

Об одной модификации модели биржевых торгов с инсайдером

Пьяных А.И.
artem.pyanykh@gmail.com

Московский Государственный Университет
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Тихоновские чтения. 2014

План

Введение

Обзор существующих результатов

Постановка задачи

Модель

Оптимальная стратегия неосведомленного игрока

Оптимальная стратегия инсайдера

Решение игры

Выводы

Краткое описание

- ▶ Торги происходят между двумя игроками за однотипные акции.
- ▶ Цена акции может быть либо 0, либо m .
- ▶ Игрок 1 (инсайдер) знает настоящую цену акции. Игрок 2 знает вероятности высокой и низкой цены (p и $(1 - p)$).
- ▶ На каждом шаге торгов игроки делают ставки. Наибольшая ставка побеждает, и один игрок покупает у другого акцию.
- ▶ Цена сделки равна наибольшей предложенной ставке.

Обзор существующих результатов

- ▶ [1, De Meyer, Saley, 2002]. Ставки принимают вещественные значения. Получено решение n -шаговой игры.
- ▶ [2, Domansky, 2007]. Ставки принимают дискретные значения. Получено решение игры неограниченной продолжительности.
- ▶ [3, Крепс, 2009]. Ставки принимают дискретные значения. Получено решение n -шаговой игры при $m \leq 3$.
- ▶ [4, Сандомирская, 2012]. Ставки принимают дискретные значения. Получено решение одношаговой игры.

Постановка задачи

- ▶ В упомянутых работах цена сделки равна наибольшей предложенной ставке. Можно задать по-другому.
- ▶ В работе [5, Chatterjee, Samuelson, 1983] рассмотрена модель двустороннего аукциона с ценой сделки равной

$$p = \beta b + (1 - \beta)s, \quad 0 \leq \beta \leq 1,$$

где b и s – цены, назначенные покупателем и продавцом, соответственно.

- ▶ В работе [6, Myerson, Satterthwaite, 1983] показано, что модель с $\beta = 1/2$ – оптимальна.
- ▶ В данной работе рассматривается модель торгов с ценой сделки равной полусумме предложенных ставок.

Повторяющаяся игра

Формально модель сводится к n -шаговой повторяющейся игре с неполной информацией. Назовем ее $G_n^m(p)$.

Множество состояний рынка $S = \{H, L\}$. Конкретное состояние $s \in S$ выбирается ходом случая на первом шаге.

Платежные матрицы задаются следующим образом:

$$A^L(i, j) = 2 \cdot \begin{cases} (i + j)/2, & i < j, \\ 0, & i = j, \\ -(i + j)/2, & i > j, \end{cases} \quad A^H(i, j) = 2 \cdot \begin{cases} (i + j)/2 - m, & i < j, \\ 0, & i = j, \\ m - (i + j)/2, & i > j. \end{cases}$$

На t -ом шаге первый игрок выбирает $i_t \in I = \{0, 1, \dots, m\}$, второй — $j_t \in J = \{0, 1, \dots, m\}$.

Выигрыш первого игрока в игре равен $\sum_{t=1}^n a_{i_t j_t}^s$.

Определение стратегии

Стратегии игроков задаются следующим образом:

- ▶ для инсайдера $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t, \dots)$, где $\sigma_t : S \times I^{t-1} \rightarrow \Delta(I)$, $\Delta(I)$ — множество вероятностных распределений на I . Множество всех стратегий обозначим Σ^1 .
- ▶ для неосведомленного игрока $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_t, \dots)$, где $\tau_t : I^{t-1} \rightarrow \Delta(J)$, $\Delta(J)$ — множество вероятностных распределений на J . Множество всех стратегий обозначим \mathbb{T} .

Тогда выигрыш первого игрока равен

$$K_n^m(p, \sigma, \tau) = \sum_{t=1}^n (pA^H(\sigma_t^H, \tau_t) + (1-p)A^L(\sigma_t^L, \tau_t)),$$

где $A^s(\sigma_t^s, \tau_t) = \mathbb{E}_{\sigma_t^s, \tau_t} A^s(i_t, j_t)$.

¹рассматриваем только стратегии, дающие неотрицательный выигрыш на каждом шаге

Стратегия неосведомленного игрока

Определим чистую стратегию τ^k , $k \in J^2$:

$$\tau_1^k = k,$$
$$\tau_t^k(i_{t-1}, j_{t-1}) = \begin{cases} j_{t-1} - 1, & i_{t-1} < j_{t-1}, \\ j_{t-1}, & i_{t-1} = j_{t-1}, \\ j_{t-1} + 1, & i_{t-1} > j_{t-1} \end{cases}$$

Определим τ^* следующим образом: при $p \in \left(\frac{k-1/2}{m}, \frac{k+1/2}{m}\right]$ применять τ^k .

Справедливо следующее неравенство:

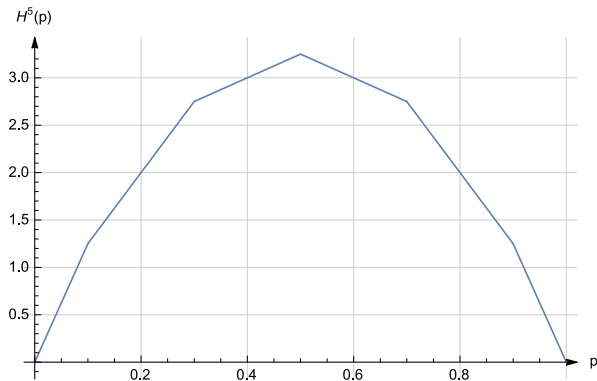
$$\max_{\sigma \in \Sigma} K_{\infty}^m(p, \sigma, \tau^*) \leq \min_{j \in J} (p(m-j)^2 + (1-p)j^2) = H^m(p).$$

Стратегия неосведомленного игрока

$H^m(p)$ — кусочно-линейная функция; определяется значениями в точках:

$$H^m((k + 1/2)/m) = m/2 + mk - k^2 - k, \quad k = \overline{0, m-1}$$

$$H^m(0) = H^m(1) = 0.$$



Стратегия инсайдера

Разобъем отрезок $[0, 1]$ точками из

$$P = \left\{ p_i^{+0} = \frac{i}{m}, p_j^{+1/2} = \frac{j + 1/2}{m} : i \in \overline{0, m}, j \in \overline{0, m-1} \right\}.$$

При $p \in \{k/m, (k + 1/2)/m\}$ инсайдер использует ставки k и $k + 1$, причем:

- ▶ полные вероятности использования ставок k и $k + 1$ равны $1/2$;
- ▶ апостериорные вероятности равны $p(H|k) = p - 1/(2m)$ и $p(H|k + 1) = p + 1/(2m)$.

Стратегия инсайдера

Получим рекуррентную формулу для нижней оценки выигрыша инсайдера

$$L_{\infty}^m \left(\frac{k+1/2}{m} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(L_{\infty}^m \left(\frac{k}{m} \right) + L_{\infty}^m \left(\frac{k+1}{m} \right) \right), \quad k = \overline{0, m-1}$$

$$L_{\infty}^m \left(\frac{k}{m} \right) = \frac{1}{2} \left(L_{\infty}^m \left(\frac{k-1/2}{m} \right) + L_{\infty}^m \left(\frac{k+1/2}{m} \right) \right), \quad k = \overline{1, m-1}$$

Решение этой системы:

$$L_{\infty}^m \left(\frac{k+1/2}{m} \right) = m/2 + mk - k^2 - k, \quad k = \overline{0, m-1},$$

$$L_{\infty}^m \left(\frac{k}{m} \right) = mk - k^2, \quad k = \overline{0, m}.$$

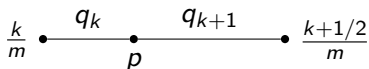
В точках $p = (k+1/2)/m$ совпадает с $H^m(p)$.

Стратегия инсайдера


Нужно доопределить стратегию инсайдера в точках $p \in [0, 1] \setminus P$.

Пусть $p \in (k/m, (k + 1/2)/m)^2$. Тогда инсайдер использует ставки k и $k + 1$, причем полные вероятности ставок и апостериорные вероятности равны:

$$q_k = 2(k - mp) + 1, \quad q_{k+1} = 1 - q_k, \\ p(H|k) = k/m, \quad p(H|k+1) = (k + 1/2)/m.$$



Такое действие гарантирует инсайдеру выигрыш $L_\infty^m(p)$, линейно зависящий от p на рассматриваемом интервале.

²Для $p \in ((k + 1/2)/m, (k + 1)/m)$ — аналогично 

Решение игры

Т.к. $H^m(p)$ и $L_\infty^m(p)$ совпадают, то значение игры $G_\infty^m(p)$ существует, равно $H^m(p)$, а определенные ранее стратегии игроков являются оптимальными.

Обобщение на случай произвольного β

- ▶ В общем случае определим $G_n^m(\beta, p)$, $n \leq \infty$ с платежными матрицами

$$A^L(i, j) = \begin{cases} \alpha i + \beta j, & i < j, \\ 0, & i = j, \\ -\beta i - \alpha j, & i > j, \end{cases} \quad A^H(i, j) = \begin{cases} \alpha i + \beta j - m, & i < j, \\ 0, & i = j, \\ m - \beta i - \alpha j, & i > j, \end{cases}$$

где $\beta \leq 0, \alpha = 1 - \beta$.

- ▶ Через $V_n^m(\beta, p)$ обозначим значение игры (если существует).

Обобщение на случай произвольного β

Стратегия τ^* неосведомленного игрока довольно просто обобщается на случай произвольного β . При этом справедливо неравенство

$$\max_{\sigma \in \Sigma} K_{\infty}^m(\beta, p, \sigma, \tau^*) \leq \min_{j \in J} \frac{1}{2} (p(m-j)(m-j+1-2\beta) + (1-p)j(j+1-2\alpha)).$$

К сожалению, так же просто обобщить стратегию инсайдера не удастся.

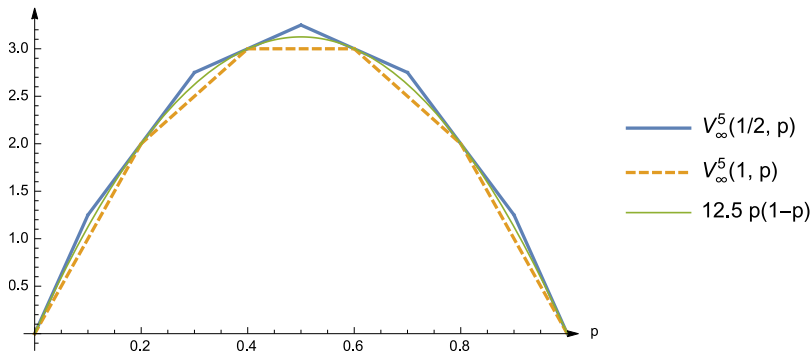
Сравнение с результатами [2, Domansky, 2007]

Модели, рассмотренной в [2, Domansky, 2007], соответствует значение $\beta = 1$. В данной работе $\beta = 1/2$.

Справедливо утверждение, что при любом значении $m \geq 3$ и $p \in [0, 1]$

$$V_{\infty}^m(1/2, p) \geq V_{\infty}^m(1, p),$$

причем равенство достигается только при $p = k/m$, $k = \overline{0, m}$.



Спасибо за внимание!



[De Meyer, 2002] De Meyer B., Saley H.

On the strategic origin of Brownian motion in finance.

Int J Game Theory, 2002.



[Domansky, 2007] Domansky V.

Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets.

Int J Game Theory, 2007.



[Крепс, 2009] Крепс В.Л.

Повторяющиеся игры, моделирующие биржевые торги, и возвратные последовательности.

Изв. РАН. Теория и системы управления, 2009.



[Сандомирская, 2012] Сандомирская М.С., Доманский В.К.

Решение одношаговой игры биржевых торгов с неполной информацией.

Математическая теория игр и её приложения, 2012.



[Chatterjee, 1983] Chatterjee K., Samuelson W.

Bargaining under Incomplete Information

Operations Research, 1983.



[Myerson, 1983] Myerson R., Satterthwaite M.

Efficient Mechanisms for Bilateral Trading

Journal of Economic Theory, 1983.