Об одной модификации модели биржевых торгов с инсайдером

Пьяных А.И.
artem.pyanykh@gmail.com

Московский Государственный Университет
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Тихоновские чтения. 2014

План

Краткое описание

- Торги происходят между двумя игроками за однотипные акции.
- Цена акции может быть либо 0, либо m.
- Игрок 1 (инсайдер) знает настоящую цену акции. Игрок 2 знает вероятности высокой и низкой цены (p и $(1 - p)$).
- На каждом шаге торгов игроки делают ставки. Наибольшая ставка побеждает, и один игрок покупает у другого акцию.
- Цена сделки равна наибольшей предложенной ставке.

Обзор существующих результатов

- [1, De Meyer, Saley, 2002]. Ставки принимают вещественные значения. Получено решение n-шаговой игры.
- [2, Domansky, 2007]. Ставки принимают дискретные значения. Получено решение игры неограниченной продолжительности.
- [3, Крепс, 2009]. Ставки принимают дискретные значения. Получено решение n-шаговой игры при $m \leqslant 3$.
- [4, Сандомирская, 2012]. Ставки принимают дискретные значения. Получено решение одношаговой игры.

Постановка задачи

- В упомянутых работах цена сделки равна наибольшей предложенной ставке. Можно задать по-другому.
- В работе [5, Chatterjee, Samuelson, 1983] рассмотрена модель двустороннего аукциона с ценой сделки равной

  $$p = \beta b + (1 - \beta)s,\ 0 \leqslant \beta \leqslant 1,$$

  где b и s – цены, назначенные покупателем и продавцом, соответственно.
- В работе [6, Myerson, Satterthwaite, 1983] показано, что модель с $\beta = 1/2$ – оптимальна.
- В данной работе рассматрена модель торгов с ценой сделки равной полусумме предложенных ставок.

Повторяющаяся игра

Формально модель сводится к n-шаговой повторяющейся игре с неполной информацией. Назовем ее $G_n^m(p)$.

Множество состояний рынка $S = \{H, L\}$. Конкретное состояние $s \in S$ выбирается ходом случая на первом шаге.

Платежные матрицы задаются следующим образом:

$$A^L(i,j) = 2 \cdot \begin{cases} (i+j)/2, \ i < j, \\ 0, \ i = j, \\ -(i+j)/2, \ i > j, \end{cases} \qquad A^H(i,j) = 2 \cdot \begin{cases} (i+j)/2 - m, \ i < j, \\ 0, \ i = j, \\ m - (i+j)/2, \ i > j. \end{cases}$$

На t-ом шаге первый игрок выбирает $i_t \in I = \{0, 1, \ldots, m\}$, второй — $j_t \in J = \{0, 1, \ldots, m\}$.

Выигрыш первого игрока в игре равен $\sum_{t=1}^n a^s_{i_t j_t}$.

Определение стратегии

Стратегии игроков задаются следующим образом:

- для инсайдера $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t, \dots)$, где $\sigma_t : S \times I^{t-1} \to \Delta(I)$, $\Delta(I)$ — множество вероятностных распределений на I. Множество всех стратегии обозначим Σ[1].
- для неосведомленного игрока $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_t, \dots)$, где $\tau_t : I^{t-1} \to \Delta(J)$, $\Delta(J)$ — множество вероятностных распределений на J. Множество всех стратегий обозначим $\mathbb{T}$.

Тогда выигрыш первого игрока равен

$$K_n^m(p, \sigma, \tau) = \sum_{t=1}^{n} (pA^H(\sigma_t^H, \tau_t) + (1-p)A^L(\sigma_t^L, \tau_t)),$$

где $A^s(\sigma_t^s, \tau_t) = \mathbb{E}_{\sigma_t^s, \tau_t} A^s(i_t, j_t)$.

[1] рассматриваем только стратегии, дающие неотрицательный выигрыш на каждом шаге

Стратегия неосведомленного игрока

Определим чистую стратегию τ^k, $k \in J$[2]:

$$\tau_1^k = k,$$

$$\tau_t^k(i_{t-1}, j_{t-1}) = \begin{cases} j_{t-1} - 1, & i_{t-1} < j_{t-1}, \\ j_{t-1}, & i_{t-1} = j_{t-1}, \\ j_{t_1} + 1, & i_{t-1} > j_{t+1} \end{cases}$$

Определим τ^* следующим образом: при $p \in \left(\frac{k-1/2}{m}, \frac{k+1/2}{m}\right]$ применять τ^k.

Справедливо следующее неравенство:

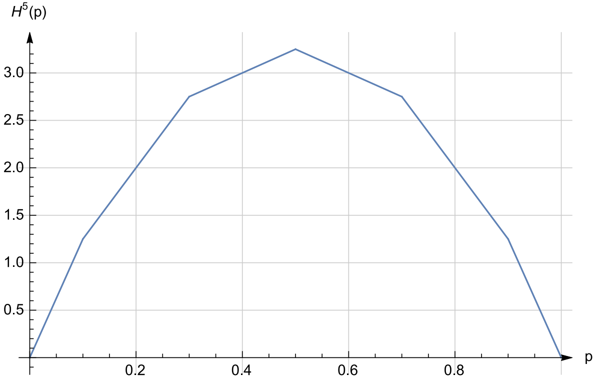
$$max_{\sigma\in\Sigma} K_\infty^m(p, \sigma, \tau^*) \leqslant min_{j\in J}(p(m-j)^2 + (1-p)j^2) = H^m(p).$$

[2] определяется аналогично [2, Domansky, 2007]

Стратегия неосведомленного игрока

$H^m(p)$ — кусочно-линейная функция; определяется значениями в точках:

$$H^m\left((k+1/2)/m\right) = m/2 + mk - k^2 - k, \; k = \overline{0, m-1}$$
$$H^m(0) = H^m(1) = 0.$$



Стратегия инсайдера

Разобъем отрезок $[0,1]$ точками из

$$P = \left\{ p_i^{+0} = \frac{i}{m},\ p_j^{+1/2} = \frac{j+1/2}{m} \,:\, i \in \overline{0,m},\ j \in \overline{0,m-1} \right\}.$$

При $p \in \{k/m, (k+1/2)/m\}$ инсайдер использует ставки k и $k+1$, причем:

- полные вероятности использования ставок k и $k+1$ равны $1/2$;
- апостериорные вероятности равны $p(H|k) = p - 1/(2m)$ и $p(H|k+1) = p + 1/(2m)$.

Стратегия инсайдера

Получим рекуррентную формулу для нижней оценки выигрыша инсайдера

$$L_\infty^m\left(\frac{k+1/2}{m}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(L_\infty^m\left(\frac{k}{m}\right) + L_\infty^m\left(\frac{k+1}{m}\right)\right), \; k = \overline{0, m-1}$$

$$L_\infty^m\left(\frac{k}{m}\right) = \frac{1}{2}\left(L_\infty\left(\frac{k-1/2}{m}\right) + L_\infty^m\left(\frac{k+1/2}{m}\right)\right), \; k = \overline{1, m-1}$$

Решение этой системы:

$$L_\infty^m\left(\frac{k+1/2}{m}\right) = m/2 + mk - k^2 - k, k = \overline{0, m-1},$$

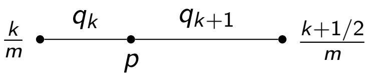
$$L_\infty^m\left(\frac{k}{m}\right) = mk - k^2, k = \overline{0, m}.$$

В точках $p = (k+1/2)/m$ совпадает с $H^m(p)$.

Стратегия инсайдера

Нужно доопределить стратегию инсайдера в точках $p \in [0,1] \setminus P$.
Пусть $p \in (k/m, (k+1/2)/m)$[2]. Тогда инсайдер использует ставки k и $k+1$, причем полные вероятности ставок и апостериорные вероятности равны:

$$q_k = 2(k - mp) + 1, \; q_{k+1} = 1 - q_k,$$
$$p(H|k) = k/m, \; p(H|k+1) = (k+1/2)/m.$$



Такое действие гарантирует инсайдеру выигрыш $L_\infty^m(p)$, линейно зависящий от p на рассматриваемом интервале.

[2] Для $p \in ((k+1/2)/m, (k+1)/m)$ — аналогично

Решение игры

Т.к. $H^m(p)$ и $L^m_\infty(p)$ совпадают, то значение игры $G^m_\infty(p)$ существует, равно $H^m(p)$, а определенные ранее стратегии игроков являются оптимальными.

Обобщение на случай произвольного β

- В общем случае определим $G_n^m(\beta, p)$, $n \leqslant \infty$ с платежными матрицами

$$A^L(i,j) = \begin{cases} \alpha i + \beta j, & i < j, \\ 0, & i = j, \\ -\beta i - \alpha j, & i > j, \end{cases} \quad A^H(i,j) = \begin{cases} \alpha i + \beta j - m, & i < j, \\ 0, & i = j, \\ m - \beta i - \alpha j, & i > j, \end{cases}$$

  где $\beta \leqslant 0, \alpha = 1 - \beta$.
- Через $V_n^m(\beta, p)$ обозначим значение игры (если существует).

Обобщение на случай произвольного β

Стратегия τ^* неосведомленного игрока довольно просто обобщается на случай произвольного β. При этом справедливо неравенство

$$\max_{\sigma\in\Sigma} K_\infty^m(\beta, p, \sigma, \tau^*) \leqslant \min_{j\in J} \frac{1}{2}(p(m-j)(m-j+1-2\beta)+(1-p)j(j+1-2\alpha)).$$

К сожалению, так же просто обобщить стратегию инсайдера не удается.

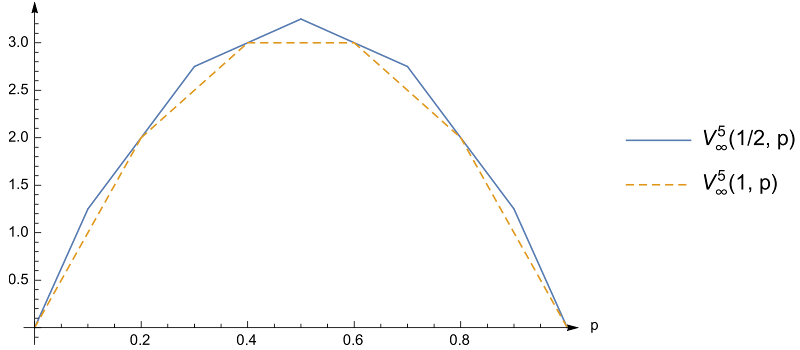
Сравнение с результатами [2, Domansky, 2007]

Модели, рассмотренной в [2, Domansky, 2007], соответствует значение $\beta = 1$. В данной работе $\beta = 1/2$.

Справедливо утверждение, что при любом значении $m \geqslant 3$ и $p \in [0, 1]$

$$V_{\infty}^{m}(1/2, p) \geqslant V_{\infty}^{m}(1, p),$$

причем равенство достигается только при $p = k/m$, $k = \overline{0, m}$.



Спасибо за внимание!

[De Meyer, 2002] De Meyer B., Saley H.
On the strategic origin of Brownian motion in finance.
Int J Game Theory, 2002.

[Domansky, 2007] Domansky V.
Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets.
Int J Game Theory, 2007.

[Крепс, 2009] Крепс В.Л.
Повторяющиеся игры, моделирующие биржевые торги, и возвратные последовательности.
Изв. РАН. Теория и системы управления, 2009.

[Сандомирская, 2012] Сандомирская М.С., Доманский В.К.
Решение одношаговой игры биржевых торгов с неполной информацией.
Математическая теория игр и её приложения, 2012.

[Chatterjee, 1983] Chatterjee K., Samuelson W.
Bargaining under Incomplete Information
Operations Research, 1983.

[Myerson, 1983] Myerson R., Satterthwaite M.
Efficient Mechanisms for Bilateral Trading
Journal of Economic Theory, 1983.