Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.3, с. 150–152

УДК 519.83
ББК 22.18

О модификации многошаговой модели биржевых торгов с непрерывными ставками и асимметричной информацией

Артем И. Пьяных
Московский университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
119991, Москва, Ленинские горы, 2-й учебный корпус
artem.pyanykh@gmail.com

Рассматривается модификация многошаговой модели биржевых торгов с непрерывными ставками. Два игрока ведут между собой торги рисковыми ценными бумагами (акциями). Один из игроков знает настоящую цену акции, второй знает только вероятности высокого и низкого значений цены. На каждом шаге торгов игроки делают произвольные вещественнозначные ставки. Игрок, предложивший бóльшую ставку, покупает у другого акцию, причем цена сделки равна выпуклой комбинации предложенных ставок с некоторым заданным коэффициентом. Построены оптимальные стратегии и найдено значение n-шаговой игры.

Ключевые слова: многошаговые игры, асимметричная информация, повторяющиеся игры с неполной информацией.

---

1. Введение

В работе [1] была рассмотрена многошаговая модель биржевых торгов однотипными акциями, в которой торги между собой ведут два игрока. Перед началом торгов случайный ход определяет цену акции на весь период торгов, которая в состояниях рынка L и H равна 0 и 1 соответственно. Выбранная цена сообщается первому игроку и не сообщается второму, при этом второй игрок знает, что первый – инсайдер. Также оба игрока знают вероятность P высокой цены акции.

На каждом шаге торгов игроки одновременно и независимо назначают некоторую цену за акцию. Игроки могут делать произвольные ставки из единичного отрезка, причем игрок, предложивший бо́льшую цену, покупает у другого акцию по названной цене. Задачей игроков является максимизация стоимости портфеля, состоящего из некоторого числа акций и суммы денег.

Модель сводится к повторяющейся игре с неполной информацией, как описано в [2], для которой Де Мейером и Салей были найдены оптимальные стратегии игроков и значение игры. Позднее В. Доманским [3] была рассмотрена модификация модели, в которой ставки игроков могли принимать значения только из заданного дискретного множества $\{i/m,\ i = \overline{0,m},\ m \geqslant 1\}$. В данной постановке им было получено решение игры неограниченной продолжительности. Отметим также работу В. Крепс [4] с явным решением для n-шаговых игр при $m \leqslant 3$, а также работу М. Сандомирской и В. Доманского [5] с решением одношаговой игры при произвольном $m \in \mathbb{N}$.

В обеих работах использовался одинаковый механизм проведения сделки, при котором акция продается по наибольшей из предложенных цен. Можно, однако, рассмотреть и следующий механизм формирования цены акции, предложенный в [6]. Игроки одновременно предлагают цены p_1 и p_2, при $p_1 > p_2$ акция приобретается первым игроком по цене $\beta p_1 + (1-\beta)p_2$, где $\beta \in [0,1]$ – заданный коэффициент, характеризующий переговорную силу продавца; случай $p_1 < p_2$ симметричен; при $p_1 = p_2$ сделка не состоится. Более подробное обсуждение связанное с выбором подобного механизма приведено в [7].

Фактически, в работах [1] и [3] коэффициент β равен 1. Обобщение модели с дискретными ставками на случай произвольного β было рассмотрено в [8]. В данной работе обобщение на случай произвольного β проведено для модели игры с непрерывными ставками.

2. Постановка задачи

Обозначим множество возможных состояний рынка через $S = \{H, L\}$; $s \in S$ при этом обозначает состояние, в котором на самом деле находится рынок.

Два игрока на этом рынке на протяжении n шагов ведут между собой торги за одну единицу рискового актива. Каждый игрок делает ставку из множества $I = [0, 1]$; игрок, предложивший большую ставку, покупает у другого акцию по заданной цене.

Обозначим через $y_t = (y_t^R, y_t^N)$ портфель первого игрока на t-м шаге торгов, где y_t^R и y_t^N – количество единиц рискового и безрискового активов соответственно. Если на t-м шаге игроки делают ставки $p_{1,t} \in I$, $p_{2,t} \in I$, то портфель $y_t = y_{t-1} + t(p_{1,t}, p_{2,t})$, где при $\beta \in [0, 1]$, $\overline{\beta} = 1 - \beta$

$$t(p_1, p_2) = \underset{p_1 > p_2}{\mathbb{1}}(1, -(\beta p_1 + \overline{\beta} p_2)) + \underset{p_1 < p_2}{\mathbb{1}}(-1, \overline{\beta} p_1 + \beta p_2), \tag{2.1}$$

и $\mathbb{1}_{p_1 > p_2}$ принимает значение 1 при $p_1 > p_2$ и 0 в противном случае. Таким образом, одна акция продается по цене, равной выпуклой комбинации предложенных ставок с заданным коэффициентом β. Стоимость портфеля при этом равна

$$V(y_t) = \underset{s=H}{\mathbb{1}}\, y_t^R + y_t^N.$$

Будем считать, что игроки обладают неограниченными запасами рисковых и безрисковых активов, т.е. торги не могут прекратиться по причине того, что у одного из игроков закончатся деньги или акции. Цель игроков состоит в максимизации прибыли, полученной от торгов. Таким образом, не ограничивая общности, можно положить, что в начальный момент времени оба игрока имеют нулевые портфели. При этом прибыль первого игрока после завершения сделок будет равна $V(y_n)$, а второго $-V(y_n)$.

Ниже мы рассмотрим теоретико-игровую постановку основной задачи (прямую игру), а также двойственной к ней в смысле Де Мейера (двойственную игру). Как отмечено в [1], прямая (двойственная) игра больше подходит для построения оптимальной стратегии первого (второго) игрока.

2.1. Прямая игра

Перед началом игры ходом случая определяется $s \in S$ таким образом, что $p(s = H) = P$, $p(s = L) = 1 - P$. Выбранное s сообщается первому игроку (инсайдеру), второй игрок при этом не осведомлен о настоящем значении s и знает только вероятности выбора случаем того или иного состояния.

Обозначим через $h_t = (p_{1,1}, p_{2,1}, \ldots, p_{1,t}, p_{2,t})$ историю ставок к моменту времени t, а через H_t – множество всевозможных h_t. Стратегией первого игрока является последовательность ходов $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, где $\sigma_t = (\sigma_t^L,\ \sigma_t^H)$. При фиксированном $s \in S$ ход $\sigma_t^s : H_{t-1} \to \Delta(I)$ является отображением из множества историй ставок к моменту времени $t - 1$ в множество $\Delta(I)$ вероятностных распределений на I. То есть, на каждом шаге инсайдер в зависимости от состояния s и истории h_{t-1} рандомизирует выбор ставки на множестве I. Обозначим множество стратегий первого игрока Σ_n.

Аналогично, стратегией второго игрока назовем последовательность ходов $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, где $\tau_t : H_{t-1} \to \Delta(I)$. Таким образом, не имея информации о состоянии s, второй игрок опирается только на историю ставок. Обозначим множество стратегий второго игрока T_n.

Пара стратегий (σ, τ) вместе с ходом случая индуцирует на (S, H_n) вероятностное распределение $\Pi[P, \sigma, \tau]$. Тогда выигрыш первого игрока равен

$$g_n(P, \sigma, \tau) = \mathbb{E}_{\Pi[P,\sigma,\tau]} V(y_n).$$

Выигрыш второго игрока при этом равен $-g_n(P, \sigma, \tau)$.

Полученную игру обозначим через $G_n(P)$. Ее нижнее и верхнее значения даются формулами

$$V_{1,n}(P) = \sup_{\sigma} \inf_{\tau} g_n(P, \sigma, \tau), \quad V_{2,n}(P) = \inf_{\tau} \sup_{\sigma} g_n(P, \sigma, \tau).$$

В том случае, когда $V_{1,n}(P) = V_{2,n}(P) = V_n(P)$, будем говорить, что игра имеет значение $V_n(P)$.

Стратегии σ^* и τ^* называются оптимальными, если

$$\inf_{\tau} g_n(P, \sigma^*, \tau) = V_{1,n}(P), \ \ \sup_{\sigma} g_n(P, \sigma, \tau^*) = V_{2,n}(P).$$

В [1] показано, что игра $G_{n+1}(P)$ имеет рекурсивную структуру в том смысле, что задачу о нахождении выигрыша в $(n + 1)$-шаговой игре можно свести в задаче о нахождении выигрыша в n-шаговой игре следующим образом. Рассмотрим стратегию σ первого игрока как пару $(\sigma_1, \tilde{\sigma})$, где σ_1 – ход игрока на первом шаге игры, а $\tilde{\sigma}$ – стратегия в игре продолжительности n, зависящая от ставок (p_1, p_2) на первом шаге. Аналогично стратегию τ второго игрока можно представить как пару $(\tau_1, \tilde{\tau})$.

Приведем несколько фактов, которые понадобятся нам в дальнейшем. Доказательства см. [1].

Пара (σ_1, τ_1) вместе с ходом случая индуцирует вероятностное распределение $\Pi[P, \sigma_1, \tau_1]$ на (S, p_1, p_2). Обозначим через

$$P(p_1, p_2) = \Pi[P, \sigma_1, \tau_1](s = H \mid p_1, p_2).$$

апостериорную вероятность состояния H при условии, что первый игрок сделал ставку p_1, а второй – p_2. Так как p_2 не зависит от s, то апостериорная вероятность

$$P(p_1, p_2) = P(p_1) = \Pi[P, \sigma_1](s = H \mid p_1)$$

зависит только от p_1. Тогда для значения выигрыша первого игрока справедливо представление

$$g_{n+1}(P, \sigma, \tau) = g_1(P, \sigma_1, \tau_1) + \mathbb{E}_{\Pi[P,\sigma_1,\tau_1]} g_n(P(p_1), \tilde{\sigma}(p_1, p_2), \tilde{\tau}(p_1, p_2)).$$

Похожий результат имеет место и для нижнего значения игры.

Лемма 2.1. *Для любого $P \in [0, 1]$ выполняется неравенство*

$$V_{1,n+1}(P) \geqslant \sup_{\sigma_1} \inf_{p_2} g_1(P, \sigma_1, p_2) + \mathbb{E}_{\Pi[P,\sigma_1]} V_{1,n}\left(P(p_1)\right). \tag{2.2}$$

Подчеркнем, что поскольку можно положить $V_0(P) = 0$, данная формула имеет смысл для любого $n \geqslant 1$.

2.2. Двойственная игра

Следуя [1], определим двойственную игру $G_n^*(x)$ следующим образом. Перед началом игры первый игрок выбирает текущее состояние $s \in S$; второй игрок не осведомлен о выборе первого. Если $s = H$, то первый вынужден заплатить второму штраф размера x в конце игры. В остальном правила $G_n^*(x)$ аналогичны правилам G_n.

Таким образом, стратегией первого игрока в двойственной игре является пара $(P,\ \sigma)$, где $P \in [0,1]$, $\sigma \in \Sigma_n$. Множество стратегий второго игрока совпадает с T_n.

Выигрыш второго игрока, который он стремится максимизировать, определяется как

$$g_n^*(x,(P,\ \sigma),\tau) = xP - g_n(P,\sigma,\tau),$$

а верхнее и нижнее значения игры даются, соответственно, формулами

$$W_{1,n}(x) = \inf_{(P,\,\sigma)} \sup_{\tau} g_n^*(x,(P,\ \sigma),\tau), \quad W_{2,n}(x) = \sup_{\tau} \inf_{(P,\,\sigma)} g_n^*(x,(P,\ \sigma),\tau).$$

В том случае, когда $W_{1,n}(x) = W_{2,n}(x) = W_n(x)$, будем говорить, что игра имеет значение $W_n(x)$.

Аналогично предыдущему пункту, можно провести рассмотрение рекурсивной структуры игры $G_n^*(x)$ и получить следующий результат [1].

Лемма 2.2. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство*

$$W_{2,n+1}(x) \geqslant \sup_{\tau_1} \inf_{p_1} W_{2,n}(x - g_1^H(p_1,\tau_1) + g_1^L(p_1,\tau_1)) - g_1^L(p_1,\tau_1), \quad (2.3)$$

где $g_1^H(p_1,\tau_1) = g_1(1,p_1,\tau_1)$, $g_1^L(p_1,\tau_1) = g_1(0,p_1,\tau_1)$ – выигрыши в состояниях H и L соответственно.

Отметим, что так как $W_0^*(x) = \phi(x) = \min(x,0)$, формула имеет смысл для любого $n \geqslant 1$.

3. Оценки на выигрыш в прямой и двойственной играх

Обозначим схему дальнейших рассуждений.

В разделах 3.1 и 3.2 будут построены S-выравнивающие стратегии первого и второго игроков в прямой и двойственной играх, соответственно. Будет показано, что несмотря на то, что по виду данные стратегии отличается от таковых в [1], вид оценок на $V_{1,n}(P)$ и $W_{2,n}(x)$ остается неизменным. Отсюда будет следовать справедливость двойственных соотношений между $V_{1,n}(P)$ и $W_{2,n}(x)$, существование $V_n(P)$ и $W_n(x)$, формулы для их расчета, а также оптимальность построенных стратегий.

Нам потребуются некоторые определения и факты из выпуклого анализа.

Пусть $f(x)$ – вогнутая функция, определенная на прямой, причем f может принимать значение $-\infty$. Функцией, сопряженной к f в смысле Фенхеля, называется

$$f^*(x^*) = \inf\{x^* \cdot x - f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Множество $\operatorname{dom} f = \{x \mid f(x) > -\infty\}$ называется эффективным, а $\operatorname{range} f = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ – множеством значений функции f. Субдифференциалом функции f в точке x называется множество

$$\partial f(x) = \{a \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R} : f(y) \leqslant f(x) + a(y-x)\}.$$

Справедливо утверждение [10, Теорема 23.5]):

$$x^* \in \partial f(x) \iff x \in \partial f^*(x^*). \tag{3.1}$$

Кроме того, имеют место следующие включения [10, §24]:

$$\operatorname{int}(\operatorname{dom} f) \subset \operatorname{range} \partial f^* \subset \operatorname{dom} f. \tag{3.2}$$

В [1] показано, что $V_{1,n}(\cdot)$ и $W_{2,n}(\cdot)$ являются вогнутыми на своей области определения. Предположим дополнительно, что функции $V_{1,n}(\cdot)$, $V^*_{1,n}(\cdot)$ и $W_{2,n}(\cdot)$ непрерывно дифференцируемы. Справедливость данных предположений будет обоснована в разделе 4.

3.1. Оценка $\mathbf{V_{1,n}}(\mathbf{P})$

В [1] рассматривается параметризация одношаговой стратегии инсайдера функциями f и Q, которые используются для генерации маргинального распределения p_1 и апостериорной вероятности $P(p_1)$ соответственно. Далее мы покажем, что задание стратегии первого игрока при помощи пары (f, Q) в некотором смысле естественно и приведем способ перехода от параметризованного представления к стратегии σ_1.

Обозначим через $\sigma_1^M(p_1) = P\sigma_1^H(p_1) + (1-P)\sigma^L(p_1)$ маргинальное распределение p_1.

Утверждение 3.1. *Для апостериорной вероятности $P(p_1)$ события H справедлива формула*

$$P(p_1) = P\,\frac{\mathrm{d}\sigma_1^H}{\mathrm{d}\sigma_1^M}(p_1), \tag{3.3}$$

где $\mathrm{d}\sigma_1^H/\,\mathrm{d}\sigma_1^M$ *– производная Радона-Никодима.*

Доказательство. По определению $P(p_1)$ для любого множества B из борелевской σ-алгебры $\mathscr{B}_I$ отрезка I выполнено

$$P(s = H,\ p_1 \in B) = \int_B P(p_1)\ \sigma_1^M(\mathrm{d}p_1).$$

С другой стороны справедлива следующая формула:

$$P(s = H,\ p_1 \in B) = P\int_B \sigma_1^H(\mathrm{d}p_1).$$

Так как σ_1^H абсолютно непрерывна относительно σ_1^M, то существует производная Радона-Никодима, а значит

$$P(s = H,\ p_1 \in B) = \int_B P\frac{\mathrm{d}\sigma_1^H}{\mathrm{d}\sigma_1^M}(p_1)\ \sigma_1^M(\mathrm{d}p_1).$$

Отсюда получаем (3.3). □

Утверждение 3.2. *Для $g_1(P, \sigma_1, p_2)$ справедливо представление*

$$g_1(P, \sigma_1, p_2) = \int_I \mathbb{1}_{p_1 > p_2}\Big[P(p_1) - \beta p_1 - \overline{\beta} p_2\Big]\ \sigma_1^M(\mathrm{d}p_1) + \\ + \int_I \mathbb{1}_{p_1 < p_2}\Big[\overline{\beta} p_1 + \beta p_2 - P(p_1)\Big]\ \sigma_1^M(\mathrm{d}p_1). \tag{3.4}$$

Доказательство. По определению

$$g_1(P, \sigma_1, p_2) = \mathbb{E}_{\Pi[P,\sigma_1]}\langle(\underset{s=H}{\mathbb{1}}, 1), t(p_1, p_2)\rangle. \tag{3.5}$$

Подставив (2.1) в (3.5), получим

$$g_1(P, \sigma_1, p_2) = P\int_I \Big[\underset{p_1 > p_2}{\mathbb{1}}(1 - \beta p_1 - \overline{\beta} p_2) + \underset{p_1 < p_2}{\mathbb{1}} \times \\ \times (\overline{\beta} p_1 - \beta p_2 - 1)\Big]\ \sigma_1^H(\mathrm{d}p_1) + (1 - P)\int_I \Big[\underset{p_1 > p_2}{\mathbb{1}} \times \\ \times (-\beta p_1 - \overline{\beta} p_2) + \underset{p_1 < p_2}{\mathbb{1}}(\overline{\beta} p_1 - \beta p_2)\Big]\ \sigma_1^L(\mathrm{d}p_1).$$

Отсюда, воспользовавшись (3.3), получим (3.4). □

Формула (3.4) показывает альтернативное представление стратегии инсайдера σ_1 с помощью маргинального распределения ставки и апостериорной вероятности состояния H. Укажем способ перехода от σ_1 к параметризованному представлению (f, Q) и наоборот.

Возьмем случайную величину u, равномерно распределенную на $[0,1]$. Если $f(\cdot)$ – левая обратная функции распределения p_1, то $f(u)$ и p_1 одинаково распределены. Обозначим $Q(u) = P(f(u))$. Пусть также $\pi = \Pi[P, \sigma_1]$. Так как для любого $B \in \mathscr{B}_I$ выполнено

$$\pi(p_1 \in B \mid s = H) = \frac{\pi(p_1 \in B,\ s = H)}{\pi(s = H)} = \int_0^1 \mathbb{1}_{f(u) \in B} \frac{Q(u)}{P} \,\mathrm{d}u,$$

то восстановить σ_1 по (f, Q) можно следующим образом. Если ходом случая было выбрано состояние H, то инсайдер выбирает $u \in [0,1]$ с плотностью вероятности $Q(u)/P$ и делает ставку $p_1 = f(u)$. Аналогично, в состоянии L он выбирает u с плотностью вероятности $(1 - Q(u))/(1 - P)$ и делает ставку $p_1 = f(u)$.

Введем обозначение

$$F_{n+1}\left(P, (f, Q), p_2\right) = g_1(P, (f, Q), p_2) + \mathbb{E} V_{1,n}(Q(u)).$$

Переходя к f и Q в формуле (3.4) получаем следующее равенство:

$$F_{n+1}\left(P, (f, Q), p_2\right) = \int_0^1 \mathbb{1}_{f(u) > p_2} (Q(u) - \beta f(u) - \overline{\beta} p_2) \,\mathrm{d}u \ + \\ + \int_0^1 \mathbb{1}_{f(u) < p_2} (\overline{\beta} f(u) + \beta p_2 - Q(u)) \,\mathrm{d}u \ + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u)) \,\mathrm{d}u. \quad (3.6)$$

В [1] показано, что функции f и Q должны удовлетворять следующим свойствам, чтобы быть параметризацией некоторой одношаговой стратегии σ_1 первого игрока в игре $G_n(P)$:

- f не убывает на $[0,1]$, (3.7a)
- $$\int_0^1 Q(u) \,\mathrm{d}u = P, \quad (3.7b)$$
- $\forall u_1, u_2 \in [0,1] : f(u_1) = f(u_1) \implies Q(u_1) = Q(u_2).$ (3.7c)

Таким образом, мы можем переформулировать лемму 2.1 в терминах f и Q.

Лемма 3.1. *Для любого $P \in [0,1]$ выполняется неравенство*

$$V_{1,n+1}(P) \geqslant \sup_{(f,\,Q)} \inf_{p_2} F_{n+1}\left(P,(f,Q),p_2\right),$$

где f и Q удовлетворяют (3.7a) – (3.7c).

Будем искать пару (f,Q), выравнивающую выигрыш первого игрока при $p_2 \in [f(0),f(1)]$.

Пусть $p_2 = f(\alpha)$ для некоторого $\alpha \in [0,1]$, и f возрастает в некоторой окрестности точки α. Тогда для выравнивающей пары (f,Q) выражение

$$F_{n+1}\left(P,(f,Q),f(\alpha)\right) = \int_{\alpha}^{1} \big(Q(u) - \beta f(u) - \overline{\beta} f(\alpha)\big)\,\mathrm{d}u + \\ + \int_0^{\alpha} \big(\overline{\beta} f(u) + \beta f(\alpha) - Q(u)\big)\,\mathrm{d}u + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u))\,\mathrm{d}u, \quad (3.8)$$

не зависит от α. Следовательно

$$\frac{\partial F_{n+1}}{\partial \alpha} = (\alpha - \overline{\beta})f'(\alpha) + 2f(\alpha) - 2Q(\alpha) = 0.$$

Отсюда

$$f(u) = (u - \overline{\beta})^{-2} \int_{\overline{\beta}}^{u} 2(x - \overline{\beta})Q(x)\,\mathrm{d}x.^1 \quad (3.9)$$

Если подставить (3.9) в (3.8), то получившееся выражение $\Phi(Q)$ зависит только от Q и не зависит от α. При $\alpha = 1$, получим

$$\Phi(Q) = \int_0^1 (\overline{\beta} f(u) - Q(u))\,\mathrm{d}u + \beta f(1) + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u))\,\mathrm{d}u. \quad (3.10)$$

Лемма 3.2. *Для $\Phi(Q)$ справедливо следующее выражение:*

$$\Phi(Q) = \int_0^1 (2u-1)Q(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u))\,\mathrm{d}u. \quad (3.11)$$

Доказательство. Упростим (3.10) при $\beta \in (0,1)$. Случаи $\beta = 0$ и $\beta = 1$ дают тот же результат и рассматриваются аналогично.

---

[1] При $u = \overline{\beta}$ доопределим $f(\overline{\beta})$ по непрерывности как $Q(\overline{\beta})$.

Найдем выражение для $\int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u$, разбив этот интеграл на две части. Для первой части имеем:

$$\int_0^{\overline{\beta}} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\overline{\beta}} (u-\overline{\beta})^{-2} \int_{\overline{\beta}}^{u} 2(s-\overline{\beta})Q(s)\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^{\overline{\beta}} 2(\overline{\beta}-s)Q(s) \int_0^{s} (\overline{\beta}-u)^{-2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}s = (2/\overline{\beta}) \int_0^{\overline{\beta}} uQ(u)\,\mathrm{d}u.$$

Аналогично для второй части получим:

$$\int_{\overline{\beta}}^1 f(u)\,\mathrm{d}u = (2/\beta) \int_{\overline{\beta}}^1 (1-u)Q(u)\,\mathrm{d}u.$$

Подставим найденные выражения в (3.10):

$$\Phi(Q) = 2\int_0^{\overline{\beta}} uQ(u)\,\mathrm{d}u + (2\overline{\beta}/\beta)\int_{\overline{\beta}}^1 (1-u)Q(u)\,\mathrm{d}u +$$

$$+ (2/\beta)\int_{\overline{\beta}}^1 (u-\overline{\beta})Q(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^1 Q(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u))\,\mathrm{d}u.$$

Приведя подобные с учетом равенства $\overline{\beta}(1-u)+u-\overline{\beta} = \beta u$, получим (3.11). □

Найдем Q как экстремаль следующей вариационной задачи:

$$\Phi(Q) \to \max, \quad \int_0^1 Q(u)\,\mathrm{d}u = P. \tag{3.12}$$

По предположению $V_{1,n}(\cdot)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Тогда функция Q, доставляющая экстремум в задаче (3.12), удовлетворяет уравнению Эйлера, т.е. выполнено

$$2u - 1 + \lambda + V'_{1,n}(Q(U)) = 0, \quad \int_0^1 Q(u)\,\mathrm{d}u = P.$$

Воспользовавшись свойством (3.1), получим

$$Q(u) = V^{*\prime}_{1,n}(1-\lambda-2u), \tag{3.13}$$

$$\int_0^1 V^{*\prime}_{1,n}(1-\lambda-2u)\,\mathrm{d}u = P. \tag{3.14}$$

Так как $V_{1,n}(\cdot)$ определена на $[0,1]$, то из (3.2) следует, что

$$\operatorname{int}(\operatorname{dom} V_{1,n}(\cdot)) = (0,1) \subset \operatorname{range} \partial V^*_{1,n}(\cdot),$$

и $V^{*\prime}_{1,n}(\cdot)$ не возрастает на $\mathbb{R}$ от 1 до 0. Поэтому λ, удовлетворяющее (3.14), существует.

Введем обозначение

$$K(\lambda) = \int_0^1 V^*_{1,n}(1-\lambda-2u)\,\mathrm{d}u.$$

Тогда аналогично [1] можно показать, что при подстановке (3.13) в (3.11) выполняется равенство

$$\Phi(Q) = K^*(P). \tag{3.15}$$

Отметим, что хотя функция $f(u)$ зависит от коэффициента β, функции $Q(u)$ и $\Phi(Q)$ от него не зависят и по форме совпадают с аналогичными выражениями в [1]. Данный факт позволит нам без изменений использовать соотношения из [1] между нижним и верхним значениями прямой и двойственной игр. Но прежде нужно показать, что полученные f и Q действительно удовлетворяют условиям (3.7a) – (3.7c) и доставляют гарантированный выигрыш первого игрока, равный $K^*(P)$.

Лемма 3.3. *Функции f и Q, определенные в* (3.9) *и* (3.13), *принимают значения в* $[0,1]$ *и удовлетворяет* (3.7a) – (3.7c), *т.е. параметризуют некоторую стратегию σ_1 первого игрока.*

Доказательство. Так как $V^{*\prime}_{1,n}(\cdot)$ не возрастает от 1 до 0, то $Q(\cdot)$ принимает значения в $[0,1]$ и в силу (3.13) не убывает на $[0,1]$.

Далее, из (3.9) вытекает, что $f(u)$ является математическим ожиданием $Q(X)$, где X – случайная величина распределенная на отрезке $[\overline{\beta},u]$ с плотностью $2|x-\overline{\beta}|/(u-\overline{\beta})^2$. Следовательно, $f(\cdot)$ также принимает значения в $[0,1]$.

Сделаем замену переменной $t = (x-\overline{\beta})/(u-\overline{\beta})$ в (3.9). Тогда

$$f(u) = \int_0^1 2tQ\left(t(u-\overline{\beta})+\overline{\beta}\right)\mathrm{d}t.$$

Отсюда видно, что (3.7a) выполнено. Далее, (3.7b) выполнено по построению. Чтобы доказать (3.7c), рассмотрим несколько случаев.

Пусть $\overline{\beta} < u_1 < u_2$ и $f(u_1) = f(u_2)$. Тогда, так как Q не убывает, почти при всех $t \in [0,1]$ выполнено $Q(t(u_1-\overline{\beta})+\overline{\beta}) = Q(t(u_2-\overline{\beta})+\overline{\beta})$. Из непрерывности Q следует равенство при $t = 1$, т.е. $Q(u_1) = Q(u_2)$.

При $\overline{\beta} = u_1 < u_2$ имеем $f(u_1) = f(\overline{\beta}) = Q(\overline{\beta})$. Отсюда почти при всех $t \in [0,1]$ выполнено $Q(t(u_2 - \overline{\beta}) + \overline{\beta}) = Q(\overline{\beta})$. Снова из непрерывности Q получаем $Q(u_1) = Q(u_2) = Q(\overline{\beta})$.

Доказательство при $u_1 < u_2 \leqslant \overline{\beta}$ и $u_1 < \overline{\beta} < u_2$ проводится аналогично. Таким образом, (3.7c) выполнено. □

Лемма 3.4. *Если $f(u_1) = f(u_2)$ при $u_1 < u_2$, то $f(u) = Q(u)$ при $u \in [u_1, u_2]$.*

Доказательство. Действительно, если $f(u_1) = f(u_2)$, то из леммы 3.3 следует, что $f(\cdot)$ и $Q(\cdot)$ постоянны на $[u_1, u_2]$. Тогда из (3.9) имеем

$$\begin{aligned}
f(u_2) &= (u_2 - \overline{\beta})^{-2} \int_{\overline{\beta}}^{u_2} 2(x - \overline{\beta})Q(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= (u_2 - \overline{\beta})^{-2} \left(\int_{\overline{\beta}}^{u_1} 2(x - \overline{\beta})Q(x)\,\mathrm{d}x + \int_{u_1}^{u_2} 2(x - \overline{\beta})Q(x)\,\mathrm{d}x \right) = \\
&= (u_2 - \overline{\beta})^{-2} \left((u_1 - \overline{\beta})^2 f(u_1) + \int_{u_1}^{u_2} 2(x - \overline{\beta})Q(u_1)\,\mathrm{d}x \right) = \\
&= (u_2 - \overline{\beta})^{-2} \left((u_1 - \overline{\beta})^2 f(u_1) + \left((u_2 - \overline{\beta})^2 - (u_2 - \overline{\beta})^2 \right) Q(u_1) \right).
\end{aligned}$$

С другой стороны, для $f(u_1)$ справедливо

$$f(u_1) = (u_2 - \overline{\beta})^{-2} \left((u_1 - \overline{\beta})^2 f(u_1) + \left((u_2 - \overline{\beta})^2 - (u_2 - \overline{\beta})^2 \right) f(u_1) \right).$$

Таким образом, $f(u_1) = Q(u_1)$, а следовательно $f(u) = Q(u)$ при $u \in [u_1, u_2]$. □

Теорема 3.1. *Для гарантированного выигрыша первого игрока в игре $G_n(P)$ справедлива оценка $V_{1,n+1}(P) \geqslant K^*(P)$.*

Доказательство. В силу леммы 2.1 достаточно доказать, что при любом $p_2 \in [0,1]$ выполнено $F_{n+1}(P, (f,Q), p_2) \geqslant K^*(P)$. Рассмотрим несколько случаев.

Пусть $p_2 < f(0)$. Тогда из (3.6) и (3.15) получаем неравенство

$$F_{n+1}\left(P,(f,Q),p_2\right) = \int_0^1 \left[Q(u) - \beta f(u) - \overline{\beta} p_2\right] \mathrm{d}u + \\ + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u))\,\mathrm{d}u \geqslant F_{n+1}\left(P,(f,Q),f(0)\right) = \Phi(Q) = K^*(P).$$

Аналогично можно показать, что при $p_2 > f(1)$

$$F_{n+1}\left(P,(f,Q),p_2\right) \geqslant F_{n+1}\left(P,(f,Q),f(1)\right) = \Phi(Q) = K^*(P).$$

Пусть теперь $p_2 = f(\alpha),\ \alpha \in [0,1]$. Введем обозначения

$$\alpha^- = \inf\left\{x \mid f(x) = f(\alpha)\right\}, \quad \alpha^+ = \sup\left\{x \mid f(x) = f(\alpha)\right\}.$$

Подстановкой в (3.6) получаем

$$F_{n+1}\left(P,(f,Q),p_2\right) = \int_{\alpha^+}^1 (Q(u) - \beta f(u) - \overline{\beta} f(\alpha))\,\mathrm{d}u + \\ + \int_0^{\alpha^-} (\overline{\beta} f(u) + \beta f(\alpha) - Q(u))\,\mathrm{d}u + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u))\,\mathrm{d}u. \quad (3.16)$$

Однако, из леммы 3.4 следует, что $Q(u) = f(\alpha)$ при $u \in [\alpha^-, \alpha^+]$. Поэтому (3.16) совпадает с (3.8) и $F_{n+1}\left(P,(f,Q),p_2\right) = \Phi(Q) = K^*(P)$ по построению. □

3.2. Оценка $\mathbf{W_{2,n}}(\mathbf{x})$

Аналогично тому, как это было сделано для первого игрока, параметризуем τ_1 при помощи неубывающей функции $h : [0,1] \to [0,1]$. Если случайная величина u равномерно распределена на $[0,1]$, положим $p_2 = h(u)$. Таким образом может быть получено любое распределение τ_1.

Подобно предыдущему разделу получим аналог леммы 2.2 в терминах h. Заметим, что для $g_1^L(p_1,\tau_1)$ и $g_1^H(p_1,\tau_1)$ справедливо

$$g_1^L(p_1,\tau_1) = \int_I \left[\underset{p_1>p_2}{\mathbb{1}}(-\beta p_1 - \overline{\beta} p_2) + \underset{p_1<p_2}{\mathbb{1}}(\overline{\beta} p_1 + \beta p_2)\right] \tau_1(\mathrm{d}p_2),$$

$$g_1^H(p_1,\tau_1) = \int_I \left[\underset{p_1>p_2}{\mathbb{1}}(1 - \beta p_1 - \overline{\beta} p_2) + \underset{p_1<p_2}{\mathbb{1}}(\overline{\beta} p_1 + \beta p_2 - 1)\right] \tau_1(\mathrm{d}p_2).$$

Подставим $g_1^H(p_1,\tau_1)$ и $g_1^L(p_1,\tau_1)$ в правую часть (2.3) и получившийся результат обозначим как

$$\begin{aligned}G_{n+1}(x,p_1,h) = W_{2,n}\left(x - \int_0^1 \left[\underset{h(u)<p_1}{\mathbb{1}} - \underset{h(u)>p_1}{\mathbb{1}}\right] \mathrm{d}u\right) - \\ - \int_0^1 \left[\underset{h(u)<p_1}{\mathbb{1}}(-\beta p_1 - \overline{\beta} h(u)) + \underset{h(u)>p_1}{\mathbb{1}}(\overline{\beta} p_1 + \beta h(u))\right] \mathrm{d}u. \quad (3.17)\end{aligned}$$

Лемма 3.5. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство*

$$W_{2,n+1}(x) \geqslant \sup_h \inf_{p_1} G_{n+1}(x,p_1,h).$$

Будем искать S-выравнивающую стратегию второго игрока, при $S = [h(0),h(1)]$. Пусть $p_1 = h(\alpha),\ \alpha \in [0,1]$ и $h(\cdot)$ строго возрастает в α. Тогда

$$\begin{aligned}G_{n+1}(x,h(\alpha),h) = W_{2,n}(x+1-2\alpha) - \\ - \int_\alpha^1 \left(\overline{\beta} h(\alpha) + \beta h(u)\right) \mathrm{d}u + \int_0^\alpha \left(\beta h(\alpha) + \overline{\beta} h(u)\right) \mathrm{d}u. \quad (3.18)\end{aligned}$$

По предположению $G_{n+1}(x,h(\alpha),h)$ не зависит от α, следовательно имеет место равенство

$$\frac{\partial G_{n+1}}{\partial \alpha} = 2h(\alpha) + (\alpha - \overline{\beta})h'(\alpha) - 2W'_{2,n}(x-2\alpha+1) = 0.$$

Отсюда

$$h(u) = 2(u-\overline{\beta})^{-2} \int_{\overline{\beta}}^u (s-\overline{\beta}) W'_{2,n}(x-2s+1)\,\mathrm{d}s^2. \quad (3.19)$$

Очевидно, если подставить $h(u)$ в (3.18) то получившееся выражение $\Psi(h)$ не зависит от α, следовательно можно вместо α подставить $\overline{\beta}$.

Лемма 3.6. *Для значения $\Psi(h)$ справедливо равенство*

$$\Psi(h) = \int_0^1 W_{2,n}(x-2s+1)\,\mathrm{d}s. \quad (3.20)$$

---

[2]При $u = \overline{\beta}$ доопределим $h(\overline{\beta})$ по непрерывности как $W'_{2,n}(x-2\overline{\beta}+1)$.

Доказательство. Проведем рассмотрение при $\beta \in (0,1)$. Случаи с $\beta \in \{0,1\}$ рассматриваются аналогично и дают тот же самый результат. При подстановке $\overline{\beta}$ вместо α выражение (3.18) приобретает вид

$$G_{n+1}\big(x, h(\overline{\beta}), h\big) = W_{2,n}(x - 2\overline{\beta} + 1) - \beta \int_{\overline{\beta}}^{1} h(u)\,\mathrm{d}u + \overline{\beta} \int_{0}^{\overline{\beta}} h(u)\,\mathrm{d}u.$$

Для интегралов выше верны формулы

$$\int_0^{\overline{\beta}} h(u)\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{\overline{\beta}} (s/\overline{\beta}) W'_{2,n}(x - 2s + 1)\,\mathrm{d}s,$$
$$\int_{\overline{\beta}}^1 h(u)\,\mathrm{d}u = 2\int_{\overline{\beta}}^1 \frac{1-s}{\beta} W'_{2,n}(x - 2s + 1)\,\mathrm{d}s.$$

Таким образом, выполняется равенство

$$G_{n+1}\big(x, h(\overline{\beta}), h\big) = W_{2,n}(x-1) + \int_0^1 2s W'_{2,n}(x - 2s + 1)\,\mathrm{d}s.$$

Остается заметить, что после интегрирования по частям

$$\int_0^1 2s W'_{2,n}(x - 2s + 1)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 W_{2,n}(x - 2s + 1)\,\mathrm{d}s - W_{2,n}(x-1).$$

Отсюда получаем (3.20). □

Отметим, что несмотря на отличный вид $h(u)$, выражение для $\Psi(h)$ по форме совпадает с аналогичным выражением в [1] и не зависит от коэффициента β. Таким образом, остается показать, что функция $h(\cdot)$ действительно является параметризацией стратегии второго игрока, и нижняя оценка на его выигрыш равна $\Psi(h)$.

Лемма 3.7. *Функция $h(u)$ определенная в* (3.19) *обладает следующими свойствами:*

- $u \in [0,1] \implies h(u) \in [0,1]$,
- $h(\cdot)$ *не убывает на* $[0,1]$,
- $h(u_1) = h(u_2) \implies W'_{2,n}(x - 2u_1 + 1) = W'_{2,n}(x - 2u_2 + 1)$,
- $h(\cdot)$ *не возрастает строго в* $u \implies h(u) = W'_{2,n}(x - 2u + 1)$.

В частности, функция $h(\cdot)$ может служить параметризацией стратегии второго игрока.

Доказательство этих свойств во многом повторяет доказательство лемм 3.3 и 3.4.

Теорема 3.2. *Для гарантированного выигрыша второго игрока в игре $G^*_{n+1}(x)$ справедлива оценка*

$$W_{2,n+1}(x) \geqslant \int_0^1 W_{2,n}(x-2s+1)\,\mathrm{d}s.$$

Доказательство. Из леммы 3.5 следует, что нам достаточно показать, что при любом $p_1 \in [0,1]$ выполнено $G_{n+1}(x,p_1,h) \geqslant \Psi(h)$. Рассмотрим несколько случаев.

При $p_1 < h(0)$ получаем

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x,p_1,h) &= W_{2,n}(x+1) - \int_0^1 \overline{\beta}p_1 + \beta h(u)\,\mathrm{d}u \geqslant \\ &\geqslant W_{2,n}(x+1) - \int_0^1 \overline{\beta}h(0) + \beta h(1) = \Psi(h). \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что при $p_1 > h(0)$ выполняется неравенство $G_{n+1}(x,p_1,h) \geqslant \Psi(h)$.

Пусть теперь $p_1 = h(\alpha),\ \alpha \in [0,1]$. Введем обозначения

$$\alpha^- = \inf\{x \mid h(x) = h(\alpha)\}, \quad \alpha^+ = \sup\{x \mid h(x) = h(\alpha)\}.$$

Преобразовав (3.17), получим что

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x,p_1,h) &= W_{2,n}(x+1-\alpha^- - \alpha^+) \ - \\ &- \int_0^{\alpha^-} \left(-\beta p_1 - \overline{\beta}h(u)\right)\mathrm{d}u - \int_{\alpha^+}^1 \left(\overline{\beta}p_1 + \beta h(u)\right)\mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Так как $W_{2,n}(\cdot)$ – гладкая вогнутая функция, то верно неравенство

$$\begin{aligned} W_{2,n}(x+1-2\alpha) &\leqslant W_{2,n}(x+1-\alpha^- - \alpha^+) \ + \\ &+ W'_{2,n}(x+1-\alpha^- - \alpha^+)\left([\alpha^+ - \alpha] + [\alpha^- - \alpha]\right). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Из леммы 3.7 следует, что $W'_{2,n}(x+1-\alpha^- - \alpha^+) = W'_{2,n}(x+1-2\alpha) = h(\alpha)$. Отсюда и из (3.22) получаем, что

$$W_{2,n}(x+1-\alpha^- - \alpha^+) \geqslant W_{2,n}(x+1-2\alpha)- \\ - \int_{\alpha}^{\alpha^+} \left(\overline{\beta} p_1 + \beta h(u)\right) \mathrm{d}u - \int_{\alpha^-}^{\alpha} \left(-\beta p_1 - \overline{\beta} h(u)\right) \mathrm{d}u.$$

Подставив данное выражение в (3.21), получаем в точности (3.18). Следовательно $G_{n+1}(x, p_1, h) \geqslant \Psi(h)$. □

4. Значение игры

Так как выражения для нижних оценок в теоремах 3.1 и 3.2 совпадают с аналогичными выражениями в [1], справедливы все двойственные соотношения между $V_{1,n}(P)$ и $W_{2,n}(x)$, а также утверждения относительно оптимальности стратегий. Приведем соответствующие теоремы.

Теорема 4.1. *Для всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено*

$$V^*_{1,n}(x) = W^*_{1,n}(x) = V^*_{2,n}(x) = W_{2,n}(x).$$

Таким образом, игры $G_n(P)$ и $G^*_n(x)$ имеют значения $V_n(P)$ и $W_n(x)$ соответственно. Кроме того

$$W_{n+1}(x) = \int_0^1 W_n(x-2u+1)\,\mathrm{d}u. \tag{4.1}$$

Теорема 4.2. *Стратегия σ является оптимальной в игре $G_n(P)$ тогда и только тогда, когда (P, σ) является оптимальной стратегией в игре $G^*_n(x)$ при $x = V'_n(P)$.*

В заключение обоснуем сделанные ранее предположения о гладкости функций $V_{1,n}(\cdot)$, $V^*_{1,n}(\cdot)$ и $W_{2,n}(\cdot)$.

Утверждение 4.1. *При любом $n \geqslant 1$ функция $W_n(\cdot)$ является гладкой на $\mathbb{R}$.*

Это сразу следует из формулы (4.1) и того, что $W_0(x) = \min(x, 0)$. Рассмотрим подробнее, как ведет себя $W'_n(x)$.

Лемма 4.1. *Для любого* $n \geqslant 1$ *выполняется*:

1. $W_n'(x) = 1$ *при* $x \in (-\infty, -n]$,

2. $W_n'(x) = 0$ *при* $x \in [n, \infty)$,

3. $W_n'(x)$ *строго убывает при* $x \in [-n, n]$.

Доказательство. Из (4.1) следует, что

$$W_{n+1}'(x) = \frac{1}{2}\left(W_n(x+1) - W_n(x-1)\right). \tag{4.2}$$

Отсюда

$$W_1'(x) = \begin{cases} 1, & x < -1, \\ (1-x)/2, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Таким образом утверждение леммы верно при $n = 1$. Пусть также утверждение леммы верно при $n \leqslant N$, докажем его справедливость при $n = N + 1$.

Из (4.2) следует, что для некоторого $\Theta \in (-1, 1)$ верно равенство $W_{N+1}'(x) = W_N'(x + \Theta)$. Отсюда получаем справедливость первых двух утверждений леммы.

Далее, из (4.2) получаем $W_{N+1}''(x) = 1/2\left(W_N'(x+1) - W_N'(x-1)\right)$. Так как $W_N'(x)$ строго убывает на $[-N, N]$, то $W_N'(x+1)$ строго убывает на $[-N-1, N-1]$, $W_N'(x-1)$ строго убывает на $[-N+1, N+1]$, а значит $W_{N+1}''(x)$ отрицательна при $x \in [-N-1, N+1]$. Отсюда получаем третье утверждение леммы. □

Утверждение 4.2. *При любом* $n \geqslant 1$ *функция* $V_n(\cdot)$ *является гладкой на* $[0, 1]$.

Доказательство. Из свойств субдифференциалов сопряженных функций следует, что

$$x_1^* \neq x_2^* \in \partial V_n(P) \iff P = W_n'(x_1^*) = W_n'(x_2^*).$$

Однако по лемме 4.1 функция $W_n'(\cdot)$ строго убывает от 1 до 0. Следовательно $\partial V_n(\cdot)$ содержит только одно значение в каждой точке отрезка $[0, 1]$, что эквивалентно дифференцируемости $V_n(\cdot)$. Из того, что $V_n(\cdot)$ к тому же непрерывна, ограниченна и вогнута, получаем ее гладкость на $[0, 1]$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. De Meyer B., Saley H. *On the strategic origin of Brownian motion in finance* // Int J Game Theory. 2002. V. 31. P. 285–319
2. Aumann R.J., Maschler M.B. *Repeated Games with Incomplete Information.* The MIT Press, Cambridge, London
3. Domansky V. *Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets* // Int J Game Theory. 2007. V. 36(2). P. 241–257
4. Крепс В.Л. Повторяющиеся игры, моделирующие биржевые торги, и возвратные последовательности // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 4. С. 109–120.
5. Сандомирская М.С., Доманский В.К. Решение одношаговой игры биржевых торгов с неполной информацией // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. 4. №1. С. 32-54.
6. Chatterjee K., Samuelson W. *Bargaining under Incomplete Information* // Operations Research. 1983. V. 31. N. 5. P. 835–851
7. Пьяных А.И. Об одной модификации модели биржевых торгов с инсайдером // Математическая теория игр и её приложения. 2014. 6. № 4. С. 68–84.
8. Пьяных А.И. *Многошаговая модель биржевых торгов с асимметричной информацией и элементами переговоров* // TODO
9. Эльсгольц Л.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.* М.: Наука, 1965.
10. Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ.* М.: Мир, 1973.

ON THE MODIFICATION OF THE MULTISTAGE BIDDING MODEL WITH CONTINUOUS BIDS AND ASYMMETRIC INFORMATION

Artem Pyanykh, Moscow State University, postgraduate student (artem.pyanykh@gmail.com).

Abstract: This paper is concerned with the modification of the multistage bidding model with continuous bids. Bidding takes place between two players for one unit of a risky asset. Player 1 knows the real price of the asset while Player 2 only knows probabilities of high and low prices of the asset. At each stage of the bidding players make real valued bids. The higher bid wins, and one unit of the risky asset is transacted to the winning player. The price of the transaction is equal to a convex combination of bids with a coefficient chosen in advance. Optimal strategies and the value of the n-stage game are found.

Keywords: multistage bidding, asymmetric information, repeated games with incomplete information.