3 НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

3.1 Інтегральна функція розподілу

Нагадаємо, що випадкову величину називають *неперервною*, якщо множина її можливих значень є проміжком (скінченним або нескінченним). Тому задати неперервну випадкову величину за допомогою таблиці неможливо. Для задавання неперервної випадкової величини (НВВ) застосовуються аналітичний та графічний способи.

Визначення. *Інтегральною функцією розподілу НВВ* X називається

$$F(x) = P(X < x), \quad x \in R, \tag{3.1}$$

де $F(x)$ є неперервною, диференційованою майже скрізь, за винятком можливо окремих ізольованих точок.

До властивостей інтегральної функції, що були перелічені вище (дивись пп. 2.2), додаються ще деякі властивості. Таким чином, отримаємо поповнений перелік.

Властивості інтегральної функції розподілу $F(x)$ для НВВ:

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) якщо $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$;

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

4) імовірність того, що НВВ X набуває будь-якого конкретного значення x_0, дорівнює нулю

$$P(X = x_0) = 0. \tag{3.2}$$

5) імовірності потрапляння *НВВ* X у проміжки $(\alpha;\beta), (\alpha;\beta], [\alpha;\beta)$ та $[\alpha;\beta]$ є рівними й обчислюються за формулою

$$P(\alpha \le X \le \beta) = P(\alpha < X \le \beta) = P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \tag{3.3}$$

3.2 Щільність розподілу неперервної випадкової величини (диференціальна функція розподілу)

Оскільки інтегральна функція неперервної випадкової величини є диференційованою, то можна розглядати її похідну.

Визначення. *Щільністю розподілу ймовірностей НВВ* X називається похідна від інтегральної функції розподілу НВВ X

$$f(x) = F'(x), \ x \in R. \tag{3.4}$$

Визначення. Графік функції щільності розподілу $f(x)$ називається *кривою розподілу*.

Властивості функції щільності розподілу $f(x)$:

1) $f(x) \ge 0$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;

3) $P(\alpha < X < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx. \quad (3.5)$

Зауваження:

- Щільність розподілу $f(x)$ існує лише для неперервних випадкових величин.

• Графік інтегральної функції розподілу $F(x)$ НВВ X завжди є неперервною кривою, в той час як графік щільності розподілу $f(x)$ може бути розривним.

Приклад 14. НВВ X задана своєю функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 2^x-1, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Знайти щільність розподілу, побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$. Обчислити ймовірності $P(-0{,}5<X<0{,}5)$, $P(0{,}5\le X\le 1)$.

Розв'язання. За визначенням функції щільності розподілу ймовірностей (3.4) отримаємо

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 2^x\ln 2, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1;\end{cases}=\begin{cases}2^x\ln 2, & x\in(0;1],\\ 0, & x\notin(0;1].\end{cases}$$

Графіки $f(x)$ та $F(x)$ зображено на рисунках 3.1, 3.2 відповідно.

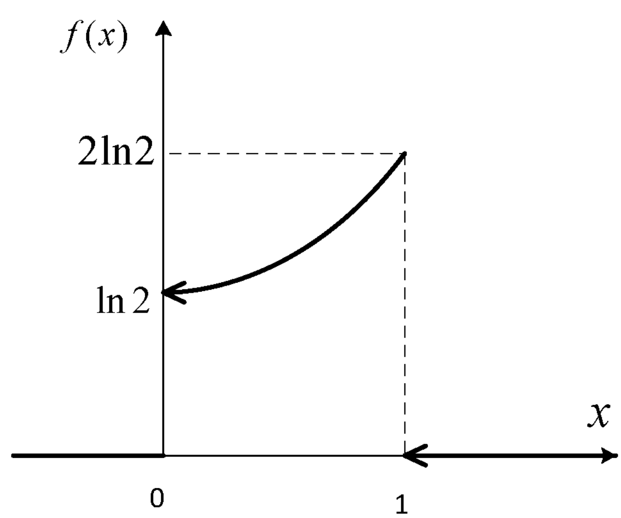

Рисунок 3.1 – Графік щільності розподілу $f(x)$

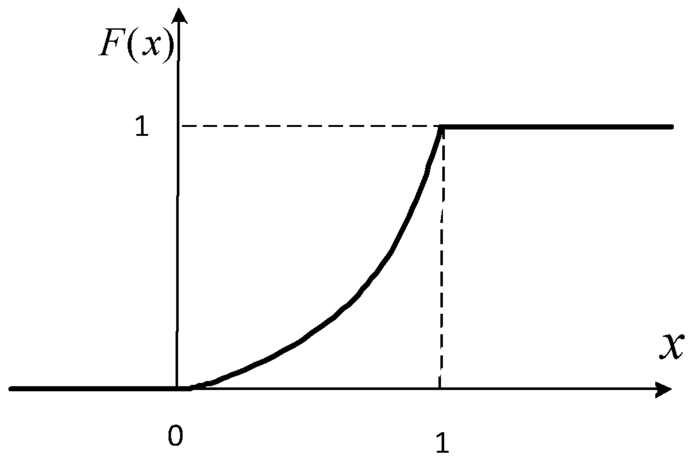

Рисунок 3.2 – Графік інтегральної функції розподілу $F(x)$

Для обчислення ймовірностей потрапляння випадкової величини X в інтервал скористуємось властивостями функції щільності розподілу (3.5):

$$P(-0{,}5 < X < 0{,}5) = \int_{-0{,}5}^{0{,}5} f(x)dx = \int_{-0{,}5}^{0} 0dx + \int_{0}^{0{,}5} 2^x \ln 2dx = \ln 2 \cdot \left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_0^{0{,}5} =$$

$$= 2^{0{,}5} - 2^0 = \sqrt{2} - 1;$$

$$P(0{,}5 \le X \le 1) = \int_{0{,}5}^{1} f(x)dx = \int_{0{,}5}^{1} 2^x \ln 2dx = \ln 2 \cdot \left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_{0{,}5}^{1} = 2 - 2^{0{,}5} = 2 - \sqrt{2}.$$

Зауважимо, що ймовірності $P(-0{,}5 < X < 0{,}5)$, $P(0{,}5 \le X \le 1)$ можна також знайти іншим способом, а саме за формулою (3.3)

$$P(-0{,}5 < X < 0{,}5) = F(0{,}5) - F(-0{,}5) = \left(2^{0{,}5} - 1\right) - 0 = \sqrt{2} - 1;$$
$$P(0{,}5 \le X \le 1) = F(1) - F(0{,}5) = \left(2^1 - 1\right) - \left(2^{0{,}5} - 1\right) = 2 - \sqrt{2}.$$

Відповідь: $P(-0{,}5 < X < 0{,}5) = \sqrt{2} - 1$; $P(0{,}5 \le X \le 1) = 2 - \sqrt{2}$.

3.3 Числові характеристики неперервної випадкової величини

Поняття математичного сподівання, дисперсії і середнього квадратичного відхилення мають такий самий зміст, як і для дискретних випадкових величин. Але у зв'язку з нескінченною множиною можливих значень НВВ формули обчислення числових характеристик є інтегральними.

Математичне сподівання $M(X)$ *НВВ* X визначається формулою

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx. \qquad (3.6)$$

Дисперсія $D(X)$ *НВВ* X обчислюється за формулою

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\left(M(X)\right)^2. \qquad (3.7)$$

Незмінною залишається формула для *середнього квадратичного відхилення НВВ* X

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \qquad (3.8)$$

Приклад 15. Задана щільність розподілу неперервної випадкової величини X

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 3;\\ 2x-6, & 3<x\le 4;\\ 0, & x>4.\end{cases}$$

Необхідно:

1) побудувати графік $f(x)$;

2) обчислити числові характеристики НВВ X.

Розв'язання:

1) побудуємо графік функції щільності $f(x)$ (рисунок 3.3);

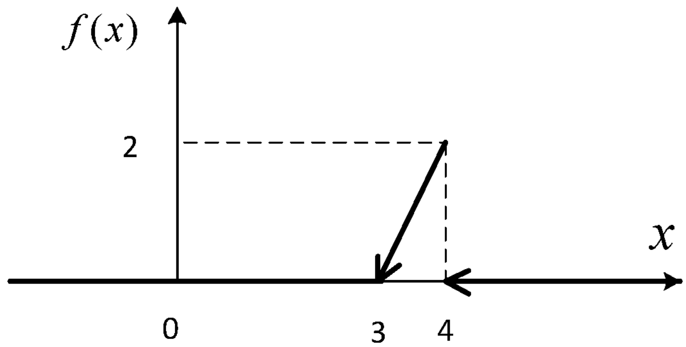

Рисунок 3.3 – Графік функції щільності $f(x)$

2) за формулами (3.6)-(3.8) обчислюємо числові характеристики:

$$M(X)=\int_3^4 x f(x)\,dx=\int_3^4 x\cdot(2x-6)\,dx=2\int_3^4\left(x^2-3x\right)dx=2\left(\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_3^4=$$

$$=2\left[\left(\frac{4^3}{3}-3\cdot\frac{4^2}{2}\right)-\left(\frac{3^3}{3}-3\cdot\frac{3^2}{2}\right)\right]=\frac{11}{3};$$

$$D(X)=\int_3^4 x^2 f(x)\,dx-\left(M(X)\right)^2=\int_3^4 x^2\cdot(2x-6)\,dx-\left(\frac{11}{3}\right)^2=$$

$$=2\int_3^4\left(x^3-3x^2\right)dx-\left(\frac{11}{3}\right)^2=2\left(\frac{x^4}{4}-3\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_3^4-\left(\frac{11}{3}\right)^2=$$

$$=2\left[\left(\frac{4^4}{4}-4^3\right)-\left(\frac{3^4}{4}-3^3\right)\right]-\left(\frac{11}{3}\right)^2=\frac{1}{18};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{1}{18}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Відповідь: $M(X)=\dfrac{11}{3}$; $D(X)=\dfrac{1}{18}$; $\sigma(X)=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$.

Приклад 16. Задано щільність розподілу неперервної випадкової величини X

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 3;\\ C_2x^2+C_1x+C_0, & 3<x\le 6;\\ 0, & x>6,\end{cases}$$

її математичне сподівання $M(X)=4$ і дисперсію $D(X)=\frac{3}{4}$.

Потрібно:

1) обчислити коефіцієнти C_2, C_1, C_0;

2) побудувати графік щільності розподілу ймовірностей $f(x)$.

Розв'язання:

1) за властивістю функції щільності розподілу (3.5) отримаємо

$$\int_3^6\left(C_2x^2+C_1x+C_0\right)dx=1;$$

$$\int_3^6\left(C_2x^2+C_1x+C_0\right)dx=\left(C_2\frac{x^3}{3}+C_1\frac{x^2}{2}+C_0x\right)\Bigg|_3^6=C_2\left(\frac{6^3}{3}-\frac{3^3}{3}\right)+$$

$$+C_1\left(\frac{6^2}{2}-\frac{3^2}{2}\right)+C_0(6-3)=63C_2+13{,}5C_1+3C_0=1.$$

За формулами (3.6), (3.7) обчислюємо числові характеристики НВВ X:

$$M(X)=\int_3^6 x\cdot\left(C_2x^2+C_1x+C_0\right)dx=\int_3^6\left(C_2x^3+C_1x^2+C_0x\right)dx=$$

$$=\left(C_2\frac{x^4}{4}+C_1\frac{x^3}{3}+C_0\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_3^6=C_2\left(\frac{6^4}{4}-\frac{3^4}{4}\right)+C_1\left(\frac{6^3}{3}-\frac{3^3}{3}\right)+C_0\left(\frac{6^2}{2}-\frac{3^2}{2}\right)=$$

$$=303{,}75C_2+63C_1+13{,}5C_0=4;$$

$$D(X)=\int_3^6 x^2\cdot\left(C_2x^2+C_1x+C_0\right)dx-4^2=\int_3^6\left(C_2x^4+C_1x^3+C_0x^2\right)dx-16=$$

$$=\left(C_2\frac{x^5}{5}+C_1\frac{x^4}{4}+C_0\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_3^6-16=C_2\left(\frac{6^5}{5}-\frac{3^5}{5}\right)+C_1\left(\frac{6^4}{4}-\frac{3^4}{4}\right)+$$

$$+C_0\left(\frac{6^3}{3}-\frac{3^3}{3}\right)-16=1506{,}6C_2+303{,}75C_1+63C_0-16=\frac{3}{4}.$$

За умовою прикладу складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases}63C_2+13{,}5C_1+3C_0=1;\\303{,}75C_2+63C_1+13{,}5C_0=4;\\1506{,}6C_2+303{,}75C_1+63C_0-16=0{,}75;\end{cases}$$

отримаємо

$$C_2=\frac{5}{27},C_1=-\frac{17}{9},C_0=\frac{89}{18}.$$

Тоді щільність розподілу має вигляд

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 3;\\ \frac{5}{27}x^2-\frac{17}{9}x+\frac{89}{18}, & 3<x\le 6;\\ 0, & x>6.\end{cases}$$

2) графік щільності розподілу ймовірностей $f(x)$ зображено на рисунку 3.4.

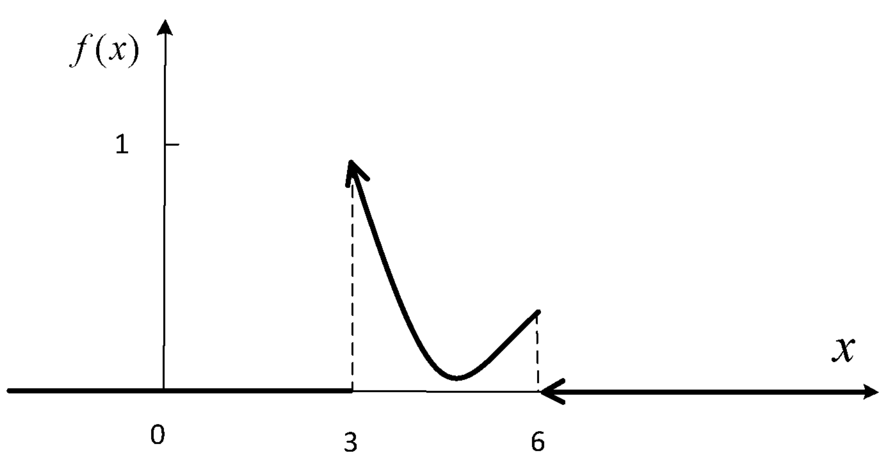

Рисунок 3.4 – Графік щільності розподілу $f(x)$

Зауваження. Аналогічно законам розподілу дискретних випадкових величин (дивись пп. 2.4) існують основні закони розподілу неперервних випадкових величин, до яких належать:

- рівномірний розподіл;
- показниковий (експоненціальний) розподіл;
- нормальний розподіл;
- логнормальний розподіл;
- розподіл Вейбула;
- гамма-розподіл;
- розподіл χ^2;
- розподіл Стьюдента тощо.