Федеральное автономное образовательное учреждение
высшего образования

«Национальный исследовательский университет «Высшая
школа экономики»»

Отчет по лабораторной работе 4

Решение систем алгебраических уравнений итерационными методами

Вариант 10: задачи 6.1.10, 6.4.2, 6.7.5, 6.9.5

Выполнил:

Студент группы БПМ-211
Ляхов Артём Андреевич

Преподаватель:

Брандышев Петр Евгеньевич

Март 2024 г.

Содержание

1 Задача 6.1.10. Приближение функции многочленом по МНК

1.1 Формулировка задачи

Функция $f(x)$ задана таблицей значений $y_0, y_1, \ldots, y_n$ в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Используя метод наименьших квадрато (МНК), нужно найти многочлен $P_m(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ наилучшего среднеквадратичного приближения оптимальной степени $m = m^*$. За оптимальное решение принять ту степень, начиная с которой величина

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{n-m} \sum_{k=0}^{n} \left(P_m(x_k) - y_k\right)^2}$$

стабилизируется или начинает возрастать.

Для выполнения задания необходимо:

1. Написать функцию **mnk**, с помощью которой найти многочлены P_m по методу наименьших квадратов. Вычислить соответствующие им значения σ_m.

2. Построить гистрограмму зависимости σ_m от m, на основании которой выбрать оптимальную степень m^*.

3. На одном чертеже построить графики функций P_m, $m = 0, 1, \ldots, m^*$ и точечный график исходной функции.

Таблица значений в соответствии с вариантом имеет вид (сверху значения x_i, снизу y_i):

-3.6	-3.08	-2.56	-2.04	-1.52	-1	-0.48	0.04	0.56	1.08	1.6
-2.397	-0.401	-0.577	-1.268	-0.933	-0.359	1.107	1.300	1.703	-0.299	-1.417

1.2 Теоретический материал

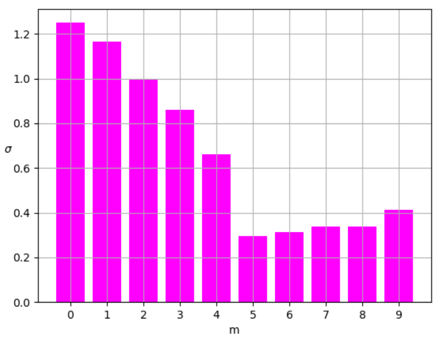
Пусть мы аппроксимируем данные $f(x_i) = y_i, i = 1, \ldots, n$ с помощью полиномиальной функции $f(x) = a_0 + \sum\limits_{j=1}^{m} a_j x^j$, тогда для того, чтобы найти оптимальные значения коэффициентов a_j по МНК необходимо решить систему линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^m \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^m & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{m+1} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^m y_i \end{pmatrix}$$

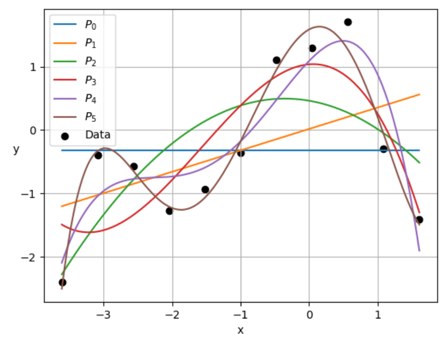
1.3 Код на Python

```python
def mnk(x_arr, y_arr, m):
    """
    Находит полином m-ой степени по МНК.

    :return np.ndarray: коэффициенты полинома.
    """
    assert x_arr.ndim == 1
    assert y_arr.ndim == 1

    G = np.zeros((m + 1, m + 1))
    b = np.zeros(m + 1)

    for i in range(m + 1):
        b[i] = np.dot(x_arr ** i, y_arr)
        for j in range(m + 1):
            G[i, j] = np.sum(x_arr ** (i + j))

    return np.linalg.solve(G, b)
```

1.4 Результаты



(a) Гистограмма σ_m



(b) Графики многочленов $P_m(x)$

Рис. 1: Результаты нахождения полиномов $P_m(x)$ по МНК.

По гистрограмме видно, что начиная с $m = 5$ значение σ_m возрастает, соответственно $m^* = 5$. Из графиков полиномов видно, что $P_5(x)$ лучше всего приближает имеющийся набор данных.

2 Задача 6.4.2. Траектория материальной точки

2.1 Формулировка задачи

В таблице приведены результаты наблюдений за движением материальной точки в плоскости (x, y). Известно, что движение осуществляется по кривой, описываемой многочленом $y = ax^m + b$.

Используя МНК, необходимо определить коэффициенты a и b, а также определить значение $\hat{x}$ координаты x, которое соответствует значению $\hat{y}$ координаты y.

В соответствии с вариантом $m = 2$ $\hat{y} = 8$, а таблица значений имеет следующий вид:

x_i	1.5	2.1	2.7	3.3	3.9	4.5	5.1
y_i	11.1	10.3	9.08	7.64	5.92	3.9	1.6

2.2 Теоретический материал

Для того, чтобы найти коэффициенты a, b по методу наименьших квадратов необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^m \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^m & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{2m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i^m \end{pmatrix}$$

2.3 Результаты

b	a	$\hat{x}$
12.0205	-0.4009	3.1667

Таблица 1: Значения коэффициентов b и a, найденные при помощи метода наименьших квадратов и величина $\hat{x}$.

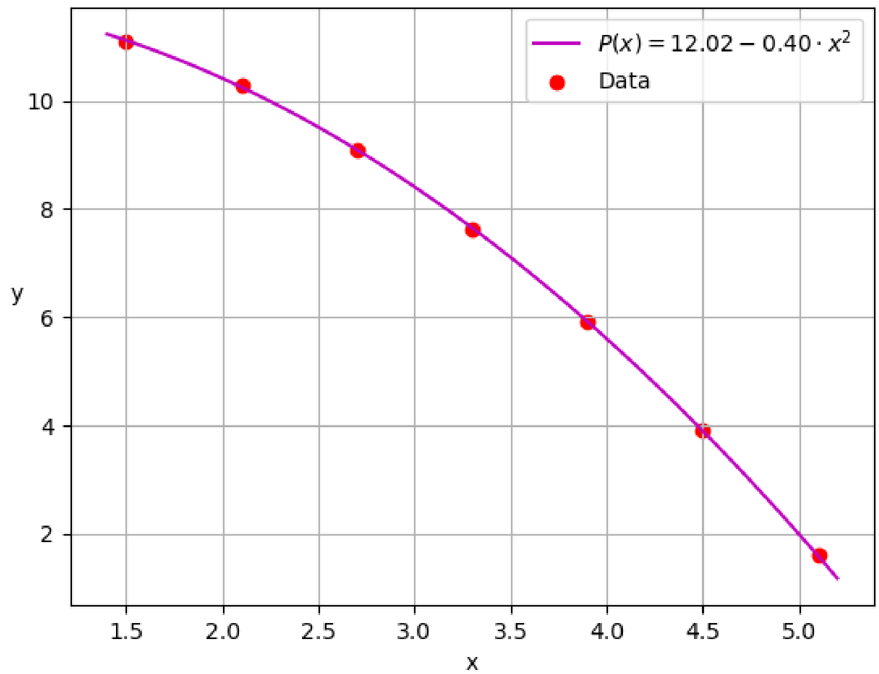


Рис. 2: График функции $P(x) = b + ax^2$, где коэффициенты a и b, были найдены при помощи метода наименьших квадратов.

3 Задача 6.7.5. Сравнение кусочно-линейной и глобальной интерполяции

3.1 Формулировка задачи

Дана кусочно-гладкая функция $y = f(x)$. Необходимо сравнить приближения функции кусочно-линейной и глобальной интерполяциями.

Решение должно состоять из следующих шагов:

1. Вычислить значения функции $f(x)$ в произвольных точках x_i, $i = 0, \dots, k-1$ отрезка $[a, b]$, по которым будет осуществляться интерполяция.

2. Реализовать программу, вычисляющую значение интерполяционного многочлена 1-ой степени по точкам (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}) в произвольной точке отрезка $[x_i, x_{i+1}]$. С её помощью вычислить приближённые значения $f(x)$ в $3k$ точках отрезка $[a, b]$.

3. Написать программу, возвращающую значение интерполяционного многочлена в форме Ньютона (с разделёнными разностями). Вычислить приближённые значения $f(x)$ в тех же $3k$ точках.

4. На одном чертеже построить графики интерполирующих функций, график $f(x)$, а также отметить точки, по которым осуществлялась интерполяция.

5. Вычислить практическую величину погрешностей Δ_j, $j = 0, \dots, 3k-1$, приближения $f(x)$ в $3k$ точках для кусочно-линейной и глобальной интерполяций. На одном чертеже построить графики погрешностей.

В соответствии с вариантом:

$$f(x) = |x - 1|e^x \qquad [a, b] = [0, 2]$$

3.2 Теоретический материал

3.2.1 Кусочно-линейная интерполяция

Кусочно-линейная интерполяция - метод интерполяции, основная идея которого состоит в том, чтобы на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ приближать исходную функцию линейной функцией $f_i(x) = k_i x + b$, проходящей через точки (x_{i-1}, y_{i-1}) и (x_i, y_i), то есть $f(x_{i-1}) = y_{i-1}, f(x_i) = y_i$.

Используя свойство выше можно выписать $f_i(x)$ в явном виде:

$$f_i(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1})$$

3.2.2 Интерполяционные формулы Ньютона

В общем случае интерполяционный многочлен Ньютона - это многочлен, которые имеет вид:

$$P_n(x) = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0; x_1] + \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f[x_0; \ldots; x_n]$$

где $f[x_0; x_1; \ldots; x_n]$ - разделённая разность порядка n.

Разделённая разность порядка k определяется через разделённые разности порядка $k-1$:

$$f[x_0; x_1; \ldots; x_k] = \frac{f[x_1; \ldots; x_k] - f[x_0; \ldots x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

И в частности:

$$f[x_0; x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

При этом разделённая разность может быть найдена с помощью следующей формулы:

$$f[x_0; x_1; \ldots; x_k] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$$

3.3 Код на Python

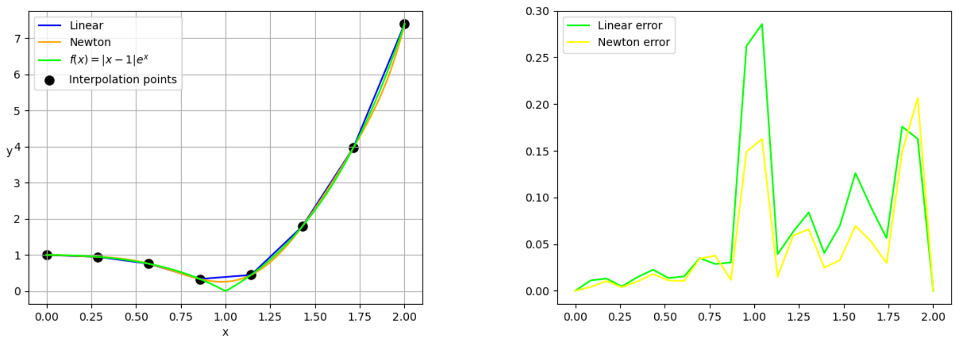
```
class LinearInterp1d:
    """
    Класс для линейной интерполяции.
    """
    def __init__(self, x, y):
        assert x.ndim == 1
        assert y.ndim == 1
        assert x.shape == y.shape

        self.a = x.min()
        self.b = x.max()
        self.segments = {}

        for i in range(1, x.size):
            x0, x1 = x[i-1], x[i]
            y0, y1 = y[i-1], y[i]

            k = (y1 - y0)/ (x1 - x0)
            b = 0.5 * (y0 + y1) - k / 2 * (x0 + x1)

            self.segments[(x0, x1)] = (k, b)

    def __call__(self, x):
        """
        Вычисляет значения функции в точках.
        """
        assert x.ndim == 1

        y = np.zeros(x.size)
        for i, x_p in enumerate(x):
            y[i] = self._interp1point(x_p)

        return y
```

```
    def _interp1point(self, x_p):
        """
        Вспомогательный метод для нахождения
        значения функции в точке.
        """
        if x_p < self.a or self.b < x_p:
            raise ValueError(f'x={x_p}')

        kx, bx = None, None
        for (x0, x1), (k, b) in self.segments.items():
            if x0 <= x_p and x_p <= x1:
                kx = k
                bx = b
                break
        return k * x_p + b
```

```
class NewtonInterp1d:
    """
    Класс для интерполяции с помошью интеполяционного
    многочлена в форме Ньютона.
    """
    def __init__(self, x, y):
        assert x.ndim == 1
        assert y.ndim == 1
        assert x.shape == y.shape

        n = x.size - 1
        self.n = n
        self.f_coeffs = np.zeros(n + 1)
        self.x_data = x.copy()

        for k in range(n + 1):
            divided_diff = 0.0
            for i in range(k + 1):
                divider = 1
```

```
                for j in range(k + 1):
                    if j == i:
                        continue
                    divider *= \
                    (self.x_data[i] - self.x_data[j])
                divided_diff += (y[i] / divider)
            self.f_coeffs[k] = divided_diff

    def __call__(self, x):
        """
        Находит значения многочлена в точках.
        """
        assert x.ndim == 1

        poly_res = 0.0
        term = 1
        for k in range(self.n + 1):
            poly_res += term * self.f_coeffs[k]
            term *= (x - self.x_data[k])
        return poly_res
```

3.4 Результаты



(a) График $f(x)$ и интерполяций (b) График ошибок интерполяций

Рис. 3: Сравнение кусочно-линейной и глобальной интерполяций. Интерполяция производилась по $k = 8$ точкам отрезка.

Видно, что кусочно-линейная интерполяция больше ошибается в окрестности точки $x = 1$. При этом на всём отрезке, за исключением небольшой окрестности точки $x = 1$, обе интерполяции показывают примерно одинаковые ошибки.

4 Задача 6.9.5. Сплайн-интерполяция

4.1 Формулировка задачи

Дана функция $y = f(x)$. Необходимо приблизить $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ методом глобальной интерполяции и указанным в варианте сплайном. На одном чертеже построить графики приближающей функции и $f(x)$. Сравнить качество приближения при разном количестве узлов интерполяции.

Согласно условию варианта, сплайн - кубический дефекта 1, $f(x) = \frac{\cos(x^3)}{x}$, $a = 1,\ b = 2.75$.

4.2 Теоретический материал

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$, разбитом на части $[x_{i-1}, x_i]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Кубическим сплайном дефекта 1 называется функция $S(x)$, которая:

- на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ является многочленом степени не выше третьей.
- имеет непрерывные первую и вторую производные на $[a, b]$.
- в точках x_i выполняется равенство $S(x_i) = f(x_i)$, то есть сплайн $S(x)$ интерполирует функцию $f(x)$ в точках x_i.

Для однозначного задания сплайна перечисленных выше условий недостаточно, необходимо наложить граничные условия. Одним из вариантов таких условий, который мы будем дальше использовать, является *естественный сплайн* - граничные условия вида $S''(a) = S''(b) = 0$.

Пусть на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ выражается как

$$S(x) = S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

тогда для *естественного сплайна* можно выписать формулы для нахождения a_i, b_i, c_i, d_i:

$$a_i = f(x_i)$$

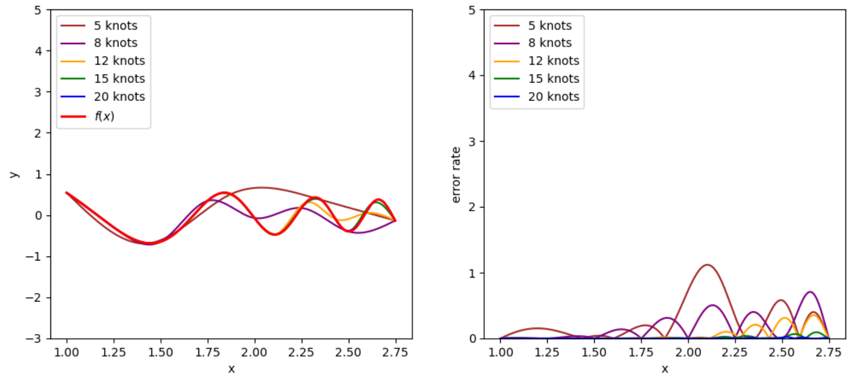
$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{3h_i}$$

$$b_i = \frac{a_i - a_{i-1}}{h_i} - \frac{2 \cdot c_{i-1} + c_i}{3} \cdot h_i$$

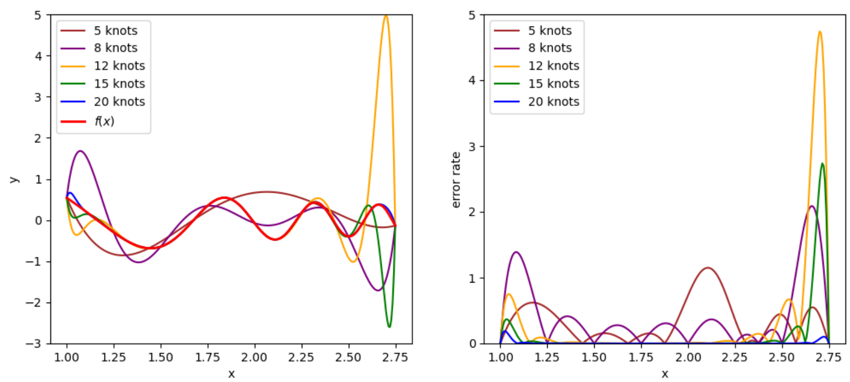
$$c_{i-1} \cdot h_i + 2c_i \cdot (h_i + h_{i+1}) + c_{i+1} \cdot h_{i+1} = 3 \cdot \left(\frac{a_{i+1} - a_i}{h_{i+1}} - \frac{a_i - a_{i-1}}{h_i} \right)$$

где $h_i = x_i - x_{i-1}$, и при этом $c_n = S''(x_n) = 0$, $c_1 - 3d_1 h_1 = S''(x_0) = 0$.

4.3 Результаты



(a) Кубический сплайн дефекта 1



(b) Глобальная интерполяция по формулам Ньютона

Рис. 4: Интерполяция функции $f(x)$ при разном количестве узлов интерполяции. На левых рисунках изображены интерполяции и $f(x)$, на правых - ошибки интерполяций.

Видно, кубический сплайн лучше приближает $f(x)$, нежели интерполяционный многочлен Ньютона. При этом для кубического сплайна, уже начиная с 15 узлов визуально очень трудно отличить $f(x)$ от интерполяции.