

УДК 519.83

ББК 22.18

## TODO: НАЗВАНИЕ СТАТЬИ

АРТЕМ И. ПЬЯНЫХ

Московский университет имени М.В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
119991, Москва, Ленинские горы, 2-й учебный корпус  
artem.pyanykh@gmail.com

TODO: TITILE ABSTRACT.

*Ключевые слова:* TODO: ключевые слова.

## 1. Введение

В работе [1] была рассмотрена многошаговая модель биржевых торгов однотипными акциями, в которой торги между собой ведут два игрока. Перед началом торгов случайный ход определяет цену акции на весь период торгов, которая в состояниях рынка  $L$  и  $H$  равна 0 и 1 соответственно. Выбранная цена сообщается первому игроку и не сообщается второму, при этом второй игрок знает, что первый – инсайдер. Также оба игрока знают вероятность  $P$  высокой цены акции.

На каждом шаге торгов игроки одновременно и независимо назначают некоторую цену за акцию. Игроки могут делать произвольные вещественные ставки, причем игрок, предложивший большую цену, покупает у другого акцию по названной цене. Задачей игроков является максимизация стоимости портфеля, состоящего из некоторого числа акций и суммы денег.

Модель сводится к повторяющейся игре с неполной информацией, как описано в [2], для которой Де Мейером и Салей были найдены оптимальные стратегии игроков и значение игры. Позднее В. Доманским [3] была рассмотрена модификация модели, в которой ставки игроков могли принимать значения только из заданного дискретного множества  $\{i/m, i = \overline{0, m}, m \geq 1\}$ . В данной постановке им было получено решение игры неограниченной продолжительности.

В обеих работах использовался одинаковый механизм проведения транзакции, при котором акция продается по наибольшей из предложенных цен. Можно, однако, рассмотреть и следующий механизм формирования цены акции, предложенный в [4]. Игроки одновременно предлагают цены  $p_1$  и  $p_2$ , при  $p_1 > p_2$  акция приобретается первым игроком по цене  $\beta p_1 + (1 - \beta)p_2$ , где  $\beta \in [0, 1]$  – заданный коэффициент, характеризующий переговорную силу продавца; случай  $p_1 < p_2$  симметричен; при  $p_1 = p_2$  транзакции не происходит. Более подробное обсуждение связанное с выбором подобного механизма транзакции приведено в [5].

Фактически, в работах [1] и [3] коэффициент  $\beta$  равен 1. Обобщение дискретной модели на случай произвольного  $\beta$  было рассмотрено в [6]. В данной работе обобщение на случай произвольного  $\beta$  проведено для модели игры с непрерывными ставками.

## 2. Постановка задачи

Обозначим множество возможных состояний рынка через  $S = \{H, L\}$ ;  $s \in S$  при этом обозначает состояние, в котором на самом деле находится рынок.

Два игрока на этом рынке на протяжении  $n$  шагов ведут между собой торги за одну единицу рисковогo актива. Каждый игрок делает ставку из множества  $I = [0, 1]$ ; игрок предложивший большую ставку покупает у другого акцию по заданной цене.

Обозначим через  $y_t = (y_t^R, y_t^N)$  портфель первого игрока на  $t$ -ом шаге торгов, где  $y_t^R$  и  $y_t^N$  – количество единиц рисковогo и безрисковогo активов соответственно. Если на  $t$ -ом шаге игроки делают ставки  $p_{1,t} \in I$ ,  $p_{2,t} \in I$ , то портфель  $y_t = y_{t-1} + t(p_{1,t}, p_{2,t})$ , где при  $\beta \in [0, 1]$ ,  $\bar{\beta} = 1 - \beta$

$$t(p_1, p_2) = \mathbb{1}_{p_1 > p_2} (1, -(\beta p_1 + \bar{\beta} p_2)) + \mathbb{1}_{p_1 < p_2} (-1, \bar{\beta} p_1 + \beta p_2), \quad (2.1)$$

и  $\mathbb{1}_{p_1 > p_2}$  принимает значение 1 при  $p_1 > p_2$  и 0 в противном случае. То есть механизм проведения транзакции таков, что одна акция продается по цене равной выпуклой комбинации предложенных ставок с заданным коэффициентом  $\beta$ . Стоимость портфеля при этом равна

$$V(y_t) = \mathbb{1}_{s=H} y_t^R + y_t^N.$$

Будем считать, что игроки обладают неограниченными запасами рисковогo и безрисковогo активов, то есть торги не могут прекратиться по причине того, что у одного из игроков закончатся деньги или акции. Цель игроков состоит в максимизации прибыли полученной от торгов. Таким образом, не ограничивая общности, можно положить, что в начальный момент времени оба игрока имеют нулевые портфели. При этом прибыль первого игрока будет равна  $V(y_n)$ , а второго  $-V(y_n)$ .

Ниже мы рассмотрим теоретико-игровую постановку основной задачи (прямую игру), а также двойственной к ней в смысле Де Мейера (двойственную игру). Как отмечено в [1], прямая игра больше подходит для анализа стратегии первого игрока, в то время как двойственную удобнее использовать при анализе стратегии второго игрока.

### 2.1. Прямая игра

Перед началом игры ходом случая определяется  $s \in S$  таким образом, что  $p(s = H) = P$ ,  $p(s = L) = 1 - P$ . Выбранное  $s$  сообщается первому игроку (инсайдеру), второй игрок при этом не осведомлен о настоящем значении  $s$  и знает только вероятности выбора случаев того или иного состояния.

Обозначим через  $h_t = (p_{1,1}, p_{2,1}, \dots, p_{1,t}, p_{2,t})$  историю ставок к моменту времени  $t$ , а через  $H_t$  – множество всевозможных  $h_t$ . Стратегией первого игрока является последовательность ходов  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ , где  $\sigma_t = (\sigma_t^L, \sigma_t^H)$ . При фиксированном  $s \in S$  ход  $\sigma_t^s : H_{t-1} \rightarrow \Delta(I)$  является отображением из множества историй ставок к моменту времени  $t - 1$  в множество  $\Delta(I)$  вероятностных распределений на  $I$ . То есть, на каждом шаге инсайдер в зависимости от состояния  $s$  и истории  $h_{t-1}$  рандомизирует выбор ставки на множестве  $I$ . Обозначим множество стратегий первого игрока  $\Sigma_n$ .

Аналогично стратегией второго игрока назовем последовательность ходов  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ , где  $\tau_t : H_{t-1} \rightarrow \Delta(I)$ . Таким образом, не имея информации о состоянии  $s$ , второй игрок опирается только на историю ставок. Обозначим множество стратегий второго игрока  $\Gamma_n$ .

Пара стратегий  $(\sigma, \tau)$  вместе с ходом случая индуцирует на  $(S, H_n)$  вероятностное распределение  $\Pi[P, \sigma, \tau]$ . Тогда выигрыш первого игрока равен

$$g_n(P, \sigma, \tau) = \mathbb{E}_{\Pi[P, \sigma, \tau]} V(y_n).$$

Выигрыш второго игрока при этом равен  $-g_n(P, \sigma, \tau)$ .

Полученную игру обозначим через  $G_n(P)$ . Ее нижнее и верхнее значения даются формулами

$$V_{1,n}(P) = \sup_{\sigma} \inf_{\tau} g_n(P, \sigma, \tau), \quad V_{2,n}(P) = \inf_{\tau} \sup_{\sigma} g_n(P, \sigma, \tau).$$

В том случае, когда  $V_{1,n}(P) = V_{2,n}(P) = V_n(P)$ , будем говорить, что игра имеет значение  $V_n(P)$ .

Стратегии  $\sigma^*$  и  $\tau^*$  называются оптимальными, если

$$\inf_{\tau} g_n(P, \sigma^*, \tau) = V_{1,n}(P), \quad \sup_{\sigma} g_n(P, \sigma, \tau^*) = V_{2,n}(P).$$

В [1] показано, что игра  $G_n$  имеет рекурсивную структуру в том смысле, что задачу о нахождении выигрыша в  $(n + 1)$ -шаговой игре

можно свести в задаче о нахождении выигрыша в  $n$ -шаговой игре следующим образом. Рассмотрим стратегию  $\sigma$  первого игрока как пару  $(\sigma_1, \tilde{\sigma})$ , где  $\sigma_1$  – ход игрока на первом шаге игры, а  $\tilde{\sigma}$  – семейство стратегий в игре продолжительности  $n$ , зависящих от ставок  $(p_1, p_2)$  на первом шаге. Аналогично стратегию  $\tau$  второго игрока можно представить как пару  $(\tau_1, \tilde{\tau})$ .

Приведем несколько фактов, которые понадобятся нам в дальнейшем. За подробным доказательством обращаться к [1].

Пара  $(\sigma_1, \tau_1)$  вместе с ходом случая индуцирует вероятностное распределение  $\Pi[P, \sigma_1, \tau_1]$  на  $(S, p_1, p_2)$ . Обозначим через

$$P(p_1, p_2) = \Pi[P, \sigma_1, \tau_1](s = H \mid p_1, p_2).$$

апостериорную вероятность состояния  $H$  при условии, что первый игрок сделал ставку  $p_1$ , а второй –  $p_2$ . Так как  $p_2$  не зависит от  $s$ , то апостериорная вероятность

$$P(p_1, p_2) = P(p_1) = \Pi[P, \sigma_1](s = H \mid p_1)$$

зависит только от  $p_1$ . Тогда для значения выигрыша первого игрока справедливо представление

$$g_{n+1}(P, \sigma, \tau) = g_1(P, \sigma_1, \tau_1) + \mathbb{E}_{\Pi[P, \sigma_1, \tau_1]} g_n(P(p_1), \tilde{\sigma}(p_1, p_2), \tilde{\tau}(p_1, p_2)).$$

Похожий результат имеет место и для нижнего значения игры.

**Лемма 2.1.** *Для любого  $P \in [0, 1]$  выполняется неравенство*

$$V_{1,n+1}(P) \geq \sup_{\sigma_1} \inf_{p_2} g_1(P, \sigma_1, p_2) + \mathbb{E}_{\Pi[P, \sigma_1]} V_{1,n}(P(p_1)). \quad (2.2)$$

Подчеркнем, что так как значение игры нулевой продолжительности  $V_0(P) = 0$ , данная формула имеет смысл для любого  $n \geq 1$ .

## 2.2. Двойственная игра

Следуя [1], определим двойственную игру  $G_n^*(x)$  следующим образом. Перед началом игры первый игрок выбирает текущее состояние  $s \in S$ ; второй игрок не осведомлен о выборе первого. Если  $s = H$ , то первый вынужден заплатить второму penalties размера  $x$  в конце игры. В остальном правила  $G_n^*$  аналогичны правилам  $G_n$ .

Таким образом, стратегией первого игрока в двойственной игре является пара  $(P, \sigma)$ , где  $P \in [0, 1]$ ,  $\sigma \in \Sigma_n$ . Множество стратегий второго игрока совпадает с  $T_n$ .

Выигрыш второго игрока, который он стремится максимизировать, определяется как

$$g_n^*(x, (P, \sigma), \tau) = xP - g_n(P, \sigma, \tau),$$

а верхнее и нижнее значения игры даются, соответственно, формулами

$$W_{1,n}(x) = \inf_{(P, \sigma)} \sup_{\tau} g_n^*(x, (P, \sigma), \tau), \quad W_{2,n}(x) = \sup_{\tau} \inf_{(P, \sigma)} g_n^*(x, (P, \sigma), \tau).$$

В том случае, когда  $W_{1,n}(x) = W_{2,n}(x) = W_n(x)$ , будем говорить, что игра имеет значение  $W_n(x)$ .

Аналогично предыдущему пункту, можно провести рассмотрение рекурсивной структуры игры  $G_n^*(x)$  и получить результат аналогичный результату леммы 2.1. За деталями обращаться к [1].

**Лемма 2.2.** *Для любого  $x \in \mathbb{R}$  выполняется неравенство*

$$W_{2,n+1}(x) \geq \sup_{\tau_1} \inf_{p_1} W_{2,n}(x - g_1^H(p_1, \tau_1) + g_1^L(p_1, \tau_1)) - g_1^L(p_1, \tau_1), \quad (2.3)$$

где  $g_1^H(p_1, \tau_1) = g_1(1, p_1, \tau_1)$ ,  $g_1^L(p_1, \tau_1) = g_1(0, p_1, \tau_1)$  – выигрыши в состояниях  $H$  и  $L$  соответственно.

Отметим, что так как  $W_0^*(x) = \phi(x) = \min(x, 0)$ , формула имеет смысл для любого  $n \geq 1$ .

### 3. Оценки на выигрыш в прямой и двойственной играх

Обозначим схему дальнейших рассуждений.

В секциях 3.1 и 3.2 будут построены  $S$ -выравнивающие стратегии первого и второго игроков в прямой и двойственной играх, соответственно. Будет показано, что несмотря на то, что по виду данные стратегии отличается от таковых в [1], вид оценок на  $V_{1,n}(P)$  и  $W_{2,n}(x)$  остается неизменным. Отсюда будет следовать справедливость двойственных соотношений между  $V_{1,n}(P)$  и  $W_{2,n}(x)$ , существование  $V_n(P)$  и  $W_n(x)$ , формулы для их расчета, а также оптимальность построенных стратегий.

Сделаем несколько предположений о характере функций  $V_{1,n}(\cdot)$ ,  $W_{2,n}(\cdot)$ . Обозначим через  $f^*(x^*) = \inf\{x^* \cdot x - f(x) \mid x\}$  сопряженную к  $f$  в смысле Фенхеля функцию. Тогда потребуем, чтобы выполнялось:

1. функция  $V_{1,n}(\cdot)$  гладкая на  $[0, 1]$ ,
2. функция  $V_{1,n}^*(\cdot)$  гладкая на  $\mathbb{R}$ ,
3. функция  $W_{2,n}(\cdot)$  гладкая на  $\mathbb{R}$ .

Справедливость данных предположений будет обоснована в дальнейшем (см. раздел 4).

Также отметим, что функции  $V_{1,n}(\cdot)$  и  $W_{2,n}(\cdot)$  являются вогнутыми на своей области определения. Доказательство данного факта может быть найдено в [1].

Кроме того, приведем несколько свойств сопряженных функций, которые понадобятся нам в дальнейшем. Во-первых, эквивалентность следующих условий для субдифференциалов вогнутых функций (см. [8, Теорема 23.5]):

- (a)  $x^* \in \partial f(x)$ ,
- (b)  $x \in \partial f^*(x^*)$ ,
- (c)  $\langle z, x^* \rangle - f(z)$  достигает минимума по  $z$  в точке  $x$ .

Во-вторых, связь между эффективным множеством функции и образом субдифференциала сопряженной функции. Обозначим эффективное множество через  $\text{dom } f = \{x \mid f(x) < \infty\}$ , а образ функции через  $\text{range } f = \cup \{f(x) \mid x\}$ . Тогда для функций в  $\mathbb{R}$  имеет место следующее включение (см. [8, §24]):

$$\text{int}(\text{dom } f) \subset \text{range } \partial f^* \subset \text{dom } f. \quad (3.1)$$

### 3.1. Оценка $V_{1,n}(P)$

Формула (2.2) дает способ получения нижней оценки  $V_{1,n}(P)$ , однако ее прямое использование представляет определенные трудности. В [1] рассматривается параметризация одношаговой стратегии инсайдера функциями  $f$  и  $Q$ , которые используются для генерации

маргинального распределения  $p_1$  и апостериорной вероятности  $P(p_1)$ , соответственно, но не дается конструктивного обоснования использованию  $f$  и  $Q$  вместо  $\sigma_1$ . Далее мы покажем, что задание стратегии первого игрока при помощи пары  $(f, Q)$  в некотором смысле естественно и приведем способ перехода от параметризованного представления к оригинальному.

Обозначим через  $\sigma_1^M(p_1) = P\sigma_1^H(p_1) + (1 - P)\sigma_1^L(p_1)$  маргинальное распределение  $p_1$ .

**Утверждение 3.1.** *Для апостериорной вероятности  $P(p_1)$  события  $H$  справедлива формула*

$$P(p_1) = P \frac{d\sigma_1^H}{d\sigma_1^M}(p_1), \quad (3.2)$$

где  $d\sigma_1^H / d\sigma_1^M$  – производная Радона-Никодима.

*Доказательство.* По определению  $P(p_1)$  для любого  $B \in \mathcal{B}_I$  выполнено

$$P(s = H, p_1 \in B) = \int_B P(p_1) \sigma_1^M(dp_1).$$

С другой стороны справедлива следующая формула:

$$P(s = H, p_1 \in B) = P \int_B \sigma_1^H(dp_1).$$

Так как  $\sigma_1^H$  абсолютно непрерывна относительно  $\sigma_1^M$ , то существует производная Радона-Никодима, а значит

$$P(s = H, p_1 \in B) = \int_B P \frac{d\sigma_1^H}{d\sigma_1^M}(p_1) \sigma_1^M(dp_1).$$

Отсюда получаем (3.2). □

**Утверждение 3.2.** *Для  $g_1(P, \sigma_1, p_2)$  справедливо представление*

$$\begin{aligned} g_1(P, \sigma_1, p_2) = & \int_I \mathbb{1}_{p_1 > p_2} \left[ P(p_1) - \beta p_1 - \bar{\beta} p_2 \right] \sigma_1^M(dp_1) + \\ & + \int_I \mathbb{1}_{p_1 < p_2} \left[ \bar{\beta} p_1 + \beta p_2 - P(p_1) \right] \sigma_1^M(dp_1). \end{aligned} \quad (3.3)$$



*Доказательство.* По определению

$$g_1(P, \sigma_1, p_2) = \mathbb{E}_{\Pi[P, \sigma_1]} \langle (\mathbb{1}_{s=H}, 1), t(p_1, p_2) \rangle. \quad (3.4)$$

Подставив (2.1) в (3.4), получим

$$\begin{aligned} g_1(P, \sigma_1, p_2) = & P \int_I \left[ \mathbb{1}_{p_1 > p_2} (1 - \beta p_1 - \bar{\beta} p_2) + \mathbb{1}_{p_1 < p_2} \times \right. \\ & \left. \times (\bar{\beta} p_1 - \beta p_2 - 1) \right] \sigma_1^H(dp_1) + (1 - P) \int_I \left[ \mathbb{1}_{p_1 > p_2} \times \right. \\ & \left. \times (-\beta p_1 - \bar{\beta} p_2) + \mathbb{1}_{p_1 < p_2} (\bar{\beta} p_1 - \beta p_2) \right] \sigma_1^L(dp_1). \end{aligned}$$

Отсюда, воспользовавшись (3.2), получим (3.3).  $\square$

Формула (3.3) показывает альтернативное представление стратегии инсайдера, а именно с помощью маргинального распределения ставки и апостериорной вероятности состояния  $H$ . Укажем способ перехода от  $\sigma_1$  к альтернативному представлению.

Возьмем случайную величину  $u$  равномерно распределенную на  $[0, 1]$ . Если  $f(\cdot)$  – левая обратная функции распределения  $p_1$ , то  $f(u)$  и  $p_1$  одинаково распределены. Обозначим  $Q(u) = P(f(u))$ . Пусть также  $\pi = \Pi[P, \sigma_1]$ . Так как для любого  $B \in \mathcal{B}_I$  выполнено

$$\pi(p_1 \in B \mid s = H) = \frac{\pi(p_1 \in B, s = H)}{\pi(s = H)} = \int_0^1 \mathbb{1}_{f(u) \in B} \frac{Q(u)}{P} du,$$

то восстановить  $\sigma_1$  по  $(f, Q)$  можно следующим образом. Если ходом случая было выбрано состояние  $H$ , то инсайдер выбирает  $u \in [0, 1]$  с плотностью вероятности  $Q(u)/P$  и делает ставку  $p_1 = f(u)$ . Аналогично в состоянии  $L$  он выбирает  $u$  с плотностью вероятности  $(1 - Q(u))/(1 - P)$  и делает ставку  $p_1 = f(u)$ .

Введем обозначение

$$F_{n+1}(P, (f, Q), p_2) = g_1(P, (f, Q), p_2) + \mathbb{E}V_{1,n}(Q(u)).$$

Переходя к  $f$  и  $Q$  в формуле (3.3) получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} F_{n+1}(P, (f, Q), p_2) = & \int_0^1 \mathbb{1}_{f(u) > p_2} (Q(u) - \beta f(u) - \alpha p_2) du + \\ & + \int_0^1 \mathbb{1}_{f(u) < p_2} (\alpha f(u) + \beta p_2 - Q(u)) du + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u)) du. \quad (3.5) \end{aligned}$$

В [1] показано, что функции  $f$  и  $Q$  должны удовлетворять следующим свойствам, чтобы является параметризацией одношаговой стратегии первого игрока в игре  $G_n(P)$ :

- $f$  не убывает на  $[0, 1]$ , (3.6a)

- $\int_0^1 Q(u) du = P$ , (3.6b)

- $\forall x, y \in [0, 1] : f(x) = f(y) \implies Q(x) = Q(y)$ . (3.6c)

Таким образом, мы можем переформулировать лемму 2.1 в терминах  $f$  и  $Q$ .

**Лемма 3.1.** *Для любого  $P \in [0, 1]$  выполняется неравенство*

$$V_{1,n+1}(P) \geq \sup_{(f, Q)} \inf_{p_2} F_{n+1}(P, (f, Q), p_2),$$

где  $f$  и  $Q$  удовлетворяют (3.6a) – (3.6c).

Будем искать  $S$ -выравнивающую стратегию первого игрока, при  $S = [f(0), f(1)]$ . Пусть  $p_2 = f(\alpha)$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  и  $f(\cdot)$  строго возрастает в  $\alpha$ . Тогда

$$\begin{aligned} F_{n+1}(P, (f, Q), f(\alpha)) &= \int_{\alpha}^1 (Q(u) - \beta f(u) - \bar{\beta} f(\alpha)) du + \\ &+ \int_0^{\alpha} (\bar{\beta} f(u) + \beta f(\alpha) - Q(u)) du + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u)) du. \end{aligned} \quad (3.7)$$

По предположению  $F_{n+1}(P, (f, Q), f(\alpha))$  не зависит от  $\alpha$ , следовательно

$$\frac{\partial F_{n+1}}{\partial \alpha} = (\alpha - \bar{\beta}) f'(\alpha) + 2f(\alpha) - 2Q(\alpha) = 0.$$

Отсюда

$$f(u) = (u - \bar{\beta})^{-2} \int_{\bar{\beta}}^u 2(x - \bar{\beta}) Q(x) dx. \quad (3.8)$$

Очевидно, если подставить (3.8) в (3.7), то получившееся выражение  $\Phi(Q)$  зависит только от  $Q$  и не зависит от  $\alpha$ . Подставив 1 вместо  $\alpha$ , получим

$$\Phi(Q) = \int_0^1 (\bar{\beta} f(u) - Q(u)) du + \beta f(1) + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u)) du. \quad (3.9)$$

---

<sup>1</sup>При  $u = \bar{\beta}$  доопределим  $f(\bar{\beta})$  по непрерывности как  $Q(\bar{\beta})$ .

**Лемма 3.2.** Для  $\Phi(Q)$  справедливо следующее выражение:

$$\Phi(Q) = \int_0^1 (2u - 1)Q(u) du + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u)) du. \quad (3.10)$$

*Доказательство.* Упростим (3.9) при  $\beta \in (0, 1)$ . Случаи  $\beta = 0$  и  $\beta = 1$  дают тот же результат и рассматриваются аналогично.

Найдем чему равно выражение  $\int_0^1 f(u) du$ , разбив этот интеграл на две части. Для первой части:

$$\begin{aligned} \int_0^{\bar{\beta}} f(u) du &= \int_0^{\bar{\beta}} (u - \bar{\beta})^{-2} \int_{\bar{\beta}}^u 2(s - \bar{\beta})Q(s) ds = \\ &= \int_0^{\bar{\beta}} 2(\bar{\beta} - s)Q(s) \int_0^s (\bar{\beta} - u)^{-2} du ds = (2/\bar{\beta}) \int_0^{\bar{\beta}} uQ(u) du. \end{aligned}$$

Аналогично для второй части:

$$\int_{\bar{\beta}}^1 f(u) du = (2/\beta) \int_{\bar{\beta}}^1 (1 - u)Q(u) du.$$

Подставим найденные выражения в (3.9):

$$\begin{aligned} \Phi(Q) &= 2 \int_0^{\bar{\beta}} uQ(u) du + (2\bar{\beta}/\beta) \int_{\bar{\beta}}^1 (1 - u)Q(u) du + \\ &+ (2/\beta) \int_{\bar{\beta}}^1 (u - \bar{\beta})Q(u) du - \int_0^1 Q(u) du + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u)) du. \end{aligned}$$

Приведа подобные с учетом того, что  $\bar{\beta}(1 - u) + u - \bar{\beta} = \beta u$ , получим (3.10).  $\square$

Найдем  $Q$  как экстремаль следующей вариационной задачи:

$$\Phi(Q) \rightarrow \max, \quad \int_0^1 Q(u) du = P. \quad (3.11)$$

По предположению  $V_{1,n}(\cdot)$  – гладкая функция. Тогда функция  $Q(\cdot)$ , доставляющая экстремум в задаче (3.11), удовлетворяет уравнению Эйлера, то есть выполнено

$$2u - 1 + \lambda + V'_{1,n}(Q(U)) = 0, \quad \int_0^1 Q(u) du = P.$$

Воспользовавшись свойствами субдифференциалов сопряженных функций, получим

$$Q(u) = V_{1,n}^{*'}(1 - \lambda - 2u), \text{ где} \quad (3.12)$$

$$\int_0^1 V_{1,n}^{*'}(1 - \lambda - 2u) du = P. \quad (3.13)$$

Так как  $V_{1,n}(\cdot)$  определена на  $[0, 1]$ , то из (3.1) следует, что  $V_{1,n}^{*'}(\cdot)$  не возрастает на  $\mathbb{R}$  от 1 до 0. Значит  $\lambda$ , удовлетворяющая (3.13), существует.

Введем обозначение

$$K(\lambda) = \int_0^1 V_{1,n}^*(1 - \lambda - 2u) du.$$

Тогда, аналогично [1] можно показать, что при подстановке (3.12) в (3.10) выполняется равенство  $\Phi(Q) = K^*(P)$ .

Отметим, что хотя  $f(u)$ , то есть механизм рандомизации ставки инсайдером, зависит от коэффициента  $\beta$ , функции  $Q(u)$  и  $\Phi(Q)$  от  $\beta$  не зависят и по форме совпадают с аналогичными выражениями в [1]. Данный факт позволит нам без изменений использовать те же самые соотношения между нижним и верхним значениями прямой и двойственной игр. Прежде, однако, нужно показать, что полученные  $f$  и  $Q$  действительно удовлетворяют (3.6а) – (3.6с) и доставляют гарантированный выигрыш первого игрока, равный  $K^*(P)$ .

**Лемма 3.3.** *Пара функций  $(f, Q)$ , определенная в (3.8), (3.12) принимает значения в  $[0, 1]$  и удовлетворяет (3.6а) – (3.6с), т.е. является параметризацией стратегии первого игрока.*

*Доказательство.* Так как  $V_{1,n}^{*'}(\cdot)$  убывает от 1 до 0, то  $Q(\cdot)$  принимает значения в  $[0, 1]$  и, кроме того, не убывает на  $[0, 1]$ .

Далее, можно заметить, что  $f(u)$  является математическим ожиданием  $Q(x)$ , где  $x$  – случайная величина распределенная между  $\bar{\beta}$  и  $u$  с плотностью  $2|x - \bar{\beta}|/(u - \bar{\beta})^2$ . Следовательно,  $f(\cdot)$  также принимает значения в  $[0, 1]$ .

Сделаем замену переменного  $t = (x - \bar{\beta})/(u - \bar{\beta})$  в (3.8). Тогда

$$f(u) = \int_0^1 2tQ(t(u - \bar{\beta}) + \bar{\beta}) dt.$$

Отсюда видно, что (3.6a) выполнено. Далее, (3.6b) выполнено по построению. Чтобы показать, что (3.6с) выполняется, рассмотрим несколько случаев.

Пусть  $\bar{\beta} < u_1 < u_2$ . Тогда, так как  $Q$  не убывает, почти при всех  $t \in [0, 1]$  выполнено  $Q(t(u_1 - \bar{\beta}) + \bar{\beta}) = Q(t(u_2 - \bar{\beta}) + \bar{\beta})$ . Из непрерывности  $Q$  следует равенство при  $t = 1$ , т.е.  $Q(u_1) = Q(u_2)$ .

При  $\bar{\beta} = u_1 < u_2$  имеем  $f(u_1) = f(\bar{\beta}) = Q(\bar{\beta})$ . Отсюда почти при всех  $t \in [0, 1]$  выполнено  $Q(t(u_2 - \bar{\beta}) + \bar{\beta}) = Q(\bar{\beta})$ . Снова из непрерывности  $Q$  получаем  $Q(u_1) = Q(u_2) = Q(\bar{\beta})$ .

Доказательство при  $u_1 < u_2 \leq \bar{\beta}$  получается аналогично. Так же рассматривается и случай  $u_1 < \bar{\beta} < u_2$ . Таким образом (3.6с) выполнено.  $\square$

**Лемма 3.4.** Если  $f(u_1) = f(u_2)$  при  $u_1 < u_2$ , то  $f(u) = Q(u)$  при  $u \in [u_1, u_2]$ .

*Доказательство.* Действительно, если  $f(u_1) = f(u_2)$ , то из леммы 3.3 следует, что  $f(\cdot)$  и  $Q(\cdot)$  константны на  $[u_1, u_2]$ . Тогда из (3.8) имеем

$$\begin{aligned} f(u_2) &= (u_2 - \bar{\beta})^{-2} \int_{\bar{\beta}}^{u_2} 2(x - \bar{\beta})Q(x) dx = \\ &= (u_2 - \bar{\beta})^{-2} \left( \int_{\bar{\beta}}^{u_1} 2(x - \bar{\beta})Q(x) dx + \int_{u_1}^{u_2} 2(x - \bar{\beta})Q(x) dx \right) = \\ &= (u_2 - \bar{\beta})^{-2} \left( (u_1 - \bar{\beta})^2 f(u_1) + \int_{u_1}^{u_2} 2(x - \bar{\beta})Q(u_1) dx \right) = \\ &= (u_2 - \bar{\beta})^{-2} \left( (u_1 - \bar{\beta})^2 f(u_1) + ((u_2 - \bar{\beta})^2 - (u_1 - \bar{\beta})^2) Q(u_1) \right). \end{aligned}$$

С другой стороны, для  $f(u_1)$  справедливо

$$f(u_1) = (u_2 - \bar{\beta})^{-2} \left( (u_1 - \bar{\beta})^2 f(u_1) + ((u_2 - \bar{\beta})^2 - (u_1 - \bar{\beta})^2) f(u_1) \right).$$

Таким образом,  $f(u_1) = Q(u_1)$ , а следовательно  $f(u) = Q(u)$  при  $u \in [u_1, u_2]$ .  $\square$

**Теорема 3.1.** Для гарантированного выигрыша первого игрока в игре  $G_n(P)$  справедлива оценка  $V_{1,n+1}(P) \geq K^*(P)$ .

*Доказательство.* Из леммы 2.1 следует, что нам достаточно доказать, что при любом  $p_2 \in [0, 1]$  выполнено  $F_{n+1}(P, (f, Q), p_2) \geq K^*(P)$ . Рассмотрим несколько случаев.

Пусть  $p_2 < f(0)$ . Тогда из (3.5) получаем, что справедливо следующее неравенство

$$\begin{aligned} F_{n+1}(P, (f, Q), p_2) &= \int_0^1 [Q(u) - \beta f(u) - \bar{\beta} p_2] du + \\ &+ \int_0^1 V_{1,n}(Q(u)) du \geq F_{n+1}(P, (f, Q), f(0)) = K^*(P). \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что при  $p_2 > f(1)$

$$F_{n+1}(P, (f, Q), p_{2,1}) \geq F_{n+1}(P, (f, Q), f(1)) = K^*(P).$$

Пусть теперь  $p_2 = f(\alpha)$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ . Введем обозначения

$$\alpha^- = \inf \{x \mid f(x) = f(\alpha)\}, \quad \alpha^+ = \sup \{x \mid f(x) = f(\alpha)\}.$$

Подстановкой в (3.5) получаем

$$\begin{aligned} F_{n+1}(P, (f, Q), p_2) &= \int_{\alpha^+}^1 (Q(u) - \beta f(u) - \bar{\beta} f(\alpha)) du + \\ &+ \int_0^{\alpha^-} (\bar{\beta} f(u) + \beta f(\alpha) - Q(u)) du + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u)) du. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Однако, из леммы 3.4 следует, что  $Q(u) = f(\alpha)$  при  $u \in [\alpha^-, \alpha^+]$ . А значит (3.14) совпадает с (3.7) и  $F_{n+1}(P, (f, Q), p_2) \geq K^*(P)$  по построению.  $\square$

### 3.2. Оценка $W_{2,n}(x)$

Аналогично тому, как это было сделано для первого игрока, параметризуем  $\tau_1$  при помощи неубывающей функции  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Если случайная величина  $u$  равномерно распределена на  $[0, 1]$ , положим  $p_2 = h(u)$ . Таким образом может быть получено любое распределение  $\tau_1$ .

Подобно предыдущему разделу получим аналог леммы 2.2 в терминах  $h$ . Заметим, что для  $g_1^L(p_1, \tau_1)$  и  $g_1^H(p_1, \tau_1)$  справедливо

$$\begin{aligned} g_1^L(p_1, \tau_1) &= \int_I \left[ \mathbb{1}_{p_1 > p_2} (-\beta p_1 - \bar{\beta} p_2) + \mathbb{1}_{p_1 < p_2} (\bar{\beta} p_1 + \beta p_2) \right] \tau_1(dp_2), \\ g_1^H(p_1, \tau_1) &= \int_I \left[ \mathbb{1}_{p_1 > p_2} (1 - \beta p_1 - \bar{\beta} p_2) + \mathbb{1}_{p_1 < p_2} (\bar{\beta} p_1 + \beta p_2 - 1) \right] \tau_1(dp_2). \end{aligned}$$

Подставим  $g_1^H(p_1, \tau_1)$  и  $g_1^L(p_1, \tau_1)$  в правую часть (2.3) и получившийся результат обозначим как

$$G_{n+1}(x, p_1, h) = W_{2,n} \left( x - \int_0^1 \left[ \mathbb{1}_{h(u) < p_1} - \mathbb{1}_{h(u) > p_1} \right] du \right) - \int_0^1 \left[ \mathbb{1}_{h(u) < p_1} (-\beta p_1 - \bar{\beta} h(u)) + \mathbb{1}_{h(u) > p_1} (\bar{\beta} p_1 + \beta h(u)) \right] du.$$

**Лемма 3.5.** Для любого  $x \in \mathbb{R}$  выполнено неравенство

$$W_{2,n+1}(x) \geq \sup_h \inf_{p_1} G_{n+1}(x, p_1, h).$$

Будем искать  $S$ -выравнивающую стратегию второго игрока, при  $S = [h(0), h(1)]$ . Пусть  $p_1 = h(\alpha)$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  и  $h(\cdot)$  строго возрастает в  $\alpha$ . Тогда

$$G_{n+1}(x, h(\alpha), h) = W_{2,n}(x + 1 - 2\alpha) - \int_\alpha^1 \left( \bar{\beta} h(\alpha) + \beta h(u) \right) du + \int_0^\alpha \left( \beta h(\alpha) + \bar{\beta} h(u) \right) du. \quad (3.15)$$

По предположению  $G_{n+1}(x, h(\alpha), h)$  не зависит от  $\alpha$ , следовательно имеет место равенство

$$\frac{\partial G_{n+1}}{\partial \alpha} = 2h(\alpha) + (\alpha - \bar{\beta})h'(\alpha) - 2W'_{2,n}(x - 2\alpha + 1) = 0.$$

Отсюда

$$h(u) = 2(u - \bar{\beta})^{-2} \int_{\bar{\beta}}^u (s - \bar{\beta}) W'_{2,n}(x - 2s + 1) ds^2.$$

Очевидно, если подставить  $h(u)$  в (3.15) то получившееся выражение  $\Psi(h)$  не зависит от  $\alpha$ , следовательно можно вместо  $\alpha$  подставить  $\bar{\beta}$ .

**Лемма 3.6.** Для значения  $\Psi(h)$  справедливо равенство

$$\Psi(h) = \int_0^1 W_{2,n}(x - 2s + 1) ds. \quad (3.16)$$

---

<sup>2</sup>При  $u = \bar{\beta}$  доопределим  $h(\bar{\beta})$  по непрерывности как  $W'_{2,n}(x - 2\bar{\beta} + 1)$ .

*Доказательство.* Проведем рассмотрение при  $\beta \in (0, 1)$ . Случаи  $\beta \in \{0, 1\}$  рассматриваются аналогично и дают тот же самый результат. При подстановке  $\bar{\beta}$  вместо  $\alpha$  выражение (3.15) приобретает вид

$$G_{n+1}(x, h(\bar{\beta}), h) = W_{2,n}(x - 2\bar{\beta} + 1) - \beta \int_{\bar{\beta}}^1 h(u) du + \bar{\beta} \int_0^{\bar{\beta}} h(u) du.$$

Для интегралов выше верны формулы

$$\begin{aligned} \int_0^{\bar{\beta}} h(u) du &= 2 \int_0^{\bar{\beta}} (s/\bar{\beta}) W'_{2,n}(x - 2s + 1) ds, \\ \int_{\bar{\beta}}^1 h(u) du &= 2 \int_{\bar{\beta}}^1 \frac{1-s}{\beta} W'_{2,n}(x - 2s + 1) ds. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$G_{n+1}(x, h(\bar{\beta}), h) = W_{2,n}(x - 1) + \int_0^1 2s W'_{2,n}(x - 2s + 1) ds.$$

Остается заметить, что после интегрирования по частям

$$\int_0^1 2s W'_{2,n}(x - 2s + 1) ds = \int_0^1 W_{2,n}(x - 2s + 1) ds - W_{2,n}(x - 1).$$

Отсюда получаем (3.16).  $\square$

#### TODO:

1. Подставить  $h$  в  $G$  выше, получить формулу для нижней оценки,
2. Показать, что  $h$  - является неубывающей из  $[0, 1]$  в  $[0, 1]$ ,
3. Показать, что в общем случая нижняя оценка также имеет место; для этого придется сформулировать еще одну лемму о свойствах функции  $h$ .

#### 4. Значение игры

TODO

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ



1. De Meyer B., Saley H. *On the strategic origin of Brownian motion in finance* // Int J Game Theory. 2002. V. 31. P. 285–319
2. Aumann R.J., Maschler M.B. *Repeated Games with Incomplete Information*. The MIT Press, Cambridge, London
3. Domansky V. *Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets* // Int J Game Theory. 2007. V. 36(2). P. 241–257
4. Chatterjee K., Samuelson W. *Bargaining under Incomplete Information* // Operations Research. 1983. V. 31. N. 5. P. 835–851
5. Пьяных А.И. Об одной модификации модели биржевых торгов с инсайдером // Математическая теория игр и её приложения. 2014. 6. № 4. С. 68–84.
6. Пьяных А.И. Многошаговая модель биржевых торгов с асимметричной информацией и элементами переговоров // TODO
7. Эльсгольц Л.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*. М.: Наука, 1965.
8. Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ*. М.: Мир, 1973.

TODO: TITLE OF THE ARTICLE

**Artem Pyanykh**, Moscow State University, postgraduate student  
(artem.pyanykh@gmail.com).

*Abstract:* TODO: TITILE ABSTRACT.

*Keywords:* TODO: keywords.