Федеральное автономное образовательное учреждение
высшего образования

«Национальный исследовательский университет «Высшая
школа экономики»»

Отчет по лабораторной работе 6

Численное решение задачи Коши

Вариант 10: задачи 7.1.10, 7.3.4, 7.5.4

Выполнил:

Студент группы БПМ-211
Ляхов Артём Андреевич

Преподаватель:

Брандышев Петр Евгеньевич

Июнь 2024 г.

Содержание

1 Задача 7.1.10. Метод Эйлера и метод Рунге-Кутты 4 порядка для решения задачи Коши

1.1 Формулировка задачи

Необходимо найти приближённое решение задачи Коши для ОДУ первого порядка:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

на отрезке $t \in [t_0, T]$.

Решение задачи должно состоять из следующих шагов:

1. Задать исходные данные $f(t, y)$, y_0 t_0, T.

2. Написать функцию, реализующую метод Эйлера, и с её помощью найти приближенное решение задачи Коши с шагом $h = 0.1$.

3. Написать функцию, реализующую метод Рунге-Кутты четвёртого порядка, и с её помощью найти решение задачи Коши с шагом $h = 0.1$.

4. Найти решение задачи Коши аналитически.

5. На одном рисунке построить графики приближённых и точного решений.

6. Оценить погрешность найденных решений двумя различными способами:

   - по формуле $\varepsilon = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant N} |y(t_i) - y_i|$, где $y(t)$ - аналитическое решение, y_i - значение приближённого значения в узле сетки.
   - по правилу Рунге (по правилу двойного пересчёта).

7. Выяснить при каком значении шага $h = h^*$ решение, полученное по методу Эйлера, будет иметь такую же погрешность, как решение, полученное с помощью метода Рунге-Кутты с шагом $h = 0.1$.

Согласно условию варианта:

$$f(t,y) = -\frac{2t}{1+t^2} \cdot y + \frac{2t^2}{1+t^2}, \qquad t_0 = 0, \quad T = 1, \quad y_0 = 2/3$$

1.2 Теоретический материал

1.2.1 Аналитическое решение задачи Коши

Решаемое нами уравнение

$$y' = -\frac{2t}{1+t^2} \cdot y + \frac{2t^2}{1+t^2} \tag{1}$$

является линейным неоднородным уравнением первого порядка. Уравнения данного типа можно решать с помощью метода вариации постоянной.

Для этого сначала найдём решение соответствующего однородного уравнения. Это решение будем иметь вид:

$$y(t) = \frac{C}{1+t^2}, \quad C \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Затем варьируем константу, то есть представляем решение исходного уравнения в виде:

$$y(t) = \frac{C(t)}{1+t^2}$$

После подстановки выражения выше в исходное уравнение получаем, что

$$C(t) = \frac{2}{3}t^3 + E, \quad E \in \mathbb{R}$$

Используя начальное условие $y(0) = 2/3$, мы можем найти E и вместе с тем выписать итоговое решение задачи Коши:

$$y(t) = \frac{2}{3}\left(\frac{1+t^3}{1+t^2}\right) \tag{3}$$

1.2.2 Метод Эйлера

Метод Эйлера - простейший численный метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть дана задача Коши для уравнения первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y|_{t=t_0} = y_0 \end{cases}$$

Тогда согласно методу Эйлера приближённое решение в узлах x_i, которое мы обозначим за y_i, определяется через соотношение

$$y_i = y_{i-1} + (t_i - t_{i-1}) \cdot f(t_{i-1}, y_{i-1}) \tag{4}$$

Если длина шага постоянна и равна h, то соотношение 4 можно переписать в виде:

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot f(t_{i-1}, y_{i-1}) \tag{5}$$

Метод Эйлера является методом первого порядка и погрешность на шаге $O(h^2)$ $h \to 0$.

1.2.3 Метод Рунге-Кутты четвёртого порядка

Рассмотрим задачу Коши для ОДУ первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y|_{t=t_0} = y_0 \end{cases}$$

Тогда приближённое значение в последующих точках, согласно методу Рунге-Кутты 4 порядка, вычисляется по итерационной формуле:

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{6}$$

Вычисление нового значения производится в 4 стадии:

$$\begin{cases} k_1 = f(x_{i-1},\ y_{i-1}) \\ k_2 = f\left(t_{i-1} + \frac{h}{2},\ y_{i-1} + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 = f\left(t_{i-1} + \frac{h}{2},\ y_{i-1} + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 = f\left(t_{i-1} + h,\ y_{i-1} + hk_3\right) \end{cases} \tag{7}$$

где h - величина шага по сетке.

Данный метод является методом четвёртого порядка, что означает, что ошибка на одном шаге имеет порядок $O(h^5)$ $h \to 0$.

1.3 Правило Рунге

Предположим, что p - порядок метода, с помощью которого мы находим приближённое решение задачи Коши, $\hat{y}_i$ - приближённое решение задачи Коши в узле t_i, найденное при шаге $h/2$. Тогда *правило Рунге* практической оценки погрешности состоит в том, чтобы использовать оценку

$$y(t_i) - \hat{y}_i \approx \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i = \frac{\hat{y}_i - y_i}{2^p - 1} \tag{8}$$

Соответственно в качестве значения итоговой погрешности мы можем использовать величину:

$$\varepsilon = \max_{0 \le i \le N} \left| \frac{\hat{y}_i - y_i}{2^p - 1} \right| \tag{9}$$

1.4 Результаты

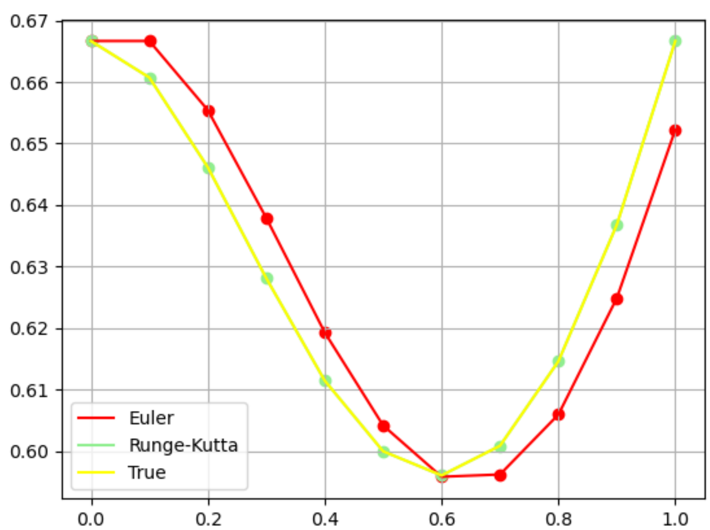


Рис. 1: Графики точного и приближённых решений, полученных с помощью метода Эйлера и Рунге-Кутты 4 порядка, на отрезке $[0, 1]$ с шагом сетки $h = 0.1$.

Метод решения	$\max\limits_{0\leqslant i\leqslant N} \lvert y(x_i) - y_i\rvert$	По правилу Рунге
Эйлера	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$7.1 \cdot 10^{-3}$
Рунге-Кутты 4 порядка	$4.34 \cdot 10^{-7}$	$2.71 \cdot 10^{-8}$

Таблица 1: Оценки погрешностей найденных решений задачи Коши.

h	$\max\limits_{0\leqslant i\leqslant N} \lvert y(x_i) - y_i\rvert$
$3.05 \cdot 10^{-6}$	$4.46 \cdot 10^{-7}$
$1.52 \cdot 10^{-6}$	$2.23 \cdot 10^{-7}$

Таблица 2: Погрешность приближённых решений задачи Коши, найденных с помощью метода Эйлера, при различных значениях h.

Таким образом, при $h = 1.52 \cdot 10^{-6}$, решение найденное с помощью метода Эйлера, имеет такую погрешность что и решение, найденное с помощью метода Рунге-Кутты 4 порядка, при $h = 0.1$.

1.5 Код на Python

```
def euler(t_arr, y0, f):
    y_arr = np.zeros(t_arr.size)
    y_arr[0] = y0

    for i, t in enumerate(t_arr[1:], start=1):
        t_prev = t_arr[i - 1]
        y_prev = y_arr[i - 1]
        h = (t - t_prev)

        y_arr[i] = y_prev + h * f(t_prev, y_prev)

    return y_arr
```

```
def rkfixed(t_arr, y0, f):
```

```
    y_arr = np.zeros(t_arr.size)
    y_arr[0] = y0

    for i, t in enumerate(t_arr[1:], start=1):
        t_prev = t_arr[i - 1]
        y_prev = y_arr[i - 1]
        h = (t - t_prev)

        k1 = f(t_prev, y_prev)
        k2 = f(t_prev + h/2, y_prev + h/2 * k1)
        k3 = f(t_prev + h/2, y_prev + h/2 * k2)
        k4 = f(t_prev + h, y_prev + h * k3)

        y_arr[i] = y_prev + h/6 * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)

    return y_arr
```

2 Задача 7.3.4 Метод Рунге-Кутты 4 порядка и экстраполяционный метод Адамса 3 порядка для решения задачи Коши

2.1 Формулировка задачи

Необходимо приближённо решить задачу Коши для ОДУ первого порядка

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

при помощи метода Рунге-Кутты 4 порядка и метода, указанного в варианте, с шагами h, $h/2$. Для каждого метода необходимо оценить погрешность по правилу Рунге и вычислить уточнённое решение. Построить на одном чертеже графики приближённых решений (с шагом $h/2$) и графики уточнённых решений.

Согласно условию варианта вторым методом решения является экстраполяционный метод Адамса 3 порядка и при этом

$$f(t, y) = y + 2ty^2, \qquad t_0 = 0, \quad T = 0.8, \quad y_0 = 0.5$$

2.2 Теоретический материал

2.2.1 Экстраполяционный метод Адамса 3 порядка

Предположим, что мы хотим численно решить задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y|_{t=t_0} = y_0 \end{cases}$$

Пусть h - шаг сетки, тогда приближённые значения решения в узлах сетки y_i, согласно экстраполяционному методу Адамса 3 порядка, вычисляются через соотношение

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{12}\left(23f(t_{i-1}, y_{i-1}) - 16f(t_{i-2}, y_{i-2}) + 5f(t_{i-3}, y_{i-3})\right) \tag{10}$$

2.2.2 Правило Рунге для уточнения решения

Правило Рунге практической оценки погрешности (правило двойного пересчёта):

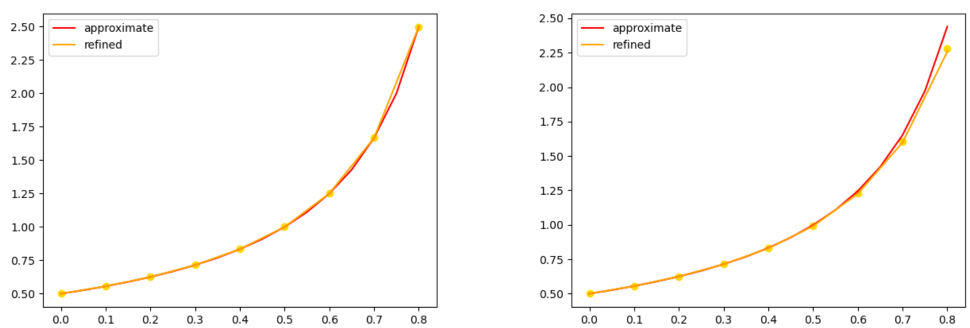
$$y(t_i) - \hat{y}_i \approx \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i = \frac{\hat{y}_i - y_i}{2^p - 1}$$

где $y(t)$ - точное решение, p - порядок метода.

Используя оценку погрешности найденного решения в узле t_i, мы можем построить *приближённое решение*:

$$y_i^* = \hat{y}_i + \varepsilon_i \tag{11}$$

2.3 Результаты



(a) Метод Рунге-Кутты (b) Метод Адамса 3 порядка

Рис. 2: Визуализация приближённых и уточнённых решений задачи Коши.

Метод	Погрешность
Рунге-Кутты 4 порядка	$5.09 \cdot 10^{-5}$
Адамса 3 порядка	$2.2 \cdot 10^{-2}$

Таблица 3: Оценки погрешностей приближённых решений по правилу Рунге.

2.4 Код на Python

```
def adams(t_arr, y0, f):
    h = t_arr[1] - t_arr[0]

    y_arr = np.zeros(t_arr.size)
    y_arr[0:3] = rkfixed(t_arr[0:3], y0, f)

    for i, t in enumerate(t_arr[3:], start=3):
        t_prev3 = t_arr[i - 3]
        y_prev3 = y_arr[i - 3]
        y3 = f(t_prev3, y_prev3)

        t_prev2 = t_arr[i - 2]
        y_prev2 = y_arr[i - 2]
        y2 = f(t_prev2, y_prev2)

        t_prev1 = t_arr[i - 1]
        y_prev1 = y_arr[i - 1]
        y1 = f(t_prev1, y_prev1)

        y_arr[i] = y_arr[i - 1] + (h/12) * \
                (23 * y1 - 16 * y2 + 5 * y3)

    return y_arr
```

3 Задача 7.5.4. Сравнение метода Эйлера и метода Рунге-Кутты 4 порядка

3.1 Формулировка задачи

Дана жёсткая задача Коши. Необходимо найти решение задачи с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$. Решение задачи должно состоять из следующих шагов:

1. Используя функцию **euler**, написанную для задачи 7.1, найти приближённое решение задачи Коши явным методом Эйлера с шагом $h = 0.15$.

2. Найти решение задачи методом Рунге-Кутты 4 порядка с помощью функции **rkfixed**, написанной для задачи 7.1 с шагом $h = 0.15$.

3. Построить графики приближённых и точного решений задачи.

4. Уменьшая шаг, найти решения задачи с заданной точностью ε каждым из методов. Сравнить значения шагов, при которых достигается точность ε.

5. Объяснить полученные результаты.

Согласно условию варианта:

$$f(t, y) = -20y + 20 - 19e^{-t}, \quad t_0 = 0,\ T = 1.5,\ y_0 = 1$$

Решением задачи Коши является функция

$$y(t) = 1 - e^{-t} + e^{-20t}$$

3.2 Теоретический материал

Рассмотрим задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u' = A(t) \cdot u(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{12}$$

где $u = u(t)$ - вектор функция, $A(t)$ - матрица-функция.

Будем называть систему выше жёсткой если, если число жёсткости системы

$$S = \frac{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i|}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i|} \tag{13}$$

достаточно велико.

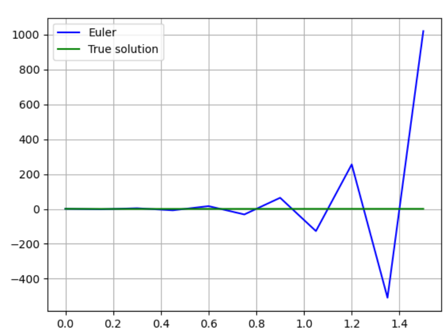
Любое линейное неоднородное уравнение первого порядка вида:

$$y'(t) = a_1 y(t) + f(t)$$

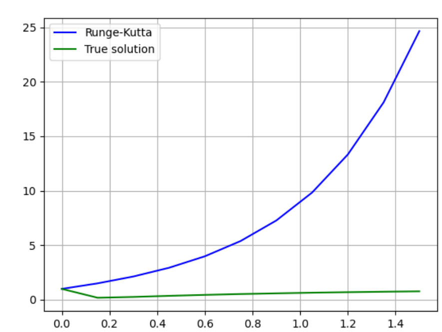
можно представить в виде 12, для этого достаточно ввести новую функцию $u(t) = f(t)$. Исходя из этого, мы будем говорить, что задачи Коши для ЛНУ первого порядка является жёсткой, если является жёсткой соответствующая ей система 12.

Для жёстких систем характерно то, что для них явные методы численного решения (метод Эйлера, методы Рунге-Кутты, методы Адамса и др.), как правило, показывают неудовлетворительные результаты, что выражается в резком увелечении числа итераций или резком возрастании погрешности (взрыв погрешности). В то же время неявные методы для данного класса задач показывают результаты лучше, чем явные.

3.3 Результаты



(a) Метод Эйлера



(b) Метод Рунге-Кутты 4 порядка

Рис. 3: Визуализация приближённых решений, найденных при помощи метода Эйлера и метода Рунге-Кутты 4 порядка, при $h = 0.15$.

Метод решения	Длина шага h	Погрешность
Эйлера	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$5.4 \cdot 10^{-4}$
Рунге-Кутты	$2.9 \cdot 10^{-2}$	$5.7 \cdot 10^{-4}$

Таблица 4: Длины шагов сетки, при которых достигается точность $\varepsilon = 10^{-3}$. В качестве погрешности бралась величина $\max |y(x_i) - y_i|$.

Вывод: Анализируя графики, мы можем сделать два наблюдения. Во-первых, при длине шага $h = 0.15$ приближённые решения системы, найденные с помощью метода Эйлера и Рунге-Кутты, имеют огромную погрешность. Во-вторых, для того, чтобы достичь требуемой точности решения в 10^{-3}, нам необходимо сделать шаг по сетке достаточно маленьким, что говорит о неэффективности метода Эйлера и метода Рунге-Кутты 4 порядка для данной задачи. Оба этих факта легко объясняются тем, что решаемая задача Коши является жёсткой.