Homework № 1 for "Basic algorithms" course

Artem Petrov

February 13, 2020

1. Верно ли, что **а)** $n = O(n \log n)$? **б)** $\exists \varepsilon > 0 : n \log n = \Omega(n^{1+\varepsilon})$?

$\triangle$

a) $\exists N = 2, C = 1 : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N : n \leqslant Cn \log_2(n) \Rightarrow n = O(n \log_2(n)) \Rightarrow n = O(n \log(n))$

b) From calculus it's known, that $\forall \varepsilon > 0, C > 0\ \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n > N : n^{\varepsilon} > C \log_2(n)$.

Therefore $\forall \varepsilon > 0, C > 0\ \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n > N : n \log_2(n) < Cnn^{\varepsilon} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ n \log(n) \neq \Omega(n^{1+\varepsilon})$

$\square$

2. Известно, что $f(n) = O(n^2), g(n) = \Omega(1), g(n) = O(n)$. Положим

$$h(n) = \frac{f(n)}{g(n)}.$$

1. Возможно ли, что **а)** $h(n) = \Theta(n \log n)$; **б)** $h(n) = \Theta(n^3)$?

2. Приведите наилучшие (из возможных) верхние и нижние оценки на функцию $h(n)$ и приведите пример функций $f(n)$ и $g(n)$ для которых ваши оценки на $h(n)$ достигаются.

$\triangle$

$g(n) = \Omega(1) \Rightarrow \exists C_g > 0, N_g \in \mathbb{N} : \forall n > N g(n) \geqslant C_g$

$f(n) = O(n^2) \Rightarrow \exists C_f > 0, N_f \in \mathbb{N} : \forall n > N f(n) \leqslant C_f n^2$

1.a) Yes. $f(n) = n \log(n), g(n) = 1 \Rightarrow h(n) = n \log(n)$

1.b) No.

$\forall C_h > 0\ \forall N_h \in \mathbb{N}, \exists n = \max(N_h, N_g, N_f, 2\lceil C_f/(C_g C_h)\rceil) \in \mathbb{N}, n \geqslant N_h : h(n) = f(n)/g(n) \leqslant C_f/C_g n^2 \leq C_h n^3 \Leftrightarrow \neg(h(n) = \Omega(n^3))$

2. Lower bound for h(n) does not exist since there are no lower bound for f(n).

Higher bound for $h(n)$ is $O(n^2)$. Here is the proof:

$\exists C_h = C_f/C_g > 0, \exists N_h = max(N_g, N_f) > 0, N \in \mathbb{N} : \forall n > N_h h(n) = f(n)/g(n) \leqslant C_f n^2/C_g = C_h n^2$

For example, $f(n) = n^2$, $g(n) = 1$.

$\square$

3. Найдите Θ-асимптотику $\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{i^3+2i+5}$.

$\triangle$

$\rceil N_0 = 10\ \forall i > N_0 i^3 > 2i+5$

$\exists C_1 = 2 > 0, \exists N_1 = N_0 : \forall n > N_1\ \sum_{i=1}^{n}\sqrt{i^3+2i+5} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sqrt{n^3+2n+5} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sqrt{2n^3} \leqslant C_1 n^{5/2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\sqrt{i^3+2i+5} = O(n^{5/2})$

$\exists C_2 = 2^{5/2} > 0, \exists N_2 = 10 : \forall n > N_2\ \sum_{i=1}^{n}\sqrt{i^3+2i+5} \geqslant \sum_{i=1}^{n}\sqrt{i^3} \geqslant \sum_{i=n/2}^{n}\sqrt{i^3} \geqslant \sum_{i=n/2}^{n}\sqrt{(n/2)^3} \geqslant (n/2)^{5/2} = C_2 n^{5/2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\sqrt{i^3+2i+5} = \Omega(n^{5/2})$

$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i^3+2i+5} = \Omega(n^{5/2})$ and $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i^3+2i+5} = O(n^{5/2}) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\sqrt{i^3+2i+5} = \Theta(n^{5/2})$

$\square$

4. Пусть для положительной функции $f(n)$ известно, что $f(n) = (3+o(1))^n + \Theta(n^{100})$. Верно ли в общем случае, что $\log f(n) = \Theta(n)$?

$\triangle$

$f(n) = (3 + h(n)^n + g(n)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{h(n)}{1} = 0 \Rightarrow \exists N_h \in \mathbb{N} : \forall n > N_h, n \in \mathbb{N}\ |h(n)| < 1$

$\exists C > 0, c > 0, \exists N_g \in \mathbb{N} : \forall n > N_g\ cn^{100} \leqslant g(n) \leqslant Cn^{100}$

From calculus we know, that $\exists N_C \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > N_C\ 4^n > Cn^{100}$

$\exists C_1 = \log(2) > 0, c_1 = 2\log(4) > 0, \exists N_f = max(N_g, N_h, N_C, 10) \in \mathbb{N} : \forall n > N_f\ c_1 n = 2\log(4)n \geqslant \log(2) + n\log(4) = \log(2 * 4^n) \geqslant \log((4)^n + Cn^{100}) \geqslant \log((3+h(n))^n + g(n) \geqslant \log(2^n + cn^{100}) \geqslant \log(2^n) = C_1 n \Rightarrow f(n) = \Theta(n)$

$\square$

5. Дана программа

```
for (bound = 1; bound * bound < n; bound += 1 ) {
   for (i = 0; i < bound; i += 1) {
      for (j = 0; j < i; j += 2)
         печать (“алгоритм”)
      for (j = 1; j < n; j *= 2)
         печать (“алгоритм”)
   }
}
```

Пусть $g(n)$ обозначает число слов “алгоритм”, которые напечатает программа. Найдите Θ–асимптотику $g(n)$.

$\triangle$

$g(n) = \sum\limits_{b=1}^{\sqrt{n}}\sum\limits_{i=0}^{b-1}(\sum\limits_{j=0}^{i/2-1} 1 + \sum\limits_{j=1}^{\log_2 n} 1) = \sum\limits_{b=1}^{\sqrt{n}}\sum\limits_{i=0}^{b-1}(i/2 + \log_2 n) = \sum\limits_{b=1}^{\sqrt{n}}((b-1)b/4 + b\log_2 n) = \Theta(n^{3/2}) + \Theta(n\log n) \Rightarrow g(n) = \Theta(n^{3/2})$

$\square$