УДК 519.832.2

А. И. Пьяных[1],

МОДЕЛЬ БИРЖЕВЫХ ТОРГОВ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ С ЭЛЕМЕНТАМИ ПЕРЕГОВОРОВ

Рассматривается модификация дискретной многошаговой модели биржевых торгов. Два игрока ведут между собой торги рисковыми ценными бумагами (акциями). Один из игроков (инсайдер) знает настоящую цену акции, второй знает только ее вероятностное распределение. На каждом шаге торгов игроки делают целочисленные ставки. Игрок, предложивший большую ставку, покупает у второго акцию, причем цена сделки определяется как выпуклая комбинация предложенных ставок с некоторым заданным коэффициентом. Получено решение игры бесконечной продолжительности при произвольных значениях параметров: найдены оптимальные стратегии игроков и значение игры.

Ключевые слова: многошаговые игры, асимметричная информация, повторяющиеся игры с неполной информацией.

1. Введение. Многошаговая модель биржевых торгов с непрерывными ставками впервые была рассмотрена Де Мейером и Салей в работе [3]. Модель была формализована как повторяющаяся игра с неполной информацией, для которой были найдены оптимальные стратегии игроков и значение игры. Позднее Доманским [4] была рассмотрена модификация модели, в которой ставки игроков могли принимать только целые значения. В данной постановке им было получено решение для игры неограниченной продолжительности. Отметим также работу В. Крепс [5] с явным решением для n-шаговых игр малой размерности и работу М. Сандомирской и В. Доманского [6] с решением одношаговой игры произвольной размерности.

В работе [2] Чаттерджи и Самуэльсон рассматривают модель двухстороннего аукциона с неполной информацией. Правило торгов следующее: покупатель и продавец одновременно называют цены b и s, соответственно. В случае, если $b \geqslant s$, товар продается по цене $p = \beta b + (1-\beta)s$, где параметр $\beta \in [0,1]$ несет смысл переговорной силы покупателя.

Подобный механизм формирования цены акции можно применить и в данном случае. Пусть наибольшая ставка задает направление транзакции, в то время как цена сделки равняется выпуклой комбинации предложенных ставок с некоторым заданным коэффициентом $\beta \in [0,1]$.

[1]Факультет ВМК МГУ, асп., E–mail: artem.pyanykh@gmail.com

В работе [4] фактически $\beta = 1$. Решение задачи при значении $\beta = 1/2$ получено в работе [7]. В данной работе мы рассматриваем обобщение модели на случай произвольного вещественного $\beta \in [0,1]$, и исследуем оптимальные стратегии игроков и их выигрыши в бесконечной игре.

2. Модель. Описание модели во многом повторяет описание модели в [7]. Мы приводим его здесь в развернутом виде для упрощения изложения. Два игрока с противоположными интересами имеют деньги и однотипные акции. Случайная цена акции может принимать либо значение m в состоянии H, либо 0 в состоянии L и определяется на весь период торгов на первом шаге ходом случая. Первый игрок осведомлен о результате случайного хода, второй игрок знает только вероятность того или иного состояния. Второй игрок знает, что первый является инсайдером. На каждом последующем шаге игроки одновременно предлагают свою цену за одну акцию. Игрок, назвавший большую цену покупает у другого игрока акцию, по цене равной выпуклой комбинации предложенных цен. В случае одинаковых ставок транзакции не происходит.

Данную модель торгов можно рассматривать как повторяющуюся игру с неполной информацией. Игра задается множеством состояний, каждому состоянию соответствует матричная игра, где матрицу можно рассматривать как матрицу выигрышей первого игрока.

Таким образом мы приходим к следующей формализации рассматриваемой модели. Множество состояний рынка $S = \{H, L\}$. На первом шаге случай выбирает $s \in S$ с вероятностями $p(H) = p$ и $p(L) = (1-p)$. После этого на протяжении $n \leqslant \infty$ шагов игроки играют в игру $A^{s,\beta}$. Платежные матрицы задаются следующим образом:

$$A^{L,\beta}(i,j) = \begin{cases} \alpha i + \beta j, & i < j, \\ 0, & i = j, \\ -\beta i - \alpha j, & i > j, \end{cases} \qquad A^{H,\beta}(i,j) = \begin{cases} \alpha i + \beta j - m, & i < j, \\ 0, & i = j, \\ m - \beta i - \alpha j, & i > j, \end{cases}$$

где $\alpha = 1 - \beta$, $\beta \in [0,1]$.

На t-ом шаге первый игрок выбирает ставку $i_t \in I = \{0, 1, \ldots, m\}$, а второй — ставку $j_t \in J = \{0, 1, \ldots, m\}$. Выигрыш первого игрока в повторяющейся игре равен $\sum_{t=1}^{n} a^{s,\beta}_{i_t j_t}$. Второму игроку этот выигрыш становится известным только после окончания игры. На промежуточных шагах он не имеет точной информации о величинах $a^{s,\beta}_{i_t j_t}$.

Таким образом, стратегией первого игрока является последовательность ходов $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t, \ldots)$, где $\sigma_t : S \times I^{t-1} \to \Delta(I)$, а $\Delta(I)$ — вероятностное распределение на множестве возможных ставок. Как и в [4], мы ограничимся рассмотрением только тех стратегий σ, которые гарантируют первому игроку на каждом шаге игры неотрицательный выигрыш. Множество всевозможных таких стратегий первого игрока обозначим через Σ.

Аналогично стратегией второго игрока назовем последовательность ходов $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_t, \ldots)$, где $\tau_t : I^{t-1} \to \Delta(J)$. Множество всевозможных стратегий второго игрока обозначим через T. Игру обозначим через $G_n^{m,\beta}(p)$.

При применении первым игроком смешанной стратегий $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, где $\sigma_t = (\sigma_t^L, \sigma_t^H)$, $\sigma_t^s = (\sigma_{t,0}^s, \ldots, \sigma_{t,m}^s) \in \Delta(I)$, а вторым игроком смешанной стратегии $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$, где $\tau_t = (\tau_{t,0}, \ldots, \tau_{t,m}) \in \Delta(J)$, выигрыш первого игрока равен

$$K_n^{m,\beta}(p, \sigma, \tau) = \sum_{t=1}^{n} \left(pA^{H,\beta}(\sigma_t^H, \tau_t) + (1-p)A^{L,\beta}(\sigma_t^L, \tau_t) \right), \tag{1}$$

где $A^{s,\beta}(\sigma_t^s, \tau_t) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sigma_{t,i}^s \tau_{t,j} A^{s,\beta}(i,j)$.

Через $V_n^{m,\beta}(p)$ обозначим значение игры $G_n^{m,\beta}(p)$.

Заметим, что $A^{L,\beta}(i,j) = A^{H,1-\beta}(m-i, m-j), A^{H,\beta}(i,j) = A^{L,1-\beta}(m-i, m-j)$. Определим симметричные стратегии игроков

$$\overline{\sigma_t} = (\overline{\sigma_t^H}, \overline{\sigma^L}),\ \overline{\sigma_t^s} = (\sigma_{t,m}^s, \ldots, \sigma_{t,0}^s) \in \Delta(I),$$
$$\overline{\tau_t} = (\tau_{t,m}, \ldots, \tau_{t,0}) \in \Delta(J),$$

и симметричную игру $\overline{G_n^{m,\beta}(p)} = G_n^{m,1-\beta}(1-p)$. Легко видеть, что выигрыши игроков в симметричных играх при использовании симметричных стратегий совпадают.

3. Оценка сверху выигрыша первого игрока. Большая часть построений, используемых для получения оценки сверху, аналогична приведенным в [7]. Изменения коснутся только некоторых обозначений и формулировок утверждений.

Рассмотрим чистую стратегию второго игрока τ^k, $k \in J$:

$$\tau_1^k = k, \quad \tau_t^k(i_{t-1}, j_{t-1}) = \begin{cases} j_{t-1} - 1, & i_{t-1} < j_{t-1}, \\ j_{t-1}, & i_{t-1} = j_{t-1}, \\ j_{t-1} + 1, & i_{t-1} > j_{t-1}. \end{cases}$$

По сути эта стратегия представляет собой стратегию подражания инсайдеру. Доказательство следующего утверждения проводится по индукции.

Утверждение 1. *При применении стратегии τ^k в игре $G_\infty^{m,\beta}(p)$ второй игрок гарантирует себе проигрыш не более*

$$h_n^L(\tau^k) = \sum_{t=0}^{n-1} (k - t - \alpha)^+, \quad h_n^H(\tau^k) = \sum_{t=0}^{n-1} (m - k - t - \beta)^+,$$

в состояниях L и H соответственно, где $x^+ = \max(x; 0)$.

Очевидно, значения $h_n^L(\tau^k)$ и $h_n^H(\tau^k)$ монотонны и ограничены сверху по n. Тогда можно ввести следующую функцию:

$$H_\infty^{m,\beta}(p) = \min_{j\in J} \lim_{n\to\infty} \left(ph_n^H(\tau^j) + (1-p)h_n^L(\tau^j)\right) =$$
$$= \min_{j\in J} \left(p(m-j)(m-j+\alpha-\beta) + (1-p)j(j+\beta-\alpha)\right)/2.$$

При $p \in ((k-\alpha)/m, (k+\beta)/m)]$ минимум функции достигается при $j = k$. Таким образом функция $H_\infty^{m,\beta}(p)$ является кусочно-линейной функцией, состоящей из $m+1$ линейных сегментов, и полностью определяется своими значениями в точках

$$H_\infty^{m,\beta}\left(\frac{k+\beta}{m}\right) = \left((m-(k+\beta))(k+\beta) + \alpha\beta\right)/2,\ k = \overline{0, m-1},$$
$$H_\infty^{m,\beta}(0) = H_\infty^{m,\beta}(1) = 0.$$

Пусть второй игрок при $p \in ((k-\alpha)/m, (k+\beta)/m)]$ применяет τ^k, $k \in \overline{0,m}$. Обозначим эту стратегию через τ^*. Тогда справедлива следующая

Лемма 1. *При использовании вторым игроком стратегии τ^* в игре $G_\infty^{m,\beta}(p)$, выигрыш первого игрока ограничен сверху функцией $H_\infty^{m,\beta}(p)$, т.е.*

$$\max_{\sigma\in\Sigma} K_\infty^{m,\beta}(p,\sigma,\tau^*) \leqslant H_\infty^{m,\beta}(p).$$

4. Оценка снизу выигрыша первого игрока. Перейдем к описанию стратегии первого игрока, гарантирующей ему выигрыш не менее $H_\infty^{m,\beta}(p)$ в игре $G_\infty^{m,\beta}(p)$. Пусть на определенном шаге игрок применяет $\sigma_1^k = \left(\sigma_1^H, \sigma_1^L\right)$, где $\sigma_1^H = \left(\sigma_{1,k}^H, \sigma_{1,k+1}^H\right)$, $\sigma_1^L = \left(\sigma_{1,k}^L, \sigma_{1,k+1}^L\right)$ и $\sigma_{1,i}^s$ – вероятность сделать ставку равную i в состоянии $s \in \{H, L\}$. Применяя σ_1^k, инсайдер делает ставки k и $k+1$ с некоторыми заданными вероятностями.

Определим следующие параметры: полные вероятности действий k и $k+1$ равные q_k и q_{k+1} соответственно, а также апостериорные вероятности $p(s|i)$ состояния s при условии, что на предыдущем шаге первый игрок сделал ставку i. Тогда вероятности $\sigma_{1,i}^s$ можно найти по формуле Байеса $\sigma_{1,i}^s = p(s|i)q_i/p(s)$, $i = k, k+1$.

Следующее утверждение характеризует σ_1^k с точки зрения гарантированного результата и является обобщением утверждения 4.1 из [7].

Утверждение 2. *При использовании σ_1^k первый игрок гарантирует себе на первом* *шаге выигрыш*

$$K_1^{m,\beta}\left(p,\sigma_1^k,j\right)=\begin{cases} mp-\beta k-\alpha j-\beta q_{k+1}, & j<k,\\ \left(mp(H|k+1)-k-\beta\right)q_{k+1}, & j=k,\\ \left(k+\beta-mp(H|k)\right)q_k, & j=k+1,\\ \alpha k+\beta j-mp+\alpha q_{k+1}, & j>k+1. \end{cases} \tag{2}$$

Данное равенство следует из (1) и определения σ_1^k.

Перейдем к построению оптимальной стратегии инсайдера. Она обобщает стратегию из [7], где $\beta=1/2$, на случай произвольного β. Рассмотрим на $[0,1]$ множество P точек вида

$$p_i^0=\frac{i}{m},\ i=\overline{0,m},\quad p_j^\beta=\frac{j+\beta}{m},\ j=\overline{0,m-1}.$$

Для $p=p_k^0$ определим ϕ_k^0 как действие σ_1^k с параметрами

$$p(H|k)=p_{k-1}^\beta,\quad p(H|k+1)=p_k^\beta,\quad q_k=\beta,\quad q_{k+1}=\alpha.$$

Пусть также $\phi_0^0=0$ и $\phi_m^0=m$ (т.е. если неопределенности нет, первый игрок использует максиминную стратегию в соответствующей матричной игре).

Аналогично для $p=p_k^\beta$ определим ϕ_k^β как действие σ_1^k с параметрами

$$p(H|k)=p_k^0,\quad p(H|k+1)=p_{k+1}^0,\quad q_k=\alpha,\quad q_{k+1}=\beta.$$

Утверждение 3. *При $p\in P$ для значения $K_1^{m,\beta}(p,\sigma,\tau)$ выигрыша первого игрока верны оценки*

$$\min_{\tau\in\mathrm{T}}K_1^{m,\beta}\left(p_k^0,\phi_k^0,\tau\right)\geqslant 0,\ \min_{\tau\in\mathrm{T}}K_1^{m,\beta}\left(p_k^\beta,\phi_k^\beta,\tau\right)\geqslant\alpha\beta.$$

Справедливость утверждения устанавливается подстановкой значений параметров ϕ_k^0 и ϕ_k^β в (2).

Заметим, что если $p\in P$, то при применении инсайдером на первом шаге игры ϕ_k^0 и ϕ_k^β, значения апостериорных вероятностей также принадлежат P. Таким образом, можно продолжить применение ϕ_k^0 и ϕ_k^β на последующих шагах игры, тем самым определив стратегию σ^* в игре $G_n^{m,\beta}(p)$, $p\in P$, $n\in\mathbb{N}$.

Пусть $L_n^{m,\beta}(p)$, $p\in P$ — гарантированный выигрыш первого игрока в игре $G_n^{m,\beta}(p)$ при применении стратегии σ^*. В силу рекурсивной структуры игры $G_n^{m,\beta}(p)$ (см. [4]) для $L_n^{m,\beta}(p)$ справедливы формулы

$$\begin{gathered} L_n^{m,\beta}((k+\beta)/m)=\alpha\beta+\alpha L_{n-1}^{m,\beta}(k/m)+\beta L_{n-1}^{m,\beta}((k+1)/m)\\ L_n^{m,\beta}(k/m)=\beta L_{n-1}^{m,\beta}((k-1+\beta)/m)+\alpha L_{n-1}^{m,\beta}((k+\beta)/m)\\ L_n^{m,\beta}(0)=L_n^{m,\beta}(1)=0. \end{gathered} \tag{3}$$

Так как $L_n^{m,\beta}(p)$ не убывает по n и ограничена сверху, устремив n к бесконечности, получим нижнюю оценку $L_\infty^{m,\beta}(p)$ выигрыша первого игрока в игре $G_\infty^{m,\beta}(p)$, $p \in P$.

Введем следующие обозначения:

$$L_{2k} = L_\infty^{m,\beta}(k/m), \; k \in \overline{0,m}, \; L_{2k+1} = L_\infty^{m,\beta}((k+\beta)/m)), \; k \in \overline{0,m-1}.$$

Тогда справедливы формулы

$$\begin{gathered} L_{2k+1} = \alpha\beta + \alpha L_{2k} + \beta L_{2(k+1)}, \; k \in \overline{0,m-1}, \\ L_{2k} = \beta L_{2k-1} + \alpha L_{2k+1}, \; k \in \overline{1,m-1}, \\ L_0 = L_{2m} = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Введем матрицу $B \in \mathbb{R}^{(2m-1)\times(2m-1)}$ и вектор-столбец $b \in \mathbb{R}^{2m-1}$ следующим образом:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & 1 & -\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 & -\beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \alpha\beta \\ 0 \\ \alpha\beta \\ \cdots \\ 0 \\ \alpha\beta \end{pmatrix}.$$

Тогда (4) перепишем в виде $BL = B, L_0 = L_{2m} = 0$, где $L = (L_1, L_2, \ldots, L_{2m-1})$.

Системы $Mx = f$ с трехдиагональной матрицей M, имеющей структуру

$$M = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & c_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & c_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & c_n \end{pmatrix},$$

можно решать методом прогонки, используя следующие формулы для прогоночных коэффициентов и переменных (см. [8]):

$$\begin{gathered} x_i = \gamma_{i+1}x_{i+1} + \delta_{i+1}, \; i = \overline{1,n-1}, \quad x_n = \frac{f_n - a_n\delta_n}{c_n + a_n\gamma_n}, \\ \gamma_{i+1} = -\frac{b_i}{c_i + a_i\gamma_i}, \; i = \overline{2,n-1}, \quad \gamma_2 = -\frac{b_1}{c_1}, \\ \delta_{i+1} = \frac{f_i - a_i\delta_i}{c_i + a_i\gamma_i}, \; i = \overline{2,n-1}, \quad \delta_2 = \frac{f_1}{c_1}. \end{gathered}$$

Утверждение 4. *Прогоночные коэффициенты для матрицы B даются следующими формулами:*

$$\gamma_{2k} = \frac{\beta + k - 1}{k},\ \gamma_{2k+1} = \frac{k}{k+\beta},$$
$$\delta_{2k} = \frac{\alpha(k-1+2\beta)}{2},\ \delta_{2k+1} = \frac{k\beta(k-1+2\beta)}{2(k+\beta)}, \quad k \in \overline{1, m-1}.$$

Справедливость данного утверждения устанавливается доказательством по индукции.

Заметим, что $L_{2k-1} = \gamma_{2k}\gamma_{2k+1}L_{2k+1} + \gamma_{2k}\delta_{2k+1} + \beta_{2k}$. Подстановкой $H_{\infty}^{m,\beta}\left(\frac{k+\beta}{m}\right)$ вместо L_{2k+1} это равенство обращается в тождество, тем самым доказывая

Утверждение 5. *Решение системы (4) дается следующими формулами:*

$$L_{2k+1} = ((m-(k+\beta))(k+\beta) + \alpha\beta)/2,\ k = \overline{0, m-1},$$
$$L_{2k} = k(m-k)/2,\ k = \overline{0, m}.$$

Тем самым мы определили функцию $L_{\infty}^{m,\beta}(p)$ при $p \in P$. Для $p \in [0,1] \setminus P$ стратегия инсайдера основана на применении выпуклой комбинации стратегий для крайних точек интервала, в котором находится p.

Утверждение 6. *При $\lambda \in (0,1)$, $\beta \geqslant 1/2$, $k = \overline{0, m-1}$ для значения $K_1^{m,\beta}(p, \sigma, \tau)$ выигрыша первого игрока верны оценки*

$$\min_{\tau \in \mathrm{T}} K_1^{m,\beta}\left(\lambda p_k^0 + (1-\lambda)p_k^\beta, \lambda\phi_k^0 + (1-\lambda)\phi_k^\beta, \tau\right) \geqslant \alpha\beta(1-\lambda),$$
$$\min_{\tau \in \mathrm{T}} K_1^{m,\beta}\left(\lambda p_k^\beta + (1-\lambda)p_{k+1}^0, \lambda\phi_k^\beta + (1-\lambda)\phi_{k+1}^0, \tau\right) \geqslant \alpha\beta\lambda.$$

Данные неравенства можно доказать, воспользовавшись равенством (2) и линейностью $K_1^{m,\beta}(p, \sigma, \tau)$ по σ.

Утверждение 7. *При $\lambda \in (0,1)$, $\beta \geqslant 1/2$, $k = \overline{0, m-1}$ для гарантированного выигрыша первого игрока в игре $G_{\infty}^{m,\beta}(p)$ справедливо*

$$L_{\infty}^{m,\beta}\left(\lambda p_k^0 + (1-\lambda)p_k^\beta\right) = \lambda L_{\infty}^{m,\beta}\left(p_k^0\right) + (1-\lambda)L_{\infty}^{m,\beta}\left(p_k^\beta\right),$$
$$L_{\infty}^{m,\beta}\left(\lambda p_k^\beta + (1-\lambda)p_{k+1}^0\right) = \lambda L_{\infty}^{m,\beta}\left(p_k^\beta\right) + (1-\lambda)L_{\infty}^{m,\beta}\left(p_k^0\right).$$

Доказательство. Покажем, что выпуклая комбинация соответствующих крайних стратегий дает необходимый результат.

Пусть $p = \lambda p_k^\beta + (1-\lambda)p_{k+1}^0$, $k = \overline{0, m-2}$. В этом случае при использовании $\lambda\phi_k^\beta + (1-\lambda)\phi_{k+1}^0$ первый игрок рандомизирует между ставками $k, k+1, k+2$ с параметрами

$$q_k = \lambda\alpha,\ q_{k+1} = \beta,\ q_{k+2} = (1-\lambda)\alpha,$$
$$p(H|k) = p_k^0,\ p(H|k+1) = \lambda p_{k+1}^0 + (1-\lambda)p_k^\beta,\ p(H|k+2) = p_{k+1}^\beta.$$

Тогда по аналогии с (3) выписывается следующая рекуррентная формула:

$$L_\infty^{m,\beta}(p) = \alpha\beta\lambda + \lambda\alpha L_\infty^{m,\beta}\left(p_k^0\right) + (1-\lambda)\alpha L_\infty^{m,\beta}\left(p_{k+1}^\beta\right) + \beta L_\infty^{m,\beta}\left((1-\lambda)p_k^\beta + \lambda p_{k+1}^0\right).$$

Так как $(1-\lambda)p_k^\beta + \lambda p_{k+1}^0 \in \left(p_k^\beta, p_{k+1}^0\right)$, то для $L_\infty^{m,\beta}\left((1-\lambda)p_k^\beta + \lambda p_{k+1}^0\right)$ справедливо аналогичное представление. Приведя подобные, получим

$$\begin{aligned} L_\infty^{m,\beta}(p) = \frac{1}{1-\beta^2}\Big(\alpha\beta\lambda + \alpha\lambda L_\infty^{m,\beta}\left(p_k^0\right) + (1-\lambda)L_\infty^{m,\beta}\left(p_{k+1}^\beta\right) + \\ +\beta\left(\alpha\beta(1-\lambda) + (1-\lambda)\alpha L_\infty^{m,\beta}\left(p_k^0\right) + \lambda\alpha L_\infty^{m,\beta}\left(p_{k+1}^\beta\right)\right)\Big) = \\ = \left((k+1)(m-k-1) + \alpha\lambda(2k-m+2\beta+1)\right)/2 = \\ = \lambda L_\infty^{m,\beta}\left(p_k^\beta\right) + (1-\lambda)L_\infty^{m,\beta}\left(p_{k+1}^0\right). \quad (5) \end{aligned}$$

Пусть $p = \lambda p_k^0 + (1-\lambda)p_k^\beta$, $k = \overline{1, m-1}$. В этом случае при использовании $\lambda\phi_k^0 + (1-\ \lambda)\phi_k^\beta$ первый игрок рандомизирует между ставками k и $k+1$ с параметрами

$$\begin{gathered} q_k = \lambda\beta + (1-\lambda)(1-\beta),\ p(H|k) = \frac{\lambda\beta}{q_k}p_{k-1}^\beta + \frac{(1-\lambda)(1-\beta)}{q_k}p_k^0, \\ q_{k+1} = \lambda(1-\beta) + (1-\lambda)\beta,\ p(H|k+1) = \frac{\lambda(1-\beta)}{q_{k+1}}p_k^\beta + \frac{(1-\lambda)\beta}{q_{k+1}}p_{k+1}^0. \end{gathered}$$

Заметим, что $p(H|k) \in \left(p_{k-1}^\beta, p_k^0\right)$, а $p(H|k+1) \in \left(p_k^\beta, p_{k+1}^0\right)$. Тогда с помощью (5) получим

$$\begin{aligned} L_\infty^{m,\beta}(p) = \lambda\beta L_\infty^{m,\beta}\left(p_{k-1}^\beta\right) + (1-\lambda)(1-\beta)L_\infty^{m,\beta}\left(p_k^0\right) + \lambda(1-\beta)L_\infty^{m,\beta}\left(p_k^\beta\right) + \\ + (1-\lambda)\beta L_\infty^{m,\beta}\left(p_{k+1}^0\right) = \lambda L_\infty^{m,\beta}\left(p_k^0\right) + (1-\lambda)L_\infty^{m,\beta}\left(p_k^\beta\right). \end{aligned}$$

При $p \in \left(0, p_1^\beta\right)$ и $p \in \left(p_{m-1}^\beta, 1\right)$ доказательство проводится аналогично.

Заметим, что при $\beta < 1/2$ полученные результаты также имеют место, а стратегию σ^* можно получить, рассмотрев дополнительную игру $\overline{G_\infty^{m,\beta}(p)}$. Таким образом, мы определили $L_\infty^{m,\beta}(p)$ и σ^* для $p \in [0,1]$, $\beta \in [0,1]$.

Лемма 2. *При использовании первым игроком стратегии σ^* в игре $G_\infty^{m,\beta}(p)$, его выигрыш ограничен снизу функцией $L_\infty^{m,\beta}(p)$, т.е.*

$$\min_{\tau\in\mathrm{T}} K_\infty^{m,\beta}(p,\sigma^*,\tau) \geqslant L_\infty^{m,\beta}(p).$$

Отметим, что приведенная стратегия инсайдера для $p \in [0,1]\setminus P$ принципиально отличается от аналогичной стратегии в [7], которая дает необходимые результаты только при $\beta = 1/2$.

Теорема 1. *Игра* $G_{\infty}^{m,\beta}(p)$ *имеет значение* $V_{\infty}^{m,\beta}(p) = H_{\infty}^{m,\beta}(p) = L_{\infty}^{m,\beta}(p)$, *при этом* σ^* *– оптимальная стратегия первого игрока,* τ^* *– оптимальная стратегия второго игрока.*

Доказательство по форме повторяет доказательство аналогичной теоремы в работе [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aumann R. J., Maschler M. B. : Repeated games with incomplete information. The MIT Press. 1995.
2. Chatterjee K., Samuelson W. : Bargaining under Incomplete Information // Operations Research. 1983. **31**. P. 835–851.
3. De Meyer B., Saley H. : On the strategic origin of Brownian motion in finance // Int J Game Theory. 2002. **31**. P. 285–319.
4. Domansky V. : Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets // Int J Game Theory. 2007. **36**. N 2. P. 265–281.
5. Крепс В. Л. : Повторяющиеся игры, моделирующие биржевые торги, и возвратные последовательности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. **4**. С. 109–120.
6. Сандомирская М. С., Доманский В. К. : Решение одношаговой игры биржевых торгов с неполной информацией // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2012. **4**. № 1. С. 32-54.
7. Пьяных А. И. : Об одной модификации модели биржевых торгов с инсайдером // Математическая теория игр и ее приложения. 2014. **6**. № 4. С. 68–84.
8. Самарский А. А., Гулин А. В. : Численные методы. М.: Наука, 1989.