

## 1. Описание

Рассмотрим следующую игру. Есть две платежные матрицы:

$$A^L(i, j) = \frac{1}{m} \begin{cases} \frac{i+j}{2}, & i < j \\ 0, & i = j \\ -\frac{i+j}{2}, & i > j \end{cases}$$

$$A^H(i, j) = \frac{1}{m} \begin{cases} \frac{i+j}{2} - m, & i < j \\ 0, & i = j \\ m - \frac{i+j}{2}, & i > j, \end{cases}$$

На первом шаге случай выбирает  $S \in \{H, L\}$ , причем вероятности выбора  $H$  и  $L$  равны  $p(H) = p$  и  $p(L) = (1 - p)$  соответственно. Первый игрок осведомлен о выборе случая, второй игрок знает только вероятностное распределение на  $\{H, L\}$ . После этого на протяжении  $n \leq \infty$  шагов игроки играют в игру  $A^S$ .

Множество чистых стратегий первого и второго игроков  $i \in I = \{0, 1, \dots, m\}$ ,  $j \in J = \{0, 1, \dots, m\}$ . Выигрыш каждого из игроков равен суммарному выигрышу за  $n$  шагов.

Для упрощения вычислений умножим платежные матрицы на  $2m$ :

$$A^L(i, j) = \begin{cases} i + j, & i < j \\ 0, & i = j \\ -i - j, & i > j \end{cases} \quad (1.1)$$

$$A^H(i, j) = \begin{cases} i + j - 2m, & i < j \\ 0, & i = j \\ 2m - i - j, & i > j \end{cases} \quad (1.2)$$

В дальнейшем будем рассматривать повторяющуюся игру именно с матрицами (1.1) и (1.2), которую назовем  $G_n^m(p)$ . При применении первым игроком смешанной стратегий  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ , где  $\sigma_t = (\sigma_t^L, \sigma_t^H)$ , а вторым игроком смешанной стратегии  $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ , выигрыш равен

$$K_n^m(p, \sigma, \tau) = \sum_{t=1}^n (pA^H(\sigma_t^H, \tau_t) + (1 - p)A^L(\sigma_t^L, \tau_t)). \quad (1.3)$$

## 2. Оценка сверху

Рассмотрим следующую чистую стратегию второго игрока  $\tau^k$ :

$$\begin{aligned} \tau_1^k &= k \\ \tau_t^k(i_{t-1}, j_{t-1}) &= \begin{cases} j_{t-1} - 1, & i_{t-1} < j_{t-1} \\ j_{t-1}, & i_{t-1} = j_{t-1} \\ j_{t-1} + 1, & i_{t-1} > j_{t-1} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

**Утверждение 2.1.** При применении стратегии (2.1) в игре  $G_n^m(p)$  второй игрок может гарантировать себе проигрыш не более:

$$h_n^L(\tau^k) = \sum_{t=0}^{n-1} (2(k-t) - 1)^+, \quad (2.2)$$

$$h_n^H(\tau^k) = \sum_{t=0}^{n-1} (2(m-k-t) - 1)^+, \quad (2.3)$$

в состояниях  $L$  и  $H$  соответственно.

*Proof.* Проведем доказательство по индукции. Для  $h_n^L(\tau^k)$ :

$$h_1^L(\tau^k) = \max_{i \in I} a_{ik}^L = \max(0, 2k - 1).$$

База индукции проверена. Пусть  $\forall t \leq n$  выполнено (2.2). Докажем, что (2.2) выполняется при  $t = n + 1$ . Имеем  $h_{n+1}^L(\tau^k) = \max_{i \in I} (a_{ik}^L + h_n^L(\tau^{c(i)}))$ , где

$$c(i) = \begin{cases} k - 1, & i < k \\ k, & i = k \\ k + 1, & i > k. \end{cases}$$

Рассмотрим значение выигрыша в зависимости от действия  $i$  первого игрока. При  $i < k$  имеем:

$$\begin{aligned} h_{n+1}^L(\tau^k) &= 2k - 1 + h_n^L(\tau^{k-1}) = 2k - 1 + \sum_{t=0}^{n-1} (2(k-1-t) - 1)^+ \\ &\leq \sum_{t=0}^n (2(k-t) - 1)^+. \end{aligned}$$

При  $i = k$  получаем:

$$h_{n+1}^L(\tau^k) = h_n^L(\tau^k) \leq \sum_{t=0}^n (2(k-t) - 1)^+.$$

При  $i > k$  имеем:

$$\begin{aligned} h_{n+1}^L(\tau^k) &= -2k - 1 + h_n^L(\tau^{k+1}) = -2k - 1 + \sum_{t=-1}^{n-2} (2(k-t) - 1)^+ \\ &\leq \sum_{t=0}^n (2(k-t) - 1)^+. \end{aligned}$$

Таким образом (2.2) доказано. Аналогично для (2.3) имеем:

$$h_1^H(\tau^k) = \max_{i \in I} a_{ik}^H = \max(0, 2(m-k) - 1).$$

База индукции проверена. Пусть  $\forall t \leq n$  выполнено (2.3). Докажем, что (2.3) выполняется при  $t = n + 1$ .

$$h_{n+1}^H(\tau^k) = \max_{i \in I} (a_{ik}^H + h_n^H(\tau^{c(i)})).$$

При  $i > k$  имеем:

$$\begin{aligned} h_{n+1}^H(\tau^k) &= 2m - 2k - 1 + h_n^H(\tau^{k-1}) = 2(m-k) - 1 + \sum_{t=0}^{n-1} (2(m-k-1-t) - 1)^+ \\ &\leq \sum_{t=0}^n (2(m-k-t) - 1)^+ \end{aligned}$$

При  $i = k$  получаем:

$$h_{n+1}^H(\tau^k) = h_n^H(\tau^k) \leq \sum_{t=0}^n (2(m-k-t) - 1)^+.$$

При  $i < k$  имеем:

$$\begin{aligned} h_{n+1}^H(\tau^k) &= 2k - 1 - 2m + h_n^H(\tau^{k+1}) = 2k - 1 - 2m + \sum_{t=-1}^{n-2} (2(m-k-t) - 1)^+ \\ &\leq \sum_{t=0}^n (2(m-k-t) - 1)^+. \end{aligned}$$

Таким образом утверждение полностью доказано.  $\square$

Можно заметить, что при  $t > m$  значения (2.2) и (2.3) стабилизируются. Таким образом, справедливо следующее

**Утверждение 2.2.** *Для значения бесконечной игры справедливо следующее неравенство:*

$$V_{\infty}^m(p) \leq H^m(p) = \min_{j \in J} (p(m-j)^2 + (1-p)j^2). \quad (2.4)$$

*Proof.* При каждом  $j$ :

$$\begin{aligned} h_{m+1}^H(\tau^j) &= \sum_{t=0}^m (2(m-j-t) - 1)^+ = \\ &= (2 \cdot 0 - 1)^+ + (2 \cdot 1 - 1)^+ + \dots + (2(m-j) - 1)^+ = \\ &= (m-j)(m-j+1) - (m-j) = (m-j)^2 \\ h_{m+1}^L(\tau^j) &= \sum_{t=0}^m (2(j-t) - 1)^+ = \\ &= (2 \cdot 0 - 1)^+ + (2 \cdot 1 - 1)^+ + \dots + (2 \cdot j - 1)^+ = \\ &= j(j+1) - j = j^2 \end{aligned}$$

Отсюда и из (1.3) очевидным образом получаем (2.4). Утверждение доказано.  $\square$

**Лемма 2.1.** *Функция  $H^m(p)$  является кусочно-линейной функцией, состоящей из  $m+1$  линейных сегментов, и полностью определяется своими значениями в следующих точках:*

$$\begin{aligned} H^m(0) &= H^m(1) = 0, \\ H^m\left(\frac{k+1/2}{m}\right) &= \frac{m}{2} + mk - k^2 - k, \quad k = \overline{0, m-1} \end{aligned}$$

*Proof.* Квадратичная функция  $\omega(x) = p(m-x)^2 + (1-p)x^2$  достигает минимума при  $x = pm$ . Отсюда при  $p \in \left(\frac{k-1/2}{m}, \frac{k+1/2}{m}\right]$  минимум  $p(m-j)^2 + (1-p)j^2$  по целым  $j$  достигается при  $j = k$ .

Отсюда видно, что  $H^m(p)$  является кусочно-линейной функцией, которая полностью определяется своими значениями в точках  $p = \frac{k+1/2}{m}$ ,  $k = \overline{0, m-1}$ . Значение  $H^m(p)$  при  $p = \frac{k+1/2}{m}$  легко находится подстановкой  $j = k$ .  $\square$

### 3. Оценка снизу

Пусть на первом шаге первый игрок применяет  $\sigma_1^k = (\sigma_1^H, \sigma_1^L)$ , где  $\sigma_1^H = (\sigma_{1,k}^H, \sigma_{1,k+1}^H)$  и  $\sigma_1^L = (\sigma_{1,k}^L, \sigma_{1,k+1}^L)$ , где  $\sigma_{1,i}^S$  – вероятность сделать ставку равную  $i$  в состоянии  $S \in \{H, L\}$ . Т.е. при применении  $\sigma_1^k$  первый игрок делает ставки  $k$  и  $k+1$  с некоторыми заданными вероятностями.

Также  $\sigma_1^k$  можно определить, если задать полные вероятности действий  $k$  и  $k+1$  равные  $q_k$  и  $q_{k+1}$ , а также апостериорные вероятности  $p(S|i)$  состояния  $S$ , если на первом шаге игрок сделал ставку  $i$ . При этом вероятности  $\sigma_{1,i}^S$  легко рассчитываются по формуле Байеса

$$\sigma_{1,i}^S = \frac{p(S|i)q_i}{p(S)}.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться именно таким параметрическим заданием  $\sigma_1^k$ .

**Утверждение 3.1.** *При использовании  $\sigma_1^k$  первый игрок гарантирует себе на первом шаге выигрыш:*

$$K_1(p, \sigma_1^k, j) = \begin{cases} 2mp - j - k - q_{k+1}, & j < k, \\ 2mp(H|k+1)q_{k+1} - (2k+1)q_{k+1}, & j = k, \\ (2k+1)q_k - 2mp(H|k)q_k, & j = k+1, \\ j + k - 2mp + q_{k+1}, & j > k+1. \end{cases} \quad (3.1)$$

*Proof.* По определению

$$K_1(p, \sigma_1^k, j) = pA^H(\sigma_1^H, j) + (1-p)A^L(\sigma_1^L, j). \quad (3.2)$$

Распишем выигрыш на первом шаге в зависимости от значения  $j$  действия второго игрока. При  $j < k$  имеем:

$$\begin{aligned} A^H(\sigma_1^H, j) &= \sigma_{1,k}^H(2m - j - k) + \sigma_{1,k+1}^H(2m - j - k - 1) = (2m - j - k) - \sigma_{1,k+1}^H, \\ A^L(\sigma_1^L, j) &= \sigma_{1,k}^L(-j - k) + \sigma_{1,k+1}^L(-j - k - 1) = -j - k - \sigma_{1,k+1}^L, \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} K_1(p, \sigma_1^k, j) &= p(2m - j - k) - p\sigma_{1,k+1}^H + (1-p)(-j - k) - (1-p)\sigma_{1,k+1}^L = \\ &= 2mp - j - k - (p\sigma_{1,k+1}^H + (1-p)\sigma_{1,k+1}^L) = 2mp - j - k - q_{k+1}. \end{aligned}$$

Аналогично при  $j = k$  имеем:

$$A^H(\sigma_1^H, k) = \sigma_{1,k+1}^H(2m - 2k - 1), \quad A^L(\sigma_1^L, k) = \sigma_{1,k+1}^L(-2k - 1),$$

$$K_1(p, \sigma_1^k, k) = 2mp\sigma_{1,k+1}^H - (2k + 1)q_{k+1} = 2mp(H|k + 1)q_{k+1} - (2k + 1)q_{k+1}$$

Значения  $K_1(p, \sigma_1^k, j)$  при  $j \geq k + 1$  получаются из соображений симметрии.  $\square$

Введем на  $[0, 1]$  разбиение  $P_k$  с точками

$$p_k^{+0} = \frac{k}{m}, \quad k = \overline{0, m} \quad \text{и} \quad p_k^{+1/2} = \frac{k}{m} + \frac{1}{2m}, \quad k = \overline{0, m-1}.$$

Определим через  $\phi_k^{+0}$  такое действие первого игрока, что  $\phi_k^{+0} = \sigma_1^k$  с параметрами

$$p(H|k) = \frac{k}{m} - \frac{1}{2m} = p_{k-1}^{+1/2}, \quad p(H|k+1) = \frac{k}{m} + \frac{1}{2m} = p_k^{+1/2},$$

$$q_k = q_{k+1} = \frac{1}{2}$$

Пусть также  $\phi_0^{+0} = 0$ ,  $\phi_m^{+0} = m$  (т.е. если неопределенности нет, первый игрок использует минимаксную стратегию). Аналогично, через  $\phi_k^{+1/2}$  определим такое действие первого игрока, что  $\phi_k^{+1/2} = \sigma_1^k$  с параметрами

$$p(H|k) = \frac{k}{m} = p_k^{+0}, \quad p(H|k+1) = \frac{k+1}{m} = p_{k+1}^{+0},$$

$$q_k = q_{k+1} = \frac{1}{2}$$

**Утверждение 3.2.** При  $p = p_k^{+0} \left[ p = p_k^{+1/2} \right]$  первый игрок может гарантировать себе выигрыш на первом шаге не менее  $0 \left[ \text{не менее } \frac{1}{2} \right]$ .

*Proof.* Действительно, пусть при  $p = p_k^{+0}$  первый игрок применяет  $\phi_k^{+0}$ , а при  $p = p_k^{+1/2}$  применяет  $\phi_k^{+1/2}$ . Тогда подстановкой параметров  $\phi_k^{+0}$  и  $\phi_k^{+1/2}$  в (3.1) немедленно получаем справедливость данного утверждения.  $\square$

Заметим, что если  $p \in P_k$ , то при применении  $\phi_k^{+0}$  и  $\phi_k^{+1/2}$  апостериорные вероятности также принадлежат  $P_k$ . Таким образом, определив действие первого игрока на первом шаге для произвольного значения вероятности

$p$ , мы тем самым определим стратегию первого игрока в игре  $G_n^m(p)$  произвольной продолжительности.

В силу рекурсивной структуры игры  $G_n^m(p)$  можно выписать рекуррентную формулу для нижней оценки значения игры  $L_n^m(p)$  при  $p \in P_k$ :

$$\begin{aligned} L_n^m\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{m}\right) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(L_{n-1}^m\left(\frac{k}{m}\right) + L_{n-1}^m\left(\frac{k+1}{m}\right)\right) \\ L_n^m\left(\frac{k+1}{m}\right) &= \frac{1}{2}\left(L_{n-1}^m\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{m}\right) + L_{n-1}^m\left(\frac{k+\frac{3}{2}}{m}\right)\right) \\ L_n^m(0) &= L_n^m(1) = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Устремив  $n$  в бесконечность получим рекуррентную формулу для нижней оценки значения игры  $G_{\infty}^m(p)$ . Перепишем эту рекуррентную формулу в следующем виде:

$$\begin{aligned} L_0 &= 0, \quad L_{2m} = 0, \\ L_{2k+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(L_{2k} + L_{2k+2}), \quad k = \overline{0, m-1} \\ L_{2k+2} &= \frac{1}{2}(L_{2k+1} + L_{2k+3}), \quad k = \overline{0, m-1}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Введем следующее обозначение:

$$A = \left( \begin{array}{ccccccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) b = \left( \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{array} \right) \Bigg\} (2m-1). \quad (3.5)$$

Тогда (3.4) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} AL &= b, \\ L_0 &= L_{2m} = 0, \end{aligned}$$

где  $L = (L_1, L_2, \dots, L_{2m-1})^T$ .

Известно, что системы  $Mx = F$  с трехдиагональной матрицей  $M$ ,

имеющей следующую структуру:

$$M = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & c_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & c_n \end{pmatrix}$$

можно решать методом прогонки, используя следующие формулы для прогоночных коэффициентов и значений переменного (см. [1]):

$$\begin{aligned} x_i &= \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1}, & x_n &= \frac{F_n - a_n\beta_n}{c_n + a_n\alpha_n} \\ \alpha_{i+1} &= -\frac{b_i}{c_i + a_i\alpha_i}, & \alpha_2 &= -\frac{b_1}{c_1} \\ \beta_{i+1} &= \frac{F_i - a_i\beta_i}{c_i + a_i\alpha_i}, & \beta_2 &= \frac{F_1}{c_1} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Матрица  $A$  является трехдиагональной матрицей, в которой

$$a_i = b_i = -\frac{1}{2}, \quad c_i = 1. \quad (3.7)$$

В этом случае мы можем получить явные выражения для прогоночных коэффициентов и значения  $L$ .

**Утверждение 3.3.** *Прогоночные коэффициенты для матрицы  $A$  выражаются следующим образом:*

$$\alpha_i = \frac{i-1}{i} \quad (3.8)$$

$$\beta_{2i} = \frac{2i}{4}, \quad \beta_{2i+1} = \frac{i^2}{2i+1} \quad (3.9)$$

*Proof.* Справедливость утверждения элементарным образом устанавливается доказательством по индукции с учетом (3.7) и (3.6).  $\square$

Из утверждения 3.3 и соображений симметрии, мы можем найти значение  $L_{2m-1} = L_1$ . Действительно,

$$\begin{aligned} L_1 = L_{2m-1} &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{(m-1)^2}{2m-1}}{1 - \frac{1}{2} \frac{2m-1-1}{2m-1}} = \frac{2m-1 + (m-1)^2}{4m-2-2m+2} = \\ &= \frac{2m-1 + m^2 - 2m + 1}{2m} = \frac{m}{2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$



Так как

$$L_{2(m+1)} = \frac{1}{2}(L_{2m+1} + L_{2(m+1)+1}),$$

то нам достаточно найти явный вид только для нечетных  $L_i$ . Из (3.6) и утверждения 3.3 мы получаем, что

$$\begin{aligned} L_{2i+1} &= \alpha_{2(i+1)}(\alpha_{2(i+1)+1}L_{2(i+1)+1} + \beta_{2(i+1)+1}) + \beta_{2(i+1)} = \\ &= \alpha_{2(i+1)}\alpha_{2(i+1)+1}L_{2(i+1)+1} + \alpha_{2(i+1)}\beta_{2(i+1)+1} + \beta_{2(i+1)} = \\ &= \frac{2i+1}{2i+3}L_{2i+3} + \frac{2(i+1)^2}{2i+3}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

**Утверждение 3.4.** *Решение (3.4) дается следующими формулами:*

$$\begin{aligned} L_{2k+1} &= \frac{m}{2} + mk - k^2 - k, & k = \overline{0, m-1} \\ L_{2k} &= mk - k^2, & k = \overline{0, m}. \end{aligned}$$

*Proof.* Для простоты перепишем (3.10), (3.11) следующим образом:

$$f_{k+1} = \frac{2k+3}{2k+1}f_k - \frac{2(k+1)^2}{2k+1}, \quad f_0 = \frac{m}{2}. \quad (3.12)$$

Из [2] известно, что решение данного конечно-разностного уравнения представляется в следующем виде:

$$f(k) = f^*(k) + Cf^O(k),$$

где  $f^*(k)$  – частное решение неоднородного уравнения, а  $f^O(k)$  – решение однородного уравнения.

Легко проверить, что при

$$f^O(k) = 2k + 1, \quad f^*(k) = -k^2 - k, \quad C = \frac{m}{2},$$

мы получаем решение (3.12), а значит и  $L_{2k+1}$ .  $L_{2k}$  находится из соотношений (3.4). Утверждение доказано.  $\square$

Таким образом мы определили функцию  $L^m(p)$  при  $p \in P_k$ . Для того, чтобы определить эту функцию при  $p$  лежащих внутри интервалов разбиения  $P_k$  нам нужна стратегия, гарантирующая первому игроку выигрыш, лежащий на прямой, соединяющей крайние точки этих интервалов.

Для заданного  $p$  обозначим через  $\lambda_k^{+0}$  такое действие первого игрока, что  $\lambda_k^{+0} = \sigma_1^k$  с параметрами:

$$p(H|k) = \frac{k}{m} = p_k^{+0}, \quad p(H|k+1) = \frac{k}{m} + \frac{1}{2m} = p_k^{+1/2},$$

$$q_k = 2k + 1 - 2mp, \quad q_{k+1} = 2(pt - k).$$

Аналогичным образом, через  $\lambda_k^{+1/2}$  обозначим действие первого игрока такое, что  $\lambda_k^{+1/2} = \sigma_1^k$  с параметрами:

$$p(H|k) = \frac{k}{m} + \frac{1}{2m} = p_k^{+1/2}, \quad p(H|k+1) = \frac{k+1}{m} = p_{k+1}^{+0},$$

$$q_k = 2(k+1 - mp), \quad q_{k+1} = 2mp - 2k - 1.$$

**Утверждение 3.5.** Пусть  $p \in (p_k^{+0}, p_k^{+1/2}) \left[ p \in (p_k^{+1/2}, p_{k+1}^{+0}) \right]$ . Тогда первый игрок может гарантировать себе на первом шаге неотрицательный выигрыш.

Кроме того, если на последующих шагах первый игрок будет использовать стратегию из утверждения 3.2, то он может гарантировать себе выигрыш  $L^m(p)$ , лежащий на отрезке, соединяющем  $L^m(p_k^{+0})$  и  $L^m(p_k^{+1/2})$   $\left[ L^m(p_k^{+1/2}) \right.$  и  $L^m(p_{k+1}^{+0}) \left. \right]$ .

*Proof.* Проведем доказательство для случая  $p \in (p_k^{+0}, p_k^{+1/2})$ . Пусть первый игрок на первом шаге применяет  $\lambda_k^{+0}$ . Тогда непосредственной подстановкой параметров  $\lambda_k^{+0}$  в (3.1) получим, что  $\forall j \in J$  выполнено  $K_1(p, \lambda_k^{+0}, j) \geq 0$ .

Далее заметим, что после применения  $\lambda_k^{+0}$  апостериорные вероятности принадлежат разбиению  $P_k$ . Таким образом, если на последующих шагах первый игрок будет использовать стратегию из утверждения 3.2, то он гарантирует себе выигрыш  $L^m(p) = q_k L^m(p_k^{+0}) + q_{k+1} L^m(p_k^{+1/2})$ . Заметим, что

$$q_k = \frac{p^b - p}{p^b - p^a}, \quad q_{k+1} = \frac{p - p^a}{p^b - p^a}.$$

Отсюда видно, что  $L^m(p)$ ,  $L^m(p_k^{+0})$ ,  $L^m(p_k^{+1/2})$  лежат на одной прямой.

При  $p \in (p_k^{+1/2}, p_{k+1}^{+0})$  утверждение доказывается аналогично с заменой  $\lambda_k^{+0}$  на  $\lambda_k^{+1/2}$ .  $\square$

Из утверждений 3.4 и 3.5 непосредственно следует справедливость следующей

**Лемма 3.1.** *Функция  $L^m(p)$  является кусочно-линейной функцией, состоящей из  $m+1$  линейных сегментов, и полностью определяется своими значениями в следующих точках:*

$$L^m(0) = L^m(1) = 0, \\ L^m\left(\frac{k+1/2}{m}\right) = \frac{m}{2} + mk - k^2 - k, \quad k = \overline{0, m-1}$$

#### 4. Значение игры $G_\infty^m(p)$

**Теорема 4.1.** *Игра  $G_\infty^m(p)$  имеет значение*

$$V_\infty^m(p) = L^m(p) = H^m(p).$$

*Оптимальная стратегия первого игрока  $\sigma^*$  дается утверждениями 3.2 и 3.5.*

*Оптимальная стратегия второго игрока  $\tau^*$  описывается следующим образом: на каждом шаге игры при  $p \in (p_{k-1}^{+1/2}, p_{k+1}^{+1/2})$  второй игрок применяет  $\tau^k$ .*

*Proof.* Непосредственно из лемм 2.1 и 3.1 следует, что  $\forall \sigma \in \Sigma, \tau \in T$ , где  $\Sigma$  и  $T$  – множество стратегий первого и второго игроков соответственно, справедливо

$$K_\infty^m(p, \sigma, \tau^*) \leq K_\infty^m(p, \sigma^*, \tau^*) = H^m(p) \leq K_\infty^m(p, \sigma^*, \tau).$$

А это значит, что  $\sigma^*$  и  $\tau^*$  – оптимальные стратегии, и значение игры  $V_\infty^m(p) = H^m(p)$ .  $\square$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы*. М.: Наука, 1989.
2. Гельфонд А.О. *Исчисление конечных разностей*. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012.
3. Aumann R.J., Maschler M. B. *Repeated Games with Incomplete Information*. The MIT Press, Cambridge, London
4. Domansky V. *Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets* // Int J Game Theory. 2007. V. 36. P. 241–257.