1. Описание

Рассмотрим следующую игру. Есть две платежные матрицы:

$$
\begin{aligned}
A^L(i,j) &= \frac{1}{m}\begin{cases} \frac{i+j}{2}, & i<j \\ 0, & i=j \\ -\frac{i+j}{2}, & i>j \end{cases} \\
A^H(i,j) &= \frac{1}{m}\begin{cases} \frac{i+j}{2}-m, & i<j \\ 0, & i=j \\ m-\frac{i+j}{2}, & i>j, \end{cases}
\end{aligned}
$$

На первом шаге случай выбирает $S \in \{H, L\}$, причем вероятности выбора H и L равны $p(H) = p$ и $p(L) = (1-p)$ соответственно. Первый игрок осведомлен о выборе случая, второй игрок знает только вероятностное распределение на $\{H, L\}$.

После этого на протяжении $n \le \infty$ шагов игроки играют в игру A^S.

Множество чистых стратегий первого и второго игроков $i \in I = \{0, 1, \dots, m\}$, $j \in J = \{0, 1, \dots, m\}$.

Выигрыш каждого из игроков равен суммарному выигрышу за n шагов.

Для упрощения вычислений умножим платежные матрицы на $2m$:

$$
A^L(i,j) = \begin{cases} i+j, & i<j \\ 0, & i=j \\ -i-j, & i>j \end{cases} \tag{1}
$$

$$
A^H(i,j) = \begin{cases} i+j-2m, & i<j \\ 0, & i=j \\ 2m-i-j, & i>j \end{cases} \tag{2}
$$

В дальнейшем будем рассматривать повторяющуюся игру именно с матрицами (1) и (2), которую назовем $G_n^m(p)$. При применении первым игроков смешанной стратегий $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, где $\sigma_t = (\sigma_t^L, \sigma_t^H)$, а вторым игроком смешанной стратегии $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$, выигрыш равен

$$K_n^m(p, \sigma, \tau) = \sum_{t=1}^{n} \left(pA^H(\sigma_t^H, \tau_t) + (1-p)A^L(\sigma_t^L, \tau_t) \right). \qquad (3)$$

2. Оценка сверху

Рассмотрим следующую чистую стратегию второго игрока τ^k:

$$\tau_1^k = k$$

$$\tau_t^k(i_{t-1}, j_{t-1}) = \begin{cases} j_{t-1} - 1, & i_{t-1} < j_{t-1} \\ j_{t-1}, & i_{t-1} = j_{t-1} \\ j_{t-1} + 1, & i_{t-1} > j_{t-1} \end{cases} \tag{4}$$

***Утверждение* 1.** *При применении стратегии* (4) *в игре* $G_n^m(p)$ *второй игрок может гарантировать себе выигрыш не более:*

$$h_n^L(\tau^k) \;=\; \sum_{t=0}^{n-1}(2(k-t)-1)^+, \tag{5}$$

$$h_n^H(\tau^k) \;=\; \sum_{t=0}^{n-1}(2(m-k-t)-1)^+, \tag{6}$$

в состояниях L *и* H *соответственно.*

Доказательство. Проведем доказательство по индукции. Для $h_n^L(\tau^k)$:

$$h_1^L(\tau^k) = \max_{i\in I} a_{ik}^L = \max(0, 2k-1).$$

Таким образом база индукции для $h_n^L(\tau^k)$ проверена.

Пусть $\forall t \leq n$ выполнено (5). Докажем, что (5) выполняется при $t = n+1$.

$$h_{n+1}^L(\tau^k) = \max_{i\in I}(a_{ik}^L + h_n^L(\tau^{c(i)})),$$

где

$$c(i) = \begin{cases} k-1, & i < k \\ k, & i = k \\ k+1, & i > k. \end{cases}$$

Рассмотрим значение выигрыша в зависимости от действия i первого игрока:

- $i < k$:

$$\begin{aligned} h_{n+1}^L(\tau^k) &= 2k - 1 + h_n^L(\tau^{k-1}) = \\ &= 2k - 1 + \sum_{t=0}^{n-1} (2(k-1-t)-1)^+ = \\ &= \sum_{t=0}^{n} (2(k-t)-1)^+ \end{aligned}$$

- $i = k$:

$$h_{n+1}^L(\tau^k) = h_n^L(\tau^k) \le \sum_{t=0}^{n} (2(k-t)-1)^+.$$

- $i > k$:

$$\begin{aligned} h_{n+1}^L(\tau^k) &= -2k - 1 + h_n^L(\tau^{k+1}) = \\ &= -2k - 1 + \sum_{t=-1}^{n-2} (2(k-t)-1)^+ \\ &\le \sum_{t=0}^{n} (2(k-t)-1)^+. \end{aligned}$$

Индуктивный переход обоснован, и (5) доказано. Аналогично для (6).

$$h_1^H(\tau^k) = \max_{i\in I} a_{ik}^H = \max(0, 2(m-k)-1).$$

База индукции для $h_n^H(\tau^k)$ проверена. Пусть $\forall t \le n$ выполнено (6). Докажем, что (6) выполняется при $t = n+1$.

$$h_{n+1}^H(\tau^k) = \max_{i\in I}(a_{ik}^H + h_n^H(\tau^{c(i)}).$$

- $i > k$:

$$\begin{aligned} h^H_{n+1}(\tau^k) &= 2m - 2k - 1 + h^H_n(\tau^{k-1}) = \\ &= 2(m-k) - 1 + \sum_{t=0}^{n-1}(2(m-k-1-t)-1)^+ = \\ &= \sum_{t=0}^{n}(2(m-k-t)-1)^+ \end{aligned}$$

- $i = k$:

$$h^H_{n+1}(\tau^k) = h^H_n(\tau^k) \leq \sum_{t=0}^{n}(2(m-k-t)-1)^+.$$

- $i < k$:

$$\begin{aligned} h^H_{n+1}(\tau^k) &= 2k - 1 - 2m + h^H_n(\tau^{k+1}) = \\ &= 2k - 1 - 2m + \sum_{t=-1}^{n-2}(2(m-k-t)-1)^+ \\ &\leq \sum_{t=0}^{n}(2(m-k-t)-1)^+. \end{aligned}$$

Таким образом индуктивный переход обоснован и утверждение полностью доказано. □

Можно заметить, что при $t > m$ значения (5) и (6) стабилизируются. Таким образом, справедливо следующее

Утверждение 2. *Для значения бесконечной игры справедливо следующее неравенство:*

$$V^m_\infty(p) <= H^m(p) = \min_{j \in J}(p(m-j)^2 + (1-p)j^2). \tag{7}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
h^H_{m+1}(\tau^j) &= \sum_{t=0}^{m}(2(m-j-t)-1)^+ = \\
&= (2\cdot 0-1)^+ + (2\cdot 1-1)^+ + \ldots + (2(m-j)-1)^+ = \\
&= (m-j)(m-j+1) - (m-j) = (m-j)^2 \\
h^L_{m+1}(\tau^j) &= \sum_{t=0}^{m}(2(j-t)-1)^+ = \\
&= (2\cdot 0-1)^+ + (2\cdot 1-1)^+ + \ldots + (2\cdot j-1)^+ = \\
&= j(j+1) - j = j^2 \\
H^m(p) &= \min_{j\in J}\left(ph^H_{m+1}(\tau^j) + (1-p)h^L_{m+1}(\tau^j)\right) \\
&= \min_{j\in J}\left(p(m-j)^2 + (1-p)j^2\right).
\end{aligned}$$

□

Лемма 1. *Функция $H^m(p)$ является кусочно-линейной функцией, состоящей из m линейных сегментов, и полностью определяется своими значениями в следующих точках:*

$$H^m(0) = H^m(1) = 0,$$
$$H^m\left(\frac{k+1/2}{m}\right) = \frac{m}{2} + mk - k^2 - k,\ k = \overline{0, m-1}$$

Доказательство. Пусть $\omega(j) = p(m-j)^2 + (1-p)j^2$.

$$\omega'(j) = 2(j - pm), \quad \omega''(j) = 2.$$

Т.е. минимум $\omega(j)$ достигается при $j = pm$. Тогда при $p \in \left(\frac{k-1/2}{m}, \frac{k+1/2}{m}\right]$ минимум $p(m-j)^2 + (1-p)j^2$ достигается при $j = k$. Таким образом, показано, что $H^m(p)$ является кусочно-линейной функцией, которая полностью определяется своими значениями в точках $p = \frac{k+1/2}{m}$, $k = \overline{0, m-1}$. Найдем значение

$H^m(p)$ при $p = \frac{k+1/2}{m}$:

$$\begin{aligned} H^m\left(\frac{k+1/2}{m}\right) &= \frac{1}{m}\big((k+1/2)(m-k)^2 + (m-k-1/2)k^2\big) = \\ &= \frac{1}{m}\big(m^2/2 + m^2k - mk^2 - mk\big) = \\ &= \frac{m}{2} + mk - k^2 - k. \end{aligned}$$

Лемма полностью доказана. $\square$

3. Оценка снизу

Рассмотрим следующий шаг первого игрока $\sigma_1^k = (\sigma^H, \sigma^L)$, где $\sigma^H = (\sigma_k^H, \sigma_{k+1}^H)$ и $\sigma^L = (\sigma_k^L, \sigma_{k+1}^L)$, а σ_i^S – вероятность сделать ставку равную i в состоянии $S \in \{H, L\}$. Т.е. при применении σ_1^k первый игрок делает ставки k и $k+1$ с некоторыми заданными вероятностями.

Первый шаг можно также определить, если задать полные вероятности действий k и $k+1$ равные q_k и q_{k+1}, а также апостериорные вероятности $p(S|i)$ состояния S, если на первом шаге игрок сделал ставку i. При этом вероятности σ_i^S легко рассчитываются по формуле Байеса

$$\sigma_i^S = \frac{p(S|i)q_i}{p(S)}.$$

Утверждение 3. *При использовании шага σ_1^k первый игрок гарантирует себе следующий одношаговый выигрыш:*

$$K_1(p, \sigma_1^k, j) = \begin{cases} 2mp - j - k - q_{k+1}, & j < k, \\ 2mp(H|k+1)q_{k+1} - (2k+1)q_{k+1}, & j = k, \\ (2k+1)q_k - 2mp(H|k)q_k, & j = k+1, \\ j + k - 2mp + q_{k+1}, & j > k+1. \end{cases} \tag{8}$$

Доказательство.

$$K_1(p, \sigma_1^k, j) = pA^H(\sigma^H, j) + (1-p)A^L(\sigma^L, j). \tag{9}$$

Распишем одношаговый выигрыш в зависимости от значения j действия второго игрока и проведем нужные преобразования:

- $j < k$:

$$\begin{aligned}
A^H(\sigma^H, j) &= \sigma_k^H(2m - j - k) + \sigma_{k+1}^H(2m - j - k - 1) = \\
&= (2m - j - k) - \sigma_{k+1}^H, \\
A^L(\sigma^L, j) &= \sigma_k^L(-j - k) + \sigma_{k+1}^L(-j - k - 1) = \\
&= -j - k - \sigma_{k+1}^L, \\
K_1(p, \sigma_1^k, j) &= p(2m - j - k) - p\sigma_{k+1}^H + (1 - p)(-j - k) - (1 - p)\sigma_{k+1}^L = \\
&= 2mp - j - k - (p\sigma_{k+1}^H + (1 - p)\sigma_{k+1}^L) = \\
&= 2mp - j - k - q_{k+1}.
\end{aligned}$$

- $j = k$:

$$\begin{aligned}
A^H(\sigma^H, j) &= \sigma_{k+1}^H(2m - j - k - 1), \\
A^L(\sigma^L, j) &= \sigma_{k+1}^L(-j - k - 1), \\
K_1(p, \sigma_1^k, j) &= 2mp\sigma_{k+1}^H - (2k + 1)q_{k+1} \\
&= 2mp(H|k + 1)q_{k+1} - (2k + 1)q_{k+1}.
\end{aligned}$$

- $j = k + 1$:

$$\begin{aligned}
A^H(\sigma^H, j) &= \sigma_k^H(2k + 1 - 2m), \\
A^L(\sigma^L, j) &= \sigma_k^L(2k + 1), \\
K_1(p, \sigma_1^k, j) &= (2k + 1)q_k - 2mp\sigma_k^H \\
&= (2k + 1)q_k - 2mp(H|k)q_k.
\end{aligned}$$

- $j > k + 1$:

$$\begin{aligned}
A^H(\sigma^H, j) &= (j + k - 2m) + \sigma_{k+1}^H, \\
A^L(\sigma^L, j) &= j + k + \sigma_{k+1}^L, \\
K_1(p, \sigma_1^k, j) &= j + k - 2mp + q_{k+1}.
\end{aligned}$$

$\square$

Пусть теперь при $p = \frac{k+1/2}{m}$ и $p = \frac{k+1}{m}$, где $k = \overline{0, m-1}$, первый игрок делает шаг σ_1^k, такой что полные вероятности использования ставок k и $k+1$ равны $q_k = q_{k+1} = \frac{1}{2}$, причем апостериорные вероятности, присваиваемые вторым игроком состоянию H равны $p(H|k) = p - \frac{1}{2m}$ и $p(H|k+1) = p + \frac{1}{2m}$. Обозначим данный шаг через σ_{eq}^k.

Утверждение 4. *В вышеописанных предположениях при использовании шага σ_{eq}^k первый игрок может гарантировать себе выигрыш в одношаговой игре не менее $\frac{1}{2}$ при $p = \frac{k+1/2}{m}$ и не менее 0 при $p = \frac{k+1}{m}$.*

Доказательство. Подставив заданные q_k, q_{k+1}, $p(H|k)$, $p(H|k+1)$ в (8) получим при $p = \frac{k+1/2}{m}$:

- $j < k$: $K_1(p, \sigma_1^k, j) = k - j + \frac{1}{2} \geq 1\frac{1}{2}$;
- $j = k$: $K_1(p, \sigma_1^k, j) = \frac{1}{2}$;
- $j = k+1$: $K_1(p, \sigma_1^k, j) = \frac{1}{2}$;
- $j > k+1$: $K_1(p, \sigma_1^k, j) = 1\frac{1}{2}$.

Аналогично для $p = \frac{k+1}{m}$:

- $j < k$: $K_1(p, \sigma^k_, j) = 2\frac{1}{2}$;
- $j = k$: $K_1(p, \sigma_1^k, j) = 1$;
- $j = k+1$: $K_1(p, \sigma_1^k, j) = 0$;
- $j > k+1$: $K_1(p, \sigma_1^k, j) = \frac{1}{2}$.

Таким образом утверждение полностью доказано. □

Заметим, что если $p = \frac{k}{m}$ или $p = \frac{k+1/2}{m}$, то при применении σ_{eq}^k апостериорные вероятности на последующих шагах игры всегда принадлежат множеству $\left\{\frac{i}{m}, \frac{j+1/2}{m}, \mid i \in \overline{0,m}, j \in \overline{1,m-1}\right\}$. Таким образом, определив шаг первого игрока при любом значении апостериорной вероятности p, мы тем самым определим стратегию первого игрока для игры $G_n^m(p)$ произвольной продолжительности.

В силу рекурсивной структуры игры $G_n^m(p)$ можно выписать рекуррентную формулу для нижней оценки значения игры $L_n^m(p)$ при $p = \frac{k+1/2}{m}$ и $p = \frac{k+1}{m}$:

$$
\begin{aligned}
&L_n^m\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{m}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(L_{n-1}^m\left(\frac{k}{m}\right) + L_{n-1}^m\left(\frac{k+1}{m}\right)\right)\\
&L_n^m\left(\frac{k+1}{m}\right) = \frac{1}{2}\left(L_{n-1}^m\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{m}\right) + L_{n-1}^m\left(\frac{k+\frac{3}{2}}{m}\right)\right)\\
&L_n^m(0) = L_n^m(1) = 0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Устремив n в бесконечность получим рекуррентную формулу для нижней оценки значения игры $G_\infty^m(p)$. Перепишем эту рекуррентную формулу в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
L_0 &= 0\\
L_{2k+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(L_{2k} + L_{2k+2}),\ k = \overline{0, m-1}\\
L_{2k+2} &= \frac{1}{2}(L_{2k+1} + L_{2k+3}),\ k = \overline{0, m-1}\\
L_{2m} &= 0.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Введем следующее обозначение:

$$
A = \begin{pmatrix}
1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
-\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\multicolumn{7}{c}{\dotfill}\\
0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & 1
\end{pmatrix}
b = \left.\begin{pmatrix}
\frac{1}{2}\\ 0\\ \cdots\\ 0\\ \frac{1}{2}
\end{pmatrix}\right\}(2m-1).
\tag{12}
$$

Тогда (11) можно переписать следующим образом:

$$AL = b,$$
$$L_0 = L_{2m} = 0,$$

где $L = (L_1, L_2, \ldots, L_{2m-1})^T$.

Известно, что системы $Mx = F$ с трехдиагональной матрицей M, имеющей следующую структуру:

$$M = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & c_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & c_n \end{pmatrix}$$

можно решать методом прогонки, используя следующие формулы для прогоночных коэффициентов и значения переменного:

$$\begin{aligned} x_i &= \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}, & x_n &= \frac{F_n - a_n\beta_n}{c_n + a_n\alpha_n} \\ \alpha_{i+1} &= -\frac{b_i}{c_i + a_i\alpha_i}, & \alpha_2 &= -\frac{b_1}{c_1} \\ \beta_{i+1} &= \frac{F_i - a_i\beta_i}{c_i + a_i\alpha_i}, & \beta_2 &= \frac{F_1}{c_1} \end{aligned} \tag{13}$$

Матрица A является трехдиагональной матрицей, в которой $a_i = b_i = -\frac{1}{2}$, $c_i = 1$. В этом случае мы можем получить явные выражения для прогоночных коэффициентов и значения L.

Утверждение 5. *Прогоночные коэффициенты для матрицы A выражаются следующим образом:*

$$\alpha_i = \frac{i-1}{i} \tag{14}$$

$$\beta_{2i} = \frac{2i}{4},\ \beta_{2i+1} = \frac{i^2}{2i+1} \tag{15}$$

Доказательство. Проведем доказательство по индукции.

Сначала для α_i. $\alpha_2 = \frac{1}{2}/1 = \frac{1}{2}$. База индукции проверена. Пусть теперь $\forall i \le n$ справедливо (14). Докажем, что (14) справедливо при $i = n+1$.

$$a_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{n+1}{2n}} = \frac{n}{n+1}.$$

Утверждение доказано для α_i. Аналогично для β_i: $\beta_2 = \frac{1}{2}$, $\beta_3 = \frac{0+1/2\cdot 1/2}{1-1/2\cdot 1/2} = \frac{1}{3}$. База индукции проверена. Пусть $\forall i \le n$ справедливо (15). Докажем, что (15) справедливо при $i = n+1$.

$$\beta_{2(n+1)+1} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{n^2}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2}\frac{2n}{2n+1}} = \frac{1}{2}\frac{\frac{(n+1)^2}{2n+1}}{\frac{n+1}{2n+1}} = \frac{2(n+1)}{4}$$

$$\beta_{2(n+1)+1} = \frac{\frac{1}{2}\frac{2(n+1)}{4}}{1 - \frac{1}{2}\frac{2n+1}{2(n+1)}} = \frac{n+1}{4}\cdot 2 \cdot \frac{2(n+1)}{2n+3} = \frac{(n+1)^2}{2n+3}$$

Утверждение полностью доказано. □

Из утверждения 5 и соображений симметрии, мы можем найти значение $L_{2m-1} = L_1$. Действительно,

$$L_1 = L_{2m-1} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{(m-1)^2}{2m-1}}{1 - \frac{1}{2}\frac{2m-1-1}{2m-1}} = \frac{2m-1+(m-1)^2}{4m-2-2m+2} = \\ = \frac{2m-1+m^2-2m+1}{2m} = \frac{m}{2}. \qquad (16)$$

Так как

$$L_{2(m+1)} = \frac{1}{2}(L_{2m+1} + L_{2(m+1)+1}),$$

то нам достаточно найти явный вид только для нечетных L_i. Из (13) и утверждения 5 мы получаем, что

$$L_{2i+1} = \alpha_{2(i+1)}(\alpha_{2(i+1)+1}L_{2(i+1)+1} + \beta_{2(i+1)+1}) + \beta_{2(i+1)} = \\ = \alpha_{2(i+1)}\alpha_{2(i+1)+1}L_{2(i+1)+1} + \alpha_{2(i+1)}\beta_{2(i+1)+1} + \beta_{2(i+1)} = \\ = \frac{2i+1}{2i+3}L_{2i+3} + \frac{2(i+1)^2}{2i+3}. \qquad (17)$$

Утверждение 6. *Решение* (16), (17) *дается следующей формулой:*
$$L_{2k+1} = \frac{m}{2} + mk - k^2 - k. \qquad \textit{(18)}$$

Доказательство. Для простоты перепишем (16), (17) в следующем виде:
$$f_{k+1} = \frac{2k+3}{2k+1} f_k - \frac{2(k+1)^2}{2k+1}, \quad f_0 = \frac{m}{2}. \qquad (19)$$

Решение этого конечно-разностного уравнения будем искать в следующем виде:
$$f(k) = f^*(k) + Cf^O(k),$$
где $f^*(k)$ – частное решение неоднородного уравнения, а $f^O(k)$ – решение однородного уравнения.

Сначала найдем $f^O(k)$. Для $f^O(k)$ выполнено
$$\begin{aligned} f_1^O &= \frac{3}{1} f_0 \\ f_2^O &= \frac{5}{3} f_1 \\ &\cdots \\ f_k^O &= \frac{2k+1}{2k-1} f_{k-1}^O \end{aligned}$$

Тогда $f_k^O = (2k+1) f_0^O$ и можно положить $f^O(k) = 2k+1$.

Перейдем к поиску частного решения. Будем искать его в виде $f^*(k) = ak^2 + bk + c$. Тогда
$$\begin{aligned} &2k\left[a(k+1)^2 + b(k+1) + c - ak^2 - bk - c)\right] + \\ &\left[a(k+1)^2 + b(k+1) + c - 3ak^2 - 3bk - 3c\right] = -2k^2 - 4k - 2 \\ &2ak^2 + 4ak + a + b - 2c = -2k^2 - 4k - 2 \end{aligned}$$

Положим $a = -1$, $b = -1$, $c = 0$. Тогда $f^*(k) = -k^2 - k$. Таким образом $f(k) = -k^2 - k + C(2k+1)$.

Из граничного условия найдем, что $C = \frac{m}{2}$ и

$$f(k) = \frac{m}{2} + mk - k - k^2,$$

а значит

$$L_{2k+1} = \frac{m}{2} + mk - k - k^2.$$

Утверждение доказано. $\square$

Таким образом функция $L^m(p)$ определена при

$$p \in \left\{ \frac{i}{m}, \frac{j+1/2}{m}, \mid i = \overline{0, m},\ j = \overline{0, m-1} \right\}.$$

Для того, чтобы определить эту функцию при p лежащих внутри соответствующих отрезком нам нужная стратегия, гарантирующая первому игроку выигрыш, лежащий на прямой, соединяющей крайние точки этих отрезком. Данная стратегия дается следующим утверждением.

Утверждение 7. *Рассмотрим следующие случаи:*

1. *Пусть* $p^a = \frac{k}{m}$, $p^b = \frac{k+1/2}{m}$, $p \in \big(p^a, p^b\big)$, $k = \overline{0, m-1}$. *Тогда определим первый шаг* σ^k_{lot}, *как* σ^k_1 *с* $q_k = 2k + 1 - 2mp$, $q_{k+1} = 2(pm - k)$, $p(H|k) = \frac{k}{m}$, $p(H|k+1) = \frac{k+1/2}{m}$.

2. *Пусть* $p^a = \frac{k+1/2}{m}$, $p^b = \frac{k+1}{m}$, $p \in \big(p^a, p^b\big)$, $k = \overline{0, m-1}$. *Тогда определим первый шаг* σ^k_{lot}, *как* σ^k_1 *с* $q_k = 2(k + 1 - mp)$, $q_{k+1} = 2mp - 2k - 1$, $p(H|k) = \frac{k+1/2}{m}$, $p(H|k+1) = \frac{k+1}{m}$.

В обоих случаях шаг σ^k_{lot} *гарантирует первому игроку неотрицательный одношаговый выигрыш. Если на последующих шагах игрок будет применять* σ^k_{eq}, *то он гарантирует себе выигрыш* $L^m(p)$, *лежащий на прямой, соединяющей* $L^m(p^a)$ *и* $L^m(p^b)$.

Доказательство. Проведем доказательство для случая 1. Доказательство для случая 2 проводится аналогично.

Из утверждения 3 подстановкой соответствующих переменных получаем:

- $j < k$: $K_1(p, \sigma^k_{lot}, j) = 2mp - j - k - 2mp + 2k = k - j \geq 1$.
- $j = k$: $K_1(p, \sigma^k_{lot}, j) = 2m\frac{k+1/2}{m}q_{k+1} - (2k+1)q_{k+1} = 0$.
- $j = k+1$: $K_1(p, \sigma^k_{lot}, j) = (2k+1)q_k - 2m\frac{k}{m}q_k = q_k > 0$.
- $j > k+1$: $K_1(p, \sigma^k_{lot}, j) = j + k - 2mp + 2mp - 2k = j - k \geq 2$.

Мы получили, что $K_1(p, \sigma^k_{lot}, j) \geq 0$.

Далее заметим, что после применения σ^k_{lot} апостериорные вероятности принадлежат множеству

$$\left\{\frac{i}{m}, \frac{j+1/2}{m}, \,|\, i = \overline{0,m},\, j = \overline{0,m-1}\right\}$$

. Это означает, что при применении на последующих шагах σ^i_{eq} игрок гарантирует себе $L^m(p) = q_k L^m(p^a) + q_{k+1}L^m(p^b)$. Из того, что

$$q_k = \frac{p^b - p}{p^b - p^a}, \quad q_{k+1} = \frac{p - p^a}{p^b - p^a}$$

следует, что $L^m(p)$ лежит на прямой, соединяющей $L^m(p^a)$ и $L^m(p^b)$. Доказательство закончено. $\square$

Лемма 2. *Функция $L^m(p)$ является кусочно-линейной функцией, состоящей из m линейный сегментов, и полностью определяется своими значениями в следующих точках:*

$$L^m(0) = L^m(1) = 0,$$
$$L^m\left(\frac{k+1/2}{m}\right) = \frac{m}{2} + mk - k^2 - k,\; k = \overline{0,m-1}$$

Доказательство. Справедливость данной леммы непосредственно следует из утверждений 6 и 7. $\square$

4. Значение игры $G_{\infty}^{m}(p)$

***Теорема* 1.** *Игра $G_{\infty}^{m}(p)$ имеет значение*

$$V_{\infty}^{m}(p) = L^{m}(p) = H^{m}(p).$$

Оптимальная стратегия первого игрока σ^* описывается следующим образом: на каждом шаге игры при

$$p \in \left\{ \frac{k+1/2}{m}, \frac{k+1}{m} \mid k = \overline{0, m-1} \right\}$$

первый игрок применяет соответствующую σ_{eq}^{k}; при

$$p \in \left(\frac{k}{m}, \frac{k+1/2}{m} \right), \ k = \overline{0, m-1},$$

или

$$p \in \left(\frac{k+1/2}{m}, \frac{k+1}{m} \right), \ k = \overline{0, m-1},$$

игрок применяет соответствующую σ_{lot}^{k}.

Оптимальная стратегию второго игрока τ^* описывается следующим образом: при

$$p \in \left(\frac{k-1/2}{m}, \frac{k+1/2}{m} \right]$$

второй игрок применяет τ^k.

Доказательство. Непосредственно из лемм 1 и 2 следует, что $\forall \sigma \in \Sigma, \tau \in T$, где Σ и T – множество стратегий первого и второго игроков соответственно, справедливо

$$K_{\infty}^{m}(p, \sigma, \tau^*) \le K_{\infty}^{m}(p, \sigma^*, \tau^*) = H^{m}(p) \le K_{\infty}^{m}(p, \sigma^*, \tau).$$

А это значит, что σ^* и τ^* – оптимальные стратегии, и значение игры $V_{\infty}^{m}(p) = H^{m}(p)$. $\square$