Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.3, с. 150–152

УДК 519.83

ББК 22.18

TODO: НАЗВАНИЕ СТАТЬИ

Артем И. Пьяных
Московский университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
119991, Москва, Ленинские горы, 2-й учебный корпус
artem.pyanykh@gmail.com

TODO: TITILE ABSTRACT.

Ключевые слова: TODO: ключевые слова.

1. Введение

В работе [1] была рассмотрена многошаговая модель биржевых торгов однотипными акциями, в которой торги между собой ведут два игрока. Перед началом торгов случайный ход определяет цену акции на весь период торгов, которая в состояниях рынка L и H равна 0 и 1 соответственно. Выбранная цена сообщается первому игроку и не сообщается второму, при этом второй игрок знает, что первый – инсайдер. Также оба игрока знают вероятность P высокой цены акции.

На каждом шаге торгов игроки одновременно и независимо назначают некоторую цену за акцию. Игроки могут делать произвольные вещественные ставки, причем игрок, предложивший бо́льшую цену, покупает у другого акцию по названной цене. Задачей игроков является максимизация стоимости портфеля, состоящего из некоторого числа акций и суммы денег.

Модель сводится к повторяющейся игре с неполной информацией, как описано в [2], для которой Де Мейером и Салей были найдены оптимальные стратегии игроков и значение игры. Позднее В. Доманским [3] была рассмотрена модификация модели, в которой ставки игроков могли принимать значения только из заданного дискретного множества $\{i/m,\ i = \overline{0,m},\ m \geqslant 1\}$. В данной постановке им было получено решение игры неограниченной продолжительности.

В обеих работах использовался одинаковый механизм проведения транзакции, при котором акция продается по наибольшей из предложенных цен. Можно, однако, рассмотреть и следующий механизм формирования цены акции, предложенный в [4]. Игроки одновременно предлагают цены p_1 и p_2, при $p_1 > p_2$ акция приобретается первым игроком по цене $\beta p_1+(1-\beta)p_2$, где $\beta \in [0,1]$ – заданный коэффициент, характеризующий переговорную силу продавца; случай $p_1 < p_2$ симметричен; при $p_1 = p_2$ транзакции не происходит. Более подробное обсуждение связанное с выбором подобного механизма транзакции приведено в [5].

Фактически, в работах [1] и [3] коэффициент β равен 1. Обобщение дискретной модели на случай произвольного β было рассмотрено в [6]. В данной работе обобщение на случай произвольного β проведено для модели игры с непрерывными ставками.

2. Постановка задачи

Обозначим множество возможных состояний рынка через $S = \{H, L\}$; $s \in S$ при этом обозначает состояние, в котором на самом деле находится рынок.

Два игрока на этом рынке на протяжении n шагов ведут между собой торги за одну единицу рискового актива. Каждый игрок делает ставку из множества $I = [0, 1]$; игрок предложивший большую ставку покупает у другого акцию по заданной цене.

Обозначим через $y_t = (y_t^R, y_t^N)$ портфель первого игрока на t-ом шаге торгов, где y_t^R и y_t^N – количество единиц рискового и безрискового активов соответственно. Если на t-ом шаге игроки делают ставки $p_{1,t} \in I$, $p_{2,t} \in I$, то портфель $y_t = y_{t-1} + t(p_{1,t}, p_{2,t})$, где при $\beta \in [0, 1]$, $\overline{\beta} = 1 - \beta$

$$t(p_1, p_2) = \mathbb{1}_{p_1 > p_2}(1, -(\beta p_1 + \overline{\beta} p_2)) + \mathbb{1}_{p_1 < p_2}(-1, \overline{\beta} p_1 + \beta p_2), \tag{2.1}$$

и $\mathbb{1}_{p_1 > p_2}$ принимает значение 1 при $p_1 > p_2$ и 0 в противном случае. То есть механизм проведения транзакции таков, что одна акция продается по цене равной выпуклой комбинации предложенных ставок с заданным коэффициентом β. Стоимость портфеля при этом равна

$$V(y_t) = \mathbb{1}_{s=H}\, y_t^R + y_t^N.$$

Будем считать, что игроки обладают неограниченными запасами рисковых и безрисковых активов, то есть торги не могут прекратиться по причине того, что у одного из игроков закончатся деньги или акции. Цель игроков состоит в максимизации прибыли полученной от торгов. Таким образом, не ограничивая общности, можно положить, что в начальный момент времени оба игрока имеют нулевые портфели. При этом прибыль первого игрока будет равна $V(y_n)$, а второго $-V(y_n)$.

Ниже мы рассмотрим теоретико-игровую постановку основной задачи (прямую игру), а также двойственной к ней в смысле Де Мейера (двойственную игру). Как отмечено в [1], прямая игра больше подходит для анализа стратегии первого игрока, в то время как двойственную удобнее использовать при анализе стратегии второго игрока.

2.1. Прямая игра

Перед началом игры ходом случая определяется $s \in S$ таким образом, что $p(s = H) = P$, $p(s = L) = 1 - P$. Выбранное s сообщается первому игроку (инсайдеру), второй игрок при этом не осведомлен о настоящем значении s и знает только вероятности выбора случаем того или иного состояния.

Обозначим через $h_t = (p_{1,1}, p_{2,1}, \ldots, p_{1,t}, p_{2,t})$ историю ставок к моменту времени t, а через H_t – множество всевозможных h_t. Стратегией первого игрока является последовательность ходов $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, где $\sigma_t = (\sigma_t^L,\ \sigma_t^H)$. При фиксированном $s \in S$ ход $\sigma_t^s : H_{t-1} \to \Delta(I)$ является отображением из множества историй ставок к моменту времени $t - 1$ в множество $\Delta(I)$ вероятностных распределений на I. То есть, на каждом шаге инсайдер в зависимости от состояния s и истории h_{t-1} рандомизирует выбор ставки на множестве I. Обозначим множество стратегий первого игрока Σ_n.

Аналогично стратегией второго игрока назовем последовательность ходов $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, где $\tau_t : H_{t-1} \to \Delta(I)$. Таким образом, не имея информации о состоянии s, второй игрок опирается только на историю ставок. Обозначим множество стратегий второго игрока T_n.

Пара стратегий (σ, τ) вместе с ходом случая индуцирует на (S, H_n) вероятностное распределение $\Pi[P, \sigma, \tau]$. Тогда выигрыш первого игрока равен

$$g_n(P, \sigma, \tau) = \mathbb{E}_{\Pi[P,\sigma,\tau]} V(y_n).$$

Выигрыш второго игрока при этом равен $-g_n(P, \sigma, \tau)$.

Полученную игру обозначим через $G_n(P)$. Ее нижнее и верхнее значения даются формулами

$$V_{1,n}(P) = \sup_\sigma \inf_\tau g_n(P, \sigma, \tau), \quad V_{2,n}(P) = \inf_\tau \sup_\sigma g_n(P, \sigma, \tau).$$

В том случае, когда $V_{1,n}(P) = V_{2,n}(P) = V_n(P)$, будем говорить, что игра имеет значение $V_n(P)$.

Стратегии σ^* и τ^* называются оптимальными, если

$$\inf_\tau g_n(P, \sigma^*, \tau) = V_{1,n}(P), \ \ \sup_\sigma g_n(P, \sigma, \tau^*) = V_{2,n}(P).$$

В [1] показано, что игра G_n имеет рекурсивную структуру в том смысле, что задачу о нахождении выигрыша в $(n + 1)$-шаговой игре можно свести в задаче о нахождении выигрыша в n-шаговой игре следующим образом. Рассмотрим стратегию σ первого игрока как пару $(\sigma_1, \tilde{\sigma})$, где σ_1 – ход игрока на первом шаге игры, а $\tilde{\sigma}$ – семейство стратегий в игре продолжительности n, зависящих от ставок (p_1, p_2) на первом шаге. Аналогично стратегию τ второго игрока можно представить как пару $(\tau_1, \tilde{\tau})$.

Приведем несколько фактов, которые понадобятся нам в дальнейшем. За подробным доказательством обращаться к [1].

Пара (σ_1, τ_1) вместе с ходом случая индуцирует вероятностное распределение $\Pi[P, \sigma_1, \tau_1]$ на (S, p_1, p_2). Обозначим через

$$P(p_1, p_2) = \Pi[P, \sigma_1, \tau_1](s = H \mid p_1, p_2).$$

апостериорную вероятность состояния H при условии, что первый игрок сделал ставку p_1, а второй – p_2. Так как p_2 не зависит от s, то апостериорная вероятность

$$P(p_1, p_2) = P(p_1) = \Pi[P, \sigma_1](s = H \mid p_1)$$

зависит только от p_1. Тогда для значения выигрыша первого игрока справедливо представление

$$g_{n+1}(P, \sigma, \tau) = g_1(P, \sigma_1, \tau_1) + \mathbb{E}_{\Pi[P,\sigma_1,\tau_1]} g_n(P(p_1), \tilde{\sigma}(p_1, p_2), \tilde{\tau}(p_1, p_2)).$$

Похожий результат имеет место и для нижнего значения игры.

Лемма 2.1. *Для любого $P \in [0, 1]$ выполняется неравенство*

$$V_{1,n+1}(P) \geqslant \sup_{\sigma_1} \inf_{p_2} g_1(P, \sigma_1, p_2) + \mathbb{E}_{\Pi[P,\sigma_1]} V_{1,n}\left(P(p_1)\right). \tag{2.2}$$

Подчеркнем, что так как значение игры нулевой продолжительности $V_0(P) = 0$, данная формула имеет смысл для любого $n \geqslant 1$.

2.2. Двойственная игра

Следуя [1], определим двойственную игру $G_n^*(x)$ следующим образом. Перед началом игры первый игрок выбирает текущее состояние $s \in S$; второй игрок не осведомлен о выборе первого. Если $s = H$, то первый вынужден заплатить второму пенальти размера x в конце игры. В остальном правила G_n^* аналогичны правилам G_n.

Таким образом, стратегией первого игрока в двойственной игре является пара $(P,\ \sigma)$, где $P \in [0,1]$, $\sigma \in \Sigma_n$. Множество стратегий второго игрока совпадает с T_n.

Выигрыш второго игрока, который он стремится максимизировать, определяется как

$$g_n^*(x,(P,\ \sigma),\tau) = xP - g_n(P,\sigma,\tau),$$

а верхнее и нижнее значения игры даются, соответственно, формулами

$$W_{1,n}(x) = \inf_{(P,\,\sigma)} \sup_{\tau} g_n^*(x,(P,\ \sigma),\tau),\ \ W_{2,n}(x) = \sup_{\tau} \inf_{(P,\,\sigma)} g_n^*(x,(P,\ \sigma),\tau).$$

В том случае, когда $W_{1,n}(x) = W_{2,n}(x) = W_n(x)$, будем говорить, что игра имеет значение $W_n(x)$.

Аналогично предыдущему пункту, можно провести рассмотрение рекурсивной структуры игры $G_n^*(x)$ и получить результат аналогичный результату леммы 2.1. За деталями обращаться к [1].

Лемма 2.2. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство*

$$W_{2,n+1}(x) \geqslant \sup_{\tau_1} \inf_{p_1} W_{2,n}(x - g_1^H(p_1,\tau_1) + g^L(p_1,\tau_1)) - g_1^L(p_1,\tau_1), \quad (2.3)$$

где $g_1^H(p_1,\tau_1) = g_1(1,p_1,\tau_1)$, $g_1^L(p_1,\tau_1) = g_1(0,p_1,\tau_1)$ – выигрыши в состояниях H и L соответственно.

Отметим, что так как $W_0^*(x) = \phi(x) = \min(x,0)$, формула имеет смысл для любого $n \geqslant 1$.

3. Оценки на выигрыш в прямой и двойственной играх

Обозначим схему дальнеших рассуждений.

В секциях 3.1 и 3.2 будут построены S-выравнивающие стратегии первого и второго игроков в прямой и двойственной играх, соответственно. Будет показано, что несмотря на то, что по виду данные стратегии отличается от таковых в [1], вид оценок на $V_{1,n}(P)$ и $W_{2,n}(x)$ остается неизменным. Отсюда будет следовать справедливость двойственных соотношений между $V_{1,n}(P)$ и $W_{2,n}(x)$, существование $V_n(P)$ и $W_n(x)$, формулы для их расчета, а также оптимальность построенных стратегий.

Сделаем несколько предположений о характере функций $V_{1,n}(\cdot)$, $W_{2,n}(\cdot)$. Обозначим через $f^*(x^*) = \inf\{x^* \cdot x - f(x) \mid x\}$ сопряженную к f в смысле Фенхеля функцию. Тогда потребуем, чтобы выполнялось:

1. функция $V_{1,n}(\cdot)$ гладкая на $[0, 1]$,

2. функция $V^*_{1,n}(\cdot)$ гладкая на $\mathbb{R}$,

3. функция $W_{2,n}(\cdot)$ гладкая на $\mathbb{R}$.

Справедливость данных предположений будет обоснована в дальнейшем (см. раздел 4).

Также отметим, что функции $V_{1,n}(\cdot)$ и $W_{2,n}(\cdot)$ являются вогнутыми на своей области определения. Доказательство данного факта может быть найдено в [1].

Кроме того, приведем несколько свойств сопряженных функций, которые понадобятся нам в дальнейшем. Во-первых, эквивалентность следующих условий для субдифференциалов вогнутых функций (см. [8, Теорема 23.5]):

(a) $x^* \in \partial f(x)$,

(b) $x \in \partial f^*(x^*)$,

(c) $\langle z, x^* \rangle - f(z)$ достигает минимума по z в точке x.

Во-вторых, связь между эффективным множеством функции и образом субдифференциала сопряженной функции. Обозначим эффективное множество через $\mathrm{dom}\, f = \{x \mid f(x) < \infty\}$, а образ функции через $\mathrm{range}\, f = \cup \{f(x) \mid x\}$. Тогда для функций в $\mathbb{R}$ имет место следующее включение (см. [8, §24]):

$$\mathrm{int}\,(\mathrm{dom}\, f) \subset \mathrm{range}\, \partial f^* \subset \mathrm{dom}\, f. \tag{3.1}$$

3.1. Оценка $\mathbf{V_{1,n}(P)}$

Формула (2.2) дает способ получения нижней оценки $V_{1,n}(P)$, однако ее прямое использование представляет определенные трудности. В [1] рассматривается параметризация одношаговой стратегии инсайдера функциями f и Q, которые используются для генерации маргинального распределения p_1 и апостериорной вероятности $P(p_1)$, соответственно, но не дается конструктивного обоснования использованию f и Q вместо σ_1. Далее мы покажем, что задание стратегии первого игрока при помощи пары (f, Q) в некотором смысле естественно и приведем способ перехода от параметризованного представления к оригинальному.

Обозначим через $\sigma_1^M(p_1) = P\sigma_1^H(p_1) + (1-P)\sigma^L(p_1)$ маргинальное распределение p_1.

Утверждение 3.1. *Для апостериорной вероятности $P(p_1)$ события H справедлива формула*

$$P(p_1) = P\,\frac{\mathrm{d}\sigma_1^H}{\mathrm{d}\sigma_1^M}(p_1), \tag{3.2}$$

где $\mathrm{d}\sigma_1^H / \mathrm{d}\sigma_1^M$ – производная Радона-Никодима.

Доказательство. По определению $P(p_1)$ для любого $B \in \mathcal{B}_I$ выполнено

$$P(s = H,\ p_1 \in B) = \int_B P(p_1)\ \sigma_1^M(\mathrm{d}p_1).$$

С другой стороны справедлива следующая формула:

$$P(s = H,\ p_1 \in B) = P\int_B \sigma_1^H(\mathrm{d}p_1).$$

Так как σ_1^H абсолютно непрерывна относительно σ_1^M, то существует производная Радона-Никодима, а значит

$$P(s = H,\ p_1 \in B) = \int_B P\frac{\mathrm{d}\sigma_1^H}{\mathrm{d}\sigma_1^M}(p_1)\ \sigma_1^M(\mathrm{d}p_1).$$

Отсюда получаем (3.2). □

Утверждение 3.2. *Для $g_1(P, \sigma_1, p_2)$ справедливо представление*

$$g_1(P, \sigma_1, p_2) = \int_I \mathbb{1}_{p_1 > p_2}\left[P(p_1) - \beta p_1 - \overline{\beta} p_2\right] \sigma_1^M(\mathrm{d}p_1) + \\ + \int_I \mathbb{1}_{p_1 < p_2}\left[\overline{\beta} p_1 + \beta p_2 - P(p_1)\right] \sigma_1^M(\mathrm{d}p_1). \tag{3.3}$$

Доказательство. По определению

$$g_1(P, \sigma_1, p_2) = \mathbb{E}_{\Pi[P,\sigma_1]} \langle (\mathbb{1}_{s=H}, 1), t(p_1, p_2) \rangle. \tag{3.4}$$

Подставив (2.1) в (3.4), получим

$$g_1(P, \sigma_1, p_2) = P \int_I \Big[\mathbb{1}_{p_1 > p_2} (1 - \beta p_1 - \overline{\beta} p_2) + \mathbb{1}_{p_1 < p_2} \times \\ \times (\overline{\beta} p_1 - \beta p_2 - 1) \Big] \, \sigma_1^H(\mathrm{d}p_1) + (1 - P) \int_I \Big[\mathbb{1}_{p_1 > p_2} \times \\ \times (-\beta p_1 - \overline{\beta} p_2) + \mathbb{1}_{p_1 < p_2} (\overline{\beta} p_1 - \beta p_2) \Big] \, \sigma_1^L(\mathrm{d}p_1).$$

Отсюда, воспользовавшись (3.2), получим (3.3). □

Формула (3.3) показывает альтернативное представление стратегии инсайдера, а именно с помощью маргинального распределения ставки и апостериорной вероятности состояния H. Укажем способ перехода от σ_1 к альтернативному представлению.

Возьмем случайную величину u равномерно распределенную на $[0, 1]$. Если $f(\cdot)$ – левая обратная функции распределения p_1, то $f(u)$ и p_1 одинаково распределены. Обозначим $Q(u) = P(f(u))$. Пусть также $\pi = \Pi[P, \sigma_1]$. Так как для любого $B \in \mathcal{B}_I$ выполнено

$$\pi(p_1 \in B \mid s = H) = \frac{\pi(p_1 \in B, \ s = H)}{\pi(s = H)} = \int_0^1 \mathbb{1}_{f(u) \in B} \frac{Q(u)}{P} \, \mathrm{d}u,$$

то восстановить σ_1 по (f, Q) можно следующим образом. Если ходом случая было выбрано состояние H, то инсайдер выбирает $u \in [0, 1]$ с плотностью вероятности $Q(u)/P$ и делает ставку $p_1 = f(u)$. Аналогично в состоянии L он выбирает u с плотностью вероятности $(1 - Q(u))/(1 - P)$ и делает ставку $p_1 = f(u)$.

Введем обозначение

$$F_{n+1} \left(P, (f, Q), p_2 \right) = g_1(P, (f, Q), p_2) + \mathbb{E} V_{1,n}(Q(u)).$$

Переходя к f и Q в формуле (3.3) получаем следующее равенство:

$$F_{n+1} \left(P, (f, Q), p_2 \right) = \int_0^1 \mathbb{1}_{f(u) > p_2} (Q(u) - \beta f(u) - \alpha p_2) \, \mathrm{d}u \ + \\ + \int_0^1 \mathbb{1}_{f(u) < p_2} (\alpha f(u) + \beta p_2 - Q(u)) \, \mathrm{d}u \ + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u)) \, \mathrm{d}u. \tag{3.5}$$

В [1] показано, что функции f и Q должны удовлетворять следующим свойствам, чтобы является параметризацией одношаговой стратегии первого игрока в игре $G_n(P)$:

- f не убывает на $[0, 1]$, (3.6a)
- $\int_0^1 Q(u)\,\mathrm{d}u = P$, (3.6b)
- $\forall x, y \in [0, 1] : f(x) = f(y) \implies Q(x) = Q(y)$. (3.6c)

Таким образом, мы можем переформулировать лемму 2.1 в терминах f и Q.

Лемма 3.1. *Для любого* $P \in [0, 1]$ *выполняется неравенство*

$$V_{1,n+1}(P) \geqslant \sup_{(f,\,Q)} \inf_{p_2} F_{n+1}\left(P, (f, Q), p_2\right),$$

где f *и* Q *удовлетворяют* (3.6a) – (3.6c).

Будем искать S-выравнивающую стратегию первого игрока, при $S = [f(0), f(1)]$. Пусть $p_2 = f(\alpha)$, $\alpha \in [0, 1]$ и $f(\cdot)$ строго возрастает в α. Тогда

$$F_{n+1}\left(P, (f, Q), f(\alpha)\right) = \int_\alpha^1 \big(Q(u) - \beta f(u) - \overline{\beta} f(\alpha)\big)\,\mathrm{d}u + \\ + \int_0^\alpha \big(\overline{\beta} f(u) + \beta f(\alpha) - Q(u)\big)\,\mathrm{d}u + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u))\,\mathrm{d}u. \quad (3.7)$$

По предположению $F_{n+1}\left(P, (f, Q), f(\alpha)\right)$ не зависит от α, следовательно

$$\frac{\partial F_{n+1}}{\partial \alpha} = (\alpha - \overline{\beta}) f'(\alpha) + 2f(\alpha) - 2Q(\alpha) = 0.$$

Отсюда

$$f(u) = (u - \overline{\beta})^{-2} \int_{\overline{\beta}}^u 2(x - \overline{\beta}) Q(x)\,\mathrm{d}x.^1 \quad (3.8)$$

Очевидно, если подставить (3.8) в (3.7), то получившееся выражение $\Phi(Q)$ зависит только от Q и не зависит от α. Подставив 1 вместо α, получим

$$\Phi(Q) = \int_0^1 (\overline{\beta} f(u) - Q(u))\,\mathrm{d}u + \beta f(1) + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u))\,\mathrm{d}u. \quad (3.9)$$

---

[1] При $u = \overline{\beta}$ доопределим $f(\overline{\beta})$ по непрерывности как $Q(\overline{\beta})$.

Лемма 3.2. *Для* $\Phi(Q)$ *справедливо следующее выражение:*

$$\Phi(Q) = \int_0^1 (2u-1)Q(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u))\,\mathrm{d}u. \tag{3.10}$$

Доказательство. Упростим (3.9) при $\beta \in (0,1)$. Случаи $\beta = 0$ и $\beta = 1$ дают тот же результат и рассматриваются аналогично.

Найдем чему равно выражение $\int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u$, разбив этот интеграл на две части. Для первой части:

$$\int_0^{\overline{\beta}} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\overline{\beta}} (u-\overline{\beta})^{-2} \int_{\overline{\beta}}^u 2(s-\overline{\beta})Q(s)\,\mathrm{d}s =$$
$$= \int_0^{\overline{\beta}} 2(\overline{\beta}-s)Q(s) \int_0^s (\overline{\beta}-u)^{-2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}s = (2/\overline{\beta}) \int_0^{\overline{\beta}} uQ(u)\,\mathrm{d}u.$$

Аналогично для второй части:

$$\int_{\overline{\beta}}^1 f(u)\,\mathrm{d}u = (2/\beta) \int_{\overline{\beta}}^1 (1-u)Q(u)\,\mathrm{d}u.$$

Подставим найденные выражения в (3.9):

$$\Phi(Q) = 2\int_0^{\overline{\beta}} uQ(u)\,\mathrm{d}u + (2\overline{\beta}/\beta)\int_{\overline{\beta}}^1 (1-u)Q(u)\,\mathrm{d}u +$$
$$+ (2/\beta)\int_{\overline{\beta}}^1 (u-\overline{\beta})Q(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^1 Q(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u))\,\mathrm{d}u.$$

Приведя подобные с учетом того, что $\overline{\beta}(1-u) + u - \overline{\beta} = \beta u$, получим (3.10). □

Найдем Q как экстремаль следующей вариационной задачи:

$$\Phi(Q) \to \max, \quad \int_0^1 Q(u)\,\mathrm{d}u = P. \tag{3.11}$$

По предположению $V_{1,n}(\cdot)$ – гладкая функция. Тогда функция $Q(\cdot)$, доставляющая экстремум в задаче (3.11), удовлетворяет уравнению Эйлера, то есть выполнено

$$2u - 1 + \lambda + V'_{1,n}(Q(U)) = 0, \ \int_0^1 Q(u)\,\mathrm{d}u = P.$$

Воспользовавшись свойствами субдифференциалов сопряженных функций, получим

$$Q(u) = V^{*\prime}_{1,n}(1-\lambda-2u), \text{ где} \tag{3.12}$$

$$\int_0^1 V^{*\prime}_{1,n}(1-\lambda-2u)\,\mathrm{d}u = P. \tag{3.13}$$

Так как $V_{1,n}(\cdot)$ определена на $[0,1]$, то из (3.1) следует, что $V^{*\prime}_{1,n}(\cdot)$ не возрастает на $\mathbb{R}$ от 1 до 0. Значит λ, удовлетворяющая (3.13), существует.

Введем обозначение

$$K(\lambda) = \int_0^1 V^{*}_{1,n}(1-\lambda-2u)\,\mathrm{d}u.$$

Тогда, аналогично [1] можно показать, что при подстановке (3.12) в (3.10) выполняется равенство $\Phi(Q) = K^*(P)$.

Отметим, что хотя $f(u)$, то есть механизм рандомизации ставки инсайдером, зависит от коэффициента β, функции $Q(u)$ и $\Phi(Q)$ от β не зависят и по форме совпадают с аналогичными выражениями в [1]. Данный факт позволит нам без изменений использовать те же самые соотношения между нижним и верхним значениями прямой и двойственной игр. Прежде, однако, нужно показать, что полученные f и Q действительно удовлетворяют (3.6a) – (3.6c) и доставляют гарантированный выигрыш первого игрока, равный $K^*(P)$.

Лемма 3.3. *Пара функций* (f, Q), *определенная в* (3.8), (3.12) *принимает значения в* $[0,1]$ *и удовлетворяет* (3.6a) – (3.6c), *т.е. является параметризацией стратегии первого игрока.*

Доказательство. Так как $V^{*\prime}_{1,n}(\cdot)$ убывает от 1 до 0, то $Q(\cdot)$ принимает значения в $[0,1]$ и, кроме того, не убывает на $[0,1]$.

Далее, можно заметить, что $f(u)$ является математическим ожиданием $Q(x)$, где x – случайная величина распределенная между $\overline{\beta}$ и u с плотностью $2|x-\overline{\beta}|/(u-\overline{\beta})^2$. Следовательно, $f(\cdot)$ также принимает значения в $[0,1]$.

Сделаем замену переменного $t = (x-\overline{\beta})/(u-\overline{\beta})$ в (3.8). Тогда

$$f(u) = \int_0^1 2tQ\left(t(u-\overline{\beta})+\overline{\beta}\right)\mathrm{d}t.$$

Отсюда видно, что (3.6a) выполнено. Далее, (3.6b) выполнено по построению. Чтобы показать, что (3.6c) выполняется, рассмотрим несколько случаев.

Пусть $\overline{\beta} < u_1 < u_2$. Тогда, так как Q не убывает, почти при всех $t \in [0,1]$ выполнено $Q(t(u_1-\overline{\beta})+\overline{\beta}) = Q(t(u_2-\overline{\beta})+\overline{\beta})$. Из непрерывности Q следует равенство при $t = 1$, т.е. $Q(u_1) = Q(u_2)$.

При $\overline{\beta} = u_1 < u_2$ имеем $f(u_1) = f(\overline{\beta}) = Q(\overline{\beta})$. Отсюда почти при всех $t \in [0,1]$ выполнено $Q(t(u_2 - \overline{\beta}) + \overline{\beta}) = Q(\overline{\beta})$. Снова из непрерывности Q получаем $Q(u_1) = Q(u_2) = Q(\overline{\beta})$.

Доказательство при $u_1 < u_2 \leqslant \overline{\beta}$ получается аналогично. Так же рассматривается и случай $u_1 < \overline{\beta} < u_2$. Таким образом (3.6c) выполнено. $\square$

Лемма 3.4. *Если $f(u_1) = f(u_2)$ при $u_1 < u_2$, то $f(u) = Q(u)$ при $u \in [u_1, u_2]$.*

Доказательство. Действительно, если $f(u_1) = f(u_2)$, то из леммы 3.3 следует, что $f(\cdot)$ и $Q(\cdot)$ константны на $[u_1, u_2]$. Тогда из (3.8) имеем

$$\begin{aligned}
f(u_2) &= (u_2-\overline{\beta})^{-2}\int_{\overline{\beta}}^{u_2} 2(x-\overline{\beta})Q(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= (u_2-\overline{\beta})^{-2}\left(\int_{\overline{\beta}}^{u_1} 2(x-\overline{\beta})Q(x)\,\mathrm{d}x + \int_{u_1}^{u_2} 2(x-\overline{\beta})Q(x)\,\mathrm{d}x\right) = \\
&= (u_2-\overline{\beta})^{-2}\left((u_1-\overline{\beta})^2 f(u_1) + \int_{u_1}^{u_2} 2(x-\overline{\beta})Q(u_1)\,\mathrm{d}x\right) = \\
&= (u_2-\overline{\beta})^{-2}\left((u_1-\overline{\beta})^2 f(u_1) + \left((u_2-\overline{\beta})^2-(u_2-\overline{\beta})^2\right)Q(u_1)\right).
\end{aligned}$$

С другой стороны, для $f(u_1)$ справедливо

$$f(u_1) = (u_2-\overline{\beta})^{-2}\left((u_1-\overline{\beta})^2 f(u_1) + \left((u_2-\overline{\beta})^2-(u_2-\overline{\beta})^2\right)f(u_1)\right).$$

Таким образом, $f(u_1) = Q(u_1)$, а следовательно $f(u) = Q(u)$ при $u \in [u_1, u_2]$. $\square$

Теорема 3.1. *Для гарантированного выигрыша первого игрока в игре $G_n(P)$ справедлива оценка $V_{1,n+1}(P) \geqslant K^*(P)$.*

Доказательство. Из леммы 2.1 следует, что нам достаточно доказать, что при любом $p_2 \in [0,1]$ выполнено $F_{n+1}\left(P,(f,Q),p_2\right) \geqslant K^*(P)$. Рассмотрим несколько случаев.

Пусть $p_2 < f(0)$. Тогда из (3.5) получаем, что справделиво следующее неравенство

$$F_{n+1}\left(P,(f,Q),p_2\right) = \int_0^1 \left[Q(u) - \beta f(u) - \overline{\beta} p_2\right] \mathrm{d}u + \\ + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u))\,\mathrm{d}u \geqslant F_{n+1}\left(P,(f,Q),f(0)\right) = K^*(P).$$

Аналогично можно показать, что при $p_2 > f(1)$

$$F_{n+1}\left(P,(f,Q),p_{2,1}\right) \geqslant F_{n+1}\left(P,(f,Q),f(1)\right) = K^*(P).$$

Пусть теперь $p_2 = f(\alpha),\ \alpha \in [0,1]$. Введем обозначения

$$\alpha^- = \inf\left\{x \mid f(x) = f(\alpha)\right\}, \quad \alpha^+ = \sup\left\{x \mid f(x) = f(\alpha)\right\}.$$

Подстановкой в (3.5) получаем

$$F_{n+1}\left(P,(f,Q),p_2\right) = \int_{\alpha^+}^1 (Q(u) - \beta f(u) - \overline{\beta} f(\alpha))\,\mathrm{d}u + \\ + \int_0^{\alpha^-} (\overline{\beta} f(u) + \beta f(\alpha) - Q(u))\,\mathrm{d}u + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u))\,\mathrm{d}u. \quad (3.14)$$

Однако, из леммы 3.4 следует, что $Q(u) = f(\alpha)$ при $u \in [\alpha^-, \alpha^+]$. А значит (3.14) совпадает с (3.7) и $F_{n+1}\left(P,(f,Q),p_2\right) \geqslant K^*(P)$ по построению. □

3.2. Оценка $\mathbf{W_{2,n}(x)}$

Аналогично тому, как это было сделано для первого игрока, параметризуем τ_1 при помощи неубывающей функции $h : [0,1] \to [0,1]$. Если случайная величина u равномерно распределена на $[0,1]$, положим $p_2 = h(u)$. Таким образом может быть получено любое распределение τ_1.

Подобно предыдущему разделу получим аналог леммы 2.2 в терминах h. Заметим, что для $g_1^L(p_1,\tau_1)$ и $g_1^H(p_1,\tau_1)$ справедливо

$$g_1^L(p_1,\tau_1) = \int_I \left[\underset{p_1>p_2}{\mathbb{1}}(-\beta p_1 - \overline{\beta} p_2) + \underset{p_1<p_2}{\mathbb{1}}(\overline{\beta} p_1 + \beta p_2)\right] \tau_1(\mathrm{d}p_2),$$

$$g_1^H(p_1,\tau_1) = \int_I \left[\underset{p_1>p_2}{\mathbb{1}}(1 - \beta p_1 - \overline{\beta} p_2) + \underset{p_1<p_2}{\mathbb{1}}(\overline{\beta} p_1 + \beta p_2 - 1)\right] \tau_1(\mathrm{d}p_2).$$

Подставим $g_1^H(p_1,\tau_1)$ и $g_1^L(p_1,\tau_1)$ в правую часть (2.3) и получившийся результат обозначим как

$$G_{n+1}\left(x,p_1,h\right) = W_{2,n}\left(x - \int_0^1 \left[\underset{h(u)<p_1}{\mathbb{1}} - \underset{h(u)>p_1}{\mathbb{1}}\right] \mathrm{d}u\right) - \\ - \int_0^1 \left[\underset{h(u)<p_1}{\mathbb{1}}(-\beta p_1 - \overline{\beta} h(u)) + \underset{h(u)>p_1}{\mathbb{1}}(\overline{\beta} p_1 + \beta h(u))\right] \mathrm{d}u. \quad (3.15)$$

Лемма 3.5. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство*

$$W_{2,n+1}(x) \geqslant \sup_h \inf_{p_1} G_{n+1}\left(x,p_1,h\right).$$

Будем искать S-выравнивающую стратегию второго игрока, при $S=[h(0),h(1)]$. Пусть $p_1 = h(\alpha),\ \alpha \in [0,1]$ и $h(\cdot)$ строго возрастает в α. Тогда

$$G_{n+1}\left(x,h(\alpha),h\right) = W_{2,n}(x+1-2\alpha) - \\ - \int_\alpha^1 \left(\overline{\beta} h(\alpha) + \beta h(u)\right) \mathrm{d}u + \int_0^\alpha \left(\beta h(\alpha) + \overline{\beta} h(u)\right) \mathrm{d}u. \quad (3.16)$$

По предположению $G_{n+1}\left(x,h(\alpha),h\right)$ не зависит от α, следовательно имеет место равенство

$$\frac{\partial G_{n+1}}{\partial \alpha} = 2h(\alpha) + (\alpha - \overline{\beta})h'(\alpha) - 2W'_{2,n}(x-2\alpha+1) = 0.$$

Отсюда

$$h(u) = 2(u-\overline{\beta})^{-2} \int_{\overline{\beta}}^u (s-\overline{\beta}) W'_{2,n}(x-2s+1)\,\mathrm{d}s^2. \quad (3.17)$$

Очевидно, если подставить $h(u)$ в (3.16) то получившееся выражение $\Psi(h)$ не зависит от α, следовательно можно вместо α подставить $\overline{\beta}$.

Лемма 3.6. *Для значения $\Psi(h)$ справедливо равенство*

$$\Psi(h) = \int_0^1 W_{2,n}(x-2s+1)\,\mathrm{d}s. \quad (3.18)$$

---

[2] При $u=\overline{\beta}$ доопределим $h(\overline{\beta})$ по непрерывности как $W'_{2,n}(x-2\overline{\beta}+1)$.

Доказательство. Проведем рассмотрение при $\beta \in (0,1)$. Случаи с $\beta \in \{0,1\}$ рассматриваются аналогично и дают тот же самый результат. При подстановке $\overline{\beta}$ вместо α выражение (3.16) приобретает вид

$$G_{n+1}\big(x, h(\overline{\beta}), h\big) = W_{2,n}(x - 2\overline{\beta} + 1) - \beta \int_{\overline{\beta}}^{1} h(u)\,\mathrm{d}u + \overline{\beta} \int_0^{\overline{\beta}} h(u)\,\mathrm{d}u.$$

Для интегралов выше верны формулы

$$\int_0^{\overline{\beta}} h(u)\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{\overline{\beta}} (s/\overline{\beta}) W'_{2,n}(x-2s+1)\,\mathrm{d}s,$$
$$\int_{\overline{\beta}}^{1} h(u)\,\mathrm{d}u = 2\int_{\overline{\beta}}^{1} \frac{1-s}{\beta} W'_{2,n}(x-2s+1)\,\mathrm{d}s.$$

Таким образом, выполняется равенство

$$G_{n+1}\big(x, h(\overline{\beta}), h\big) = W_{2,n}(x-1) + \int_0^1 2sW'_{2,n}(x-2s+1)\,\mathrm{d}s.$$

Остается заметить, что после интегрирования по частям

$$\int_0^1 2sW'_{2,n}(x-2s+1)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 W_{2,n}(x-2s+1)\,\mathrm{d}s - W_{2,n}(x-1).$$

Отсюда получаем (3.18). □

Отметим, что несмотря на отличный вид $h(u)$, выражение для $\Psi(h)$ по форме совпадает с аналогичным выражением в [1] и не зависит от коэффициента β. Таким образом, остается показать, что функция $h(\cdot)$ действительно является параметризацией стратегии второго игрока, и нижняя оценка на его выигрыш равна $\Psi(h)$.

Лемма 3.7. *Функция $h(u)$ определенная в (3.17) обладает следующими свойствами:*

- $u \in [0,1] \implies h(u) \in [0,1]$,
- $h(\cdot)$ *не убывает на* $[0,1]$,
- $h(u_1) = h(u_2) \implies W'_{2,n}(x-2u_1+1) = W'_{2,n}(x-2u_2+1)$,
- $h(\cdot)$ *не возрастает строго в* $u \implies h(u) = W'_{2,n}(x-2u+1)$.

В частности, функция $h(\cdot)$ может служить параметризацией стратегии второго игрока.

Доказательство этих свойств во многом повторяет доказательство лемм 3.3 и 3.4.

Теорема 3.2. *Для гарантированного выигрыша второго игрока в игре $G^*_{n+1}(x)$ справедлива оценка*

$$W_{2,n+1}(x) \geqslant \int_0^1 W_{2,n}(x-2s+1)\,\mathrm{d}s.$$

Доказательство. Из леммы 3.5 следует, что нам достаточно показать, что при любом $p_1 \in [0,1]$ выполнено $G_{n+1}(x,p_1,h) \geqslant \Psi(h)$. Рассмотрим несколько случаев.

При $p_1 < h(0)$ получаем

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x,p_1,h) = W_{2,n}(x+1) - \int_0^1 \overline{\beta}p_1 + \beta h(u)\,\mathrm{d}u \geqslant \\ \geqslant W_{2,n}(x+1) - \int_0^1 \overline{\beta}h(0) + \beta h(1) = \Psi(h). \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что при $p_1 > h(0)$ выполняется неравенство $G_{n+1}(x,p_1,h) \geqslant \Psi(h)$.

Пусть теперь $p_1 = h(\alpha),\ \alpha \in [0,1]$. Введем обозначения

$$\alpha^- = \inf\{x \mid h(x) = h(\alpha)\}, \quad \alpha^+ = \sup\{x \mid h(x) = h(\alpha)\}.$$

Пробразовав (3.15), получим что

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x,p_1,h) = W_{2,n}(x+1-\alpha^- - \alpha^+) \ - \\ - \int_0^{\alpha^-} \left(-\beta p_1 - \overline{\beta}h(u)\right)\mathrm{d}u - \int_{\alpha^+}^1 \left(\overline{\beta}p_1 + \beta h(u)\right)\mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Так как $W_{2,n}(\cdot)$ – гладкая вогнутая функция, то верно неравенство

$$\begin{aligned} W_{2,n}(x+1-2\alpha) \leqslant W_{2,n}(x+1-\alpha^- - \alpha^+) \ + \\ + W'_{2,n}(x+1-\alpha^- - \alpha^+)\left([\alpha^+ - \alpha] + [\alpha^- - \alpha]\right). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Из леммы 3.7 следует, что $W'_{2,n}(x+1-\alpha^- - \alpha^+) = W'_{2,n}(x+1-2\alpha) = h(\alpha)$. Отсюда и из (3.20) получаем, что

$$W_{2,n}(x+1-\alpha^- - \alpha^+) \geqslant W_{2,n}(x+1-2\alpha) - \\ - \int_{\alpha}^{\alpha^+} \big(\overline{\beta} p_1 + \beta h(u)\big)\,\mathrm{d}u - \int_{\alpha^-}^{\alpha} \big(-\beta p_1 - \overline{\beta} h(u)\big)\,\mathrm{d}u.$$

Подставив данное выражение в (3.19), получаем в точности (3.16). Следовательно $G_{n+1}\left(x, p_1, h\right) \geqslant \Psi(h)$. $\square$

4. Значение игры

Так как выражения для нижних оценок в теоремах 3.1 и 3.2 совпадают с аналогичными выражениями в [1], справедливы все двойственные соотношения между $V_{1,n}(P)$ и $W_{2,n}(x)$, а также утверждения относительно оптимальности стратегий. Приведем соответствующие теоремы.

Теорема 4.1. *Для всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено*

$$V^*_{1,n}(x) = W^*_{1,n}(x) = V^*_{2,n}(x) = W_{2,n}(x).$$

Таким образом, игры $G_n(P)$ и $G^*_n(x)$ имеют значения $V_n(P)$ и $W_n(x)$ соответственно. Кроме того

$$W_{n+1}(x) = \int_0^1 W_n(x-2u+1)\,\mathrm{d}u. \tag{4.1}$$

Теорема 4.2. *Стратегия σ является оптимальной в игре $G_n(P)$ тогда и только тогда, когда (P, σ) является оптимальной стратегией в игре $G^*_n(x)$ при $x = V'_n(P)$.*

В заключение обоснуем сделанные ранее предположения о гладкости функций $V_{1,n}(\cdot)$, $V^*_{1,n}(\cdot)$ и $W_{2,n}(\cdot)$.

Утверждение 4.1. *При любом $n \geqslant 1$ функция $W_n(\cdot)$ является гладкой на $\mathbb{R}$.*

Это сразу следует из формулы (4.1) и того, что $W_0(x) = \min(x, 0)$. Рассмотрим подробнее, как ведет себя $W'_n(x)$.

Лемма 4.1. *Для любого* $n \geqslant 1$ *выполняется*:

1. $W_n'(x) = 1$ *при* $x \in (-\infty, -n]$,

2. $W_n'(x) = 0$ *при* $x \in [n, \infty)$,

3. $W_n'(x)$ *строго убывает при* $x \in [-n, n]$.

Доказательство. Из (4.1) следует, что

$$W_{n+1}'(x) = \frac{1}{2}\left(W_n(x+1) - W_n(x-1)\right). \tag{4.2}$$

Отсюда

$$W_1'(x) = \begin{cases} 1, & x < -1, \\ (1-x)/2, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Таким образом утверждение леммы верно при $n = 1$. Пусть также утверждение леммы верно при $n \leqslant N$, докажем его справедливость при $n = N + 1$.

Из (4.2) следует, что для некоторого $\Theta \in (-1, 1)$ верно равенство $W_{N+1}'(x) = W_N'(x + \Theta)$. Отсюда получаем справедливость первых двух утверждений леммы.

Далее, из (4.2) получаем $W_{N+1}''(x) = 1/2\left(W_N'(x+1) - W_N'(x-1)\right)$. Так как $W_N'(x)$ строго убывает на $[-N, N]$, то $W_N'(x+1)$ строго убывает на $[-N-1, N-1]$, $W_N'(x-1)$ строго убывает на $[-N+1, N+1]$, а значит $W_{N+1}''(x)$ отрицательна при $x \in [-N-1, N+1]$. Отсюда получаем третье утверждение леммы. $\square$

Утверждение 4.2. *При любом* $n \geqslant 1$ *функция* $V_n(\cdot)$ *является гладкой на* $[0, 1]$.

Доказательство. Из свойств субдифференциалов сопряженных функций следует, что

$$x_1^* \neq x_2^* \in \partial V_n(P) \iff P = W_n'(x_1^*) = W_n'(x_2^*).$$

Однако по лемме 4.1 функция $W_n'(\cdot)$ строго убывает от 1 до 0. Следовательно $\partial V_n(\cdot)$ содержит только одно значение в каждой точке отрезка $[0, 1]$, что эквивалентно дифференцируемости $V_n(\cdot)$. Из того, что $V_n(\cdot)$ к тому же непрерывна, ограниченна и вогнута, получаем ее гладкость на $[0, 1]$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. De Meyer B., Saley H. *On the strategic origin of Brownian motion in finance* // Int J Game Theory. 2002. V. 31. P. 285–319

2. Aumann R.J., Maschler M.B. *Repeated Games with Incomplete Information.* The MIT Press, Cambridge, London

3. Domansky V. *Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets* // Int J Game Theory. 2007. V. 36(2). P. 241–257

4. Chatterjee K., Samuelson W. *Bargaining under Incomplete Information* // Operations Research. 1983. V. 31. N. 5. P. 835–851

5. Пьяных А.И. Об одной модификации модели биржевых торгов с инсайдером // Математическая теория игр и её приложения. 2014. 6. № 4. С. 68–84.

6. Пьяных А.И. *Многошаговая модель биржевых торгов с асимметричной информацией и элементами переговоров* // TODO

7. Эльсгольц Л.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.* М.: Наука, 1965.

8. Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ.* М.: Мир, 1973.

TODO: TITLE OF THE ARTICLE

Artem Pyanykh, Moscow State University, postgraduate student (artem.pyanykh@gmail.com).

Abstract: TODO: TITILE ABSTRACT.

Keywords: TODO: keywords.