

УДК 519.83

ББК 22.18

TODO: НАЗВАНИЕ СТАТЬИ

АРТЕМ И. ПЬЯНЫХ

Московский университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
119991, Москва, Ленинские горы, 2-й учебный корпус
artem.pyanykh@gmail.com

TODO: TITILE ABSTRACT.

Ключевые слова: TODO: ключевые слова.

1. Введение

В работе [1] была рассмотрена многошаговая модель биржевых торгов однотипными акциями, в которой торги между собой ведут два игрока. Перед началом торгов случайный ход определяет цену акции на весь период торгов, которая в состояниях рынка L и H равна 0 и 1 соответственно. Выбранная цена сообщается первому игроку и не сообщается второму, при этом второй игрок знает, что первый – инсайдер. Также оба игрока знают вероятность P высокой цены акции.

На каждом шаге торгов игроки одновременно и независимо назначают некоторую цену за акцию. Игроки могут делать произвольные вещественные ставки, причем игрок, предложивший большую цену, покупает у другого акцию по названной цене. Задачей игроков является максимизация стоимости портфеля, состоящего из некоторого числа акций и суммы денег.

Модель сводится к повторяющейся игре с неполной информацией, как описано в [2], для которой Де Мейером и Салей были найдены оптимальные стратегии игроков и значение игры. Позднее В. Доманским [3] была рассмотрена модификация модели, в которой ставки игроков могли принимать значения только из заданного дискретного множества $\{i/m, i = \overline{0, m}, m \geq 1\}$. В данной постановке им было получено решение игры неограниченной продолжительности.

В обеих работах использовался одинаковый механизм проведения транзакции, при котором акция продается по наибольшей из предложенных цен. Можно, однако, рассмотреть и следующий механизм формирования цены акции, предложенный в [4]. Игроки одновременно предлагают цены p_1 и p_2 , при $p_1 > p_2$ акция приобретается первым игроком по цене $\beta p_1 + (1 - \beta)p_2$, где $\beta \in [0, 1]$ – заданный коэффициент, характеризующий переговорную силу продавца; случай $p_1 < p_2$ симметричен; при $p_1 = p_2$ транзакции не происходит. Более подробное обсуждение связанное с выбором подобного механизма транзакции приведено в [5].

Фактически, в работах [1] и [3] коэффициент β равен 1. Обобщение дискретной модели на случай произвольного β было рассмотрено в [6]. В данной работе обобщение на случай произвольного β проведено для модели игры с непрерывными ставками.

2. Постановка задачи

Обозначим множество возможных состояний рынка через $S = \{H, L\}$; $s \in S$ при этом обозначает состояние, в котором на самом деле находится рынок.

Два игрока на этом рынке на протяжении n шагов ведут между собой торги за одну единицу рискового актива. Каждый игрок делает ставку из множества $I = [0, 1]$; игрок предложивший большую ставку покупает у другого акцию по заданной цене.

Обозначим через $y_t = (y_t^R, y_t^N)$ портфель первого игрока на t -ом шаге торгов, где y_t^R и y_t^N – количество единиц рискового и безрискового активов соответственно. Если на t -ом шаге игроки делают ставки $p_{1,t} \in I$, $p_{2,t} \in I$, то портфель $y_t = y_{t-1} + t(p_{1,t}, p_{2,t})$, где при $\beta \in [0, 1]$, $\bar{\beta} = 1 - \beta$

$$t(p_1, p_2) = \mathbb{1}_{p_1 > p_2} (1, -(\beta p_1 + \bar{\beta} p_2)) + \mathbb{1}_{p_1 < p_2} (-1, \bar{\beta} p_1 + \beta p_2), \quad (2.1)$$

и $\mathbb{1}_{p_1 > p_2}$ принимает значение 1 при $p_1 > p_2$ и 0 в противном случае. То есть механизм проведения транзакции таков, что одна акция продается по цене равной выпуклой комбинации предложенных ставок с заданным коэффициентом β . Стоимость портфеля при этом равна

$$V(y_t) = \mathbb{1}_{s=H} y_t^R + y_t^N.$$

Будем считать, что игроки обладают неограниченными запасами рискованных и безрисковых активов, то есть торги не могут прекратиться по причине того, что у одного из игроков закончатся деньги или акции. Цель игроков состоит в максимизации прибыли полученной от торгов. Таким образом, не ограничивая общности, можно положить, что в начальный момент времени оба игрока имеют нулевые портфели. При этом прибыль первого игрока будет равна $V(y_n)$, а второго $-V(y_n)$.

Ниже мы рассмотрим теоретико-игровую постановку основной задачи (прямую игру), а также двойственной к ней в смысле Де Мейера (двойственную игру). Как отмечено в [1], прямая игра больше подходит для анализа стратегии первого игрока, в то время как двойственную удобнее использовать при анализе стратегии второго игрока.

2.1. Прямая игра

Перед началом игры ходом случая определяется $s \in S$ таким образом, что $p(s = H) = P$, $p(s = L) = 1 - P$. Выбранное s сообщается первому игроку (инсайдеру), второй игрок при этом не осведомлен о настоящем значении s и знает только вероятности выбора случаев того или иного состояния.

Обозначим через $h_t = (p_{1,1}, p_{2,1}, \dots, p_{1,t}, p_{2,t})$ историю ставок к моменту времени t , а через H_t – множество всевозможных h_t . Стратегией первого игрока является последовательность ходов $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, где $\sigma_t = (\sigma_t^L, \sigma_t^H)$. При фиксированном $s \in S$ ход $\sigma_t^s : H_{t-1} \rightarrow \Delta(I)$ является отображением из множества историй ставок к моменту времени $t - 1$ в множество $\Delta(I)$ вероятностных распределений на I . То есть, на каждом шаге инсайдер в зависимости от состояния s и истории h_{t-1} рандомизирует выбор ставки на множестве I . Обозначим множество стратегий первого игрока Σ_n .

Аналогично стратегией второго игрока назовем последовательность ходов $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, где $\tau_t : H_{t-1} \rightarrow \Delta(I)$. Таким образом, не имея информации о состоянии s , второй игрок опирается только на историю ставок. Обозначим множество стратегий второго игрока Γ_n .

Пара стратегий (σ, τ) вместе с ходом случая индуцирует на (S, H_n) вероятностное распределение $\Pi[P, \sigma, \tau]$. Тогда выигрыш первого игрока равен

$$g_n(P, \sigma, \tau) = \mathbb{E}_{\Pi[P, \sigma, \tau]} V(y_n).$$

Выигрыш второго игрока при этом равен $-g_n(P, \sigma, \tau)$.

Полученную игру обозначим через $G_n(P)$. Ее нижнее и верхнее значения даются формулами

$$V_{1,n}(P) = \sup_{\sigma} \inf_{\tau} g_n(P, \sigma, \tau), \quad V_{2,n}(P) = \inf_{\tau} \sup_{\sigma} g_n(P, \sigma, \tau).$$

В том случае, когда $V_{1,n}(P) = V_{2,n}(P) = V_n(P)$, будем говорить, что игра имеет значение $V_n(P)$.

Стратегии σ^* и τ^* называются оптимальными, если

$$\inf_{\tau} g_n(P, \sigma^*, \tau) = V_{1,n}(P), \quad \sup_{\sigma} g_n(P, \sigma, \tau^*) = V_{2,n}(P).$$

В [1] показано, что игра G_n имеет рекурсивную структуру в том смысле, что задачу о нахождении выигрыша в $(n + 1)$ -шаговой игре

можно свести в задаче о нахождении выигрыша в n -шаговой игре следующим образом. Рассмотрим стратегию σ первого игрока как пару $(\sigma_1, \tilde{\sigma})$, где σ_1 – ход игрока на первом шаге игры, а $\tilde{\sigma}$ – семейство стратегий в игре продолжительности n , зависящих от ставок (p_1, p_2) на первом шаге. Аналогично стратегию τ второго игрока можно представить как пару $(\tau_1, \tilde{\tau})$.

Приведем несколько фактов, которые понадобятся нам в дальнейшем. За подробным доказательством обращаться к [1].

Пара (σ_1, τ_1) вместе с ходом случая индуцирует вероятностное распределение $\Pi[P, \sigma_1, \tau_1]$ на (S, p_1, p_2) . Обозначим через

$$P(p_1, p_2) = \Pi[P, \sigma_1, \tau_1](s = H \mid p_1, p_2).$$

апостериорную вероятность состояния H при условии, что первый игрок сделал ставку p_1 , а второй – p_2 . Так как p_2 не зависит от s , то апостериорная вероятность

$$P(p_1, p_2) = P(p_1) = \Pi[P, \sigma_1](s = H \mid p_1)$$

зависит только от p_1 . Тогда для значения выигрыша первого игрока справедливо представление

$$g_{n+1}(P, \sigma, \tau) = g_1(P, \sigma_1, \tau_1) + \mathbb{E}_{\Pi[P, \sigma_1, \tau_1]} g_n(P(p_1), \tilde{\sigma}(p_1, p_2), \tilde{\tau}(p_1, p_2)).$$

Похожий результат имеет место и для нижнего значения игры.

Лемма 2.1. *Для любого $P \in [0, 1]$ выполняется неравенство*

$$V_{1,n+1}(P) \geq \sup_{\sigma_1} \inf_{p_2} g_1(P, \sigma_1, p_2) + \mathbb{E}_{\Pi[P, \sigma_1]} V_{1,n}(P(p_1)). \quad (2.2)$$

Подчеркнем, что так как значение игры нулевой продолжительности $V_0(P) = 0$, данная формула имеет смысл для любого $n \geq 1$.

2.2. Двойственная игра

Следуя [1], определим двойственную игру $G_n^*(x)$ следующим образом. Перед началом игры первый игрок выбирает текущее состояние $s \in S$; второй игрок не осведомлен о выборе первого. Если $s = H$, то первый вынужден заплатить второму penalties размера x в конце игры. В остальном правила G_n^* аналогичны правилам G_n .

Таким образом, стратегией первого игрока в двойственной игре является пара (P, σ) , где $P \in [0, 1]$, $\sigma \in \Sigma_n$. Множество стратегий второго игрока совпадает с T_n .

Выигрыш второго игрока, который он стремится максимизировать, определяется как

$$g_n^*(x, (P, \sigma), \tau) = xP - g_n(P, \sigma, \tau),$$

а верхнее и нижнее значения игры даются, соответственно, формулами

$$W_{1,n}(x) = \inf_{(P, \sigma)} \sup_{\tau} g_n^*(x, (P, \sigma), \tau), \quad W_{2,n}(x) = \sup_{\tau} \inf_{(P, \sigma)} g_n^*(x, (P, \sigma), \tau).$$

В том случае, когда $W_{1,n}(x) = W_{2,n}(x) = W_n(x)$, будем говорить, что игра имеет значение $W_n(x)$.

Аналогично предыдущему пункту, можно провести рассмотрение рекурсивной структуры игры $G_n^*(x)$ и получить результат аналогичный результату леммы 2.1. За деталями обращаться к [1].

Лемма 2.2. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство*

$$W_{2,n+1}(x) \geq \sup_{\tau_1} \inf_{p_1} W_{2,n}(x - g_1^H(p_1, \tau_1) + g_1^L(p_1, \tau_1)) - g_1^L(p_1, \tau_1), \quad (2.3)$$

где $g_1^H(p_1, \tau_1) = g_1(1, p_1, \tau_1)$, $g_1^L(p_1, \tau_1) = g_1(0, p_1, \tau_1)$ – выигрыши в состояниях H и L соответственно.

Отметим, что так как $W_0^*(x) = \phi(x) = \min(x, 0)$, формула имеет смысл для любого $n \geq 1$.

3. Оценки на выигрыш в прямой и двойственной играх

Обозначим схему дальнейших рассуждений.

В секциях 3.1 и 3.2 будут построены S -выравнивающие стратегии первого и второго игроков в прямой и двойственной играх, соответственно. Будет показано, что несмотря на то, что по виду данные стратегии отличается от таковых в [1], вид оценок на $V_{1,n}(P)$ и $W_{2,n}(x)$ остается неизменным. Отсюда будет следовать справедливость двойственных соотношений между $V_{1,n}(P)$ и $W_{2,n}(x)$, существование $V_n(P)$ и $W_n(x)$, формулы для их расчета, а также оптимальность построенных стратегий.

Сделаем несколько предположений о характере функций $V_{1,n}(\cdot)$, $W_{2,n}(\cdot)$. Обозначим через $f^*(x^*) = \inf\{x^* \cdot x - f(x) \mid x\}$ сопряженную к f в смысле Фенхеля функцию. Тогда потребуем, чтобы выполнялось:

1. функция $V_{1,n}(\cdot)$ гладкая на $[0, 1]$,
2. функция $V_{1,n}^*(\cdot)$ гладкая на \mathbb{R} ,
3. функция $W_{2,n}(\cdot)$ гладкая на \mathbb{R} .

Справедливость данных предположений будет обоснована в дальнейшем (см. раздел 4).

Также отметим, что функции $V_{1,n}(\cdot)$ и $W_{2,n}(\cdot)$ являются вогнутыми на своей области определения. Доказательство данного факта может быть найдено в [1].

Кроме того, приведем несколько свойств сопряженных функций, которые понадобятся нам в дальнейшем. Во-первых, эквивалентность следующих условий для субдифференциалов вогнутых функций (см. [8, Теорема 23.5]):

- (a) $x^* \in \partial f(x)$,
- (b) $x \in \partial f^*(x^*)$,
- (c) $\langle z, x^* \rangle - f(z)$ достигает минимума по z в точке x .

Во-вторых, связь между эффективным множеством функции и образом субдифференциала сопряженной функции. Обозначим эффективное множество через $\text{dom } f = \{x \mid f(x) < \infty\}$, а образ функции через $\text{range } f = \cup \{f(x) \mid x\}$. Тогда для функций в \mathbb{R} имеет место следующее включение (см. [8, §24]):

$$\text{int}(\text{dom } f) \subset \text{range } \partial f^* \subset \text{dom } f. \quad (3.1)$$

3.1. Оценка $V_{1,n}(P)$

Формула (2.2) дает способ получения нижней оценки $V_{1,n}(P)$, однако ее прямое использование представляет определенные трудности. В [1] рассматривается параметризация одношаговой стратегии инсайдера функциями f и Q , которые используются для генерации

маргинального распределения p_1 и апостериорной вероятности $P(p_1)$, соответственно, но не дается конструктивного обоснования использованию f и Q вместо σ_1 . Далее мы покажем, что задание стратегии первого игрока при помощи пары (f, Q) в некотором смысле естественно и приведем способ перехода от параметризованного представления к оригинальному.

Обозначим через $\sigma_1^M(p_1) = P\sigma_1^H(p_1) + (1 - P)\sigma_1^L(p_1)$ маргинальное распределение p_1 .

Утверждение 3.1. *Для апостериорной вероятности $P(p_1)$ события H справедлива формула*

$$P(p_1) = P \frac{d\sigma_1^H}{d\sigma_1^M}(p_1), \quad (3.2)$$

где $d\sigma_1^H / d\sigma_1^M$ – производная Радона-Никодима.

Доказательство. По определению $P(p_1)$ для любого $B \in \mathcal{B}_I$ выполнено

$$P(s = H, p_1 \in B) = \int_B P(p_1) \sigma_1^M(dp_1).$$

С другой стороны справедлива следующая формула:

$$P(s = H, p_1 \in B) = P \int_B \sigma_1^H(dp_1).$$

Так как σ_1^H абсолютно непрерывна относительно σ_1^M , то существует производная Радона-Никодима, а значит

$$P(s = H, p_1 \in B) = \int_B P \frac{d\sigma_1^H}{d\sigma_1^M}(p_1) \sigma_1^M(dp_1).$$

Отсюда получаем (3.2). □

Утверждение 3.2. *Для $g_1(P, \sigma_1, p_2)$ справедливо представление*

$$\begin{aligned} g_1(P, \sigma_1, p_2) = & \int_I \mathbb{1}_{p_1 > p_2} \left[P(p_1) - \beta p_1 - \bar{\beta} p_2 \right] \sigma_1^M(dp_1) + \\ & + \int_I \mathbb{1}_{p_1 < p_2} \left[\bar{\beta} p_1 + \beta p_2 - P(p_1) \right] \sigma_1^M(dp_1). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Доказательство. По определению

$$g_1(P, \sigma_1, p_2) = \mathbb{E}_{\Pi[P, \sigma_1]} \langle (\mathbb{1}_{s=H}, 1), t(p_1, p_2) \rangle. \quad (3.4)$$

Подставив (2.1) в (3.4), получим

$$\begin{aligned} g_1(P, \sigma_1, p_2) = & P \int_I \left[\mathbb{1}_{p_1 > p_2} (1 - \beta p_1 - \bar{\beta} p_2) + \mathbb{1}_{p_1 < p_2} \times \right. \\ & \times (\bar{\beta} p_1 - \beta p_2 - 1) \left. \right] \sigma_1^H(dp_1) + (1 - P) \int_I \left[\mathbb{1}_{p_1 > p_2} \times \right. \\ & \times (-\beta p_1 - \bar{\beta} p_2) + \mathbb{1}_{p_1 < p_2} (\bar{\beta} p_1 - \beta p_2) \left. \right] \sigma_1^L(dp_1). \end{aligned}$$

Отсюда, воспользовавшись (3.2), получим (3.3). \square

Формула (3.3) показывает альтернативное представление стратегии инсайдера, а именно с помощью маргинального распределения ставки и апостериорной вероятности состояния H . Укажем способ перехода от σ_1 к альтернативному представлению.

Возьмем случайную величину u равномерно распределенную на $[0, 1]$. Если $f(\cdot)$ – левая обратная функции распределения p_1 , то $f(u)$ и p_1 одинаково распределены. Обозначим $Q(u) = P(f(u))$. Пусть также $\pi = \Pi[P, \sigma_1]$. Так как для любого $B \in \mathcal{B}_I$ выполнено

$$\pi(p_1 \in B \mid s = H) = \frac{\pi(p_1 \in B, s = H)}{\pi(s = H)} = \int_0^1 \mathbb{1}_{f(u) \in B} \frac{Q(u)}{P} du,$$

то восстановить σ_1 по (f, Q) можно следующим образом. Если ходом случая было выбрано состояние H , то инсайдер выбирает $u \in [0, 1]$ с плотностью вероятности $Q(u)/P$ и делает ставку $p_1 = f(u)$. Аналогично в состоянии L он выбирает u с плотностью вероятности $(1 - Q(u))/(1 - P)$ и делает ставку $p_1 = f(u)$.

Введем обозначение

$$F_{n+1}(P, (f, Q), p_2) = g_1(P, (f, Q), p_2) + \mathbb{E}V_{1,n}(Q(u)).$$

Переходя к f и Q в формуле (3.3) получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} F_{n+1}(P, (f, Q), p_2) = & \int_0^1 \mathbb{1}_{f(u) > p_2} (Q(u) - \beta f(u) - \alpha p_2) du + \\ & + \int_0^1 \mathbb{1}_{f(u) < p_2} (\alpha f(u) + \beta p_2 - Q(u)) du + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u)) du. \end{aligned} \quad (3.5)$$

В [1] показано, что функции f и Q должны удовлетворять следующим свойствам, чтобы является параметризацией одношаговой стратегии первого игрока в игре $G_n(P)$:

- f не убывает на $[0, 1]$, (3.6a)

- $\int_0^1 Q(u) du = P$, (3.6b)

- $\forall x, y \in [0, 1] : f(x) = f(y) \implies Q(x) = Q(y)$. (3.6c)

Таким образом, мы можем переформулировать лемму 2.1 в терминах f и Q .

Лемма 3.1. *Для любого $P \in [0, 1]$ выполняется неравенство*

$$V_{1,n+1}(P) \geq \sup_{(f, Q)} \inf_{p_2} F_{n+1}(P, (f, Q), p_2),$$

где f и Q удовлетворяют (3.6a) – (3.6c).

Будем искать S -выравнивающую стратегию первого игрока, при $S = [f(0), f(1)]$. Пусть $p_2 = f(\alpha)$, $\alpha \in [0, 1]$ и $f(\cdot)$ строго возрастает в α . Тогда

$$\begin{aligned} F_{n+1}(P, (f, Q), f(\alpha)) &= \int_{\alpha}^1 (Q(u) - \beta f(u) - \bar{\beta} f(\alpha)) du + \\ &+ \int_0^{\alpha} (\bar{\beta} f(u) + \beta f(\alpha) - Q(u)) du + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u)) du. \end{aligned} \quad (3.7)$$

По предположению $F_{n+1}(P, (f, Q), f(\alpha))$ не зависит от α , следовательно

$$\frac{\partial F_{n+1}}{\partial \alpha} = (\alpha - \bar{\beta}) f'(\alpha) + 2f(\alpha) - 2Q(\alpha) = 0.$$

Отсюда

$$f(u) = (u - \bar{\beta})^{-2} \int_{\bar{\beta}}^u 2(x - \bar{\beta}) Q(x) dx. \quad (3.8)$$

Очевидно, если подставить (3.8) в (3.7), то получившееся выражение $\Phi(Q)$ зависит только от Q и не зависит от α . Подставив 1 вместо α , получим

$$\Phi(Q) = \int_0^1 (\bar{\beta} f(u) - Q(u)) du + \beta f(1) + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u)) du. \quad (3.9)$$

¹При $u = \bar{\beta}$ доопределим $f(\bar{\beta})$ по непрерывности как $Q(\bar{\beta})$.

Лемма 3.2. Для $\Phi(Q)$ справедливо следующее выражение:

$$\Phi(Q) = \int_0^1 (2u - 1)Q(u) du + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u)) du. \quad (3.10)$$

Доказательство. Упростим (3.9) при $\beta \in (0, 1)$. Случаи $\beta = 0$ и $\beta = 1$ дают тот же результат и рассматриваются аналогично.

Найдем чему равно выражение $\int_0^1 f(u) du$, разбив этот интеграл на две части. Для первой части:

$$\begin{aligned} \int_0^{\bar{\beta}} f(u) du &= \int_0^{\bar{\beta}} (u - \bar{\beta})^{-2} \int_{\bar{\beta}}^u 2(s - \bar{\beta})Q(s) ds = \\ &= \int_0^{\bar{\beta}} 2(\bar{\beta} - s)Q(s) \int_0^s (\bar{\beta} - u)^{-2} du ds = (2/\bar{\beta}) \int_0^{\bar{\beta}} uQ(u) du. \end{aligned}$$

Аналогично для второй части:

$$\int_{\bar{\beta}}^1 f(u) du = (2/\beta) \int_{\bar{\beta}}^1 (1 - u)Q(u) du.$$

Подставим найденные выражения в (3.9):

$$\begin{aligned} \Phi(Q) &= 2 \int_0^{\bar{\beta}} uQ(u) du + (2\bar{\beta}/\beta) \int_{\bar{\beta}}^1 (1 - u)Q(u) du + \\ &+ (2/\beta) \int_{\bar{\beta}}^1 (u - \bar{\beta})Q(u) du - \int_0^1 Q(u) du + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u)) du. \end{aligned}$$

Приведя подобные с учетом того, что $\bar{\beta}(1 - u) + u - \bar{\beta} = \beta u$, получим (3.10). \square

Найдем Q как экстремаль следующей вариационной задачи:

$$\Phi(Q) \rightarrow \max, \quad \int_0^1 Q(u) du = P. \quad (3.11)$$

По предположению $V_{1,n}(\cdot)$ – гладкая функция. Тогда функция $Q(\cdot)$, доставляющая экстремум в задаче (3.11), удовлетворяет уравнению Эйлера, то есть выполнено

$$2u - 1 + \lambda + V'_{1,n}(Q(U)) = 0, \quad \int_0^1 Q(u) du = P.$$

Воспользовавшись свойствами субдифференциалов сопряженных функций, получим

$$Q(u) = V_{1,n}^{*'}(1 - \lambda - 2u), \text{ где} \quad (3.12)$$

$$\int_0^1 V_{1,n}^{*'}(1 - \lambda - 2u) du = P. \quad (3.13)$$

Так как $V_{1,n}(\cdot)$ определена на $[0, 1]$, то из (3.1) следует, что $V_{1,n}^{*'}(\cdot)$ не возрастает на \mathbb{R} от 1 до 0. Значит λ , удовлетворяющая (3.13), существует.

Введем обозначение

$$K(\lambda) = \int_0^1 V_{1,n}^*(1 - \lambda - 2u) du.$$

Тогда, аналогично [1] можно показать, что при подстановке (3.12) в (3.10) выполняется равенство $\Phi(Q) = K^*(P)$.

Отметим, что хотя $f(u)$, то есть механизм рандомизации ставки инсайдером, зависит от коэффициента β , функции $Q(u)$ и $\Phi(Q)$ от β не зависят и по форме совпадают с аналогичными выражениями в [1]. Данный факт позволит нам без изменений использовать те же самые соотношения между нижним и верхним значениями прямой и двойственной игр. Прежде, однако, нужно показать, что полученные f и Q действительно удовлетворяют (3.6а) – (3.6с) и доставляют гарантированный выигрыш первого игрока, равный $K^*(P)$.

Лемма 3.3. *Пара функций (f, Q) , определенная в (3.8), (3.12) принимает значения в $[0, 1]$ и удовлетворяет (3.6а) – (3.6с), т.е. является параметризацией стратегии первого игрока.*

Доказательство. Так как $V_{1,n}^{*'}(\cdot)$ убывает от 1 до 0, то $Q(\cdot)$ принимает значения в $[0, 1]$ и, кроме того, не убывает на $[0, 1]$.

Далее, можно заметить, что $f(u)$ является математическим ожиданием $Q(x)$, где x – случайная величина распределенная между $\bar{\beta}$ и u с плотностью $2|x - \bar{\beta}|/(u - \bar{\beta})^2$. Следовательно, $f(\cdot)$ также принимает значения в $[0, 1]$.

Сделаем замену переменного $t = (x - \bar{\beta})/(u - \bar{\beta})$ в (3.8). Тогда

$$f(u) = \int_0^1 2tQ(t(u - \bar{\beta}) + \bar{\beta}) dt.$$

Отсюда видно, что (3.6a) выполнено. Далее, (3.6b) выполнено по построению. Чтобы показать, что (3.6с) выполняется, рассмотрим несколько случаев.

Пусть $\bar{\beta} < u_1 < u_2$. Тогда, так как Q не убывает, почти при всех $t \in [0, 1]$ выполнено $Q(t(u_1 - \bar{\beta}) + \bar{\beta}) = Q(t(u_2 - \bar{\beta}) + \bar{\beta})$. Из непрерывности Q следует равенство при $t = 1$, т.е. $Q(u_1) = Q(u_2)$.

При $\bar{\beta} = u_1 < u_2$ имеем $f(u_1) = f(\bar{\beta}) = Q(\bar{\beta})$. Отсюда почти при всех $t \in [0, 1]$ выполнено $Q(t(u_2 - \bar{\beta}) + \bar{\beta}) = Q(\bar{\beta})$. Снова из непрерывности Q получаем $Q(u_1) = Q(u_2) = Q(\bar{\beta})$.

Доказательство при $u_1 < u_2 \leq \bar{\beta}$ получается аналогично. Так же рассматривается и случай $u_1 < \bar{\beta} < u_2$. Таким образом (3.6с) выполнено. \square

Лемма 3.4. Если $f(u_1) = f(u_2)$ при $u_1 < u_2$, то $f(u) = Q(u)$ при $u \in [u_1, u_2]$.

Доказательство. Действительно, если $f(u_1) = f(u_2)$, то из леммы 3.3 следует, что $f(\cdot)$ и $Q(\cdot)$ константны на $[u_1, u_2]$. Тогда из (3.8) имеем

$$\begin{aligned} f(u_2) &= (u_2 - \bar{\beta})^{-2} \int_{\bar{\beta}}^{u_2} 2(x - \bar{\beta})Q(x) dx = \\ &= (u_2 - \bar{\beta})^{-2} \left(\int_{\bar{\beta}}^{u_1} 2(x - \bar{\beta})Q(x) dx + \int_{u_1}^{u_2} 2(x - \bar{\beta})Q(x) dx \right) = \\ &= (u_2 - \bar{\beta})^{-2} \left((u_1 - \bar{\beta})^2 f(u_1) + \int_{u_1}^{u_2} 2(x - \bar{\beta})Q(u_1) dx \right) = \\ &= (u_2 - \bar{\beta})^{-2} \left((u_1 - \bar{\beta})^2 f(u_1) + ((u_2 - \bar{\beta})^2 - (u_1 - \bar{\beta})^2) Q(u_1) \right). \end{aligned}$$

С другой стороны, для $f(u_1)$ справедливо

$$f(u_1) = (u_2 - \bar{\beta})^{-2} \left((u_1 - \bar{\beta})^2 f(u_1) + ((u_2 - \bar{\beta})^2 - (u_1 - \bar{\beta})^2) f(u_1) \right).$$

Таким образом, $f(u_1) = Q(u_1)$, а следовательно $f(u) = Q(u)$ при $u \in [u_1, u_2]$. \square

Теорема 3.1. Для гарантированного выигрыша первого игрока в игре $G_n(P)$ справедлива оценка $V_{1,n+1}(P) \geq K^*(P)$.

Доказательство. Из леммы 2.1 следует, что нам достаточно доказать, что при любом $p_2 \in [0, 1]$ выполнено $F_{n+1}(P, (f, Q), p_2) \geq K^*(P)$. Рассмотрим несколько случаев.

Пусть $p_2 < f(0)$. Тогда из (3.5) получаем, что справедливо следующее неравенство

$$\begin{aligned} F_{n+1}(P, (f, Q), p_2) &= \int_0^1 [Q(u) - \beta f(u) - \bar{\beta} p_2] du + \\ &+ \int_0^1 V_{1,n}(Q(u)) du \geq F_{n+1}(P, (f, Q), f(0)) = K^*(P). \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что при $p_2 > f(1)$

$$F_{n+1}(P, (f, Q), p_{2,1}) \geq F_{n+1}(P, (f, Q), f(1)) = K^*(P).$$

Пусть теперь $p_2 = f(\alpha)$, $\alpha \in [0, 1]$. Введем обозначения

$$\alpha^- = \inf \{x \mid f(x) = f(\alpha)\}, \quad \alpha^+ = \sup \{x \mid f(x) = f(\alpha)\}.$$

Подстановкой в (3.5) получаем

$$\begin{aligned} F_{n+1}(P, (f, Q), p_2) &= \int_{\alpha^+}^1 (Q(u) - \beta f(u) - \bar{\beta} f(\alpha)) du + \\ &+ \int_0^{\alpha^-} (\bar{\beta} f(u) + \beta f(\alpha) - Q(u)) du + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u)) du. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Однако, из леммы 3.4 следует, что $Q(u) = f(\alpha)$ при $u \in [\alpha^-, \alpha^+]$. А значит (3.14) совпадает с (3.7) и $F_{n+1}(P, (f, Q), p_2) \geq K^*(P)$ по построению. \square

3.2. Оценка $W_{2,n}(x)$

Аналогично тому, как это было сделано для первого игрока, параметризуем τ_1 при помощи неубывающей функции $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Если случайная величина u равномерно распределена на $[0, 1]$, положим $p_2 = h(u)$. Таким образом может быть получено любое распределение τ_1 .

Подобно предыдущему разделу получим аналог леммы 2.2 в терминах h . Заметим, что для $g_1^L(p_1, \tau_1)$ и $g_1^H(p_1, \tau_1)$ справедливо

$$\begin{aligned} g_1^L(p_1, \tau_1) &= \int_I \left[\mathbb{1}_{p_1 > p_2} (-\beta p_1 - \bar{\beta} p_2) + \mathbb{1}_{p_1 < p_2} (\bar{\beta} p_1 + \beta p_2) \right] \tau_1(dp_2), \\ g_1^H(p_1, \tau_1) &= \int_I \left[\mathbb{1}_{p_1 > p_2} (1 - \beta p_1 - \bar{\beta} p_2) + \mathbb{1}_{p_1 < p_2} (\bar{\beta} p_1 + \beta p_2 - 1) \right] \tau_1(dp_2). \end{aligned}$$

Подставим $g_1^H(p_1, \tau_1)$ и $g_1^L(p_1, \tau_1)$ в правую часть (2.3) и получившийся результат обозначим как

$$G_{n+1}(x, p_1, h) = W_{2,n} \left(x - \int_0^1 \left[\mathbb{1}_{h(u) < p_1} - \mathbb{1}_{h(u) > p_1} \right] du \right) - \int_0^1 \left[\mathbb{1}_{h(u) < p_1} (-\beta p_1 - \bar{\beta} h(u)) + \mathbb{1}_{h(u) > p_1} (\bar{\beta} p_1 + \beta h(u)) \right] du.$$

Лемма 3.5. Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$W_{2,n+1}(x) \geq \sup_h \inf_{p_1} G_{n+1}(x, p_1, h).$$

Будем искать S -выравнивающую стратегию второго игрока, при $S = [h(0), h(1)]$. Пусть $p_1 = h(\alpha)$, $\alpha \in [0, 1]$ и $h(\cdot)$ строго возрастает в α . Тогда

$$G_{n+1}(x, h(\alpha), h) = W_{2,n}(x + 1 - 2\alpha) - \int_\alpha^1 \left(\bar{\beta} h(\alpha) + \beta h(u) \right) du + \int_0^\alpha \left(\beta h(\alpha) + \bar{\beta} h(u) \right) du. \quad (3.15)$$

По предположению $G_{n+1}(x, h(\alpha), h)$ не зависит от α , следовательно имеет место равенство

$$\frac{\partial G_{n+1}}{\partial \alpha} = 2h(\alpha) + (\alpha - \bar{\beta})h'(\alpha) - 2W'_{2,n}(x - 2\alpha + 1) = 0.$$

Отсюда

$$h(u) = 2(u - \bar{\beta})^{-2} \int_{\bar{\beta}}^u (s - \bar{\beta}) W'_{2,n}(x - 2s + 1) ds^2. \quad (3.16)$$

Очевидно, если подставить $h(u)$ в (3.15) то получившееся выражение $\Psi(h)$ не зависит от α , следовательно можно вместо α подставить $\bar{\beta}$.

Лемма 3.6. Для значения $\Psi(h)$ справедливо равенство

$$\Psi(h) = \int_0^1 W_{2,n}(x - 2s + 1) ds. \quad (3.17)$$

²При $u = \bar{\beta}$ доопределим $h(\bar{\beta})$ по непрерывности как $W'_{2,n}(x - 2\bar{\beta} + 1)$.

Доказательство. Проведем рассмотрение при $\beta \in (0, 1)$. Случаи $\beta \in \{0, 1\}$ рассматриваются аналогично и дают тот же самый результат. При подстановке $\bar{\beta}$ вместо α выражение (3.15) приобретает вид

$$G_{n+1}(x, h(\bar{\beta}), h) = W_{2,n}(x - 2\bar{\beta} + 1) - \beta \int_{\bar{\beta}}^1 h(u) du + \bar{\beta} \int_0^{\bar{\beta}} h(u) du.$$

Для интегралов выше верны формулы

$$\begin{aligned} \int_0^{\bar{\beta}} h(u) du &= 2 \int_0^{\bar{\beta}} (s/\bar{\beta}) W'_{2,n}(x - 2s + 1) ds, \\ \int_{\bar{\beta}}^1 h(u) du &= 2 \int_{\bar{\beta}}^1 \frac{1-s}{\beta} W'_{2,n}(x - 2s + 1) ds. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$G_{n+1}(x, h(\bar{\beta}), h) = W_{2,n}(x - 1) + \int_0^1 2s W'_{2,n}(x - 2s + 1) ds.$$

Остается заметить, что после интегрирования по частям

$$\int_0^1 2s W'_{2,n}(x - 2s + 1) ds = \int_0^1 W_{2,n}(x - 2s + 1) ds - W_{2,n}(x - 1).$$

Отсюда получаем (3.17). \square

Отметим, что несмотря на отличный вид $h(u)$, выражение для $\Psi(h)$ по форме совпадает с аналогичным выражением в [1] и не зависит от коэффициента β .

Лемма 3.7. *Функция $h(u)$ определенная в (3.16) обладает следующими свойствами:*

- $u \in [0, 1] \implies h(u) \in [0, 1]$,
- $h(\cdot)$ не убывает на $[0, 1]$,
- $h(u_1) = h(u_2) \implies W'_{2,n}(x - 2u_1 + 1) = W'_{2,n}(x - 2u_2 + 1)$,
- $h(\cdot)$ не возрастает строго в $u \implies h(u) = W'_{2,n}(x - 2u + 1)$.

В частности, функция $h(\cdot)$ может служить параметризацией стратегии второго игрока.

Доказательство этих свойств во многом повторяет доказательство лемм 3.3 и 3.4.

Теорема 3.2. Для гарантированного выигрыша второго игрока в игре $G_{n+1}^*(x)$ справедлива оценка

$$W_{2,n+1}(x) \geq \int_0^1 W_{2,n}(x - 2s + 1) ds.$$

TODO:

1. Подставить h в G выше, получить формулу для нижней оценки,
2. Показать, что h - является неубывающей из $[0, 1]$ в $[0, 1]$,
3. Показать, что в общем случае нижняя оценка также имеет место; для этого придется сформулировать еще одну лемму о свойствах функции h .

4. Значение игры

TODO

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. De Meyer B., Saley H. *On the strategic origin of Brownian motion in finance* // Int J Game Theory. 2002. V. 31. P. 285–319
2. Aumann R.J., Maschler M.B. *Repeated Games with Incomplete Information*. The MIT Press, Cambridge, London
3. Domansky V. *Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets* // Int J Game Theory. 2007. V. 36(2). P. 241–257
4. Chatterjee K., Samuelson W. *Bargaining under Incomplete Information* // Operations Research. 1983. V. 31. N. 5. P. 835–851

5. Пьяных А.И. Об одной модификации модели биржевых торгов с инсайдером // Математическая теория игр и её приложения. 2014. 6. № 4. С. 68–84.
6. Пьяных А.И. *Многошаговая модель биржевых торгов с асимметричной информацией и элементами переговоров* // TODO
7. Эльсгольц Л.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*. М.: Наука, 1965.
8. Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ*. М.: Мир, 1973.

TODO: TITLE OF THE ARTICLE

Artem Pyanykh, Moscow State University, postgraduate student
(artem.pyanykh@gmail.com).

Abstract: TODO: TITILE ABSTRACT.

Keywords: TODO: keywords.