Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.3, с. 150–152

УДК 519.83

ББК 22.18

TODO: НАЗВАНИЕ СТАТЬИ

Артем И. Пьяных
Московский университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
119991, Москва, Ленинские горы, 2-й учебный корпус
artem.pyanykh@gmail.com

TODO: TITILE ABSTRACT.

Ключевые слова: TODO: ключевые слова.

1. Введение

В работе [1] была рассмотрена многошаговая модель биржевых торгов однотипными акциями, в которой торги между собой ведут два игрока. Перед началом торгов случайный ход определяет цену акции на весь период торгов, которая в состояниях рынка L и H равна 0 и 1 соответственно. Выбранная цена сообщается первому игроку и не сообщается второму, при этом второй игрок знает, что первый – инсайдер. Также оба игрока знают вероятность p высокой цены акции.

На каждом шаге торгов игроки одновременно и независимо назначают некоторую цену за акцию. Игроки могут делать произвольные вещественные ставки, причем игрок, предложивший бо́льшую цену, покупает у другого акцию по названной цене. Задачей игроков является максимизация стоимости портфеля, состоящего из некоторого числа акций и суммы денег.

Модель сводится к повторяющейся игре с неполной информацией, как описано в [2], для которой Де Мейером и Салей были найдены оптимальные стратегии игроков и значение игры. Позднее В. Доманским [3] была рассмотрена модификация модели, в которой ставки игроков могли принимать значения только из заданного дискретного множества $\{i/m,\ i = \overline{0,m},\ m \geqslant 1\}$. В данной постановке им было получено решение игры неограниченной продолжительности.

В обеих работах использовался одинаковый механизм проведения транзакции, при котором акция продается по наибольшей из предложенных цен. Можно, однако, рассмотреть и следующий механизм формирования цены акции, предложенный в [4]: игроки одновременно предлагают цены p_1 и p_2, при $p_1 > p_2$ акция продается по цене $\beta p_1 + (1-\beta)p_2$, где $\beta \in [0,1]$ – заданный коэффициент, характеризующий переговорную силу продавца.

Фактически, в работах [1] и [3] коэффициент β равен 1. Обобщение дискретной модели на случай произвольного β было рассмотрено в [5]. В данной работе обобщение на случай произвольного β проведено для модели игры с непрерывными ставками.

2. Модель игры

Пусть множество состояний рынка $S = \{H, L\}$. На первом шаге случай выбирает $s \in S$ с вероятностью $p(H) = P$, $p(L) = 1 - P$. После этого игроки на протяжении n шагов ведут между собой торги за одну единицу рискового актива.

Обозначим через $\pi_t = (\pi_t^R, \pi_t^N)$ портфель инсайдера на t-ом шаге игры, где π_t^R и π_t^N – количество единиц рискового и безрискового активов соответственно. Пусть также $I = [0, 1]$ – множество возможных ставок. Если на t-ом шаге игроки делают ставки $p_{1,t}$, $p_{2,t} \in I$, то портфель инсайдера $\pi_t = \pi_{t-1} + t(p_{1,t}, p_{2,t})$, где при $\alpha = 1 - \beta$

$$t(p_1, p_2) = \mathbb{1}_{p_1 > p_2}(1, -\beta p_1 - \alpha p_2) + \mathbb{1}_{p_1 < p_2}(-1, \alpha p_1 + \beta p_2),$$

и $\mathbb{1}_{p_1 > p_2}$ принимает значение 1 при $p_1 > p_2$ и 0 в противном случае. Стоимость портфеля при этом равна $V(\pi_t) = \mathbb{1}_{s=H}\, \pi_t^R + \pi_t^N$.

Если положить, что в начальный момент времени оба игрока не имели ни рисковых, ни безрисковых активов, то выигрыш первого игрока будет равен $V(\pi_n)$, а второго $-V(\pi_n)$. Второму игроку этот выигрыш становится известным только после окончания игры.

Обозначим через $h_t = (p_{1,1}, p_{2,1}, \ldots, p_{1,t}, p_{2,t})$ историю ставок к моменту времени t, через H_t – множество всевозможных h_t. Тогда стратегией первого игрока является последовательность ходов $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, где $\sigma_t : S \times H_{t-1} \to \Delta(I)$ – отображение в множество $\Delta(I)$ вероятностных распределений на I.

Аналогично стратегией второго игрока назовем последовательность ходов $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, где $\tau_t : H_{t-1} \to \Delta(I)$.

Пара стратегий (σ, τ) вместе с вероятностью хода случая P индуцирует на (S, H_n) вероятностное распределение $\Pi[P, \sigma, \tau]$. Тогда выигрыш первого игрока

$$g_n(P, \sigma, \tau) = \mathbb{E}_{\Pi[P,\sigma,\tau]} V(\pi_n),$$

а нижнее и верхнее значения игры даются формулами

$$V_{1,n}(P) = \sup_{\sigma} \inf_{\tau} g_n(P, \sigma, \tau), \quad V_{2,n}(P) = \inf_{\tau} \sup_{\sigma} g_n(P, \sigma, \tau).$$

Полученную игру обозначим $G_n(P)$. В случае, когда $V_{1,n}(P) = V_{2,n}(P)$, будем говорить, что игра имеет значение $V_n(P)$.

Стратегии σ^* и τ^* первого и второго игроков назовем оптимальными, если

$$\inf_{\tau} g_n(P, \sigma^*, \tau) = V_{1,n}(P), \;\; \sup_{\sigma} g_n(P, \sigma, \tau^*) = V_{2,n}(P).$$

Приведем без доказательства следующую (см. [1]):

Лемма 2.1. *$V_{1,n}$ и $V_{2,n}$ – вогнутые непрерывные функции P. Кроме того*, для любого $P \in [0,1]$ выполняется неравенство

$$0 \leqslant V_{1,n}(P) \leqslant V_{2,n}(P) \leqslant 2nP(1-P).$$

3. Оценка снизу выигрыша первого игрока

Следуя [1], начнем с анализа рекурсивной структуры игры $G_n(P)$. Рассмотрим стратегию σ первого игрока как пару $(\sigma_1, \tilde{\sigma})$, где σ_1 – ход игрока на первом шаге игры, а $\tilde{\sigma}$ – семейство стратегий в игре продолжительности $n-1$, зависящих от ставок $(p_{1,1}, p_{2,1})$ на первом шаге. Аналогично стратегию τ второго игрока можно представить как пару $(\tau_1, \tilde{\tau})$.

Ход игрока σ_1 на первом шаге игры вместе с P индуцирует вероятностное распределение $\Pi[P, \sigma_1]$ на $(s, p_{1,1})$. Обозначим через

$$P(p_{1,1}) = \Pi[P, \sigma_1](s = H \mid p_{1,1})$$

апостериорную вероятность состояния H при условии, что первый игрок сделал ставку $p_{1,1}$. Т.к. $p_{2,1}$ не зависит от s, то

$$P(p_{1,1}) = \Pi[P, \sigma_1, \tau_1](s = H \mid p_{1,1}, p_{2,1}).$$

Таким образом, для значения выигрыша первого игрока справедливо представление

$$\begin{aligned} g_{n+1}(P, \sigma, \tau) = {} & g_1(P, \sigma_1, \tau_1) + \\ & + \mathbb{E}_{\Pi[P,\sigma_1,\tau_1]} g_n(P(p_{1,1}), \tilde{\sigma}(p_{1,1}, p_{2,1}), \tilde{\sigma}(p_{1,1}, p_{2,1})). \end{aligned}$$

Приведем без доказательства следующую (см. [1]):

Лемма 3.1. *Для любого $P \in [0,1]$ выполняется неравенство*

$$V_{1,n+1} \geqslant \max_{\sigma_1} \min_{p_{2,1}} g_1(P, \sigma_1, p_{2,1}) + \mathbb{E}_{\Pi[P,\sigma_1]} V_{1,n}(P(p_{1,1})). \tag{3.1}$$

Параметризуем стратегию σ_1 при помощи пары функций (f, Q) из $[0,1]$ в $[0,1]$, удовлетворяющих:

$\diamond$ f – не убывает на $[0,1]$, (3.2a)

$\diamond$ $\int_0^1 Q(u)\,\mathrm{d}u = P,$ (3.2b)

$\diamond$ $\forall x,y \in [0,1] : f(x) = f(y) \implies Q(x) = Q(y).$ (3.2c)

Если случайная величина u равномерно распределена на $[0,1]$, то положим $f(u) = p_{1,1}$ и $Q(u) = P(f(u))$, что дает нам $\Pi[P,\sigma_1]$.

Лемма 3.2. $V_{1,n+1}(P) \geqslant \sup_{(f,Q)} \inf_{p_{2,1}} F_{n+1}\left((f,Q),p_{2,1}\right)$, *где* (f,Q) *удовлетворяют* (3.2a) – (3.2c) *и*

$$\begin{aligned} F_{n+1}\left((f,Q),p_{2,1}\right) = &\int_0^1 \mathbb{1}_{f(u)>p_{2,1}}(Q(u) - \beta f(u) - \alpha p_{2,1})\,\mathrm{d}u\ + \\ &+ \int_0^1 \mathbb{1}_{f(u)<p_{2,1}}(\alpha f(u) + \beta p_{2,1} - Q(u))\,\mathrm{d}u\ + \\ &+ \int_0^1 V_{1,n}(Q(u))\,\mathrm{d}u, \end{aligned} \tag{3.3}$$

Доказательство получается подстановкой f и Q в (3.1).

Будем искать уравнивающую стратегию первого игрока. Пусть $p_{2,1} = f(\gamma)$, $\gamma \in [0,1]$ и $f(\cdot)$ строго возрастает в γ. Тогда

$$\begin{aligned} F_{n+1}\left((f,Q),f(\gamma)\right) = &\int_\gamma^1 (Q(u) - \beta f(u) - \alpha f(\gamma))\,\mathrm{d}u + \\ &+ \int_0^\gamma (\alpha f(u) + \beta f(\gamma) - Q(u))\,\mathrm{d}u + \\ &+ \int_0^1 V_{1,n}(Q(u))\,\mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{3.4}$$

По предположению $F_{n+1}\left((f,Q),f(\gamma)\right)$ не зависит от γ, следовательно

$$\frac{\partial F_{n+1}}{\partial \gamma} = (\gamma - \alpha) f'(\gamma) + 2f(\gamma) - 2Q(\gamma) = 0.$$

Отсюда

$$f(u) = (u-\alpha)^{-2} \int_\alpha^u 2(x-\alpha)Q(x)\,\mathrm{d}x.^1 \tag{3.5}$$

[1] При $u = \alpha$ доопределим $f(\alpha)$ по непрерывности как $Q(\alpha)$.

Подставив (3.5) в (3.4) при $\gamma = 1$ получим

$$\begin{aligned}\Phi(Q) &= F_{n+1}\left((f(u), Q), f(1)\right) = \\ &= \int_0^1 (2s-1)Q(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u))\,\mathrm{d}u.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Найдем Q как решение изопериметрической вариационной задачи

$$\Phi(Q) \to \max, \quad \int_0^1 Q(u)\,\mathrm{d}u = P. \tag{3.7}$$

Перед тем, как перейти к решению (3.7), заметим, что если функция $f(\cdot)$ – вогнутая и ограниченная, ее субдифференциал $\partial f(\cdot)$ не является однозначно определенным в худшем случае не некотором счетном множестве точек. Таким образом, если то, как определена $f'(\cdot)$ на множестве меры нуль не существенно, $f'(\cdot)$ можно доопределить единственным образом как непрерывную слева или справа функцию.

Применяя метод множителей Лагранжа (см. [6]), получим решение (3.7) в следующем виде:

$$Q(u) = V_{1,n}^{*\prime}(1-\lambda-2u), \text{ где}^2 \tag{3.8}$$

$$\int_0^1 V_{1,n}^{*\prime}(1-\lambda-2u)\,\mathrm{d}u = P, \tag{3.9}$$

Так как $V_{1,n}(\cdot)$ определена на $[0,1]$, то $V_{1,n}^{*\prime}(\cdot)$ не возрастает на $\mathbb{R}$ от 1 до 0. Следовательно λ, удовлетворяющая (3.9), существует. Кроме того доопределим $V_{1,n}^{*\prime}(\cdot)$ таким образом, чтобы $Q(u)$ была непрерывной справа при $u < \alpha$ и непрерывной слева при $u \geqslant \alpha$.

Лемма 3.3. *Пара функций* (f, Q), *определенная в* (3.5), (3.8) *принимает значения в* $[0,1]$ *и удовлетворяет* (3.2a) – (3.2c), *т.е. является корректной параметризацией стратегии первого игрока.*

Доказательство. Так как $V_{1,n}^{*\prime}(\cdot)$ убывает от 1 до 0, то $Q(\cdot)$ принимает значения в $[0,1]$ и, кроме того, не убывает на $[0,1]$.

Далее, можно заметить, что $f(u)$ является математическим ожиданием $Q(x)$, где x – случайная величина распределенная между α

---

[2] Через $f^*(x^*) = \inf_x \{x \cdot x^* - f(x)\}$ обозначена сопряженная к $f(\cdot)$ функция.

и u с плотностью $2|x-\alpha|/(u-\alpha)^2$. Следовательно, $f(\cdot)$ также принимает значения в $[0,1]$.

Сделаем замену переменного $t=(x-\alpha)/(u-\alpha)$ в (3.5). Тогда

$$f(u)=\int_0^1 2tQ\left(t(u-\alpha)+\alpha\right)\mathrm{d}t.$$

Отсюда видно, что (3.2a) выполнено. Далее, (3.2b) выполнено по построению. Чтобы показать, что (3.2c) выполняется, рассмотрим несколько случаев.

Пусть $\alpha<u_1<u_2$. Тогда, так как Q не убывает, почти при всех $t\in[0,1]$ выполнено $Q(t(u_1-\alpha)+\alpha)=Q(t(u_2-\alpha)+\alpha)$. Из непрерывности Q слева следует равенство при $t=1$, т.е. $Q(u_1)=Q(u_2)$.

При $\alpha=u_1<u_2$ имеем $f(u_1)=f(\alpha)=Q(\alpha)$. Отсюда почти при всех $t\in[0,1]$ выполнено $Q(t(u_2-\alpha)+\alpha)=Q(\alpha)$. Снова из непрерывности Q слева получаем $Q(u_1)=Q(u_2)=Q(\alpha)$.

Доказательство при $u_1<u_2\leqslant\alpha$ получается аналогично с заменой непрерывности слева на непрерывность справа. Так же рассматривается и случай $u_1<\alpha<u_2$. Таким образом (3.2c) выполнено. □

Лемма 3.4. *Если $f(u_1)=f(u_2)$ при $u_1<u_2$, то $f(u)=Q(u)$ при $u\in[u_1,u_2]$.*

Доказательство. Действительно, если $f(u_1)=f(u_2)$, то из леммы 3.3 следует, что $f(\cdot)$ и $Q(\cdot)$ константны на $[u_1,u_2]$. Тогда из (3.5) для $f(u_2)$ имеем

$$\begin{aligned}
f(u_2)&=(u_2-\alpha)^{-2}\int_\alpha^{u_2}2(x-\alpha)Q(x)\,\mathrm{d}x=\\
&=(u_2-\alpha)^{-2}\left(\int_\alpha^{u_1}2(x-\alpha)Q(x)\,\mathrm{d}x+\int_{u_1}^{u_2}2(x-\alpha)Q(x)\,\mathrm{d}x\right)=\\
&=(u_2-\alpha)^{-2}\left((u_1-\alpha)^2f(u_1)+\int_{u_1}^{u_2}2(x-\alpha)Q(u_1)\,\mathrm{d}x\right)=\\
&=(u_2-\alpha)^{-2}\left((u_1-\alpha)^2f(u_1)+\left((u_2-\alpha)^2-(u_2-\alpha)^2\right)Q(u_1)\right).
\end{aligned}$$

С другой стороны, для $f(u_1)$ справедливо

$$f(u_1)=(u_2-\alpha)^{-2}\left((u_1-\alpha)^2f(u_1)+\left((u_2-\alpha)^2-(u_2-\alpha)^2\right)f(u_1)\right).$$

Таким образом, $f(u_1)=Q(u_1)$, а следовательно $f(u)=Q(u)$ при $u\in[u_1,u_2]$. □

Обозначим $K(\lambda) = \int_0^1 V_{1,n}^*(1-\lambda-2u)\,\mathrm{d}u$. Тогда $K'(\lambda) = P$. Подставив (3.8), (3.9) в (3.6), получим

$$\begin{aligned}
\Phi(Q) &= \lambda \int_0^1 Q(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^1 \left[(2s-1-\lambda)Q(s) + V_{1,n}\left(Q(s)\right)\right]\mathrm{d}s = \\
&= PK^{*\prime}(P) - \int_0^1 \left[(1+\lambda-2s)Q(s) + V_{1,n}\left(Q(s)\right)\right]\mathrm{d}s = \\
&= PK^{*\prime}(P) - \int_0^1 V_{1,n}^*(1+\lambda-2s)\,\mathrm{d}s = \\
&= PK^{*\prime}(P) - K(\lambda) = PK^{*\prime}(P) - K(K^{*\prime}(P)) = K^*(P).
\end{aligned}$$

Выше было использовано несколько свойств субдифференциалов замкнутых вогнутых функций, в частности эквивалентность следующих условий (см., например, [7, Теорема 23.5]):

(a) $x^* \in \partial f(x)$,

(b) $x \in \partial f^*(x^*)$,

(c) $\langle z, x^* \rangle - f(z)$ достигает минимума по z в точке x.

Теорема 3.1. *Для выигрыша первого игрока в игре $G_n(P)$ справедлива оценка $V_{1,n+1}(P) \geqslant K^*(P)$.*

Доказательство. Из леммы 3.1 следует, что нам достаточно доказать, что при любом $p_{2,1} \in [0,1]$ выполнено $F_{n+1}\left((f,Q), p_{2,1}\right) \geqslant K^*(P)$.

Рассмотрим несколько случаев. Пусть $p_{2,1} < f(0)$. Тогда

$$\begin{aligned}
F_{n+1}\left((f,Q), p_{2,1}\right) &= \int_0^1 \left[Q(u) - \beta f(u) - \alpha p_{2,1}\right]\mathrm{d}u + \\
&+ \int_0^1 V_{1,n}(Q(u))\,\mathrm{d}u \geqslant F_{n+1}\left((f,Q), f(0)\right) = K^*(P).
\end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что при $p_{2,1} > f(1)$

$$F_{n+1}\left((f,Q), p_{2,1}\right) \geqslant F_{n+1}\left((f,Q), f(0)\right) = K^*(p).$$

Пусть теперь $p_{2,1} = f(\gamma),\ \gamma \in [0,1]$. Кроме того, введем обозначения

$$\gamma^- = \inf\left\{x \mid f(x) = f(\gamma)\right\}, \quad \gamma^+ = \sup\left\{x \mid f(x) = f(\gamma)\right\}.$$

Тогда

$$F_{n+1}\left((f,Q),p_{2,1}\right) = \int_{\gamma^+}^{1} (Q(u) - \beta f(u) - \alpha f(\gamma))\,\mathrm{d}u + \\ + \int_0^{\gamma^-} (\alpha f(u) + \beta f(\gamma) - Q(u))\,\mathrm{d}u + \\ + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u))\,\mathrm{d}u. \tag{3.10}$$

Однако, из леммы 3.4 следует, что $Q(u) = f(\gamma)$ при $u \in [\gamma^-, \gamma^+]$. А значит (3.10) совпадает с (3.4) и $F_{n+1}\left((f,Q),p_{2,1}\right) \geqslant K^*(p)$ по построению. □

4. Оценка сверху выигрыша второго игрока

Следуя [1], рассмотрим двойственную игру $G_n^*(x)$, определенную следующим образом. Перед началом игры инсайдер выбирает текущее состояние $s \in S$. Если $s = H$, то он вынужден заплатить второму игроку пенальти размера x в конце игры. В остальном игра аналогична G_n.

Таким образом, стратегией первого игрока является пара $(P,\ \sigma)$, где $P \in [0,1]$, а σ – стратегия в G_n. Множество стратегий второго игрока не отличается от аналогичного в G_n.

Выигрыш второго игрока, который он стремится максимизировать, определяется как

$$g_n^*(x,(P,\ \sigma),\tau) = xP - g_n(P,\sigma,\tau),$$

а верхнее и нижнее значения игры даются, соответственно, формулами

$$W_{1,n}(x) = \inf_{(P,\ \sigma)} \sup_{\tau} g_n^*(x,(P,\ \sigma),\tau), \quad W_{2,n}(x) = \sup_{\tau} \inf_{(P,\ \sigma)} g_n^*(x,(P,\ \sigma),\tau).$$

5. Значение игры

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. De Meyer B., Saley H. *On the strategic origin of Brownian motion in finance* // Int J Game Theory. 2002. V. 31. P. 285–319
2. Aumann R.J., Maschler M.B. *Repeated Games with Incomplete Information.* The MIT Press, Cambridge, London
3. Domansky V. *Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets* // Int J Game Theory. 2007. V. 36(2). P. 241–257
4. Chatterjee K., Samuelson W. *Bargaining under Incomplete Information* // Operations Research. 1983. V. 31. N. 5. P. 835–851
5. Пьяных А.И. *Многошаговая модель биржевых торгов с асимметричной информацией и элементами переговоров* // TODO
6. Эльсгольц Л.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.* М.: Наука, 1965.
7. Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ.* М.: Мир, 1973.

TODO: TITLE OF THE ARTICLE

Artem Pyanykh, Moscow State University, postgraduate student (artem.pyanykh@gmail.com).

Abstract: TODO: TITILE ABSTRACT.

Keywords: TODO: keywords.