Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.3, с. 150–152

УДК 519.83

ББК 22.18

TODO: НАЗВАНИЕ СТАТЬИ

Артем И. Пьяных
Московский университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
119991, Москва, Ленинские горы, 2-й учебный корпус
artem.pyanykh@gmail.com

TODO: TITILE ABSTRACT.

Ключевые слова: TODO: ключевые слова.

©2015 А.И. Пьяных

1. Введение

В работе [1] была рассмотрена многошаговая модель биржевых торгов однотипными акциями, в которой торги между собой ведут два игрока. Перед началом торгов случайный ход определяет цену акции на весь период торгов, которая в состояниях рынка L и H равна 0 и 1 соответственно. Выбранная цена сообщается первому игроку и не сообщается второму, при этом второй игрок знает, что первый – инсайдер. Также оба игрока знают вероятность P высокой цены акции.

На каждом шаге торгов игроки одновременно и независимо назначают некоторую цену за акцию. Игроки могут делать произвольные вещественные ставки, причем игрок, предложивший бо́льшую цену, покупает у другого акцию по названной цене. Задачей игроков является максимизация стоимости портфеля, состоящего из некоторого числа акций и суммы денег.

Модель сводится к повторяющейся игре с неполной информацией, как описано в [2], для которой Де Мейером и Салей были найдены оптимальные стратегии игроков и значение игры. Позднее В. Доманским [3] была рассмотрена модификация модели, в которой ставки игроков могли принимать значения только из заданного дискретного множества $\{i/m,\ i = \overline{0,m},\ m \geqslant 1\}$. В данной постановке им было получено решение игры неограниченной продолжительности.

В обеих работах использовался одинаковый механизм проведения транзакции, при котором акция продается по наибольшей из предложенных цен. Можно, однако, рассмотреть и следующий механизм формирования цены акции, предложенный в [4]. Игроки одновременно предлагают цены p_1 и p_2, при $p_1 > p_2$ акция приобретается первым игроком по цене $\beta p_1 + (1-\beta) p_2$, где $\beta \in [0,1]$ – заданный коэффициент, характеризующий переговорную силу продавца; случай $p_1 < p_2$ симметричен; при $p_1 = p_2$ транзакции не происходит. Более подробное обсуждение связанное с выбором подобного механизма транзакции приведено в [5].

Фактически, в работах [1] и [3] коэффициент β равен 1. Обобщение дискретной модели на случай произвольного β было рассмотрено в [6]. В данной работе обобщение на случай произвольного β проведено для модели игры с непрерывными ставками.

2. Постановка задачи

Обозначим множество возможных состояний рынка через $S = \{H, L\}$; $s \in S$ при этом обозначает состояние, в котором на самом деле находится рынок.

Два игрока на этом рынке на протяжении n шагов ведут между собой торги за одну единицу рискового актива. Каждый игрок делает ставку из множества $I = [0, 1]$; игрок предложивший большую ставку покупает у другого акцию по заданной цене.

Обозначим через $y_t = (y_t^R, y_t^N)$ портфель первого игрока на t-ом шаге торгов, где y_t^R и y_t^N – количество единиц рискового и безрискового активов соответственно. Если на t-ом шаге игроки делают ставки $p_{1,t} \in I$, $p_{2,t} \in I$, то портфель $y_t = y_{t-1} + t(p_{1,t}, p_{2,t})$, где при $\beta \in [0, 1]$, $\overline{\beta} = 1 - \beta$

$$t(p_1, p_2) = \underset{p_1 > p_2}{\mathbb{1}}(1, -(\beta p_1 + \overline{\beta} p_2)) + \underset{p_1 < p_2}{\mathbb{1}}(-1, \overline{\beta} p_1 + \beta p_2), \qquad (2.1)$$

и $\mathbb{1}_{p_1 > p_2}$ принимает значение 1 при $p_1 > p_2$ и 0 в противном случае. То есть механизм проведения транзакции таков, что одна акция продается по цене равной выпуклой комбинации предложенных ставок с заданным коэффициентом β. Стоимость портфеля при этом равна

$$V(y_t) = \underset{s=H}{\mathbb{1}}\, y_t^R + y_t^N.$$

Будем считать, что игроки обладают неограниченными запасами рисковых и безрисковых активов, то есть торги не могут прекратиться по причине того, что у одного из игроков закончатся деньги или акции. Цель игроков состоит в максимизации прибыли полученной от торгов. Таким образом, не ограничивая общности, можно положить, что в начальный момент времени оба игрока имеют нулевые портфели. При этом прибыль первого игрока будет равна $V(y_n)$, а второго $-V(y_n)$.

Ниже мы рассмотрим теоретико-игровую постановку основной задачи (прямую игру), а также двойственной к ней в смысле Де Мейера (двойственную игру). Как отмечено в [1], прямая игра больше подходит для анализа стратегии первого игрока, в то время как двойственную удобнее использовать при анализе стратегии второго игрока.

2.1. Прямая игра

Перед началом игры ходом случая определяется $s \in S$ таким образом, что $p(s = H) = P,\ p(s = L) = 1 - P$. Выбранное s сообщается первому игроку (инсайдеру), второй игрок при этом не осведомлен о настоящем значении s и знает только вероятности выбора случаем того или иного состояния.

Обозначим через $h_t = (p_{1,1}, p_{2,1}, \ldots, p_{1,t}, p_{2,t})$ историю ставок к моменту времени t, а через H_t – множество всевозможных h_t. Стратегией первого игрока является последовательность ходов $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, где $\sigma_t = (\sigma_t^L,\ \sigma_t^H)$. При фиксированном $s \in S$ ход $\sigma_t^s : H_{t-1} \to \Delta(I)$ является отображением из множества историй ставок к моменту времени $t - 1$ в множество $\Delta(I)$ вероятностных распределений на I. То есть, на каждом шаге инсайдер в зависимости от состояния s и истории h_{t-1} рандомизирует выбор ставки на множестве I. Обозначим множество стратегий первого игрока Σ_n.

Аналогично стратегией второго игрока назовем последовательность ходов $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, где $\tau_t : H_{t-1} \to \Delta(I)$. Таким образом, не имея информации о состоянии s, второй игрок опирается только на историю ставок. Обозначим множество стратегий второго игрока T_n.

Пара стратегий (σ, τ) вместе с ходом случая индуцирует на (S, H_n) вероятностное распределение $\Pi[P, \sigma, \tau]$. Тогда выигрыш первого игрока равен

$$g_n(P, \sigma, \tau) = \mathbb{E}_{\Pi[P,\sigma,\tau]} V(y_n).$$

Выигрыш второго игрока при этом равен $-g_n(P, \sigma, \tau)$.

Полученную игру обозначим через $G_n(P)$. Ее нижнее и верхнее значения даются формулами

$$V_{1,n}(P) = \sup_\sigma \inf_\tau g_n(P, \sigma, \tau), \quad V_{2,n}(P) = \inf_\tau \sup_\sigma g_n(P, \sigma, \tau).$$

В том случае, когда $V_{1,n}(P) = V_{2,n}(P) = V_n(P)$, будем говорить, что игра имеет значение $V_n(P)$.

Стратегии σ^* и τ^* называются оптимальными, если

$$\inf_\tau g_n(P, \sigma^*, \tau) = V_{1,n}(P), \ \ \sup_\sigma g_n(P, \sigma, \tau^*) = V_{2,n}(P).$$

В [1] показано, что игра G_n имеет рекурсивную структуру в том смысле, что задачу о нахождении выигрыша в $(n+1)$-шаговой игре можно свести в задаче о нахождении выигрыша в n-шаговой игре следующим образом. Рассмотрим стратегию σ первого игрока как пару $(\sigma_1, \tilde{\sigma})$, где σ_1 – ход игрока на первом шаге игры, а $\tilde{\sigma}$ – семейство стратегий в игре продолжительности n, зависящих от ставок $(p_{1,1}, p_{2,1})$ на первом шаге. Аналогично стратегию τ второго игрока можно представить как пару $(\tau_1, \tilde{\tau})$.

Приведем несколько фактов, которые понадобятся нам в дальнейшем. За подробным доказательством обращаться к [1].

Пара (σ_1, τ_1) вместе с ходом случая индуцирует вероятностное распределение $\Pi[P, \sigma_1, \tau_1]$ на $(S, p_{1,1}, p_{2,1})$. Обозначим через

$$P(p_{1,1}, p_{2,1}) = \Pi[P, \sigma_1, \tau_1](s = H \mid p_{1,1}, p_{2,1}).$$

апостериорную вероятность состояния H при условии, что первый игрок сделал ставку $p_{1,1}$, а второй – $p_{2,1}$. Так как $p_{2,1}$ не зависит от s, то апостериорная вероятность

$$P(p_{1,1}, p_{2,1}) = P(p_{1,1}) = \Pi[P, \sigma_1](s = H \mid p_{1,1})$$

зависит только от $p_{1,1}$.

Тогда для значения выигрыша первого игрока справедливо представление

$$\begin{aligned} g_{n+1}(P, \sigma, \tau) = g_1(P, \sigma_1, \tau_1) + \\ + \mathbb{E}_{\Pi[P,\sigma_1,\tau_1]} g_n(P(p_{1,1}), \tilde{\sigma}(p_{1,1}, p_{2,1}), \tilde{\tau}(p_{1,1}, p_{2,1})). \end{aligned}$$

Похожий результат имеет место и для нижнего значения игры.

Лемма 2.1. *Для любого $P \in [0, 1]$ выполняется неравенство*

$$V_{1,n+1}(P) \geqslant \sup_{\sigma_1} \inf_{p_{2,1}} g_1(P, \sigma_1, p_{2,1}) + \mathbb{E}_{\Pi[P,\sigma_1]} V_{1,n}(P(p_{1,1})). \tag{2.2}$$

Подчеркнем, что так как значение игры нулевой продолжительности $V_0(P) = 0$, данная формула имеет смысл для любого n.

2.2. Двойственная игра

Следуя [1], определим двойственную игру $G_n^*(x)$ следующим образом. Перед началом игры первый игрок выбирает текущее состояние $s \in S$; второй игрок не осведомлен о выборе первого. Если $s = H$, то первый вынужден заплатить второму пенальти размера x в конце игры. В остальном правила G_n^* аналогичны правилам G_n.

Таким образом, стратегией первого игрока в двойственной игре является пара $(P,\ \sigma)$, где $P \in [0,1]$, $\sigma \in \Sigma_n$. Множество стратегий второго игрока совпадает с T_n.

Выигрыш второго игрока, который он стремится максимизировать, определяется как

$$g_n^*(x,(P,\ \sigma),\tau) = xP - g_n(P,\sigma,\tau),$$

а верхнее и нижнее значения игры даются, соответственно, формулами

$$W_{1,n}(x) = \inf_{(P,\,\sigma)} \sup_{\tau} g_n^*(x,(P,\ \sigma),\tau),\ \ W_{2,n}(x) = \sup_{\tau} \inf_{(P,\,\sigma)} g_n^*(x,(P,\ \sigma),\tau).$$

В том случае, когда $W_{1,n}(x) = W_{2,n}(x) = W_n(x)$, будем говорить, что игра имеет значение $W_n(x)$.

Аналогично предыдущему пункту, можно провести рассмотрение рекурсивной структуры игры $G_n^*(x)$ и получить результат аналогичный результату леммы 2.1. За деталями обращаться к [1].

Лемма 2.2. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство*

$$W_{2,n+1}(x) \geqslant \sup_{\tau_1} \inf_{p_{1,1}} W_{2,n}(x - g_1^H(p_{1,1},\tau_1) + g^L(p_{1,1},\tau_1)) - g_1^L(p_{1,1},\tau_1),$$

где $g_1^H(p_{1,1},\tau_1) = g_1(1,p_{1,1},\tau_1)$, $g_1^L(p_{1,1},\tau_1) = g_1(0,p_{1,1},\tau_1)$ – выигрыши в состояниях H и L соответственно.

Отметим, что так как $W_0^*(x) = \phi(x) = \min(x,0)$, формула имеет смысл для любого n.

3. Оценки на выигрыш в прямой и двойственной играх

Обозначим схему дальнеших рассуждений.

В секциях 3.1 и 3.2 будут построены S-выравнивающие стратегии первого и второго игроков в прямой и двойственной играх, соответственно. Будет показано, что несмотря на то, что по виду данные стратегии отличается от таковых в [1], вид оценок на $V_{1,n}(P)$ и $W_{2,n}(x)$ остается неизменным. Отсюда будет следовать справедливость двойственных соотношений между $V_{1,n}(P)$ и $W_{2,n}(x)$, существование $V_n(P)$

и $W_n(x)$, формулы для их расчета, а также оптимальность построенных стратегий.

Сделаем несколько предположений о характере функций $V_{1,n}(\cdot)$, $W_{2,n}(\cdot)$. Обозначим через $f^*(x^*) = \inf\{x^* \cdot x - f(x) \mid x\}$ сопряженную к f в смысле Фенхеля функцию. Тогда потребуем, чтобы выполнялось:

1. функция $V_{1,n}(\cdot)$ гладкая на $[0, 1]$,
2. функция $V^*_{1,n}(\cdot)$ гладкая на $\mathbb{R}$,
3. функция $W_{2,n}(\cdot)$ гладкая на $\mathbb{R}$.

Справедливость данных предположений будет обоснована в дальнейшем (см. раздел 4).

Также отметим, что функции $V_{1,n}(\cdot)$ и $W_{2,n}(\cdot)$ являются вогнутыми на своей области определения. Доказательство данного факта может быть найдено в [1].

Кроме того, приведем несколько свойств субдифференциалов вогнутых функций, которые понадобятся нам в дальнейшем, а конкретно эквивалентность следующих условий (см. [8, Теорема 23.5]):

(a) $x^* \in \partial f(x)$,

(b) $x \in \partial f^*(x^*)$,

(c) $\langle z, x^* \rangle - f(z)$ достигает минимума по z в точке x.

3.1. Оценка $\mathbf{V_{1,n}(P)}$

Формула (3.14) дает способ получения нижней оценки $V_{1,n}(P)$, однако ее прямое использование представляет определенные трудности. В [1] рассматривается параметризация одношаговой стратегии инсайдера функциями f и Q, которые используются для генерации маргинального распределения $p_{1,1}$ и апостериорной вероятности $P(p_{1,1})$ состояния H, соответственно, но не дается конструктивного обоснования использованию f и Q вместо σ_1. Далее мы покажем, что задание стратегии первого игрока при помощи пары (f, Q) в некотором смысле естественно и обозначим способ перехода от параметризованного представления к оригинальному.

Обозначим через $\sigma^M_1(p_{1,1}) = P\sigma^H_1(p_{1,1}) + (1-P)\sigma^L(p_{1,1})$ маргинальное распределение $p_{1,1}$.

Утверждение 3.1. *Для апостериорной вероятности* $P(p_{1,1})$ *события* H *справедлива формула*

$$P(p_{1,1}) = (P\,\frac{\mathrm{d}\sigma_1^H}{\mathrm{d}\sigma_1^M})(p_{1,1}), \tag{3.1}$$

где $\mathrm{d}\sigma_1^H / \mathrm{d}\sigma_1^M$ *– производная Радона-Никодима.*

Доказательство. По определению $P(p_{1,1})$ для любого $B \in \mathcal{B}_I$ выполнено

$$P(\{s = H\} \cap \{p_{1,1} \in B\}) = \int_B P(p_{1,1})\, \sigma_1^M(\mathrm{d}p_{1,1}).$$

С другой стороны справедлива следующая формула:

$$P(\{s = H\} \cap \{p_{1,1} \in B\}) = P \int_B \sigma_1^H(\mathrm{d}p_{1,1}).$$

Так как σ_1^H абсолютно непрерывна относительно σ_1^M, то существует производная Радона-Никодима, а значит

$$P(\{s = H\} \cap \{p_{1,1} \in B\}) = \int_B (P\frac{\mathrm{d}\sigma_1^H}{\mathrm{d}\sigma_1^M})(p_{1,1})\, \sigma_1^M(\mathrm{d}p_{1,1}).$$

Отсюда получаем (3.1). □

Утверждение 3.2. *Для* $g_1(P, \sigma_1, p_{2,1})$ *справедливо представление*

$$\begin{aligned} g_1(P, \sigma_1, p_{2,1}) = \int_I \underset{p_{1,1} > p_{2,1}}{\mathbb{1}} \left[P(p_{1,1}) - \beta p_{1,1} - \overline{\beta} p_{2,1}\right] \sigma_1^M(\mathrm{d}p_{1,1}) + \\ + \int_I \underset{p_{1,1} < p_{2,1}}{\mathbb{1}} \left[\overline{\beta} p_{1,1} + \beta p_{2,1} - P(p_{1,1})\right] \sigma_1^M(\mathrm{d}p_{1,1}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Доказательство. По определению

$$g_1(P, \sigma_1, p_{2,1}) = \mathbb{E}_{\Pi[P,\sigma_1]} \langle (\underset{s=H}{\mathbb{1}}, 1), t(p_{1,1}, p_{2,1}) \rangle. \tag{3.3}$$

Подставив (2.1) в (3.3), получим

$$\begin{aligned} g_1(P, \sigma_1, p_{2,1}) = P \int_I \Big[\underset{p_{1,1} > p_{2,1}}{\mathbb{1}} (1 - \beta p_{1,1} - \overline{\beta} p_{2,1}) + \underset{p_{1,1} < p_{2,1}}{\mathbb{1}} \times \\ \times (\overline{\beta} p_{1,1} - \beta p_{2,1} - 1) \Big] \sigma_1^H(\mathrm{d}p_{1,1}) + (1 - P) \int_I \Big[\underset{p_{1,1} > p_{2,1}}{\mathbb{1}} \times \\ (-\beta p_{1,1} - \overline{\beta} p_{2,1}) + \underset{p_{1,1} < p_{2,1}}{\mathbb{1}} (\overline{\beta} p_{1,1} - \beta p_{2,1}) \Big] \sigma_1^L(\mathrm{d}p_{1,1}). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Отсюда, воспользовавшись (3.1), получим (3.2). □

Переписать эту секцию! Нужно связать параметризацию с формулой (3.2)

Стратегию инсайдера σ_1 можно отождествить с вероятностным распределением $\pi = \pi(s, p_{1,1})$ на (S, I) таким, что $\pi(s = H) = P$. Любое такое распределение можно сгенерировать следующим образом. Возьмем случайную величину u равномерно распределенную на $[0,1]$. Пусть $f(\cdot)$ – левая обратная функции распределения $p_{1,1}$. Тогда $f(u)$ и $p_{1,1}$ одинаково распределены. Кроме того $Q(u) = P(f(u))$. Тогда для любого $B \in \mathcal{B}_I$

$$\pi(p_{1,1} \in B \mid s = H) = \frac{\pi(p_{1,1} \in B,\ s = H)}{\pi(s = H)} = \int_0^1 \mathbb{1}_{f(u) \in B} \frac{Q(u)}{P} \,\mathrm{d}u.$$

Восстановить σ_1 по (f, Q) можно следующим образом. Если ходом случая было выбрано состояние H, то инсайдер выбирает $u \in [0,1]$ с плотностью вероятности $Q(u)/P$ и делает ставку $p_{1,1} = f(u)$. Аналогично для состояния L он выбирает u с плотностью вероятности $(1 - Q(u))/(1 - P)$ и делает ставку $p_{1,1} = f(u)$.

Любое такое распределение может быть сгенерировано при помощи функций f и Q из $[0,1]$ в $[0,1]$, удовлетворающих следующим условиям:

- ◇ f – не убывает на $[0,1]$, (3.5a)

- ◇ $$\int_0^1 Q(u) \,\mathrm{d}u = P, \tag{3.5b}$$

- ◇ $$\forall x, y \in [0,1] : f(x) = f(y) \implies Q(x) = Q(y). \tag{3.5c}$$

Лемма 3.1. $V_{1,n+1}(P) \geqslant \sup_{(f,Q)} \inf_{p_{2,1}} F_{n+1}\left((f,Q), p_{2,1}\right)$, *где*

$$\begin{aligned} F_{n+1}\left((f,Q), p_{2,1}\right) = \int_0^1 \mathbb{1}_{f(u) > p_{2,1}} (Q(u) - \beta f(u) - \alpha p_{2,1}) \,\mathrm{d}u \ + \\ + \int_0^1 \mathbb{1}_{f(u) < p_{2,1}} (\alpha f(u) + \beta p_{2,1} - Q(u)) \,\mathrm{d}u \ + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u)) \,\mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Доказательство получается подстановкой f и Q в (2.2).

Будем искать уравнивающую стратегию первого игрока. Пусть $p_{2,1} = f(\gamma),\ \gamma \in [0,1]$ и $f(\cdot)$ строго возрастает в γ. Тогда

$$\begin{aligned} F_{n+1}\left((f,Q), f(\gamma)\right) = &\int_\gamma^1 \left(Q(u) - \beta f(u) - \alpha f(\gamma)\right) \mathrm{d}u + \\ &+ \int_0^\gamma \left(\alpha f(u) + \beta f(\gamma) - Q(u)\right) \mathrm{d}u + \\ &+ \int_0^1 V_{1,n}(Q(u))\, \mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{3.7}$$

По предположению $F_{n+1}\left((f,Q), f(\gamma)\right)$ не зависит от γ, следовательно

$$\frac{\partial F_{n+1}}{\partial \gamma} = (\gamma - \alpha) f'(\gamma) + 2f(\gamma) - 2Q(\gamma) = 0.$$

Отсюда

$$f(u) = (u - \alpha)^{-2} \int_\alpha^u 2(x-\alpha) Q(x)\, \mathrm{d}x.^1 \tag{3.8}$$

Подставив (3.8) в (3.7) при $\gamma = 1$ получим

$$\begin{aligned} \Phi(Q) &= F_{n+1}\left((f(u), Q), f(1)\right) = \\ &= \int_0^1 (2s-1) Q(s)\, \mathrm{d}s + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u))\, \mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Найдем Q как решение изопериметрической вариационной задачи

$$\Phi(Q) \to \max, \quad \int_0^1 Q(u)\, \mathrm{d}u = P. \tag{3.10}$$

Перед тем, как перейти к решению (3.10), заметим, что если функция $f(\cdot)$ – вогнутая и ограниченная, ее субдифференциал $\partial f(\cdot)$ не является однозначно определенным в худшем случае не некотором счетном множестве точек. Таким образом, если то, как определена $f'(\cdot)$ на множестве меры нуль не существенно, $f'(\cdot)$ можно доопределить единственным образом как непрерывную слева или справа функцию.

---

[1]При $u = \alpha$ доопределим $f(\alpha)$ по непрерывности как $Q(\alpha)$.

Применяя метод множителей Лагранжа (см. [7]), получим решение (3.10) в следующем виде:

$$Q(u) = V^{*\prime}_{1,n}(1-\lambda-2u), \text{ где}^2 \tag{3.11}$$

$$\int_0^1 V^{*\prime}_{1,n}(1-\lambda-2u)\,\mathrm{d}u = P, \tag{3.12}$$

Так как $V_{1,n}(\cdot)$ определена на $[0,1]$, то $V^{*\prime}_{1,n}(\cdot)$ не возрастает на $\mathbb{R}$ от 1 до 0. Следовательно λ, удовлетворяющая (3.12), существует. Кроме того доопределим $V^{*\prime}_{1,n}(\cdot)$ таким образом, чтобы $Q(u)$ была непрерывной справа при $u < \alpha$ и непрерывной слева при $u \geqslant \alpha$.

Лемма 3.2. *Пара функций* (f, Q), *определенная в* (3.8), (3.11) *принимает значения в* $[0,1]$ *и удовлетворяет* (3.5a) – (3.5c), *т.е. является корректной параметризацией стратегии первого игрока.*

Доказательство. Так как $V^{*\prime}_{1,n}(\cdot)$ убывает от 1 до 0, то $Q(\cdot)$ принимает значения в $[0,1]$ и, кроме того, не убывает на $[0,1]$.

Далее, можно заметить, что $f(u)$ является математическим ожиданием $Q(x)$, где x – случайная величина распределенная между α и u с плотностью $2|x-\alpha|/(u-\alpha)^2$. Следовательно, $f(\cdot)$ также принимает значения в $[0,1]$.

Сделаем замену переменного $t = (x-\alpha)/(u-\alpha)$ в (3.8). Тогда

$$f(u) = \int_0^1 2tQ\left(t(u-\alpha)+\alpha\right)\mathrm{d}t.$$

Отсюда видно, что (3.5a) выполнено. Далее, (3.5b) выполнено по построению. Чтобы показать, что (3.5c) выполняется, рассмотрим несколько случаев.

Пусть $\alpha < u_1 < u_2$. Тогда, так как Q не убывает, почти при всех $t \in [0,1]$ выполнено $Q(t(u_1-\alpha)+\alpha) = Q(t(u_2-\alpha)+\alpha)$. Из непрерывности Q слева следует равенство при $t = 1$, т.е. $Q(u_1) = Q(u_2)$.

При $\alpha = u_1 < u_2$ имеем $f(u_1) = f(\alpha) = Q(\alpha)$. Отсюда почти при всех $t \in [0,1]$ выполнено $Q(t(u_2-\alpha)+\alpha) = Q(\alpha)$. Снова из непрерывности Q слева получаем $Q(u_1) = Q(u_2) = Q(\alpha)$.

---

[2] Через $f^*(x^*) = \inf_x \{x \cdot x^* - f(x)\}$ обозначена сопряженная к $f(\cdot)$ функция.

Доказательство при $u_1 < u_2 \leqslant \alpha$ получается аналогично с заменой непрерывности слева на непрерывность справа. Так же рассматривается и случай $u_1 < \alpha < u_2$. Таким образом (3.5c) выполнено. □

Лемма 3.3. *Если* $f(u_1) = f(u_2)$ *при* $u_1 < u_2$, *то* $f(u) = Q(u)$ *при* $u \in [u_1, u_2]$.

Доказательство. Действительно, если $f(u_1) = f(u_2)$, то из леммы 3.2 следует, что $f(\cdot)$ и $Q(\cdot)$ константны на $[u_1, u_2]$. Тогда из (3.8) для $f(u_2)$ имеем

$$\begin{aligned}
f(u_2) &= (u_2-\alpha)^{-2}\int_\alpha^{u_2} 2(x-\alpha)Q(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= (u_2-\alpha)^{-2}\left(\int_\alpha^{u_1} 2(x-\alpha)Q(x)\,\mathrm{d}x + \int_{u_1}^{u_2} 2(x-\alpha)Q(x)\,\mathrm{d}x\right) = \\
&= (u_2-\alpha)^{-2}\left((u_1-\alpha)^2 f(u_1) + \int_{u_1}^{u_2} 2(x-\alpha)Q(u_1)\,\mathrm{d}x\right) = \\
&= (u_2-\alpha)^{-2}\left((u_1-\alpha)^2 f(u_1) + \left((u_2-\alpha)^2-(u_2-\alpha)^2\right)Q(u_1)\right).
\end{aligned}$$

С другой стороны, для $f(u_1)$ справедливо

$$f(u_1) = (u_2-\alpha)^{-2}\left((u_1-\alpha)^2 f(u_1) + \left((u_2-\alpha)^2-(u_2-\alpha)^2\right)f(u_1)\right).$$

Таким образом, $f(u_1) = Q(u_1)$, а следовательно $f(u) = Q(u)$ при $u \in [u_1, u_2]$. □

Обозначим $K(\lambda) = \int_0^1 V_{1,n}^*(1-\lambda-2u)\,\mathrm{d}u$. Тогда $K'(\lambda) = P$. Подставив (3.11), (3.12) в (3.9), получим

$$\begin{aligned}
\Phi(Q) &= \lambda\int_0^1 Q(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^1 \left[(2s-1-\lambda)Q(s) + V_{1,n}\left(Q(s)\right)\right]\mathrm{d}s = \\
&= PK^{*\prime}(P) - \int_0^1 \left[(1+\lambda-2s)Q(s) + V_{1,n}\left(Q(s)\right)\right]\mathrm{d}s = \\
&= PK^{*\prime}(P) - \int_0^1 V_{1,n}^*(1+\lambda-2s)\,\mathrm{d}s = \\
&= PK^{*\prime}(P) - K(\lambda) = PK^{*\prime}(P) - K(K^{*\prime}(P)) = K^*(P).
\end{aligned}$$

Теорема 3.1. *Для выигрыша первого игрока в игре* $G_n(P)$ *справедлива оценка* $V_{1,n+1}(P) \geqslant K^*(P)$.

Доказательство. Из леммы 2.1 следует, что нам достаточно доказать, что при любом $p_{2,1} \in [0,1]$ выполнено $F_{n+1}\left((f,Q), p_{2,1}\right) \geqslant K^*(P)$.

Рассмотрим несколько случаев. Пусть $p_{2,1} < f(0)$. Тогда

$$F_{n+1}\left((f,Q), p_{2,1}\right) = \int_0^1 \left[Q(u) - \beta f(u) - \alpha p_{2,1}\right] \mathrm{d}u + \\ + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u))\,\mathrm{d}u \geqslant F_{n+1}\left((f,Q), f(0)\right) = K^*(P).$$

Аналогично можно показать, что при $p_{2,1} > f(1)$

$$F_{n+1}\left((f,Q), p_{2,1}\right) \geqslant F_{n+1}\left((f,Q), f(0)\right) = K^*(p).$$

Пусть теперь $p_{2,1} = f(\gamma),\ \gamma \in [0,1]$. Кроме того, введем обозначения

$$\gamma^- = \inf\left\{x \mid f(x) = f(\gamma)\right\}, \quad \gamma^+ = \sup\left\{x \mid f(x) = f(\gamma)\right\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} F_{n+1}\left((f,Q), p_{2,1}\right) = &\int_{\gamma^+}^1 (Q(u) - \beta f(u) - \alpha f(\gamma))\,\mathrm{d}u + \\ &+ \int_0^{\gamma^-} (\alpha f(u) + \beta f(\gamma) - Q(u))\,\mathrm{d}u + \\ &+ \int_0^1 V_{1,n}(Q(u))\,\mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Однако, из леммы 3.3 следует, что $Q(u) = f(\gamma)$ при $u \in [\gamma^-, \gamma^+]$. А значит (3.13) совпадает с (3.7) и $F_{n+1}\left((f,Q), p_{2,1}\right) \geqslant K^*(p)$ по построению. □

3.2. Оценка $\mathbf{W_{2,n}}\left(\mathbf{x}\right)$

Аналогично тому, как это было сделано для первого игрока, параметризуем τ_1 при помощи неубывающей функции $h : [0,1] \to [0,1]$. Если случайная величина u равномерно распределена на $[0,1]$, положим $h(u) = p_{2,1}$. Подобным образом может быть получено любое распределение τ_1.

Лемма 3.4. $W_{2,n+1} \geqslant \sup_h \inf_{p_{1,1}} G(p_{1,1}, h)$, *где*

$$\begin{aligned} G(p_{1,1}, h) = W_{2,n}\left(x - \int_0^1 (\underset{h(u)<p_{1,1}}{\mathbb{1}} - \underset{h(u)>p(u)}{\mathbb{1}})\,\mathrm{d}u\right) - \\ - \int_0^1 \left[\underset{h(u)<p_{1,1}}{\mathbb{1}}(-\beta p_{1,1} - \alpha h(u)) + \underset{h(u)>p_{1,1}}{\mathbb{1}}(\alpha p_{1,1} + \beta h(u))\right] \mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{3.14}$$

4. Значение игры

TODO

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. De Meyer B., Saley H. *On the strategic origin of Brownian motion in finance* // Int J Game Theory. 2002. V. 31. P. 285–319

2. Aumann R.J., Maschler M.B. *Repeated Games with Incomplete Information.* The MIT Press, Cambridge, London

3. Domansky V. *Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets* // Int J Game Theory. 2007. V. 36(2). P. 241–257

4. Chatterjee K., Samuelson W. *Bargaining under Incomplete Information* // Operations Research. 1983. V. 31. N. 5. P. 835–851

5. Пьяных А.И. Об одной модификации модели биржевых торгов с инсайдером // Математическая теория игр и её приложения. 2014. 6. № 4. С. 68–84.

6. Пьяных А.И. *Многошаговая модель биржевых торгов с асимметричной информацией и элементами переговоров* // TODO

7. Эльсгольц Л.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.* М.: Наука, 1965.

8. Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ.* М.: Мир, 1973.

TODO: TITLE OF THE ARTICLE

Artem Pyanykh, Moscow State University, postgraduate student (artem.pyanykh@gmail.com).

Abstract: TODO: TITILE ABSTRACT.

Keywords: TODO: keywords.