1. Описание

Рассмотрим следующую игру. Есть две платежные матрицы:

$$A^L(i,j) = \frac{1}{m}\begin{cases} \frac{i+j}{2}, & i<j \\ 0, & i=j \\ -\frac{i+j}{2}, & i>j \end{cases}$$

$$A^H(i,j) = \frac{1}{m}\begin{cases} \frac{i+j}{2}-m, & i<j \\ 0, & i=j \\ m-\frac{i+j}{2}, & i>j, \end{cases}$$

На первом шаге случай выбирает $S \in \{H, L\}$, причем вероятности выбора H и L равны $p(H) = p$ и $p(L) = (1-p)$ соответственно. Первый игрок осведомлен о выборе случая, второй игрок знает только вероятностное распределение на $\{H, L\}$. После этого на протяжении $n \le \infty$ шагов игроки играют в игру A^S.

Множество чистых стратегий первого и второго игроков $i \in I = \{0, 1, \dots, m\}$, $j \in J = \{0, 1, \dots, m\}$. Выигрыш каждого из игроков равен суммарному выигрышу за n шагов.

Для упрощения вычислений умножим платежные матрицы на $2m$:

$$A^L(i,j) = \begin{cases} i+j, & i<j \\ 0, & i=j \\ -i-j, & i>j \end{cases} \tag{1.1}$$

$$A^H(i,j) = \begin{cases} i+j-2m, & i<j \\ 0, & i=j \\ 2m-i-j, & i>j \end{cases} \tag{1.2}$$

В дальнейшем будем рассматривать повторяющуюся игру именно с матрицами (1.1) и (1.2), которую назовем $G_n^m(p)$. При применении первым игроков смешанной стратегий $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, где $\sigma_t = (\sigma_t^L, \sigma_t^H)$, а вторым игроком смешанной стратегии $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$, выигрыш равен

$$K_n^m(p,\sigma,\tau) = \sum_{t=1}^{n} \left(pA^H(\sigma_t^H, \tau_t) + (1-p)A^L(\sigma_t^L, \tau_t) \right). \tag{1.3}$$

2. Оценка сверху

Рассмотрим следующую чистую стратегию второго игрока τ^k:

$$\tau_1^k = k$$
$$\tau_t^k(i_{t-1}, j_{t-1}) = \begin{cases} j_{t-1} - 1, & i_{t-1} < j_{t-1} \\ j_{t-1}, & i_{t-1} = j_{t-1} \\ j_{t-1} + 1, & i_{t-1} > j_{t-1} \end{cases} \tag{2.1}$$

Утверждение 2.1. *При применении стратегии* (2.1) *в игре* $G_n^m(p)$ *второй игрок может гарантировать себе проигрыш не более:*

$$h_n^L(\tau^k) = \sum_{t=0}^{n-1} (2(k-t) - 1)^+, \tag{2.2}$$
$$h_n^H(\tau^k) = \sum_{t=0}^{n-1} (2(m-k-t) - 1)^+, \tag{2.3}$$

в состояниях L *и* H *соответственно.*

Proof. Проведем доказательство по индукции. Для $h_n^L(\tau^k)$:

$$h_1^L(\tau^k) = \max_{i \in I} a_{ik}^L = \max(0, 2k - 1).$$

База индукции проверена. Пусть $\forall t \le n$ выполнено (2.2). Докажем, что (2.2) выполняется при $t = n + 1$. Имеем $h_{n+1}^L(\tau^k) = \max_{i \in I}(a_{ik}^L + h_n^L(\tau^{c(i)}))$, где

$$c(i) = \begin{cases} k - 1, & i < k \\ k, & i = k \\ k + 1, & i > k. \end{cases}$$

Рассмотрим значение выигрыша в зависимости от действия i первого игрока. При $i < k$ имеем:

$$h_{n+1}^L(\tau^k) = 2k - 1 + h_n^L(\tau^{k-1}) = 2k - 1 + \sum_{t=0}^{n-1} (2(k - 1 - t) - 1)^+$$
$$\le \sum_{t=0}^{n} (2(k-t) - 1)^+.$$

При $i = k$ получаем:

$$h_{n+1}^L(\tau^k) = h_n^L(\tau^k) \leq \sum_{t=0}^{n} (2(k-t)-1)^+.$$

При $i > k$ имеем:

$$h_{n+1}^L(\tau^k) = -2k - 1 + h_n^L(\tau^{k+1}) = -2k - 1 + \sum_{t=-1}^{n-2} (2(k-t)-1)^+$$
$$\leq \sum_{t=0}^{n} (2(k-t)-1)^+.$$

Таким образом (2.2) доказано. Аналогично для (2.3) имеем:

$$h_1^H(\tau^k) = \max_{i \in I} a_{ik}^H = \max(0, 2(m-k)-1).$$

База индукции проверена. Пусть $\forall t \leq n$ выполнено (2.3). Докажем, что (2.3) выполняется при $t = n + 1$.

$$h_{n+1}^H(\tau^k) = \max_{i \in I}(a_{ik}^H + h_n^H(\tau^{c(i)})).$$

При $i > k$ имеем:

$$h_{n+1}^H(\tau^k) = 2m - 2k - 1 + h_n^H(\tau^{k-1}) = 2(m-k) - 1 + \sum_{t=0}^{n-1} (2(m-k-1-t)-1)^+$$
$$\leq \sum_{t=0}^{n} (2(m-k-t)-1)^+$$

При $i = k$ получаем:

$$h_{n+1}^H(\tau^k) = h_n^H(\tau^k) \leq \sum_{t=0}^{n} (2(m-k-t)-1)^+.$$

При $i < k$ имеем:

$$h_{n+1}^H(\tau^k) = 2k - 1 - 2m + h_n^H(\tau^{k+1}) = 2k - 1 - 2m + \sum_{t=-1}^{n-2} (2(m-k-t)-1)^+$$
$$\leq \sum_{t=0}^{n} (2(m-k-t)-1)^+.$$

Таким образом утверждение полностью доказано. $\square$

Можно заметить, что при $t > m$ значения (2.2) и (2.3) стабилизируются. Таким образом, справедливо следующее

Утверждение 2.2. *Для значения бесконечной игры справедливо следующее неравенство:*

$$V_\infty^m(p) <= H^m(p) = \min_{j \in J}(p(m-j)^2 + (1-p)j^2). \tag{2.4}$$

Proof. При каждом j:

$$\begin{aligned}
h_{m+1}^H(\tau^j) &= \sum_{t=0}^{m}(2(m-j-t)-1)^+ = \\
&= (2 \cdot 0 - 1)^+ + (2 \cdot 1 - 1)^+ + \ldots + (2(m-j)-1)^+ = \\
&= (m-j)(m-j+1) - (m-j) = (m-j)^2 \\
h_{m+1}^L(\tau^j) &= \sum_{t=0}^{m}(2(j-t)-1)^+ = \\
&= (2 \cdot 0 - 1)^+ + (2 \cdot 1 - 1)^+ + \ldots + (2 \cdot j - 1)^+ = \\
&= j(j+1) - j = j^2
\end{aligned}$$

Отсюда и из (1.3) очевидным образом получаем (2.4). Утверждение доказано. □

Лемма 2.1. *Функция $H^m(p)$ является кусочно-линейной функцией, состоящей из $m+1$ линейных сегментов, и полностью определяется своими значениями в следующих точках:*

$$\begin{gathered}
H^m(0) = H^m(1) = 0, \\
H^m\left(\tfrac{k+1/2}{m}\right) = \tfrac{m}{2} + mk - k^2 - k,\ k = \overline{0, m-1}
\end{gathered}$$

Proof. Квадратичная функция $\omega(x) = p(m-x)^2 + (1-p)x^2$ достигает минимума при $x = pm$. Отсюда при $p \in \left(\frac{k-1/2}{m}, \frac{k+1/2}{m}\right]$ минимум $p(m-j)^2 + (1-p)j^2$ по целым j достигается при $j = k$.

Отсюда видно, что $H^m(p)$ является кусочно-линейной функцией, которая полностью определяется своими значениями в точках $p = \frac{k+1/2}{m}$, $k = \overline{0, m-1}$. Значение $H^m(p)$ при $p = \frac{k+1/2}{m}$ легко находится подстановкой $j = k$. □

3. Оценка снизу

Пусть на первом шаге первый игрок применяет $\sigma_1^k = (\sigma_1^H, \sigma_1^L)$, где $\sigma_1^H = (\sigma_{1,k}^H, \sigma_{1,k+1}^H)$ и $\sigma_1^L = (\sigma_{1,k}^L, \sigma_{1,k+1}^L)$, где $\sigma_{1,i}^S$ – вероятность сделать ставку равную i в состоянии $S \in \{H, L\}$. Т.е. при применении σ_1^k первый игрок делает ставки k и $k+1$ с некоторыми заданными вероятностями.

Также σ_1^k можно определить, если задать полные вероятности действий k и $k+1$ равные q_k и q_{k+1}, а также апостериорные вероятности $p(S|i)$ состояния S, если на первом шаге игрок сделал ставку i. При этом вероятности $\sigma_{1,i}^S$ легко рассчитываются по формуле Байеса

$$\sigma_{1,i}^S = \frac{p(S|i)q_i}{p(S)}.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться именно таким параметрическим заданием σ_1^k.

Утверждение 3.1. *При использовании σ_1^k первый игрок гарантирует себе на первом шаге выигрыш:*

$$K_1(p, \sigma_1^k, j) = \begin{cases} 2mp - j - k - q_{k+1}, & j < k, \\ 2mp(H|k+1)q_{k+1} - (2k+1)q_{k+1}, & j = k, \\ (2k+1)q_k - 2mp(H|k)q_k, & j = k+1, \\ j + k - 2mp + q_{k+1}, & j > k+1. \end{cases} \tag{3.1}$$

Proof. По определению

$$K_1(p, \sigma_1^k, j) = pA^H(\sigma_1^H, j) + (1-p)A^L(\sigma_1^L, j). \tag{3.2}$$

Распишем выигрыш на первом шаге в зависимости от значения j действия второго игрока. При $j < k$ имеем:

$$A^H(\sigma_1^H, j) = \sigma_{1,k}^H(2m - j - k) + \sigma_{1,k+1}^H(2m - j - k - 1) = (2m - j - k) - \sigma_{1,k+1}^H,$$
$$A^L(\sigma_1^L, j) = \sigma_{1,k}^L(-j - k) + \sigma_{1,k+1}^L(-j - k - 1) = -j - k - \sigma_{1,k+1}^L,$$

Отсюда получаем, что

$$K_1(p, \sigma_1^k, j) = p(2m - j - k) - p\sigma_{1,k+1}^H + (1-p)(-j-k) - (1-p)\sigma_{1,k+1}^L =$$
$$= 2mp - j - k - (p\sigma_{1,k+1}^H + (1-p)\sigma_{1,k+1}^L) = 2mp - j - k - q_{k+1}.$$

Аналогично при $j = k$ имеем:

$$A^H(\sigma_1^H, k) = \sigma_{1,k+1}^H(2m - 2k - 1),\ A^L(\sigma_1^L, k) = \sigma_{1,k+1}^L(-2k - 1),$$
$$K_1(p, \sigma_1^k, k) = 2mp\sigma_{1,k+1}^H - (2k+1)q_{k+1} = 2mp(H|k+1)q_{k+1} - (2k+1)q_{k+1}$$

Значения $K_1(p, \sigma_1^k, j)$ при $j \geq k+1$ получаются из соображений симметрии. $\square$

Введем на $[0, 1]$ разбиение P_k с точками

$$p_k^{even} = \tfrac{k}{m},\ k = \overline{0, m} \quad \text{и} \quad p_k^{odd} = \tfrac{k}{m} + \tfrac{1}{2m},\ k = \overline{0, m-1}.$$

Определим через ϕ_k^{even} такое действие первого игрока, что $\phi_k^{even} = \sigma_1^k$ с параметрами

$$p(H|k) = \frac{k}{m} - \frac{1}{2m}, \quad p(H|k+1) = \frac{k}{m} + \frac{1}{2m}, \quad q_k = q_{k+1} = \frac{1}{2}$$

Пусть также $\phi_0^{even} = 0$, $\phi_m^{even} = m$ (т.е. если неопределенности нет, первый игрок использует минимаксную стратегию). Аналогично, через ϕ_k^{odd} определим такое действие первого игрока, что $\phi_k^{odd} = \sigma_1^k$ с параметрами

$$p(H|k) = \frac{k}{m}, \quad p(H|k+1) = \frac{k+1}{m}, \quad q_k = q_{k+1} = \frac{1}{2}$$

Утверждение 3.2. *При $p = p_k^{even}$ первый игрок может гарантировать себе выигрыш на первом шаге не менее 0, при $p = p_k^{odd}$ первый игрок может гарантировать себе выигрыш не менее $\frac{1}{2}$.*

Proof. Действительно, пусть при $p = p_k^{even}$ первый игрок применяет ϕ_k^{even}, а при $p = p_k^{odd}$ применяет ϕ_k^{odd}. Тогда из утверждения 3.1 немедленно получаем справедливость данного утверждения. $\square$

Заметим, что если $p \in P_k$, то при применении ϕ_k^{even} и ϕ_k^{odd} апостериорные вероятности также принадлежат P_k. Таким образом, определив действие первого игрока на первом шаге для произвольного значения вероятности p, мы тем самым определим стратегию первого игрока в игре $G_n^m(p)$ произвольной продолжительности.

В силу рекурсивной структуры игры $G_n^m(p)$ можно выписать рекуррентную формулу для нижней оценки значения игры $L_n^m(p)$ при $p \in P_k$:

$$L_n^m\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{m}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(L_{n-1}^m\left(\frac{k}{m}\right)+L_{n-1}^m\left(\frac{k+1}{m}\right)\right)$$
$$L_n^m\left(\frac{k+1}{m}\right)=\frac{1}{2}\left(L_{n-1}^m\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{m}\right)+L_{n-1}^m\left(\frac{k+\frac{3}{2}}{m}\right)\right) \tag{3.3}$$
$$L_n^m(0)=L_n^m(1)=0.$$

Устремив n в бесконечность получим рекуррентную формулу для нижней оценки значения игры $G_\infty^m(p)$. Перепишем эту рекуррентную формулу в следующем виде:

$$\begin{aligned} L_0&=0,\ L_{2m}=0,\\ L_{2k+1}&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(L_{2k}+L_{2k+2}),\ k=\overline{0,m-1}\\ L_{2k+2}&=\frac{1}{2}(L_{2k+1}+L_{2k+3}),\ k=\overline{0,m-1}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Введем следующее обозначение:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} b=\left.\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\\ 0\\ \cdots\\ 0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}\right\}(2m-1). \tag{3.5}$$

Тогда (3.4) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} AL&=b,\\ L_0&=L_{2m}=0, \end{aligned}$$

где $L=(L_1,L_2,\ldots,L_{2m-1})^T$.

Известно, что системы $Mx=F$ с трехдиагональной матрицей M, имеющей следующую структуру:

$$M=\begin{pmatrix} c_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & c_{n-1} & b_{n-1}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & c_n \end{pmatrix}$$

можно решать методом прогонки, используя следующие формулы для прогоночных коэффициентов и значения переменного:

$$\begin{aligned} & x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}, && x_n = \frac{F_n - a_n \beta_n}{c_n + a_n \alpha_n} \\ & \alpha_{i+1} = -\frac{b_i}{c_i + a_i \alpha_i}, && \alpha_2 = -\frac{b_1}{c_1} \\ & \beta_{i+1} = \frac{F_i - a_i \beta_i}{c_i + a_i \alpha_i}, && \beta_2 = \frac{F_1}{c_1} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Матрица A является трехдиагональной матрицей, в которой $a_i = b_i = -\frac{1}{2}$, $c_i = 1$. В этом случае мы можем получить явные выражения для прогоночных коэффициентов и значения L.

Утверждение 3.3. *Прогоночные коэффициенты для матрицы A выражаются следующим образом:*

$$\alpha_i = \frac{i-1}{i} \tag{3.7}$$

$$\beta_{2i} = \frac{2i}{4},\ \beta_{2i+1} = \frac{i^2}{2i+1} \tag{3.8}$$

Proof. Проведем доказательство по индукции.

Сначала для α_i. $\alpha_2 = \frac{1}{2}/1 = \frac{1}{2}$. База индукции проверена. Пусть теперь $\forall i \leq n$ справедливо (3.7). Докажем, что (3.7) справедливо при $i = n+1$.

$$a_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{n+1}{2n}} = \frac{n}{n+1}.$$

Утверждение доказано для α_i. Аналогично для β_i: $\beta_2 = \frac{1}{2}$, $\beta_3 = \frac{0+1/2\cdot 1/2}{1-1/2\cdot 1/2} = \frac{1}{3}$. База индукции проверена. Пусть $\forall i \leq n$ справедливо (3.8). Докажем, что (3.8) справедливо при $i = n+1$.

$$\beta_{2(n+1)+1} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{n^2}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2}\frac{2n}{2n+1}} = \frac{1}{2}\frac{\frac{(n+1)^2}{2n+1}}{\frac{n+1}{2n+1}} = \frac{2(n+1)}{4}$$

$$\beta_{2(n+1)+1} = \frac{\frac{1}{2}\frac{2(n+1)}{4}}{1 - \frac{1}{2}\frac{2n+1}{2(n+1)}} = \frac{n+1}{4} \cdot 2 \cdot \frac{2(n+1)}{2n+3} = \frac{(n+1)^2}{2n+3}$$

Утверждение полностью доказано. □

Из утверждения 3.3 и соображений симметрии, мы можем найти значение $L_{2m-1} = L_1$. Действительно,

$$L_1 = L_{2m-1} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{(m-1)^2}{2m-1}}{1 - \frac{1}{2}\frac{2m-1-1}{2m-1}} = \frac{2m-1+(m-1)^2}{4m-2-2m+2} =$$
$$= \frac{2m-1+m^2-2m+1}{2m} = \frac{m}{2}. \qquad (3.9)$$

Так как

$$L_{2(m+1)} = \frac{1}{2}(L_{2m+1} + L_{2(m+1)+1}),$$

то нам достаточно найти явный вид только для нечетных L_i. Из (3.6) и утверждения 3.3 мы получаем, что

$$L_{2i+1} = \alpha_{2(i+1)}(\alpha_{2(i+1)+1}L_{2(i+1)+1} + \beta_{2(i+1)+1}) + \beta_{2(i+1)} =$$
$$= \alpha_{2(i+1)}\alpha_{2(i+1)+1}L_{2(i+1)+1} + \alpha_{2(i+1)}\beta_{2(i+1)+1} + \beta_{2(i+1)} =$$
$$= \frac{2i+1}{2i+3}L_{2i+3} + \frac{2(i+1)^2}{2i+3}. \qquad (3.10)$$

Утверждение 3.4. *Решение* (3.9), (3.10) *дается следующей формулой:*

$$L_{2k+1} = \frac{m}{2} + mk - k^2 - k. \qquad (3.11)$$

Proof. Для простоты перепишем (3.9), (3.10) в следующем виде:

$$f_{k+1} = \frac{2k+3}{2k+1}f_k - \frac{2(k+1)^2}{2k+1}, \quad f_0 = \frac{m}{2}. \qquad (3.12)$$

Решение этого конечно-разностного уравнения будем искать в следующем виде:

$$f(k) = f^*(k) + Cf^O(k),$$

где $f^*(k)$ – частное решение неоднородного уравнения, а $f^O(k)$ – решение однородного уравнения.

Сначала найдем $f^O(k)$. Для $f^O(k)$ выполнено

$$f_1^O = \frac{3}{1}f_0$$
$$f_2^O = \frac{5}{3}f_1$$
$$\dots$$
$$f_k^O = \frac{2k+1}{2k-1}f_{k-1}^O$$

Тогда $f_k^O = (2k+1)f_0^O$ и можно положить $f^O(k) = 2k+1$.

Перейдем к поиску частного решения. Будем искать его в виде $f^*(k) = ak^2 + bk + c$. Тогда

$$\begin{aligned}
&2k\left[a(k+1)^2 + b(k+1) + c - ak^2 - bk - c)\right] + \\
&\left[a(k+1)^2 + b(k+1) + c - 3ak^2 - 3bk - 3c\right] = -2k^2 - 4k - 2 \\
&2ak^2 + 4ak + a + b - 2c = -2k^2 - 4k - 2
\end{aligned}$$

Положим $a = -1$, $b = -1$, $c = 0$. Тогда $f^*(k) = -k^2 - k$. Таким образом $f(k) = -k^2 - k + C(2k+1)$.

Из граничного условия найдем, что $C = \frac{m}{2}$ и

$$f(k) = \frac{m}{2} + mk - k - k^2,$$

а значит

$$L_{2k+1} = \frac{m}{2} + mk - k - k^2.$$

Утверждение доказано. $\square$

Таким образом функция $L^m(p)$ определена при

$$p \in \left\{ \frac{i}{m}, \frac{j+1/2}{m}, \mid i = \overline{0,m},\ j = \overline{0,m-1} \right\}.$$

Для того, чтобы определить эту функцию при p лежащих внутри соответствующих отрезком нам нужная стратегия, гарантирующая первому игроку выигрыш, лежащий на прямой, соединяющей крайние точки этих отрезком. Данная стратегия дается следующим утверждением.

Утверждение 3.5. *Рассмотрим следующие случаи:*

1. *Пусть* $p^a = \frac{k}{m}$, $p^b = \frac{k+1/2}{m}$, $p \in \left(p^a, p^b\right)$, $k = \overline{0, m-1}$. *Тогда определим первый шаг* σ_{lot}^k, *как* σ_1^k *с* $q_k = 2k + 1 - 2mp$, $q_{k+1} = 2(pm - k)$, $p(H|k) = \frac{k}{m}$, $p(H|k+1) = \frac{k+1/2}{m}$.
2. *Пусть* $p^a = \frac{k+1/2}{m}$, $p^b = \frac{k+1}{m}$, $p \in \left(p^a, p^b\right)$, $k = \overline{0, m-1}$. *Тогда определим первый шаг* σ_{lot}^k, *как* σ_1^k *с* $q_k = 2(k+1-mp)$, $q_{k+1} = 2mp - 2k - 1$, $p(H|k) = \frac{k+1/2}{m}$, $p(H|k+1) = \frac{k+1}{m}$.

В обоих случаях шаг σ_{lot}^k *гарантирует первому игроку неотрицательный одношаговый выигрыш. Если на последующих шагах игрок будет применять* σ_{eq}^k, *то он гарантирует себе выигрыш* $L^m(p)$, *лежащий на прямой, соединяющей* $L^m(p^a)$ *и* $L^m(p^b)$.

Proof. Проведем доказательство для случая 1. Доказательство для случая 2 проводится аналогично.

Из утверждения 3.1 подстановкой соответствующих переменных получаем:

- $j < k$: $K_1(p, \sigma_{lot}^k, j) = 2mp - j - k - 2mp + 2k = k - j \geq 1$.
- $j = k$: $K_1(p, \sigma_{lot}^k, j) = 2m\frac{k+1/2}{m}q_{k+1} - (2k+1)q_{k+1} = 0$.
- $j = k+1$: $K_1(p, \sigma_{lot}^k, j) = (2k+1)q_k - 2m\frac{k}{m}q_k = q_k > 0$.
- $j > k+1$: $K_1(p, \sigma_{lot}^k, j) = j + k - 2mp + 2mp - 2k = j - k \geq 2$.

Мы получили, что $K_1(p, \sigma_{lot}^k, j) \geq 0$.

Далее заметим, что после применения σ_{lot}^k апостериорные вероятности принадлежат множеству

$$\left\{\frac{i}{m}, \frac{j+1/2}{m}, \mid i = \overline{0, m},\ j = \overline{0, m-1}\right\}$$

. Это означает, что при применении на последующих шагах σ_{eq}^i игрок гарантирует себе $L^m(p) = q_k L^m(p^a) + q_{k+1} L^m(p^b)$. Из того, что

$$q_k = \frac{p^b - p}{p^b - p^a}, \quad q_{k+1} = \frac{p - p^a}{p^b - p^a}$$

следует, что $L^m(p)$ лежит на прямой, соединяющей $L^m(p^a)$ и $L^m(p^b)$. Доказательство закончено. □

Лемма 3.1. *Функция $L^m(p)$ является кусочно-линейной функцией, состоящей из m линейный сегментов, и полностью определяется своими значениями в следующих точках:*

$$L^m(0) = L^m(1) = 0,$$
$$L^m\left(\tfrac{k+1/2}{m}\right) = \tfrac{m}{2} + mk - k^2 - k,\ k = \overline{0, m-1}$$

Proof. Справедливость данной леммы непосредственно следует из утверждений 3.4 и 3.5. □

4. Значение игры $G_\infty^m(p)$

Теорема 4.1. *Игра $G_\infty^m(p)$ имеет значение*

$$V_\infty^m(p) = L^m(p) = H^m(p).$$

Оптимальная стратегия первого игрока σ^* описывается следующим образом: на каждом шаге игры при

$$p \in \left\{ \frac{k+1/2}{m}, \ \frac{k+1}{m} \mid k = \overline{0, m-1} \right\}$$

первый игрок применяет соответствующую σ_{eq}^k; при

$$p \in \left(\frac{k}{m}, \frac{k+1/2}{m} \right), \ k = \overline{0, m-1},$$

или

$$p \in \left(\frac{k+1/2}{m}, \frac{k+1}{m} \right), \ k = \overline{0, m-1},$$

игрок применяет соответствующую σ_{lot}^k.

Оптимальная стратегию второго игрока τ^* описывается следующим образом: при

$$p \in \left(\frac{k-1/2}{m}, \frac{k+1/2}{m} \right]$$

второй игрок применяет τ^k.

Proof. Непосредственно из лемм 2.1 и 3.1 следует, что $\forall \sigma \in \Sigma$, $\tau \in T$, где Σ и T – множество стратегий первого и второго игроков соответственно, справедливо

$$K_\infty^m(p, \sigma, \tau^*) \leq K_\infty^m(p, \sigma^*, \tau^*) = H^m(p) \leq K_\infty^m(p, \sigma^*, \tau).$$

А это значит, что σ^* и τ^* – оптимальные стратегии, и значение игры $V_\infty^m(p) = H^m(p)$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы.* М.: Наука, 1989.

2. Гельфонд А.О. *Исчисление конечных разностей.* М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012.

3. Aumann R.J., Maschler M. B. *Repeated Games with Incomplete Information.* The MIT Press, Cambridge, London

4. Domansky V. *Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets* // Int J Game Theory. 2007. V. 36. P. 241–257.