

УДК 519.83

ББК 22.18

## TODO: НАЗВАНИЕ СТАТЬИ

АРТЕМ И. ПЬЯНЫХ

Московский университет имени М.В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
119991, Москва, Ленинские горы, 2-й учебный корпус  
artem.pyanykh@gmail.com

TODO: TITILE ABSTRACT.

*Ключевые слова:* TODO: ключевые слова.

## 1. Введение

В работе [1] была рассмотрена многошаговая модель биржевых торгов однотипными акциями, в которой торги между собой ведут два игрока. Перед началом торгов случайный ход определяет цену акции на весь период торгов, которая в состояниях рынка  $L$  и  $H$  равна 0 и 1 соответственно. Выбранная цена сообщается первому игроку и не сообщается второму, при этом второй игрок знает, что первый – инсайдер. Также оба игрока знают вероятность  $P$  высокой цены акции.

На каждом шаге торгов игроки одновременно и независимо назначают некоторую цену за акцию. Игроки могут делать произвольные вещественные ставки, причем игрок, предложивший большую цену, покупает у другого акцию по названной цене. Задачей игроков является максимизация стоимости портфеля, состоящего из некоторого числа акций и суммы денег.

Модель сводится к повторяющейся игре с неполной информацией, как описано в [2], для которой Де Мейером и Салей были найдены оптимальные стратегии игроков и значение игры. Позднее В. Доманским [3] была рассмотрена модификация модели, в которой ставки игроков могли принимать значения только из заданного дискретного множества  $\{i/m, i = \overline{0, m}, m \geq 1\}$ . В данной постановке им было получено решение игры неограниченной продолжительности.

В обеих работах использовался одинаковый механизм проведения транзакции, при котором акция продается по наибольшей из предложенных цен. Можно, однако, рассмотреть и следующий механизм формирования цены акции, предложенный в [4]. Игроки одновременно предлагают цены  $p_1$  и  $p_2$ , при  $p_1 > p_2$  акция приобретается первым игроком по цене  $\beta p_1 + (1 - \beta)p_2$ , где  $\beta \in [0, 1]$  – заданный коэффициент, характеризующий переговорную силу продавца; случай  $p_1 < p_2$  симметричен; при  $p_1 = p_2$  транзакции не происходит. Более подробное обсуждение связанное с выбором подобного механизма транзакции приведено в [5].

Фактически, в работах [1] и [3] коэффициент  $\beta$  равен 1. Обобщение дискретной модели на случай произвольного  $\beta$  было рассмотрено в [6]. В данной работе обобщение на случай произвольного  $\beta$  проведено для модели игры с непрерывными ставками.

## 2. Постановка задачи

Обозначим множество возможных состояний рынка через  $S = \{H, L\}$ ;  $s \in S$  при этом обозначает состояние, в котором на самом деле находится рынок.

Два игрока на этом рынке на протяжении  $n$  шагов ведут между собой торги за одну единицу рискового актива. Каждый игрок делает ставку из множества  $I = [0, 1]$ ; игрок предложивший большую ставку покупает у другого акцию по заданной цене.

Обозначим через  $y_t = (y_t^R, y_t^N)$  портфель первого игрока на  $t$ -ом шаге торгов, где  $y_t^R$  и  $y_t^N$  – количество единиц рискового и безрискового активов соответственно. Если на  $t$ -ом шаге игроки делают ставки  $p_{1,t} \in I$ ,  $p_{2,t} \in I$ , то портфель  $y_t = y_{t-1} + t(p_{1,t}, p_{2,t})$ , где при  $\beta \in [0, 1]$ ,  $\bar{\beta} = 1 - \beta$

$$t(p_1, p_2) = \mathbb{1}_{p_1 > p_2} (1, -(\beta p_1 + \bar{\beta} p_2)) + \mathbb{1}_{p_1 < p_2} (-1, \bar{\beta} p_1 + \beta p_2), \quad (2.1)$$

и  $\mathbb{1}_{p_1 > p_2}$  принимает значение 1 при  $p_1 > p_2$  и 0 в противном случае. То есть механизм проведения транзакции таков, что одна акция продается по цене равной выпуклой комбинации предложенных ставок с заданным коэффициентом  $\beta$ . Стоимость портфеля при этом равна

$$V(y_t) = \mathbb{1}_{s=H} y_t^R + y_t^N.$$

Будем считать, что игроки обладают неограниченными запасами рисковых и безрисковых активов, то есть торги не могут прекратиться по причине того, что у одного из игроков закончатся деньги или акции. Цель игроков состоит в максимизации прибыли полученной от торгов. Таким образом, не ограничивая общности, можно положить, что в начальный момент времени оба игрока имеют нулевые портфели. При этом прибыль первого игрока будет равна  $V(y_n)$ , а второго  $-V(y_n)$ .

Ниже мы рассмотрим теоретико-игровую постановку основной задачи (прямую игру), а также двойственной к ней в смысле Де Мейера (двойственную игру). Как отмечено в [1], прямая игра больше подходит для анализа стратегии первого игрока, в то время как двойственную удобнее использовать при анализе стратегии второго игрока.

### 2.1. Прямая игра

Перед началом игры ходом случая определяется  $s \in S$  таким образом, что  $p(s = H) = P$ ,  $p(s = L) = 1 - P$ . Выбранное  $s$  сообщается первому игроку (инсайдеру), второй игрок при этом не осведомлен о настоящем значении  $s$  и знает только вероятности выбора случаям того или иного состояния.

Обозначим через  $h_t = (p_{1,1}, p_{2,1}, \dots, p_{1,t}, p_{2,t})$  историю ставок к моменту времени  $t$ , а через  $H_t$  – множество всевозможных  $h_t$ . Стратегией первого игрока является последовательность ходов  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ , где  $\sigma_t = (\sigma_t^L, \sigma_t^H)$ . При фиксированном  $s \in S$  ход  $\sigma_t^s : H_{t-1} \rightarrow \Delta(I)$  является отображением из множества историй ставок к моменту времени  $t - 1$  в множество  $\Delta(I)$  вероятностных распределений на  $I$ . То есть, на каждом шаге инсайдер в зависимости от состояния  $s$  и истории  $h_{t-1}$  рандомизирует выбор ставки на множестве  $I$ . Обозначим множество стратегий первого игрока  $\Sigma_n$ .

Аналогично стратегией второго игрока назовем последовательность ходов  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ , где  $\tau_t : H_{t-1} \rightarrow \Delta(I)$ . Таким образом, не имея информации о состоянии  $s$ , второй игрок опирается только на историю ставок. Обозначим множество стратегий второго игрока  $\Gamma_n$ .

Пара стратегий  $(\sigma, \tau)$  вместе с ходом случая индуцирует на  $(S, H_n)$  вероятностное распределение  $\Pi[P, \sigma, \tau]$ . Тогда выигрыш первого игрока равен

$$g_n(P, \sigma, \tau) = \mathbb{E}_{\Pi[P, \sigma, \tau]} V(y_n).$$

Выигрыш второго игрока при этом равен  $-g_n(P, \sigma, \tau)$ .

Полученную игру обозначим через  $G_n(P)$ . Ее нижнее и верхнее значения даются формулами

$$V_{1,n}(P) = \sup_{\sigma} \inf_{\tau} g_n(P, \sigma, \tau), \quad V_{2,n}(P) = \inf_{\tau} \sup_{\sigma} g_n(P, \sigma, \tau).$$

В том случае, когда  $V_{1,n}(P) = V_{2,n}(P) = V_n(P)$ , будем говорить, что игра имеет значение  $V_n(P)$ .

Стратегии  $\sigma^*$  и  $\tau^*$  называются оптимальными, если

$$\inf_{\tau} g_n(P, \sigma^*, \tau) = V_{1,n}(P), \quad \sup_{\sigma} g_n(P, \sigma, \tau^*) = V_{2,n}(P).$$

В [1] показано, что игра  $G_n$  имеет рекурсивную структуру в том смысле, что задачу о нахождении выигрыша в  $(n + 1)$ -шаговой игре можно свести в задаче о нахождении выигрыша в  $n$ -шаговой игре

следующим образом. Рассмотрим стратегию  $\sigma$  первого игрока как пару  $(\sigma_1, \tilde{\sigma})$ , где  $\sigma_1$  – ход игрока на первом шаге игры, а  $\tilde{\sigma}$  – семейство стратегий в игре продолжительности  $n$ , зависящих от ставок  $(p_{1,1}, p_{2,1})$  на первом шаге. Аналогично стратегию  $\tau$  второго игрока можно представить как пару  $(\tau_1, \tilde{\tau})$ .

Приведем несколько фактов, которые понадобятся нам в дальнейшем. За подробным доказательством обращаться к [1].

Пара  $(\sigma_1, \tau_1)$  вместе с ходом случая индуцирует вероятностное распределение  $\Pi[P, \sigma_1, \tau_1]$  на  $(S, p_{1,1}, p_{2,1})$ . Обозначим через

$$P(p_{1,1}, p_{2,1}) = \Pi[P, \sigma_1, \tau_1](s = H \mid p_{1,1}, p_{2,1}).$$

апостериорную вероятность состояния  $H$  при условии, что первый игрок сделал ставку  $p_{1,1}$ , а второй –  $p_{2,1}$ . Так как  $p_{2,1}$  не зависит от  $s$ , то апостериорная вероятность

$$P(p_{1,1}, p_{2,1}) = P(p_{1,1}) = \Pi[P, \sigma_1](s = H \mid p_{1,1})$$

зависит только от  $p_{1,1}$ .

Тогда для значения выигрыша первого игрока справедливо представление

$$\begin{aligned} g_{n+1}(P, \sigma, \tau) &= g_1(P, \sigma_1, \tau_1) + \\ &+ \mathbb{E}_{\Pi[P, \sigma_1, \tau_1]} g_n(P(p_{1,1}), \tilde{\sigma}(p_{1,1}, p_{2,1}), \tilde{\tau}(p_{1,1}, p_{2,1})). \end{aligned}$$

Похожий результат имеет место и для нижнего значения игры.

**Лемма 2.1.** *Для любого  $P \in [0, 1]$  выполняется неравенство*

$$V_{1,n+1}(P) \geq \sup_{\sigma_1} \inf_{p_{2,1}} g_1(P, \sigma_1, p_{2,1}) + \mathbb{E}_{\Pi[P, \sigma_1]} V_{1,n}(P(p_{1,1})). \quad (2.2)$$

Подчеркнем, что так как значение игры нулевой продолжительности  $V_0(P) = 0$ , данная формула имеет смысл для любого  $n$ .

## 2.2. Двойственная игра

Следуя [1], определим двойственную игру  $G_n^*(x)$  следующим образом. Перед началом игры первый игрок выбирает текущее состояние  $s \in S$ ; второй игрок не осведомлен о выборе первого. Если  $s = H$ ,

то первый вынужден заплатить второму penalties размера  $x$  в конце игры. В остальном правила  $G_n^*$  аналогичны правилам  $G_n$ .

Таким образом, стратегией первого игрока в двойственной игре является пара  $(P, \sigma)$ , где  $P \in [0, 1]$ ,  $\sigma \in \Sigma_n$ . Множество стратегий второго игрока совпадает с  $T_n$ .

Выигрыш второго игрока, который он стремится максимизировать, определяется как

$$g_n^*(x, (P, \sigma), \tau) = xP - g_n(P, \sigma, \tau),$$

а верхнее и нижнее значения игры даются, соответственно, формулами

$$W_{1,n}(x) = \inf_{(P, \sigma)} \sup_{\tau} g_n^*(x, (P, \sigma), \tau), \quad W_{2,n}(x) = \sup_{\tau} \inf_{(P, \sigma)} g_n^*(x, (P, \sigma), \tau).$$

В том случае, когда  $W_{1,n}(x) = W_{2,n}(x) = W_n(x)$ , будем говорить, что игра имеет значение  $W_n(x)$ .

Аналогично предыдущему пункту, можно провести рассмотрение рекурсивной структуры игры  $G_n^*(x)$  и получить результат аналогичный результату леммы 2.1. За деталями обращаться к [1].

**Лемма 2.2.** *Для любого  $x \in \mathbb{R}$  выполняется неравенство*

$$W_{2,n+1}(x) \geq \sup_{\tau_1} \inf_{p_{1,1}} W_{2,n}(x - g_1^H(p_{1,1}, \tau_1) + g_1^L(p_{1,1}, \tau_1)) - g_1^L(p_{1,1}, \tau_1),$$

где  $g_1^H(p_{1,1}, \tau_1) = g_1(1, p_{1,1}, \tau_1)$ ,  $g_1^L(p_{1,1}, \tau_1) = g_1(0, p_{1,1}, \tau_1)$  – выигрыши в состояниях  $H$  и  $L$  соответственно.

Отметим, что так как  $W_0^*(x) = \phi(x) = \min(x, 0)$ , формула имеет смысл для любого  $n$ .

### 3. Оценки на выигрыш в прямой и двойственной играх

Обозначим схему дальнейших рассуждений.

В секциях 3.1 и 3.2 будут построены  $S$ -выравнивающие стратегии первого и второго игроков в прямой и двойственной играх, соответственно. Будет показано, что несмотря на то, что по виду данные стратегии отличается от таковых в [1], вид оценок на  $V_{1,n}(P)$  и  $W_{2,n}(x)$  остается неизменным. Отсюда будет следовать справедливость двойственных соотношений между  $V_{1,n}(P)$  и  $W_{2,n}(x)$ , существование  $V_n(P)$

и  $W_n(x)$ , формулы для их расчета, а также оптимальность построенных стратегий.

Сделаем несколько предположений о характере функций  $V_{1,n}(\cdot)$ ,  $W_{2,n}(\cdot)$ . Обозначим через  $f^*(x^*) = \inf\{x^* \cdot x - f(x) \mid x\}$  сопряженную к  $f$  в смысле Фенхеля функцию. Тогда потребуем, чтобы выполнялось:

1. функция  $V_{1,n}(\cdot)$  гладкая на  $[0, 1]$ ,
2. функция  $V_{1,n}^*(\cdot)$  гладкая на  $\mathbb{R}$ ,
3. функция  $W_{2,n}(\cdot)$  гладкая на  $\mathbb{R}$ .

Справедливость данных предположений будет обоснована в дальнейшем (см. раздел 4).

Также отметим, что функции  $V_{1,n}(\cdot)$  и  $W_{2,n}(\cdot)$  являются вогнутыми на своей области определения. Доказательство данного факта может быть найдено в [1].

Кроме того, приведем несколько свойств субдифференциалов вогнутых функций, которые понадобятся нам в дальнейшем, а конкретно эквивалентность следующих условий (см. [8, Теорема 23.5]):

- (a)  $x^* \in \partial f(x)$ ,
- (b)  $x \in \partial f^*(x^*)$ ,
- (c)  $\langle z, x^* \rangle - f(z)$  достигает минимума по  $z$  в точке  $x$ .

### 3.1. Оценка $V_{1,n}(P)$

Формула (2.2) дает способ получения нижней оценки  $V_{1,n}(P)$ , однако ее прямое использование представляет определенные трудности. В [1] рассматривается параметризация одношаговой стратегии инсайдера функциями  $f$  и  $Q$ , которые используются для генерации маргинального распределения  $p_{1,1}$  и апостериорной вероятности  $P(p_{1,1})$ , соответственно, но не дается конструктивного обоснования использованию  $f$  и  $Q$  вместо  $\sigma_1$ . Далее мы покажем, что задание стратегии первого игрока при помощи пары  $(f, Q)$  в некотором смысле естественно и приведем способ перехода от параметризованного представления к оригинальному.

Обозначим через  $\sigma_1^M(p_{1,1}) = P\sigma_1^H(p_{1,1}) + (1-P)\sigma_1^L(p_{1,1})$  маргинальное распределение  $p_{1,1}$ .

**Утверждение 3.1.** Для апостериорной вероятности  $P(p_{1,1})$  события  $H$  справедлива формула

$$P(p_{1,1}) = (P \frac{d\sigma_1^H}{d\sigma_1^M})(p_{1,1}), \quad (3.1)$$

где  $d\sigma_1^H / d\sigma_1^M$  – производная Радона-Никодима.

*Доказательство.* По определению  $P(p_{1,1})$  для любого  $B \in \mathcal{B}_I$  выполнено

$$P(s = H, p_{1,1} \in B) = \int_B P(p_{1,1}) \sigma_1^M(dp_{1,1}).$$

С другой стороны справедлива следующая формула:

$$P(s = H, p_{1,1} \in B) = P \int_B \sigma_1^H(dp_{1,1}).$$

Так как  $\sigma_1^H$  абсолютно непрерывна относительно  $\sigma_1^M$ , то существует производная Радона-Никодима, а значит

$$P(s = H, p_{1,1} \in B) = \int_B (P \frac{d\sigma_1^H}{d\sigma_1^M})(p_{1,1}) \sigma_1^M(dp_{1,1}).$$

Отсюда получаем (3.1).  $\square$

**Утверждение 3.2.** Для  $g_1(P, \sigma_1, p_{2,1})$  справедливо представление

$$\begin{aligned} g_1(P, \sigma_1, p_{2,1}) &= \int_I \mathbb{1}_{p_{1,1} > p_{2,1}} \left[ P(p_{1,1}) - \beta p_{1,1} - \bar{\beta} p_{2,1} \right] \sigma_1^M(dp_{1,1}) + \\ &+ \int_I \mathbb{1}_{p_{1,1} < p_{2,1}} \left[ \bar{\beta} p_{1,1} + \beta p_{2,1} - P(p_{1,1}) \right] \sigma_1^M(dp_{1,1}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

*Доказательство.* По определению

$$g_1(P, \sigma_1, p_{2,1}) = \mathbb{E}_{\Pi[P, \sigma_1]} \langle (\mathbb{1}_{s=H}, 1), t(p_{1,1}, p_{2,1}) \rangle. \quad (3.3)$$

Подставив (2.1) в (3.3), получим

$$\begin{aligned} g_1(P, \sigma_1, p_{2,1}) &= P \int_I \left[ \mathbb{1}_{p_{1,1} > p_{2,1}} (1 - \beta p_{1,1} - \bar{\beta} p_{2,1}) + \mathbb{1}_{p_{1,1} < p_{2,1}} \times \right. \\ &\times (\bar{\beta} p_{1,1} - \beta p_{2,1} - 1) \left. \right] \sigma_1^H(dp_{1,1}) + (1 - P) \int_I \left[ \mathbb{1}_{p_{1,1} > p_{2,1}} \times \right. \\ &\left. (-\beta p_{1,1} - \bar{\beta} p_{2,1}) + \mathbb{1}_{p_{1,1} < p_{2,1}} (\bar{\beta} p_{1,1} - \beta p_{2,1}) \right] \sigma_1^L(dp_{1,1}). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Отсюда, воспользовавшись (3.1), получим (3.2).  $\square$



Формула (3.2) показывает альтернативное представление стратегии инсайдера, а именно с помощью маргинального распределения ставки и апостериорной вероятности состояния  $H$ . Укажем способ перехода от  $\sigma_1$  к альтернативному представлению.

Возьмем случайную величину  $u$  равномерно распределенную на  $[0, 1]$ . Если  $f(\cdot)$  – левая обратная функции распределения  $p_{1,1}$ , то  $f(u)$  и  $p_{1,1}$  одинаково распределены. Обозначим  $Q(u) = P(f(u))$ . Пусть также  $\pi = \mathbb{P}[P, \sigma_1]$ . Так как для любого  $B \in \mathcal{B}_I$  выполнено

$$\pi(p_{1,1} \in B \mid s = H) = \frac{\pi(p_{1,1} \in B, s = H)}{\pi(s = H)} = \int_0^1 \mathbb{1}_{f(u) \in B} \frac{Q(u)}{P} du,$$

то восстановить  $\sigma_1$  по  $(f, Q)$  можно следующим образом. Если ходом случая было выбрано состояние  $H$ , то инсайдер выбирает  $u \in [0, 1]$  с плотностью вероятности  $Q(u)/P$  и делает ставку  $p_{1,1} = f(u)$ . Аналогично в состоянии  $L$  он выбирает  $u$  с плотностью вероятности  $(1 - Q(u))/(1 - P)$  и делает ставку  $p_{1,1} = f(u)$ .

Введем обозначение

$$F_{n+1}((f, Q), p_{2,1}) = g_1(P, (f, Q), p_{2,1}) + \mathbb{E}V_{1,n}(Q(u)).$$

Переходя к  $f$  и  $Q$  в формуле (3.2) получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} F_{n+1}((f, Q), p_{2,1}) &= \int_0^1 \mathbb{1}_{f(u) > p_{2,1}} (Q(u) - \beta f(u) - \alpha p_{2,1}) du + \\ &+ \int_0^1 \mathbb{1}_{f(u) < p_{2,1}} (\alpha f(u) + \beta p_{2,1} - Q(u)) du + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u)) du. \end{aligned} \quad (3.5)$$

В [1] показано, что функции  $f$  и  $Q$  должны удовлетворять следующим свойствам, чтобы является параметризацией стратегии первого игрока:

- $f$  не убывает на  $[0, 1]$ , (3.6a)

- $\int_0^1 Q(u) du = P$ , (3.6b)

- $\forall x, y \in [0, 1] : f(x) = f(y) \implies Q(x) = Q(y)$ . (3.6c)

Таким образом, мы можем переформулировать лемму 2.1 в терминах  $f$  и  $Q$ .

**Лемма 3.1.** Для любого  $P \in [0, 1]$  выполняется неравенство

$$V_{1,n+1}(P) \geq \sup_{(f, Q)} \inf_{p_{2,1}} F_{n+1}((f, Q), p_{2,1}),$$

где  $f$  и  $Q$  удовлетворяют (3.6a) – (3.6c).

Будем искать уравнивающую стратегию первого игрока. Пусть  $p_{2,1} = f(\gamma)$ ,  $\gamma \in [0, 1]$  и  $f(\cdot)$  строго возрастает в  $\gamma$ . Тогда

$$\begin{aligned} F_{n+1}((f, Q), f(\gamma)) &= \int_{\gamma}^1 (Q(u) - \beta f(u) - \alpha f(\gamma)) du + \\ &+ \int_0^{\gamma} (\alpha f(u) + \beta f(\gamma) - Q(u)) du + \\ &+ \int_0^1 V_{1,n}(Q(u)) du. \end{aligned} \quad (3.7)$$

По предположению  $F_{n+1}((f, Q), f(\gamma))$  не зависит от  $\gamma$ , следовательно

$$\frac{\partial F_{n+1}}{\partial \gamma} = (\gamma - \alpha)f'(\gamma) + 2f(\gamma) - 2Q(\gamma) = 0.$$

Отсюда

$$f(u) = (u - \alpha)^{-2} \int_{\alpha}^u 2(x - \alpha)Q(x) dx. \quad (3.8)$$

Подставив (3.8) в (3.7) при  $\gamma = 1$  получим

$$\begin{aligned} \Phi(Q) &= F_{n+1}((f(u), Q), f(1)) = \\ &= \int_0^1 (2s - 1)Q(s) ds + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u)) du. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Найдем  $Q$  как решение изопериметрической вариационной задачи

$$\Phi(Q) \rightarrow \max, \quad \int_0^1 Q(u) du = P. \quad (3.10)$$

Перед тем, как перейти к решению (3.10), заметим, что если функция  $f(\cdot)$  – вогнутая и ограниченная, ее субдифференциал  $\partial f(\cdot)$  не является однозначно определенным в худшем случае не некотором счетном множестве точек. Таким образом, если то, как определена

---

<sup>1</sup>При  $u = \alpha$  доопределим  $f(\alpha)$  по непрерывности как  $Q(\alpha)$ .

$f'(\cdot)$  на множестве меры нуль не существенно,  $f'(\cdot)$  можно доопределить единственным образом как непрерывную слева или справа функцию.

Применяя метод множителей Лагранжа (см. [7]), получим решение (3.10) в следующем виде:

$$Q(u) = V_{1,n}^{*'}(1 - \lambda - 2u), \text{ где}^2 \quad (3.11)$$

$$\int_0^1 V_{1,n}^{*'}(1 - \lambda - 2u) du = P, \quad (3.12)$$

Так как  $V_{1,n}(\cdot)$  определена на  $[0, 1]$ , то  $V_{1,n}^{*'}(\cdot)$  не возрастает на  $\mathbb{R}$  от 1 до 0. Следовательно  $\lambda$ , удовлетворяющая (3.12), существует. Кроме того доопределим  $V_{1,n}^{*'}(\cdot)$  таким образом, чтобы  $Q(u)$  была непрерывной справа при  $u < \alpha$  и непрерывной слева при  $u \geq \alpha$ .

**Лемма 3.2.** *Пара функций  $(f, Q)$ , определенная в (3.8), (3.11) принимает значения в  $[0, 1]$  и удовлетворяет (3.6a) – (3.6c), т.е. является корректной параметризацией стратегии первого игрока.*

*Доказательство.* Так как  $V_{1,n}^{*'}(\cdot)$  убывает от 1 до 0, то  $Q(\cdot)$  принимает значения в  $[0, 1]$  и, кроме того, не убывает на  $[0, 1]$ .

Далее, можно заметить, что  $f(u)$  является математическим ожиданием  $Q(x)$ , где  $x$  – случайная величина распределенная между  $\alpha$  и  $u$  с плотностью  $2|x - \alpha|/(u - \alpha)^2$ . Следовательно,  $f(\cdot)$  также принимает значения в  $[0, 1]$ .

Сделаем замену переменного  $t = (x - \alpha)/(u - \alpha)$  в (3.8). Тогда

$$f(u) = \int_0^1 2tQ(t(u - \alpha) + \alpha) dt.$$

Отсюда видно, что (3.6a) выполнено. Далее, (3.6b) выполнено по построению. Чтобы показать, что (3.6c) выполняется, рассмотрим несколько случаев.

Пусть  $\alpha < u_1 < u_2$ . Тогда, так как  $Q$  не убывает, почти при всех  $t \in [0, 1]$  выполнено  $Q(t(u_1 - \alpha) + \alpha) = Q(t(u_2 - \alpha) + \alpha)$ . Из непрерывности  $Q$  слева следует равенство при  $t = 1$ , т.е.  $Q(u_1) = Q(u_2)$ .

---

<sup>2</sup>Через  $f^*(x^*) = \inf_x \{x \cdot x^* - f(x)\}$  обозначена сопряженная к  $f(\cdot)$  функция.

При  $\alpha = u_1 < u_2$  имеем  $f(u_1) = f(\alpha) = Q(\alpha)$ . Отсюда почти при всех  $t \in [0, 1]$  выполнено  $Q(t(u_2 - \alpha) + \alpha) = Q(\alpha)$ . Снова из непрерывности  $Q$  слева получаем  $Q(u_1) = Q(u_2) = Q(\alpha)$ .

Доказательство при  $u_1 < u_2 \leq \alpha$  получается аналогично с заменой непрерывности слева на непрерывность справа. Так же рассматривается и случай  $u_1 < \alpha < u_2$ . Таким образом (3.6с) выполнено.  $\square$

**Лемма 3.3.** Если  $f(u_1) = f(u_2)$  при  $u_1 < u_2$ , то  $f(u) = Q(u)$  при  $u \in [u_1, u_2]$ .

*Доказательство.* Действительно, если  $f(u_1) = f(u_2)$ , то из леммы 3.2 следует, что  $f(\cdot)$  и  $Q(\cdot)$  константны на  $[u_1, u_2]$ . Тогда из (3.8) для  $f(u_2)$  имеем

$$\begin{aligned} f(u_2) &= (u_2 - \alpha)^{-2} \int_{\alpha}^{u_2} 2(x - \alpha)Q(x) dx = \\ &= (u_2 - \alpha)^{-2} \left( \int_{\alpha}^{u_1} 2(x - \alpha)Q(x) dx + \int_{u_1}^{u_2} 2(x - \alpha)Q(x) dx \right) = \\ &= (u_2 - \alpha)^{-2} \left( (u_1 - \alpha)^2 f(u_1) + \int_{u_1}^{u_2} 2(x - \alpha)Q(u_1) dx \right) = \\ &= (u_2 - \alpha)^{-2} \left( (u_1 - \alpha)^2 f(u_1) + ((u_2 - \alpha)^2 - (u_1 - \alpha)^2) Q(u_1) \right). \end{aligned}$$

С другой стороны, для  $f(u_1)$  справедливо

$$f(u_1) = (u_2 - \alpha)^{-2} \left( (u_1 - \alpha)^2 f(u_1) + ((u_2 - \alpha)^2 - (u_1 - \alpha)^2) f(u_1) \right).$$

Таким образом,  $f(u_1) = Q(u_1)$ , а следовательно  $f(u) = Q(u)$  при  $u \in [u_1, u_2]$ .  $\square$

Обозначим  $K(\lambda) = \int_0^1 V_{1,n}^*(1 - \lambda - 2u) du$ . Тогда  $K'(\lambda) = P$ . Подставив (3.11), (3.12) в (3.9), получим

$$\begin{aligned} \Phi(Q) &= \lambda \int_0^1 Q(s) ds + \int_0^1 [(2s - 1 - \lambda)Q(s) + V_{1,n}(Q(s))] ds = \\ &= PK^{*'}(P) - \int_0^1 [(1 + \lambda - 2s)Q(s) + V_{1,n}(Q(s))] ds = \\ &= PK^{*'}(P) - \int_0^1 V_{1,n}^*(1 + \lambda - 2s) ds = \\ &= PK^{*'}(P) - K(\lambda) = PK^{*'}(P) - K(K^{*'}(P)) = K^*(P). \end{aligned}$$

**Теорема 3.1.** Для выигрыша первого игрока в игре  $G_n(P)$  справедлива оценка  $V_{1,n+1}(P) \geq K^*(P)$ .

*Доказательство.* Из леммы 2.1 следует, что нам достаточно доказать, что при любом  $p_{2,1} \in [0, 1]$  выполнено  $F_{n+1}((f, Q), p_{2,1}) \geq K^*(P)$ .

Рассмотрим несколько случаев. Пусть  $p_{2,1} < f(0)$ . Тогда

$$\begin{aligned} F_{n+1}((f, Q), p_{2,1}) &= \int_0^1 [Q(u) - \beta f(u) - \alpha p_{2,1}] du + \\ &+ \int_0^1 V_{1,n}(Q(u)) du \geq F_{n+1}((f, Q), f(0)) = K^*(P). \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что при  $p_{2,1} > f(1)$

$$F_{n+1}((f, Q), p_{2,1}) \geq F_{n+1}((f, Q), f(0)) = K^*(p).$$

Пусть теперь  $p_{2,1} = f(\gamma)$ ,  $\gamma \in [0, 1]$ . Кроме того, введем обозначения

$$\gamma^- = \inf \{x \mid f(x) = f(\gamma)\}, \quad \gamma^+ = \sup \{x \mid f(x) = f(\gamma)\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} F_{n+1}((f, Q), p_{2,1}) &= \int_{\gamma^+}^1 (Q(u) - \beta f(u) - \alpha f(\gamma)) du + \\ &+ \int_0^{\gamma^-} (\alpha f(u) + \beta f(\gamma) - Q(u)) du + \\ &+ \int_0^1 V_{1,n}(Q(u)) du. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Однако, из леммы 3.3 следует, что  $Q(u) = f(\gamma)$  при  $u \in [\gamma^-, \gamma^+]$ . А значит (3.13) совпадает с (3.7) и  $F_{n+1}((f, Q), p_{2,1}) \geq K^*(p)$  по построению.  $\square$

### 3.2. Оценка $W_{2,n}(x)$

Аналогично тому, как это было сделано для первого игрока, параметризуем  $\tau_1$  при помощи неубывающей функции  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Если случайная величина  $u$  равномерно распределена на  $[0, 1]$ , положим  $h(u) = p_{2,1}$ . Подобным образом может быть получено любое распределение  $\tau_1$ .

**Лемма 3.4.**  $W_{2,n+1} \geq \sup_h \inf_{p_{1,1}} G(p_{1,1}, h)$ , где

$$G(p_{1,1}, h) = W_{2,n} \left( x - \int_0^1 \left( \mathbb{1}_{h(u) < p_{1,1}} - \mathbb{1}_{h(u) > p(u)} \right) du \right) - \int_0^1 \left[ \mathbb{1}_{h(u) < p_{1,1}} (-\beta p_{1,1} - \alpha h(u)) + \mathbb{1}_{h(u) > p_{1,1}} (\alpha p_{1,1} + \beta h(u)) \right] du. \quad (3.14)$$

#### 4. Значение игры

TODO

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. De Meyer B., Saley H. *On the strategic origin of Brownian motion in finance* // Int J Game Theory. 2002. V. 31. P. 285–319
2. Aumann R.J., Maschler M.B. *Repeated Games with Incomplete Information*. The MIT Press, Cambridge, London
3. Domansky V. *Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets* // Int J Game Theory. 2007. V. 36(2). P. 241–257
4. Chatterjee K., Samuelson W. *Bargaining under Incomplete Information* // Operations Research. 1983. V. 31. N. 5. P. 835–851
5. Пьяных А.И. Об одной модификации модели биржевых торгов с инсайдером // Математическая теория игр и её приложения. 2014. 6. № 4. С. 68–84.
6. Пьяных А.И. *Многошаговая модель биржевых торгов с асимметричной информацией и элементами переговоров* // TODO
7. Эльсгольц Л.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*. М.: Наука, 1965.
8. Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ*. М.: Мир, 1973.

TODO: TITLE OF THE ARTICLE

**Artem Pyanykh**, Moscow State University, postgraduate student  
(artem.pyanykh@gmail.com).

*Abstract:* TODO: TITILE ABSTRACT.

*Keywords:* TODO: keywords.