Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.3, с. 150–152

УДК 519.83

ББК 22.18

TODO: НАЗВАНИЕ СТАТЬИ

Артем И. Пьяных
Московский университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
119991, Москва, Ленинские горы, 2-й учебный корпус
artem.pyanykh@gmail.com

TODO: TITILE ABSTRACT.

Ключевые слова: TODO: ключевые слова.

©2015 А.И. Пьяных

1. Введение

В работе [1] была рассмотрена многошаговая модель биржевых торгов однотипными акциями, в которой торги между собой ведут два игрока. Перед началом торгов случайный ход определяет цену акции на весь период торгов, которая в состояниях рынка L и H равна 0 и 1 соответственно. Выбранная цена сообщается первому игроку и не сообщается второму, при этом второй игрок знает, что первый – инсайдер. Также оба игрока знают вероятность p высокой цены акции.

На каждом шаге торгов игроки одновременно и независимо назначают некоторую цену за акцию. Игроки могут делать произвольные вещественные ставки, причем игрок, предложивший бóльшую цену, покупает у другого акцию по названной цене. Задачей игроков является максимизация стоимости портфеля, состоящего из некоторого числа акций и суммы денег.

Модель сводится к повторяющейся игре с неполной информацией, как описано в [2], для которой Де Мейером и Салей были найдены оптимальные стратегии игроков и значение игры. Позднее В. Доманским [3] была рассмотрена модификация модели, в которой ставки игроков могли принимать значения только из заданного дискретного множества $\{i/m,\ i = \overline{0, m},\ m \geqslant 1\}$. В данной постановке им было получено решение игры неограниченной продолжительности.

В обеих работах использовался одинаковый механизм проведения транзакции, при котором акция продается по наибольшей из предложенных цен. Можно, однако, рассмотреть и следующий механизм формирования цены акции, предложенный в [4]: игроки одновременно предлагают цены p_1 и p_2, при $p_1 > p_2$ акция продается по цене $\beta p_1 + (1-\beta)p_2$, где $\beta \in [0, 1]$ – заданный коэффициент, характеризующий переговорную силу продавца.

Фактически, в работах [1] и [3] коэффициент β равен 1. Обобщение дискретной модели на случай произвольного β было рассмотрено в [5]. В данной работе обобщение на случай произвольного β проведено для модели игры с непрерывными ставками.

2. Модель игры

Пусть множество состояний рынка $S = \{H, L\}$. На первом шаге случай выбирает $s \in S$ с вероятностью $p(H) = P$, $p(L) = 1 - P$. После этого игроки на протяжении n шагов ведут между собой торги за одну единицу рискового актива.

Обозначим через $\pi_t = (\pi_t^R, \pi_t^N)$ портфель инсайдера на t-ом шаге игры, где π_t^R и π_t^N – количество единиц рискового и безрискового активов соответственно. Пусть также $I = [0,1]$ – множество возможных ставок. Если на t-ом шаге игроки делают ставки $p_{1,t}$, $p_{2,t} \in I$, то портфель инсайдера $\pi_t = \pi_{t-1} + t(p_{1,t}, p_{2,t})$, где при $\alpha = 1 - \beta$

$$t(p_1, p_2) = \mathbb{1}_{p_1 > p_2}(1, -\beta p_1 - \alpha p_2) + \mathbb{1}_{p_1 < p_2}(-1, \alpha p_1 + \beta p_2),$$

и $\mathbb{1}_{p_1 > p_2}$ принимает значение 1 при $p_1 > p_2$ и 0 в противном случае. Стоимость портфеля при этом равна $V(\pi_t) = \mathbb{1}_{s=H}\, \pi_t^R + \pi_t^N$.

Если положить, что в начальный момент времени оба игрока не имели ни рисковых, ни безрисковых активов, то выигрыш первого игрока будет равен $V(\pi_n)$, а второго $-V(\pi_n)$. Второму игроку этот выигрыш становится известным только после окончания игры.

Обозначим через $h_t = (p_{1,1}, p_{2,1}, \ldots, p_{1,t}, p_{2,t})$ историю ставок к моменту времени t, через H_t – множество всевозможных h_t. Тогда стратегией первого игрока является последовательность ходов $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, где $\sigma_t : S \times H_{t-1} \to \Delta(I)$ – отображение в множество $\Delta(I)$ вероятностных распределений на I.

Аналогично стратегией второго игрока назовем последовательность ходов $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, где $\tau_t : H_{t-1} \to \Delta(I)$.

Пара стратегий (σ, τ) вместе с вероятностью хода случая P индуцирует на (S, H_n) вероятностное распределение $\Pi[P, \sigma, \tau]$. Тогда выигрыш первого игрока

$$g_n(P, \sigma, \tau) = \mathbb{E}_{\Pi[P,\sigma,\tau]} V(\pi_n),$$

а нижнее и верхнее значения игры даются формулами

$$V_{1,n}(P) = \sup_\sigma \inf_\tau g_n(P, \sigma, \tau), \quad V_{2,n}(P) = \inf_\tau \sup_\sigma g_n(P, \sigma, \tau).$$

Полученную игру обозначим $G_n(P)$. В случае, когда $V_{1,n}(P) = V_{2,n}(P)$, будем говорить, что игра имеет значение $V_n(P)$. Стратегию σ^* назовем оптимальной, если

$$\inf_\tau g_n(P, \sigma^*, \tau) = V_{1,n}(P).$$

Аналогично стратегию τ^* назовем оптимальной, если

$$\sup_{\sigma} g_n(P, \sigma, \tau^*) = V_{2,n}(P).$$

3. Оценка снизу выигрыша первого игрока

Следуя [1], начнем с анализа рекурсивной структуры игры $G_n(P)$. Рассмотрим стратегию σ первого игрока как пару $(\sigma_1, \tilde{\sigma})$, где σ_1 – ход игрока на первом шаге игры, а $\tilde{\sigma}$ – семество стратегий в игре продолжительности $n-1$, зависящих от ставок $(p_{1,1}, p_{2,1})$ на первом шаге. Аналогично стратегию τ второго игрока можно представить как пару $(\tau_1, \tilde{\tau})$.

Ход игрока σ_1 на первом шаге игры вместе с P индуцирует вероятностное распределение $\Pi[P, \sigma_1]$ на $(s, p_{1,1})$. Обозначим через

$$P(p_{1,1}) = \Pi[P, \sigma_1](s = H \mid p_{1,1})$$

апостериорную вероятность состояния H при условии, что первый игрок сделал ставку $p_{1,1}$. Т.к. $p_{2,1}$ не зависит от s, то

$$P(p_{1,1}) = \Pi[P, \sigma_1, \tau_1](s = H \mid p_{1,1}, p_{2,1}).$$

Таким образом, для значения выигрыша первого игрока справедливо представление

$$\begin{aligned} g_{n+1}(P, \sigma, \tau) = g_1(P, \sigma_1, \tau_1) + \\ + \mathbb{E}_{\Pi[P,\sigma_1,\tau_1]} g_n(P(p_{1,1}), \tilde{\sigma}(p_{1,1}, p_{2,1}), \tilde{\sigma}(p_{1,1}, p_{2,1})). \end{aligned}$$

4. Оценка сверху выигрыша второго игрока

5. Значение игры

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. De Meyer B., Saley H. *On the strategic origin of Brownian motion in finance* // Int J Game Theory. 2002. V. 31. P. 285–319

2. Aumann R.J., Maschler M.B. *Repeated Games with Incomplete Information.* The MIT Press, Cambridge, London

3. Domansky V. *Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets* // Int J Game Theory. 2007. V. 36(2). P. 241–257

4. Chatterjee K., Samuelson W. *Bargaining under Incomplete Information* // Operations Research. 1983. V. 31. N. 5. P. 835–851

5. Пьяных А.И. Многошаговая модель биржевых торгов с асимметричной информацией и элементами переговоров // TODO

TODO: TITLE OF THE ARTICLE

Artem Pyanykh, Moscow State University, postgraduate student (artem.pyanykh@gmail.com).

Abstract: TODO: TITILE ABSTRACT.

Keywords: TODO: keywords.