Об одной модификации модели биржевых торгов с инсайдером

Пьяных А.И.
artem.pyanykh@gmail.com

Московский Государственный Университет
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Тихоновские чтения. 2014

План

Краткое описание

- Торги происходят между двумя игроками за однотипные акции.
- Цена акции может быть либо 0, либо m.
- Игрок 1 (инсайдер) знает настоящую цену акции. Игрок 2 знает вероятности высокой и низкой цены.
- На каждом шаге торгов игроки делают ставки. Наибольшая ставка побеждает, и один игрок покупает у второго акцию.
- Цена сделки равна наибольшей предложенной ставке.

Обзор существующих результатов

- [1, De Meyer, Saley, 2002]. Ставки принимают вещественные значения. Получено решение n-шаговой игры.
- [2, Domansky, 2007]. Ставки принимают дискретные значения. Получено решение игры неограниченной продолжительности.
- [3, Крепс, 2009]. Ставки принимают дискретные значения. Получено решение n-шаговой игры при $m \leqslant 3$.
- [4, Сандомирская, 2012]. Ставки принимают дискретные значения. Получено решение одношаговой игры.

Постановка задачи

- В упомянутых работах цена сделки равна наибольшей предложенной ставке. Можно задать по-другому.
- В работе [5, Chatterjee, Samuelson, 1983] рассмотрена модель двустороннего аукциона с ценой сделки равной

$$p = \beta b + (1 - \beta)s, \; 0 \leqslant \beta \leqslant 1,$$

  где b и s – цены, назначенные покупателем и продавцом, соответственно.
- В работе [6, Myerson, Satterthwaite, 1983] показано, что модель с $\beta = 1/2$ – оптимальна.
- В данной работе мы рассматриваем модель торгов с ценой сделки равной полусумме предложенных ставок.

Повторяющаяся игра

Формально модель сводится к n-шаговой повторяющейся игре с неполной информацией. Назовем ее $G_n^m(p)$.
Множество состояний рынка $S = \{H, L\}$. Конкретное состояние $s \in S$ выбирается ходом случая на первом шаге.
Платежные матрицы задаются следующим образом:

$$A^L(i,j) = 2 \cdot \begin{cases} (i+j)/2, \ i < j, \\ 0, \ i = j, \\ -(i+j)/2, \ i > j, \end{cases} \qquad A^H(i,j) = 2 \cdot \begin{cases} (i+j)/2 - m, \ i < j, \\ 0, \ i = j, \\ m - (i+j)/2, \ i > j. \end{cases}$$

На t-ом шаге первый игрок выбирает $i_t \in I = \{0, 1, \ldots, m\}$, второй — $j_t \in J = \{0, 1, \ldots, m\}$.
Выигрыш первого игрока в игре равен $\sum_{t=1}^n a^s_{i_t j_t}$.

Определение стратегии

Стратегии игроков задаются следующим образом:

- для инсайдера $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t, \ldots)$, где $\sigma_t : S \times I^{t-1} \to \Delta(I)$, $\Delta(I)$ — множество вероятностных распределений на I. Множество всех стратегии обозначим Σ^1.
- для неосведомленного игрока $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_t, \ldots)$, где $\tau_t : I^{t-1} \to \Delta(J)$, $\Delta(J)$ — множество вероятностных распределений на J. Множество всех стратеги обозначим $\mathbb{T}$.

Тогда выигрыш первого игрока равен

$$K_n^m(p, \sigma, \tau) = \sum_{t=1}^{n} (pA^H(\sigma_t^H, \tau_t) + (1-p)A^L(\sigma_t^L, \tau_t)),$$

где $A^s(\sigma_t^s, \tau_t) = \mathbb{E}_{\sigma_t^s, \tau_t} A^s(i_t, j_t)$.

[1] рассматриваем только стратегии, дающие неотрицательный выигрыш на каждом шаге

Стратегия неосведомленного игрока

Определим чистую стратегию τ^k, $k \in J$[2]:

$$\tau_1^k = k,$$

$$\tau_t^k(i_{t-1}, j_{t-1}) = \begin{cases} j_{t-1} - 1, & i_{t-1} < j_{t-1}, \\ j_{t-1}, & i_{t-1} = j_{t-1}, \\ j_{t_1} + 1, & i_{t-1} > j_{t+1} \end{cases}$$

Определим τ^* следующим образом: при $p \in \left(\frac{k-1/2}{m}, \frac{k+1/2}{m}\right]$ применять τ^k.
Справедливо следующее неравенство:

$$max_{\sigma\in\Sigma} K_\infty^m(p, \sigma, \tau^*) \leqslant min_{j\in J}(p(m-j)^2 + (1-p)j^2) = H^m(p).$$

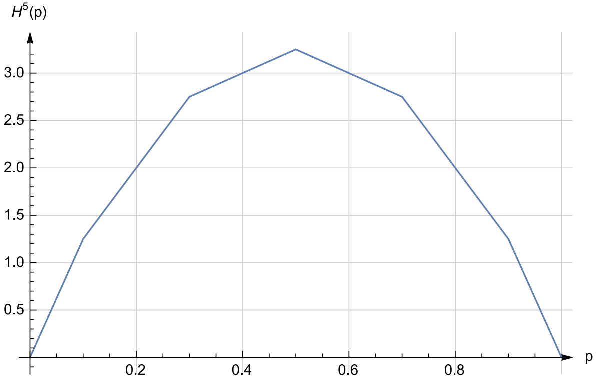
[2] определяется аналогично [2, Domansky, 2007]

Стратегия неосведомленного игрока

$H^m(p)$ — кусочно-линейная функция, определяется значениями в точках:

$$H^m\left((k+1/2)/m\right) = m/2 + mk - k^2 - k,\ k = \overline{0, m-1} \qquad (1)$$

$$H^m(0) = H^m(1) = 0. \qquad (2)$$



Стратегия инсайдера

Спасибо за внимание!

[De Meyer, 2002] De Meyer B., Saley H.
On the strategic origin of Brownian motion in finance.
Int J Game Theory, 2002.

[Domansky, 2007] Domansky V.
Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets.
Int J Game Theory, 2007.

[Крепс, 2009] Крепс В.Л.
Повторяющиеся игры, моделирующие биржевые торги, и возвратные последовательности.
Изв. РАН. Теория и системы управления, 2009.

[Сандомирская, 2012] Сандомирская М.С., Доманский В.К.
Решение одношаговой игры биржевых торгов с неполной информацией.
Математическая теория игр и её приложения, 2012.

[Chatterjee, 1983] Chatterjee K., Samuelson W.
Bargaining under Incomplete Information
Operations Research, 1983.

[Myerson, 1983] Myerson R., Satterthwaite M.
Efficient Mechanisms for Bilateral Trading
Journal of Economic Theory, 1983.