечивающих устойчивость процессу формирования групповых структур, недостаточно изучен даже на обычной прямой. Отдельные результаты здесь имеются, и о них говорилось в обзоре литературы выше, но ни о каких общих теоремах здесь пока не идёт и речи.

2.3 Постановка FEC, подслучаи $FEFC$ и $FEMC$

Переходим, наконец, к случаю равнодолевого участия (equal-share), анализу которого было посвящено больше всего усилий в процессе работы над диссертацией. Несмотря на то, что никаких результатов при $d > 1$ в случае FEC пока не получено (более того, никто, насколько мне известно, этим ещё не занимался!), первым делом приводится общее определение коалиционной устойчивости, годное при любом $d \geq 1$:

Определение FEC. Разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}$, где $S_1 \sqcup \ldots \sqcup S_k =$

N, называется *коалиционно-устойчивым* или *ядерным* в случае FE, если существует набор медиан $(m_1, \ldots, m_k)$ (для любого $j = 1, \ldots, k$ мы требуем $m_j \in M[S_j]$), такой, что для любой потенциальной коалиции S и любой её медианы $m \in M[S]$ существует такой член коалиции S, скажем $i \in S$, что для него верно следующее неравенство (в котором l выбрано таким, что $i \in S_l$ — в исходном разбиении рассматриваемый игрок принадлежал группе S_l):[8]

$$c_i^S = \frac{g}{|S|} + ||x_i - m|| \geq \frac{g}{|S_l|} + ||x_i - m_l|| = c_i^{S_l}. \tag{2.14}$$

В оставшейся части главы речь пойдёт только про размерность $d = 1$. Вспомним, что случай FEM мы при анализе миграционной устойчивости на прямой ($d = 1$) дальше дробили на под-случаи, $FEFM$ и $FEMM$. Это делалось из-за необходимости добиться однозначных платежей, иными словами из необходимости иметь дело с однозначными принципами распределения издержек при работе с миграционной устойчивостью.

Для анализа коалиционной устойчивости этого делать не обязательно: можно исходить непосредственно из определения, данного выше, таким образом допуская множественность медиан как для групп разбиения, так и для отклоняющихся коалиций. И основным для нас под-случаем в FEC будет именно данный, который в одномерной ситуации мы именуем $FEMC$. (Заметим, что в постановке $FEMM$ предположения иные; аналогия тут чисто буквенная, не по сути.)

Тем не менее, ниже будет дано определение устойчивости и в вариации $FEFC$ (при которой требуется, чтобы медиана была однозначно выбираема в центре отрезка медиан, если таковых много), а также в новой вариации, $FEAC$, которую уместно назвать *принципом максимального противодействия сепаратизму* и которая будет введена в рассмотрение в качестве естественного ответа на некоторый напрашивающийся вопрос.

[8] Если от этого неравенства требовать выполнения в строгой форме, то мы получим концепцию усиленной коалиционной устойчивости. На самом деле весь анализ ниже проведён с учётом именно сильной устойчивости, просто в нашей ситуации эти две концепции редко дают разные предсказания (на мере ноль, так сказать). Поэтому не будем в дальнейшем заострять внимания на данном аспекте.

Начнём с некоторых соображений, касающихся базовой постановки FEC (которую мы также назвали $FEMC$, чтобы отличать от прочих.)

2.3.1 Анализ случая $FEMC$ для $d = 1$

Почему исследователи верили в то, что для принципа равнодолевого участия, как и в постановке FSC, коалиционно устойчивое разбиение на группы существует при любых одномерных расселениях? А вот почему:

> **Утверждение** $FEMC$ (ключевая теорема в [75]): В постановке $FEMC$ на прямой для любого расселения существует разбиение на группы, которое
>
> (i) само интервально
>
> (ii) устойчиво по отношению к любым *интервальным* коалиционным угрозам.

А теперь давайте на вскидку подумаем, откуда взяться неинтервальным угрозам, ведь неинтервальные коалиции очевидно неэффективны? Вот все и думали, что на $FEMC$ всё автоматически переносится с FSC, где техника доказательства была похожей: сначала показывается, что существует интервальное разбиение, устойчивое к интервальным угрозам, и затем демонстрируется, что если есть неинтервальная угроза устойчивости, то есть также и интервальная (см. [71]).

Логика эта оказалась верной только при $n \leq 4$. В моей статье [122] введён термин *квази-устойчивого разбиения*, которое интервально само и устойчиво относительно всех интервальных угроз. Согласно только что приведённому утверждению $FEMC$, такое разбиение всегда существует.

Далее в [122] вводится понятие *регулярного* разбиения (здесь нет возможности на нём останавливаться) и показывается, что регулярность и квазиустойчивость разбиения влечёт его полную коалиционную устойчивость. Этого оказывается достаточно при $n \leq 4$, ибо в таких “малых мирах” верно утверждение, что *любое* квази-устойчивое разбиение является регулярным.

Тем самым для “малых миров” теорема существования выполняется.

Данный результат, вместе с ещё несколькими побочными фактами, включён в теорему об устойчивых разбиениях для случая FEC в разделе 2.3.3.

Судя по всему, результат существования верен и для случая равноотстоящих локаций, то есть для дискретно-равномерных расселений. Однако, как уже было выше отмечено, количество частных случаев, требующих аккуратного рассмотрения, столь велико, что пока никто, насколько мне известно, до конца дело не довёл. Завершение этой работы могло бы стать темой добротного студенческого диплома.[9]

В целом же, постановка $FEMC$ значительно более сложная, нежели $FEFC$ (отчасти именно из-за этого последняя постановка и введена): для $FEFC$, как мы увидим в разделе 2.3.3, существование для дискретно-равномерных расселений практически очевидно. Думаю, что и анализ расселений разбегающихся локаций нужно начинать с более простой постановки $FEFC$. Но всему своё время, и к случаю $FEFC$ мы ещё вернёмся.

А вот при произвольных расселениях для постановки $FEMC$ уже при $n = 5$ наступает, как говорит молодёжь, "облом" ([122], [45]):

> **Контрпример $FEMC$ "Барнаул — Новосибирск".** При $g = 120$ рассмотрим расселение $x_1 = x_2 = 0;\ x_3 = x_4 = x_5 = 38$, как на рисунке 6 ниже. Устойчивого разбиения на группы для данного расселения в постановке $FEMC$ не существует.

[9]Отмечу, что следующий по сложности случай — расселений "разбегающихся" локаций (то есть монотонно растущих расстояний между соседними адресами на прямой), а также случай "унимодальных" расселений (сначала уменьшающихся, а потом увеличивающихся расстояний между домиками, как в реальных линейных городах зачастую и наблюдается) — уже совершенно не изучался. Впрочем, его непрерывная версия рассмотрена в [24], и там доказана общая теорема существования решения! См. также [4], где исследуется унимодальный и монотонный случаи на прямой с позиций общих принципов миграционной устойчивости.

Рисунок 6. Контрпример к коалиционной устойчивости.

Строгое доказательство можно прочитать всё в той же статье [122]; здесь же оно опущено, и по очень простой причине: Теорема $FEAC$ "о крушении надежд" из завершающего раздела 2.4 настоящей главы перекрывает все предыдущие полученные контрпримеры, в том числе и приведённый только что. Однако малое количество игроков в нашем примере лучше вскрывает суть дела, которая, в свою очередь, суммируется следующим рассуждением.

Посмотрим на рисунок 7 ниже. На нём изображены функции выигрыша игроков, то есть издержки (1.17) "со знаком минус", эдакие подводные горы с наклоном склонов, равным 45 градусов. Самая высокая гора представляет собой функцию издержек тотальной коалиции, вторая по высоте — издержки коалиции $[1,2,3,4]$ с центром в точке 29, и так далее.

Механизм несуществования устойчивого разбиения здесь тот же, что и в знаменитой кооперативной игре "деление доллара (или бутылки водки) на троих". А именно, мы имеем три партии игроков: $[1,2]$, $[3,4]$ и $[5]$, которые "подкупают" друг друга по циклу. Пусть у нас для начала скооперируются две последние партии, образуя группу $[3,4,5]$.

Тогда первая партия $[1,2]$ предложит партии $[3,4]$ объединиться и расположить центр, например, в точке 29, тогда обе партии выиграют (гора высоты $-1/4$ покрывает предыдущие местоположения агентов).

Однако при наличии такой группы $[1,2,3,4]$, партия $[5]$ предложит скооперироваться партии $[1,2]$. Это, опять-таки, снизит издержки всех трёх членов группы $[1,2,5]$. Заметим, что такая коалиция образована "через голову" партии $[3,4]$ — иными словами, данная угроза устойчивости *неинтервальна* по отношению к тестируемому разбиению![10]

Наконец, теперь партия $[3, 4]$ предлагает $[5]$ снова скооперироваться. Ясно, что всем троим станет лучше.

В то же время, тотальная группа N является неустойчивой: коалиция $[1, 2]$ захочет отклониться, что также видно из рисунка, но можно и непосредственно численно проверить и убедиться в этом. **Эскиз доказательства контрпримера "Новосибирск-Барнаул" завершён.**

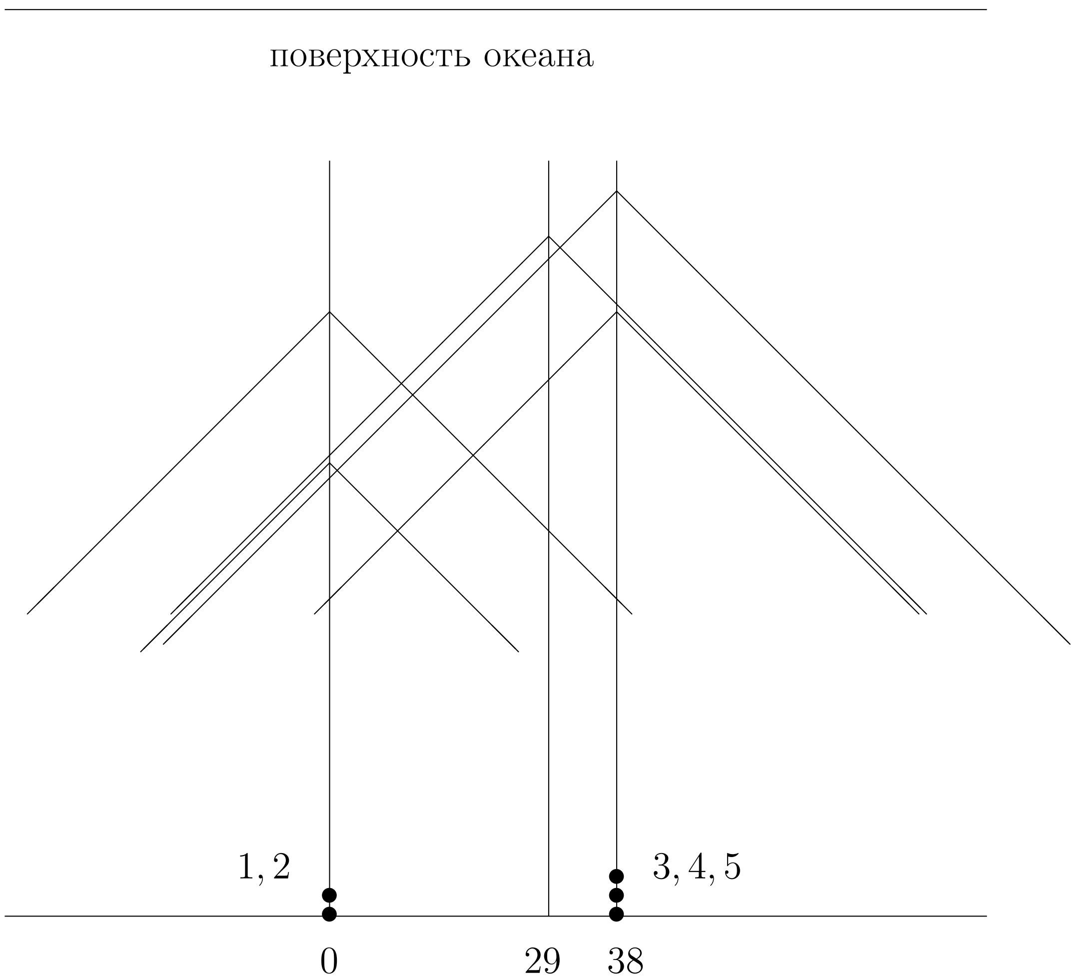

Рисунок 7. Контрпример $FEMC$, "подводные горы".

[10]Здесь есть тонкости в терминологии, да и по сути тоже. Я их просто опускаю. Факт налицо, эта группа угрожает устойчивости. Вопросы же её интервальности являются в нашем случае более глубокими.

Чтобы завершить обсуждение этого контрпримера, заметим, что, в полном соответствии с [75], для рассматриваемого расселения существует квазиустойчивое разбиение. Этим разбиением является разбиение $N = [1, 2, 3, 4] \sqcup [5]$, с центром первой группы, расположенным, скажем, в точке 29. Никакой связной[11] отклоняющейся коалиции здесь не существует.

2.3.2 Контрпример для $FEFC$ ("центральная медиана")

Переходим к рассмотрению постановки $FEFC$, при которой требуется всегда выбирать *центральную* из медиан, если последних имеется целый отрезок. Постановка эта проще с точки зрения анализа, из-за однозначности выигрышей в любой сформированной группе или потенциальной коалиции. В данном случае определение FEC нужно чуток подправить.

Определение $FEFC$. Разбиение $\pi = \{S_1, \dots, S_k\}$, где $S_1 \sqcup \ldots \sqcup S_k = N$, называется *коалиционно-устойчивым* или *ядерным* в случае FEF, если набор центральных медиан $(m_1, \dots, m_k)$ (для любого $j = 1, \dots, k$ мы требуем, чтобы m_j лежало в середине отрезка $M[S_j]$ — в тех случаях, когда он не вырождается в точку), удовлетворяет следующему условию: для любой потенциальной коалиции S и её центральной медианы m (то есть, лежащей в центре отрезка $M[S]$) существует такой член коалиции S, скажем $i \in S$, что для него верно неравенство (в котором l выбрано таким, что $i \in S_l$ — в исходном разбиении рассматриваемый игрок принадлежал группе S_l):

$$c_i^S = \frac{1}{|S|} + |x_i - m| \geq \frac{1}{|S_l|} + |x_i - m_l| = c_i^{S_l}. \qquad (2.15)$$

Пока я трудился между Барнаулом и Новосибирском, соавторы тоже трудились, не покладая рук, и на основе в точности той же идеи из кооперативной теории игр "сообразим на троих? Нет, не получится!" привели контрпример и для принципа центральной медианы.

Контрпример $FEFC$. Рассмотрим при $g = 42$ такое расселение: $x_1 = 0;\ x_2 = x_3 = x_4 = 1;\ x_5 = 3;\ x_6 = x_7 = x_8 = 11 - \delta$, где число δ

[11] См. предыдущую сноску.

выбрано очень маленьким, см. ниже рисунок 8. Устойчивого разбиения в этом случае для постановки $FEFC$ не существует.

Рисунок 8. Контрпример для постановки $FEFC$.

Подробное доказательство приведено в нашей статье [45]; грядущая универсальная теорема из раздела 2.4 покрывает и этот результат.

2.3.3 Обзор мелких результатов для постановок $FEFC$ и $FEMC$

Раздел 2.3 я хочу завершить перечнем полученных мелких результатов. В основном результаты относятся к случаю центральной медианы; случаю $FEMC$ посвящены только два последних утверждения в списке. Во всех случаях, когда результат не снабжён исчерпывающим доказательством, подробности можно восстановить по [122] и [45].

Теорема об устойчивых разбиениях для случая FEC. Справедливы следующие наблюдения, утверждения и замечания:

- i В случае $FEFC$ всегда существует интервальное коалиционно устойчивое разбиение на группы для расселения равноотстоящих локаций $x_r = rl$, $r = 1, \ldots, n$. В дальнейшем мы будем именовать этот случай “равноотстоящим расселением”, “случаем равноотстоящих локаций”, или просто “равномерным расселением”;
- ii В случае $FEFC$ существуют и *неинтервальные* устойчивые разбиения даже при равномерном расселении;
- iii В случае $FEFC$ указано конкретное расселение, для которого *единственным* коалиционно устойчивым разбиением на группы служит *неинтервальное* разбиение (!);

iv В случае $FEFC$ указано конкретное расселение, для которого существует коалиционно устойчивое, но не существует миграционно устойчивого разбиения;

v В случае $FEFC$ указано конкретное расселение, для которого, наоборот, существует миграционно устойчивое, но не существует коалиционно устойчивого разбиения;

vi В случае $FEMC$ всегда существует интервальное коалиционно устойчивое разбиение на группы для достаточно плотного равномерного расселения (когда интервал l между соседними локациями мал по сравнению с величиной g);

vii В случае $FEMC$ всегда существует интервальное коалиционно устойчивое разбиение на группы для всех расселений с $n \leq 4$.

Доказательства и пояснения. Ниже во многих случаях даётся ссылка на наши работы, в частности потому, что не все приведённые в теореме результаты являются моими собственными. Часть из них принадлежит перу соавторов, что всегда явно отмечается.

[i]: Прежде всего, освежим в памяти функцию $z_l(k)$, заданную формулой (1.26) из первой главы и показывающую, чему равны издержки краевого жителя в связной коалиции размера $k \in \mathbf{N}$ при расстоянии между соседними локациями, равном l. Мы уже многое про эту функцию знаем из доказательства существования миграционно устойчивого разбиения на группы для равномерных расселений.

Вспомним, что она является строго выпуклой (если её продолжить на область всех вещественных $k \geq 1$), и стремится к бесконечности при $k \to +\infty$. Поэтому существуют максимум два целых числа (в норме — одно, но бывает и два соседних), в которых данная функция достигает минимума. Обозначим меньшее из них (если их два) за $k^* = k^*[l]$.

Теперь, начиная с левого края нашего равномерного расселения, будем группировать подряд живущих жителей по k^* человек в группы нашего будущего разбиения. Вообще говоря, может получится любое неотрицательное количество таких однотипных групп — $0, 1, 2, \ldots$. Прочих (строго менее k^*) жителей включим в последнюю группу, T (т.е. $|T| < k^*$).

Мы хотим показать, что разбиение, полученное таким образом, должно быть коалиционно устойчивым.

В принципе, это почти очевидно, но всё же приведём доказательство. Прежде всего, во всех группах размера k^* издержки *всех* жителей заведомо не превосходят $z_l(k^*)$, так как последнее значение — это издержки краевых жителей таких групп. Следовательно, при *любом* целом $k \geq 1$ число $z_l(k)$ не может быть меньше значения суммарных издержек *любого* жителя нашего мира, за исключением, быть может, членов последней группы, T (если таковая непуста).

Теперь пускай $S \subset N$ — отделяющаяся коалиция. Оба её краевых жителя (или один, если $|S| = 1$) испытывают издержки, наоборот, не меньшие, нежели в связной коалиции такого же размера, то есть не меньшие величины $z_l(|S|)$.

Значит, издержки (любого) краевого жителя в S заведомо не ниже, чем издержки всех представителей k^*-групп построенного разбиения, и следовательно оба краевых жителя коалиции S, если их двое, находятся в "урезанной" группе T, после чего, из-за связности последней, мы делаем вывод, что $S \subset T$. Если же $|S| = 1$, то тоже единственный представитель коалиции S лежит внутри T.

Но тогда $|S| < |T|$, откуда в силу строгого убывания функции $z_l(k)$ при $k \in [1, k^*]$ получаем, что $z_l(|S|) > z_l(|T|)$. Однако издержки краевых жителей коалиции S не ниже значения $z_l(|S|)$, в то время как издержки всех жителей связной группы T — не выше, чем $z_l(|T|)$. Значит, ни один из членов группы T не согласится быть краевым в группе S, следовательно, никакое подмножество T также не может угрожать устойчивости исходного разбиения. **Пункт [i] теоремы об устойчивых разбиениях для случая FEC полностью разобран.**

[ii]: Расмотрим при $l = 1/8$ равномерный мир, состоящий из 8-ми жителей. Заметим, что при $l = 1/8$ значение $k^* = 4$, более того, это минимум функции $z_l(k)$ даже на всём множестве вещественных чисел $k \geq 4$.

А теперь мы образуем разбиение $\pi = \{[1,6,7,8];[2,3,4,5]\}$. Я утверждаю, что оно коалиционно устойчивое. В самом деле, у любой потенциальной коалиции S, угрожающей данному разбиению, издержки *обеих* краевых жителей (если их двое!) не ниже величины $z_l(|S|)$, следовательно, не ниже издержек каждого из жителей $2,3,4,5,6,7,8$ построенного разбиения.

Но это означает, что краевые жители S не могут совпадать ни с одним из перечисленных игроков, откуда немедленно следует, что $S = \{1\}$! Но и это нереализуемо, так как издержки жителя 1 в его группе $[1,6,7,8]$ всё же ниже величины 1 (ибо последние составляют $\frac{11}{16} + \frac{1}{4} = \frac{15}{16}$). **Пункт [ii] разобран.**

[iii]: Пример такого расселения приведён в утверждении 3.2 нашей с соавторами работы [45]. Он жуткий, содержит 34 (!!!) жителя на прямой в нескольких различных локациях, и его сочинила Анна Богомольная. Это апофеоз дискретного геморроя, наряду с моим собственным универсальным контрпримером, подробно разобранным в следующем, завершающем разделе 2.4. **Конец [iii].**

[iv]: Контрпример $FEFM$, изображённый в предыдущей главе на рисунке 2, таков. Действительно, выше в главе 1 доказано, что для приведённого расселения не существует миграционно устойчивого разбиения, а коалиционно устойчивым для этого расселения будет, как легко проверить, конкретное разбиение $\pi = \{[1];[2,3,4];[5]\}$. **Пункт [iv] разъяснён.**

[v]: Напротив, контрпример $FEFC$, изображённый на рисунке 8 выше, не допуская коалиционно устойчивого разбиения на группы, допускает миграционно устойчивое разбиение. А именно, *тотальная коалиция* $\pi = \{N\}$ являет собой таковое. **Пункт [v] тоже разъяснён.**

[vi]: Это очевидно "по непрерывности". В самом деле, разница случаев $FEFC$ и $FEMC$ изчезает по мере "сгущения" расселений, влекущего схлопывание отрезка допустимых медиан. Подробности восстановит тот, кто в будущем докажет существование коалиционно устойчивого разбиения для *любого* равномерного расселения в постановке $FEMC$. Существование, как я уже выше писал, у меня не вызывает сомнения (но упирается в разбор

множества частных случаев соотношений параметров). **Конец [vi].**

[vii]: Это следует из техники “горных хребтов”, наподобие приведённой выше картинки из контрпримера Новосибирск - Барнаул. За подробностями доказательства отсылаю к своей собственной работе [122]. **Конец [vii]. Доказательство теоремы об устойчивых разбиениях для случая** FEC **завершено.**

Переходя к завершающему дискретный (конечный) анализ разделу 2.4, хочу ещё раз подчеркнуть, что по-прежнему остаётся открытым вопрос существования устойчивого разбиения на группы для случая локаций, “разбегающихся” от центра, причём это верно для обоих разновидностей постановки FEC.

Интересно также сформулировать и решить задачу о том, насколько далеко от устойчивости “наихудшее расселение” игроков на прямой, а в идеале и при $d > 1$. При анализе последней проблемы имеет смысл сначала изучить её непрерывный аналог в постановке DSC, а именно опыт рассчёта “зазора устойчивости” для равномерного расселения, поставленный в главе 3 настоящей работы (раздел 3.3).

2.4 Постановка $FEAC$, или универсальный контрпример

Данный раздел, завершающий главы 1 и 2, является венцом дискретной теории многомерного размещения в её теоретико-игровых аспектах, так сказать, кульминацией постановок с литерой F. Результат, доказанный ниже, опубликован в работе [121].

2.4.1 Случай $FEAC$: “самая общая теорема” пустоты ядра

Предыдущие два контрпримера, $FEFC$ и $FEMC$, очень разные по своей конструкции и построенные, как мы выше это назвали, “на острие ножа”, наводят на мысль, что, управляя выбором медиан, мы сможем всё-таки добиться универсальной устойчивости.

Скажем, если в первом контрпримере для $FEMC$ не дать отделяющейся коалиции $[1, 2, 3, 4]$ выбирать медиану где угодно, а навязать им, скажем, выбор медианы в середине отрезка, то разбиение $\pi = [1, 2, 3] \sqcup [4, 5]$ становится коалиционно-устойчивым. Аналогичным образом разрушается и второй контрпример, для случая $FEFC$ — на этот раз путём ослабления требования центральной медианы для групп разбиения (подробности опустим).

Принципов даже внутри постановки FEC остаётся довольно много. Каким-то коалициям можно разрешить выбирать лишь края отрезка медиан, иным — края и центр, иным — всё, что угодно. В итоге встаёт вопрос о справедливости или ложности следующей гипотезы. (Ниже аббревиатура $FEAC$ означает такой принцип выбора медианных локаций, при котором в разбиениях позволяется выбирать любую медиану, а отклоняющимся коалициям разрешается отклоняться только тогда, когда все участники строго выиграют при выборе *любой* из имеющихся в их распоряжении медиан.)

Последняя надежда на $FEAC$ устойчивость. Для произвольной конфигурации $(x_1, \dots, x_n)$ конечного числа точек на прямой существует разбиение $\pi = \{S_1, \dots, S_L\}$, взятое вместе с некоторым набором медиан $\{m_l\}_{l=1,\dots,L}$ в соответствующих группах, $m_l \in M[S_l]$, и удовлетворяющее следующему требованию: *для любой коалиции T существует такая её медиана $m \in M[T]$, а также такой её участник $i \in T$, что*

$$c_i^T = \frac{1}{|T|} + |x_i - m| \geq \frac{1}{|S_l|} + |x_i - m_l| = c_i^{S_l},$$

где l — это номер коалиции из π, содержащей участника i, то есть $i \in S_l$. Соответствующий участник поэтому откажется примыкать к группе сепаратистов T, и устойчивость разбиения π худо-бедно будет поддерживаться.

Однако надежде этой сбыться не судьба.

Теорема $FEAC$ о крушении надежд. Рассмотрим при $g = 120$ следующую конфигурацию точек на прямой (см. рисунок 9 ниже): $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = -4$; $x_8 = 0$; $x_9 =$

$x_{10} = x_{11} = x_{12} = x_{13} = 12$. При таком расселении справедливо следующее убийственное утверждение: для *любого* разбиения $\pi = \{S_1, \ldots, S_L\}$ множества игроков $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$, взятого вместе с *любым* набором медиан $\{m_l\}_{l=1,\ldots,L}$ в соответствующих группах, $m_l \in M[S_l]$, существует *коалиция с однозначной медианой* T, то есть $M[T] = \{m\}$, для *любого* участника $i \in T$ которой будет выполнено следующее неравенство (где l таково, что $i \in S_l$ в исходном, предлагаемом разбиении π):

$$c_i^T = \frac{1}{|T|} + |x_i - m| < \frac{1}{|S_l|} + |x_i - m_l| = c_i^{S_l}. \tag{2.16}$$

Выполнение этого неравенства означает, что коалиция T представляет непарируемую угрозу для разбиения π: никакой свободой манипуляции выбором медианы внутри коалиции T воспользоваться нельзя, так как множество медиан коалиции T одноточечное. (Подобные коалиции состоят либо из нечётного числа участников, либо из чётного, но с совпадающим адресом двух медианных участников.)

Рисунок 9. Универсальный контрпример для случая FEC.

Ясно, что этот контрпример универсален в том числе и для уложений $FEMC$ и $FEFC$, и в этом смысле он заменяет предыдущие контрпримеры. Однако контрпример “Новосибирск-Барнаул” настолько геометрически элегантный (и выдуман настолько давно), что было жаль с ним расстаться!

В то же время строгое доказательство, приведённое ниже, избавляет нас от необходимости вдаваться в детали строгих доказательств предыдущих двух контрпримеров (также весьма запутанных).

Доказательство теоремы $FEAC$ нудное и техническое, однако приводится оно ниже в работе целиком — для иллюстрации тех приёмов, которые используются в этой ветви научных изысканий. Возможно, существует и более простое доказательство, я не знаю.

2.4.2 Доказательство теоремы $FEAC$: начало

Оставшиеся три подраздела 2.4.2 – 2.4.4 главы 2 посвящены формальному доказательству сформулированной выше теоремы. Читателям, склонным к мигрени, рекомендуется запастись таблетками и бесконечным терпением. Ниже при проведении рассуждений используются термины "левый город", "правый город", а также немного странный термин "волк-одиночка"; каждый из этих терминов говорит сам за себя. Я полагаю, что разнообразить язык совершенно необходимо для упрощения восприятия "нудных" доказательств.

Итак, мы будем действовать от противного, то есть предполагать, что разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_L\}$ нашего множества игроков $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$, взятое вместе с набором медиан $\{m_l\}_{l=1}^{L}$ в соответствующих группах, $m_l \in M[S_l]$, является коалиционно устойчивым. Установим ряд утверждений.

Утверждение A**.** Среди групп S_l разбиения π существует *ровно* одна группа с центром в левом "городе", то есть $m_l = -4$. В этой группе обязательно жителей левого города строго больше, чем прочих.

Доказательство утверждения A**.** В самом деле, для каждого l рассмотрим разбиение $S_l = S_l^{-4} \sqcup S_l^{\geq 0}$ группы на две части, живущие в левом городе и не живущие в нём. Так как целых 7 человек живут в левом городе, и всего 6 — не в нём, то хотя бы в одной из групп первая половина строго перевесит вторую (ведь они в объединении дают всё N!). В соответствующей группе центр обязательно окажется в левом городе.

Обозначим эту группу за S_1 (без ограничения общности): $m_1 = -4$.

Если бы была ещё одна группа с центром в левом городе, то их слияние сохранило бы баланс жителей строго в пользу левого города (так как во второй группе не менее половины тоже проживают в левом городе, раз там её центр), так что центр бы тоже сохранился там, и снизило бы все издержки монетарного свойства, не меняя транспортных. Соответственно, слияние двух групп противоречило бы устойчивости разбиения π (всем участникам новой большой группы стало лучше, чем было, и новая группа обладает однозначно определённой медианой).

Значит, группа с левым центром только одна — и в ней жителей левого города строго больше, чем всех остальных. **Доказательство утверждения A окончено.**

"За компанию" становится ясно, что ни в каком устойчивом разбиении не может быть двух различных групп, состоящих из жителей одного и того же города (как правого, так и левого): их слияние представило бы разрешённую непарируемую угрозу устойчивости рассматриваемого разбиения. Это замечание будет часто использоваться в дальнейшем.

Утверждение B. Максимальная по размеру группа в разбиении π содержит не менее 7 участников.

Доказательство утверждения B. Это выполнено в силу того, что если все группы разбиения малочислены (содержат не более шести членов каждая), то у каждого из жителей этого мира суммарные издержки не ниже величины $120/6 = 20$. В частности, это верно и для жителей левого города. Но тогда они объединятся в группу $T = \{x_1, \ldots, x_7\}$, и их издержки снизятся до $120/7 < 120/6$. Это противоречит устойчивости разбиения π. **Утверждение B доказано.**

Уточнение утверждения B. Максимальная по размеру группа в разбиении π содержит не менее 8 участников.

Действительно, допустим это неверно, тогда такая группа по предыдущему утверждению содержала бы ровно 7 участников. Из устойчивости разбиения π следует, что конкретная коалиция $S = \{x_1, \ldots, x_8\}$ не представляет угрозы для разбиения π (ибо ей *разрешено* предъявлять угрозы, в ней медиана определена однозначно).

Однако все первые 7 членов коалиции S свои издержки будут в случае формирования такой группы иметь равными $120/8 = 15$, что меньше, чем $120/7$, минимальная величина издержек всех участников разбиения π (коль скоро в нём самая большая группа содержит только 7 игроков).

Следовательно, против формирования коалиции S будет протестовать именно последний её член, игрок номер 8. Так как его издержки в S равны $120/8+4 = 19$, то это означает, что в разбиении π он является членом именно самой большой группы (ибо в остальных группах не более 6-ти участников, то есть издержки не менее $120/6 = 20$). И это ещё не всё.

Я утверждаю, что он там центральный. В самом деле, группа из ровно 7 игроков обладает однозначной медианой, совпадающей с адресом проживания медианного её участника. Если игрок номер 8 не централен в ней, то он несёт транспортные издержки как минимум 4 (расстояние до ближайшего места, где может быть медиана). Но тогда уже $120/7 + 4 > 19$, и он также пожелал бы образования коалиции S.

Если же игрок 8 централен в группе из 7 игроков (временно обозначим последнюю за W), то в ней ровно 3 жителя левого города, и ровно 3 жителя правого.

Мы покажем, что в этом случае пять жителей правого города захотят объединиться (тем самым, так как они образуют разрешённую коалицию, то устойчивость разбиения π будет нарушена — и уточнённое утверждение B доказано).

Почему же жители правого города захотят объединиться?

Потому что общие издержки трёх членов W, живущих в правом городе, составляют $120/7 + 12 > 24 = 120/5$, в то время как остальные два жителя правого города либо обитают в группе размера не более 4 — и тогда их издержки не менее $120/4 = 30 > 24$, либо обитают в группе размера не более 6, но тогда непременно с центром в левом городе; значит, суммарные издержки не менее $120/6 + 16 = 36 > 24$. Во всех вариантах издержки всех жителей правого города строго выше $120/5 = 24$, и они сформируют (разрешённую) коалицию, существование которой противоречит устойчивости разбиения π. **Уточнённое утверждение B доказано.**

До конца доказательства максимальная по размеру группа будет обозначаться за V. Продолжим анализ ещё одним наблюдением.

Лемма $FEAC - 1$. Если $V = S_1$, то есть наибольшая по размеру группа совпадает с введённой нами в рассмотрение группой с центром, расположенном в левом городе, то $1, 2, \ldots, 7, 8 \in V$. Таким образом, в этом случае V содержит как весь левый город целиком, так и “волка-одиночку”, игрока 8.

Доказательство этой леммы начнём с жителей нашего левого города. Если они не все входят в V, то издержки не попавших в V жителей левого города составляют не менее $120/5 = 24$ (вспомним, что, по доказанному, $|V| \geq 8$, а значит, вне V все группы имеют размер не более 5-ти жителей!).

Если теперь пополнить коалицию V до группы $\tilde{V}$ путём включения всех невошедших жителей левого города, то объединённая коалиция $\tilde{V}$ является разрешённой: внутри неё однозначен выбор центра по-прежнему в левом городе. Тем, кто жил ещё в V, стало лучше (транспортировка не изменилась, монетарное бремя упало); вновь присоединённым игрокам тоже стало лучше (издержки были не ниже $120/5 = 24$, а стали не выше $120/8 = 15$. Всем стало лучше, то есть $\tilde{V}$ блокирует разбиение π, делая его неустойчивым.

Следовательно, $1, 2, \ldots, 7 \in V$. Тогда, независимо от членства кого-либо ещё в группе V и её потенциальных расширениях, $\tilde{V}$, медиана обязательно однозначно определена как $m[\tilde{V}] = -4$, в левом городе, то есть любое расширение $\tilde{V}$ группы V имеет право предъявлять угрозу устойчивости разбиения π.

Теперь посмотрим на жителя 8. Если $8 \in V$, то всё доказано. В противном случае он проживает в группе размером не более 5, то есть несёт издержки не менее, чем $120/5 = 24$. Вступив в V, он снизит издержки местных жителей V за счёт расширения группы без изменения их (нулевых) транспортных издержек, а сам будет нести издержки никак не выше, нежели $120/9 + 4 < 24$. То есть такое расширение $V \sqcup \{8\}$ угрожает устойчивости разбиения π, а следовательно, непременно должно быть $8 \in V$. **Лемма** $FEAC - 1$ **доказана.**

2.4.3 Доказательство теоремы $FEAC$: продолжение

В двух следующих утверждениях размер максимальной группы шаг за шагом повышается до значений $10-13$.

Утверждение $C8$**.** Максимальная группа не может иметь население, равное 8-ми жителям.

Доказательство от противного. Пусть $|V|=8$. В этом случае верно одно из трёх утверждений: $m[V]=-4$, $m[V]=12$, и оставшийся случай, когда центр не находится ни в одном из краевых городов. Обозначим эти случаи за $C8l, C8r$ и $C8c$, соответственно.

Случай $C8l$: как следует из леммы $FEAC-1$, тогда $V=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Поэтому очевидно, что $\pi=\{V,[9,10,11,12,13]\}$ (в силу замечания, сделанного после доказательства утверждения A, дробить правый город в устойчивом разбиении нельзя).

Такое разбиение разрушается с помощью группы (разрешённой, в силу её нечётного размера и соответственно однозначной медианы) $D=\{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$. Её центр находится под боком у волка-одиночки, $m[D]=0$, поэтому ему, конечно, в такой группе лучше, чем было раньше; что же касается всех остальных, то мы имеем два неравенства:

$$120/5=24>120/11+12,$$

означающее, что жителям правого города лучше в новой группе, и

$$120/8=15>120/11+4,$$

в силу которого и жителям левого города, которым посчастливилось попасть в новообразованную группу, стало лучше (правда, на такое чуть-чуть, что холодок по коже: последнее неравенство сводится к $11^2=121>120$!). Жалко лишь двоих несчастных жителей из левого города (жителей 1 и 2), которых оставили в результате этих манипуляций с издержками, равными 60, но таковы беспощадные законы коалиционной теории игр. **Случай** $C8l$ **разобран.**

Случай $C8r$ подразумевает, что издержки (как минимум двух) жителей левого города, входящих в V, равны $120/8+16=31>120/7$, а остальные жители левого города и вовсе являются членами групп размера не более 5, и несут издержки не менее $120/5 = 24 > 120/7$. Поэтому коалиция, совпадающая с левым городом, представит угрозу разбиению π — угрозу разрешённую. Следовательно, **случай $C8r$ также невозможен и тем самым разобран нами.**

Наконец, последний **случай** $C8c$: медиана группы V расположена где-то строго между -4 и 12. Обозначим за r расстояние от медианы до левого города, то есть $m[V] = r - 4$. Теперь заметим следующее: в группу V не может входить более 4-х жителей левого города, но также не может входить более 4-х жителей правого: в противном случае медиана бы "проживала" в одном из этих городов. Но тогда как в левом, так и в правом городе есть как члены V, так и оставшиеся за бортом коалиции V (то есть композиция V по городам имеет один из следующих трёх видов: $4-0-4$, $4-1-3$, $3-1-4$, где в центре стоит присутствие или отсутствие волка-одиночки).

Так вот: жители левого города, не вошедшие в V, несут издержки не меньшие, чем $120/5 = 24 > 120/7$, а жители правого города, не вошедшие в V, которых либо 1, либо 2, несут издержки строго выше, чем $120/5 = 24$. (Последнее верно из-за того, что оставшихся за бортом V жителей правого города не более двух, следовательно, даже если они включены в коалицию размера 5, её центр расположен не у них, поэтому к монетарным издержкам добавляются положительные транспортные. А если они включены в меньшие по размеру коалиции, то уже монетарные издержки для них не менее $120/4 = 30$.)

Как следствие, для возникновения угрозы устойчивости разбиения π достаточно одного из двух: либо чтобы жители левого города, включённые в V, несли издержки выше, чем $120/7$ (тогда левый город отделится от π), либо чтобы жители правого города, включённые в V, несли издержки выше, чем $120/5 = 24$ (тогда правый город отделится от π). То есть для сохранения устойчивости разбиения π необходимо выбрать медиану группы V таким образом, чтобы ни левые, ни правые члены V не несли издержек, озвученных выше.

Иными словами, значение параметра r должно удовлетворять следующим двум неравенствам:

$$120/8 + r = 15 + r \leq 120/7;$$
$$120/8 + 16 - r = 15 + 16 - r \leq 120/5 = 24. \tag{2.17}$$

Складывая их, получаем, что существование такого r влечёт выполнение неравенства $46 \leq 24 + 120/7$, или $22 \times 7 \leq 120 = 20 \times 6$, что, безусловно, неверно.

Говоря простым языком, если центр группы V расположен далеко от точки -4, то угрожает левый город, а если центр находится слишком далеко от точки 12, то угрожает правый. Численные расчёты, представленные выше, показывают, что есть даже непустой диапазон местоположений центра, в котором оба города предъявляют угрозу устойчивости рассматриваемому разбиению π. Поэтому парировать обе угрозы сразу и не удаётся. **Случай** $C8c$ **разобран**, а вместе с ним и **утверждение** $C8$ **полностью доказано**.

Итак, размер группы V, максимальной по численности в (любом) устойчивом разбиении π, составляет не менее 9-ти участников. Ещё одна лемма нам поможет в дальнейшем:

Лемма $FEAC-2$**.** Группа V не может совпадать с S_1 — с группой, имеющей центр в левом городе.

Доказательство от противного: предположим, что $V = S_1$, тогда, как мы знаем из леммы $FEAC-1$, должно быть выполнено следующее включение: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \in V$, в силу чего без ограничения общности можно считать, что $V = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots, k]$, где $k = |V|$, и к тому же само разбиение $\pi = \{V; [k+1, \ldots, 13]\}$ при $k \leq 12$ и $\pi = \{V\} = \{N\}$ при $k = 13$ (потому что дробить жителей одного города на две части без привлечения в эти части иногородних в устойчивом разбиении нельзя, что уже два раза выше было отмечено). Последние два случая придётся рассмотреть по отдельности.

Итак, для начала пускай $k = 9, 10, 11$ или 12. Тогда издержки не вошедших в V игроков (все они живут в правом городе) составляют не менее $120/4 = 30$, ибо группа, состоящая из них, имеет размер не более

4; если они включатся в группу V, то в результате будет всеобщая коалиция N с центром однозначно определённым всё ещё в левом городе (то есть, разрешённая!) — а, значит, всем членам V в новой ситуации станет строго лучше (монетарные издержки снизились, транспортные не изменились). Новым членам коалиции тоже стало лучше, ибо их издержки равны $120/13+16 < 30$. Значит, этот случай отпадает (иначе π было бы неустойчиво). Поэтому собственно $\pi = \{V\}$.

Но и этот вариант невозможен: отделится правый город (разрешённая коалиция). Ведь их издержки впятером равны $120/5 = 24 < 120/13 + 16$, где правая часть неравенства задаёт издержки правогородних в тотальной коалиции. **Лемма $FEAC-2$ доказана.**

Утверждение $C9$. Группа V не может содержать 9 игроков. (Следовательно, их там не менее 10-ти!)

Доказательство от противного. Пусть $|V| = 9$. В этом случае, так как медиана однозначно определена как локация центрального представителя группы V, то имеет место одно из трёх утверждений: $m[V] = -4$, $m[V] = 12$, и оставшийся случай, когда центр находится в нуле (у волка-одиночки, который в этом случае обязан входить в нашу нечётную группу V). Обозначим эти случаи за $C9l, C9r$ и $C9c$, соответственно.

Случай $C9l$: его невозможность следует из леммы $FEAC-2$.

Случай $C9r$ вынуждает левый город целиком угрожать устойчивости разбиения π (левый город образует разрешённую к угрозам коалицию). В самом деле, жители левого города, вошедшие в группу V, несут издержки, равные $120/9+16 > 120/7$, а не вошедшие в V жители левого города и вовсе несут издержки, не меньшие $120/4 = 30 > 120/7$ (они состоят в группах суммарного, а следовательно, и по отдельности, размера не более 4). Поэтому коалиция “левый город” захочет отделиться. Следовательно, **случай $C9r$ также отпадает.**

Переходим к рассмотрению **последнего случая,** $C9c$, который может быть реализован только одним способом: $4-1-4$, то есть в группу V входят 4 жителя левого города, степной волк и 4 жителя правого города.

Здесь мы применим следующий новый приём: мы образуем коалицию Q

из всех членов V, одного не вошедшего в V жителя левого города, и одного не вошедшего в V жителя правого города (такие существуют). В новой коалиции 11 членов и старая, однозначная медиана $m[Q] = 0$. То есть, этой коалиции позволено представлять угрозу, и она её фактически представляет: ведь все члены группы V в новой коалиции снизили монетарные издержки, не меняя транспортных, а два новых участника имеют издержки, не превышающие $120/11 + 12 < 30 = 120/4$; последнее же число является нижней границей их издержек в π (как и раньше, их вне V всего четверо, поэтому содержащие их коалиции состоят из не более, чем 4-х участников — и даже монетарные издержки в этом случае окажутся не меньшими, чем $120/4 = 30$).

Таким образом, и в последнем **случае** $C9c$ разбиение π теряет устойчивость, следовательно, **утверждение** $C9$ **полностью доказано** и случай $|V| = 9$ также невозможен.

2.4.4 Окончание доказательства теоремы $FEAC$

“Но замрите: ему
Остаётся пройти
Не больше четверти пути!”

Хотя, если говорить строго, от доказательства осталась одна треть.[12]

Утверждение $C10 - 11$**.** Группа V не может содержать ни 10, ни 11 игроков. (Следовательно, их там ровно 12, так как случай $V = N$ уже был опровергнут выше!)

Доказательство, как обычно, проводится от противного.

Предположим, что в группу V включены 10 или 11 игроков. Случай, когда центр коалиции V попадает в левый город, разобран в соответствующей лемме, поэтому мы разбираем случай, когда центр V не находится в левом городе. А это, в свою очередь, означает, что из левого города в группе V участвует строго менее шести жителей (ибо в противном

[12] И с противоположным, нежели в процитированной песне, финалом!

случае, при 10-ти или 11-ти жителях группы V всего, медианой для V таки оказалось бы местоположение левого города).

Значит, как минимум двое жителей левого города оказались за бортом группы V. Их издержки очень большие: не менее $120/3 = 40$, так как за бортом V всего не более трёх человек, и группа (группы), включающая (включающие) их, тоже содержит (содержат) не более трёх участников.

И тут мы переходим к принципиально новому приёму, возможность применения которого крайне контр-интуитивна. Именно этому приёму наша команда исследователей обязана целому ряду отрицательных результатов в коалиционной постановке ЗМР на прямой.

Конкретно, приём состоит в том, что в качестве угрожающей устойчивости разбиения π коалиции рассматривается "несвязная" коалиция, включающая этих двух жителей левого города, и всех пятерых жителей правого (минуя одинокого волка посередине!). Те двое неудачников из левого города заведомо согласятся участвовать в такой коалиции, ибо $120/7+16 < 40$ — их издержки снизятся.

Коалиция такая будет поэтому угрожающей в том и только том случае, если снизятся также и издержки пятерых жителей правого города (коалиция такая будет разрешённой, ибо её центр однозначно определён в правом городе).

При этом проверять, снизятся ли издержки, нужно лишь для тех жителей правого города, которые вошли в группу V (для потенциально не вошедшего они тоже не менее 40, поэтому снизятся автоматически, и очень сильно).

В угрожающей коалиции издержки жителей правого города составят ровно $120/7$ (ибо издержки для последних — только монетарные).

Издержки тех жителей правого города, которые входят в состав группы V, равны в разбиении π числу $120/k + r$, где $k = |V| = 10$ или 11, а за r мы обозначим здесь расстояние от правого города до центра коалиции V.

Для случая $k = 11$ этого будет уже достаточно, чтобы завершить доказательство. В самом деле, тогда группа V — это, без ограничения общности, просто группа $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ (то есть содержит всех агентов, кроме двух не попавших в V жителей левой группы). Но тогда её центром обязательно является волк-одиночка (то есть точка 0), а значит $r = 12$. Значение издержек жителей правого города в группе V (и, следовательно, в разбиении π) составляет $120/11 + 12$, что больше, чем $120/7$ (сокращая на 12, получаем неравенство $10/11 + 1 > 10/7$, проверяемо верное). А раз так, то разбиение π неустойчиво — противоречие.

Остаётся случай $k = 10$. Здесь ситуация посложнее, но несильно. Надо вспомнить, что у нас имеется ещё одна коалиция, потенциально представляющая угрозу устойчивости разбиения π. А именно, целиком левый город, который разрешён для угроз, и в случае оформления в виде группы, каждый из его жителей несёт издержки, равные $120/7$. Для его жителей, не вошедших в V, опять же очевидно, что их издержки снижаются (ибо они в разбиении π не ниже 40!), и проверять нам надо лишь жителей левого города, входящих в V.

Разбиение π может быть устойчивым только в том случае, если обе эти угрозы не будут реализованы. Вспомним, что за r мы обозначили расстояние от центра группы V до правого города. Тогда число $16 - r$ выражает расстояние от центра группы V до левого города. Коалиционная устойчивость разбиения π, таким образом, подразумевает выполнение одновременно двух однотипных неравенств (вспомним, что $k = 10$):

$$\begin{gathered} 120/10 + r \leq 120/7; \\ 120/10 + 16 - r \leq 120/7. \end{gathered} \tag{2.18}$$

Складывая их, получаем, что в случае их одновременного выполнения будет верным и неравенство $12 + 12 + 16 \leq 240/7$, или же $40 \leq 240/7$, то есть $280 \leq 240$! **Полученное явное противоречие завершает доказательство утверждения $C10 - 11$.**

Но и случай $|V| = 12$ также неосуществим ни в каком устойчивом разбиении π, как следует из нашего последнего утверждения, которое мы по аналогии так и назовём: **Утверждение $C12$.**

Докажем его. В силу леммы $FEAC - 2$, доказанной выше, разбирать надо лишь тот случай, когда единственный выпавший из группы V игрок живёт в левом городе.[13] Заметим, что центр группы V не может лежать правее одинокого волка, то есть $m[V] \leq 0$, ибо нестрого справа от центра должна лежать половина членов группы V, то есть 6 из них, что невозможно при $m[V] > 0$. Тем самым, расстояние от правого города до центра V составляет не менее 12.

Соответственно, и издержки жителей правого города (все они содержатся в группе V) будут не ниже, чем $120/12 + 12 = 22$.

Применим тот же приём "прыжка через голову", который был применён выше при доказательстве утверждения $C10 - 11$. А именно, образуем коалицию из всех жителей правого города, и единственного "не-члена" коалиции V. Последний в разбиении π испытывает издержки, равные фантасмагорической величине 120, и рад вступить в абы какую группу, его издержки там заведомо будут ниже.

В частности, в предлагаемой коалиции, которая, кстати, разрешена для отделения, ибо её медиана однозначно будет в правом городе, его издержки составят $120/6 + 16 = 36 < 120$.

Издержки же остальных пятерых членов сформированной коалиции составляют в точности величину $120/6 = 20$, что ниже 22, то есть наименьшего возможного значения их издержек в разбиении π.

Тем самым сформированная коалиция разрушает разбиение π. Значит, и в последнем разбираемом случае $|V| = 12$ разбиение π не выдерживает теста на устойчивость!

Доказательство универсального контрпримера $FEAC$, а вместе с ним и разбор конечной постановки F задачи многомерного размещения, полностью завершены !!!!!

[13] Ибо в противном случае, как и в предыдущем утверждении, центр группы V был бы обязан находиться также в левом городе.

Глава 3

Случай D: непрерывные расселения

Завершив анализ дискретного случая (и оставив в нём целый ряд задач на будущее), мы переходим к анализу случая бесконечного пространства N участников конфликта (игроков, жителей, агентов, потребителей блага и т.п.).

Интерес к нему связан с теми приложениями, в которых задействовано очень много участников (игроков). В таких случаях гораздо более правдоподобными выглядят выводы моделей с континуумом действующих лиц, ибо каждый игрок по отдельности не оказывает ощутимого влияния на агрегированные характеристики модели.

Как и в моделях Новой Экономической Географии ([57]), здесь потребуется преодоление первичного инстинкта неправдоподобности идеи "бесконечного множества людей". Чтобы помочь преодолеть этот чисто психологический барьер, я хочу напомнить, что от математической модели требуется не буквального совпадения с реальностью, а разумности и применимости *выводов* модели на практике или в теории.

По сути, все моделируемые сценарии завязаны на очень большое число игроков, и поэтому, наоборот, некоторые выводы *конечной* модели противоестествены на практике. В частности, из сказанного выше следует, что не ст‘оит придавать особенно большого значения концепции миграционной устойчивости в конечной постановке, кроме как плацдарма для сравнения с предсказаниями анализа свойства миграционной устойчивости разбиений в континуальном случае.

Иначе говоря, если в конечной постановке понятие *коалиционной* устойчивости оправдано как источник прогнозов на большое число игроков (более того, *любая* бесконечная постановка аппроксимируется *реплицированной* или очень плотной конечной), то в случае *миграционной* устойчивости реплицирование является незаконным приёмом: всё равно даже в пределе перемещается только *один* игрок!

Тем не менее идея перемещения *малых, но ощутимых* масс мистическим образом дрейфует из конечной постановки в непрерывную, и превращается в требование *локальной устойчивости* миграционно устойчивых решений.

Работа в этом перспективнейшем направлении только начинается; помимо концепции локально устойчивого равновесия, имеется ещё целый ряд концепций промежуточного характера, суммирующих полу-коалиционные и одновременно полу-миграционные (индивидуальные) требования к устойчивости рассматриваемых решений. Некоторые из концепций вводятся в заключительном разделе настоящей главы (раздел 3.4), где они заодно тестируются посредством простейшего из расселений, а именно *равномерного расселения на отрезке* $[0,1] \subset \mathbf{R}$.

Более продвинутые концепции, годные для широкого класса континуальных постановок (в том числе покрывающих случай T нескольких городов, в свою очередь рассмотренный в главе 4 диссертационной работы), обсуждаются в заключении, так как они вылезают за пределы *кубика базовых (основных) теоретико-игровых постановок задачи многомерного размещения*, о котором мы много говорили выше, начиная со вводной главы диссертации. Также в заключении будут связаны воедино различные концепции устойчивости решений задач многомерного размещения по отношению к теоретико-игровым угрозам (“великое объединение теоретико-игровых моделей общественного сектора”).

Содержание главы 3 следующее. В разделе 3.1 вводится непрерывная версия задачи многомерного размещения, причём только в легко трактуемом случае размещений с финитным, выпуклым и компактным носителем. (Бесконечные расселения, тем не менее, появятся в разделе 3.3, где и будет сказано о том, какой смысл им следует придавать.) В непрерывной версии модификации, как уже было отмечено выше, подвергается концепция миграционной устойчивости, и эта модификация также разъясняется во вводном разделе главы. Коалиционная устойчивость ничего нового, кроме технических уточнений, по сравнению с конечным случаем, в плане её формализации нам не принесёт. В первом разделе также приводятся непрерывные версии трёх основных принципов распределения издержек, с которыми мы выше имели дело в дискретной постановке задачи, и в общем виде определяется концепция миграционной устойчивости.

Разделы 3.2 и 3.3 настоящей главы посвящены двум сюжетам, каждый из которых опубликован в виде отдельной статьи. В первом из них (раздел 3.2) доказывается общая теорема существования миграционно устойчивого разбиения для одномерных расселений с принципом равнодолевого участия. Во втором сюжете (раздел 3.3) речь пойдёт о коалиционно устойчивых решениях задачи *равномерного* размещения на обычной, бесконечной во все стороны, плоскости, для принципа произвольных побочных платежей. Помимо конкретных задач, решаемых в разделах 3.2 и 3.3, последние содержат, соответственно, наборы определений миграционно и коалиционно устойчивых решений во всех конкретных постановках с литерой D.

Про завершающий раздел 3.4 и его содержание уже было сказано выше.

Непрерывный случай мы окрестим аббревиатурой D, если речь идёт (как в этой главе) о случае непрерывного расселения континуума игроков, обладающего всюду положительной плотностью, и аббревиатурой T, если континуум игроков раскидан по конечному числу мест жительства ("случай нескольких городов", глава 4). Промежуточные виды расселений в работе не рассматриваются (хотя, безусловно, суперпозиция двух основных расселений представляет сугубый практический интерес, как отражение реальной ситуации "несколько городов плюс сельская местность").

В каждом из этих двух классов расселений соответствующую букву (D или T) мы прибавляем слева вместо F к каждому из вводимых ниже принципов распределения издержек, а также к каждому из двух классов решаемых задач: поиск миграционно (M) устойчивых либо коалиционно (C) устойчивых решений. Таким образом у нас возникнет 12 различных постановок задачи; впрочем, с учётом замечаний, сделанных и выше в “дискретных” главах, и ниже по тексту, реальное количество рассматриваемых сюжетов окажется существенно меньшим.

Пример аббревиатуры: DSC, задача поиска коалиционно устойчивых разбиений при непрерывном расселении с плостностью для принципа произвольных побочных платежей. Рассмотрен в разделе 3.3 текущей главы. Другие сюжеты расшифровываются аналогичным образом.

Напоследок пройдёмся по всем потенциально имеющимся в нашем распоряжении сюжетам, чтобы легче было ориентироваться в материале, изложенном по ходу главы 3.

Как и в дискретном случае, у нас снова возникают те же три основных принципа распределения издержек для непрерывной континуальной постановки: **принципы** DS**,** DR **и** DE.

После дробления этих задач на анализ коалиционной и миграционной устойчивости, таким образом, получается 6 вариантов постановок задач для исследования в классе непрерывных расселений. Один из них, впрочем, сразу выпадает: как мы знаем, миграционную устойчивость в случае DS определить нельзя[1]

Итого, минус DSM.[2]

Другой, DRC, как было сказано в предыдущей главе, тривиален для анализа и также нами здесь опускается. Третий, DRM, решён мною недавно и ещё не опубликован, там ответ — универсальная теорема существования (!), но в диссертацию этот сюжет войти уже не успел.

Остаются случаи DEM, DSC и DEC. Именно их мы и будем ниже в текущей главе анализировать. Грубо говоря, раздел 3.2 посвящён результату в постановке DEM, раздел 3.3 — анализу конкретного расселения в постановке DSC, а завершающий главу раздел 3.4 содержит анализ равномерного расселения на отрезке, включающий как постановку DEC,

[1]Точнее, можно произвольным образом, и в итоге можно добиться реализации в равновесии любого разбиения и любой схемы распределения издержек. Это, конечно, неинтересно!

[2]Update: в процессе подготовки диссертации на завершающем этапе меня осенило, как можно абсолютно естественным образом ввести концепцию миграционной устойчивости как в дискретный, так и (несколько более изощрённо, но не менее изящно!) в непрерывный варианты постановок с принципом трансферабельной полезности. Но об этом я уже здесь не напишу. В монографию потом всё войдёт!

так и прочие постановки, в том числе и не вошедшие, строго говоря, в наш “кубик рубика”.

3.1 Задача многомерного размещения для непрерывных расселений и принципы распределения издержек

В открывающем разделе мы сформулируем задачу многомерного размещения, обсудим связанные с ней понятия, терминологию, а также проблемы, порождаемые непрерывностью постановки. Дополнительную сложность будет представлять случай *неограниченных* расселений, но здесь до нас люди уже поработали над адекватной формализацией (по крайней мере, в простейших случаях), поэтому мы в разделе 3.1 ограничиваемся расселениями на выпуклых[3] и компактных носителях.

При анализе непрерывных расселений в данной главе будет сделано ещё несколько предположений, разумно ограничивающих общность рассмотрения нашей основной задачи.

А именно, мы будем предполагать N континуальным, а меру на нём — обозначим её за $|\cdot|$, по аналогии с количеством игроков в конечной постановке задачи — не содержащей атомов, то есть $|\{i\}| = 0$ для любого $i \in N$, где i по-прежнему обозначает произвольного жителя. Более того, мы ограничимся непрерывными распределениями с плотностью, и поэтому будем безболезненно отождествлять жителя с *адресом его проживания*, используя для обозначения последнего более привычные в континуальной ситуации переменные: x, y и т.д.

3.1.1 Пререквизиты для ЗМР в случае D

Итак, пускай $X \subset \mathbf{R}^d$ обозначает фиксированный раз и навсегда выпуклый компакт, лежащий в d-мерном координатном нормированном пространстве (типа отрезка на прямой, круга на плоскости, куба, тетраэдра или шара

[3]Это не столь важное, но удобное для анализа свойство: решение задачи Штейнера о медиане для выпуклого множества не вылезает за пределы последнего.

в трёхмерном пространстве, и их многомерных обобщений). Норму на $\mathbf{R}^d$ обозначим за $||\cdot||$, и будем использовать для измерения расстояний. Практически все результаты относятся к случаю обычной евклидовой нормы, но на будущее, учитывая важность других способов измерения расстояний для практических задач, скажем, городского размещения (о чём мы уже говорили выше), “придержим” более общую постановку. Считаем, что $N = X$.[4]

Далее, мы будем предполагать, что множество игроков $N = X$ расселено с непрерывной плотностью $f : X \to \mathbf{R}$, и, дополнительно, что эта плотность отделена от нуля: $\exists \varepsilon : \ f(x) \geq \varepsilon \quad \forall x \in X$. Тем самым понятия измеримости любого подмножества игроков относительно введённой меры и относительно стандартной меры Лебега совпадают, что упрощает наши конструкции. Меру всякого измеримого подмножества $S \subset N$ мы будем вычислять именно по отношению к заданному распределению-расселению, и по аналогии с конечным случаем, обозначим её за $|S|$:

$$|S| = \int\limits_S f(x)dx, \tag{3.1}$$

где за dx стандартно обозначена уже обычная, Лебегова мера на $\mathbf{R}^d$.[5]

Коалиции и разбиения в случае D. В конечной постановке термины *коалиция* и *группа* мы относили к произвольному непустому подмножеству игроков.[6] Теперь так уже не получится, ибо надо *суммировать*, то есть *интегрировать по мере*, а, значит, не всякое подмножество игроков имеет право носить гордое имя “коалиция” (и “группа” тоже). Мы остановимся на следующем соглашении.

Определение $D0$. *Коалицией S* будет называться любое измеримое подмножество игроков $S \subset N = X$ положительной меры.

[4]Со следующей важной поправкой: очень трудно формализуемый случай, когда N не полностью заселяет X, мы оставляем без внимания. Этим случаем займутся следующие поколения, если найдут его научно значимым, или важным в приложениях.

[5]Иногда меру Лебега обозначают за $d^n x$, где n — размерность пространства, но я считаю это лишним. Кроме того, представляете себе, как некрасиво у нас будет выглядеть $d^d x$!

[6]Напомним соглашение о том, что “группы” составляют разбиения, а “коалиции” предъявляют угрозы устойчивости.

Далее, *разбиением* $\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}$ называется *конечный* набор коалиций, такой что $N = S_1 \sqcup S_2 \sqcup \ldots \sqcup S_k$. Когда мы будем говорить об элементах разбиения, мы коалиции часто будем именовать *группами* (как и выше в конечном случае).

Замечание к определению $D0$**.** Коалиции хочется рассматривать "с точностью до меры нуль", но здесь потребуется небольшая оговорка.

Дело в том, что, хотя на местоположение медиан коалиций мера ноль не влияет, но наличие одного игрока, желающего согласно имеющимся правилам сменить свою группу, влечёт, в силу непрерывности плотности расселения и отличности её от нуля, то же желание и в его соседях. Это свойство, характеризующее *неатомарные метрические игры*, очень важно для понимания того, как вообще устроены в таких играх угрозы.

Именно указанное обстоятельство послужило толчком ко введению усиленной концепции *локально устойчивого миграционного равновесия* в разделе 3.4, а также различных обобщений этой концепции в заключительной главе.

В любом случае вопрос о мере ноль является тонким, и мы всегда должны идти на компромисс между строгостью понятия "разбиение" и потенциальной незамкнутостью входящих в него групп: даже при $d = 1$ край группы-интервала должен быть приписан только к одной из соседних двух групп разбиения, и тогда соседняя группа этого края лишена и, следовательно, незамкнута. В размерностях $d > 1$ данные нестыковки только множатся и усложняются структурно.

Обычно описанный конфликт мы решаем в пользу незамкнутости групп.

Для придания повествованию оптимизма тем не менее заметим, что этот конфликт не очень критичен: все вводимые ниже принципы устойчивости нечувствительны к вопросам о границах групп разбиения, их незамкнутости и непустых пересечениях по множествам меры нуль (в определённом строгом смысле слова, который станет постепенно ясен по ходу развития диссертации).

3.1.2 Формализация ЗМР для постановки D

Перейдём теперь непосредственно к постановке задачи многомерного размещения для случая континуальных (непрерывных) расселений.

Как и в конечном варианте, возможны два подхода. В первом из них перебираются все (конечные[7]) подмножества $K \subset X$, при этом каждая точка $x \in X$ прикрепляется к *ближайшей* мощности $y \in K$:

$$\forall x \in N = X \quad h^*(x) \in Arg \min_{y \in K} ||x - y|| \tag{3.2}$$

посредством *функции прикрепления* $h^*(\cdot)$, где возможную неопределённость в выборе самой дешёвой мощности можно разрешить любым способом.[8]

Множества $\{h^{*-1}(y)\}_{y \in K}$ в случае евклидовой нормы (основной для нас случай) образуют "триангуляцию Вороного", а по отдельности носят название *ячеек Вороного* для множества узлов K. Для любой конечной сетки $K \subset X$ получающиеся множества в евклидовом случае являются выпуклыми многогранниками, точнее пересечениями многогранников с X (а на границе уж как получится — какими-то кусками границы самого X).

Обозначим за $T[y]$ суммарную стоимость перемещения всех жителей ячейки $h^{*-1}(y)$ к y, равную

$$\int\limits_{h^{*-1}(y)} ||x - y|| f(x) dx, \tag{3.3}$$

и не зависящую от того, куда мы определили пограничных жителей. Соответствующая формулировка задачи ЗМР принимает теперь вид

$$\min_{K \subset X} \left\{ g|K| + \sum_{y \in K} T[y] \right\}, \tag{3.4}$$

где минимизация производится на множестве всех конечных сеток (наборов точек) $K \subset X$. После этого само разбиение Вороного, соответствующее оптимально выбранному подмножеству K, будет представлять собой решение ЗМР в форме разбиения на группы.[9]

---

[7]В противном случае целевой функционал заведомо бесконечен, см. ниже формулу (3.4).

[8]В сюжете D точки неопределённости всегда будут иметь меру ноль. В следующей главе, в сюжете T, этого уже утверждать будет нельзя.

[9]С соответствующими необходимыми модификациями для произвольной неевклидовой нормы.

Однако, как и в дискретном случае, нам потребуется ещё и вторая формализация, начать которую надо с аналога задач (1.10) и (1.11) для произвольной коалиции $S \subset X$:[10]

$$D[S] = \min_{m \in X} \left\{ \int_S ||x-m|| f(x) dx \right\};$$

$$c[S] = \min_{m \in X} \left\{ \frac{g + \int_S ||x-m|| f(x) dx}{|S|} \right\} = \frac{g + D[S]}{|S|}. \tag{3.5}$$

Множество аргминимума, $M[S]$, на котором достигается решение этих двух (эквивалентных друг другу) задач, мы назовём множеством *медиан* коалиции S. В многомерных постановках с евклидовой нормой множество медиан $M[S]$ одноточечно для *любой* коалиции:

> **Лемма D о медиане.** Для любой коалиции S решение $m[S] = M[S]$ задач (3.5) с евклидовой нормой $||\cdot||$ *единственное* (и соответствующая точка $m[S]$ поэтому называется *медианой* коалиции S).

Доказательство похоже на доказательство леммы о медиане в конечном случае. Начало вообще такое же: предположим, что для некоторой коалиции S есть как минимум два решения задач (3.5), обозначим их за m и m'. Пусть L — прямая, соединяющая m и m'. Введём в рассмотрение середину отрезка с концами в двух наших медианах:

$$\bar{m} = \frac{m + m'}{2}, \tag{3.6}$$

а также (здесь начинается отличие от конечного случая!) множество $S' = S \setminus L$, которое также является коалицией, ибо отличается от S на меру нуль.

Более того, решение задачи, аналогичной (3.5), для коалиции S' будет совпадать с $M[S]$. Для любого $x \in S'$ мы имеем (неравенство треугольника, строгое в силу евклидовости нормы!)

$$\frac{1}{2}\left(||x-m|| + ||x-m'||\right) > ||x-\bar{m}||, \tag{3.7}$$

[10] В силу выпуклости пространства X, при поиске минимума можно ограничиться точками из него, что легко следует из теоремы Хана-Банаха об отделимости.

а так как $|S| = |S'| > 0$ и всюду $f(x) > 0$, то строгое неравенство сохраняется и при взятии интегралов (этот факт я доказывал в качестве упражнения на мех-мате МГУ при изучении курса функционального анализа!):

$$\int\limits_{S'} ||x - \bar{m}|| f(x) dx < \frac{1}{2} \left(\int\limits_{S'} ||x - m|| f(x) dx + \int\limits_{S'} ||x - m'|| f(x) dx \right). \qquad (3.8)$$

Однако ясно, что правая часть неравенства равняется $D(S) = D(S')$, а левая, значит, ещё меньше — что противоречит выбору m и m' как медиан S, следовательно, и S'. **Лемма D о медиане доказана.**

В отличие от случая конечного числа игроков и от случая конечного числа типов игроков (следующая глава 5), в непрерывной постановке мы постулируем, что на прямой медиана всегда выбирается в центре отрезка медиан (остальные случаи просто проигнорируем; я думаю, что они не порождают дополнительных интересных моментов в случае D. Впрочем, я вполне могу в этом и ошибиться!).

Теперь всё готово для эквивалентной переформулировки ЗМР:

$$\min_{\{\pi\}} \left\{ \sum_{S \in \pi} |S| c[S] \right\} = \min_{\{\pi\}} \left\{ g|\pi| + \sum_{S \in \pi} D[S] \right\}, \qquad (3.9)$$

где под $|\pi|$ понимается количество групп в разбиении. Заметим, что эквивалентная переформулировка буквально дословно совпадает с конечной — всё различие "втиснуто" в новые толкования операций $|S|$ и $c[S]$. Минимум ищется на пространстве всех конечных разбиений π пространства игроков $N = X$ на (почти, или совсем[11]) не пересекающиеся коалиции.

По совести, здесь надо формулировать и доказывать общую теорему существования решения такой задачи. Но мы этот шаг опустим, считая, что существование оптимальной сети очевидно из топологических соображений. В любом случае, не хочется отвлекаться от главного, поэтому в следующем разделе мы начинаем разговор об угрозах теоретико-игрового характера.

[11]Неважно!

3.1.3 Принципы распределения издержек для постановки D

Последнее определение, необходимое для обобщения на непрерывный случай теоретико-игровых постановок ЗМР, вводит понятие *способа (синоним: функции, или просто) распределения издержек*. В дополнение, определённый *принцип* распределения издержек относится к тому или иному ограничению на множество допустимых распределений.

Коалиционный подход

Начнём с самого простого, по аналогии с определением FP из первой главы, а также с формулой (1.16) оттуда же:

> **Определение** $D1$**.** Способом, функцией, или просто *распределением* издержек внутри группы (или коалиции) S называется любое измеримое отображение $b : S \to \mathbf{R}$. Далее, распределение $b(\cdot)$ называется *сбалансированным*, если выполнено условие баланса
>
> $$\int\limits_S b(x)f(x)dx = g + D[S] = |S| \cdot c[S]. \tag{3.10}$$
>
> *Принципом* распределения издержек называется сопоставление *каждой* коалиции S непустого класса сбалансированных измеримых функций, $B^S \subset \mathbf{R}^S$.

Теперь можно дословно перенести с конечного случая определение *ядра в форме разбиения на группы* и *коалиционно устойчивого разбиения* как такого, которое реализует хотя бы один ядерный вектор.

Мы опустим соответствующие определения, в частности по той причине, что для трёх основных принципов распределения издержек определения, адаптированные к непрерывным постановкам, будут приведены ниже.

Наиболее простой из всех принципов распределения издержек — *принцип трансферабельной полезности*, или *принцип произвольных побочных платежей*. Этот принцип, который и в континуальной постановке изучается нами только с позиций коалиционной устойчивости, мы обозначим в непрерывном случае за DS. В соответствии с принцип трансферабельной полезности, класс допустимых распределений $B^{DS} \subset \mathbf{R}^S$ состоит просто из класса всех сбалансированных функций (3.10).

Подробный анализ данного принципа в примерении к равномерному расселению на плоскости составляет, как уже отмечалось выше, содержание раздела 3.3 настоящей главы. Там же будут даны и точные определения концепции коалиционной устойчивости в приложении к двум оставшимся базовым принципам распределения издержек, изучаемым в диссертационном исследовании и вводимым ниже для континуальной постановки ЗРМ.

Миграционный подход

Переходя к понятию миграционной устойчивости, читатель ждёт, наверное, обсуждения концепции однозначного принципа как такого, при котором для любой коалиции $S \subset X$ класс допустимых схем B^S состоит всего из одной схемы $b^S(\cdot)$, по аналогии с тем, как это делалось в дискретной постановке F. Однако тут нас вместо этого поджидает целый ряд тонкостей и подвохов, а заодно и новых научных откровений.

В самом деле, что в первую очередь бросается в глаза при переходе от конечных постановок к континуальным? Принципиальная разница двух типов постановок в свете теоретико-игровых угроз миграционной природы. Когда один игрок мигрирует из группы в группу в дискретном сценарии, он обрекает новую группу (и старую, но это не так важно) на ощутимые перемены. Меняется задача выбора медианы — и сама медиана, и значение целевого функционала, вообще говоря, будут уже другими.

В непрерывном случае никто не ощущает миграции *отдельного* игрока. Другое дело, если миграция одного игрока повлечёт переезд многих, уже *множества положительной меры*. Этот важный аспект, как уже было выше отмечено, вдохновил нас с соавторами на модификацию концепции миграционной устойчивости, о которой речь пойдёт в заключительном разделе 3.4 данной главы. Миграции же отдельного игрока никто не замечает.

Поэтому, если члены группы S некоторого разбиения π договорились о том или ином способе распределения издержек, то появление в группе нового лица может быть совершенно не замечено остальными. Этому лицу можно приписать огромные издержки, можно приписать нулевые — на положении остальных членов группы всё это никак не скажется.

Но ведь разговор о миграционных угрозах как раз упирается в то, какие издержки придётся нести "перебежчику"! Значит, понятие *схемы распределения издержек*, как минимум если речь идёт о формализации миграционной устойчивости, нужно определять так, чтобы не только члены группы, но и каждый невошедший в неё знали, сколько придётся в ней платить, если вдруг в ней доведётся оказаться.

Формализуем теперь всё сказанное выше про миграционные угрозы и однозначные принципы распределения издержек.

Определение $D2$**.** Схема, механизм, правило, однозначный принцип (все эти термины используются синонимично) распределения издержек, принятый в сообществе игроков $N = X$ — это семейство измеримых функций

$$\gamma_S : X \to \mathbf{R}, \tag{3.11}$$

по одной для каждого представленного коалицией $S \subset N$ класса эквивалентности измеримых множеств (коалиций), относящая *каждому* игроку $x \in N$ (а не только членам S!) значение общих издержек (транспортных плюс его долю в g), которые он понесёт, если вдруг захочет *считать* себя частью коалиции S. Слова про классы эквивалентности означают, что функция γ_S не меняется при замене S на S', отличающуюся от S только на меру ноль. Как и выше, мы потребуем, чтобы удовлетворялось *условие внутригрупповой сбалансированности* для любой коалиции:

$$\forall S \quad \int\limits_S \gamma_S(x) f(x) dx = |S| c[S]. \tag{3.12}$$

Заметим, что наши схемы непременно *анонимны*: привязка идёт не к имени человека, а к его адресу. Так сказать, если разные из континуального числа людей игроки имеют один адрес, то они и платят одинаково.[12]

Миграционная устойчивость теперь может быть определена для любого однозначного принципа посредством следующего общего определения, конкретные воплощения которого нам встретятся ниже в разделе 3.2.

[12]Это, без сомнения, ограничение общности. Но наша цель — выявить теоретико-игровые закономерности, а не ставить задачу в максимально общей возможной форме.

Определение DM**.** Рассмотрим задачу многомерного размещения, в которой множество $N = X \subset \mathbf{R}^d$ — выпуклый компакт, лежащий в d-мерном пространстве, где $d \geq 1$. Предполагается, что расселение допускает плотность $f : X \to \mathbf{R}_+$, непрерывную и отделённую от нуля, и задан однозначный принцип (3.11) распределения издержек, обладающий свойствами, постулированными в определении $D2$.

Миграционным равновесием в форме разбиения на группы, или просто *миграционно-устойчивым решением* в описанной ситуации называется разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}$ (см. определение $D0$), при котором выполнено следующее условие:

$$\forall l = 1, \ldots, k, \ \forall x \in S_l \quad l \in Arg \min_{p=1,\ldots,k} \gamma_{S_p}(x). \tag{3.13}$$

Это попросту означает, что никто не хочет перебежать из своей группы в чужую — уровень издержек, который ему обеспечивает "своя" группа, является минимально возможным для него среди всех вообще групп.

Два основных принципа, когда правило деления издержек строго фиксировано, это уже знакомые нам по предыдущим главам, во-первых, *принцип равнодолевого участия*, который мы обозначим в непрерывной постановке за DE:[13]

$$\forall S, \ \forall x \in X \quad \gamma^e_S(x) = \frac{g}{|S|} + ||x - m[S]||; \tag{3.14}$$

и, во-вторых, *принцип выравнивания издержек*, или *принцип Ролса,* обозначаемый в постановке D через DR:

$$\forall S, \ \forall x \in X \quad \gamma^r_S(x) \equiv c[S]. \tag{3.15}$$

В обоих формулах выше под S понимается любая коалиция игроков.

Заметим, что оба принципа весьма естественным образом приписывают нести конкретную величину издержек тем игрокам, которые не входят в S и лишь прикидывают, что же им светит в том случае, если они туда войдут.

[13]Он здесь однозначный, в силу леммы D о медиане, а также сказанного выше про соглашение о выборе медианы для одномерных расселений в середине отрезка медиан.

Именно в силу этой естественности и было решено распространить понятие схемы распределения издержек $\gamma_S(\cdot)$, рассматриваемой как функция, с области определения S до универсальной при каждом S области определения, X.

Конкретизация определений устойчивости для всех пяти возникающих сценариев (DSC, DRC, DRM, DEC, DEM) будет приведена ниже в соответствующих местах разделов 3.2 и 3.3.

3.2 Теорема DEM о существовании устойчивого разбиения для произвольного расселения на отрезке

В настоящем разделе будет доказана следующая теорема, опубликованная в статье [30] автора диссертационной работы:

> **Теорема DEM.** Рассмотрим задачу *одномерного размещения*, в которой множество $N = X = [0,1]$. Предполагается, что расселение допускает плотность $f : X \to \mathbf{R}_+$, непрерывную и отделённую от нуля, и задан принцип DE распределения издержек (3.14). Тогда при любом $n \geq 2$ существует миграционно устойчивое разбиение отрезка $[0,1]$ на n групп-интервалов.[14]

3.2.1 Определения для случаев DRM и DEM

Сперва же дадим определения миграционной устойчивости, адаптированные из определения DM к стандартным принципам распределения издержек. Начнём с принципа выравнивания платежей (постановки Роллса), DRM.

Здесь нас ждёт некоторый сюрприз.

> **Определение DRM.** Разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}$ пространства $X = N$ называется *миграционно-устойчивым* согласно принципу Ролса, если у всех групп разбиения одни и те же средние издержки формирования, то есть $c[S_l] \equiv Const,\ \ l = 1, \ldots, k$.

[14] Случай $n = 1$ тривиален, ибо из тотальной группы в континуальной постановке “некуда бежать”.

В самом деле, если бы у двух групп были разные средние издержки функционирования, то любой участник менее эффективной группы хотел бы “улизнуть” в группу более эффективную, снижая таким образом свои издержки (которые в группе-акцепторе от его перемещения не поменяются!). На этом соображении зиждится общая теорема существования для случая DRM, доказанная мною, но не вошедшая в диссертацию.

Теперь дадим определение миграционной устойчивости для принципа равнодолевого участия.

Определение DEM**.** Разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}$ пространства $X = N$ называется *миграционно-устойчивым* согласно принципу равнодолевого участия, если для любой группы $S_l \in \pi$, любого её жителя $x \in S_l$ и любой другой группы разбиения ($r \neq l$) выполнено следующее неравенство:

$$\frac{g}{|S_l|} + ||x - m[S_l]|| \leq \frac{g}{|S_r|} + ||x - m[S_r]||, \tag{3.16}$$

показывающее, что житель x не хочет менять свою группу S_l на группу S_r (и как итог, никакой житель не хочет ничего менять).

В заключение этого подраздела договоримся о том, что во всех рассматриваемых нами разбиениях, когда речь идёт о миграционной устойчивости при принципе равнодолевого участия, у любых двух групп должны быть медианы в разных точках. С точки зрения хоть сколько-нибудь кооперативного понятия об устойчивости, это было бы само собой гарантировано: слияние двух групп с одной и той же медианой влечёт безусловное снижение издержек всех участников.

Однако для концепции миграционной устойчивости *в непрерывной постановке* любое разбиение пространства игроков на две равновеликих группы с одной и той же медианой будет решением! Ведь перемещения игрока никто не заметит, и никто не станет “менять шило на мыло”.

Требование локальной устойчивости исключит такие сценарии; нам, однако, хочется доказывать содержательные теоремы не только о локально устойчивых разбиениях, но и о миграционной устойчивости как таковой, так что мы просто договоримся о том, что подобных "маразмов" мы рассматривать не будем.[15]

3.2.2 Постановка задачи на отрезке: ЗМР с фиксированным числом групп

Переходя к случаю $d = 1$ (то есть к произвольным одномерным расселениям), вспомним прежде всего о таком важном свойстве разбиений, как *интервальность*. В нынешнем непрерывном случае эта концепция совершенно прозрачна, а именно, коалиция или группа называется интервальной, если она представляет собой интервал, полуинтервал или отрезок (это всё одно и то же, ибо мы договорились рассматривать коалиции и группы с точностью до меры нуль). Разбиение называется интервальным, если оно просто состоит из интервалов.

В одномерном случае целесообразно ввести в рассмотрение, помимо плотности $f(\cdot)$, также и кумулятивную функцию распределения. Последнюю, как обычно, мы будем обозначать за $F(\cdot)$. Если S — интервал, $S = [a, b]$, то имеем

$$|S| = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{3.17}$$

Сформулируем теперь задачу одномерного размещения на заранее предписанное число групп, n (до конца раздела 3.2 будем считать параметр n фиксированным, $n \geq 2$). Это — задача

$$\min_{(m_1,\dots,m_n);h:[0,1]\to\{1,\dots,n\}} \left\{ \int_0^1 |x - m_{h(x)}| f(x)dx \right\}. \tag{3.18}$$

Иными словами, нужно выбрать адреса открытия мощностей $m_1, \dots, m_n$, а также способ прикрепления каждого жителя к одному из адресов, оптимальным по общей стоимости транспортировки образом. Будем всегда считать в дальнейшем, что $m_1 < m_2 < \ldots < m_n$ (легко показать, что в оптимуме никогда не будет совпадения двух или более мест открытия мощностей). В любом решении задачи (3.18) имеют место два наблюдения:

[15] Похожим образом справляются с обсуждаемым казусом и коллеги, см. [4].

Во-первых, группа игроков, прикреплённых к одному и тому же пункту m_l, является одномерной "ячейкой Вороного" для сетки $\{m_q\}_{q=1}^n$):

$$S_l := \{x \in [0,1]: \quad |x - m_l| \le |x - m_q| \quad \forall q = 1, \ldots, n.\} \tag{3.19}$$

В частности, очевидно, что $S_l = [a_{l-1}, a_l]$ — интервал, причём для всех $1 < l \le n$ имеем $|a_{l-1} - m_{l-1}| = |a_{l-1} - m_l|$, иными словами, середины между пунктами открытия мощностей служат внутренними границами групп. Положим $a_0 = 0,\ a_n = 1$.

Во-вторых, что не менее важно, каждая точка m_l является *медианой* своей отрезка-группы $S_l = [a_{l-1}, a_l]$:

$$F(m_l) - F(a_{l-1}) = F(a_l) - F(m_l) = \frac{s_l}{2}, \tag{3.20}$$

где

$$s_l = |S_l| = F(a_l) - F(a_{l-1}) = \int\limits_{a_{l-1}}^{a_l} f(x)dx \tag{3.21}$$

до конца раздела будет обозначать массу группы S_l.

Первое наблюдение очевидно, второе следует из предположения об отделённости от нуля плотности расселения, $f(\cdot)$. В силу того же предположения медианная точка любой интервальной группы единственна.

Соображения, приведённые выше, означают, что задача одномерного размещения допускает эквивалентную переформулировку (это мы уже проходили в начале главы):

$$\min_{0=a_0<a_1<\ldots<a_n=1} \left\{ \sum_{l=1}^n s_l c[S_l] \right\}, \tag{3.22}$$

где $\forall l = 1, \ldots, n$ имеем $S_l = [a_{l-1}, a_l]$, за s_l обозначена (как выше, так и везде ниже в разделе) масса $|S_l|$ группы S_l, а минимум берётся по всем наборам упорядоченных границ будущих групп разбиения.

3.2.3 Миграционная устойчивость на отрезке

Теперь мы переходим от оптимизации в задаче одномерного размещения к вопросам устойчивости разбиений по отношению к миграционной (теоретико-игровой) угрозе. Напомним, что мы работаем с принципом равнодолевого участия: если житель x принадлежит группе S, то он несёт издержки (плата за благо) в размере

$$c(x,S) = \frac{g}{|S|} + |x - m[S]|. \tag{3.23}$$

Соответственно, при смене группы меняются обе компоненты формулы.

Напомним (определение $D2$ выше), что разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_n\}$ называется *миграционно-устойчивым*, если для любого участника $x \in S_k$ любой группы $k = 1, \ldots, n$ его перемещение в любую другую группу $l \neq k$ не может повлечь снижения издержек:

$$c(x,S_l) = \frac{g}{|S_l|} + |x - m[S_l]| \geq \frac{g}{|S_k|} + |x - m[S_k]| = c(x,S_k). \tag{3.24}$$

Справедливы следующие наблюдения, специфичные для случая $d = 1$.

Лемма DIC об интервальности и непрерывности.

(i) Любое миграционно устойчивое разбиение π является интервальным (и, следовательно, может быть задано как $\pi = \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, где имеем $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = 1$ — границы интервалов, а группы разбиения принимают вид $S_l = [a_{l-1}, a_l]$, с массами $s_l = |S_l|$ — как и в любом решении задачи оптимизации (3.18));

(ii) интервальное разбиение $\pi = \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ является миграционно устойчивым в том и только том случае, когда для любого пограничного жителя $x = a_l$ (где $l = 1, \ldots, n-1$) выполнено равенство

$$c(x,S_l) = c(x,S_{l+1}), \tag{3.25}$$

означающее, что функция "склейки", $c(x,S^x)$, где S^x обозначает группу разбиения π, содержащую жителя x, является непрерывной на всём отрезке $[0,1]$.[16]

Таким образом, в миграционно устойчивых разбиениях участники, живущие на границе двух групп разбиения, несут одинаковые издержки в обеих примыкающих друг к другу группах.[17]

---

[16] Заметим, что это — *не* функция издержек отдельной группы (3.23), продолженная за границу своей группы, а именно *сквозная* функция издержек *каждого игрока в своей собственной группе.*

[17] И поэтому неважно, в какую из двух групп-соседей отнести жителя на границе, если всё-таки кому-нибудь приспичит строго разбить множество участников на непересекающиеся, и поэтому незамкнутые, группы-полуинтервалы!

Доказательство леммы DIC. (i) Практически дословно повторяет доказательство теоремы FEM об интервальности из главы 1, и поэтому смело может быть опущено;

(ii) Это утверждение практически очевидно, причём в обе стороны. Если бы равенство (3.25) не выполнялось для какого-то l, то для достаточно близких к a_l жителей оно бы тоже нарушалось. Но это означает, что с одной из двух сторон жители "недовольны" и нарушают, таким образом, свойство миграционной устойчивости.

Приведём графическую иллюстрацию доказательства (ii) в обратную сторону (рисунок 10 ниже). Кривая линия представляет собой график плотности $f(\cdot)$ расселения. Внутри каждой группы изображена функция $c(x, S_l)$, являющаяся, согласно формуле (3.23), кусочно-линейной "птичкой", так сказать "анти-горой", с наклоном обоих склонов, равным единице.

Птички на границе "взялись за руки" — это и есть условие краевого безразличия, или непрерывности склеенной функции издержек.

Если теперь мысленно продолжить конкретную "птичку" (на рисунке внизу их три) за пределы её родной группы, то график уедет выше графика соседней "птички", а также заведомо выше графика птичек не-соседних. Это и означает миграционную устойчивость — воображаемое попадание в чужую группу никогда не повлечёт снижения издержек. Честно говоря, всё настолько очевидно из рисунка, что формальное доказательство лишь запутает дело.

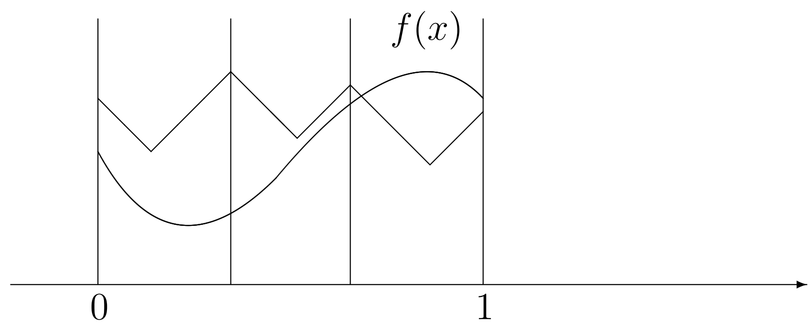

Рисунок 10. Геометрическая иллюстрация к Лемме DIC, пункт (ii).

3.2.4 Доказательство основной теоремы

Перейдём теперь непосредственно к **доказательству теоремы** DEM, сформулированной в начале текущего раздела. В силу предварительного анализа, проведённого выше, нашей целью при каждом n является нахождение интервального разбиения

$$N = [a_0, a_1) \sqcup [a_1, a_2) \sqcup \ldots \sqcup [a_{n-1}, a_n], \tag{3.26}$$

удовлетворяющего свойству (3.25) при каждом $l = 1, \ldots, n-1$, где точки $m_1, \ldots, m_n$ определяются посредством (3.20) как решения соответствующих задач внутригрупповой оптимизации.

Отметим прежде всего, что между пространством всех наборов ненулевых масс $(s_1, \ldots, s_n)$ таких, что $\sum_{l=1}^{n} s_l = 1$ и пространством граничных наборов точек $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = 1$ существует взаимно-однозначное и взаимно непрерывное соответствие, что следует напрямую из свойств непрерывности и отделённости от нуля функции плотности, $f(\cdot)$.

Тем самым поиск разбиения эквивалентен поиску *набора масс групп* разбиения, а само пространство всех (упорядоченных) n-разбиений есть внутренность симплекса.

Введём набор вспомогательных обозначений, подготовительных для доказательства основной теоремы раздела 3.2. А именно, обозначим величину издержек краевых левого и правого жителей группы l, где $l = 1, \ldots, n$, за $c_{l,L}$ и $c_{l,R}$, соответственно. Формально:

$$\begin{aligned} c_{l,L} &= c(a_{l-1}, S_l) = \frac{g}{|S_l|} + |a_{l-1} - m_l|; \\ c_{l,R} &= c(a_l, S_l) = \frac{g}{|S_l|} + |a_l - m_l|. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Теперь мы сконструируем некоторую вектор-функцию, Ψ, определённую на внутренности $(n-1)$-го симплекса Δ_n и отображающую её в $\mathbf{R}^n$:

$$\Psi(s_1, \ldots, s_n) =$$

$$s_2(c_{1,R} - c_{2,L}),$$

$$s_1(c_{2,L} - c_{1,R}) + s_3(c_{2,R} - c_{3,L}),$$

$$\ldots \tag{3.28}$$

$$s_{n-2}(c_{n-1,L} - c_{n-2,R}) + s_n(c_{n-1,R} - c_{n,L}),$$

$$s_{n-1}(c_{n,L} - c_{n-1,R}).$$

Построенное отображение, если его продолжить по однородности степени 0 на всё $\mathbf{R}^n_{++}$, удовлетворяет всем пяти условиям, которые перечисляются в знаменитой Лемме Никайдо-Гейла-Дебре, см. например, [110], стр. 585-587, а также в переведённой книге [25]:

i Однородность степени 0 — по построению.

ii Непрерывность — в силу непрерывной зависимости набора точек границ $\{a_l\}_{l=1,\ldots,n-1}$ от набора масс $\{s_l\}_{l=1,\ldots,n}$ (здесь используется отделённость от нуля функции плотности $f(\cdot)$), а также непрервыности функций издержек (3.27) и непрерывности медианной точки $m[[a,b]]$ при изменении краёв группы $[a,b]$.[18]

iii Закон Вальраса:
$$\sum_{l=1}^{n} s_l \Psi_l(s_1, \ldots, s_n) = 0 \tag{3.29}$$
для всех наборов $(s_1, \ldots, s_n)$. Очевидно (прямая подстановка, все члены сокращаются попарно).

[18]И здесь тоже используется отделённость от нуля функции $f(\cdot)$ плотности расселения!

iv Равномерная ограниченность снизу:

$$\begin{gathered} s_{i-1}(c_{i,L}-c_{i-1,R})+s_{i+1}(c_{i,R}-c_{i+1,L})\geq \\ \geq -s_{i-1}c_{i-1,R}-s_{i+1}c_{i+1,L}\geq -1-g-1-g=-(2+g). \end{gathered} \tag{3.30}$$

v Если последовательность точек, выбранных во внутренности симплекса, $\{(s_1^m,\ldots,s_n^m)\}_{m\in\mathbf{N}}$, сходится при $m\to+\infty$ к точке $(s_1,\ldots,s_n)$, которая лежит на границе симплекса,[19] то

$$\max_{k=1,\ldots,n}\Psi_k(s_1^m,\ldots,s_n^m)\to+\infty \tag{3.31}$$

при $m\to+\infty$.

Последнее свойство доказывается следующим образом. В силу свойства ограниченности вторых компонент функций издержек (3.27), а также сокращения s_i в числителе и в знаменателе выражений вида s_ic_{iL} и s_ic_{iR}, максимум из координат вектор-функции Ψ стремится к бесконечности тогда и только тогда, когда к бесконечности стремится

$$\max\left\{\frac{s_2^m}{s_1^m},\frac{s_1^m}{s_2^m}+\frac{s_3^m}{s_2^m},\ldots,\frac{s_{n-2}^m}{s_{n-1}^m}+\frac{s_n^m}{s_{n-1}^m},\frac{s_{n-1}^m}{s_n^m}\right\}. \tag{3.32}$$

Если некоторые, *но не все*, компоненты s_l^m стремятся к нулю, то отношение некоторых из соседних неограниченно возрастает (упражнение по математическому анализу для первого курса, рекомендую семинаристам!). Тем самым, последнее свойство тоже установлено.

Теперь, применяя Лемму Никайдо-Гейла-Дебрэ, мы заключаем, что существует такой набор ненулевых масс $(s_1,\ldots,s_n)$, что

$$\Psi_l(s_1,\ldots,s_n)=0\quad\forall l=1,\ldots,n. \tag{3.33}$$

Вспоминая определение функции Ψ, а также учитывая тот факт, что все массы ненулевые: $\forall l\ s_l\neq 0$, мы немедленно получаем, что $c_{1,R}=c_{2,L}$ (из равенства нулю первой компоненты). Затем, двигаясь направо по формуле для Ψ, имеем $c_{2,R}=c_{3,L}$, и так шаг за шагом вплоть до $c_{n-1,R}=c_{n,L}$. **Теорема DEM существования миграционно-устойчивого разбиения для любого непрерывного расселения на отрезке полностью доказана.**

[19] Что означает, что для некоторых, *но не всех одновременно*, индексов l выполнено $s_l^m\to 0$.

3.2.5 Сравнение равновесного и оптимального решений

Интересно теперь сравнить решение исходной задачи оптимизации, задачи одномерного размещения, с одним из миграционно устойчивых разбиений в той же задаче.

А именно, в решении задачи оптимизации должно быть выполнено

$$|a_l - m_l| - |a_l - m_{l+1}| = 0 \tag{3.34}$$

для любого $l = 1, \ldots, n-1$, что означает оптимизацию прикрепления каждого из жителей — *к ближайшему пункту доступа.* Любое отклонение от этого принципа, в силу отделённости от нуля функции плотности расселения, влечёт строгое отклонение от оптимума.

А что же в миграционно устойчивом разбиении? В последнем имеем

$$c(a_l, S_l) = c(a_l, S_{l+1}). \tag{3.35}$$

С учётом формулы (3.23) это равносильно тому, что

$$|a_l - m_l| - |a_l - m_{l+1}| = \frac{g}{|S_{l+1}|} - \frac{g}{|S_l|}. \tag{3.36}$$

Мы заключаем, что *необходимым* условием оптимальности миграционно устойчивого разбиения служит равенство нулю правых частей (3.34) при всех $l = 1, \ldots, n-1$. Последнее, в свою очередь, означает, что массы всех групп оптимального разбиения оказались одинаковыми:

$$\forall l = 1, \ldots, n \quad |S_l^{opt}| = \frac{1}{n}. \tag{3.37}$$

Это свойство имеет $(n-1)$-й порядок вырождения в (бесконечномерном) пространстве всех расселений на отрезке $[0,1]$.[20]

Как обычно, равновесность не в ладу с оптимальностью!

3.3 DSC-устойчивость при $d = 2$

Данный раздел главы 3, посвящённой непрерывным расселениям с плотностью, подвергает анализу коалиционные угрозы устойчивости для

[20]Знающие люди мне ответят, что это ещё ничего не доказывает, так как а приори может оказаться, что в *любом* миграционно-устойчивом решении массы групп совпадают. Навскидку очевидно, что это не может быть так для *любых* расселений, но тем не менее, такая предъява законна.

мира, равномерно расселённого по всей бесконечной плоскости, в условиях трансферабельной полезности (случай DS, когда допускаются любые побочные платежи, т.е. любые перераспределения издержек внутри групп).

Этот сюжет интересен уже тем, что это единственный на сегодняшний день содержательный и завершённый анализ многомерного варианта рассматриваемой в диссертации проблемы. Ниже будет установлено, что множество коалиционно-устойчивых разбиений *пусто*, но *почти непусто*: при минимальной помощи извне получается поддержать оптимальную групповую структуру, с помощью правильно (более того, однозначно!) выбранного способа внутригруппового перераспределения издержек.

Бесконечная мера пространства игроков (в рассматриваемом сюжете у нас $X = \mathbf{R}^2$) порождает дополнительные трудности, которые связаны, по большей части, со стандартной задачей многомерного размещения.

Впрочем, как мы уже упоминали во введении, этой задаче были посвящены усилия многих учёных на протяжении более, чем полувека (если не века), так что эти трудности так или иначе уже преодолены. Дополнительных сложностей, связанных с понятием коалиционной устойчивости, на удивление нет или почти нет. Для полноты картины начнём этот раздел со строгих определений устойчивости разбиений в постановках DSC, DRC и DEC. В них легко угадываются их прототипы из главы 2.

Первое определение сразу же уточняется, имея в виду последующее изложение материала в этом разделе.

3.3.1 Коалиционная устойчивость в сюжете D

В данном подразделе речь всё ещё идёт о стандартной постановке с выпуклым и компактным пространством X. Начнём с коалиционной устойчивости в сюжете DSC, который является центральным в разделе 3.3.

Определение DSC. Разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}$ пространства $X = N$ называется *коалиционно-устойчивым*, если существует такой набор сбалансированных согласно формуле (3.10) распределений издержек

$$b_l : S_l \to \mathbf{R}, \tag{3.38}$$

“склеивающихся” в функцию $b:[0,1]\to\mathbf{R}$ по правилу

$$b(x)=b_l(x),\quad x\in S_l, \tag{3.39}$$

что для любой потенциальной коалиции S мы имеем следующее *ядерное неравенство:*

$$\int\limits_S b(x)f(x)dx\le g+D[S]=|S|\cdot c[S]. \tag{3.40}$$

В этом случае $b(\cdot)$ называется *коалиционно устойчивой*, или *ядерной* схемой распределения издержек для всего “мира” $N=X$.

Множество всех ядерных схем называется *ядром* рассматриваемой задачи. На континуальный случай без изменения переносится теорема FSC из предыдущей главы, повествующая о том, что только оптимальные разбиения, то есть такие, которые решают задачу (3.22), могут быть коалиционно устойчивыми для постановки DSC и порождать ядерные распределения издержек $b(\cdot)$. Но ядро может быть и пустым. На этот случай нам пригодится следующее уточняющее определение.

Определение $DSC-1$**.** Разбиение $\pi=\{S_1,\dots,S_k\}$ пространства $X=N$ называется δ*-устойчивым*, если существует такой набор сбалансированных согласно формуле (3.10) распределений издержек

$$b_l:S_l\to\mathbf{R}, \tag{3.41}$$

“склеивающихся” в функцию $b:[0,1]\to\mathbf{R}$ по правилу

$$b(x)=b_l(x),\quad x\in S_l, \tag{3.42}$$

что для любой потенциальной коалиции S выполнено δ*-ядерное неравенство:*

$$(1-\delta)\int\limits_S b(x)f(x)dx\le g+D[S]=|S|\cdot c[S]. \tag{3.43}$$

В этом случае $b(\cdot)$ называется δ*-устойчивой*, или δ*-ядерной* схемой распределения издержек, а множество всех δ-ядерных схем называется δ*-ядром.*

При любых начальных данных ЗМР существует такое $\delta^* \in [0,1)$, что при всех $\delta \in [0,\delta^*)$ в нашей задаче δ-ядро пусто, а при всех $\delta \in (\delta^*,1]$ оно непусто. Это утверждение очевидно; немного более вдумчивый взгляд вглубь проблемы позволяет утверждать, что само δ^*-ядро также непусто. Мы не будем доказывать этого утверждения, ибо о нём говорилось во введении; кроме того, для нашего конкретного изучаемого случая $X = \mathbf{R}^2$ с равномерным расселением мы его установим вручную. Отметим просто, что δ^*-ядро называется *минимальным* δ-ядром задачи (least core, см. [108]).

В следующем подразделе мы продолжим обсуждение этих концепций в приложении к упомянутому равномерному расселению на всей плоскости, а сейчас отдадим старинный долг, и сформулируем определения свойств коалиционной устойчивости для других двух рассматриваемых в работе принципов распределения издержек. Принцип DEC нам ещё встретится в следующем, последнем в текущей главе разделе 3.4.

> **Определение** DRC дословно (!) совпадает с определением FRC, данным в предыдущей главе. Заметим, что тонкости типа пересечения по мере ноль нас нисколько не волнуют.

А вот определение для постановки DEC приведу целиком (несмотря на то, что оно тоже практически дословно совпадает с определением FEC из первой главы, нам ещё придётся ниже с ним работать, так что напоминание нисколько не помешает).

> **Определение** DEC**.** Разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}$, где $S_1 \sqcup \ldots \sqcup S_k = N$, называется *коалиционно-устойчивым* или *ядерным* в случае DE, если не существует такой коалиции S, чтобы для любого её участника $x \in S$ было выполнено неравенство
>
> $$c[x,S] = \frac{g}{|S|} + ||x - m[S]|| < \frac{g}{|S_l|} + ||x - m[S_l]|| = c[x,S_l], \qquad (3.44)$$
>
> где $x \in S_l$ в исходном разбиении. В силу договорённостей, достигнутых нами в начале текущей главы, все медианы всегда однозначно определены даже при $d = 1$ (не говоря уже о высших размерностях, где работает лемма D о медиане!).

Опять же, возникают небольшие тонкости, связанные как с пересечениями по мере ноль, так и с выполнением неравенства (3.44) в строгой либо нестрогой форме. Всё это оставим за кадром: даю вам честное слово, что ниже в работе нас ждут вещи поинтереснее, нежели копание в мелочах!

3.3.2 Шестиугольные мозаики

Постановка задачи оптимального размещения на плоскости

Как уже отмечалось во введении, *задача об оптимальном размещении логистических объектов на равномерно заселённой плоскости* является примером континуальной реинкарнации ЗМР. Медианы групп и коалиций будем иногда именовать *центрами* соответствующих фигур на плоскости.

В данном сюжете мы используем евклидово расстояние на плоскости (хотя в практических целях может быть важным исходить из какой-либо другой нормы на $\mathbf{R}^2$). Таким образом, если некоторый человек живёт в точке $x = (x_1, x_2) \in X = \mathbf{R}^2$, то его издержки по перемещению к центру в точке $t = (t_1, t_2) \in X$ составляют

$$||t - x|| = \sqrt{|t_1 - x_1|^2 + |t_2 - x_2|^2}. \tag{3.45}$$

Задача состоит в том, чтобы придумать наиболее экономную сеть деловых центров, при которой суммарные издержки от строительства центров плюс интегральные издержки перемещения всех людей будут минимальными.

Иными словами, ставится задача минимизации на пространстве всех подмножеств плоскости, задача такого же вида, как и (1.1):

$$\min_{K \subset X; h: X \to K} \left\{ g|K| + \int_{\mathbf{R}^2} ||x - h(x)|| dx \right\}, \tag{3.46}$$

с одой только поправкой: минимизируемый функционал тождественно равен бесконечности на всём пространстве допустимых планов задачи.

Эту трудность можно обходить различными способами. Один из них состоит в том, чтобы рассмотреть данную постановку на конечном куске плоскости, например на большом круге, затем разделить целевой функционал на площадь круга и устремить к бесконечности, на этот раз оптимизируя предельное значение (т.е. среднее значение подушевых общих издержек от строительства центров плюс перемещения).

Более правильно, однако, исходить из другой формализации нашей бесконечной задачи, см. [88]. Её желательность следует из того факта, что целевой функционал, усреднённый по большим кругам, в оптимуме нечувствителен к пертурбациями любого вида на конечном куске плоскости, с сохранением оптимальности расположения центров на остальной её части: в пределе разница уйдёт в ноль.

Поэтому нужно минимизировать бесконечный интерграл, так сказать, в смысле *нестандартного анализа*: искать такую сеть центров, для которой *любая* пертурбация приведёт к увеличению целевого интеграла на каком-нибудь конечном куске плоскости.

Ниже воспроизводится точный результат, полученный на этом пути (он уже был объявлен во введении).

> **Всемирная Теорема.** Единственной сетью центров, оптимизирующей задачу (3.46) в указанном выше самом строгом смысле слова, является треугольная сетка на плоскости; при этом структура групп, состоящих из пользователей одного и того же центра, окажется шестиугольным регулярным замощением плоскости (см. рисунок 11 ниже; природа знает своё дело — и нам есть чему научиться у пчёл!).

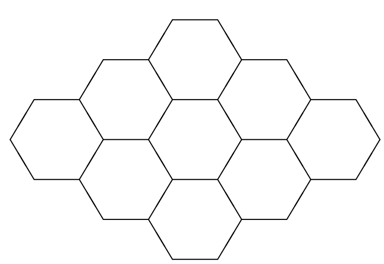

Рисунок 11. Шестиугольная мозаика на плоскости.

Размер групп-шестиугольников, образующих оптимальное замощение, растёт определённым образом с ростом параметра g. Здесь не будем останавливаться на характере этой зависимости. Ниже по тексту, впрочем, все формулы будут выписаны. Наиболее важный параметр оптимального шестиугольника H — даже не его размер, а значение $c[H]$, ибо оно же по совместительству совпадает со средними издержками жителей нашего бесконечного во все стороны мира при их размещении по оптимальным шестиугольникам "пчелиной мозаики":

$$c[H] = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2}{3} + \ln\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{3}} g^{\frac{1}{3}}. \tag{3.47}$$

Доказательство этого факта чисто вычислительное, просто интегрируем табличные функциональные формы, чтобы получить значение $c[H']$ для произвольного шестиугольника со стороной α, и затем оптимизируем это значение по параметру α — старшая школа, в диссертации вполне можно эти выкладки опустить (см. [66]).

Обратите внимание на скорость роста этих издержек по g, она не вполне очевидная. А мы переходим к следующему важному шагу.

3.3.3 Круг как фигура, оптимальная для размещения

В свете дальнейшего анализа нам придётся рассматривать не только шестиугольные коалиции, но и любые другие. Оказывается полезным решить следующую задачу:

$$\min_{S \subset X} c[S]. \tag{3.48}$$

Похожую задачу мы решали в дискретной постановке, когда искали "самую оптимальную коалицию" при доказательстве теоремы FRC.

В новых условиях эта задача превращается в задачу поиска фигуры самой "экономной" формы на плоскости, с точки зрения издержек жителей, её населяющих, и без учёта окружающего мира. Не думаю, что кто-то удивится следующему результату, по крайней мере первой его части.

Теорема о круге. (i) Решением задачи (3.48) является, с точностью до меры нуль, обычный круг K на плоскости, радиус которого равен

$$l^* = \left(\frac{3g}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{3.49}$$

(ii) Значение $c[K]$ волшебным образом тоже равняется тому же l^*.[21]

(iii) Пускай при достаточно малом γ фигура S такова, что для некоторого круга K оптимального радиуса выполнено

$$K[l^* - \gamma] \subset S \subset K, \tag{3.50}$$

где за $K[l]$ обозначим круг радиуса l, концентрический с фигурирующим в формуле оптимальным кругом $K = K[l^*]$. Тогда величина средних издержек функционирования коалиции S удовлетворяет следующему неравенству:

$$c[S] < l^* + \frac{4}{l^*}\gamma^2, \tag{3.51}$$

показывающему, что "в районе минимума изменения незначительны" — если фигура мало отличается по форме от *оптимального* круга, то значение минимизируемого функционала на ней отличается от минимума только *членами второго порядка малости.* (Привет тебе, о великий Пьер Ферма!)

Доказательство. (i) Рассмотрим любую фигуру S, которая является решением задачи (3.48), и построим круг K с центром в точке $m(S)$ той же площади (меры). Обозначим его радиус за l.

В силу оптимальности фигуры S должно быть выполнено неравенство $c[K] \geq c[S]$, а так как $|K| = |S|$ по построению, то и $D[K] \geq D[S]$:

$$0 \geq D[S] - D[K] = \int\limits_{S \setminus K} ||x - m(S)||dx - \int\limits_{K \setminus S} ||x - m(S)||dx. \tag{3.52}$$

Однако при любом $x \in S \setminus K$ выполнено $||x - m(S)|| \geq l$, в то время как при любом $x \in K \setminus S$, наоборот, верно $||x - m(S)|| \leq l$. При этом $|S \setminus K| = |K \setminus S|$, и если обозначить их общее значение за μ, то должно быть выполнено двойное неравенство

$$\int\limits_{S \setminus K} ||x - m||dx \geq l\mu \geq \int\limits_{K \setminus S} ||x - m||dx. \tag{3.53}$$

[21] Чудеса я люблю, но в данном случае объяснение есть весьма прозаическое, и имя ему "Теорема о маргинальных значениях".

Сопоставив его с неравенством (3.52), мы с необходимостью получаем, что $|\{x \in S \setminus K: \ ||x-m|| > l\}| = 0$, а также $|\{x \in K \setminus S: \ ||x-m|| < l\}| = 0$. Так как, очевидно, $|\{x: \ ||x-m|| = l\}| = 0$, то на самом деле $\mu = 0$, что означает совпадение, с точностью до меры нуль, фигур S и K.

(ii) Теперь осталось произвести оптимизацию на пространстве кругов, читай по параметру радиуса круга — то есть (как и выше) решить школьную задачку. Опускаю выкладки, а в ответе получается как раз l^*. Значение $c[K]$ также получается равным l^*. (Выкладки опять же см. в [66].)

(iii) А вот это — немного хитрее, хотя тоже незначительно. Просто выкладки несколько более тяжёлые. Обозначим за a центр круга K, и одновременно круга $K[l^*-\gamma]$, который мы обозначим за K'. Далее, пускай $\tilde{S}$ обозначает множество $S \cap (K \setminus K')$.

Ниже я привожу серию выкладок, доказывающих требуемую оценку, используя обозначение $z = \dfrac{3}{\pi}|\tilde{S}|$. Чтобы в них разобраться, нужно помнить и понимать несколько фактов:

(А) $D[S]$ не может уменьшиться, если заменить в формуле транспортировки медиану $m[S]$ на центр кругов, a;

(Б) Расстояние от любой точки $\tilde{S}$ до a не превосходит l^*;

(В) Формулу (3.49) для радиуса l^* оптимального круга K;

(Г) Тот факт, что $c[K] = l^*$;

(Д) Наконец, что при достаточно малых γ верна оценка $l^* - \gamma > \dfrac{l^*}{2}$.

Он сказал “Поехали,” и махнул рукой:

$$c[S] = \frac{g + D[S]}{|S|} \le \frac{g + \int\limits_S ||a-x||dx}{|S|} \le \frac{g + D[K'] + l^*|\tilde{S}|}{|K'| + |\tilde{S}|} =$$

$$\frac{(l^*)^3 + 2(l^*-\gamma)^3 + zl^*}{3(l^*-\gamma)^2 + z} < \frac{3(l^*)^3 - 6(l^*)^2\gamma + 6l^*\gamma^2 + zl^*}{3(l^*-\gamma)^2 + z} = \tag{3.54}$$

$$\frac{3l^*(l^*-\gamma)^2 + zl^*}{3(l^*-\gamma)^2 + z} + \frac{3l^*\gamma^2}{3(l^*-\gamma)^2 + z} < l^* + \frac{3l^*\gamma^2}{3\left(l^*/2\right)^2} = l^* + \frac{4}{l^*}\gamma^2.$$

Теорема о круге полностью доказана.

Смысл и важность доказанной только что теоремы для дальнейшего анализа всплывут в конце следующего подраздела. Пока же нужно провести ещё некоторую подготовку.

3.3.4 0.0018-устойчивость

Отныне мы фиксируем одну из оптимальных шестиугольных структур замощения (они все конгруэнтны друг другу!) раз и навсегда. В духе проводимого исследования, нас теперь будет интересовать вопрос коалиционной устойчивости такой структуры. В центре каждого из шестиугольников будет расположен *центр* обслуживания. Из теоремы FSC, легко переносимой на случай неограниченных расселений, следует, что *любое* коалиционно устойчивое разбиение плоскости должно иметь ровно такой вид. Другой вопрос, *существуют ли* вообще ядерные разбиения и ядерные распределения издержек в этой задаче.

Ниже будет доказано, что ядерных разбиений в данной задаче *не существует*, иными словами, даже в этой простейшей из простейших многомерных постановок с самым простым принципом — трансферабельной полезности (DS) ядро оказывается пустым. В этом случае, как это делалось выше при обсуждении коалиционной устойчивости, следует искать δ^*, минимальное δ со свойством, что δ-ядро непусто. Более того, интересно понять, какие функции распределения входят в минимальное ядро.

Мы пройдём эту дорогу целиком. Для начала рассмотрим механизм (функцию) $b : X \to \mathbf{R}$ распределения издержек, предположительно лежащую в ядре. Требование внутригрупповой сбалансированности означает, что рассматриваемый механизм перераспределения издержек математически можно отождествить с набором (измеримых) функций, сбалансированных в пределах шестиугольников.

Мы наложим на рассматриваемые механизмы естественные условия частичной симметрии.[22] Условие, которое мы наложим, будет состоять в том, что этот механизм должен быть одним и тем же для всех шестиугольников.

[22]Всё можно доказать и пробить без таких условий; просто технически будет сложнее. Мне не хочется загромождать и так тяжёлый текст этого раздела!

Условие W**.** Для любых двух ячеек (групп) H, H' фиксированного нами оптимального шестиугольного замощения плоскости, и любых двух жителей этих групп $x \in H$, $x' \in H'$, расположенных внутри них одинаково, то есть $x - m(S) = x' - m(S')$, мы потребуем, чтобы предписанные им механизмом b издержки совпадали: $b(x) = b(x')$.

После принятия таких правил игры функцию распределения издержек, предположительно лежащую в ядре, можно отождествить просто с измеримой функцией на "модельном" шестиугольнике мозаики:

$$q : H \to \mathbf{R}, \tag{3.55}$$

после чего склеить функцию $b(\cdot)$ из параллельно перенесённых по всей плоскости группой симметрий мозаики образов одной и той же функции (3.55). Это сделает нашу задачу "компактной".

В процессе дальнейшего анализа у нас вылезет наружу некоторая конкретная схема (функция) распределения издержек, называемая *распределением Ролса.* Нам эта схема уже знакома: "всё собрать и поделить". Отметим тем не менее, что здесь мы о нём говорим лишь как об одном из возможных сбалансированных распределений, а выше при обсуждении концепций устойчивости оно было *постулировано как обязательное.* Схема Ролса каждому жителю бесконечной плоскости относит одно и то же значение издержек; в силу балансовых условий, это значение равно $c[H]$ для модельного гексагона мозаики, страшному числу из формулы (3.47). Ниже в разделе мы это число будем обозначать просто за $r^* = c[H]$.

Наблюдение RW**.** Схема Ролса лежит в δ-ядре при $\delta = 1 - \dfrac{c[K]}{c[H]}$.

В самом деле, при данном значении δ формула (3.43) из определения $DSC-1$ выполнена для фигуры $S = K$ как равенство. Для любой другой фигуры S, в силу теоремы о круге, эта формула выполнена в нужную сторону.[23] Следовательно, δ-ядерное свойство действительно имеет место,

[23]Интеграл от постоянной функции r^* равен произведению её значения на меру множества, по которому ведётся интегрирование!

а значит, δ**-ядро при указанном значении** δ **заведомо непусто,** раз содержит как минимум схему r^*. Запомним это важное свойство до конца текущего раздела.

Теперь мы в состоянии сформулировать основной результат раздела 3.3.

Теорема о 0.0018**-устойчивости.** Справедливы следующие три утверждения:

(i) Ядро, то есть множество коалиционно устойчивых функций $b(\cdot)$ распределения издержек, является *пустым* в нашем случае;

(ii) Минимальное ядро — это δ^*-ядро при

$$\delta^* = 1 - \frac{c[K]}{c[H]} > 0, \tag{3.56}$$

где, как и выше, за K обозначен любой из кругов оптимального радиуса;

(iii) $\delta^* \approx 0.0018$ (!!)

(iv) Минимальное ядро непусто; более того, с точностью до меры нуль, в нём лежит *единственное* распределение, и оно Ролсовское!

Доказательство этой теоремы даже после проведённой нами серьёзной подготовительной работы занимает ниже два подраздела и около шести страниц текста. Зато оно является собой, быть может, самый яркий результат всей диссертации!

3.3.5 Начало доказательства: применение теоремы Фубини

Произведём таинственные геометрические манипуляции.

Для каждого целого положительного N рассмотрим "гексагональный ромбик" а-ля рисунок 11 выше (при $N = 3$), и обозначим его за G_N. Такой ромбик состоит из N^2 примыкающих друг к другу шестиугольников.

А теперь рассмотрим возрастающую вложенную друг в друга последовательность $\{G_{2N}\}_{N=1}^{\infty}$ гексагональных ромбов, в которой каждый предыдущий ромб G_{2N} вложен в следующий ромб G_{2N+2} симметрично.

Тогда разность множеств $G_{N+2} \setminus G_N$ представляет собой “гексагональное кольцо”, составленное из $(4N+4)$-х шестиугольников, ровно так, как показано на рисунке 12 в простейшем варианте при $N = 1$.

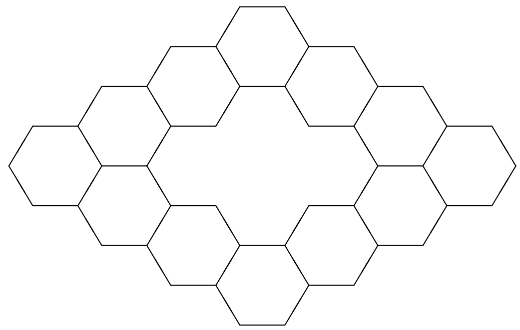

Рисунок 12. “Шестиугольное кольцо” $G_{2N+2} \setminus G_{2N}$ при $N = 1$.

Нам пригодится следующая лемма:

> **Лемма** G**.** Для каждого $a \in G_{2N}$, оптимальный круг K с центром в точке a целиком содержится в G_{2N+2}.

Доказательство, на самом деле, тривиальное: из оптимизационных соображений очевидно, что оптимальный шестиугольник и оптимальный круг должны пересекаться *двенадцать* раз, если их наложить друг друга с соблюдением общего центра. Если это неочевидно, то, значит, просто не хватает опыта работы с экстремальными задачами, и тогда можно тупо сравнить радиус l^* круга K со стороной оптимального шестиугольника H (если проделать опущенные выше вычисления).

После этого надо мысленно поводить центр круга по внутренней границе гексагонального кольца, и убедиться в том, что вылезания за внешнюю границу кольца никогда не произойдёт. **Доказательство леммы** G **намечено.**

А теперь рассмотрим распределение $b(\cdot)$, лежащее в δ-ядре, и покажем, что тогда $\delta \geq 1 - \dfrac{c[K]}{c[H]}$. Этим мы убьём сразу трёх зайцев: (i) станет верно от того, что 0 меньше означенного числа; (ii) является логической суммой этого утверждения и наблюдения RW выше; (iii) это простая арифметическая выкладка.

Более того, половину четвёртого зайца мы уже убили, ибо Наблюдение RW как раз и утверждает непустоту δ^*-ядра путём предъявления чисто конкретного распределения, лежащего в нём, а именно ролсовского, r^*.

Приступим к работе. При каждом $a \in X$ обозначим за $\varphi(a)$ интегральные (то есть суммарные) издержки, которые несут жители оптимального круга K_a с центром в точке a в соответствии с нашей δ-ядерной функцией распределения издержек, $b(\cdot)$:

$$\varphi(a) = \int\limits_{K_a} b(x)dx. \tag{3.57}$$

Теперь определим $\bar{\varphi}$ как “двойной агрегат”, то есть интеграл от интегральных издержек $\varphi(a)$ всех кругов, центры которых лежат внутри модельного шестиугольника H:

$$\bar{\varphi} := \int\limits_{H} \varphi(a)da. \tag{3.58}$$

Благодаря упрощающему предположению о симметричности распределения $b(\cdot)$, которое нам очень упростит теперь жизнь, значение $\bar{\varphi}$ не зависит от выбора конкретного воплощения шестиугольного кирпичика мозаики. Нашей целью является теперь установление следующего факта:

$$\bar{\varphi} = I, \quad \text{где} \quad I := |K| \int\limits_{H} b(x)dx. \tag{3.59}$$

Для этого введём функцию двух двумерных аргументов $\Psi(a, x)$, определённую на декартовом произведении $G_N \times G_{N+2} \subset \mathbf{R}^4$ (здесь и далее N чётное!) посредством формулы

$$\Psi(a, x) = \begin{cases} b(x), & \text{if} \quad x \in K_a; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{3.60}$$

Теперь проинтегрируем введённую функцию $\Psi(a, x)$ по её множеству определения $G_N \times G_{N+2}$, сначала в одном порядке, а затем — в другом. Согласно теореме Фубини (!!!, см [16], стр. 298), два порядка интегрирования дадут одинаковый результат.

1. Сперва интегрируем по x, затем по a. Согласно (3.57) и (3.58), и с учётом леммы G мы получим

$$\int\limits_{G_N} \left[\int\limits_{G_{N+2}} \Psi(a,x)dx\right] da = \int\limits_{G_N} \left[\int\limits_{K_a} b(x)dx\right] da =$$
$$\int\limits_{G_N} \varphi(a)da = N^2 \int\limits_{H} \varphi(a)da = N^2\bar{\varphi}. \tag{3.61}$$

2. Прежде чем интегрировать в обратном порядке, отметим дуальность:

$$\{a|x \in K_a\} \equiv K_x, \tag{3.62}$$

выполненную при всех $x \in X$. Это очевидно (множество центров одинаковых кругов, содержащих данную точку, описывает точно такой же круг с центром в рассматриваемой точке — симметричность функции расстояния по обеим аргументам!).

А теперь берём какую-нибудь точку $x \in G_{N-2}$. Согласно лемме G, выполнено включение $K_x \subset G_N$, и поэтому

$$\int\limits_{G_N} \Psi(a,x)da = \int\limits_{K_x} b(x)da = b(x) \int\limits_{K_x} da = |K|b(x). \tag{3.63}$$

Далее,

$$\int\limits_{G_{N+2}} \left[\int\limits_{G_N} \Phi(a,x)da\right] dx = \int\limits_{G_{N-2}} \left[\int\limits_{G_N} \Phi(a,x)da\right] dx + L_N, \tag{3.64}$$

где

$$L_N := \int\limits_{G_{N+2}\setminus G_{N-2}} \left[\int\limits_{G_N} \Phi(a,x)da\right]. \tag{3.65}$$

С учётом (3.63), первое слагаемое в формуле (3.64) можно записать как:

$$\int\limits_{G_{N-2}} \left[\int\limits_{G_N} \Phi(a,x)da\right] dx = \int\limits_{G_{N-2}} |K|b(x)dx = (N-2)^2 I. \tag{3.66}$$

Теперь маэстро Фубини разрешает нам приписать к равенству (3.64) член слева, удлиннив последнее:

$$N^2\bar{\varphi} = (N-2)^2 I + L_N = N^2 I + L_N - 4(N-1)I. \tag{3.67}$$

В сущности, это конец: при произвольно большом натуральном N имеет место полиномиальное (по N) равенство, в котором есть как члены порядка N^2, так и члены порядка N. Ясно, что тогда коэффициенты при членах порядка N^2 должны совпадать, и значит, мы получили искомое $\bar{\varphi} = I$.

Чему равно I? В силу балансового условия, которому удовлетворяет любая δ-ядерная схема, и схема $b(\cdot)$ в том числе, должно быть выполнено равенство $I = |K||H|c[H]$, и теперь мы знаем, что тому же самому равен наш интегральный интеграл $\bar{\varphi}$.

Следовательно, при каком-то $a \in H$ окажется, что функция $\varphi(a) \geq |K|c[H]$. С другой стороны, наш оптимальный круг K_a сделает предъяву устойчивости, гарантируя своим жителям суммарную величину $|K|c[K]$. Коль скоро $b(\cdot)$, согласно предположению, лежит в δ-ядре, то должно быть

$$(1-\delta)|K|c[H] \leq |K|c[K], \tag{3.68}$$

откуда немедленно получаем $\delta \geq 1 - \dfrac{K(B)}{K(H)}$. **Пункты (i)-(iii), а также половина пункта (iv), установлены.**

А вот вторая половина пункта (iv) — это ещё несколько страниц ниже и отдельный подраздел, выделенный для этой цели.

3.3.6 Окончание доказательства: “торжество справедливости”

Итак, предположим, что распределение $b(\cdot)$ лежит в δ^*-ядре, и покажем, что оно отличается от ролсовского только на подмножестве всей плоскости, имеющем меру нуль. Действовать будем пошагово.

Для начала заметим, что интеграл нашей схемы распределения по любому оптимальному кругу должен быть равен в точности $|K|c[H]$, ибо если он где-то ниже этой величины, то в силу непрерывности он ниже этой величины на пространстве кругов с центрами, заметающими в модельном гексагоне множество положительной меры, и тогда непременно в силу сбалансированности объявятся оптимальные круги, интегралы по которым будут *выше* $|K|c[H]$; последнее явно противоречит δ^*-устойчивости, ведь такие круги предъявят предъяву. Значит, тождественно по всем кругам интеграл равен $|K|c[H]$. Эти мы ниже воспользуемся.

Выберем и надолго фиксируем **произвольное** $\varepsilon > 0$, как это часто делается в анализе. Рассмотрим теперь колечко (обычное, больше уже не гексагональное!) $K_a \setminus K_a[l^* - \gamma]$, то есть теоретико-множественную разность оптимального круга с центром в точке a, и круга радиуса чуть меньше, с тем же самым центром.

Оценим меру (массу) тех жителей x этого колечка, чей взнос согласно рассматриваемой схеме, $b(x)$, "существенно" ниже среднего по больнице: $b(x) < c[H] - \varepsilon$.

Обозначим это множество за U, и рассмотрим его дополнение в оптимальном круге K_a, то есть рассмотрим множество $S = B_a \setminus U$, для которого, согласно последнему пункту теоремы о круге, должно быть выполнено неравенство

$$c[S] < l^* + \frac{4}{l^*}\gamma^2. \tag{3.69}$$

С другой же стороны, помня, что интеграл по любому оптимальному кругу от нашей функции $b(\cdot)$ равен $|K|c[H]$, пишем

$$\begin{gathered}\int\limits_S b(x)dx = \int\limits_{K_a} b(x)dx - \int\limits_U b(x)dx \geq \\ |K|c[H] - |U|c[H] + |U|\varepsilon = |S|c[H] + |U|\varepsilon.\end{gathered} \tag{3.70}$$

δ^*-ядерность схемы $b(\cdot)$ означает, что средние издержки внутри фигуры S, домноженные на $1 - \delta^*$, никак не должны превосходить величины $c[S]$:

$$(1-\delta^*)\left(c[H] + \frac{|U|}{|S|}\varepsilon\right) \leq (1-\delta^*)\frac{\int\limits_S b(x)dx}{|S|} \leq c[S] < l^* + \frac{4}{l^*}\gamma^2. \tag{3.71}$$

Выбор δ^* гарантирует, что $c[K] = l^* = (1-\delta^*)c[H]$, и значит:

$$|U| \leq \frac{4|S|}{l^*(1-\delta^*)\varepsilon}\gamma^2 < \frac{4\pi(l^*)^2}{l^*(1-\delta^*)\varepsilon}\gamma^2 = W\gamma^2, \tag{3.72}$$

где W является величиной, не зависящей от γ (!).

Дальше можно идти либо суперформально, либо интуитивно. Я выберу второй путь. Итак, что же мы показали? Мы показали, что в кольце толщины

γ не может жить более $Const \cdot \gamma^2$ резидентов, чей взнос отличается от среднего не менее, чем на ε. Нужно точно понимать, что здесь варьируется, а что до поры до времени постоянно. Величину ε пока не трогаем, она всё время одна и то же — просто помним, что она выбиралось тоже произвольно. А вот γ мы теперь устремим к нулю.

Кольцами толщиной γ в количестве, пропорциональном $\frac{1}{\gamma}$, можно замостить конкретный конечный объект — например, наш гексагон. Тогда мера лиц, платящих на ε меньше, чем в среднем, внутри этого гексагона должна быть порядка

$$Const \cdot \gamma^2 \times \frac{1}{\gamma}, \tag{3.73}$$

то есть величиной порядка $\frac{1}{\gamma}$. Но γ в этих рассуждениях сколь угодно мала! То есть для любого положительного числа мы можем утверждать, что мера лиц, платящих меньше ε, не превосходит этого положительного числа! Одно и то же число меньше любого наперёд заданного положительного числа! Что же из этого следует? Только то, что это число равно нулю !!!!!!!

Итого, внутри модельного гексагона мера тех, кто платит на ε меньше среднего, равна нулю. Но теперь вспомним, что и ε бралось произвольным.

Переходя к счётному объединению множеств тех, кто платит меньше $1/n$ для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,$ надоело писать, мы получаем, что мера тех, кто платит меньше среднего, равна нулю. Но тогда и мера тех, кто платит больше среднего, тоже равна нулю — балансы ещё никто не отменял. **Теорема о 0.0018-устойчивости полностью доказана.**

Напоследок скажу, что теорема эта обобщена мной и коллегами до результата в произвольном конечномерном метрическом пространстве с равномерным расселением. Для удовольствия читателя сформулирую её здесь. На защиту, впрочем, эта уточнённая теорема не выносится, так как доказана недавно, и ещё даже не подана в журнал. Её авторы, кроме меня, это Ф.Петров и Ш.Вебер.

Теорема о ядре для равномерных расселений. Рассмотрим равномерное расселение на произвольном нормированном пространстве

$X = \mathbf{R}^d$ с нормой $||\cdot||$. Тогда справедливы следующие утверждения про DSC-ядро и вокруг:

(i) Решением задачи $\min\limits_S c[S]$ является шар K в норме $||\cdot||$, некоторого оптимального радиуса;

(ii) Минимальное ядро — это δ^*-ядро при

$$\delta^* = 1 - \frac{c[K]}{c[\mathbf{R}^d]}, \tag{3.74}$$

где за $c[\mathbf{R}^d]$ обозначены средние издержки всего мира при оптимальном решении ЗМР, чему бы они ни оказались равны;

(iii) Ядро, то есть множество коалиционно устойчивых функций $b(\cdot)$ распределения издержек, *является непустым в том и только том случае, если шарами в метрике* $||\cdot||$ *можно замостить пространство*, и это эквивалентно утверждению $c[K] = c[\mathbf{R}^d]$;

(iii) Минимальное ядро непусто; более того, с точностью до меры нуль, в нём лежит *единственное* распределение, и оно Ролсовское!

На этом анализ равномерно населённых многомерных миров мы завершаем, и возвращаемся в одномерие. Переходим с этой целью к последнему разделу третьей главы. В его названии использована эффектная аббревиатура, обозначающая равномерное расселение на обычном отрезке $[0,1]$ обычной вещественной прямой.

3.4 $U[0,1]$: анализ устойчивости в постановке DE

3.4.1 Равномерный линейный мир: обзор проблематики

Переходим, наконец, к последнему разделу главы 3. Он посвящён взаимосвязи различных концепций теоретико-игровой устойчивости, а также обсуждению новых, уточнённых требований к устойчивости разбиений. Все вводимые требования устойчивости тестируются на самом простом примере расселения, а именно *равномерного расселения на отрезке* $[0,1]$.

Для начала вернёмся к “культовой” ссылке среди политэкономов, а именно к статье [36], о которой мы уже выше говорили раз эдак десять. Здесь нужно о ней сказать ещё несколько слов. Эта статья полностью сосредотачивает своё внимание как раз на случае равномерного расселения на отрезке, так что является для нас в этом разделе естественной отправной точкой исследования.

Сперва в работе [36] решается задача об эффективном разбиении континуума жителей, равномерно распределённого на отрезке возможных значений некоторого одного параметра (формально трактуемого авторами как географическое местоположение жителя) на страны.

Затем спрашивается, является ли эффективное разбиение устойчивым относительно трёх видов изменений:

1). Миграция субъектов, расположенных на границе двух стран;

2). Образование новой страны со всеобщего одобрения затронутых стран;

3). Отделение части страны “без спроса” у страны объемлющей;

4). Перемещение малых масс на границе стран, состоятельное в определённом, скорее механическом, смысле слова.

Оказывается, что эффективное разбиение неустойчиво, что устойчивое разбиение относительно всех видов изменений существует, и далее авторы анализируют вопросы существования и одобрения голосованием схем компенсации, имплементирующих эффективное разбиение как устойчивое, вопросы сравнительной статики равновесного количества стран и другие смежные проблемы.

Примечательно, что авторы [36] как раз работают в рамках постановки DE, говоря нашим языком. Но угрозы, которые рассмотрены ими, отличаются от изучаемых в настоящей работе (по крайней мере, частично). Впрочем, именно изучение процитированной статьи навело нас с соавторами на мысль о *правильном* подходе к угрозам устойчивости.

Работа [90] также повлияла на формирование “повестки дня”.

Её авторы, на том же самом примере равномерного расселения на отрезке, провели анализ угроз утойчивости в ситуации *вертикально дифференцированного* общественного блага. Тем не менее категории угроз, из которых они исходили, легли в основу классификации, попытка которой предпринята в заключительной главе. В настоящей главе для этого намечены отдельные подготовительные шаги.

Отметим, что анализ горизонтально дифференцированного линейного равномерно заселённого мира в [36] был целиком ограничен рассмотрением разбиений на страны одинакового размера. В жизни, отвлекаясь от "игрушечности" модели, это категорически не так. Различны по размеру страны, различны по населению города в пределах одной страны и т.п.

Понятно, что в более сложной модели, при расселениях произвольного вида, размеры "стран" будут различными. В связи с этим возникают два вопроса. Первый из них таков: можно ли получить в решении страны (группы) разного размера *даже при равномерно населённом мире*? Ответ на этот вопрос **положителен**, и содержится в наших статьях, содержание которых приводится ниже (работы [44] и [46]).

Второй вопрос более размытый, и удовлетворительного ответа на него пока не видать. Дело в том, что реальное распределение численности населения городов, вроде бы,[24] соответствует так называемому *закону Зипфа*, согласно которому, грубо говоря, n-й по численности город данной страны в n раз меньше по населению, чем самый большой город, см. [67], [70]. Так вот: можно ли предъявить конкретное расселение мира, при котором группы в устойчивом (согласно тем или иным критериям устойчивости) разбиении будут по своей численности выдавать на выходе распределение Зипфа?

Этот вопрос когда-нибудь, я верю, будет решён. Пока же мы его оставляем неотвеченным, и переходим к классификации и анализу теоретико-игровых угроз устойчивости, на примере равномерного расселения на отрезке $[0,1]$.

3.4.2 Локально устойчивое миграционное равновесие и близкие концепции

Выше уже было сказано, что перемещение одного игрока в континуальной ситуации, не будучи заметным для окружающих, тем не менее автоматически

[24] В последнее время об этом много и горячо спорят.

влечёт такое же желание в его соседях: это свойство всех *метрических неатомарных игр*, концепции 21 века, намеченной для анализа в пятой, заключительной главе диссертации. Поэтому возникает желание ввести концепцию устойчивости, которая бы роднила континуальную постановку с конечной в том, что перемещения разрешаются по массе небольшие, но *ненулевые*, следовательно, влекующие малые изменения в агрегированных характеристиках всей системы.

Такая концепция к тому же послужит мостиком между коалиционными угрозами, при которых могут действовать сообща любые массы игроков, и миграционными, при которых каждый игрок действует самостоятельно. На этом пути мы также естественным образом придём к вопросу об *одобрении* окружающих, то есть приветствуют ли жители затронутых при перемещении групп возникшую угрозу, точнее результат её осуществления.

Все концепции данного раздела тестируются, и даже определяются только по отношению к равномерному расселению на отрезке. Более общий подход представлен в заключении.

В течение всего раздела мы находимся в рамках постановки DE, с дополнительным соглашением о выборе центральной из медиан в тех случаях, когда последних налицо целый отрезок. Мы будем использовать обозначение

$$c[x, S] = \frac{g}{|S|} + |x - m[S]| \tag{3.75}$$

для издержек индивида, проживающего в точке $x \in [0, 1]$, если представить его присоединившимся (или изначально находящимся) в группе или коалиции $S \subset [0, 1]$.

Начнём с формализации упомянутой выше новой концепции устойчивости.

Определение DL**.** Разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_n\}$ отрезка $[0, 1]$ называется *локально устойчивым (миграционным равновесием)*, если при некотором $\varepsilon > 0$ нельзя указать интервала T длины (массы, меры) $|T| \leq \varepsilon$ вместе с группой $S_l \in P$ так, чтобы выполнялось неравенство $c[x, S_l \cup T] < c[x, S^x]$ при всех $x \in T$, где за S^x здесь и всюду ниже обозначается та группа исходного разбиения, которая содержит индивида x.

Таким образом, мы разрешаем перемещаться (мигрировать) малым коалициям, если каждому из участников мирации в новой группе станет строго лучше, чем было до этого в его собственной. При этом (А) разрешается перемещаться только *интервальным* коалициям, и (Б) при миграции не нужно спрашивать у аборигенов, не возражают ли они против пополнения.

Сразу же скажу, что оба условия существенны в том смысле, что их вариация привела бы нас к *совершенно иным концепциям решения.* Угрозы неинтервальной координации вообще никем никогда, как я понимаю, не изучались — а зря, это могло бы быть интересным. В произвольных неатомарных играх вовсе нельзя наложить такое требование, оно присуще лишь метрическим играм (см. ниже об этом в заключительной главе).

Кроме того, актуален вопрос о том, хотят ли жители групп разбиения, внутри которых родились миграционные чаяния, *отпустить* эмигрантов на волю. Совершенно неочевидно, что можно эмигрировать вот так просто, никого не спрашивая.[25] И если вопрос одобрения в новых группах ставился в литературе, то вопрос одобрения в группах покинутых — едва ли, только на уровне намёков в упомянутых выше работах [36], [90].

Мы зафиксируем два ограничения, связанных с определением DL. Одно из них мы ослабим, а другое, наоборот, в какой-то момент наложим. Итак, начнём с требования о том, чтобы перемещаться могли только *малые* группы, причём только *интервальные* группы. Если отказаться от этих двух требований сразу,[26] то получится следующее:

Определение DU. Разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_n\}$ отрезка $[0,1]$ называется *сильным миграционным равновесием*, если нельзя указать *никакой* коалиции T, вместе с группой $S_l \in P$ так, чтобы выполнялось неравенство $c[x, S_l \cup T] < c[x, S^x]$ при всех $x \in T$.

Таким образом, любой коалиции, в том числе неинтервальной, разрешается "навязать" своё общество любой из групп исходного разбиения, и только если

[25]Привет из СССР!

[26]Можно было бы отказываться от них по отдельности. Но тогда объём диссертации вырос бы до 300 страниц!

этой возможностью никакая коалиция не хочет воспользоваться, тогда мы говорим об устойчивости разбиения π. Мало разбиений выдержит такой трудный тест на устойчивость!

Если требовать одобрения аборигенов (но не тех, кого оставили, уезжая, члены мигрирующей коалиции!), то получится более слабое требование:

> **Определение** DY**.** Разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_n\}$ отрезка $[0,1]$ называется *слабым миграционным равновесием*, если нельзя указать никакой коалиции T, вместе с группой $S_l \in P$ так, чтобы выполнялось неравенство $c[x, S_l \cup T] < c[x, S^x]$ при всех $x \in S_l \cup T$.

Разница в последней формуле, и она огромна. Теперь не разрешается предъявлять угрозу устойчивости путём миграции в том случае, когда кто-либо из аборигенов выступает против последней. Тут возможен целый ряд вариаций, типа одобрения большинством голосов и т.п., но это всё оставим на будущее (лично мне данная тема представляется крайне перспективной!).

Заметим вместо этого, что последнее требование строго слабее требования *коалиционной устойчивости*: в последнем случае мы разрешаем образование *любых* новых групп $\tilde{S}$, а в определении DY — только таких, которые содержат целиком по крайней мере одну из групп исходного разбиения. При этом требование *сильной* миграционной устойчивости всё ещё не позволяет формировать произвольные новые группы, но уже не требует одобрения от аборигенов при миграции. То есть логически концепция сильной миграционной устойчивости независима от концепции коалиционной устойчивости. Ниже в следующем (последнем) подразделе главы 3 мы убедимся в этом совершенно строго и формально.

Если же совместить требования сильной миграционной и коалиционной устойчивости, то получится то, что я назвал *абсолютной устойчивостью*. Обратим внимание, что по форме определение абсолютной устойчивости является гибридом определений коалиционной и миграционной устойчивости из “дискретных” глав 1 и 2. Определение ниже является кульминацией анализа теоретико-игровых угроз устойчивости решениям ЗМР.

Определение DA**.** Разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_n\}$ отрезка $[0,1]$ называется *абсолютно устойчивым*, если нельзя указать *никакой* коалиции T, вместе с группой $S = S_l \in P$ или $S = \emptyset$ так, чтобы выполнялось неравенство $c[x, S_l \cup T] < c[x, S^x]$ при всех $x \in T$.

Таким образом, "отклонистам" разрешается всё: создать свою собственную новую группу, либо навязать своё общество одной из существующих групп. Трудно представить более сильное требование, предъявляемое к устойчивости разбиений.[27]

Следующий подраздел содержит сводку результатов, касающихся возможности удовлетворить требованиям, предъявленным в определениях DL, DU, DY, DA и обычным требованиям миграционной и коалиционной устойчивости, в ситуации равномерного одномерного расселения.

3.4.3 Устойчивые групповые структуры для $U[0,1]$

Настало время охарактеризовать разбиения (групповые структуры) отрезка $[0,1]$ в соответствии со всеми введёнными выше концепциями, или требованиями к устойчивости. Мы это сделаем в форме теоремы с большим количеством пунктов. Ниже под *однородным* разбиением понимается конкретное интервальное разбиение — на n одинаковых подряд идущих интервалов длины $1/n$, а под *монотонным* — такое интервальное разбиение, в котором размеры групп не возрастают или не убывают при следовании вдоль отрезка. Условимся "переворачивать" отрезок таким образом, чтобы всегда иметь дело с *неубывающим* слева направо размером групп в монотонном разбиении.

Теорема об устойчивых разбиениях для $U[0,1]$**.** Справедливы следующие утверждения (из которых первое вообще не касается отрезка, а относится к *любым* расселениям):

i Локальная устойчивость разбиения π гарантирует его миграционную устойчивость. DA-устойчивость влечёт все иные виды устойчивости,

[27] Трудно, но можно. См. заключение.

включая миграционную и коалиционную. DU-устойчивость влечёт DY-устойчивость и DL-устойчивость. Коалиционная устойчивость влечёт DY-устойчивость. Короче говоря, соотношение шести видов устойчивости представлено на рисунке 13 сразу по окончании формулировки теоремы. Других логических связей, кроме обусловленных этой схемой, между концепциями устойчивости разбиений нет. (На рисунке 13 буковками M и C обозначены, соответственно, миграционный и коалиционный виды устойчивости.)

ii Миграционно устойчивые разбиения интервальны (это уже было доказано выше), следовательно, тем же свойством обладают любые DL, DU и DA-устойчивые разбиения. Коалиционно устойчивое разбиение может быть неинтервальным (следовательно, и DY-устойчивое тоже может быть неинтервальным). Любые виды устойчивых разбиений могут быть немонотонными, даже будучи при этом интервальными.

iii Однородное разбиение всегда миграционно устойчиво. Кроме однородного, миграционно устойчивыми являются любые разбиения на интервалы ровно двух различных длин s и s', удовлетворяющих уравнению

$$\Psi(s) = \frac{s}{2} + \frac{g}{s} = \Psi(s'), \tag{3.76}$$

и только такие разбиения. (Если разбиение не является однородным, то оно, естественным образом, называется *неоднородным*.)

iv Миграционно устойчивое разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_n\}$ является DL-устойчивым в том и только том случае, когда для каждого $s = s_l = |S_l|,\ \ l = 1, \ldots, n$, имеет место неравенство

$$s \geq \sqrt{\frac{2g}{3}} =: \hat{g}. \tag{3.77}$$

Для однородного разбиения это просто означает, что $1/n \geq \hat{g}$, а для неоднородного миграционно устойчивого разбиения надо проверять выполнение неравенства (3.76) для меньшего из двух размеров групп, входящих в разбиение π.

- v Однородное разбиение при $n \geq 2$ является сильным миграционным равновесием в том и только том случае, когда $1/n \geq \sqrt{g}$. Неоднородное миграционно устойчивое разбиение π с длинами групп s, s' является сильным миграционным равновесием в том и только том случае, когда $s, s' \in [\sqrt{g}, 2\sqrt{g}]$.
- vi Однородное разбиение при $n \geq 2$ коалиционно устойчиво в том и только том случае, когда $1/n \in [\sqrt{g}, (2+\sqrt{2})\sqrt{g}]$ (следовательно, оно тогда автоматически является сильным миграционным равновесием, а значит, оно будет DA-устойчивым).
- vii Монотонное разбиение с размерами групп $s_1 \leq \ldots \leq s_n$ при выполнении неравенства $s_1 \geq \sqrt{2g}$ является слабым миграционным равновесием, а при дополнительном условии $s_n \leq 2\sqrt{g}$ является коалиционно устойчивым. Вдобавок, неоднородное сильное миграционное равновесие всегда будет коалиционно устойчивым, а значит (по сумме) и DA-устойчивым.
- viii Существует такое n, что однородное разбиение на n групп является DA-устойчивым, то есть проходит все тесты на устойчивость, приведённые выше, одновременно.

$$
\begin{tikzcd}
DA \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & DU \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & DL \arrow[rr, Rightarrow] & & M \\
& C \arrow[rr, Rightarrow] & & DY & & &
\end{tikzcd}
$$

Рисунок 13. Схема логических связей концепций устойчивости.

Заметим, что о существовании разбиений, о которых говорится выше, (почти) ничего не сказано. В каких-то случаях существование очевидно, а в иных, напротив, требует для установления скрупулёзной техники и разграничения различных случаев (параметризованных числами $g \in \mathbf{R}_+$ и $n = 1, 2, \dots$.

Критическим моментом здесь служит “эффект резонанса”, когда требования на устойчивость входят в конфликт с фиксированным размером мира, равным единице. Соответствующий исчерпывающий анализ проведён в наших работах, конкретно [44] и [46] и здесь опущен. Для простоты можно считать, что теорема, сформулированная выше, относится к равномерному расселению на всей прямой. В последнем случае никакого резонанса не возникает, и количество групп в разбиении всегда бесконечное. Но, помятуя о необходимости всё-таки завершать анализ исследованием резонанса, мы не нормировали единственный оставшийся параметр g к единице.

Доказательство всех сделанных утверждений базируется на аккуратном анализе одной и той же функции, а именно непрерывного аналога функций $z_l(\cdot)$ из первой и второй глав. Она выше уже названа: это функция Ψ из формулы (3.76). Она, как и в дискретной постановке, выражает издержки крайнего жителя интервальной группы данной длины (обозначим последнюю за s).

Функция Ψ всего одна, в отличие от своих сестёр из дискретного мира равномерных расселений, и ведёт себя значительно проще них. Я опускаю здесь весь анализ, ибо он достаточно прост и прямолинеен, а за подробностями доказательств отсылаю к нашим статьям, процитированным в предыдущем абзаце.

Здесь лишь нарисую эту функцию, и нанесу на график все ключевые для утверждений теоремы точки — как аргументы функции, так и их значения. Из рассмотрения рисунка 14 многое из сказанного выше проясняется, особенно если вычислить, что наклон касательной к графику рассматриваемой функции в точке $\hat{g}$ составляет 45 градусов ($\Psi'(\hat{g}) = -1$).

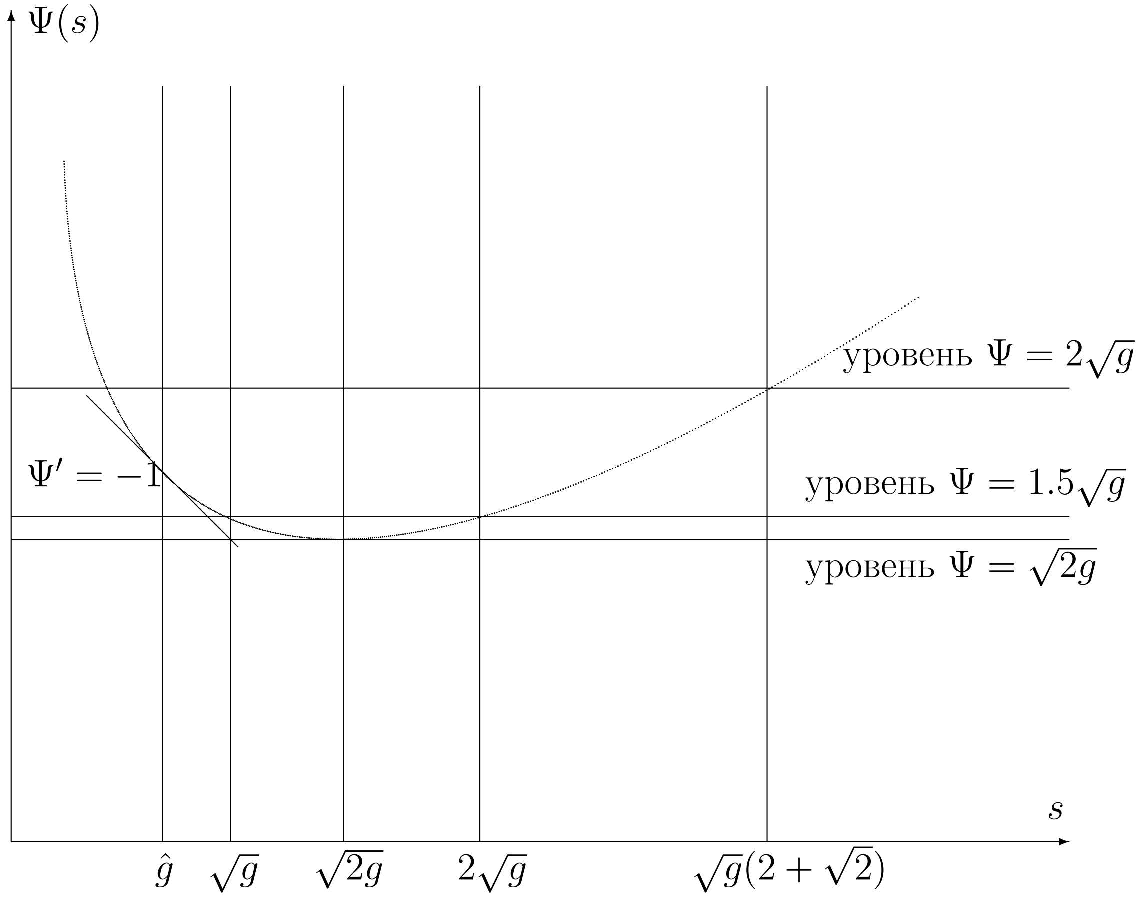

Рисунок 14. Функция $\Psi(s)$, и важные точки на её графике.

На этом мы расстаёмся с постановкой D, чтобы перейти к последней из изучаемых в диссертации постановке T. Континуальные постановки с общих позиций будут рассмотрены в заключении (глава 5). По сути дела, там будет лишь намечен широкими мазками план научной работы на многие годы вперёд для целых исследовательских коллективов.

Глава 4

Случай T: “несколько городов”

В этой последней (не считая заключительной) главе рассмотрена задача многомерного размещения класса “конечное число типов игроков”, или “случай нескольких городов”, когда всего имеется континуальное число неатомарных жителей, априори (экзогенно) разбитых на конечное число типов. Все игроки одного и того же типа проживают в одной точке, x_i, и все точки $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}^d$ различны.

Численности всех типов также заданы экзогенно. Таким образом, при фиксированном количестве различных типов игроков пространство всех постановок задачи многомерного размещения — *конечномерное*; это роднит такую постановку со случаем F.

В то же время, аналогично случаю D, перемещение одного игрока из группы в группу не влияет на выигрыши остальных игроков, поэтому миграционные аспекты задачи скорее похожи на изученные в предыдущей главе (в разделах 3.2 и 3.4). Впрочем, за исключением формальных определений, внимания случаю TN в работе уделено не будет.

С формальной точки зрения, задача многомерного размещения с конечным числом типов игроков может рассматриваться как естественное обобщение стандартной постановки задачи (1) из введения (см. раздел 0.2); более того, дробная релаксация по аналогии с разделом 0.4 может быть целиком перенесена на этот случай. Впрочем, это мало что даст, поскольку любое расселение с конечным числом типов (как, впрочем, и любое континуальное расселение с плотностью) можно аппроксимировать конечным. В каком-то смысле случай T — это просто удобный аппарат для изучения предельных режимов конечного случая F с большим количеством игроков в каждой из существующих локаций.

Но это удобство, как мы ниже выясним, вполне заслуживает выделения в отдельную главу. Результаты, изложенные ниже, опубликованы в работе [29] автора диссертационного исследования.

Структура главы T такова, что в ней имеется три раздела. Первый из них посвящён "языку", на котором наиболее удобно формулировать понятия и результаты изучаемой постановки. На подходящем языке формулируются ЗМР, миграционные угрозы в ней, а также угрозы коалиционной природы. Помимо постановочного блока, в соответствии с нашей единой схемой должны присутствовать блоки TN и TC, подразбитые на мелкие "строительные" блоки TRN, TEN, TRC, TSC и TEC. Однако для случаев TRN и TEN будут даны лишь определения (в самое последнее время получена общая теорема существования для TRN, да и для TEN кое-что становится понятно, но эти продвижения уже не вошли в материал, выносимый на защиту).

Определения для блока TEC также будут приведены в первом разделе. Блок TSC по содержанию мало отличается от FSC, в том смысле что тоже порождает вопросы ε-устойчивости и введения дробной релаксации задачи, и относится по духу скорее к теории исследования операций. Блок TRC решается практически дословным переносом общей теоремы существования из блока FRC (раздел 2.2), и он ниже в работе также больше не упоминается.

А вот анализ блока TEC оказывается настолько сложным, что полностью выполнен только для случая двух типов, где он занимает около 30 страниц. Более того, он проведён лишь для подслучая выбора произвольной медианы.

Анализу случая двух типов и посвящены последние два раздела настоящей главы (доказательство допускает естественное разделение на две части, и в соответствующем месте начинается новый раздел). Другие вариации задачи с конечным числом типов пока никем (насколько я знаю) не изучались. Могу рекомендовать их анализ в качестве добротных студенческих дипломов и курсовых работ. Более того, если некие общие результаты будут получены, то можно будет говорить и о кандидатских диссертациях.

4.1 Введение в T-сценарий: терминология, ЗМР, и определения теоретико-игровой устойчивости

4.1.1 Описание постановки задачи в сюжете T

Так как с начала работы прошло уже много страниц, напомню гуманитарным языком, что за задача ставится и решается ниже. Имеется экономика, состоящая из континуума потребителей, изначально и экзогенно разбитых на конечное число однородных групп. Требуется решить задачу обеспечения всех жителей (потребителей) доступом к общественному благу определённого вида.

Потребители из разных групп имеют различные предпочтения касательно набора характеристик потребляемого блага, поэтому возникает конфликт: чем меньше вариаций общественного блага будет произведено, тем с одной стороны ниже налоговое бремя на потребителей, а с другой — интенсивнее конфликт относительно того, какие именно вариации нужно производить.

Рассматриваемое общественное благо имеет вид чистого, без всякого эффекта переиспользования, поэтому одно из возможных решений — произвести для всех потребителей ровно одну вариацию блага. Это один крайний случай, с максимально низким налоговым бременем и максимально интенсивным конфликтом интересов.

Другой крайностью будет произвести для каждого типа потребителей идеально подобранную под их предпочтения разновидность общественного блага. Тогда конфликта интересов не будет вовсе, зато налоговое бремя в таком решении будет максимально возможным.

В произвольном допустимом решении выбирается какое-то разбиение на клубы, априори никак не привязанное к исходному разбиению на типы — такое разбиение, в котором сбалансированы две описанные выше тенденции.

Далее в фокусе внимания оказывается основной вопрос диссертационной работы, а именно, какие из допустимых решений исходной задачи являются устойчивыми как против угроз спонтанного формирования новых коалиций, влекущих разрушение предлагаемых в решении групповых структур, так и против угроз индивидуального перемещения игроков из группы в группу (также, если вдуматься, угрожающих устойчивости групповых структур[1]).

При решении первой из задач[2] предполагается, что в рамках любой группы предлагаемого в решении разбиения выбор разновидности блага, как и в задаче нахождения оптимума, производится исходя из медианного принципа (если после этого остаётся какая-то свобода выбора, то благо выбирается среди имеющихся опций произвольным образом). Кроме того, принимается предположение, что каждый игрок несёт издержки перемещения сам, а издержки на поставку общественного блага внутри группы делятся поровну.

Иными словами, мы в настоящей главе ограничиваемся постановкой ЗМР с точки зрения коалиционной устойчивости относительно принципа равнодолевого участия с произвольно выбираемой медианой из множества медиан как групп разбиения, так и отклоняющихся коалиций.

Ответ даже на поставленный, вроде бы достаточно узкий, вопрос в общем случае представляется необозримо сложным. В разделах 5.2 и 5.3 настоящей главы проводится исчерпывающий анализ случая, когда имеется всего *два* типа игроков. Даже в этом случае выкладки занимают более 30-ти страниц.

Тем не менее, результат вознаграждает за усилия: выявлены множества ненулевой меры в пространстве конфигураций параметров (то есть в фазовом пространстве задачи), при которых коалиционно устойчивых решений *не существует*, а также таких конфигураций, при которых единственным устойчивым решением служит разбиение *дробное*, когда потребители одного из типов приписываются к разным группам. В оптимуме такого решения быть не может.[3]

4.1.2 Задача многомерного размещения: T-случай

Итак, начинаем с изучения оптимизационной проблемы — ЗМР. В рассматриваемой нами континуальной постановке с конечным числом типов

[1] Ибо в постановке T очевидно, что если один игрок хочет сменить группу, то и все его односельчане из той же группы разбиения хотят того же.

[2] Задачей миграционной устойчивости мы в работе заниматься не будем.

[3] Кроме вырожденных начальных условий, то есть именно “на мере нуль”.

пространство игроков, N является несвязным объединением нескольких отрезков, $N = I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_n$, где каждый отрезок I_j имеет длину, или *массу*, равную $\alpha_j > 0$. Все жители из отрезка I_i имеют один и тот же адрес $x_i \in \mathbf{R}^d$, где набор $(x_1, \ldots, x_n)$ состоит из n попарно различных точек d-мерного пространства $X = \mathbf{R}^d$, снабжённого нормой $||\cdot||$, не обязательно евклидовой.

ЗМР формулируется в нашем случае следующим образом:

$$\min_{K \subset X;\ \{\mu_i^y\}_{i \in N}^{y \in K}} \left\{ g|K| + \sum_{i=1}^{n} \sum_{y \in K} \mu_i^y ||x_i - y|| \right\}, \tag{4.1}$$

где минимум берётся среди всех вариантов выбора центров обслуживания и всех способов разбивки каждого из кластеров однотипных игроков между центрами (при этом для любого типа $i \in N$ должно быть $\sum\limits_{y \in K} \mu_i^y = \alpha_i$).[4]

Заметим, что прикреплять однотипных игроков можно к разным мощностям, что вполне соответствует духу этого сюжета.[5] Так как при открытии n мощностей издержки перемещения можно свести к нулю, то очевидно, что при поиске оптимума достаточно перебрать все подмножества X, содержащие не более, чем n элементов. Таким образом, ЗМР в рассматриваемом случае *конечномерна*.

4.1.3 Переформулировка задачи

Задачу о размещении мощностей для наших целей вновь, как и в предыдущих разделах, удобнее переформулировать *двойственным* образом. Для этого заметим, что выбор определённых мест (и их количества) для открытия мощностей определяет разбиение пространства игроков на непересекающиеся группы (каждая группа состоит из потребителей, прикреплённых к одной и той же мощности).

[4] Довольно интересно сравнить эту оптимизационную задачу с дробной релаксацией задачи (1), описанной в обзоре литературы в разделе 0.4. Отличие заключается в том, что здесь релаксация *полудробная*: разрешается прикреплять однотипных игроков к разным пунктам (там это было дробным прикреплением одного игрока), но не разрешается открывать пункт не на полную мощь. Из анализа, проведённого ниже, становится ясно, что именно открытие пункта на дробную мощность отвечало за релаксацию целевого функционала!

[5] Хотя при поиске *оптимума* можно ограничиться цельными разбиениями, дробление городов может возникнуть, как мы увидим ниже, при поиске коалиционно-устойчивых решений.

На самом деле в любом решении любой потребитель приписан к ближайшему по его предпочтениям благу. При этом начальные данные могут оказаться таковыми, что целый город находится посередине между двумя адресами ближайших мест поставки блага — и тогда положительную массу людей можно приписать к любому из них. Здесь кроется отличие от континуальной, но "непрерывно расселённой" постановки D, в которой *всегда* есть жители, находящиеся на границе зон, но их *всегда* будет мера ноль.

В оптимуме, к тому же, мощность автоматически выбрана в каждой группе, как и прежде, *по принципу медианы*, или *в точке Штейнера*, см. уже упоминавшаяся ссылка [17], стр. 382-388. Медиана в сюжете T также вновь, как и в случае F, *перестаёт быть однозначной.*

Мы ещё вернёмся к этой проблеме далее по тексту настоящей главы.

Формализуем сказанное выше. Прежде всего, дадим в постановке T строгое определение понятиям *группы, коалиции*, а также нового понятия *группового (или коалиционного) шаблона.* Оказывается, что в сюжете с несколькими типами игроков широкие классы коалиций получаются всецело эквивалентными друг другу (как и целые классы разбиений) ! А именно, для исчерпывающего описания *типа* группы или коалиции достаточно указать, сколько жителей каждого города туда вошло. Формально:

> **Определение** $T1$. *Группой*, или *коалицией* потребителей называется любое измеримое[6] подмножество $S \subset N$ положительной меры. Каждой группе (коалиции) S ставится в соответствие *групповой* или *коалиционный шаблон* $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ — набор из n неотрицательных чисел $\mu_l = \lambda[S \cap I_l] = |S \cap I_l|$, равных Лебеговой мере (проще говоря, численности) представителей группы S из соответствующих типов (иногда мы будем говорить "городов") $1, \ldots, n$.

Любая группа, приводящая к данному шаблону $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, называется его *реализацией.* При этом всегда требуется, чтобы $\sum_{i=1}^{n} \mu_i > 0$ (положительность меры!), но отдельные μ_l могут при этом быть и нулевыми.

[6] То есть все пересечения $S \cap I_l$ измеримы, $l = 1, \ldots, n$.

Важное замечание: вопрос о том, как пересекаются между собой два шаблона $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ и $(\mu'_1, \dots, \mu'_n)$, *не может быть решён без привлечения их групп-реализаций.* Конечно, если для некоторого l мы имеем $\mu_l + \mu'_l > \alpha_l$, то такие две группы уже не могут не пересекаться, но в остальном свобода их взаимного расположения остаётся значительной.

Определение $T2$**.** *Разбиение* π в сюжете с конечным числом типов игроков отождествляется с матрицей

$$\{\mu_i^v\}_{i=1,\dots,n}^{v=1,\dots,k} \tag{4.2}$$

коалиционных шаблонов k штук групп, входящих в разбиение; при этом, конечно, требуется, чтобы

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \sum_{v=1}^{k} \mu_i^v = \alpha_i. \tag{4.3}$$

Иногда нас будут интересовать конкретные *реализации* групп в разбиении; во всех таких случаях мы требуем, чтобы реализации не пересекались.[7]

Теперь ЗМР может быть записана, как и в предыдущих главах, в два этапа. Сначала ставим задачу о поиске наиболее экономного способа поставки общественного блага для потребителей из произвольной коалиции S, реализованной через шаблон $(\mu_1, \dots, \mu_n)$, то есть *задачу Штейнера* (и снова в обеих её эквивалентных ипостасях, как и в предыдущих главах работы):

$$\begin{gathered} D[S] = D[\mu] = \min_{m \in X} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \mu_i ||x_i - m|| \right\}; \\ c[S] = c[\mu] = \min_{m \in X} \left\{ \frac{g + \sum_{i=1}^{n} \mu_i ||x_i - m||}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i} \right\} = \frac{g + D[\mu]}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Понятно, что множество $M[S]$ решений (любой из этих эквивалентных друг другу задач) не зависит от выбора коалиции, реализующей данный

[7]Опять головная боль, ибо в этом случае придётся мириться с тем, что куски реализованных коалиций могут быть незамкнутыми подмножествами интервалов I_l, $l = 1, \dots, n$. Мы просто игнорируем это — “У нас нету времени для Гауссовской строгости!”

шаблон. Именно поэтому мы зачастую абстрагируемся от композиции группы или коалиции, интересуясь только набором численностей её представителей из каждого города (то есть численностью каждого из типов игроков).

Нередко ниже используется, по аналогии с предыдущими главами, обозначение $|S|$ для численности коалиции S. В изучаемой постановке с конечным числом типов игроков имеем $|S| = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$, если рассматриваемая коалиция S представлена шаблоном $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

В решении задачи определяется величина $c[S]$ — средние суммарные издержки членов коалиции S при оптимальном выборе блага. Решение задачи всегда существует: фактически, оптимизация непрерывного функционала проводится на компактном множестве (нет смысла подставлять в это выражение "далёкие" точки $x \in X$).

Множество $M[S]$ называется *множеством медиан* коалиционного шаблона $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, или просто коалиции S. Как и в конечном случае, в постановке T множество $M[S]$ может быть, а может и не быть одноточечным. Если множество $M[S] = \{m\}$ одноточечное, то соответствующая точка $m = m[S]$ будет называться просто *медианой* коалиции S, или шаблона $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

Так как вдоль прямой любая норма, с точностью до мультипликативной константы, совпадает с евклидовой нормой (т.е. с модулем разности координат), то для любого шаблона, состоящего ровно из двух ненулевых равных друг другу масс $\mu_l = \mu_r$, множество медиан совпадает с целым отрезком, соединяющим точки x_l и x_r в пространстве $X = \mathbf{R}^d$. Этим фактом мы будем пользоваться при анализе "биполярного мира". В евклидовом случае верна следующая общая теорема.

Лемма T о медиане. Если норма евклидова, то множество медиан $M[S]$ может не быть одноточечным *только* в том случае, когда все точки x_l, для которых $\mu_l \neq 0$, лежат на одной прямой.[8]

[8] В случае "одномерного" мира множество $M[S]$ медиан, как уже было отмечено в начале главы, может быть, а может и не быть одноточечным. Упорядочим точки спроса на прямой, то есть будем считать, что $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Легко тогда понять, что одноточечность множества $M[S]$ равносильна тому, что существует тип l со свойствами $\sum_{i=1}^{l-1} \mu_i < |S|/2$ и $\sum_{i=1}^{l} \mu_i > |S|/2$, где оба неравенства строгие. Таким образом, это — *свойство полной меры!*

Доказательство. Уже две похожих леммы были доказаны выше в работе. Предположим, что существует более одной медианы. Обозначим две разных медианы за m_1 и m_2, и рассмотрим середину m между ними. Обозначим за E прямую, содержащую m_1 и m_2.

Для любого $x \notin E$ имеем $||x-m|| < \dfrac{||x-m_1|| + ||x-m_2||}{2}$ в силу строгого неравенства треугольника, выполненного для евклидовой нормы при этих условиях, а для $x \in E$ выполнено такое же, но нестрогое неравенство треугольника. Поэтому если масса таких $x \notin E$ положительна, то и соответствующая взвешенная сумма расстояний до точки m окажется строго ниже полусуммы сумм расстояний до точек m_1 и m_2; последняя же равна $D[S]$ по предположению о том, что обе точки m_1 и m_2 — медианы. **Лемма T о медиане доказана.**

Теперь можно переформулировать ЗМР для случая конечного числа типов потребителей:

$$\min_{\{\mu_i^v\}_{i=1,\dots,n}^{v=1,\dots,k}\colon\ \forall i=1,\dots,n\ \sum\limits_{v=1}^{k}\mu_i^v=\alpha_i} \left\{ \sum_{v=1}^{k} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i^v \right) c\left[(\mu_1^v, \dots, \mu_n^v) \right] \right] \right\}, \tag{4.5}$$

где минимум берётся по всем матрицам, каждая строка которых представляет одну коалицию. Понятно, что это всё та же задача минимизации выражения $\sum\limits_{v=1}^{k} |S^v| c[S^v]$, которая нам встречалась в предыдущих главах, только переписанная "на конечно-типовой манер" постановки T.

Можно разбить процесс нахождения минимума на два этапа: на первом этапе считать количество строк (то есть, коалиционных шаблонов) в матрице фиксированным, а уже на втором этапе минимизировать по целочисленному параметру. Задача минимизации при фиксированном числе строк матрицы μ является *конечномерной*.

В силу замечания из предыдущего раздела о том, что в решении задачи никогда не может получиться больше групп, чем типов потребителей, мы делаем вывод, что задача n^2-мерна как максимум, и в силу свойств непрерывности функционала и компактности множества, на котором ищется решение (все числа μ_i^v ограничены числом $\max\limits_{i=1}^{n} \alpha_i)$, задача поставлена корректно и всегда допускает как минимум одно решение.

4.1.4 Принципы распределения издержек в T-сценарии

Для перехода к рассмотрению теоретико-игровых угроз нам теперь следует выразить в терминах постановки T понятие принципа, а также схемы распределения издержек внутри коалиции, и обсудить, как будут выглядеть наши три основных принципа в этом случае.

Определение TP**.** *Принципом распределения издержек* в постановке T мы будем называть многозначное соответствие

$$G : ([0, \alpha_1] \times \ldots \times [0, \alpha_n]) \setminus \{(0, \ldots, 0)\} \rightrightarrows \mathbf{R}^n, \tag{4.6}$$

сопоставляющее каждому нетривиальному (обладающему положительной массой) коалиционному шаблону $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ непустое подмножество векторов издержек игроков

$$G[\mu] \subset \mathbf{R}^n. \tag{4.7}$$

Каждый из векторов $w = (w_1, \ldots, w_n) \in G[\mu]$ предписывает каждому жителю города i нести суммарные издержки в размере w_i — если этот житель волею случая, или же по своей доброй воле окажется в коалиции с заданным шаблоном μ. Вектора предполагаются неотрицательными и *сбалансированными*:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i w_i = c\left[(\mu_1, \ldots, \mu_n)\right]. \tag{4.8}$$

Векторы из $G[\mu]$ мы будем называть *допустимыми* относительно принципа распределения издержек G.

Далее, принцип G называется *однозначным*, если для каждого коалиционного шаблона μ подмножество $G[\mu]$ является одноточечным, то есть состоит из одого допустимого сбалансированного вектора $g^\mu = (g_1^\mu, \ldots, g_n^\mu)$. В противном случае мы называем принцип *многозначным*. Однозначные принципы иногда называются *схемами* распределения издержек, и обозначаются просто одной буквой g:

$$g = \{g^\mu\}_{\mu \in ([0,\alpha_1] \times \ldots \times [0,\alpha_n]) \setminus \{(0,\ldots,0)\}}. \tag{4.9}$$

Два важных замечания необходимо сделать, прежде чем идти дальше.

Замечание 1. Рассматриваемые принципы распределения издержек (А) анонимны по людям (в любом допустимом векторе распределения издержек любой из жителей данного города платит одну и ту же сумму, отнесённую к данному городу), и (Б) инвариантны относительно шаблона: если две разные коалиции реализуют один и тот же шаблон, то и множества допустимых распределений издержек должны совпадать.[9]

Замечание 2. В постановке с конечным числом типов любая схема (то есть однозначный принцип) распределения издержек, отнесённая к данному шаблону, автоматически обладает свойством *универсальной определённости,* то есть предписывает определённые издержки *всем* игрокам, а не только тем, кто попал в группу, реализующую этот шаблон.

Причина тут простая: требование анонимности схем из предыдущего замечания. Конечно, если из данного города вообще никого в группе нет ($\mu_l = 0$), то можно было бы при наивном подходе не приписывать никаких издержек его жителям. Однако таких шаблонов "мера ноль", да и сама униформизация обозначений призывает нас к тому, чтобы издержки были предписаны всем жителям всех городов.

Таким образом, обсуждаемые в предыдущей главе однозначные принципы распределения издержек, которые были достаточно искусственным путём продолжены на всё пространство $N = X$, в сюжете с конечным числом типов игроков появляются естественно и непринуждённо!

4.1.5 Свойства устойчивости разбиений в сюжете T

Как и в предыдущих главах, свойство миграционной устойчивости разбиения определяется только для однозначных принципов (схем) распределения издержек, а концепция коалиционной устойчивости — для любых.

Начнём со свойства коалиционной устойчивости. Определение, которое даётся ниже, весьма непросто для восприятия, поэтому оно предваряется наводящими соображениями. Что означает, что разбиение (4.2) устойчиво

[9] В качестве первого шага на пути анализа T-случая это предположение видится оправданным.

в коалиционном смысле слова? Это означает, что нельзя *сконструировать* коалицию из представителей каждого города, да ещё из разных групп разбиения таким образом, чтобы всем им в новой коалиции стало лучше.

Иными словами, не должно существовать *шаблона пересечений*, или *матрицы* $\{\beta_l^a\}_{a=1,\dots,k}^{l=1,\dots,n}$, обладающей тем свойством, что любому представителю любого пересечения β_l^a (если таковые вообще есть в наличии, то есть при $\beta_l^a > 0$!) станет лучше в новом шаблоне $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, где

$$\forall l = 1, \dots, n \quad \beta_l = \sum_{a=1}^{k} \beta_l^a, \tag{4.10}$$

нежели в шаблоне той группы с номером a исходного разбиения, откуда его выдернули. Вот — соответствующее "страшное" определение.

> **Определение** TC**.** Разбиение, заданное посредством матрицы (4.2), называется *коалиционно-устойчивым относительно принципа* G, если существует набор $\{(w_1^a, \dots, w_n^a)\}_{a=1}^{k}$, состоящий из разрешённых схем:
>
> $$\forall a = 1, \dots, k \quad (w_1^a, \dots, w_n^a) \in G[\mu^a], \tag{4.11}$$
>
> для которого будет выполнено следующее свойство. А именно, каким бы шаблоном всевозможных пересечений $\{\beta_l^a\}_{a=1,\dots,k}^{l=1,\dots,n}$ мы ни скунструировали коалицию с произвольно заданным шаблоном $(\beta_1, \dots, \beta_n)$,[10] для любого разрешённого при шаблоне β вектора-схемы $\left(w_1^\beta, \dots, w_n^\beta\right) \in G[\beta]$ будут непременно существовать *два* индекса, l и a, такие, что, во-первых, жители из соответствующего пересечения *существуют* (т.е. $\beta_l^a > 0$), и во-вторых, им в коалиции с шаблоном β *не стало лучше*, чем в исходном разбиении: $w_l^a \le w_l^\beta$.

В свою очередь, для однозначных уложений можно дать общее определение *миграционной устойчивости* разбиения в постановке T. Трудное формальное определение мы также предварим наводящими соображениями.

[10] То есть $\forall l = 1, \dots, n \quad \beta_l = \sum_{a=1}^{k} \beta_l^a$, а также $\forall l = 1, \dots, n,\ \forall a = 1, \dots, k \quad \beta_l^a \le \mu_l^a$.

Итак, что означает миграционная устойчивость? Она означает, что никто не хочет перебежать из группы в группу. Допустим, я приписан к группе с шаблоном μ^a. А сам я проживаю в городе i. Куда я могу перейти из своей группы? В любую другую! Что я там получу? Вместо $g_i^{\mu^a}$ я там получу $g_i^{\mu^b}$, если из своей группы уйду в группу с шаблоном μ^b. Значит, мои издержки $g_i^{\mu^a}$ должны быть минимальными среди всех чисел $\{g_i^{\mu^b}\}_{b=1,\dots,k}$.

Из этого следует, что все числа $g_i^{\mu^b}$, для которых $\mu_i^b \neq 0$, равны друг другу (и не меньше тех, для которых $\mu_i^b = 0$). Этот набор требований и составляет содержание концепции миграционной устойчивости разбиения.

Определение TM. Разбиение, заданное посредством матрицы (4.2), называется *миграционно-устойчивым по отношению к однозначному принципу* g, если оно реализует вектор $(w_1, \dots, w_n)$ “типовых издержек” жителей каждого из городов следующим образом (ниже $i = 1, \dots, n$):

$$\begin{aligned} &\forall b: \ \mu_i^b \neq 0 \quad g_i^b \equiv w_i; \\ &\forall a = 1, \dots, k \quad w_i \geq g_i^a. \end{aligned} \tag{4.12}$$

В требованиях (4.12) при каждом $a = 1, \dots, k$ вектор $(g_1^a, \dots, g_n^a) = g[\mu^a]$ — вектор распределения издержек, относимый принципом G коалиционному шаблону μ^a.

Эти условия подсказывают нам, что общая теорема существования миграционно устойчивого равновесия для любого однозначного и непрерывного[11] принципа распределения издержек может быть выведена из теоремы Шмейдлера, см. [126]. Однако для того, чтобы понять, так ли это, нужно присесть и хорошенько сосредоточиться, что заведомо не получится до защиты диссертации. Поэтому соответствующий (надеюсь, верный!) результат не вошёл в работу.

Не вошло в диссертацию и следствие о локально устойчивых равновесиях: *в любом локальном миграционно устойчивом равновесии при принципе равнодолевого участия города должны входить в разбиение целиком,*

[11] Подробности опускаем!

без дробления на части. Впрочем, существования локально устойчивых разбиений уже никто не гарантирует. Это всё новые горизонты для будущих исследований.

4.1.6 Принципы TS, TR и TE распределения издержек

В качестве трёх наиболее важных принципов распределения издержек, как и прежде, мы будем выделять следующие:

Принцип произвольных побочных платежей TS. При данном принципе множество допустимых векторов издержек $G[\mu]$ для коалиций данного шаблона μ совпадает со множеством всех сбалансированных векторов $w \in \mathbf{R}^n_+$, то есть (неотрицательных) векторов, удовлетворяющих условию (4.8). Для этого принципа мы вводим только концепцию коалиционной устойчивости, в согласии с определением TC и с общей идеологией коалиционной устойчивости в этой ситуации, разработанной в разделе 2.2 второй главы.

Определение TSC. Разбиение, заданное посредством матрицы (4.2), называется *коалиционно-устойчивым относительно принципа произвольных побочных платежей*, или *коалиционно-устойчивым при трансферабельной полезности*, если существует *матрица издержек* $\{w^a_l\}^{a=1,\dots,k}_{l=1,\dots,n}$, состоящая из допустимых векторов-строк:

$$\forall a = 1, \dots, k \quad \sum_{l=1}^{n} \mu^a_l w^a_l = c[\mu^a], \tag{4.13}$$

для которой будет выполнено следующее свойство: для любого шаблона всевозможных пересечений $\{\beta^a_l\}^{l=1,\dots,n}_{a=1,\dots,k}$ коалиции, реализующей шаблон $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, с группами нашего разбиения, имеет место *ядерное неравенство*:

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{a=1}^{k} \beta^a_l w^a_l \le c[\beta]. \tag{4.14}$$

То есть никакой коалиционный шаблон β, как бы он ни попытался себя реализовать путём всевозможных пересечений с разбиением π, не снижает суммарные издержки своих участников, по сравнению с предписанными им в существующем разбиении.

Устойчивостью данного типа мы заниматься не будем — оставим её на будущее (на самом деле, это просто правильный язык для анализа дробных релаксаций в теории исследования операций). Миграционную устойчивость мы для принципа трансферабельной полезности не вводим.

Переходим к следующему принципу.

Принцип выравнивания издержек TR**.** Это принцип однозначный; каждому шаблону μ он ставит в соответствие диагональный вектор $(c[\mu], \ldots, c[\mu])$. Общие определения TC и TM в этом случае превращаются в следующие два.

> **Определение** TRC**.** Разбиение, заданное посредством матрицы (4.2), называется *коалиционно-устойчивым относительно принципа выравнивания издержек*, если для любой коалиции S с шаблоном $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, как бы ни сконструировать её посредством шаблона $\{\beta_l^a\}_{a=1,\ldots,k}^{l=1,\ldots,n}$ всевозможных пересечений с группами нашего разбиения, непременно найдётся такой номер $a \in \{1, \ldots, k\}$, что выполнено неравенство $c[\mu^a] \leq c[\beta]$, и группа, представляющая шаблон μ^a в рассматриваемом разбиении, нетривиально пересекается с коалицией S.[12]

В самом деле, в этом случае, как ни реализуй коалицию с произвольным шаблоном β, она всегда нетривиально пересечётся с одной из таких групп разбиения, внутригрупповые издержки которых не выше, чем у нашей отклоняющейся коалиции; игроки, входящие в это нетривиальное пересечение, в этом случае как раз и заблокируют коалиционную угрозу.

Существование коалиционно-устойчивого разбиения в постановке T для принципа выравнивания издержек доказывается практически так же, как и теорема FRC.[13]

Миграционные равновесия в этом случае определяются в полном соответствии не только с определением TM, но также и с определением DRM из раздела 3.2 предыдущей главы. А именно,

[12]Последнее, как и выше, означает существование такого города $l \in \{1, \ldots, n\}$, что $\beta_l^a > 0$.

[13]Дополнительные тонкости в доказательстве носят аналитическую, а не теоретико-игровую, природу.

Определение TRM. Разбиение, заданное посредством матрицы (4.2), называется *миграционно-устойчивым* относительно принципа выравнивания издержек, если

$$\exists \bar{c}: \quad \forall a = 1, \ldots, k \quad c[\mu^a] \equiv \bar{c}, \tag{4.15}$$

то есть все группы разбиения имеют одно и то же значение внутригрупповых издержек.

И это вполне логично: как только это неравенство перестанет выполняться, любой представитель менее эффективной группы захочет перебежать в более эффективную!

Я уже говорил выше, и повторяю здесь, что на самом деле верна универсальная теорема существования разбиения, миграционно устойчивого относительно принципа выравнивания платежей, вообще для любой *регулярной* неатомарной игры (см. [1]). Я не буду останавливаться тут на формализации этого понятия, но даю честное благородное слово, что все постановки и этой, и предыдущей глав порождают регулярные игры. Но в диссертацию этот весь материал не вошёл: надо уметь вовремя остановиться!

Наконец, переходим к последнему принципу, который и составляет предмет нашего исследования в последующих разделах настоящей главы.

Принцип равнодолевого участия TE. Принцип полу-однозначный, ибо в постановке конечного числа типов вновь начинает играть важную роль потенциальная множественность медиан для некоторых коалиционных шаблонов.[14] Для коалиции с шаблоном μ множество $G[\mu]$ для принципа равнодолевого участия состоит из всех векторов $(c_1^m, \ldots, c_n^m)$, параметризованных всевозможными медианами $m \in M[\mu]$ для шаблона μ; компоненты этих векторов определяются по формуле

$$c_l^m = \frac{g}{\sum_{i \in N} \mu_i} + ||x_l - m||. \tag{4.16}$$

Таким образом, любой житель города i, попавший в коалицию, имеющую шаблон μ и выбравшую одну из медиан $m \in M[\mu]$, несёт транспортную

[14] В постановке D на любой прямой проживала мера ноль от всех жителей мира; в сюжете T это вновь, как и в дискретных постановках, может быть не так!

составляющую издержек $||x_i - m||$ сам, а монетарную составляющую издержек все члены коалиции делят поровну.

Заметим, что миграционную устойчивость в этом случае можно определить на основе выбранных разбиения и медиан в группах, даже без уточнения того, каким образом медианы выбираются: ведь перемещение из группы в группу одного участника “не портит” медианы. Этим континуальный случай T выгодно отличается от конечного случая F. Но работа в данном направлении ещё только ведётся. Поэтому я опускаю тут как определение миграционной устойчивости, так и первые результаты анализа разбиений, устойчивых по отношению к миграционным угрозам.

Коалиционная устойчивость, напротив, будет в фокусе наших дальнейших рассмотрений в этой главе. Определяю я её, опять же, только для подслучая выбора произвольной медианы; весь анализ ниже выполнен именно для этого подслучая. У меня есть глубокое подозрение, что случай фокусной (центральной) медианы даже проще; анализ коалиционной устойчивости биполярного мира с принципом центральной медианы я бы посоветовал в качестве диплома среднему студенту. Также не будет рассматриваться и постановка “максимального противодействия сепаратизму” из раздела 2.4 главы 2. Всё, что будет ниже представлено — это исчерпывающий анализ биполярного мира с позиций коалиционной устойчивости для принципа равнодолевого участия с выбором произвольной медианы в том случае, когда их целый отрезок.

Завершим же этот раздел мы общим определением коалиционной устойчивости в этом случае (TEC с произвольной медианой). Когда мы ниже говорим о принципе равнодолевого участия, мы всегда имеем в виду его вариацию с выбором произвольной медианы.

Определение TEC. Разбиение, заданное посредством матрицы (4.2) и взятое вместе с набором медианных локаций $m^a \in M[\mu^a]$, называется *коалиционно-устойчивым относительно принципа равнодолевого участия*, если для любой коалиции S с шаблоном $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, каким бы образом последняя ни была сконструирована посредством шаблона

$\{\beta_l^a\}_{a=1,\dots,k}^{l=1,\dots,n}$ всевозможных пересечений с группами рассматриваемого разбиения, и какая бы медиана $m \in M[\beta]$ для коалиции S ни была выбрана, будут существовать индексы l и a такие, что, во-первых, $\beta_l^a > 0$, и во-вторых, представителям города l из пересечения группы, представляющей шаблон μ^a в рассматриваемом разбиении, с коалицией S, не станет лучше при формировании коалиции S:

$$\frac{g}{\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i} + ||x_l - m|| \geq \frac{g}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i^a} + ||x_l - m^a||. \tag{4.17}$$

4.2 Коалиционная устойчивость "биполярного мира"

В настоящем и следующем (завершающем!) разделах главы полностью решена задача поиска коалиционно устойчивых разбиений при принципе равнодолевого участия с произвольной медианой для расселений с двумя типами игроков. Выявлены конфигурации параметров, при которых коалиционно устойчивого решения задачи *не существует*, а также такие конфигурации, что единственным устойчивым решением служит *дробное* разбиение на группы, при котором игроки одного из типов попадают в разные группы.[15]

При поиске *оптимальных* решений в случае $n = 2$ такого не может произойти заведомо: вспомним, что в оптимуме либо группа одна (и тогда не о чем говорить — все входят в неё!), либо групп ровно две, и тогда зануляются транспортные издержки: каждый город представляет собой целиком одну группу.

Итак, мы имеем дело с классом постановок, где $n = 2$. Мы будем называть любое такое расселение "биполярным миром", или "случаем двух городов". Этот случай — первый из нетривиальных (причём нетривиален только при разной численности городов), и замечателен тем, что совершенно неважно, какова размерность d пространства, внутри которого расположены

[15]Этот парадоксальный результат обязан своим появлением "взрывному" характеру многозначного отображения, сопоставляющего каждой коалиции S множество её медиан, $M[S]$. Выделенными оказываются при этом "двусоставленные" группы и коалиции, в которых ровно половина игроков проживает в одном городе, и ровно половина — в другом.

два города, а также какая именно норма $||\cdot||$ на нём рассматривается. Всё рассмотрение ограничивается внутренностью отрезка, соединяющего эти два города, а любая норма в ограничении на такой отрезок, с точностью до мультипликативной константы, представляет собой обычный модуль вещественного числа.

4.2.1 Обозначения и нормализация параметров

Итак, мы переходим к анализу этого случая. В формуле (4.16) заложены две лишние степени свободы, иначе говоря, есть двумерная группа симметрий для нашей задачи. Во-первых, g делится на массу коалиции, и поэтому одновременное пропорциональное увеличение численности всех городов и величины g не меняет вообще ничего. Это позволяет нам положить $g = 1$.

Вторая однопараметрическая группа симметрий заключается в том, что можно одновременно пропорционально уменьшать численности всех городов и увеличивать расстояния между ними путём гомотетии: формулы издержек *всех* потребителей умножатся на одно и то же число, следовательно, сравнения между ними не пострадают.

В итоге, при наличии всего двух типов, достаточными данными являются просто населения двух городов: расстояние между ними, так же как и постоянную g, можно положить равным единице, без какого-либо ограничения общности. (Нестрого) больший по размеру город расположим слева на прямой.

Наконец, будем считать, что города находятся в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Наибольшую сложность представит случай, когда размер левого города *строго* больше размера правого города: $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$. Разбор случая $\alpha_1 = \alpha_2 > 0$, тем не менее, приведён ниже для полноты картины. Случай $\alpha_2 = 0$ тривиален: как в оптимуме, так и при поиске коалиционно устойчивых разбиений решение единственное, а именно, образуется ровно одна группа.

Обозначим для удобства $a = \alpha_1$ и $b = \alpha_2$, где $a \geq b > 0$ — любые два числа, положительные и упорядоченные таким образом.

Анализ любого биполярного мира приводит к результатам, зависящим от пары (a, b), а вся картина (не)устойчивости может быть нарисована на половинке положительного квадранта плоскости, это наше *фазовое пространство (параметров) модели.* На диагонали будут отображены результаты анализа для случая $a = b > 0$.

Наконец, вернёмся к нашей *сибирской сказке* из главы 2, в терминах которой удобно проводить исследование. Будем считать, что наши два города — это вновь Новосибирск и Барнаул, и они опять решают вопрос о том, чтобы влиться в общероссийскую футбольную семью, то есть основать несколько футбольных клубов. Только теперь нет никаких фанатских группировок, а есть континуум жителей в обоих городах. Если некая группа жителей решает основать клуб, то стадион строится по медианному принципу, *минимум стоптанных сапог*, и сводится к тому, что стадион строится в том городе, где больше представителей группы; если группа поровну представлена обоими городами, то можно построить стадион в любой точке дороги между ними.

4.2.2 Подготовительная работа и решение ЗМР

Нашей целью является полное описание конфигураций биполярного мира, при которых существует коалиционно устойчивое решение этой "футбольной задачки". Оказывается, что для тех конфигураций параметров численности обеих городов, для которых существует устойчивое разбиение, таковым всегда будет одно из трёх конкретных разбиений биполярного мира: (А) "союз" городов (и одна футбольная команда, стадион в большом городе); (Б) "федерация" (по одной команде и одному стадиону в каждом из двух городов); и, наконец, (В) "дробное" разбиение на две группы: одну группу, составленную поровну из всех жителей малого города и части жителей большого и с медианой, расположенной где-то между ними, и другую группу, состоящую из оставшихся жителей большого города.

Любопытно, что существуют такие конфигурации параметров, что *единственным* устойчивым разбиением служит дробное!

Интуиция тут такова, что формирование равносоставленной группы даёт большую свободу в парировании угроз устойчивости путём выбора её центра где угодно между городами. Оставшиеся жители большого города ничего не могут поделать с такой ситуацией, им приходится довольствоваться маленьким клубом с огромными удельными издержками функционирования.

Обратим внимание также и на то, что для множества параметров ненулевой меры, хотя и не очень обширного, устойчивого решения *вообще не существует.* Любому конкретному предложению по разрешению “футбольного конфликта” будет противостоять тогда коалиция болельщиков, *каждый из которых* строго выиграет при преобразовании этой коалиции в футбольный клуб.

Начнём со следующего наблюдения, касающегося *оптимума*, то есть решения ЗМР для нашего случая. В данном случае есть ровно две опции: либо открыть *два* клуба, по одному в каждом из городов, либо открыть em один клуб со стадионом в большом городе (адрес $p = 0$). В последнем случае возникают издержки перемещения, в сумме равные b, то есть в точности населению малого города, которое вынуждено ездить из точки 1 в точку 0. Итого:

> **Лемма** TO**.** Решение ЗМР для биполярного мира, заданного парой (a, b), $a > b$) численностей двух городов, состоит в открытии одного клуба с центром (стадионом) в точке 0 (то есть в левом городе) при $b \leq 1$; и в открытии двух клубов, совпадающих с двумя городами, при $b \geq 1$. Если $a = b \leq 1$, то также можно построить стадион в любой точке отрезка $[0, 1]$.

4.2.3 Коалиционная устойчивость: первичный анализ

Переходим к анализу коалиционно устойчивых разбиений биполярного мира. Предположим, что биполярный мир разбит на несколько групп, которые представлены групповыми шаблонами (x^l, y^l), где $l = 1, \ldots, L$.[16] При этом

[16] С точки зрения *оптимальности* достаточно рассматривать разбиения из не более, чем двух групп, но при анализе *коалиционной устойчивости* мы не можем исходить из таких предположений. Ясно, что две группы слишком маленького размера не могут входить в устойчивое разбиение, ибо их союз с любой разрешённой медианой снизит издержки всех участников. Поэтому и в поисках коалиционно

имеем $\sum\limits_{l=1}^{L} x^l = a$ и $\sum\limits_{l=1}^{L} y^l = b$.

Местоположения “стадионов” обозначим за m^l; для групп, в которых $x^l > y^l$, будет $m^l = 0$; для таких групп, где $x^l < y^l$, будет $m^l = 1$, а для таких, в которых $x^l = y^l$, местоположение m^l на отрезке $[0,1]$ может быть произвольным. Точку m^l мы иногда будем называть также *центром* группы l.

Предположим, что рассматриваемое разбиение является коалиционно устойчивым, и докажем несколько подготовительных лемм.

> **Лемма** $B-1$**.**[17] Существует не более одной группы с $m^l = 0$; то же самое с $m^l = 1$, и вообще с любым $m^l \in [0,1]$.

Доказательство очевидно: если две группы имеют один и тот же центр m^l, то их объединение также *может* иметь центр в той же точке (она остаётся одной из медиан объединённой группы). Но тогда издержки перемещения m^l или $1-m^l$ для членов объединённой группы, живущих в левом и правом городах соответственно, никак не поменяются, а издержки на поддержание общественного блага строго уменьшатся. Значит, исходное разбиение не было устойчивым. **Лемма** $B-1$ **доказана.**

В качестве следствия получаем, что может быть не более, чем по одной группе устойчивого разбиения, “перекошенной” в каждую из сторон (и всего не более двух таких групп, в которых $x^l \neq y^l$).

Следующий результат, напротив, весьма техничен и при этом достаточно общий, поэтому заслуживает статуса “теоремы”.

> **Теорема** $TEC-1$**.** Существует не более одной группы, сбалансированной по городам: $x^l = y^l$.

Как следствие, существует не более одной группы, в которой $m^l \in (0,1)$, но сформулированная теорема содержит и более сильное утверждение: ведь сбалансированная группа может иметь медиану и в краевой точке. И если

устойчивых разбиений можно как-то ограничить сверху количество групп; однако априори такая граница будет зависеть от общей численности мира, $a+b$.

такое случилось, то теорема $TEC-1$ в совокупности с леммой $B-1$ уже гарантирует, что групп в рассматриваемом разбиении не более *двух*).

Доказательство. Предположим наличие двух таких групп, из которых одна представлена шаблоном (x,x), а другая — шаблоном (y,y). Будем считать, что $x \geq y$, для определённости. Медианы этих двух групп, согласно лемме $B-1$, не могут совпадать.

Кроме того, доказательство теоремы не будет вовлекать посторонних жителей биполярного мира; иными словами, мы будем доказывать, что, как и в предыдущей лемме, конфигурация из двух равносоставленных групп *внутренне неустойчива*, то есть коалиционная угроза этому шаблону возникает со стороны какого-то из подмножеств объединения этих двух групп.[18]

А раз так, то из симметрии расположения двух групп относительно замены “лево-право” следует, что можно без ограничения общности считать, что медиана группы с шаблоном (x,x) лежит строго левее медианы группы с шаблоном (y,y). Медиану первой группы мы обозначим за $p \in [0,1]$, а медиану второй группы запишем в форме $p+q \in [0,1]$, где $q > 0$. Также введём обозначение: $r = 1-p-q \geq 0$. Всё это изобразим ниже на рисунке 15.

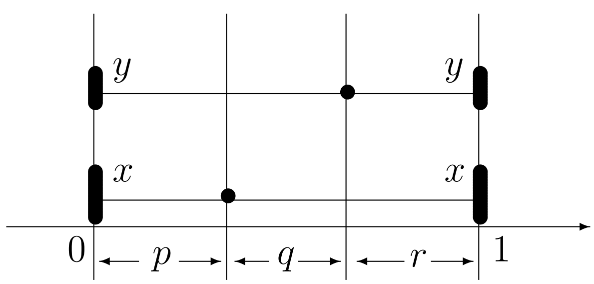

Рисунок 15. Пояснения к доказательству Теоремы $TEC-1$.

Теперь последовательно рассмотрим несколько потенциальных угроз устойчивости нашей конфигурации, и каждый раз выпишем условия, которые

[18]В работе [4] рассматривается аналогичное усиление *миграционной* устойчивости — путём наложения требования *устойчивости к объединению групп*; мы же говорим о *полной внутренней устойчивости* семейства групп, когда как объединение, так и любые другие подмножества этого объединения могут угрожать устойчивости системы.

обозначают, что соответствующая угроза не реализуется.

В конечном счёте мы получим противоречивую систему неравенств, что и будет доказывать тот факт, что хотя бы одна угроза реальна, а следовательно, рассмотренный шаблон не является устойчивым ни при каких конфигурациях остальных жителей биполярного мира.

Итак, начинаем с угрозы распада каждой из групп, то есть угроз того, что правый или левый край организует свою собственную группу (“футбольный клуб”). Во всех таких случаях экономятся издержки транспортные, но увеличиваются монетарные. Баланс должен быть отрицательный, значит

$$\begin{gathered}\frac{1}{2x} \geq p \\ \frac{1}{2x} \geq q + r \\ \frac{1}{2y} \geq p + q \\ \frac{1}{2y} \geq r\end{gathered} \tag{4.18}$$

(например, первое неравенство возникает из-за того, что левый край группы (x, x) не хочет отделяться, поэтому $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2x} + p$, что эквивалентно $\frac{1}{2x} \geq p$; остальные неравенства объясняются похожим образом). Нам в дальнейшем понадобятся два средних неравенства.

Существует множество иных угроз, но для сведения ситуации к противоречию нам будет достаточно выписать условия, которые бы означали, что группы не могут взаимовыгодно слиться.

Объединённая группа с шаблоном $(x + y, x + y)$ могла бы выбирать местоположение медианы где угодно, в том числе между медианой p первой группы и медианой $p + q$ второй группы. Рассмотрим вариант с медианой в точке $p + w$, где $w \in [0, q]$.

Так как этот вариант не должен быть выгоден кому-то, а при этом он заведомо выгоден “правым” жителям первой группы и “левым” жителям второй (так как для них снижаются обе компоненты издержек), то он невыгоден *либо* участникам первой группы, живущим в большом городе, *либо* участникам второй группы, живущим в малом городе (либо одновременно и тем, и тем). В первом случае

$$\frac{1}{2x} + p \leq \frac{1}{2x + 2y} + p + w, \tag{4.19}$$

а во втором —

$$\frac{1}{2y} + r \leq \frac{1}{2x + 2y} + r + q - w. \tag{4.20}$$

Мы хотим наложить такое условие, при котором для любого $w \in [0, q]$ выполнено одно из этих двух неравенств. Перепишем их следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x + 2y} &\leq w, \\ \frac{1}{2y} - \frac{1}{2x + 2y} &\leq q - w. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Теперь понятно, что выполнение для любого $w \in [0, q]$ хотя бы одного из неравенств эквивалентно тому, что их левые части в сумме не превосходят q (если сумма двух положительных чисел e_1 и e_2 больше некоего положительного числа e, то всегда можно указать такое число $v \in [0, e]$, что $e_1 > v$ и $e_2 > e - v$):

$$\left[\frac{1}{2x} - \frac{1}{2x + 2y}\right] + \left[\frac{1}{2y} - \frac{1}{2x + 2y}\right] \leq q. \tag{4.22}$$

Теперь произведём некоторые вычисления. Левая часть последнего неравенства (4.22) оказывается равной

$$\frac{1}{2}\frac{1}{x + y}\left[\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right] \leq q, \tag{4.23}$$

из чего, в силу известного неравенства $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geq 2$ следует, что $\dfrac{1}{x + y} \leq q$, следовательно, $x + y \geq \dfrac{1}{q}$.

В то же самое время из второго и третьего неравенства группы неравенств (4.18) следует, что $x \leq \dfrac{1}{2q + 2r}$ и $y \leq \dfrac{1}{2q + 2p}$. Окончательно тогда имеем

$$\frac{1}{q} \leq x + y \leq \frac{1}{2q + 2r} + \frac{1}{2q + 2p} < \frac{1}{2q} + \frac{1}{2q} = \frac{1}{q}. \tag{4.24}$$

Полученное противоречие **доказывает Теорему** $TEC-1$: одна из угроз устойчивости обязательно реализуется, следовательно, вхождение двух равносоставленных групп в какое бы то ни было устойчивое разбиение биполярного мира невозможно.

Суммируем установленные выше факты:

Следствие из теоремы $TEC-1$ **и Леммы** $B-1$**.** Всего может существовать не более трёх групп в устойчивом разбиении: не более одной — с коалиционным шаблоном вида $x^1 > y^1$ и центром $m^1 = 0$, не более одной — с коалиционным шаблоном вида $x^2 < y^2$ и центром $m^2 = 1$, и не более одной — с коалиционным шаблоном вида $x^3 = y^3$. Более того, если третья группа (которую мы будем иногда называть *равносоставленной*) в разбиение входит и её центр находится в одном из концов отрезка $[0,1]$, то соответствующей "перекошенной" группы в разбиении, напротив, нет.

Для удобства дальнейшей работы переобозначим: $x^1 = d, y^1 = z;\quad x^2 = s, y^2 = t;\quad x^3 = y^3 = x,\ m^3 = p \in [0,1]$ — примерно так, как показано на Рисунке 16 ниже. Помним при этом, что у нас $a \geq b$, то есть $s + d + x \geq t + z + x$, откуда $s + d \geq t + z$.

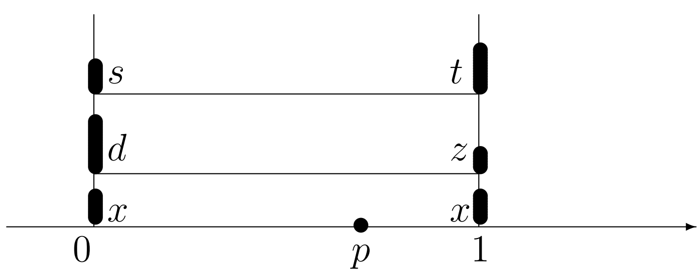

Рисунок 16. Биполярный мир при $a > b$.

4.2.4 Промежуточный результат

Теорема $TEC-2$**.** Если для данных $a > b > 0$ биполярный мир допускает коалиционно устойчивое разбиение на "футбольные клубы", то одно из трёх вполне конкретных разбиений: $\{(a,b)\}$, $\{(a,0);(0,b)\}$

или $\{(a-b,0);(b,b)\}$ является также коалиционно устойчивым. При $a = b$ одно из *двух* конкретных разбиений: $\{(b,0);(0,b)\}$ или $\{(b,b)\}$ является коалиционно устойчивым. (Если в разбиении участвует равносоставленная группа (b,b), то устойчивость понимается в том смысле, что при некотором выборе центра $p \in [0,1]$ для этой группы, разбиение будет устойчивым.)

Доказательство этой теоремы разберём на все возможные случаи относительной композиции (максимум) трёх групп коалиционно устойчивого разбиения. Начнём со взаимного расположения двух первых групп, (d,z) с условием $d > z$, и (s,t) с условием $s < t$. Для начала считаем, что обе группы присутствуют в устойчивом разбиении:

Случай I. $(d+z)(s+t) \neq 0$.

В этом случае мы будем постепенно доказывать, что на самом деле наше устойчивое разбиение является "федерацией", то есть что выполнено $d = a,\ t = b,\ z = s = 0$, а также $x = 0$ (точнее говоря, что равносоставленная группа попросту отсутствует). Действуем по порядку:

Лемма $B-2$**.** $dszt = 0$. Более того, если $d+z > s+t$, то есть если численность группы с медианой в большом городе больше, чем численность группы с медианой в левом городе, то $s = 0$; если, наоборот, $s+t > d+z$, то $z = 0$; а если, паче чаяния, $d+z = s+t$, то и вовсе одновременно $s = z = 0$. (Последний случай возможен только при $a = b$: в самом деле, тогда имеем $a = d+x = s+x = b$.)

Доказательство достаточно простое. Ниже в нём использован термин "представители s". Этот термин далее используется постоянно, поэтому я объясню, что он означает. Это члены группы (s,t), проживающие в левом городе. Таким же образом будем понимать и "представителей" других буковок t,d,z,x.

Итак, разберём для начала случай $d+z > s+t$. При выполнении этого условия "представители s" при присоединении к первой группе снижают как издержки транспортные (с единицы до нуля!), так и издержки монетарные (присоединяясь к б‘ольшей группе, к тому же пополняя её собой). Первая группа от этого не меняет своей медианной точки, поэтому для всех её членов строго выгодно присоединение “беженцев”.

Так как исходное разбиение, по предположению, коалиционно устойчивое, то “представителей s” попросту нет. Следовательно, $s = 0$. Аналогично рассуждаем и в случае $s + t > d + z$. В третьем случае (когда $d + z = s + t$) использованный аргумент верен в обе стороны. **Лемма $B - 2$ доказана.**

> **Лемма $B - 3$.** Случай $s + t > d + z$ исключается в устойчивом разбиении. (Тем самым, остаётся только случай $d + z > t + s$, то есть $d + z > t$, а также при $a = b$ случай $d = t$.)

Доказательство: Мы уже знаем, что в этом случае $z = 0$ (согласно лемме $B - 2$). Сейчас мы докажем, что также и $s = 0$. Для этого рассмотрим две угрозы устойчивости разбиения, которые по предположению не реализуются: первая угроза — это что “представители s” могут воссоединиться со своим городом (который их, конечно, примет); раз они не хотят этого делать, то мы заключаем, что выполнено неравенство

$$\frac{1}{t+s} + 1 \leq \frac{1}{d+s}, \tag{4.25}$$

где левая часть неравенства — издержки этих игроков в исходной группе, а справа — в воссоединённом родном городе, точнее после слияния его “представителей из s” с его же “представителями из d”.

Вторая угроза — более тонкого свойства. Так как по предположению $s < t$, то присоединение достаточно малой подгруппы представителей d ко второй группе не изменит расположения медианы второй группы, она по-прежнему будет находиться в точке 1. В силу этого, нашу малую подгруппу с удовольствием примут во вторую группу: монетарные издержки у всех снизились, транспортные не изменились. В силу свойства коалиционной устойчивости исходного разбиения, против такого соединения должны быть сами представители d.

Пускай ε таково, что $0 < \varepsilon < t - s$ (тогда автоматически будет $\varepsilon < d$, иначе $t > s + d$, и правый город тогда больше левого, противоречие). Раз подгруппа в d размера ε не хочет переходить во вторую группу, то должно быть выполнено неравенство

$$\frac{1}{d} \leq \frac{1}{t+s+\varepsilon} + 1. \tag{4.26}$$

Следующая цепочка неравенств

$$\frac{1}{d} \leq \frac{1}{t+s+\varepsilon} + 1 < \frac{1}{t+s} + 1 \leq \frac{1}{d+s} \tag{4.27}$$

приводит нас к противоречивому неравенству $\frac{1}{d} < \frac{1}{d+s}$, единственный выход из которого — отсутствие “представителей s”, что влечёт равенство $s = 0$.

Но тогда наш случай переписывается в виде $t > d$, значит и $b = t + x > d + x = a$, что, согласно предположению о размере городов, неверно. **Лемма $B - 3$ доказана.**

> **Лемма $B - 4$.** В случае $d + z > s + t = t$ непременно должно быть выполнено равенство $z = 0$. Следовательно, единственным вариантом для устойчивого разбиения, в котором присутствуют обе “перекошенные” группы, является вариант $\{(d, 0); (0, t); (x, x)\}$.

Доказательство: в этом случае мы тоже рассмотрим две угрозы устойчивости разбиения, которые не должны реализоваться. Первая угроза состоит в том, что вторая группа не хочет слиться с первой. Так как левый город больше правого, то есть верно неравенство $d > s + t$, то центр первой группы от такого слияния не поменяется. Следовательно, члены первой группы с удовольствием примут новичков, и угроза слияния не реализуется только в том случае, когда против её реализации будут возражать как раз эти самые “новички”:

$$\frac{1}{t} \leq \frac{1}{d+z+t} + 1. \tag{4.28}$$

Вторая угроза исходит от “представителей z”, если таковые существуют (таким образом, мы вновь рассуждаем “от противного”). А именно, они могли бы воссоединиться со второй группой, образовав однородную группу численности $t + z$. Представители t, опять же, заведомо возражать против такого слияния не станут, поэтому, в силу коалиционной устойчивости разбиения, возражать должны именно представители z:

$$\frac{1}{d+z}+1 \leq \frac{1}{z+t}. \tag{4.29}$$

Скомбинируем эти два неравенства, собрав все члены, кроме 1, в каждом из них с одной стороны:

$$\frac{1}{t}-\frac{1}{d+z+t} \leq 1 \leq \frac{1}{z+t}-\frac{1}{d+z}. \tag{4.30}$$

Исключая из этого двойного неравенства единицу, а затем меняя два из четырёх членов местами, приходим к неравенству

$$0<\frac{1}{t}-\frac{1}{z+t} \leq \frac{1}{d+z+t}-\frac{1}{d+z}<0, \tag{4.31}$$

несомненно, противоречивому. Выходом из этого противоречия, как и в похожем рассуждении выше, является отсутствие представителей z, то есть выполнение искомого равенства $z=0$. **Лемма** $B-4$ **доказана.**

Лемма $B-5$**.** В Случае I, когда $(d+z)(s+t) \neq 0$, с необходимостью должно быть $x = 0$, а точнее, сбалансированной группы быть не должно. (Тем самым, Случай I будет рассмотрен полностью.)

Доказательство. Как всегда, будем действовать от противного, предполагая наличие группы (x, x) с медианой $p \in (0,1)$, и одно за другим выписывая условия, препятствующие реализации различных коалиционных угроз. Прежде всего, сама группа (x, x) не разваливается, что, как и при доказательстве Теоремы $TEC-1$, даёт нам два неравенства:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2x} \geq p, \\ \frac{1}{2x} \geq 1-p.\end{gathered} \tag{4.32}$$

Запомним их, и рассмотрим возможное слияние представителей равносоставленной группы из большого города с первой группой. (Фактически, это означает воссоединение нестрого большего города.) Оно не меняет медианы первой группы, а значит, возражать будут именно представители равносоставленной группы. Поэтому

$$\frac{1}{2x}+p\leq\frac{1}{d+x}, \tag{4.33}$$

что автоматически гарантирует неравенство $x > d$. Значит, мы имеем $x > d > t$ и отсюда $\frac{1}{x} < \frac{1}{d}$, а также $\frac{1}{x} < \frac{1}{t}$.

Запишем теперь две цепочки неравенств:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2x+2t}+(1-p)\leq\frac{1}{2x+2t}+\frac{1}{2x}<\frac{1}{x}<\frac{1}{t},\\ \frac{1}{2x+2t}+p\leq\frac{1}{2x+2t}+\frac{1}{2x}<\frac{1}{x}<\frac{1}{d}.\end{aligned} \tag{4.34}$$

В этих цепочках использованы оба неравенства из (4.32).

Эти цепочки означают ни больше, ни меньше, нежели тот факт, что новая коалиция с шаблоном $(x+t, x+t)$ и той же самой медианой, p, представляет непарируемую коалиционную угрозу нашему разбиению.

В самом деле, она может быть получена путём объединения целиком равносоставленной группы (x, x), целиком второй группы $(0, t)$ и доли $t < d$ от первой группы, и вольна поместить медиану в ту же точку p, которая ранее служила медианой третьей группы.

Такой выбор медианы автоматически означает, что все представители бывшей третьей, равносоставленной группы, заведомо приветствуют это объединение; что же касается присоединившихся представителей первой и второй групп, то неравенства (4.34) в точности влекут строгое снижение их издержек в новой группе, по сравнению с их издержками в своих группах — второй и первой, соответственно.

Так как первая и вторая группа, по предположению Случая I, реально существуют ($d > 0$, $t > 0$), то единственным вариантом избежать противоречия служит вывод, что $x = 0$, и никакой равносоставленной группы в исходном разбиении не было. **Лемма $B-5$ доказана.**

Тем самым, Случай I разобран нами полностью. Для него установлено, что наше коалиционно устойчивое разбиение является “федерацией”.

Случай II. В устойчивом разбиении присутствует не более одной из перекошенных групп: $(d+z)(s+t)=0$.[19]

В этом случае понятно, что это группа 1 (в противном случае имеем $s<t$, следовательно, опять $a=x+s<x+t=b$, противоречие).

Таким образом, в Случае II при $a > b$ мы имеем дело с разбиением следующего простого вида: $\{(d,z);(x,x)\}$, где $d>z$. Медиана равносоставленной группы лежит где угодно, кроме левого конца отрезка: $p\in(0,1]$.

> **Лемма** $B-6$**.** В устойчивом разбиении в случае II либо $x=0$ (точнее, отсутствует равносоставленная группа, и тогда наше разбиение — "союз"), либо $z=0$ (и тогда наше разбиение имеет вид "дробного", причём тогда это — в точности третий вид из Теоремы $TEC-2$, так как все жители малого города должны входить в равносоставленную группу).

Доказательство: в данном случае достаточно рассмотреть две коалиционные угрозы (доказательство похоже на доказательство в предыдущих леммах). Сначала представим себе, что левая часть группы с шаблоном (x,x) присоединяется к группе с шаблоном (d,z).

Их примут "в охоточку", ибо медиана не изменится, а монетарные издержки снизятся. Значит, возражать будут именно "представители x". Соответствующее неравенство таково:

$$\frac{1}{2x}+p\le\frac{1}{d+x+z}. \tag{4.35}$$

В то же время, другая коалиционная угроза состоит в том, что будет сформирована "сборная" группа с шаблоном $(x+z,x+z)$, из всех "представителей z", из равносоставленной группы целиком, и подгруппы "представителей d" численностью z. Такая группа может оставить на месте медиану равносоставленной группы, в силу чего её участники не будут

[19] Понятно, что при $a=b$ это автоматически означает, что наше разбиение состоит из одной равносоставленной группы (b,b), и для этого случая всё доказано. Поэтому дальнейший анализ мы проводим для случая $a>b$. В этом случае хотя бы одна перекошенная группа должна присутствовать.

возражать против “подселения”. Также не будут возражать и “представители z”, так как транспортные издержки для них уменьшились, а монетарные тоже. Последнее утверждение следует из (4.35), гарантирующего между прочим, что $x > d + z$, а, значит, и $2x + 2z$ тем более больше, чем $d + z$.

Следовательно, чтобы данная угроза не прошла, должны быть против те представители d, которых привлекли в новую группу. Соответствующее неравенство гласит:

$$\frac{1}{d+z} \leq \frac{1}{2x+2z} + p. \tag{4.36}$$

Из неравенства (4.35) строим верхнюю оценку на p, а из последнего неравенства — нижнюю. Как результат, верхняя оценка на p должна быть не ниже нижней, что означает

$$\frac{1}{d+z} - \frac{1}{2x+2z} \leq \frac{1}{d+x+z} - \frac{1}{2x}. \tag{4.37}$$

Перегруппируя члены последнего неравенства, получаем цепочку неравенств, приводящую нас к противоречию:

$$0 < \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x+2z} \leq \frac{1}{d+x+z} - \frac{1}{d+z} < 0. \tag{4.38}$$

Из этого противоречия имеется ровно два выхода. Либо первой угрозы не может возникать, но тогда $x = 0$ (и не существует равносоставленной группы в разбиении), либо второй угрозы нет, а это возможно лишь при условии $z = 0$. Тем самым **Лемма $B - 6$, а вместе с ней и Теорема $TEC - 2$, доказаны полностью.**

4.3 Окончание анализа и графическое представление результатов

В силу Теоремы $TEC - 2$, для окончания анализа достаточно вывести условия коалиционной устойчивости для “союза”, для “федерации”, и для “дробного разбиения”. Эти условия, как мы увидим, не исчерпывают всех конфигураций параметров (a, b), следовательно, существуют “хронически неустойчивые” миры. Ещё более удивительным фактом, однако, является существование миров, в которых *единственным* устойчивым разбиением на футбольные клубы служит дробное!

4.3.1 Устойчивые разбиения при равной численности городов

Для начала, полностью разберёмся со случаем $a = b$. Нам надо выписать условия устойчивости двух разбиений: федерации $\{(b, 0); (0, b)\}$, и равносоставленного союза $\{(b, b)\}$. В последнем случае мы станем выяснять, будет ли равносоставленный союз устойчив хотя бы при одном выборе центра $p \in [0, 1]$. Начнём с федерации.

Ни одна однородная группа устойчивости федерации угрожать не может (монетарные издержки не ниже, чем в федерации, а центр тот же, что у соответствующего города-группы). Если же некоторая группа с шаблоном (x, y) при $xy \neq 0$ угрожает федерации, то угрожать будет также и группа-союз, (b, b), с тем же центром.

В самом деле, издержки в группе-союзе у всех не выше, чем в группе (x, y) (монетарные не увеличились, транспортные не поменялись), и так как представители (как правые, так и левые) группы (x, y) входят в федерацию с теми же издержками, что все их собратья по соответствующим городам, то для всех вообще жителей нашего симметричного мира формирование группы (b, b) строго желательно.

Далее, если группа (b, b) с несимметричной медианой угрожает устойчивости федерации, то и группа с медианой $p = \frac{1}{2}$ также будет угрожать: ведь в федерации издержки у *всех вообще* жителей мира одинаковы, поэтому Роллсианское выравнивание издержек внутри отклоняющейся группы не может нарушить её желание отклониться.

В итоге получаем, что федерация при $a = b$ устойчива в том и только том случае, когда ей не угрожает одна конкретная группа, а именно союз с симметричным центром. Следовательно, неравенство

$$\frac{1}{b} \leq \frac{1}{2b} + \frac{1}{2}, \tag{4.39}$$

эквивалентное неравенству $b \geq 1$, даёт необходимые и достаточные условия устойчивости федерации.

Союз же двух городов, (b, b), если подвергается угрозе при центре $p \in [0, 1]$ со стороны некоторой группы, то последняя, напротив, должна быть непременно однородной: в противном случае против её образования будут те из её участников, которые от её центра расположены не ближе, чем от p (для них не могли снизиться ни монетарные, ни транспортные издержки).

Если же однородная группа угрожает союзу, то ему угрожает и весь город, содержащий эту группу, целиком (от перехода к городу монетарные издержки снижаются, транспортные не меняются, а в союзе жители одного и того же города входят симметричным образом). Понятно, что тогда угрожать будет и город, который дальше от p (если p не середина отрезка). Следовательно, если союз городов с центром в $p \in [0, 1]$ устойчив, то и союз с центром в $p = \frac{1}{2}$ тоже устойчив, и условием, как необходимым, так и достаточным для устойчивости, является нежелание одного из "крыльев" союза отделяться:

$$\frac{1}{b} \geq \frac{1}{2b} + \frac{1}{2}, \tag{4.40}$$

условие, обратное к (4.40). Суммируем наши наблюдения.

> **Лемма $B - 7$.** В случае $a = b$ всегда существует устойчивое разбиение: при $a = b \leq 1$ это союз (с медианой, например, в точке $p = 1/2$), при $a = b \geq 1$ — федерация. При любых $a = b$ устойчивое разбиение совпадает с оптимальным.

Лемма $B - 7$ была доказана выше, до её формулировки.

Идиллия полностью разрушается при $a > b$ — для несимметричного биполярного мира. В дальнейшем мы предполагаем, что $a > b$, и переходим к анализу устойчивости каждого из трёх разбиений, выявленных в теореме $TEC - 2$. Начинаем с "союза".

4.3.2 Условия устойчивости союза и федерации при $a > b$

Условия устойчивости союза. Понятно, что в союзе все жители левого, большого города максимально довольны (у них минимально возможные общие издержки). Следовательно, угрозу устойчивости могут представлять только однородные группы, состоящие целиком из жителей маленького города. Если хотя бы одна из них в самом деле угрожает устойчивости, то угрожает устойчивости и весь правый город целиком. Таким образом, союз городов коалиционно устойчив в том и только том случае, когда правый город не хочет отсоединиться и создать свой собственный футбольный клуб.

Математически это означает выполнение следующего неравенства:

$$\frac{1}{a+b} + 1 \leq \frac{1}{b}. \tag{4.41}$$

Данное неравенство задаёт зону устойчивости союза в пространстве конфигураций параметров рассматриваемой нами задачи. Запомним это условие; после анализа остальных двух случаев мы изобразим его на итоговом рисунке 17.

Условия устойчивости федерации. Тут ситуация более сложная. Помимо условия "обратного" к написанному выше, говорящего о том, что федерация не хочет слиться в союз, имеются ещё дополнительные условия устойчивости. Мы их хотим выявить.

Для начала заметим, что если какая-то "перекошеная" группа вида (x, y) с $x < y$ представляет угрозу устойчивости федерации, то угрозу представит и группа с шаблоном (y, x). Действительно, во-первых, этот шаблон допустимый: $y < b < a$, также $x < y < b$. Во-вторых, если группа с шаблоном (x, y) представила угрозу, то, в частности,

$$\frac{1}{x+y} + 1 < \frac{1}{a}; \tag{4.42}$$

но тогда одновременно

$$\begin{gathered} \frac{1}{x+y} + 1 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}; \\ \frac{1}{x+y} < \frac{1}{a}, \end{gathered} \tag{4.43}$$

что и означает, что угрозу также представит и группа (y, x).

Но если угрозу представит какая-то группа с шаблоном (y, x), где $y > x$, то и *союз целиком* (a, b) представит угрозу: правые части (4.43) не поменялись, а левые могли только снизиться. Тем самым, если союз как угроза исключён, то угрожать устойчивости может *только* сбалансированная группа (x, x).

Аналогичные соображения позволяют сделать вывод о том, что если сбалансированная группа и впрямь угрожает устойчивости федерации, то и “максимальная” сбалансированная группа (b, b) представит такую угрозу (при таком же выборе центра).

Итак, в дополнение к неравенству

$$\frac{1}{a+b} + 1 \geq \frac{1}{b}, \tag{4.44}$$

обратному по смыслу неравенству (4.41), надо потребовать, чтобы не существовало такого $p \in (0, 1)$, при котором группа с шаблоном (b, b) и медианой в точке p захотела бы выделиться в новый клуб. Последнее означает, что ни при каком p не выполняются два следующих неравенства *одновременно*:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2b} + p < \frac{1}{a}, \\ \frac{1}{2b} + 1 - p < \frac{1}{b}. \end{gathered} \tag{4.45}$$

Как и раньше в аналогичной ситуации, оценим p с двух сторон:

$$1 - \frac{1}{2b} < p < \frac{1}{a} - \frac{1}{2b}. \tag{4.46}$$

Теперь немножко “поработаем” с неравенством (4.44). А именно, умножим обе его части на $b(a + b)$ и сократим на слагаемое b в обеих частях; мы получим неравенство $b(a + b) \geq a$, или $b^2 \geq a(1 - b)$, то есть

$$a \leq \frac{b^2}{1-b}. \tag{4.47}$$

Теперь вспомним, что мы работаем только в нижней половине положительного квадранта переменных (a, b), то есть у нас $a \geq b$. Следовательно, тем более будет выполнено и неравенство $b \leq \dfrac{b^2}{1-b}$, которое после сокращения на b и пары манёвров превратится в неравенство $b \geq 1/2$.

Из этого мы делаем вывод, что левая часть неравенства (4.46) всегда неотрицательна и строго меньше единицы. Поэтому *неразрешимость* этого неравенства относительно $p \in [0,1]$ формально эквивалентна тому, что верхняя граница на p из него не превосходит нижнюю:

$$1 - \frac{1}{2b} \geq \frac{1}{a} - \frac{1}{2b}, \tag{4.48}$$

что, в свою очередь, сводится просто к неравенству $a \geq 1$. Таким образом, исключение обеих угроз устойчивости эквивалентно выполнению одновременно неравенств (4.44) и $a \geq 1$.

Суммируя, мы получаем необходимые и достаточные условия устойчивости федерации в биполярном мире с параметрами $a > b$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} &\leq \frac{1}{a+b} + 1, \\ a &\geq 1. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Эти два неравенства задают зону устойчивости федерации в фазовом пространстве нашей задачи. Зона устойчивости федерации будет также изображена ниже на рисунке 17 (после анализа устойчивости дробного разбиения).

4.3.3 Устойчивость "дробного" разбиения

Переходим к анализу устойчивости последнего, самого трудного случая, а именно *дробного* разбиения $\{(a-b,0);(b,b)\}$, где вторая (равносоставленная) группа назначает центр в точке $p \in (0,1]$. Мы будем исследовать условия, при которых существует выбор центра p, гарантирующий устойчивость дробному разбиению.

Прежде всего, обозначим за $c = a - b$ разницу в численности городов, так что изучаемое разбиение $\pi = \{(c,0);(b,b)\}$.

Лемма $B-8$**.** Если дробное разбиение π устойчиво, то $c < b$.

Доказательство: В противном случае $a = b + c \geq 2b$, и сразу отделяется группа, состоящая из всех жителей большого города (то есть, большой город захочет воссоединиться). Пояснение:

$$\frac{1}{2b} + p > \frac{1}{2b} \geq \frac{1}{a}, \tag{4.50}$$

из чего следует, что "представители b" в равносоставленной группе исходного дробного разбиения выиграют от воссоединения, а остальные выиграют и подавно: медиана останется в их городе. Следовательно, должно быть выполнено неравенство $2b > a = b + c$, откуда $c < b$. **Лемма $B-8$ доказана.**

Лемма $B-9$. Если дробное разбиение π устойчиво, то $a \leq 1$.

Доказательство: рассмотрим две возможные угрозы устойчивости нашему дробному разбиению π: только что рассмотренную, а также такую, при которой отделиться думает правое крыло равносоставленной группы. Устойчивость разбиения π тогда означает, что обе угрозы не реализуются, то есть

$$\begin{gathered} \frac{1}{a} \geq \frac{1}{2b} + p, \\ \frac{1}{b} \geq \frac{1}{2b} + 1 - p, \end{gathered} \tag{4.51}$$

откуда суммированием левых и правых частей получаем

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{1}{b} + 1, \tag{4.52}$$

что после сокращения и переворачивания дроби и даёт требуемое неравенство. **Лемма $B-9$ доказана.**

Сопоставляя неравенство $a \leq 1$ с полученным ранее неравенством $c < b$ и равенством $b + c = a$, делаем вывод, что $c < \frac{1}{2}$. Тогда $\frac{1}{2c} > 1$, и, следовательно,

$$\frac{1}{c} > \frac{1}{2c} + 1. \tag{4.53}$$

Запомним этот факт.

Дальнейший анализ мы будем проводить системно. Рассмотрим *любую* коалицию, предположительно угрожающую устойчивости нашего дробного разбиения. Покажем, что тогда угрожать устойчивости будет также одна из трёх конкретных коалиций. Тем самым, записав условия устойчивости дробного разбиения против трёх конкретных коалиционных шаблонов, мы запишем и условия полной коалиционной устойчивости исследуемого разбиения. Затем мы их значительно упростим, и изобразим также на итоговом рисунке 17 ниже.

Начнём с угроз со стороны *сбалансированных* групп.

> **Лемма $B-10$.** Если коалиция $S=(x,x)$ с центром в точке $q\in[0,1]$ угрожает устойчивости разбиения π, то среди представителей левого её крыла нет жителей группы (b,b) разбиения π.

Доказательство: в самом деле, если предположить противное, то в S будут представители группы (b,b) как слева, так и справа (справа все такие, иных просто нет). Но тогда те из них, которые расположены от центра q группы S не ближе, чем от p, не будут участвовать "в авантюре": для них и центр не ближе, и масса группы не больше (ибо очевидно $x\leq b$), то есть как монетарная, так и транспортная составляющие издержек не снижаются. Это противоречит исходному предположению о том, что коалиция S представляет угрозу для π. **Лемма $B-10$ доказана.**

Значит, все левые жители коалиции S являются представителями группы $(c,0)$ исходного разбиения. В этом случае, если исходно было $x<c$, то мы включим оставшихся жителей группы $(c,0)$ в коалицию S слева, доведём массу правой части коалиции S тоже до c, и оставим её центр на месте, в исходной точке q.

Я утверждаю (и это ещё один полезный общий приём при анализе коалиционной устойчивости в постановке с конечным числом городов!), что новая образованная коалиция $\tilde{S}$ также угрожает устойчивости нашего разбиения π.

В самом деле, (А) вновь включённые в $\tilde{S}$ жители нашего биполярного мира несли такие же издержки в исходном разбиении π, как и их собратья, изначально вошедшие в коалицию S; (Б) транспортные издержки в новой коалиции $\tilde{S}$ ни у кого не поменялись по сравнению с S; наконец, (В) монетарные издержки всех членов $\tilde{S}$ снизились по сравнению с монетарными издержками в S. Следовательно, новые члены коалиции $\tilde{S}$ тоже улучшат своё положение по сравнению с π.

Таким образом, если исходная коалиция S представляла угрозу, то угрозу будет представлять и коалиция (c, c) с тем же центром q, составленная из жителей группы $(c, 0)$ целиком, и стольких же представителей правого крыла группы (b, b), набранных произвольным образом.

Более того, мы утверждаем, что тогда представит угрозу та же коалиция (c, c), но с центром в точке $q = 1$! В самом деле, правым жителям стало только лучше, а для левых, в силу неравенства (4.53), удвоение группы компенсирует даже увеличение транспортных издержек на максимально возможное расстояние 1.

Следовательно, если хоть какая-то равносоставленная коалиция предъявляет угрозу устойчивости разбиения π, то такую угрозу предъявит также и конкретная коалиция (c, c) с центром, выбранном в правом городе.

Но тогда, наконец, и коалиция (c, b) тоже представит угрозу! Ведь добавление всех остальных жителей правого города не меняет медиану (она обязана быть в точке $q = 1$ как и прежде), но снижает монетарные издержки всех участников.

Осталось заметить, что (как и выше в аналогичном рассуждении) нововключённые жители правого города несли такие же издержки в разбиении π, как и их собраться, изначально попавшие в коалицию с шаблоном (c, c).

Более того, верен следующий результат.

Лемма $B - 11$**.** Если существует коалиция S вида (x, y), в которой $x \leq y$, представляющая угрозу устойчивости разбиению π, то обязательно коалиция (c, b) также угрожает π.[20]

Таким образом, записав условия на то, что описанная в примечании коалиция (c, b) *не* угрожает устойчивости исходного разбиения, мы автоматически исключим угрозы со стороны любых коалиций, кроме скошенных в сторону левого города, то есть вида (x, y) при $x > y$.

[20]Надо понимать, что, говоря о коалиции (c, b), мы имеем в виду совершенно конкретную коалицию, состоящую из всех жителей исходной группы $(c, 0)$ разбиения π, а также из правой половины группы (b, b). Помимо такой коалиции, существует множество прочих реализаций коалиционного шаблона (c, b), которыми мы не интересуемся.

Доказательство леммы $B - 11$**.** Для равносоставленных коалиций это уже было показано выше. Поэтому пускай S с шаблоном (x, y) — угрожающая коалиция при $x < y$, в частности, с центром в точке 1.

Так как $y \leq b$, то масса $x + y$ группы S меньше массы $2b$ группы (b, b) исходного дробного разбиения π. Это означает, что среди представителей x в коалиции S нет никого из группы (b, b): иначе им в S было бы и ехать не ближе, и платить больше, чем в π.

Тогда коалиция S составлена целиком из жителей группы $(c, 0)$ в её левой части. Значит, её расширение до коалиции (c, b) заведомо снижает монетарные издержки и не меняет транспортных издержек всех представителей её исходного состава, а так как вновь прибывшие её участники и слева, и справа имели те же издержки в разбиении π, что и их коллеги из S, то им всем тоже станет лучше в коалиции (c, b). Тем самым, наша коалиция (c, b) также представит угрозу. **Лемма** $B - 11$ **доказана.**

Осталось разобраться с угрозами вида $S = (x, y)$ при $x > y$.

> **Лемма** $B - 12$**.** Если хоть какая-то коалиция S шаблона (x, y) при $x > y$ угрожает устойчивости разбиения π, то будет угрожает устойчивости π также и некоторая коалиция S шаблона (a, y), целиком включающая *весь* левый город.

Доказательство. Рассмотрим любую такую угрожающую группу S. Её центр q расположен в левом городе: $q = 0$. Если среди представителей x встречаются не все жители группы $(c, 0)$ исходного разбиения, то включим их без промедления: группа расширилась, медиана не изменилась, она там же, где живут все представители группы $(c, 0)$, поэтому новая коалиция также будет представлять угрозу — издержки любого её участника ниже, чем в исходном разбиении.

Поэтому можно без ограничения общности считать, что в самой коалиции S уже живёт целиком группа $(c, 0)$. Так как сама группа $(c, 0)$ не может угрожать порождающему её исходному разбиению π, то либо $y > 0$, либо среди представителей x есть жители группы (b, b) разбиения π (либо одновременно).

Более того, я утверждаю, что последние, то есть жители группы (b,b) из большого города, в коалиции S присутствуют непременно. В силу сказанного выше, это утверждение достаточно доказать в предположении $y>0$.

Рассуждаем от противного. Если жителей левого города из группы (b,b) исходного разбиения в коалиции S нет, то последняя имеет шаблон (c,y). Вспомним, что по условию $c>y$, поэтому размер коалиции S оценивается как $c+y<2c<2b$. Кроме того, её медиана лежит в левом городе. Поэтому имеющиеся в наличии (sic!) представители правого города в коалиции S воспротивятся её образованию: для них стали не ниже, по сравнению с группой (b,b), как монетарные, так и транспортные издержки.

Таким образом, угрожающая коалиция обязательно содержит "левогородних" представителей группы (b,b). Но тогда применим уже использованный выше приём, и включим *всех* левогородних представителей группы (b,b) в коалицию S — новообразованная коалиция по-прежнему будет представлять угрозу устойчивости π! **Лемма $B-12$ доказана.**

Новообразованную коалицию с шаблоном (a,y) переобозначим вновь за S. Осталось рассмотреть два случая: когда $y=0$ (и тогда угрожает устойчивости рассматриваемого дробного разбиения просто отдельно взятый левый город), и когда $y>0$.

Во втором случае, пользуясь всё тем же эффективным приёмом, мы включаем в S всех вообще жителей правого города. Таким образом этот последний случай сводится к тому, что союз городов, тотальная коалиция всех жителей биполярного мира, также должна представлять угрозу устойчивости π.

Суммируем наши наблюдения в виде следующей леммы.

Лемма $B-13$. Если дробное разбиение $\pi=\{(c,0);(b,b)\}$, вместе с выбранной медианой $p\in[0,1]$ группы (b,b), не является устойчивым, то угрозу обязательно представляет одна из вполне конкретных трёх коалиций: (c,b), $(a,0)$ или (a,b) (союз). Поэтому верно и обратное: если ни одна из указанных трёх коалиций не угрожает устойчивости разбиения π, то наше дробное разбиение является коалиционно устойчивым.

Лемма $B - 13$ **была доказана выше, до её формулировки.**

Следующим шагом мы запишем условия устойчивости разбиения π против этих трёх коалиций в форме неравенств относительно переменных (a, b, p) (ниже, как и раньше, мы используем обозначение $c = a - b$).

Начнём с коалиции (c, b). Выше уже было показано, что при соблюдении условия (4.53) левые участники коалиции заведомо улучшают своё положение в ней, по сравнению с π.

Напомним это: $\dfrac{1}{c} > \dfrac{1}{2c} + 1 > \dfrac{1}{c+b} + 1$. Поэтому устойчивость разбиения π против угрозы со стороны коалиции (c, b) эквивалентна отказу "правых" участников коалиции (c, b) от "авантюры", то есть

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{2b} + 1 - p, \tag{4.54}$$

что эквивалентно неравенству $1 - p \leq \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{2b}$.

Следующая коалиция, $(a, 0)$, не представит угрозы устойчивости разбиению π тогда и только тогда, когда против её образования будут возражать либо её представители из группы $(c, 0)$, либо её представители из группы (b, b). Первое невозможно (ибо для представителей группы $(c, 0)$ медиана не поменялась, а масса группы увеличилась!), так что рассматриваемая коалиция S шаблона $(a, 0)$ не угрожает устойчивости π в том и только том случае, когда её представители из группы (b, b) возражают, то есть:

$$\frac{1}{a} \geq \frac{1}{2b} + p, \tag{4.55}$$

что эквивалентно неравенству $p \leq \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{2b}$.

Наконец, третья угроза — со стороны союза N, или шаблона (a, b) — не реализуется в том и только том случае, когда представители правого города возражают против её осуществления (ибо для всех левых жителей союз вообще доставляет безусловный минимум издержек). Поэтому третья угроза не реализуется в том и только том случае, когда

$$\frac{1}{a+b} + 1 \geq \frac{1}{2b} + 1 - p, \tag{4.56}$$

что эквивалентно выполнению неравенства $p \geq \dfrac{1}{2b} - \dfrac{1}{a+b}$.

Устойчивость разбиения $\pi = \{(c,0);(b,b)\}$ с медианой группы (b,b), выбранной в точке $p \in [0,1]$, тем самым эквивалентна трём неравенствам (в дополнение к условиям $a \leq 1$ и $2b > a$, которые были получены ранее):

$$1 - p \leq \frac{1}{a} - \frac{1}{2b},$$

$$p \leq \frac{1}{a} - \frac{1}{2b}, \tag{4.57}$$

$$p \geq \frac{1}{2b} - \frac{1}{a+b}.$$

Однако для завершения исследования надо избавиться от p, охарактеризовав область параметров (a,b), внутри которой всегда можно *выбрать* $p \in [0,1]$ таким образом, чтобы сделать дробное разбиение $\pi = \{(c,0);(b,b)\}$ с центром группы (b,b) в выбранной точке p устойчивым.

Из первых двух неравенств следует, что необходимым условием устойчивости является выполнение неравенства

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{2b} \geq \frac{1}{2}, \tag{4.58}$$

которое усиливает первое полученное ранее неравенство $2b > a$.

Кроме того, если верно даже неравенство $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{2b} \geq 1$, усиливающее как первое, так и второе полученное ранее неравенство $a \leq 1$, то первые два неравенства выполнены автоматически при любом $p \in [0,1]$, и существование требуемого p эквивалентно неравенству $\dfrac{1}{2b} - \dfrac{1}{a+b} \leq 1$.

А вот если $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{2b} \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right)$, то появляется новое необходимое условие, состоящее в том, что

$$\frac{1}{2b} - \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{a} - \frac{1}{2b}. \tag{4.59}$$

Более того, в этом втором случае, вкупе с требованием $a \leq 1$, условие (4.59) является также достаточным. Действительно, просто положим $p = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{2b}$ в этом случае. Все три неравенства (4.57) тогда с очевидностью выполнены (первое в силу $p = \frac{1}{a} - \frac{1}{2b} \geq \frac{1}{2}$, значит $1 - p \leq p$), $a \leq 1$ мы потребовали отдельно, и $2b > a$ автоматически, опять же, в силу $\frac{1}{a} - \frac{1}{2b} \geq \frac{1}{2} > 0$.

Суммируя, получаем окончательный результат:

Теорема $TEC-3$**.** Дробное разбиение $\pi = \{(c,0);(b,b)\}$ устойчиво при хотя бы одном $p \in [0,1]$ в том и только том случае, когда либо

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{2b} \geq 1, \qquad \frac{1}{2b} - \frac{1}{a+b} \leq 1, \tag{4.60}$$

либо

$$a \leq 1, \qquad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{a} - \frac{1}{2b} < 1, \qquad \frac{1}{2b} - \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{a} - \frac{1}{2b}. \tag{4.61}$$

Теперь можно изобразить полученные результаты на рисунке 17. Интересующая нас область параметров — диагональ $a = b$ и всё ниже неё (ось абсцисс является осью параметра a, ось ординат отвечает за параметр b). На диагонали всё понятно: полуинтервал от $(0,0)$ до $(1,1)$ включительно определяет устойчивость союза, причём выбор центра до точки $(0.5, 0.5)$ произвольный, а от $(0.5, 0.5)$ до $(1,1)$ всё более сужается, вплоть до единственной допустимой точки 0.5 при $a = b = 1$; начиная от точки $(1,1)$ и далее направо-вверх устойчивой будет федерация. Здесь всё очевидно, и решения ЗМР в точности то же.

А вот строго ниже диагонали ситуация куда веселее. Прежде всего, в оптимуме (то есть в решении ЗМР) по-прежнему всё просто: при $b \geq 1$ надо образовать федерацию, при $b \leq 1$ — союз. При этом дробного разбиения не следует образовывать ни при каких a, b.

Любопытно, как это соотносится с коалиционной устойчивостью разбиений, к изображению зон которой мы и приступаем.

Начнём с союза. Устойчивость последнего равносильна выполнению требования $\dfrac{1}{a+b}+1 \le \dfrac{1}{b}$, и учитывая $a > b$, реально имеет значение часть гиперболы $\dfrac{1}{a+b}+1 = \dfrac{1}{b}$, выпуклая вверх и соединяющая точку $(0.5, 0.5)$ с точкой $\approx (1, 0.62)$, где 0.62 это на самом деле $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, ну и далее простирающаяся до бесконечности, прижимаясь к лучу $b = 1$.

Зона устойчивости федерации расположена направо от $a = 1$ и наверх от только что описанной кривой.

Что же касается зоны устойчивости дробного разбиения, то последняя частично пересекается с зоной устойчивости союза, но частично (Sic!) покрывает те пары (a, b), при которых ни союз, ни федерация устойчивыми не являются. Аккуратный анализ условий (4.60) и (4.61) позволяет заключить, что зона устойчивости дробного разбиения ограничена двумя кусками прямых линий и двумя кусками кривых линий, выпуклых при этом в разные стороны!

Конкретно, сверху эта зона ограничена линией $a = b$ (при этом на самой линии $a = b$ она естественным образом становится зоной устойчивости союза двух одинаковых городов); снизу эту зону ограничивают целых три линии. Сначала это — кусок гиперболы $\dfrac{1}{2b} - \dfrac{1}{a+b} \le 1$, вогнутый (то есть выпуклый вверх!), касающийся диагонали и соединяющий точку $(0, 0)$ с точкой $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}, \dfrac{\sqrt{5}}{2} - 1\right) \approx (0.19, 0.12)$; далее это будет кусок прямой $b \approx 0.62a$ (это — прямая $\dfrac{1}{2b} - \dfrac{1}{a+b} = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{2b}$ из условий (4.61)) до точки $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \sqrt{5}-2\right) \approx (0.38, 0.24)$; и, наконец, это кусок гиперболы $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{2b} = \dfrac{1}{2}$, выпуклый и соединяющий точку $\approx (0.38, 0.24)$ с точкой $(1, 1)$.

Каждая зона подписана названиями тех разбиений, которые в ней устойчивы. Зона хронической неустойчивости помечена словом "НЕТ". В этой зоне не получается выбрать такого значения p для медианы равносоставленной группы разбиения π, чтобы парировать все три потенциальные угрозы. При одном выборе p одна угроза реализуется, при другом — другая. Я не стал приводить здесь подробный анализ зоны "НЕТ", чтобы не перегружать и так сложно читаемый Рисунок 17.

Заметим (в завершение нашего анализа), что зона устойчивости союза значительно меньше зоны *оптимальности* союза (и полностью содержится в последней). Это проявляются положительные экстерналии от объединения в союз: желая отделиться, жители b не учитывают, как они помогают жителям большого города экономить монетарные издержки.

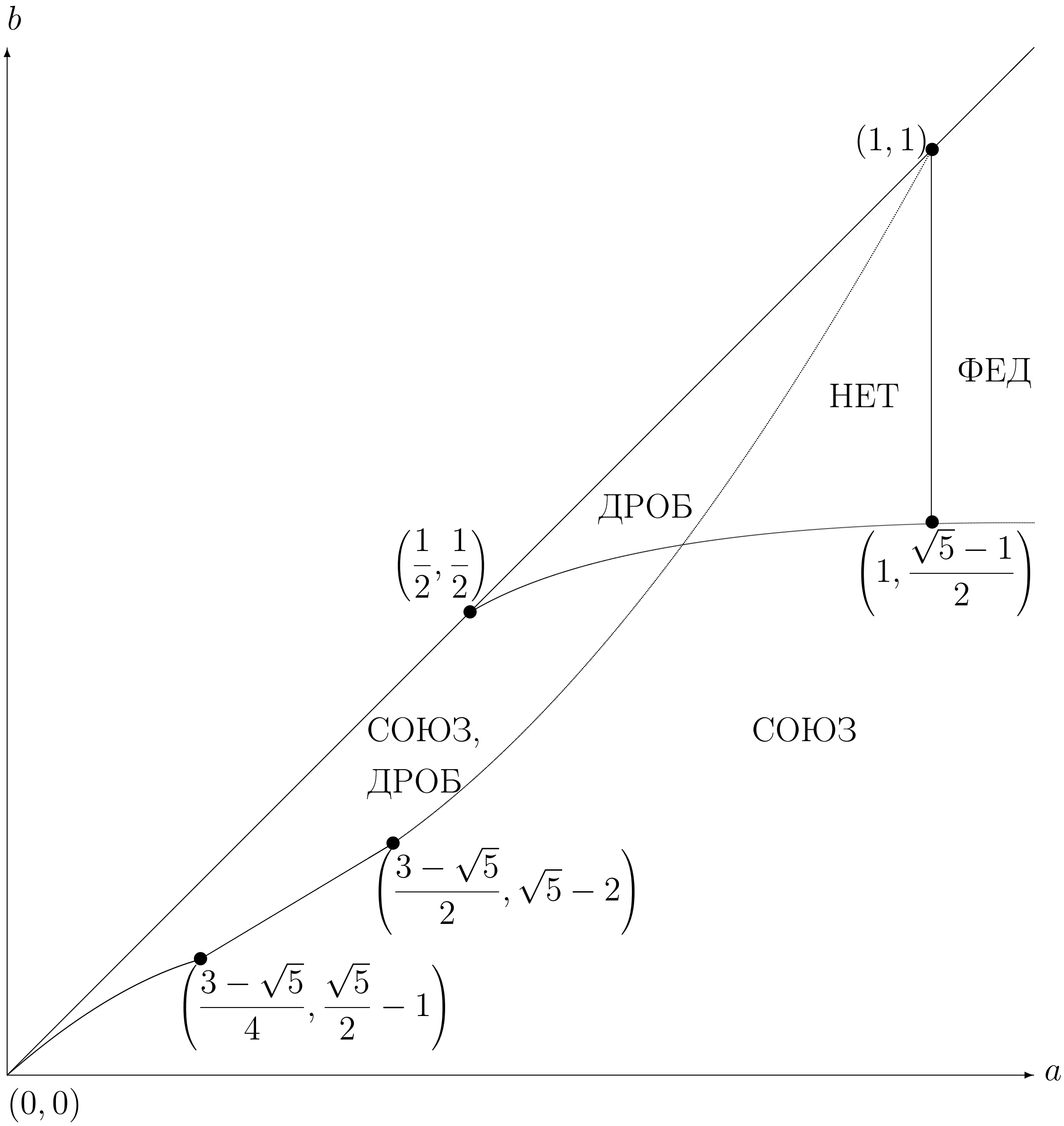

Рисунок 17. Зоны устойчивости биполярных миров.

На этом я завершаю изложение основных результатов диссертационного исследования. В следующей главе будет рассказано про то, какие из направлений вне “основного кубика-рубика” представляются мне (и моим коллегам) перспективными, и какие результаты в этих направлениях уже достигнуты. Также в заключительной главе я напомню вкратце обо всём, что было рассказано и доказано выше.

Глава 5

Заключение

В завершающей главе, помимо описания (в открывающем разделе 5.1) полученных в работе результатов, приводятся проспекты дальнейших научных исследований в нашей области.

В частности, в разделе 5.2 представлен наиболее перспективный, с точки зрения автора, подход, связанный с анализом *метрических неатомарных игр*. Примерами таких игр могут служить модели городского размещения, модели голосования, транспортные модели и вообще любые конфликты, протекающие в больших сообществах: как правило, в таких случаях всегда можно указать параметры различия, по отношению к которым ситуация логично предстаёт в форме метрической неатомарной игры. Ниже будет намечен системный подход к выработке концепций решения для таких игр, связанных с устойчивым формированием в них групповых структур.

Раздел 5.3 содержит несколько разрозненных сюжетов, так или иначе связанных с основным материалом диссертации, но не вошедших в предыдущие главы по причине “выпадания” из выбранной во введении к работе классификации постановок решаемых в диссертации задач.

Раздел 5.4 содержит благодарности всем людям, которые мне помогали и поддерживали меня в процессе работы над диссертацией. Без помощи друзей, коллег и близких людей я бы никогда не смог завершить этот четырёхлетний научный марафон. Я старался в завершающем разделе никого не забыть, но, конечно же, мне этого сделать не удалось!

5.1 Описание полученных в работе результатов

В настоящем диссертационном исследовании ставилась задача многомерного размещения, то есть задача об оптимальном делении заданного в многомерном пространстве “облака спроса” на несколько кластеров. Специфика конкретной постановки состоит в том, что количество кластеров исходно не задано, и является оптимизируемой целочисленной переменной, а стоимость поддержания кластера фиксирована.

Помимо издержек на содержание одного кластера, в целевой функционал входят суммарные персонифицированные издержки всех жителей данного территориального кластера, связанные с удалённостью от центров кластеров; адреса центров в пространстве также оптимизируются в задаче. При этом речь может идти как о физическом перемещении — задано расселение на прямой или на плоскости, требуется провести районирование — так и об асбтрактном “пространстве вкусов”, когда физического перемещения не происходит, а речь идёт о выборе характеристик общественного блага и издержек неудовлетворённости потребителей выбранными разновидностями.

Фокус исследования, однако, перемещается с методов оптимального решения задачи многомерного размещения на анализ угроз устойчивости допустимым решениям со стороны потребителей, причём как отдельных (“миграционные угрозы”), так и целых групп (“коалиционноые угрозы устойчивости”). Свойства устойчивых решений - их характеризация, в том числе даже вопрос их существования - зависят от того, какие схемы перераспределения издержек доступны жителям территории.

5.1.1 Результаты в дискретной (конечной) модели

Первые две главы работы посвящены анализу конечных расселений, или распределений спроса — когда изначально задаётся набор адресов (физических, или “вкусовых” для конечного числа потребителей. При этом в первой главе изучаются миграционные угрозы устойчивости, а во второй главе - угрозы коалиционной природы.

Помимо формулировки и обсуждения основной оптимизационной проблемы, в первой главе получены следующие результаты относительно миграционно устойчивых решений задачи многомерного размещения на прямой:

(А) теорема об интервальности устойчивых решений;

(Б) контрпример к гипотезе существования устойчивого разбиения для принципа выравнивания платежей;

(В) теорема существования для равномерного расселения;

(Г) контрпример к гипотезе существования устойчивого разбиения для принципа равнодолевого участия с центральной медианой;

(Д) теорема существования устойчивого разбиения для принципа равнодолевого участия с “минимальным насилием при миграции”.

В последнем случае для доказательства была применена техника потенциальных игр. Контрпримеры строились во многом "в ручную на основе скрупулёзного дискретного перебора.

Во второй главе установлены следующие факты про коалиционно устойчивые разбиения на группы, в основном на прямой (кроме самого первого результата):

(А) для принципа выравнивания платежей установлен универсальный факт существования решения (он следует из более общих результатов, полученных в работе [43]);

(Б) на прямой, однако, устойчивое разбиение относительно этого принципа может быть неинтервальным (приведён простой пример);

(В) для принципа побочных платежей выведено несколько удобных свойств любых устойчивых разбиений;

(Г) приведено несколько контрпримеров к гипотезе существования устойчивого разбиения для принципа равнодолевого участия с теми или иными его уточнениями на прямой;

(Д) сформулирован целый ряд утверждений про свойства интервальности устойчивых разбиений на прямой, тоже для принципа равнодолевого участия, а также доказаны теоремы существования для специфических классов расселений на прямой;

(Е) приведён универсальный контрпример к гипотезе существования устойчивого разбиения для принципа равнодолевого участия, годный для *любых* уточнений этой постановки.

В последнем случае доказательство очень трудное, и использует новый приём анализа одномерных расселений, предложенный автором и использованный им при доказательстве других утверждений в работе, например, теоремы характеризации устойчивых решений в главе 4 (см. ниже).

5.1.2 Результаты в континуальной модели

В главах 3 и 4 фокус внимания перемещается на континуальные расселения, то есть на задачи с большим числом участников.

В главе 3 рассматриваются непрерывные расселения с плотностью. После постановки континуальной задачи многомерного размещения в открывающем разделе, в разделе 3.2 устанавливается теорема о существовании миграционно устойчивого разбиения на заданное число групп для для любого расселения на отрезке прямой, обладающего непрерывной и положительной плотностью. При доказательстве используется один из центральных результатов всей матэкономики — лемма Никайдо-Гейла-Дебрэ, лежащая в фундаменте теоремы существования общего равновесия Вальраса.

Далее в этой главе получен исторически первый результат для двумерных расселений — вычислен зазор между оптимальностью и устойчивостью решений для равномерного расселения на плоскости с принципом побочных платежей. В доказательстве применена теорема Фубини о перестановочности при вычислении многомерных интегралов. Помимо этого, установлен следующий неожиданный факт: *единственной* коалиционно устойчивой схемой, лежащей в минимальном ядре, является схема выравнивания платежей! Доказательство базируется на применении техники из теории меры.

В завершающем разделе третьей главы к вопросам теоретико-игровой устойчивости решений задачи о многомерном размещении предлагается систематический подход. (Он кажется весьма плодотворным, и поэтому ещё встретится ниже, в следующем разделе!) Все виды угроз подвергаются классификации в соответствии с некоторыми естественными положениями о том, что именно разрешается и что не разрешается отделяющимся (то есть угрожающим устойчивости решений) коалициям. Все введённые новые концепции, вместе со “старыми”, изучавшимися в предыдущих главах, тестируются на примере равномерного расселения на отрезке.

Глава 4 содержит постановку задачи многомерного размещения континуального населения по конечному числу “адресов”, то есть точек пространства. Видоизменению подлежат многие понятия и принципы из всех предыдущих глав; они представлены в первом разделе главы 4. Второй и третий разделы главы посвящены теореме о полной характеризации свойств коалиционной устойчивости биполярного мира, то есть системы из двух точек спроса с произвольными массами, сосредоточенными в них.

На удивление, решаемая задача оказывается отнюдь не простой — полное доказательство теоремы характеризации занимает около 25-ти страниц текста работы (и проверку выполнения в районе сотни различных неравенств!).

В завершение раздела, посвящённого описанию результатов диссертационного исследования, хочу отметить, что большое количество теорем и новых теорий автора в данной области не вошли в работу, по причине их “свежести” (то есть неопубликованности), либо невозможности логически связать их с общей линией, выбранной здесь. О некоторых из этих “выпавших” результатов и теорий рассказано ниже.

5.2 Принципы устойчивости в континуальных сюжетах

Начнём с самого перспективного, на взгляд автора, направления будущих научных исследований. Он касается общего подхода к теоретико-игровым угрозам в континуальных играх.

Уже в разделе 3.4 было понятно, что в непрерывном случае разговор об угрозах устойчивости принимает неожиданный оборот: существует подход, как бы связывающий все угрозы устойчивости воедино. Описанию этого подхода в более общей ситуации, нежели рассматренной выше в работе (в частности, покидая “равномерный линейный мир”), мы и посвятим настоящий раздел.

Фактически, новые концепции касаются любых однозначных принципов распределения издержек. В частности, не только миграционные угрозы будут связаны “мостиками” с коалиционными, но и принцип выравнивания платежей, принцип равнодолевого участия и все прочие *однозначные* принципы распределения издержек будут исследоваться универсальным образом в этой новой науке. Если сравнить с физикой, то ниже происходит “великое объединение теорий экономики общественного сектора” (не путать с “общей теорией всего”!).

Существует всего несколько работ, в которых обсуждаются близкие вещи (помимо моих с соавторами). Многие из них были упомянуты в обзоре литературы, представленном во введении. Конечно, вопросы правил отделения и объединения были предметом весьма жарких дискуссий и многих гуманитарных текстов, но на строгом математическом уровне эта наука пока не записана. И даже грядущий раздел лишь немножко приоткрывает дверь в огромную вселенную. После освобождения от своих диссертационных хлопот я буду (вместе с соавторами) работать над статьёй или даже книгой с примерным названием “Metric nonatomic games: rules and principles of stable group formation processes”, которая обобщит и разовьёт эти идеи.

Критически важным для понимания различия конечных игр от неатомических является соображение про “незаметные” перемещения отдельных игроков в континуальных постановках. Действительно, рассмотрим конечную аппроксимацию непрерывной задачи. Сколь бы точной она ни была, всё-таки перемещение одного игрока влияет как на размер группы, так и на расположение медианы.

В силу этого для постановок с конечным множеством игроков даже на прямой имеются контрпримеры к существованию *миграционно* устойчивых разбиений (см. выше в главе 1), а для континуального расселения на отрезке той же прямой (как мы видели в главе 3) верна общая теорема существования!

Объяснение такому контрасту следующее: в пределе (при переходе к континуальной постановке) влияние игрока зануляется, и это — шанс на существование равновесия. Кроме того, в континуальном случае человечекточка не может сформировать свою собственную юрисдикцию (мера ноль – и бесконечные монетарные издержки!).

Поэтому при поиске миграционно устойчивых решений нужно их искать при любом заданном количестве групп: перемещение игроков между группами не влияет на их (групп) общее число.

5.2.1 Виды угроз устойчивости и концепций решения

Целью данного раздела является попытка классификации и связывания воедино в логический пучок всех концепций устойчивости, которые нам могут прийти на ум. Эта попытка не претендует на окончательность; напротив, сокрее речь идёт о первом *опыте* такой классификации.

Конкретно, предлагается следующий подход с классификаторами.

(А) Разрешается ли при миграции (помимо создания новой структуры — эта возможность у мигрирующей коалиции подразумевается нами всегда) присоединяться к одной из существующих групп разбиения без спроса у последней (да/нет)?

(Б) Каков максимальный размер разрешённых к перемещению коалиций (отдельные игроки/любое подмножество меры нуль, любое подмножество достаточно малой меры, любое вообще измеримое подмножество $N = X$)?

В третьей опции второго классификатора под "достаточно малой мерой" понимается такая, которая существенно меньше размера самой маленькой группы разбиения, а также того размера, при котором может быть уже выгодно образовать собственную структуру. Соответственно, для трёх из четырёх "значений" классификатора (Б) количество групп меняться не может. Это означает, что для них классификатор (А) должен принимать значение "да" — в противном случае они не сдвинутся с места, и никакой угрозы устойчивости не возникнет.[1]

В соответствии с такими классификаторами, возникает следующий список концепций устойчивости данного разбиения, в котором некоторые концепции даже выпадают из наших классификаторов (в них ограничиваются

[1]Перечитав фразу, я понял, что это утверждение не вполне верное. Но Бог с ним, всё равно это только начало!

возможности по образованию новых структур, либо наоборот разрешается присоединяться к различным из существующих групп). Список этот продолжает и подытоживает тему двух наших статей, [44] и [46].

(i) Обычная миграционная устойчивость: разбиение таково, что никто не хочет сменить группу (и это эквивалентно тому, что никакое подмножество меры нуль не хочет произвольным образом перебежать между группами);

(ii) Локальная устойчивость: существует такое ε, что никакая коалиция размера, не превосходящего ε, не может "припарковаться" к одной из групп разбиения, строго снижая издержки каждого из своих участников;

(iii) Общая локальная устойчивость: существует такое ε, что никакая коалиция размера, не превосходящего ε, не может согласованно перебежать в несколько разных групп разбиения, строго снижая издержки каждого из своих участников;

(iv) Обычная коалиционная устойчивость: не существует коалиции, желающей организовать новую структуру (строго снижая издержки каждого из своих участников);

(v) Коалиционно-миграционная устойчивость: не существует коалиции, желающей организовать новую структуру путём присоединения к одной из существующих групп разбиения (строго снижая издержки каждого из своих участников, *а также всех жителей группы-реципиента*[2]);

(vi) Сильная миграционная устойчивость: не существует коалиции *произвольного размера*, желающей присоединиться к одной из существующих групп разбиения (строго снижая издержки каждого из своих участников, без оглядки на издержки реципиентов);

[2] Можно было бы относительно последних потребовать лишь, чтобы их издержки не повышались, но это дела сильно не меняет. Более содержательно было бы потребовать, чтобы как минимум *половина* жителей группы не было бы против принятия "мигрантов", но и так концепций выше крыши!

(vii) Сильная общая миграционная устойчивость: не существует коалиции *произвольного размера*, желающей перераспределиться между существующими группами (строго снижая издержки каждого из своих участников, без оглядки на издержки любых реципиентов);

(viii) Слабая абсолютная устойчивость: не существует коалиции *произвольного размера*, желающей либо присоединиться к одной из существующих групп разбиения, либо организовать собственную новую структуру (строго снижая издержки каждого из своих участников);

(ix) Абсолютная устойчивость: не существует коалиции *произвольного размера*, желающей либо перераспределиться между существующими группами разбиения, либо организовать собственную новую структуру (строго снижая издержки каждого из своих участников).

И даже это — не исчерпывающий список возможных угроз устойчивости! Формализация (некоторых из) этих понятий будет дана ниже, после введения в рассмотрение наиболее общей (и естественной!) обстановки для этого.

5.2.2 Миграционная устойчивость в неатомарных играх

Концепцию миграционной устойчивости можно определить для весьма широкого класса неатомарных игр. Для начала дадим общее определение *закона дележа*, которое обобщает определение $D1$, данное в главе 3 для игр многомерного размещения.

Определение MG**.** Рассмотрим неатомарное измеримое пространство игроков N.[3] Обозначим за $\mathcal{M}[N]$ пространство всех *коалиций*, то есть непустых измеримых подмножеств N строго положительной конечной меры. *Универсальным законом дележа* называется любое отображение

$$t : \mathcal{M}[N] \times N \to \mathbf{R}, \tag{5.1}$$

сопоставляющее каждой коалиции $S \in \mathcal{M}[N]$ функцию распределения выигрышей $t[S] : N \to \mathbf{R}$ на всём N и не меняющуюся при изменениях коалиций на мере ноль.

[3] Конечной, или даже бесконечной, меры.

Далее, *миграционным равновесием в форме разбиения на группы*, или *абстрактным решением по Тьебу* (или Nash of a Coalition Partition Form, сравнить с [39]) называется любое разбиение $\pi = \{S_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ всего пространства игроков N на не более, чем счётное число почти не пересекающихся кусков S_θ, при котором

$$\forall\theta \in \Theta,\ \forall x \in S_\theta \quad \theta \in Arg\min_{\theta'\in\Theta} t[S_{\theta'}](x). \tag{5.2}$$

Фактически это означает, что ни один игрок не хочет сменить *свою* группу ни на какую другую, ибо делёж, который его ожидает, согласно универсальному закону, в новой группе, не ниже того, который ему предписан в его собственной. Классика подхода "голосования ногами", его самая общая формализация.

Замечания и пояснения. Обратите внимание, что в определении, данном выше, вообще не участвует никакая характеристическая форма задания игры. В частности, непонятно, какие выигрыши предписано разделить универсальным законом, и где эти выигрыши сначала взять. Для придания сущностной формы этому определению нужно как-то объяснить этот момент. Ну, например, речь идёт о Высшем Царском Указе о выплатах участникам некоторой совместной деятельности, или что угодно другое. Миграционная устойчивость как подспудное крайне желательное свойство всех таких постановок здесь очищена от всего остального содержания.

Ещё пара замечаний по общей постановке MG.

1. Бесконечная мера. Никто не запрещает измеримому пространству N иметь бесконечную меру. Недаром в определении MG участвует в качестве множества индексов для перечисления групп разбиения произвольное семейство Θ, а не просто конечный набор $1, 2, \ldots, k$. Например, можно ставить вопрос о миграционно устойчивом разбиении целой прямой, плоскости и т.п. Но мы требуем, чтобы коалиция имела *конечную* меру даже в этом случае. Отсюда с необходимостью имеем бесконечную (счётную, чтобы избежать теоретико-множественных проблем) мощность множества групп в *любом* рассматриваемом разбиении.

2. Точки в пересечении можно приписать куда угодно. В определении DM говорится о *почти* несвязном разбиении N, то есть некоторые (таковых должно быть мера ноль — вот зачем мощность количества групп в разбиении должна быть не более, чем счётной!) игроки могут содержаться в двух и более группах одновременно, иметь, так сказать "двойное гражданство". Это, однако, ничему не мешает (до тех пор, пока их мера ноль): действительно, из условия (5.2) следует, что во всех группах, к которым любой такой игрок приписан, ему предназначен одинаковый выигрыш. То есть безо всякой оглядки можно приписать любого такого игрока к любой из групп, и получить строгое разбиение: все такие разбиения эквивалентны по мере, так что им приписаны и одинаковые схемы внутри групп. Значит, например, для разбиений отрезка можно считать все группы замкнутыми отрезками, пересекающимися по краям, что часто бывает удобно. Так, наконец, мы проясняем этот спорный момент с границами.

5.2.3 Метрические постановки и локальная устойчивость

Как правило, пространство игроков N снабжено метрикой. По крайней мере, во всех известных мне приложениях неатомарных игр, на пространстве игроков, помимо меры, есть ещё и метрика, совместимая с этой мерой (то есть все шары измеримы и вообще все борелевские подмножества измеримы).

В случае метрических расселений содержание понятия миграционной устойчивости не ограничивается требованием (5.2).

Дело в том, что когда кто-то один хочет сменить "прописку", то и малая окрестность вокруг него, живущая в той же группе, также хочет это сделать. Если же ненулевая порция игроков сменит прописку, то и массы групп поменяются, и (возможно) медианы, то есть центры. Поэтому миграционные угрозы страшны не сами по себе (мало ли, ну переехал кто-то из одной группы в другую, никто внимания на это не обратил!), а именно своими последствиями, когда мигрировать захочет ненулевая масса жителей.

Сама по себе миграционная устойчивость эту угрозу полностью не снимает. Возможны случаи (даже для равномерного расселения на отрезке, см. ниже в текущем разделе!), когда разбиение миграционно-устойчиво, но если мы позволяем формироваться даже сколь угодно маленьким, но положительной меры группам, то желающие сменить прописку найдутся!

Так вот, усиленная (локальная) миграционная устойчивость означает, что можно указать такую массу ϵ, что нет такого скоординированного перемещения коалиции с массой не более, чем ϵ, что всем участникам этого коллектива стало после перемещения строго лучше, чем было до него.

Иными словами, в любом достаточно малом по общей массе "заговоре" найдутся коллаборационисты, они предугадают, что от перемещения не выиграют, и откажутся от авантюры.

Суммируем это в виде строгого определения (мы здесь даём определение для скоординированного присоединения к одной группе; усиленное локальное миграционное равновесие мы не будем определять, оставим на после диссертации; тем более, что можно, кажется, строго доказать, что для метрических неатомарных игр оно ничего нового не привносит!). Заметим, что сами метрические игры мы даже не вводим — просто по духу делается то, что инспирировано метрикой!

Определение MGS**.** Рассмотрим неатомарное измеримое пространство игроков N, вместе с заданным универсальным законом дележа, $t : \mathcal{M}[N] \times N \to \mathbf{R}$. *Локальным миграционным равновесием* называется разбиение $\pi = \{S_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ всего пространства игроков N на не более, чем счётное число почти не пересекающихся кусков S_θ, обладающее сформулированным ниже свойством.

А именно, можно указать такое положительное число ϵ, что для любой коалиции S массы не более, чем ϵ (в частности, для всех коалиций меры ноль, из чего следует, что обычные миграционные угрозы включены!), и для любой группы $S_\theta \in \pi$ рассматриваемого разбиения существует такой участник $x \in S$ коалиции S, что для него

$$t[S_\theta \cup S](x) \geq t[S_{\theta'}](x), \tag{5.3}$$

где θ' — такой индекс, что $x \in S_{\theta'}$ в исходном разбиении.[4]

[4]И несущественно, если он входит в несколько групп!

То есть, каково бы ни было S размера не более, чем ϵ, люди из S не договорятся о скоординированном перемещении в какую-то из групп разбиения: всегда найдётся такой участник коалиции S, которому не станет от такого перемещения лучше, чем было в его исходной группе.

Поиск усиленных миграционно устойчивых разбиений непрост даже для равномерного расселения на обычном отрезке (см. выше подраздел 3.4 главы 3), и неудивительно поэтому, что никаких общих результатов про этот важнейший и наиболее естественный в непрерывных постановках тип угроз устойчивости пока в науке нет (насколько я в курсе дела).

5.2.4 Коалиционная и смешанная устойчивость

Для введения понятия "абстрактной коалиционной устойчивости" вполне достаточно обычной характеристической формы игры — что упрощает ситуацию, по сравнению со введением "универсальных законов дележа". Выше в главе 3 мы уже это обсуждали — коалиционная устойчивость определяется универсально по отношению к любым играм, как конечным, так и континуальным. Мы ограничимся рассмотрениями для принципа трансферабольной полезности. Структура *игры в характеристической форме* — это просто функция

$$v : \mathcal{M}[N] \to \mathbf{R}, \tag{5.4}$$

не меняющаяся при изменениях коалиций на мере ноль. Следующее определение годится для любой континуальной постановки, в частности, и для постановок с конечным числом типов из главы 4:[5]

> **Определение** CG**.** *Ядерным* распределением выигрышей называется любое отображение $\gamma : N \to \mathbf{R}$, при котором для любой воображаемой коалиции $S \in \mathcal{M}$ выполнено
>
> $$\int\limits_S \gamma(x) d\mu \geq v[S], \tag{5.5}$$

[5] Все концепции предыдущих разделов также годятся для постановки T; более того, некоторые теоремы характеризации там просто напрашиваются сами собой, но я не буду поддаваться соблазну захламить текст в конец!

где μ — мера на пространстве игроков. Разбиение $\pi = \{S_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ называется *коалиционно устойчивым*, если распределение γ можно "склеить" из допустимых векторов распределений, заданных на группах разбиения.

Очень хочется продолжать теоретические изыскания; но мне нравится также и роль Шехерезады. Так что на этом завершаем данный раздел!

5.3 Гербарий сюжетов, окаймляющий кубик Рубика

Напоследок я хочу рассказать о тех задачах, которые так или иначе связаны с темами диссертационного исследования, или продолжают какие-то из направлений, изложенных выше. Порой достаточно и намёка, так что все сюжеты ниже будут предельно скупы.

5.3.1 Мультипликативный нуклеолус

Материал раздела 3.3 и исследований предшественников, вводивших и изучавших integrality gap (целочисленный зазор устойчивости), опирается на следующую общую конструкцию в теории кооперативных игр.

Определение. Пусть задана коалиционная игра со множеством игроков N и неотрицательной характеристической функцией $c : 2^N \to \mathbf{R}$, задающей *издержки* коалиций (считаем, что $c[\emptyset] = 0$). Ниже Ω обозначает множество всех векторов $(x_1, \ldots, x_n)$, для которых существует разбиение $\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}$ множества игроков $N = S_1 \sqcup \ldots \sqcup S_k$ такое, что при каждом $l = 1, \ldots, k$ имеем $\sum_{i\in S_l} g_i \geq c[S_l]$. *Мультипликативным нуклеолусом* A^* этой игры называется минимальное непустое множество из множеств следующего вида, где $\delta \in [0,1]$:

$$A[\delta] = \{g = (g_1, \ldots, g_n) : \frac{g}{(1-\delta)} \in \Omega; \quad \forall S \subset N \sum_{i\in S} g_i \leq c[S]\}. \tag{5.6}$$

При этом $A^* = A[\delta^*]$ и соответствующее δ^* естественно считать платой за устойчивость, который и был назван *целочисленным зазором.*

5.3.2 Метрическое X

Несмотря на то, что все приложения относятся к конечномерным X (отрезкам, прямым, плоскостям, окружностям и т.д.), конструкцию полезно обобщить, считая для начала X произвольным метрическим пространством. Ведь даже в конечномерных случаях метрики можно ввести по-разному, и это не прихоть: если N — это жители города, то метрика скорее "Манхэттэнская", нежели евклидова.

Исходная задача (1) разрешима в любом метрическом пространстве X, в котором ограниченное замкнутое множество компактно (правда, это фактически равносильно конечномерности).

В самом деле, она распадается на две различные задачи:

Задача 1. При фиксированном k найти следующий минимум:

$$A(k) = \min_{(y_1,\ldots,y_k)\in X^k} \sum_{i\in N} \min_{y\in\{y_1,\ldots,y_k\}} \rho[x_i, y], \tag{5.7}$$

где минимум берётся на множестве всех $(y_1,\ldots,y_k)\in X^k$, но можно также эквивалентно брать его на (компактном, в силу сделанных предположений!) множестве $\bar{X}^k$, где $\bar{X}$ обозначает множество всех точек из X, расстояние от которых до любой точки из $(x_1,\ldots,x_n)$ не превосходит, например, десятикратного диаметра множества $(x_1,\ldots,x_n)$. Такая задача разрешима.

Задача 2. Минимизировать на конечном множестве $k = 1, 2, \ldots, n$ выражение $gk + A(k)$. Эта задача тривиально разрешима.

5.3.3 Принцип частичной компенсации

Помимо трёх основных принципов *трансферабельной полезности*, *равнодолевого участия* и *выравнивания платежей*, изученных выше в работе, существуют и иные принципы, предназначение которых — вернуть устойчивость решениям задачи (ЗМР) с помощью регулирования принципами осуществления побочных платежей.

В работе [102] авторы скрестили принцип FR с принципом FE, вводя в рассмотрение *частичную компенсацию* игрокам, попавшим на периферию своих групп. Подобные принципы можно назвать *смешанными принципами* (случай α-Ralws):

$$c(i,S) = \alpha(\frac{1}{|S|} + ||x_i - m[S]||) + (1-\alpha)c[S] = \\ = \frac{g + (1-\alpha)\sum_{i\in S}||x_i - m[S]||}{|S|} + \alpha||x_i - m[S]||. \tag{5.8}$$

5.3.4 Всякая всячина

Наконец, ещё несколько фактов, соображений и идей.

Границы групп для DEM на плоскости — гиперболы!

Оказался верен неожиданный и очень красивый результат, "лежащий на поверхности" во всех смыслах слова — и в том смысле, что он достаточно простой, и в том, что он касается двумерных расселений: в любом миграционно устойчивом разбиении на группы в постановке DEM при *любой* положительной плотности расселения границами групп разбиения должны быть гиперболы. Результат этот получен вместе с К.Сорокиным, примерно за пять минут раздумий над темой. Суть в том, чтобы правильно проинтерпретировать условия граничного безразличия.

Теория социального взаимодействия

В докладе [19] я означил развитую в соавторстве с Ш.Вебером, Д.Мусатовым и М.Ле Бретоном теорию социального взаимодействия. Коротко говоря, теорему из раздела 3.2 можно доказать в очень общих предположениях о функциях издержек игроков. При этом неожиданно играет роль *монотонная сравнительная статика.*

Хотеллинг, Даунс и ценообразование

Поверхностный взгляд на задачу ЗМР подсказывает, что может быть связь с моделями пространственной конкуренции. Несмотря на то, что связи этой напрямую обнаружить не удаётся, здесь есть мостки. Не буду даже начинать об этом рассказывать, иначе придётся ещё страниц на 20 увеличивать объём работы.

Теоремы Бондаревой и Скарфа

В работе [99] мы показываем, что тривиальная разрешимость дробной постановки ЗМР с точки зрения теоретико-игровых угроз устойчивости является следствием общих результатов о непустоте *дробного ядра*. Первым прозрением здесь является доказанная ровно 50 лет назад нашей соотечественницей теорема [50].

В несколько более общей ситуации её идеи развиты Скарфом 4 года спустя. Замечательно короткое и изящное доказательство теоремы Скарфа придумал Данилов [60], сведя её к знаменитой теореме Какутани.

5.4 Благодарности

В этом завершающем всю работу подразделе я хочу упомянуть с самой глубокой благодарностью, любовью и признательностью тех людей, без которых диссертация заведомо никогда не увидела бы свет.

Прежде всего это относится к моему научному консультанту, профессору Южного Методистского Университета (Даллас, США), а также Российской Экономической Школы, Шломо Веберу. Можно сказать, что написание диссертации во многом стало итогом плодотворной совместной работы в течение последних десяти лет над темами, так или иначе связанными с изложенными выше результатами. Я благодарен Шломе за советы, за отзывчивость, за умение разделить трудные жизненные ситуации и дать неизменно мудрый совет.

Не менее приятно поблагодарить академика РАН Валерия Леонидовича Макарова, другого моего научного консультанта, за поддержку и вдохновляющие слова, за его неизменную уверенность в моих силах, за веру в то, что я способен закончить начатое большое дело.

Огромное спасибо хочется сказать также академику РАН Виктору Меерович Полтеровичу, который всегда был для меня больше, чем просто научным руководителем. Спасибо за постоянный интерес и внимание к моей работе, за отеческое отношение ко мне! То, что я, несмотря ни на что, всё-таки смог сформироваться как научный сотрудник - в первую очередь заслуга именно Виктора Мееровича.

Мои учителя в школе № 57, Рафаил Калманович Гордин и Александр

Ханиевич Шень, а также Аркаша Вайнтроб мучились со мной три года, но это было не зря: всё-таки они все вместе привили во мне волю к преодолению трудностей, ведь до них мне казалось, что математика — это не более, чем лёгкая прогулка! Завершённая докторская диссертация, смею надеяться, порадует моих любимых учителей.

Мои друзья, родные и близкие люди, помогли мне на разных этапах с тем, что касается огромной бюрократической составляющей процесса защиты диссертации. Мне очень стыдно осозновать, что всех перечислить не выйдет. На заключительном этапе марафона меня поддерживали и активно помогали Денис Давыдов, Дмитрий Крутиков, Сергей и Евгения Дзюба. Вдохновляли меня, конечно, мои дети — Миша, Галя и маленькая Светочка, а также моя мама, мой папа и родственники.

Ну а самых тёплых слов, конечно, заслуживает моя жена Марина, которая каждый день благословляла меня на этот научный подвиг и прикрывала наш общий семейный тыл!

Литература

[1] Ауманн Р., Шепли Л. Значения для неатомических игр. – М.: Мир, 1977. – 358 с.

[2] Бухаров Д. С. Определение оптимального количества и расположения логистических центров: математическая модель и численный метод // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2012. – Т. 63. – №. 4. – С. 8-14.

[3] Вартанов С. Об устойчивости к расколу равновесий в модели эндогенного формирования коалиций // Математическая теория игр и её приложения. – 2012. — Т. 4, вып. 1. – С. 3-20.

[4] Вартанов С.А. Теоретико-игровые модели формирования коалиций и участия в голосовании: диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. – Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова. – 179 с.

[5] Вартанов С. А., Васин А. А., Сосина Ю. В. Об устойчивости равновесий в модели эндогенного формирования коалиций. XIII Международная научная конференция по проблемам развития экономики и общества. В четырех книгах. Книга 1. Отв. ред. Е. Ясин. – М.: НИУ ВШЭ. – 2012. – С. 203-215.

[6] Вартанов С.А., Сосина Ю.В. О структуре равновесий Нэша и их устойчивости к локальному объединению в модели эндогенного формирования коалиций // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25. – №. 4. – С. 44-64.

[7] Васильев И. Л. Метод декомпозиции для задачи о p-медиане на несвязном графе //Дискретный анализ и исследование операций. – 2007. – Т. 14. – №. 1. – С. 43-58.

[8] Васильев И. Л., Климентова К. Б., Кочетов Ю. А. Новые нижние оценки для задачи размещения с предпочтениями клиентов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2009. – Т. 49. – №. 6. – С. 1055-1066.

[9] Васильев И. Л., Климентова К. Б., Плясунов А. В. Метод отсечений для двухуровневой задачи размещения // Труды XIV-й международной школы-семинара Методы оптимизации и их приложения. Иркутск. – 2008. – Т. 1. – С. 577-585.

[10] Васин А. А. , Гурвич В.А. Коалиционные ситуации равновесия в метаиграх // Вестник МГУ. Вычислительная математика и кибернетика. – 1980. – №. 3. – С. 38-44.

[11] Вебер А. Теория размещения промышленности. – 1926.

[12] Вебер Ш., Габжевич Дж., Гинзбург В., Савватеев А. В., Филатов А. Ю Языковое разнообразие и его влияние на экономические и политические решения // Журнал Новой экономической ассоциации. – 2009. – № 3-4. – С. 28-53.

[13] Данилов В. И. Лекции по теории игр // М.: Российская Экономическая Школа. – 2002. – Т. 5.

[14] Казаков А.Л., Лемперт А.А., Бухаров Д.С. О задаче оптимального размещения логистического объекта для обслуживания непрерывно распределенных потребителей [электронный ресурс]. // VI Международный научный семинар «Обобщенные постановки и решения задач управления'» (GSSCP -2012). – Геленджик, 2012. – С. 39-42.

[15] Климентова К.Б. Оценки оптимальных значений и методы решения задач размещения с предпочтениями клиентов: диссертация на соискание

учёной степени кандидата физико-математических наук. – Иркутск, 2010. – 124 с.

[16] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – Т. 544.

[17] Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? – М : МЦНМО, 2007. – 268 с.

[18] Кукушкин Н.С. Об ацикличности коалиционных улучшений. – Выступление на семинаре Математическая экономика в ЦЭМИ РАН. – 22.03.11.

[19] Ле Бреттон М., Вебер Ш., Мусатов Д., Савватеев А. Теория социального взаимодействия. // Труды 33-й Международной научной школы-семинара, Звенигород, 1–4 октября 2010 г. Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета. – 2010. – С. 281–282.

[20] Лемперт А.А., Казаков А.Л., Бухаров Д.С. Математическая модель и программная система для решения задачи размещения логистических объектов // Управление большими системами. – 2013. – Выпуск 41. – С. 270-284.

[21] Мазалов В. В., Токарева Ю. С. Теоретико-игровые модели проведения конкурсов // Математическая теория игр и её приложения. – 2010. – Т.2. – №. 2. – С. 66-78.

[22] Макаров В. Л. Исчисление институтов // Экономика и мат. методы. – 2003. – Т. 39. – С. 14-32.

[23] Маракулин В.М. Одномерный мир с разрывным распределением населения: существование иммиграционно состоятельного деления на страны // Материалы конференции УрГУ. – 2011.

[24] Мусатов Д. Размер и число жителей регионов при однопиковой плотности населения. – Магистерская работа РЭШ, 2008.

[25] Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. – М.: мир, 1972. – Т. 6.

[26] Печерский С. Л., Яновская Е. Б. Кооперативные игры: решения и аксиомы. – Европейский Университет, Санкт-Петербург, 2004.

[27] Рапопорт Э. О. О дискретном приближении непрерывных мер и некоторых приложениях // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2012. – Т. 15. – №. 3. – С. 99-110.

[28] Садовский М.Г., Логинова Е.Б. Об электоральном поведении избирателей России// Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Гуманитарные науки. – 2013. – Т.6. – № 4. – С. 603-613.

[29] Савватеев А.В. Коалиционная устойчивость “биполярного мира” // Журнал Новой Экономической Ассоциации. – 2013. – Выпуск 17. – С. 10-44.

[30] Савватеев А.В. Миграционно устойчивая организация одномерного мира: теорема существования решения // Известия Иркутского Государственного Университета, Серия “Математика”. – 2013. – Том 6 (2). – С. 57-68.

[31] Савватеев А.В. Оптимальные стратегии подавления коррупции // Экономика и математические методы. – 2003. – 39(1). – С. 62-75.

[32] Савватеев А.В., Кукушкин Н.С. Ординальная сравнительная статика: непрерывный случай // Экономика и математические методы. – 2009. – Т. 45. – N 1. – С. 83-86.

[33] Степанов Д.С. Модели эндогенного формирования коалиционных структур : дис. – диссертация на соискание степени кандидата физико-математических наук: 01.01. 09.-Москва, 2011. –151 с.

[34] Эрроу К.Д. Коллективный выбор и индивидуальные ценности. – М.: Издат. дом ГУ ВШЭ, 2004.

[35] Alesina, A., Baqir, R. and Hoxby C. Political jurisdictions in heterogeneous communities // Journal of Political Economy. – 2004. – № 112. – P.348-396.

[36] Alesina A., Spolaore E. On the number and size of nations // The Quarterly Journal of Economics. – 1997. – T. 112. – №. 4. – P. 1027-1056.

[37] Alesina A., Angeloni I., Etro F. International unions // American Economic Review. – 2005. – P. 602-615.

[38] Aumann R. J. Acceptable points in general cooperative n-person games // Contributions to the Theory of Games. – 1959. – T. 4. – C. 287-324.

[39] Aumann R. J., Drèze J. H. Cooperative games with coalition structures // International Journal of game theory. – 1974. – T. 3. – №. 4. – C. 217-237.

[40] Banerjee S., Konishi H., S¨onmez T. Core in a simple coalition formation game // Social Choice and Welfare. – 2001. – T. 18. – №. 1. – C. 135-153.

[41] Barro, R.J. Small is Beautiful // The Wall Street Journal. – 1991, October 11.

[42] Black D. On the rationale of group decision-making // The Journal of Political Economy. – 1948. – T. 56. – №. 1. – C. 23-34.

[43] Bogomolnaia A., Jackson M. O. The stability of hedonic coalition structures //Games and Economic Behavior. – 2002. – T. 38. – №. 2. – C. 201-230.

[44] Bogomolnaia, A., Le Breton, M., Savvateev, A. and Weber S. Heterogeneity Gap in Unidimensional Spatial Models // Journal of Public Economic Theory. – 2008. № 10. – C. 455-473.

[45] Bogomolnaia A., Le Breton M., Savvateev, and Weber S. Stability of jurisdiction structures under the equal share and median rules // Economic Theory. – 2008. – T. 34. – №. 3. – C. 525-543.

[46] Bogomolnaia A., Le Breton M., Savvateev, and Weber S. Stability under unanimous consent, free mobility and core //International Journal of Game Theory. – 2007. – T. 35. – №. 2. – C. 185-204.

[47] Bogomolnaia A., Le Breton M., Savvateev A., and Weber S. The egalitarian sharing rule in provision of public projects // Economics Bulletin. – 2005. – T. 8. – №. 11. – C. 1-5.

[48] Bollobas B., Stern N. The optimal structure of market areas // Journal of Economic Theory. – 1972. – T. 4. – №. 2. – C. 174-179.

[49] Bolton P., Roland G. The breakup of nations: a political economy analysis // The Quarterly Journal of Economics. – 1997. – T. 112. – №. 4. – C. 1057-1090.

[50] Bondareva, O. Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games // Problemy Kibernitiky. – 1962. № 10. – 119-139.

[51] Brams S. J., Jones M. A., Kilgour D. M. Single-peakedness and disconnected coalitions // Journal of Theoretical Politics. – 2002. – T. 14. – №. 3. – C. 359-383.

[52] Buchanan J. M. An economic theory of clubs // Econometrica. – 1965. – T. 32. – №. 125. – C. 1-14.

[53] Cassela, A. The role of market size in the formation of jurisdictions // The review of economic studies. – 2001. – T. 68. – №. 1. – C. 83-108.

[54] Cechlarova K., Dahm M., Lacko V. Efficiency and stability in a discrete model of country formation // Journal of Global Optimization. – 2001. – T. 20. – №. 3-4. – C. 239-256.

[55] Christaller W. Central places in southern Germany. – Prentice-Hall, 1966.

[56] Chudak F. A. Improved approximation algorithms for uncapacitated facility location. – Springer Berlin Heidelberg, 1998. – C. 180-194.

[57] Combes P. P., Mayer T., Thisse J. F. Economic geography: The integration of regions and nations. – Princeton University Press, 2008.

[58] Cornuejols, G. Nemhauser, G.L. and Wolsey L.A. The uncapacitated facility location problem, in Discrete Location Theory, P. Mirchandani and R. Francis, eds., John Wiley and Sons. – 1990. –NYC, New York, 119-171.

[59] Cremer H., De Kerchove A. M., Thisse J. F. An economic theory of public facilities in space // Mathematical Social Sciences. – 1985. – T. 9. – №. 3. – C. 249-262.

[60] Danilov V. I. On the Scarf theorem //Economics and Mathematical Methods. – 1999. – T. 35. – №. 3. – C. 137-139.

[61] Demange G. Intermediate preferences and stable coalition structures // Journal of Mathematical Economics. – 1994. – T. 23. – №. 1. – C. 45-58.

[62] Demange G., Guesnerie R. Non-emptiness of the Core: low multi-dimensional decisions spaces and one-dimensional preferences // Research in Economics. – 1997. – T. 51. – №. 1. – C. 7-17.

[63] Demange G., Wooders M. (ed.). Group formation in economics: networks, clubs, and coalitions. – Cambridge University Press, 2005.

[64] Drèze J., de Grauwe P., Edwards J. Regions of Europe: a feasible status, to be discussed // Economic Policy. – 1993. – C. 266-307.

[65] Dreze J., Le Breton M., Weber S. Rawlsian pricing of access to public facilities: a unidimensional illustration // Journal of Economic Theory. – 2007. – T. 136. – №. 1. – C. 759-766.

[66] Drèze, J., Le Breton, M., Savvateev, A. and Weber S. “Almost” subsidy-free spatial pricing in a multi-dimensional setting // Journal of Economic Theory. – 2008. – T. 143. – №. 1. – C. 275-291.

[67] Eeckhout J. Gibrat’s law for (all) cities // American Economic Review. – 2004. – C. 1429-1451.

[68] Farrell J., Scotchmer S. Partnerships // The Quarterly Journal of Economics. – 1988. – T. 103. – №. 2. – C. 279-297.

[69] Tóth L. F. Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum, volume 65 of Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. – 1953.

[70] Gabaix X. Zipf's law for cities: an explanation // The Quarterly Journal of Economics. – 1999. – T. 114. – №. 3. – C. 739-767.

[71] Goemans, M.X. and Skutella M. Cooperative facility location games // Journal of Algorithms. –2004. –№ 50. – C. 192-214.

[72] Grandmont J. M. Intermediate preferences and the majority rule // Econometrica: Journal of the Econometric Society. – 1978. – C. 317-330.

[73] Greenberg J. Coalition structures // Handbook of game theory with economic applications. – 1994. – T. 2. – C. 1305-1337.

[74] Greenberg J., Weber S. Multiparty equilibria under proportional representation // The American Political Science Review. – 1985. – C. 693-703.

[75] Greenberg, J. and Weber S. Strong Tiebout Equilibrium under Restricted Preferences Domain // Journal of Economic Theory. – 1986. – № 38. – C 101-117.

[76] Greenberg J., Weber S. Stable coalition structures in consecutive games // Binmore, K., Kirman, A. and P. Tani (eds.) Frontiers of Games Theory, MIT Press, Cambridge and London. – 1993. – C.103-115.

[77] Greenberg J., Weber S. Stable coalition structures with a unidimensional set of alternatives // Journal of Economic Theory. – 1993. – T. 60. – №. 1. – C. 62-82.

[78] Guesnerie R., Oddou C. On economic games which are not necessarily superadditive: solution concepts and application to a local public good problem with few a agents // Economics Letters. – 1979. – T. 3. – №. 4. – C. 301-306.

[79] Guesnerie, R. and Oddou C. Second best taxation as a game // Journal of Economic Theory. – 1981. – № 25. – C. 67-91.

[80] Guesnerie R., Oddou C. Increasing returns to size and their limits // The Scandinavian Journal of Economics. – 1988. – C. 259-273.

[81] Guesnerie R. A contribution to the pure theory of taxation. – Cambridge University Press, 1998. – T. 25.

[82] Guha S., Khuller S. Greedy strikes back: Improved facility location algorithms // Proceedings of the ninth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms. – Society for Industrial and Applied Mathematics. – 1998. – C. 649-657.

[83] Haeringer G. Stable coalition structures with fixed decision scheme. – Springer Berlin Heidelberg, 2001. – C. 217-230.

[84] Haimanko O., Le Breton M., Weber S. On efficiency and sustainability in a collective decision-making problem with heterogeneous agents. – Universite catholique de Louvain, 2002.

[85] Haimanko O., Le Breton M., Weber S. Voluntary formation of communities for the provision of public projects //Journal of Economic Theory. – 2004. – T. 115. – №. 1. – C. 1-34.

[86] Haimanko O., Le Breton M., Weber S. The stability threshold and two facets of polarization // Economic Theory. – 2007. – T. 30. – №. 3. – C. 415-430.

[87] Haimanko O., Le Breton M., Weber S. Transfers in a polarized country: bridging the gap between efficiency and stability // Journal of Public Economics. – 2005. – T. 89. – №. 7. – C. 1277-1303.

[88] Haimovich M., Magnanti T. L. Extremum properties of hexagonal partitioning and the uniform distribution in Euclidean location // SIAM journal on discrete mathematics. – 1988. – T. 1. – №. 1. – C. 50-64.

[89] Jehiel P., Scotchmer S. Free mobility and the optimal number of jurisdictions // Annales d'Economie et de Statistique. – 1997. – C. 219-231.

[90] Jehiel, P. and Scotchmer S. Constitutional rules of exclusion in jurisdiction formation // Review of Economic Studies. – 2001. – № 68. C. 393-413.

[91] Kolen A. Solving covering problems and the uncapacitated plant location problem on trees / /European Journal of Operational Research. – 1983. – T. 12. – №. 3. – C. 266-278.

[92] Konishi H., Le Breton M., Weber S. Pure strategy Nash equilibrium in a group formation game with positive externalities // Games and Economic Behavior. – 1997. – T. 21. – №. 1. – C. 161-182.

[93] Konishi H., Weber S., Le Breton M. Free mobility equilibrium in a local public goods economy with congestion // Research in Economics. – 1997. – T.51. – №. 1. – C. 19-30.

[94] Konishi, H., Le Breton, M. and Weber S. Equivalence of strong and coalition-proof Nash equilibria in games without spillovers // Economic Theory. –1997. – № 9. – C. 97-113.

[95] Konishi H., Le Breton M., Weber S. Equilibria in a model with partial rivalry // Journal of Economic Theory. – 1997. – T. 72. – №. 1. – C. 225-237.

[96] Konishi, H., Le Breton, M. and Weber S. Group formation in games without spillovers: a noncooperative game-theoretical approach, in New Directions in the Economic Theory of the Environment, Carraro, C. and D. Siniscalco, eds. – 1997. – Cambridge University Press, Cambridge.

[97] Konishi H., Le Breton M., Weber S. Equilibrium in a finite local public goods economy // Journal of Economic Theory. – 1998. – T. 79. – №. 2. – C. 224-244.

[98] Kukushkin N. S. Congestion games revisited // International Journal of Game Theory. – 2007. – T. 36. – №. 1. – C. 57-83.

[99] Le Breton M., Makarov V., Savvateev A., Weber S. Multiple Membership and Federal Structures // FEEM Working Paper. – 2008. – No. 2008/41.

[100] Le Breton M., Moreno-Ternero J.D., Savvateev A., and S. Weber. Stability and fairness in models with a multiple membership // International Journal of Game Theory. – 2013. – Vol.42. – Issue 3. – P. 673-694.

[101] Le Breton M., Moreno-Ternero J.D., Savvateev A., and S. Weber. Stability and fairness in models with a multiple membership // CORE Discussion Paper. – 2010/79.

[102] Le Breton M., Weber S. The art of making everybody happy: how to prevent a secession //IMF Staff Papers. – 2003. – C. 403-435.

[103] Le Breton M., Weber S. Group formation in strategic environments without widespread externalities // Southern Methodist University and University of Toulouse, Mimeo. – 2003.

[104] Le Breton M., Weber S. Secession-proof cost allocations and stable group structures in models of horizontal differentiation. – Cambridge University Press, 2004. – C. 266-285.

[105] Littlechild, S.C. Common Costs, Fixed Charges, Clubs and Games // Review of Economic Studies . – 1975. – Vol. 42. – P. 117-124.

[106] L¨osch A., Woglom W. H. The economics of location. – New Haven : Yale University Press, 1954.

[107] Magnus J. R., Polterovich V. M., Danilov D. L., and Savvateev A. V. Tolerance of cheating: An analysis across countries // The Journal of Economic Education. – 2002. – T. 33. – №. 2. – C. 125-135.

[108] Maschler M., Peleg B., Shapley L. S. Geometric properties of the kernel, nucleolus, and related solution concepts // Mathematics of Operations Research. – 1979. – T. 4. – №. 4. – C. 303-338.

[109] Mas-Colell A. Efficiency and decentralization in the pure theory of public goods // Quart. J. Econ. – 1980. – № 94. – C. 625-641.

[110] Mas-Collel A., Whinston M. D., Green J. Microeconomic theory. – 1995.

[111] Mirchandani P. B., Francis R. L. Discrete location theory. – 1990.

[112] Monderer D., Shapley L. S. Potential games // Games and economic behavior. – 1996. – T. 14. – №. 1. – C. 124-143.

[113] Morgan F., Bolton R. Hexagonal economic regions solve the location problem // The American mathematical monthly. – 2002. – T. 109. – №. 2. – C. 165-172.

[114] Owen G. On the core of linear production games // Mathematical programming. – 1975. – T. 9. – №. 1. – C. 358-370.

[115] Ginsburgh V., Ortuno-Ortin I., Weber S. Disenfranchisement in linguistically diverse societies: The case of the European Union // Journal of the European Economic Association. – 2005.– T. 3. – №. 4. – C. 946-965.

[116] Polishchuk L. I., Savvateev A. V. Spontaneous (non)emergence of property rights // Economics of Transition . – 2004. – Vol. 12. – Issue 1. – C. 103-127.

[117] Rawls J. A theory of justice. – Belknap Press, 1999.

[118] Rosenthal R. W. A class of games possessing pure-strategy Nash equilibria // International Journal of Game Theory. – 1973. – T. 2. – №. 1. – C. 65-67.

[119] Samet D., Zemel E. On the core and dual set of linear programming games // Mathematics of Operations Research. – 1984. – T. 9. – №. 2. – C. 309-316.

[120] Sandler T., Tschirhart J. T. The economic theory of clubs: An evaluative survey // Journal of Economic Literature. – 1980. – T. 18. – №. 4. – C. 1481-1521.

[121] Savvateev, A. Uni-dimensional models of coalition formation: non-existence of stable partitions // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. – 2012. – Volume 2. – Issue 4. – P. 49-62.

[122] Savvateev A. Achieving stability in heterogeneous societies: multijurisdictional structures, and redistribution policies. – EERC Research Network, Russia and CIS, 2004. – №. 04-13e.

[123] Schofield N., Zakharov A. A stochastic model of the 2007 Russian Duma election // Public Choice. – 2010. – T. 142. – №. 1-2. – C. 177-194.

[124] Shapley L. S., Shubik M. The assignment game I: The core // International Journal of Game Theory. – 1971. – T. 1. – №. 1. – C. 111-130.

[125] Schmeidler D. The nucleolus of a characteristic function game // SIAM Journal on applied mathematics. – 1969. – T.17. – №. 6. – C. 1163-1170.

[126] Schmeidler D. Equilibrium points of nonatomic games // Journal of Statistical Physics. – 1973. – T. 7. – №. 4. – C. 295-300.

[127] Shmoys D. B., Tardos É., Aardal K. Approximation algorithms for facility location problems // Proceedings of the twenty-ninth annual ACM symposium on Theory of computing. – ACM, 1997. – C. 265-274.

[128] Stern N. The optimal size of market areas // Journal of Economic Theory. – 1972. – T. 4. – №. 2. – C. 154-173.

[129] Sviridenko M. An improved approximation algorithm for the metric uncapacitated facility location problem // Integer programming and combinatorial optimization. – Springer Berlin Heidelberg, 2006. – C. 240-257.

[130] Tamir A. On the core of cost allocation games defined on location problems // Transportation Science. – 1993. – T. 27. – №. 1. – C. 81-86.

[131] Tiebout C. M. A pure theory of local expenditures // The journal of political economy. – 1956. – T. 64. – №. 5. – C. 416-424.

[132] Vasin A., Stepanov D. Endogenous formation of political parties // Mathematical and Computer Modelling. – 2008. – T. 48. – №. 9. – C. 1519-1526.

[133] Weber S., Zamir S. Proportional taxation: nonexistence of stable structures in an economy with a public good // Journal of Economic Theory. – 1985. – T. 35. – №. 1. – C. 178-185.

[134] Wei, S.J. To Divide or to Unite: A Theory of Secessions, Mimeo. – University of California at Berkeley, 1991.

[135] Westhoff F. Existence of equilibria in economies with a local public good // Journal of Economic Theory. – 1977. – T. 14. – №. 1. – C. 84-112.

[136] Wooders, M.H. Equilibria, the core, and jurisdiction structures in economies with a local public good // Journal of Economic Theory. – 1978. –№ 18. – С. 328-348.

[137] Wooders, M.H. The Tiebout hypothesis: near optimality in local public good economies // Econometrica. – 1980. – № 48. – С. 1467-1486.