УДК (обязательно указывать)
ББК

НАЗВАНИЕ СТАТЬИ

Имя О. Фамилия
Организация
Полный адрес организации
e-mail: author@noname.ru

Рассматривается модификация дискретной модели многошаговых торгов, введенной В. Доманским (Int J Game Theory 36:241–257), с ценой транзакции равной полусумме ставок, предложенных игроками. Приведены оптимальные стратегии игроков, и найдено значение выигрыша в бесконечной игре.

Ключевые слова: многошаговые торги, асимметричная информация, повторяющиеся игры с неполной информацией.

1. Введение

Часто для описания эволюции цен на финансовых рынках используется вероятностная модель случайных блужданий. Происхождение этих случайных флюктуаций цен принято объяснять некоторыми экзогенными факторами. Однако гипотеза о полностью экзогенном происхождении этих колебаний не является удовлетворительной.

В работе [5] Б. де Мейер и Х. Салей с помощью упрощенной модели многошаговых торгов однотипными акциями продемонстрировали, что винеровская компонента в эволюции цен на акцию может быть следствием асимметричной информации у игроков. В модели

Мейера–Салей торги ведут между собой два игрока. Случайная цена акции может принимать два значения (низкое или высокое). Перед началом торгов случайных ход определяет цену акции на весь период торгов, и выбранная цена сообщается первому игроку и не сообщается второму. Оба игрока знают вероятность высокой цены акции.

В модели Мейера–Салей игроки могут делать произвольные ставки, но поскольку реальные торги проводятся в тех или иных денежных единицах, более реалистично предположить, что игроки могут делать только дискретные ставки, пропорциональные минимальной денежной единице.

Дискретный аналог модели Мейера–Салей был рассмотрен В. Доманским в работе [4]. В модели Доманского акция может иметь два возможных значения цены — 0 и m. Игроки могут делать целочисленные ставки от 0 до m. Игрок, сделавший большую ставку, покупает у другого игрока одну акцию по заданной цене. В случае равных ставок транзакции не происходит. Установлено, что в соответствующей игре оптимальная стратегия инсайдера порождает случайное блуждание цен совершнных сделок. Блуждание совершается по множеству допустимых ставок с поглошением в крайних точках. Поглощение происходит в тот момент, когда оценка вторым игроком цены акции совпадает с ее истинным значением.

В настоящей работе будет исследована модель, в которой наибольшая ставка определяет направление транзакции, но цена сделки определяется путем переговоров между игроками.

В работе [6] Чаттерджи и Самуэльсон рассматривают модель двухстороннего аукциона со следующим правилом торгов: продавец и покупатель одновременно назначают цену на товар, s и b соответственно, при этом, в случае осуществления сделки, товар продается по цене $p = kb + (1-k)s$, где $0 \leq k \leq 1$. Параметр k при этом можно интерпретировать как переговорную силу покупателя.

В данной работе мы полагаем $k = \frac{1}{2}$ и исследуем оптимальные стратегии игроков и их выигрыши в бесконечной игре.

2. Модель

Два игрока с противоположными интересами имеют деньги и однотипные акции. Случайная цена акции может принимать либо значение m в состоянии H, либо 0 в состоянии L и определяется на весь период торгов на первом шаге ходом случая. Первый игрок осведомлен о результате случайного хода, второй игрок знает только вероятность выбора того или иного состояния. Второй игрок знает, что первый является инсайдером. На каждом последующем шаге игроки одновременно предлагают свою цену за одну акцию. Игрок, назвавший большую цену покупает у другого игрока акцию, по цене равной полусумме предлагавшихся цен. В случае одинаковых ставок транзакции не происходит.

Данную модель торгов можно рассматривать как повторяющуюся игру с неполной информацией. Подобные игры были впервые рассмотрены Р. Ауманом и М. Машлером (см. [3]). Игра задается множеством состояний, каждому состоянию соответствует матричная игра, где матрицу можно рассматривать как матрицу выигрышей первого игрока.

Таким образом мы приходим к следующей формализации рассматриваемой модели. Множество состояний $S = \{H, L\}$. На первом шаге случай выбирает $s \in S$ с вероятностями $p(H) = p$ и $p(L) = (1-p)$. После этого на протяжении $n \leq \infty$ шагов игроки играют в игру A^s. Соответствующие платежные матрицы задаются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
A^L(i,j) &= \frac{1}{m}\begin{cases} \frac{i+j}{2}, & i<j \\ 0, & i=j \\ -\frac{i+j}{2}, & i>j \end{cases} \\
A^H(i,j) &= \frac{1}{m}\begin{cases} \frac{i+j}{2}-m, & i<j \\ 0, & i=j \\ m-\frac{i+j}{2}, & i>j, \end{cases}
\end{aligned}
$$

Множество возможных ставок первого и второго игроков

$$i \in I = \{0, 1, \dots, m\},\ j \in J = \{0, 1, \dots, m\}.$$

Тогда стратегией первого игрока является последовательность ходов

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t, \dots),$$

где $\sigma_t : S \times I^{t-1} \to \Delta(I)$, а $\Delta(I)$ — вероятностное распределение на множестве возможных ставок. Множество всевозможных стратегий первого игрока обозначим через Σ.

Аналогично стратегией второго игрока назовем последовательность ходов

$$\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_t, \ldots),$$

где $\tau_t : I^{t-1} \to \Delta(J)$. Множество всевозможных стратегий второго игрока обозначим через Т.

Для упрощения вычислений умножим платежные матрицы на $2m$:

$$A^L(i,j) = \begin{cases} i+j, & i<j \\ 0, & i=j \\ -i-j, & i>j \end{cases} \tag{2.1}$$

$$A^H(i,j) = \begin{cases} i+j-2m, & i<j \\ 0, & i=j \\ 2m-i-j, & i>j \end{cases} \tag{2.2}$$

В дальнейшем будем рассматривать повторяющуюся игру именно с матрицами (2.1) и (2.2), которую назовем $G_n^m(p)$. При применении первым игроков смешанной стратегий $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, где

$$\sigma_t = (\sigma_t^L, \sigma_t^H), \quad \sigma_t^s = (\sigma_{t,1}^s, \ldots, \sigma_{t,m}^s),$$

а вторым игроком смешанной стратегии $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$, где $\tau_t = (\tau_{t,1}, \ldots, \tau_{t,m})$ выигрыш равен

$$K_n^m(p, \sigma, \tau) = \sum_{t=1}^{n} \left(p A^H(\sigma_t^H, \tau_t) + (1-p) A^L(\sigma_t^L, \tau_t) \right), \tag{2.3}$$

где $A^s(\sigma_t^s, \tau_t) = \sum_{i\in I} \sum_{j \in J} \sigma_{t,i}^s \tau_{t,j} A^s(i,j)$.

3. Оценка сверху

Рассмотрим следующую стратегию второго игрока τ^k:

$$\tau_1^k = k$$

$$\tau_t^k(i_{t-1}, j_{t-1}) = \begin{cases} j_{t-1} - 1, & i_{t-1} < j_{t-1} \\ j_{t-1}, & i_{t-1} = j_{t-1} \\ j_{t-1} + 1, & i_{t-1} > j_{t-1} \end{cases} \tag{3.1}$$

Утверждение 3.1. *При применении стратегии* (3.1) *в игре* $G_n^m(p)$ *второй игрок может гарантировать себе проигрыш не более:*

$$h_n^L(\tau^k) = \sum_{t=0}^{n-1}(2(k-t)-1)^+, \tag{3.2}$$

$$h_n^H(\tau^k) = \sum_{t=0}^{n-1}(2(m-k-t)-1)^+, \tag{3.3}$$

в состояниях L *и* H *соответственно.*

Доказательство. Проведем доказательство по индукции. Для $h_n^L(\tau^k)$:

$$h_1^L(\tau^k) = \max_{i\in I} a_{ik}^L = \max(0, 2k-1).$$

База индукции проверена. Пусть $\forall t \le n$ выполнено (3.2). Докажем, что (3.2) выполняется при $t = n+1$. Имеем $h_{n+1}^L(\tau^k) = \max_{i\in I}(a_{ik}^L + h_n^L(\tau^{c(i)}))$, где

$$c(i) = \begin{cases} k-1, & i<k \\ k, & i=k \\ k+1, & i>k. \end{cases}$$

Рассмотрим значение выигрыша в зависимости от действия i первого игрока. При $i<k$ имеем:

$$h_{n+1}^L(\tau^k) = 2k-1+h_n^L(\tau^{k-1}) = 2k-1+\sum_{t=0}^{n-1}(2(k-1-t)-1)^+ \\ \le \sum_{t=0}^{n}(2(k-t)-1)^+.$$

При $i=k$ получаем:

$$h_{n+1}^L(\tau^k) = h_n^L(\tau^k) \le \sum_{t=0}^{n}(2(k-t)-1)^+.$$

При $i>k$ имеем:

$$h_{n+1}^L(\tau^k) = -2k-1+h_n^L(\tau^{k+1}) = -2k-1+\sum_{t=-1}^{n-2}(2(k-t)-1)^+ \\ \le \sum_{t=0}^{n}(2(k-t)-1)^+.$$

Таким образом (3.2) доказано. Аналогично для (3.3) имеем:

$$h_1^H(\tau^k) = \max_{i\in I} a_{ik}^H = \max(0, 2(m-k)-1).$$

База индукции проверена. Пусть $\forall t \le n$ выполнено (3.3). Докажем, что (3.3) выполняется при $t = n+1$.

$$h_{n+1}^H(\tau^k) = \max_{i\in I}(a_{ik}^H + h_n^H(\tau^{c(i)})).$$

При $i > k$ имеем:

$$\begin{aligned} h_{n+1}^H(\tau^k) &= 2m - 2k - 1 + h_n^H(\tau^{k-1}) \\ &= 2(m-k) - 1 + \sum_{t=0}^{n-1}(2(m-k-1-t)-1)^+ \\ &\le \sum_{t=0}^{n}(2(m-k-t)-1)^+ \end{aligned}$$

При $i = k$ получаем:

$$h_{n+1}^H(\tau^k) = h_n^H(\tau^k) \le \sum_{t=0}^{n}(2(m-k-t)-1)^+.$$

При $i < k$ имеем:

$$\begin{aligned} h_{n+1}^H(\tau^k) &= 2k - 1 - 2m + h_n^H(\tau^{k+1}) \\ &= 2k - 1 - 2m + \sum_{t=-1}^{n-2}(2(m-k-t)-1)^+ \\ &\le \sum_{t=0}^{n}(2(m-k-t)-1)^+. \end{aligned}$$

Таким образом утверждение полностью доказано. □

Можно заметить, что при $t > m$ значения (3.2) и (3.3) стабилизируются. Таким образом, справедливо следующее

Утверждение 3.2. *Для значения бесконечной игры справедливо следующее неравенство:*

$$V_\infty^m(p) <= H^m(p) = \min_{j\in J}(p(m-j)^2 + (1-p)j^2). \tag{3.4}$$

Доказательство. При каждом j:

$$\begin{aligned}
h^H_{m+1}(\tau^j) &= \sum_{t=0}^{m}(2(m-j-t)-1)^+ = \\
&= (2\cdot 0-1)^+ + (2\cdot 1-1)^+ + \ldots + (2(m-j)-1)^+ = \\
&= (m-j)(m-j+1)-(m-j) = (m-j)^2 \\
h^L_{m+1}(\tau^j) &= \sum_{t=0}^{m}(2(j-t)-1)^+ = \\
&= (2\cdot 0-1)^+ + (2\cdot 1-1)^+ + \ldots + (2\cdot j-1)^+ = \\
&= j(j+1)-j = j^2
\end{aligned}$$

Отсюда и из (2.3) очевидным образом получаем (3.4). Утверждение доказано. □

Лемма 3.1. *Функция $H^m(p)$ является кусочно-линейной функцией, состоящей из $m+1$ линейных сегментов, и полностью определяется своими значениями в следующих точках:*

$$H^m(0) = H^m(1) = 0,$$
$$H^m\left(\frac{k+1/2}{m}\right) = \frac{m}{2} + mk - k^2 - k,\ k = \overline{0, m-1}$$

Доказательство. Квадратичная функция $\omega(x) = p(m-x)^2 + (1-p)x^2$ достигает минимума при $x = pm$. Отсюда при $p \in \left(\frac{k-1/2}{m}, \frac{k+1/2}{m}\right]$ минимум $p(m-j)^2 + (1-p)j^2$ по целым j достигается при $j = k$.

Отсюда видно, что $H^m(p)$ является кусочно-линейной функцией, которая полностью определяется своими значениями в точках $p = \frac{k+1/2}{m}$, $k = \overline{0, m-1}$. Значение $H^m(p)$ при $p = \frac{k+1/2}{m}$ легко находится подстановкой $j = k$. □

4. Оценка снизу

Пусть на первом шаге первый игрок применяет $\sigma_1^k = (\sigma_1^H, \sigma_1^L)$, где $\sigma_1^H = (\sigma_{1,k}^H, \sigma_{1,k+1}^H)$ и $\sigma_1^L = (\sigma_{1,k}^L, \sigma_{1,k+1}^L)$, где $\sigma_{1,i}^S$ – вероятность сделать ставку равную i в состоянии $S \in \{H, L\}$. Т.е. при применении σ_1^k первый игрок делает ставки k и $k+1$ с некоторыми заданными вероятностями.

Также σ_1^k можно определить, если задать полные вероятности действий k и $k+1$ равные q_k и q_{k+1}, а также апостериорные вероятности $p(S|i)$ состояния S, если на первом шаге игрок сделал ставку i. При этом вероятности $\sigma_{1,i}^S$ легко рассчитываются по формуле Байеса

$$\sigma_{1,i}^S = \frac{p(S|i)q_i}{p(S)}.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться именно таким параметрическим заданием σ_1^k.

Утверждение 4.1. *При использовании σ_1^k первый игрок гарантирует себе на первом шаге выигрыш:*

$$K_1(p, \sigma_1^k, j) = \begin{cases} 2mp - j - k - q_{k+1}, & j < k, \\ 2mp(H|k+1)q_{k+1} - (2k+1)q_{k+1}, & j = k, \\ (2k+1)q_k - 2mp(H|k)q_k, & j = k+1, \\ j + k - 2mp + q_{k+1}, & j > k+1. \end{cases} \tag{4.1}$$

Доказательство. По определению

$$K_1(p, \sigma_1^k, j) = pA^H(\sigma_1^H, j) + (1-p)A^L(\sigma_1^L, j). \tag{4.2}$$

Распишем выигрыш на первом шаге в зависимости от значения j действия второго игрока. При $j < k$ имеем:

$$\begin{aligned} A^H(\sigma_1^H, j) &= \sigma_{1,k}^H(2m - j - k) + \sigma_{1,k+1}^H(2m - j - k - 1) \\ &= (2m - j - k) - \sigma_{1,k+1}^H, \\ A^L(\sigma_1^L, j) &= \sigma_{1,k}^L(-j - k) + \sigma_{1,k+1}^L(-j - k - 1) \\ &= -j - k - \sigma_{1,k+1}^L, \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} K_1(p, \sigma_1^k, j) = p(2m-j-k) - p\sigma_{1,k+1}^H + (1-p)(-j-k) - (1-p)\sigma_{1,k+1}^L = \\ = 2mp - j - k - (p\sigma_{1,k+1}^H + (1-p)\sigma_{1,k+1}^L) = 2mp - j - k - q_{k+1}. \end{aligned}$$

Аналогично при $j = k$ имеем:

$$A^H(\sigma_1^H, k) = \sigma_{1,k+1}^H(2m - 2k - 1),\ A^L(\sigma_1^L, k) = \sigma_{1,k+1}^L(-2k - 1),$$
$$K_1(p, \sigma_1^k, k) = 2mp\sigma_{1,k+1}^H - (2k+1)q_{k+1} = 2mp(H|k+1)q_{k+1} - (2k+1)q_{k+1}$$

Значения $K_1(p, \sigma_1^k, j)$ при $j \geq k+1$ получаются из соображений симметрии. $\square$

Введем на $[0,1]$ разбиение P_k с точками

$$p_k^{+0} = \tfrac{k}{m}, \quad k = \overline{0,m} \quad \text{и} \quad p_k^{+1/2} = \tfrac{k}{m} + \tfrac{1}{2m}, \quad k = \overline{0, m-1}.$$

Определим через ϕ_k^{+0} такое действие первого игрока, что $\phi_k^{+0} = \sigma_1^k$ с параметрами

$$p(H|k) = \frac{k}{m} - \frac{1}{2m} = p_{k-1}^{+1/2}, \quad p(H|k+1) = \frac{k}{m} + \frac{1}{2m} = p_k^{+1/2},$$
$$q_k = q_{k+1} = \frac{1}{2}$$

Пусть также $\phi_0^{+0} = 0$, $\phi_m^{+0} = m$ (т.е. если неопределенности нет, первый игрок использует минимаксную стратегию). Аналогично, через $\phi_k^{+1/2}$ определим такое действие первого игрока, что $\phi_k^{+1/2} = \sigma_1^k$ с параметрами

$$p(H|k) = \frac{k}{m} = p_k^{+0}, \quad p(H|k+1) = \frac{k+1}{m} = p_{k+1}^{+0},$$
$$q_k = q_{k+1} = \frac{1}{2}$$

Утверждение 4.2. *При* $p = p_k^{+0}$ $\left[p = p_k^{+1/2}\right]$ *первый игрок может гарантировать себе выигрыш на первом шаге не менее* 0 [*не менее* $\frac{1}{2}$].

Доказательство. Действительно, пусть при $p = p_k^{+0}$ первый игрок применяет ϕ_k^{+0}, а при $p = p_k^{+1/2}$ применяет $\phi_k^{+1/2}$. Тогда подстановкой параметров ϕ_k^{+0} и $\phi_k^{+1/2}$ в (4.1) немедленно получаем справедливость данного утверждения. $\square$

Заметим, что если $p \in P_k$, то при применении ϕ_k^{+0} и $\phi_k^{+1/2}$ апостериорные вероятности также принадлежат P_k. Таким образом, определив действие первого игрока на первом шаге для произвольного значения вероятности p, мы тем самым определим стратегию первого игрока в игре $G_n^m(p)$ произвольной продолжительности.

В силу рекурсивной структуры игры $G_n^m(p)$ можно выписать рекуррентную формулу для нижней оценки значения игры $L_n^m(p)$ при $p \in P_k$:

$$
\begin{aligned}
&L_n^m\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{m}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(L_{n-1}^m\left(\frac{k}{m}\right)+L_{n-1}^m\left(\frac{k+1}{m}\right)\right)\\
&L_n^m\left(\frac{k+1}{m}\right)=\frac{1}{2}\left(L_{n-1}^m\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{m}\right)+L_{n-1}^m\left(\frac{k+\frac{3}{2}}{m}\right)\right)\\
&L_n^m(0)=L_n^m(1)=0.
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Устремив n в бесконечность получим рекуррентную формулу для нижней оценки значения игры $G_\infty^m(p)$. Перепишем эту рекуррентную формулу в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
L_0&=0,\ L_{2m}=0,\\
L_{2k+1}&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(L_{2k}+L_{2k+2}),\ k=\overline{0,m-1}\\
L_{2k+2}&=\frac{1}{2}(L_{2k+1}+L_{2k+3}),\ k=\overline{0,m-1}.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Введем следующее обозначение:

$$
A=\begin{pmatrix}
1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
-\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\hdotsfor{7}\\
0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & 1
\end{pmatrix}
b=\left.\begin{pmatrix}
\frac{1}{2}\\ 0\\ \cdots\\ 0\\ \frac{1}{2}
\end{pmatrix}\right\}(2m-1).
\tag{4.5}
$$

Тогда (4.4) можно переписать следующим образом:

$$
\begin{aligned}
AL&=b,\\
L_0&=L_{2m}=0,
\end{aligned}
$$

где $L=(L_1,L_2,\ldots,L_{2m-1})^T$.

Известно, что системы $Mx=F$ с трехдиагональной матрицей M, имеющей следующую структуру:

$$
M=\begin{pmatrix}
c_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\hdotsfor{7}\\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & c_{n-1} & b_{n-1}\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & c_n
\end{pmatrix}
$$

можно решать методом прогонки, используя следующие формулы для прогоночных коэффициентов и значений переменного (см. [1]):

$$\begin{aligned} &x_i = \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1}, && x_n = \frac{F_n - a_n\beta_n}{c_n + a_n\alpha_n} \\ &\alpha_{i+1} = -\frac{b_i}{c_i + a_i\alpha_i}, && \alpha_2 = -\frac{b_1}{c_1} \\ &\beta_{i+1} = \frac{F_i - a_i\beta_i}{c_i + a_i\alpha_i}, && \beta_2 = \frac{F_1}{c_1} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Матрица A является трехдиагональной матрицей, в которой

$$a_i = b_i = -\frac{1}{2}, \quad c_i = 1. \tag{4.7}$$

В этом случае мы можем получить явные выражения для прогоночных коэффициентов и значения L.

Утверждение 4.3. *Прогоночные коэффициенты для матрицы A выражаются следующим образом:*

$$\alpha_i = \frac{i-1}{i} \tag{4.8}$$

$$\beta_{2i} = \frac{2i}{4},\ \beta_{2i+1} = \frac{i^2}{2i+1} \tag{4.9}$$

Доказательство. Справедливость утверждения элементарным образом устанавливается доказательством по индукции с учетом (4.7) и (4.6). □

Из утверждения 4.3 и соображений симметрии, мы можем найти значение $L_{2m-1} = L_1$. Действительно,

$$\begin{aligned} L_1 = L_{2m-1} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{(m-1)^2}{2m-1}}{1 - \frac{1}{2}\frac{2m-1-1}{2m-1}} = \frac{2m-1+(m-1)^2}{4m-2-2m+2} = \\ = \frac{2m-1+m^2-2m+1}{2m} = \frac{m}{2}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Так как

$$L_{2(m+1)} = \frac{1}{2}(L_{2m+1} + L_{2(m+1)+1}),$$

то нам достаточно найти явный вид только для нечетных L_i. Из (4.6) и утверждения 4.3 мы получаем, что

$$\begin{aligned} L_{2i+1} &= \alpha_{2(i+1)}(\alpha_{2(i+1)+1}L_{2(i+1)+1} + \beta_{2(i+1)+1}) + \beta_{2(i+1)} = \\ &= \alpha_{2(i+1)}\alpha_{2(i+1)+1}L_{2(i+1)+1} + \alpha_{2(i+1)}\beta_{2(i+1)+1} + \beta_{2(i+1)} = \\ &= \frac{2i+1}{2i+3}L_{2i+3} + \frac{2(i+1)^2}{2i+3}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Утверждение 4.4. *Решение* (4.4) *дается следующими формулами:*

$$\begin{aligned} L_{2k+1} &= \frac{m}{2} + mk - k^2 - k, & k &= \overline{0, m-1} \\ L_{2k} &= mk - k^2, & k &= \overline{0, m}. \end{aligned}$$

Доказательство. Для простоты перепишем (4.10), (4.11) следующим образом:

$$f_{k+1} = \frac{2k+3}{2k+1}f_k - \frac{2(k+1)^2}{2k+1}, \quad f_0 = \frac{m}{2}. \tag{4.12}$$

Из [2] известно, что решение данного конечно-разностного уравнения представляется в следующем виде:

$$f(k) = f^*(k) + Cf^O(k),$$

где $f^*(k)$ – частное решение неоднородного уравнения, а $f^O(k)$ – решение однородного уравнения.

Легко проверить, что при

$$f^O(k) = 2k+1, \quad f^*(k) = -k^2 - k, \quad C = \tfrac{m}{2},$$

мы получаем решение (4.12), а значит и L_{2k+1}. L_{2k} находится из соотношений (4.4). Утверждение доказано. $\square$

Таким образом мы определили функцию $L^m(p)$ при $p \in P_k$. Для того, чтобы определить эту функцию при p лежащих внутри интервалов разбиения P_k нам нужна стратегия, гарантирующая первому игроку выигрыш, лежащий на прямой, соединяющей крайние точки этих интервалов.

Для заданного p обозначим через λ_k^{+0} такое действие первого игрока, что $\lambda_k^{+0} = \sigma_1^k$ с параметрами:

$$p(H|k) = \frac{k}{m} = p_k^{+0}, \quad p(H|k+1) = \frac{k}{m} + \frac{1}{2m} = p_k^{+1/2},$$
$$q_k = 2k + 1 - 2mp, \quad q_{k+1} = 2(pm - k).$$

Аналогичным образом, через $\lambda_k^{+1/2}$ обозначим действие первого игрока такое, что $\lambda_k^{+1/2} = \sigma_1^k$ с параметрами:

$$p(H|k) = \frac{k}{m} + \frac{1}{2m} = p_k^{+1/2}, \quad p(H|k+1) = \frac{k+1}{m} = p_{k+1}^{+0},$$
$$q_k = 2(k + 1 - mp), \quad q_{k+1} = 2mp - 2k - 1.$$

Утверждение 4.5. *Пусть* $p \in (p_k^{+0}, p_k^{+1/2})$ $\left[p \in (p_k^{+1/2}, p_{k+1}^{+0})\right]$. *Тогда первый игрок может гарантировать себе на первом шаге неотрицательный выигрыш.*

Кроме того, если на последующих шагах первый игрок будет использовать стратегию из утверждения 4.2, то он может гарантировать себе выигрыш $L^m(p)$*, лежащий на отрезке, соединяющем* $L^m(p_k^{+0})$ *и* $L^m(p_k^{+1/2})$
$\left[L^m(p_k^{+1/2})\ \textit{и}\ L^m(p_{k+1}^{+0})\right]$.

Доказательство. Проведем доказательство для случая $p \in (p_k^{+0}, p_k^{+1/2})$. Пусть первый игрок на первом шаге применяет λ_k^{+0}. Тогда непосредственной подстановкой параметров λ_k^{+0} в (4.1) получим, что $\forall j \in J$ выполнено $K_1(p, \lambda_k^{+0}, j) \geq 0$.

Далее заметим, что после применения λ_k^{+0} апостериорные вероятности принадлежат разбиению P_k. Таким образом, если на последующих шагах первый игрок будет использовать стратегию из утверждения 4.2, то он гарантирует себе выигрыш $L^m(p) = q_k L^m(p_k^{+0}) + q_{k+1} L^m(p_k^{+1/2})$. Заметим, что

$$q_k = \frac{p^b - p}{p^b - p^a}, \quad q_{k+1} = \frac{p - p^a}{p^b - p^a}.$$

Отсюда видно, что $L^m(p)$, $L^m(p_k^{+0})$, $L^m(p_k^{+1/2})$ лежат на одной прямой.

При $p \in (p_k^{+1/2}, p_{k+1}^{+0})$ утверждение доказывается аналогично с заменой λ_k^{+0} на $\lambda_k^{+1/2}$. $\square$

Из утверждений 4.4 и 4.5 непосредственно следует справедливость следующей

Лемма 4.1. *Функция $L^m(p)$ является кусочно-линейной функцией, состоящей из $m+1$ линейных сегментов, и полностью определяется своими значениями в следующих точках:*

$$L^m(0) = L^m(1) = 0,$$
$$L^m\left(\frac{k+1/2}{m}\right) = \frac{m}{2} + mk - k^2 - k,\ k = \overline{0, m-1}$$

5. Значение игры $G_\infty^m(p)$

Теорема 5.1. *Игра $G_\infty^m(p)$ имеет значение*

$$V_\infty^m(p) = H^m(p) = L^m(p).$$

Оптимальная стратегия первого игрока σ^* дается утверждениями 4.2 и 4.5.

Оптимальная стратегию второго игрока τ^* описывается следующим образом: на каждом шаге игры при $p \in (p_{k-1}^{+1/2}, p_{k+1}^{+1/2})$ второй игрок применяет τ^k.

Доказательство. Непосредственно из лемм 3.1 и 4.1 следует, что $\forall \sigma \in \Sigma$, $\tau \in \mathrm{T}$, где Σ и T – множество стратегий первого и второго игроков соответственно, справедливо

$$K_\infty^m(p, \sigma, \tau^*) \leq K_\infty^m(p, \sigma^*, \tau^*) = H^m(p) = L^m(p) \leq K_\infty^m(p, \sigma^*, \tau).$$

А это значит, что σ^* и τ^* – оптимальные стратегии, и значение игры $V_\infty^m(p) = H^m(p) = L^m(p)$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы.* М.: Наука, 1989

2. Гельфонд А.О. *Исчисление конечных разностей.* М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012

3. Aumann R.J., Maschler M. B. *Repeated Games with Incomplete Information.* The MIT Press, Cambridge, London
4. Domansky V. *Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets* // Int J Game Theory. 2007. V. 36. P. 241–257
5. De Meyer B., Saley H. *On the stragegic origin of Brownian motion in finance* // Int J Game Theory. 2002. V. 31. P. 285–319
6. Chatterjee K., Samuelson W. *Bargaining under Incomplete Information* // Operations Research. 1983. V. 31. N. 5. P. 835–851

ARTICLE TITLE

Authors, MSU.

Abstract: This paper is concerned with a modification of a discreete multistage bidding model introduced in Domansky (Int J Game Theory 36:241–257) with a transaction price equal to convex combination of players' bids with a coefficient of $\frac{1}{2}$. The optimal strategies and the value of an infinite game are found.

Keywords: Multistage Bidding, Repeated Games with Incomplete Information, Asymmetric Information.