

НАЗВАНИЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФРАКЦИИ ФРЕНЕЛЯ И ФРАУНГОФЕРА СВЕТА НА УЗКОЙ ПРОТЯЖЕННОЙ ЩЕЛИ

Казаков Данила

Маслов Артём

Б01-104

10.02.2022

Аннотация

АННОТАЦИЯ

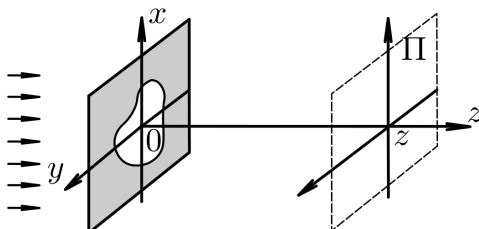
В работе исследуется дифракция Френеля и Фраунгофера на узкой протяженной щели.

Ключевые слова: дифракция Френеля, дифракция Фраунгофера.

Теория

Явление отклонения от распространения света согласно законам геометрической оптики, называется *дифракцией* в широком смысле слова. В узком смысле слова дифракцией называется явление огибания светом препятствия и проникновение в область геометрической тени.

Основная задача дифракции



При рассмотрении явления дифракции решается следующая основная задача.

Пусть в плоскости $z = 0$ находится экран с отверстием произвольной формы, и в полупространстве $z < 0$ находятся источники излучения. Пусть известно результирующее поле от источников $f_{\text{и}}(x, y, 0)$, которое они создают в плоскости $z = 0$ в отсутствии экрана. Тогда

Рис. 1: Основная задача дифракции

1. Зная оптические свойства материала, из которого изготовлен экран и геометрические размеры отверстия, необходимо найти распределение поля $f_0(x, y, 0)$ сразу после экрана, в плоскости $z = +0$.

2. По распределению поля на границе экрана $f_0(x, y, 0)$ нужно найти значение поля в области пространства $z > 0$, в частности на исследуемой поверхности Π , находящейся на расстоянии z от экрана.

Получить аналитическое выражение для электромагнитного поля на границе экрана $f_0(x, y, 0)$ часто не возможно. Во-первых, электромагнитная волна на поверхности экрана порождает переменные токи. Электромагнитное поле индуцированных токов необходимо учитывать при вычислении поля на границе экрана. Во-вторых, отверстие может иметь сложную геометрию. В-третьих, оптические свойства материала экрана могут быть не линейными.

Для упрощения решения основной задачи, применяется *приближение Кирхгофа*. Предполагается, что поле в той части экрана, где есть отверстие равно результирующему полю источников $f_{\text{и}}(x, y, 0)$, если бы не было экрана. В области, затененной экраном поле источников считается равным 0. То есть в данном приближении пренебрегается взаимодействием экрана и электромагнитного поля. Данное приближение хорошо описывает реальные физические системы, если, во-первых, линейные размеры отверстия b велики по сравнению с длиной волны λ : $b > \lambda$. Во-вторых, если плоскость наблюдения находится на расстоянии z много большем длины волны: $z \gg \lambda$.

Принцип Гюйгенса-Френеля

Согласно *принципу Гюйгенса-Френеля*, каждая точка волнового фронта является источником вторичных сферических волн, а результирующее поле в исследуемой точке пространства — результат интерференции вторичных волн.

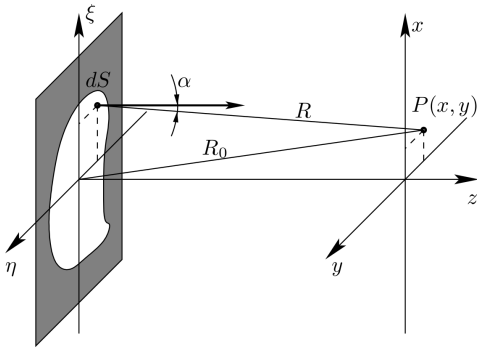


Рис. 2: Принцип Гюйгенса-Френеля

Получим качественную оценку для поля в исследуемой точке пространства $P(x, y, z)$. Рассмотрим точку отверстия с координатами (ξ, η) . Она является источником вторичных сферических волн с амплитудой, пропорциональной амплитуде исходной волны. Фаза вторичной волны равна фазе исходной волны. В точке P амплитуда сферической волны уменьшится в R раз, фаза изменится на e^{ikR} . Предполагается, что амплитуда колебаний поля в исследуемой точке пропорциональна видимой площади $ds \cos \alpha$ элементарной площадки, создающей вторичные волны. Итого поле $dg(x, y)$, созда-

ваемое в точке P , площадкой ds :

$$dg(x, y) \sim f_0(\xi, \eta) \frac{e^{ikR}}{R} \cos \alpha d\xi d\eta$$

Интегрируя по всей области отверстия получим выражение для результирующего поля $g(x, y)$ в точке P :

$$g(x, y) = K_0 \iint_S f_0(\xi, \eta) \frac{e^{ikR}}{R} \cos \alpha d\xi d\eta \quad (1)$$

где коэффициент пропорциональности $K_0 = \frac{1}{i\lambda}$. Данное соотношение является количественной формулировкой принципа Гюйгенса-Френеля.

При использовании принципа Гюйгенса-Френеля используют следующие приближения. Во-первых, так как обычно рассматриваются параксиальные лучи, то расстояние R от точек отверстия до всех точек исследуемой плоскости считается одинаковым и равным R_0 :

$$g(x, y) = \frac{1}{i\lambda R_0} \iint_S f_0(\xi, \eta) e^{ikR} \cos \alpha \, d\xi \, d\eta$$

Для оценки изменения фазы нужно использовать более точную оценку. Разложим расстояние R по формуле Тейлора до второго порядка:

$$R = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \approx z + \frac{(x - \xi)^2}{2z} + \frac{(y - \eta)^2}{2z}$$

Предполагается, что члены разложения Тейлора более высокого вносят малую поправку в полученный результат. Такое приближение называется *френелевским*. Итого значение поля в точке $P(x, y, z)$ вычисляется по формуле:

$$g(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint_S f_0(\xi, \eta) e^{i\frac{k}{2z}((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)} \, d\xi \, d\eta \quad (2)$$

Дифракция Френеля на круглом отверстии

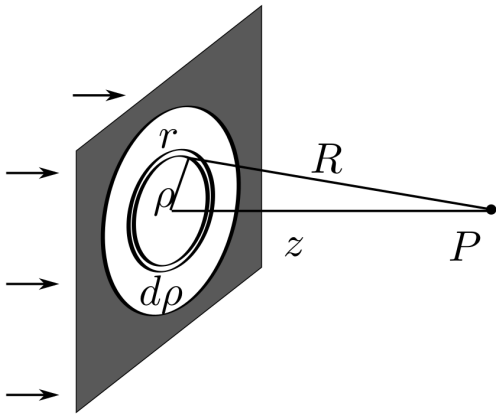


Рис. 3: Дифракция Френеля

Найдем распределение поля в точке $P(0, 0, z)$ от круглого отверстия радиуса r . Будем считать, что экран с отверстием освещается параллельным пучком световых волн с одинаковой амплитудой колебаний A_0 . Тогда преобразуем формулу (2), перейдя к интегрированию по кольцам радиуса ρ , толщиной $d\rho$ и площадью $ds = 2\pi\rho d\rho$:

$$g = A_0 \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \int_0^r e^{i\frac{k}{2z}\rho^2} 2\pi\rho d\rho = A_0 e^{ikz} \left(1 - e^{-ik\frac{k}{2z}r^2}\right)$$

Интенсивность поля в точке P вычисляется по формуле:

$$I \propto |g|^2 = 2I_0 \left(1 - \cos\left(\frac{k}{2z}r^2\right)\right) \quad (3)$$

где I_0 – интенсивность исходной волны, усреднение производится за время много больше периода колебаний электромагнитной волны.

Проанализируем полученный результат. Точки $r_m = \sqrt{m\lambda z}$, $m = 1, 2, 3, \dots$ являются точками экстремума функции интенсивности. При нечётных m наблюдается максимум $I_{max} = 4I_0$, при чётных m – минимум $I_{min} = 0$.

Полученное соотношение справедливо, когда $\frac{\cos \alpha}{R} \approx \frac{1}{R_0}$. С помощью *метода векторных*

диаграмм качественно учтем влияние множителя $\frac{\cos \alpha}{R}$ на результат.

Рассмотрим последовательность колец радиусом ρ_n , достаточно малой толщины $d\rho_n \ll 1$ и одинаковой площади $dS_n = dS_{n+1} = dS$. Тогда вклад от одного кольца в поле в точке P обозначим в виде вектора $d\mathbf{A}$ на векторной диаграмме. Модуль этого вектора $dA = A_0 \frac{\cos \alpha}{\lambda R} dS$. Угол наклона вектора относительно горизонтали обозначим за $\varphi = \frac{k}{2z} \rho^2$. Угол между двумя соседними векторами $d\varphi = \frac{k}{z} \rho d\rho = \frac{1}{\lambda z} dS$ – постоянная величина.

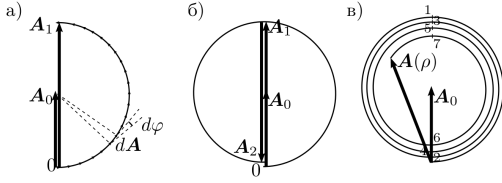


Рис. 4: Метод векторных диаграмм. Спираль Френеля.

Векторы $d\mathbf{A}$, построенные последовательно друг за другом будут образовывать спираль, медленно скручивающуюся к центру (модуль вектора dA убывает с увеличением радиуса кольца). Результирующее поле $\mathbf{A}(\rho)$ в точке P равно сумме вкладов отдельных колец $d\mathbf{A}$ (рис. 4в).

Кольцо $r_{m-1} < \rho < r_m$, где $r_m = \sqrt{m\lambda z}$ называется m -ой зоной Френеля. Не трудно показать, что результирующие колебания, создаваемые двумя последовательными зонами Френеля, сдвинуты по фазе на π . На векторной диаграмме зонам Френеля соответствуют полуокружности. На рисунке 4а изображена первая зона Френеля, результирующий вектор $A_1 = 2A_0$. На рисунке 4б открыты две зоны Френеля и результирующее поле в точке P мало, но не равно нулю.

Если открыто нечётное число зон Френеля, то наблюдается максимум амплитуды, если открыто чётное число зон Френеля, то – минимум. При открытии большого числа зон Френеля вектор результирующих колебаний $A(\rho)$ медленно стремится к центру спирали и в пределе полностью открытого пространства равен по амплитуде колебаниям поля источников A_0 .

Дифракция Френеля на узкой щели

Рассмотрим бесконечно длинную узкую щель. Направим ось η вдоль длинной стороны. Пусть вдоль оси ξ края щели имеют координаты b_1 и b_2 . Определим амплитуду колебаний света в точке $P(0, 0, z)$. Преобразуем двойной интеграл в формуле (2) к повторному:

$$g = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \int_{b_1}^{b_2} f_0(\xi, \eta) e^{i\frac{k}{2z}\xi^2} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{k}{2z}\eta^2} d\eta$$

Интеграл по η является интегралом Пуассона и равен константе:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{k}{2z}\eta^2} d\eta = \sqrt{\pi}$$

С учетом данного соотношения преобразуем формулу для вклада :

$$g = A_0 \int_{b_1}^{b_2} f_0(\xi, \eta) e^{i\frac{k}{2z}\xi^2} d\xi$$

Проанализируем полученное соотношение, используя метод векторных диаграмм. Разо-

бьем щель на узкие бесконечно длинные полоски шириной $d\xi$. Каждая такая полоска вносит вклад в колебание поля в точке P равный $d\mathbf{A}$. Модуль этого вектора равен $dA = A_0 \cdot d\xi$, угол наклона относительно горизонтали $\varphi = \frac{k}{2z}\xi^2$. Угол между соседними векторами $d\varphi = \frac{k}{z}\xi d\xi \neq \text{const}$. Полученная формула сильно похожа на формулу, полученную в случае дифракции Френеля на круглом отверстии. Для круглого отверстия $d\varphi = \text{const}$, так как кольца выбирались так, что их площадь была постоянной $dS = 2\pi\rho d\rho = \text{const}$. Для узких бесконечно длинных полосок, в отличие от тонких колец, нельзя выбрать шаг $d\xi$ так, чтобы одновременно $dA = \text{const}$ и $d\varphi = \text{const}$.

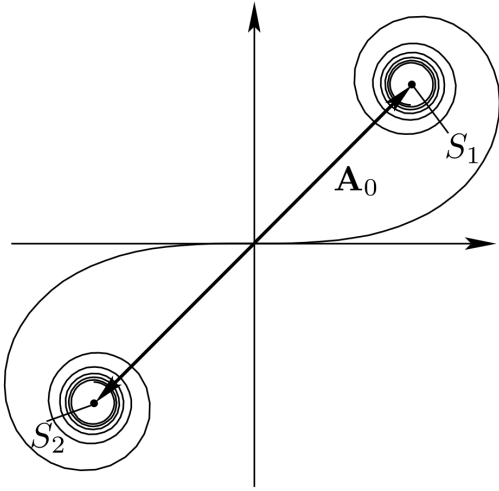


Рис. 5: Метод векторных диаграмм. Спираль Корню.

В результате сложения вкладов отдельных полосок конец вектора результирующей амплитуды колебаний будет описывать спираль Корню. Когда вектор $d\mathbf{A}$ повернётся относительно начального на π , то полосе $\xi \in [0; \pi]$ называют первой зоной Шустера. Полосу $\xi \in [\xi_{m-1}; \xi_m]$, где $\xi_m = \sqrt{m\lambda z}$ называют m -ой зоной Шустера.

Спираль Корню быстро скручивается к фокусам S_1 и S_2 при открытии большого числа зон Шустера. При открытии двух зон, амплитуда колебаний близка к максимальной. При открытии бесконечно большого числа зон Шустера, вектор результирующих колебаний соединяет фокусы спирали и по модулю равен A_0 - амплитуде колебаний поля источников.

Условия, определяющие тип дифракции

Пусть размер характерный размер отверстия равен b . Тогда всего будет открыто m зон Френеля (Шустера):

$$m = \frac{b^2}{\lambda z} = \frac{1}{p^2}$$

где p – волновой параметр, определяющий тип дифракции.

Если $p \ll 1$ ($m \gg 1$), то открыто почти всё пространство и свойства распространения света описываются геометрической оптикой. Если $p \sim 1$ ($m \sim 1$), то наблюдается дифракция Френеля. Если $p \gg 1$ ($m \ll 1$), то наблюдается дифракция Фраунгофера.

Дифракция Фраунгофера

Рассмотрим дифракцию на отверстии с максимальным размером b . То есть $\xi^2 + \eta^2 \leq b^2$. Определим амплитуду колебаний в точке $P(x, y, z)$. Расстояние от точки P до площадки dS - источника вторичных волн равно

$$R = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} = \sqrt{R_0 - (2x\xi + 2y\eta) + (\xi^2 + \eta^2)}$$

где $R_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Рассмотрим параксиальное приближение, когда расстояние до наблюдаемой точки много больше размеров отверстия, тогда

$$R \approx R_0 - \frac{x\xi + y\eta}{R_0} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R_0} \approx R_0 - \frac{x\xi}{R_0} - \frac{y\eta}{R_0}$$

здесь применяется приближение $\xi^2 + \eta^2 \leq b \ll R_0$.

Принцип Гюйгенса-Френеля для дифракции Фраунгофера:

$$g(x, y) = \frac{e^{ikR_0}}{i\lambda R_0} \iint_S f_0(\xi, \eta) e^{-i\left(\frac{kx}{R_0}\xi + \frac{ky}{R_0}\eta\right)} d\xi d\eta$$

Введем переменные $u = \frac{kx}{R_0}$, $v = \frac{ky}{R_0}$, тогда формула для колебаний поля в точке плоскости наблюдения $P(u, v)$ есть двумерное преобразование Фурье:

$$g(u, v) = \frac{e^{ikR_0}}{i\lambda R_0} \iint_S f_0(\xi, \eta) e^{-i(u\xi + v\eta)} d\xi d\eta$$

Рассмотрим квазиодномерный случай, когда $f_0(\xi, \eta) = f_0(\xi)$. Тогда амплитуда поля в наблюдаемой точке определяется выражением:

$$g(u) = A_0 \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(\xi) e^{-iu\xi} d\xi$$

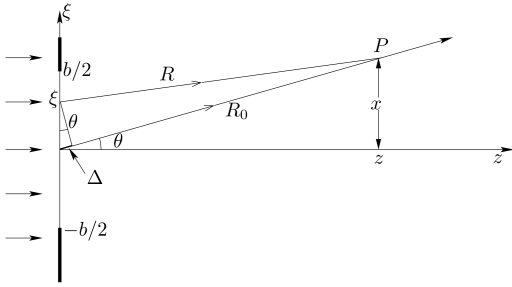


Рис. 6: Дифракция Фраунгофера в квазиодномерном случае

Определим разность хода лучей из двух точек экрана с расстоянием ξ между ними. В приближении параксиальной оптики, можно считать лучи параллельными, и разность хода определяется выражением $\Delta = \xi \sin \theta$. Тогда разность фаз $\Delta\varphi = k\xi \sin \theta = \frac{kx}{R_0} = u$. Тогда выражение, определяющее амплитуду колебаний в наблюдаемой точке, преобразуется к виду:

$$g(u) = A_0 \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(\xi) e^{-ik \sin \theta \xi} d\xi$$

Полученное соотношение аналогично преобразованию Фурье временной зависимости $f_0(t)$ в спектр:

$$C(\omega) = \int f_0(t) e^{-i\omega t} dt$$

Поэтому $u = k \sin \theta$ называют пространственной частотой по аналогии с временной частотой ω .

В параксиальном случае положение точки полностью определяется углом θ , поэтому значение амплитуды колебаний поля в наблюдаемой точке не изменится, если точку перемещать вдоль луча, соединяющего её с отверстием. Данное свойство используется для наблюдения дифракции Фраунгофера. В лабораторных условиях не возможно удалить наблюдаемую плоскость на достаточно большое расстояние от отверстия. Поэтому между наблюдаемым экра-

ном и отверстием ставится собирающая линза. Параллельные лучи, падающие на собирающую линзу под углом θ она фокусирует в фокальной плоскости на расстоянии $f \sin \theta$ от главного фокуса. Поэтому наблюдаемое распределение интенсивности после прохождения света линзы не изменится (изменится лишь масштаб наблюдаемого распределения).

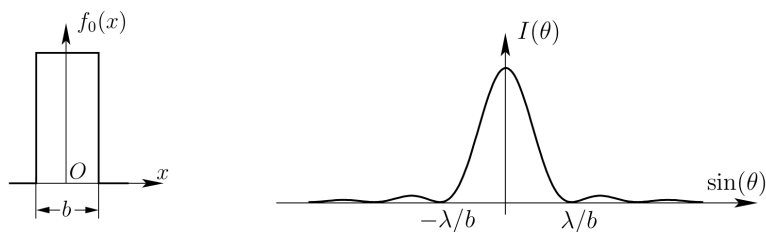


Рис. 7: Зависимость $f_0(x)$ (слева) и распределение интенсивности (справа) при дифракции на щели

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера на щели. Пусть щель освещается параллельным пучком света с амплитудой колебаний f_0 . Распределение амплитуды колебаний $f_0(x)$ описывается прямоугольным импульсом (рис. 7).

Для определения амплитуды колебаний поля в наблюдаемой плоскости применим преобразова-

ние Фурье:

$$g(\theta) = A_0 \frac{\sin\left(\frac{kb}{2} \sin \theta\right)}{\frac{kb}{2} \sin \theta}$$

Распределение интенсивности в зависимости от направления θ изображено на рисунке 7.

Описание экспериментальной установки

Схема экспериментальной установки для исследования дифракции Френеля на щели приведена на рисунке:

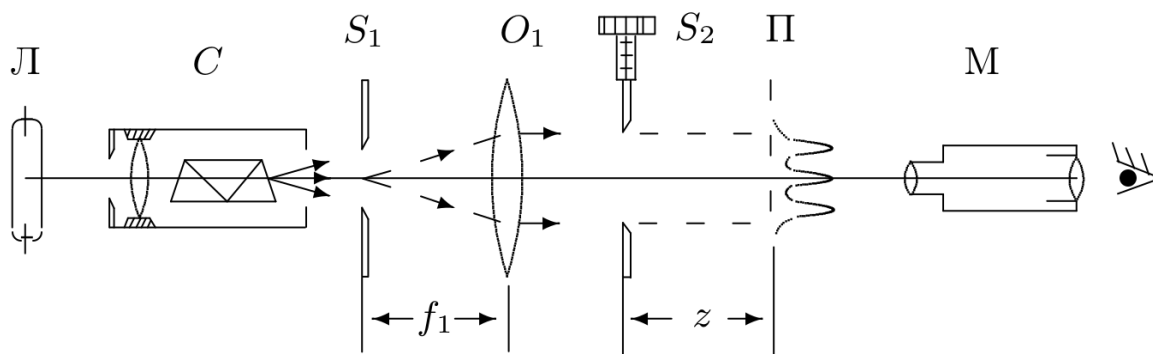


Рис. 8: Схема экспериментальной установки

Схема экспериментальной установки для исследования дифракции Фраунгофера на щели приведена на рисунке:

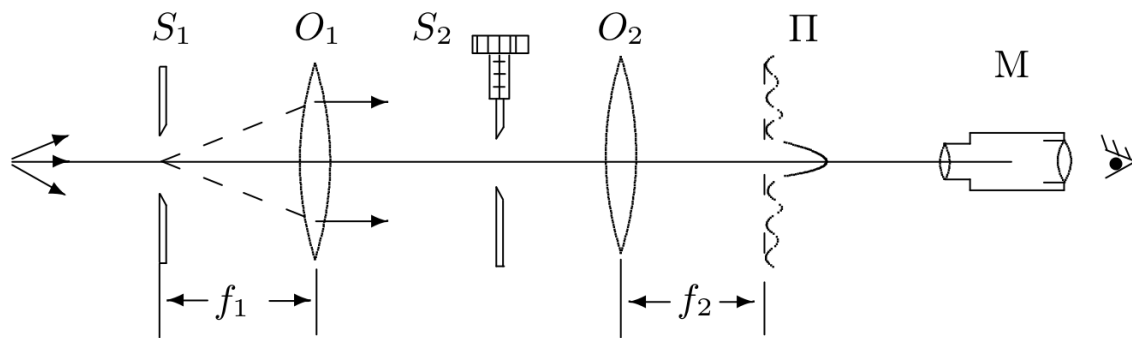


Рис. 9: Схема экспериментальной установки

Схема экспериментальной установки для исследования дифракции Фраунгофера на двух щелях приведена на рисунке:

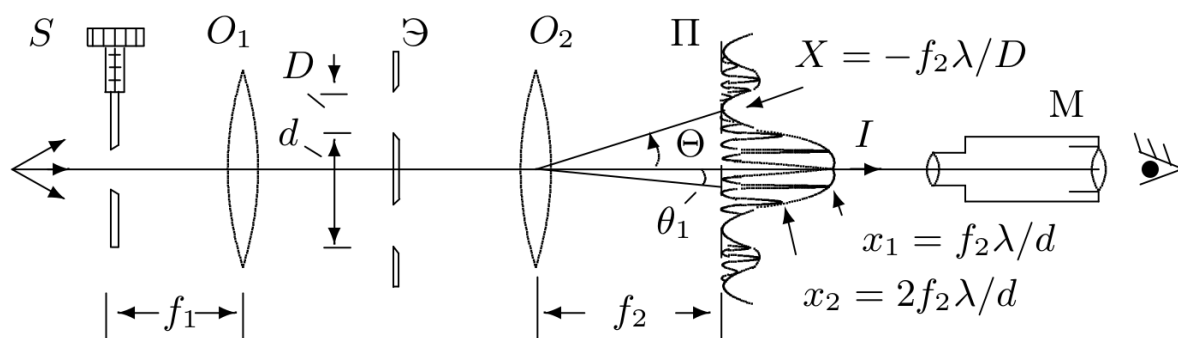


Рис. 10: Схема экспериментальной установки

Схема экспериментальной установки для исследования влияния дифракции на разрешающую способность оптического прибора приведена на рисунке:

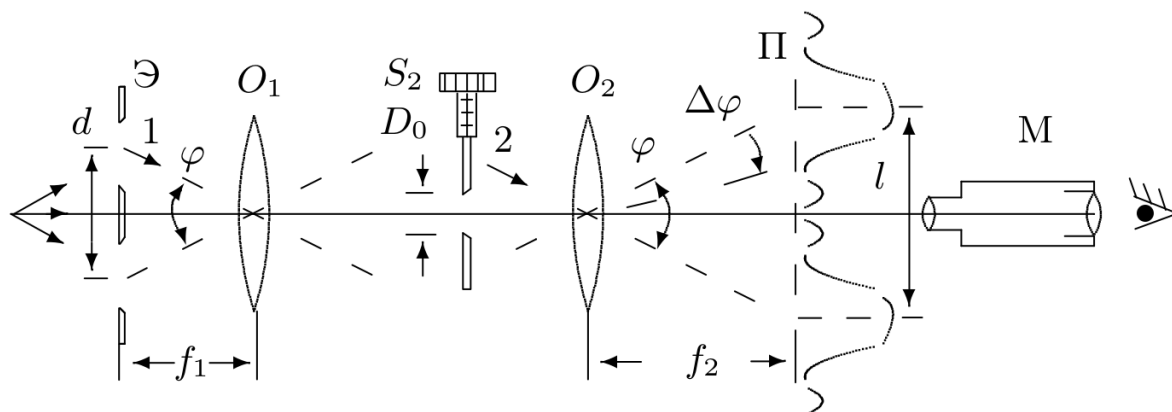


Рис. 11: Схема экспериментальной установки

Методика эксперимента

Оборудование

1. Оптическая скамья.

2. Ртутная лампа.
3. Монохроматор.
4. Щели с регулируемой шириной.
5. Рамка с вертикальной нитью.
6. Двойная щель.
7. Микроскоп на поперечных салазках с микрометрическим винтом.
8. Зрительная труба.

Результаты измерений

Обсуждение результатов и выводы