Московский государственный
Ордена Ленина, Ордена Октябрьской Революции,
Ордена Красного Трудового Знамени
университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму на ЭВМ

«Реализация преобразования Фурье средствами Matlab»

Студент 315 группы
А. А. Самойлов

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

1 Постановка задачи

Требуется реализовать функцию в среде Matlab, которая, используя быстрое преобразование Фурье, будет считать аппроксимацию преобразования Фурье $F(\lambda)$ для функций:

1) $f_1(t) = \frac{2-t}{1+5t^2}$

2) $f_2(t) = e^{-t^2}\sinh t$

3) $f_3(t) = e^{|t|}\frac{1+2t}{1+t^4}$

4) $f_4(t) = \frac{1-\cos t^2}{t^3}$

Должна быть реализована возможность выбора шага дискретизации, входного и выходного окон. Для первых двух функций требуется посчитать преобразование Фурье в явном виде и сравнить графики полученных функций с графиками их аппроксимаций.

2 Теоретические сведения о задаче

$f(t)$ - функция, данная по условию.
$[a, b]$ - окно функции f(t).
Оконная функция:

$$h_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [a, b] \\ 0, & t \notin [a, b] \end{cases}$$

$step$ - шаг дискретизации. N - число точек множества, на котором строится функция.

3 Ход решения

1) Построим равномерное разбиение отрезка $[a, b]$ по N точкам
2) Пересчитаем шаг дискретизации так, чтобы в $[a, b]$ входил $N-1$ подотрезок длины $\Delta t = \frac{b-a}{N}$, где $N = round(\frac{b-a}{step})$. Δt - новый шаг дискретизации.
3) Обозначим $\tilde{f}(t) = f(t)h_{[a,b]}(t)$ и продолжим ее по периоду $b-a$. Зададим множество, на котором будет строиться преобразование Фурье:

$\{X_n\} = \{\tilde{f}(\Delta t n);\ n = \overline{0, N-1}\}$

4) Применим к этому множеству БПФ, реализуемое в Matlab функцией fft() и получим множество комплексных отсчетов:

$\{F_n\} = \{\Delta t \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{f}(\Delta t n)e^{-\frac{ikn}{N}};\ n = \overline{0, N-1}\}$

Частота дискретизации в частотной области преобразования Фурье находится по формуле:

$\Delta f = \frac{2\pi}{b-a}$

5) Продлеваем функцию по периоду, разделяем ее вещественную и мнимую части и строим их графики.

4 Аналитическое вычисление преобразования Фурье

1) $f(t) = \frac{2-t}{1+5t^2}$

$$\text{F}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2-t}{1+5t^2} e^{-i\lambda t}\, dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2-t}{(1+i\sqrt{5}t)(1-i\sqrt{5}t)} e^{-i\lambda t}\, dt$$

$t_1 = -\frac{1}{i\sqrt{5}}, t_2 = \frac{1}{i\sqrt{5}}$ - полюса I порядка.
Будем искать значение интеграла через вычеты.

$$\text{res}_{t=t1} = \lim_{t\to t1} (t+\tfrac{1}{i\sqrt{5}}) \frac{2-t}{(1+i\sqrt{5}t)(1-i\sqrt{5}t)} e^{-i\lambda t} = \lim_{t\to t1} \frac{2-t}{i\sqrt{5}(1-i\sqrt{5}t)} e^{-i\lambda t} = \frac{2+\frac{1}{i\sqrt{5}}}{i2\sqrt{5}} e^{\frac{\lambda}{\sqrt{5}}}$$

$$\text{res}_{t=t2} = \lim_{t\to t1} (t-\tfrac{1}{i\sqrt{5}}) \frac{2-t}{(1+i\sqrt{5}t)(1-i\sqrt{5}t)} e^{-i\lambda t} = \lim_{t\to t2} \frac{t-2}{i\sqrt{5}(1+i\sqrt{5}t)} e^{-i\lambda t} = \frac{\frac{1}{i\sqrt{5}}-2}{i2\sqrt{5}} e^{\frac{-\lambda}{\sqrt{5}}}$$

$$\text{F}(\lambda) = 2\pi i \begin{cases} res_{t=t1}, & \lambda < 0 \\ res_{t=t2}, & \lambda > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\pi e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{5}}}}{\sqrt{5}} (\frac{1}{i\sqrt{5}} - 2), & \lambda < 0 \\ \frac{\pi e^{\frac{\lambda}{\sqrt{5}}}}{\sqrt{5}} (\frac{1}{i\sqrt{5}} + 2), & \lambda > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\pi e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{5}}}}{5\sqrt{5}} (10 + i\sqrt{5}), & \lambda < 0 \\ \frac{\pi e^{\frac{\lambda}{\sqrt{5}}}}{5\sqrt{5}} (10 - i\sqrt{5}), & \lambda > 0 \end{cases}$$

2) $f(t) = e^{-t^2} \sinh t$

$$\text{F}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} (\tfrac{e^t - e^{-t}}{2}) e^{-i\lambda t}\, dt = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+t} e^{-i}\, dt - \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2-t} e^{-i\lambda t}\, dt =$$

$$= \{u = t - \tfrac{1}{2};\ v = t + \tfrac{1}{2}\} = \frac{e^{\frac{1}{4}}}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} e^{-i\lambda(u+\frac{1}{2})}\, du - \frac{e^{\frac{1}{4}}}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} e^{-i\lambda(v-\frac{1}{2})}\, dv =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{4}-\frac{i\lambda}{2}}}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} e^{-i\lambda u}\, du - \frac{e^{\frac{1}{4}+\frac{i\lambda}{2}}}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} e^{-i\lambda v}\, dv =$$

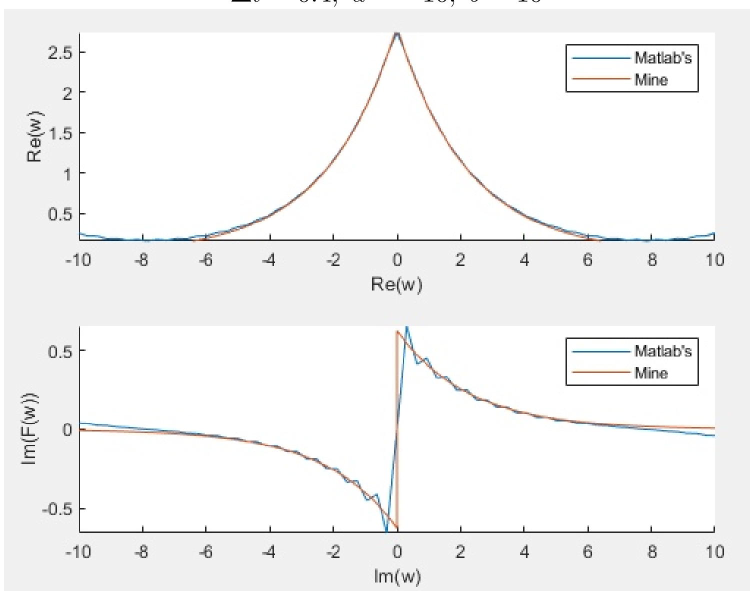
$$= \{g(t) = e^{-t^2} => G(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{-\lambda^2}{4}}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (e^{-\frac{\lambda^2}{4}} e^{\frac{1}{4}} (e^{-\frac{i\lambda}{2}} - e^{\frac{i\lambda}{2}})) =$$

$$= \sqrt{\pi} e^{\frac{1}{4}+\frac{\lambda^2}{4}} (\cos(-\tfrac{\lambda}{2}) + i\sin(-\tfrac{\lambda}{2}) - \cos(\tfrac{\lambda}{2}) - i\sin(\tfrac{\lambda}{2})) = -i\sqrt{\pi} e^{\frac{1}{4}+\frac{\lambda^2}{4}} \sin\frac{\lambda}{2}$$

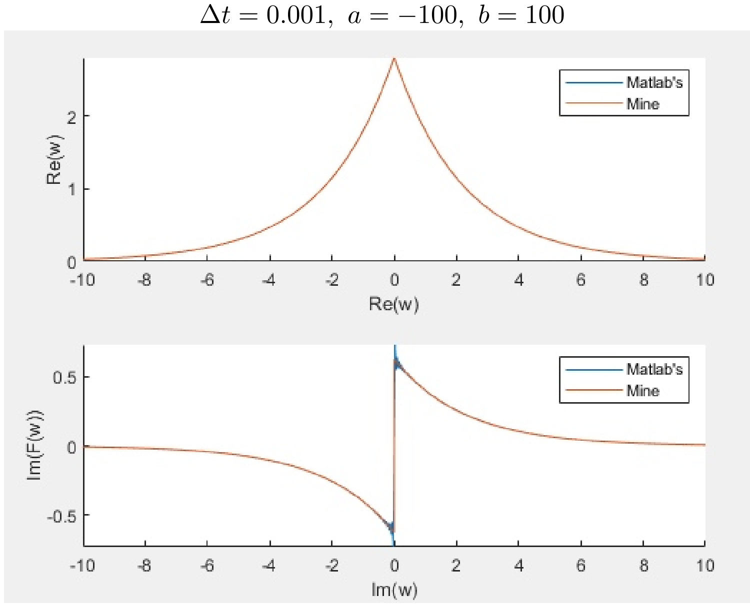
5 Построение Фурье-образов

5.1 $f_1(t) = \frac{2-t}{1+5t^2}$

$\Delta t = 0.4,\ a = -10,\ b = 10$

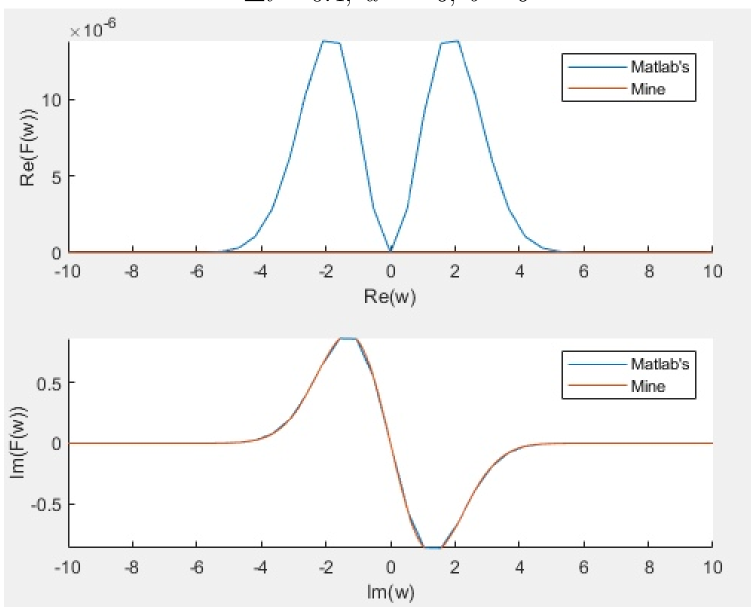


$\Delta t = 0.001,\ a = -100,\ b = 100$

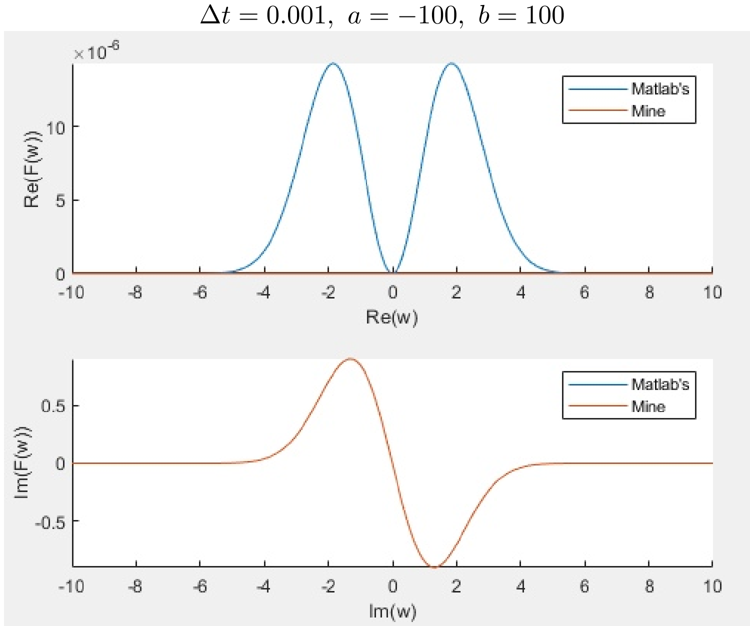


5.2 $f_2(t) = e^{-t^2} \sinh t$

$\Delta t = 0.4,\ a = -6,\ b = 6$

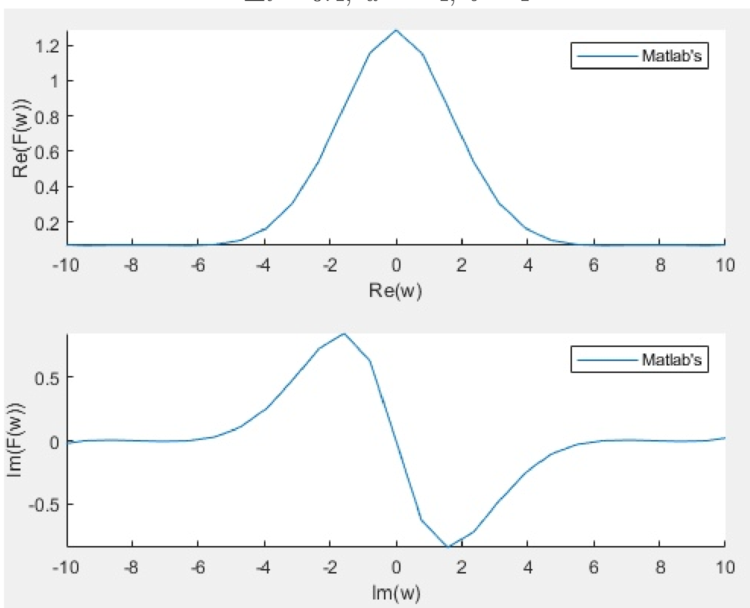


$\Delta t = 0.001,\ a = -100,\ b = 100$

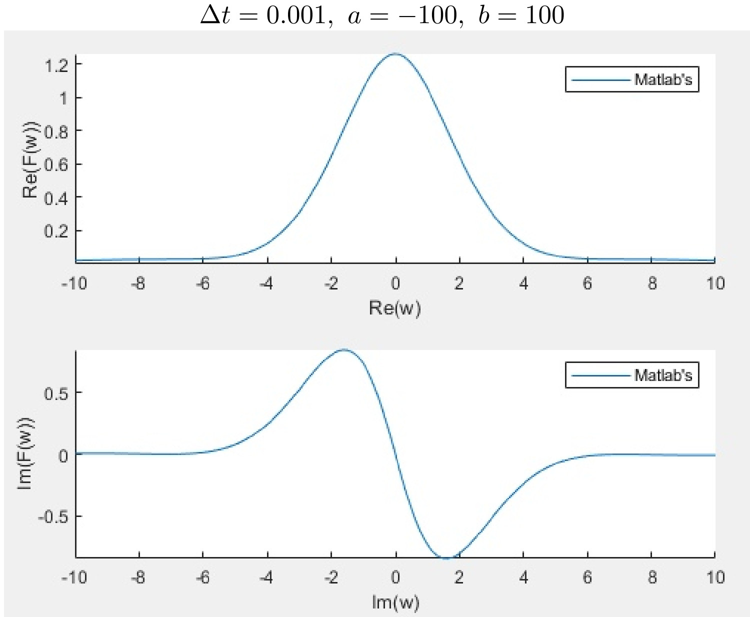


5.3 $f_3(t) = e^{|t|}\frac{1+2t}{1+t^4}$

$\Delta t = 0.4,\ a = -4,\ b = 4$

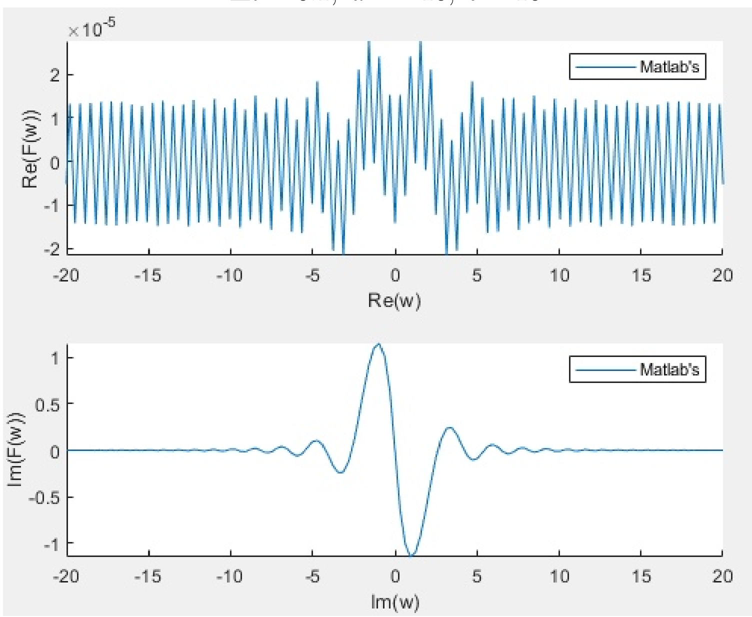


$\Delta t = 0.001,\ a = -100,\ b = 100$

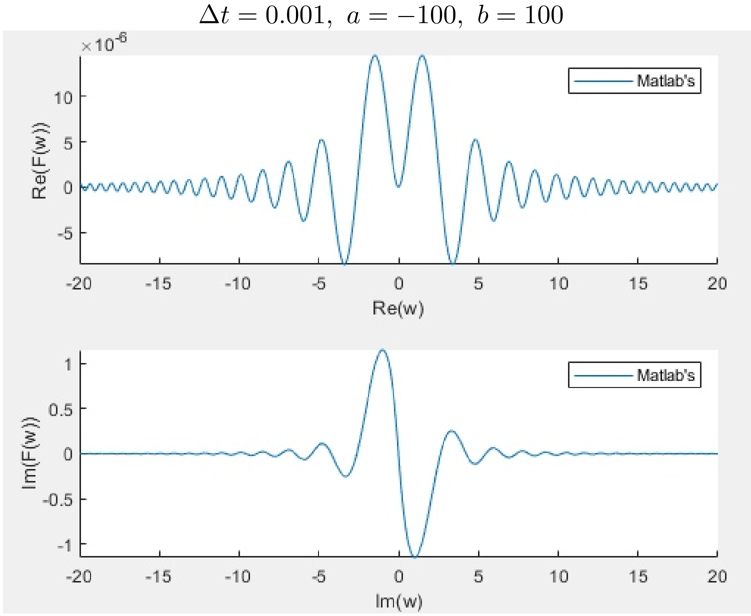


5.4 $f_4(t) = \frac{1-\cos t^2}{t^3}$

$\Delta t = 0.1,\ a = -10,\ b = 10$



$\Delta t = 0.001,\ a = -100,\ b = 100$

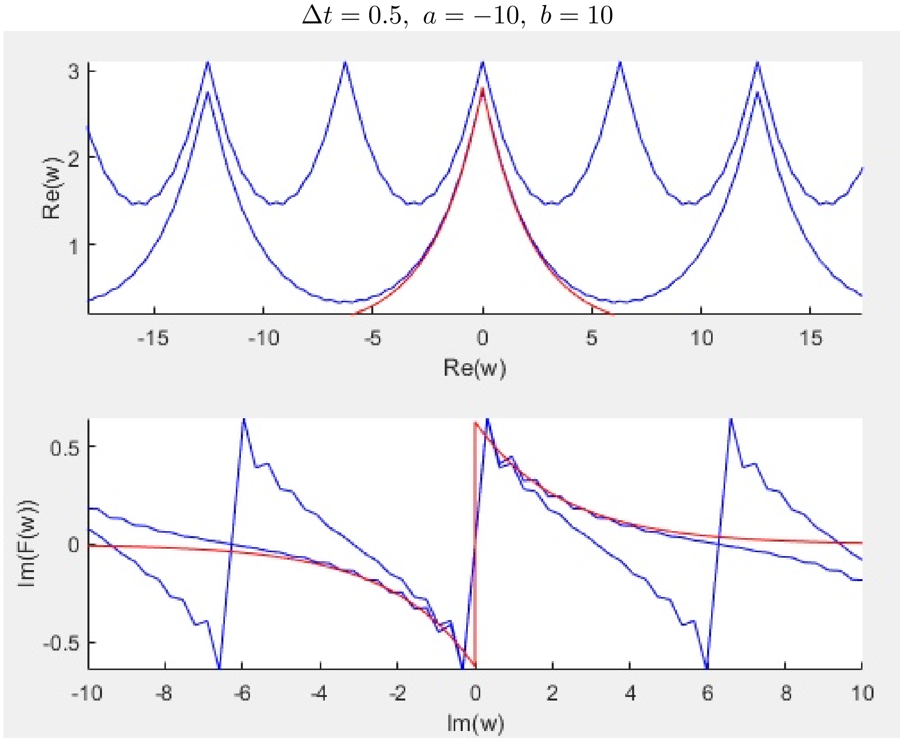


6 Эффект наложения спектра и его устранение

Для иллюстрации данного эффекта выберем 1 функцию, и сравним кривую аналитичкского решения(синяя) с двумя кривыми аппроксимаций(красные).

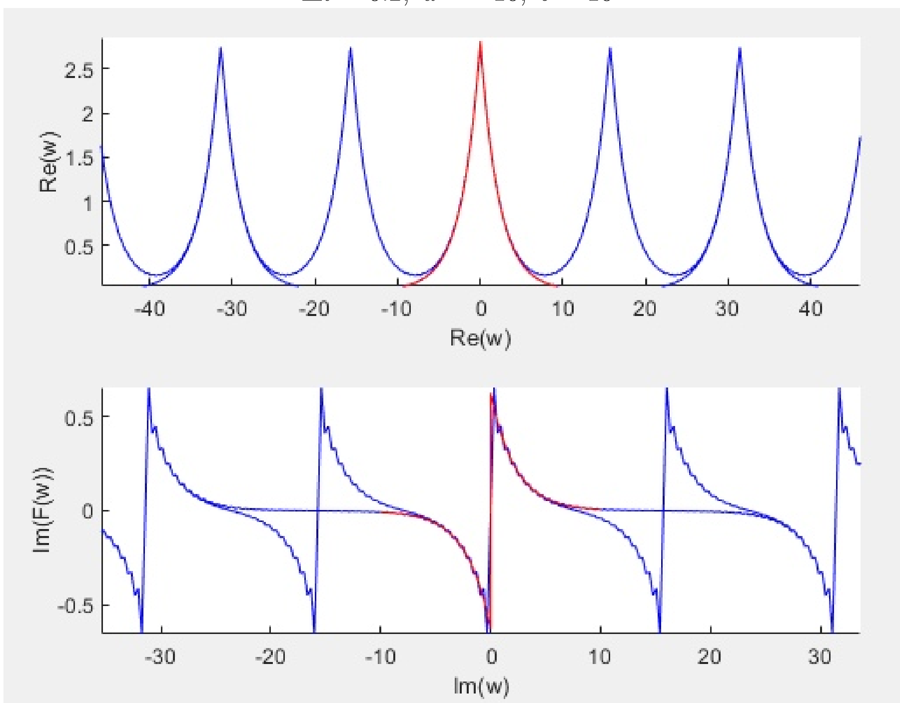
6.1 Сильное наложение, вызвоное большим шагом дискретизации:

$$\Delta t = 0.5,\ a = -10,\ b = 10$$



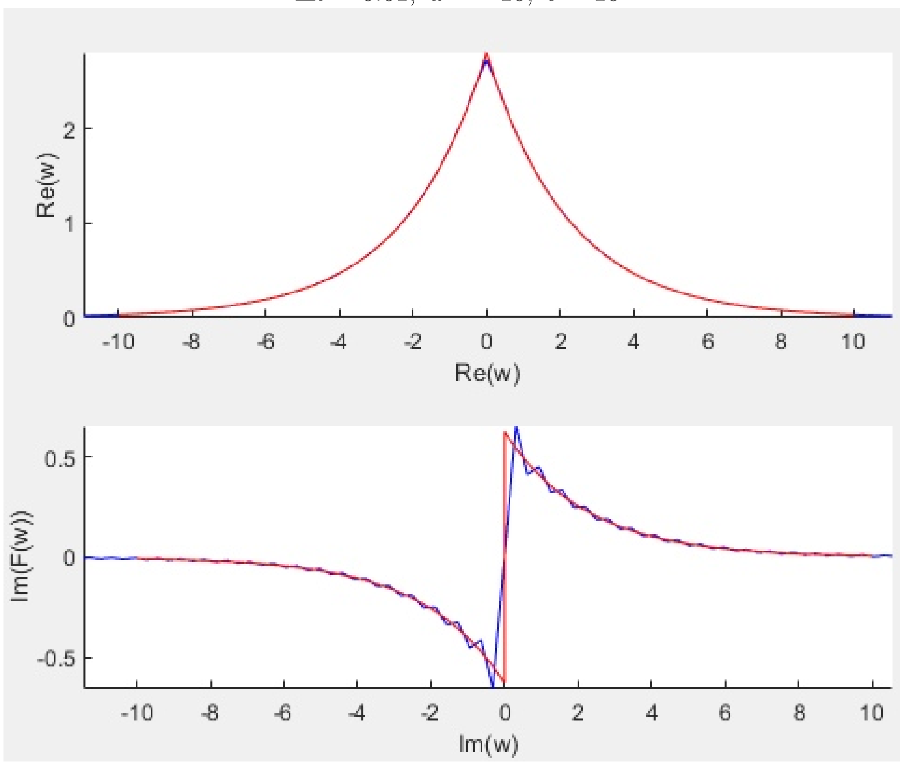
6.2 Улучшение ситуации при уменьшении шага дискретизации:

$\Delta t = 0.2,\ a = -10,\ b = 10$



6.3 Исчезновение эффекта наложения при последующем уменьшении шага дискретизации:

$\Delta t = 0.01,\ a = -10,\ b = 10$

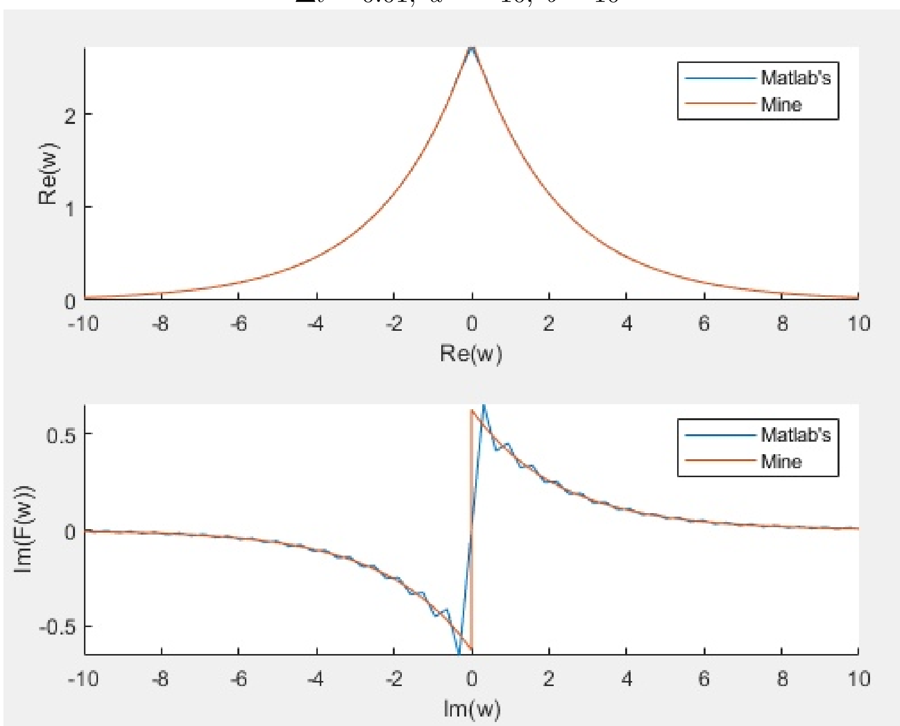


7 Рябь и ее минимизация:

Для иллюстрации ряби выберем график первой функции, так как у нее есть рябь в окрестности нуля в силу наличия в нуле разрыва II рода.

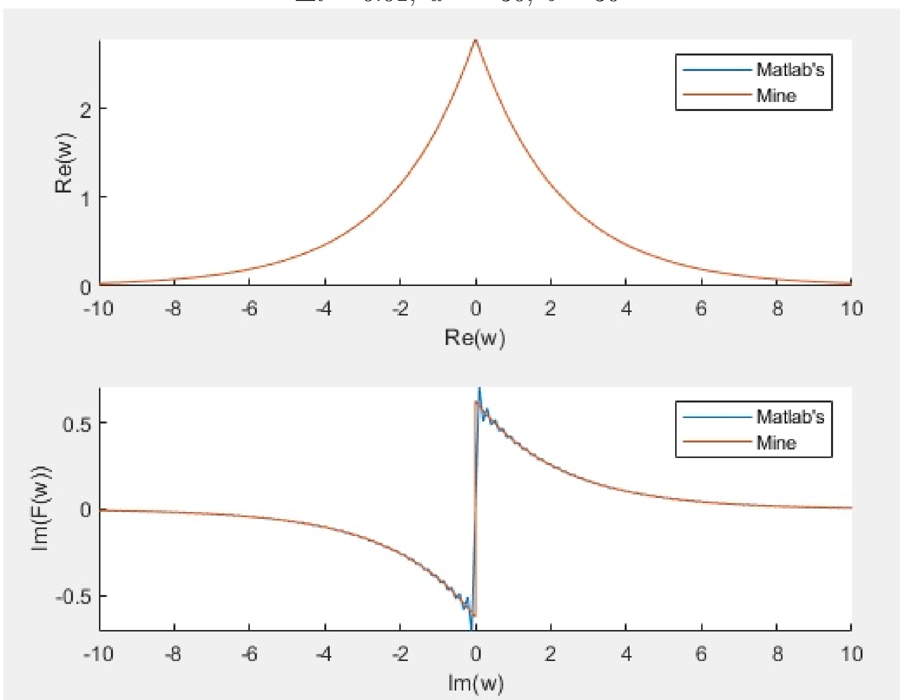
7.1 Сильная рябь при малом окне функции:

$$\Delta t = 0.01,\ a = -10,\ b = 10$$



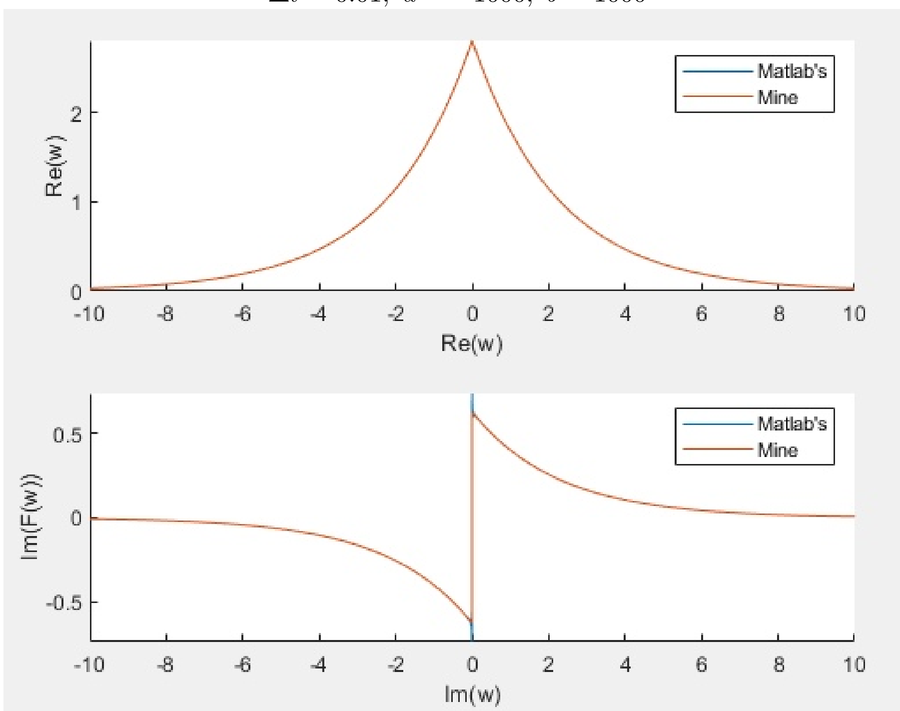
7.2 Уменьшение ряби при увеличении окна функции:

$\Delta t = 0.01,\ a = -30,\ b = 30$



7.3 Последующее уменьшение ряби при дальнейшем увеличении окна функции:

$$\Delta t = 0.01,\ a = -1000,\ b = 1000$$



К сожалению, в точках разрыва II рода полностью устранить рябь не получается, но можно свести ее визуальное присутствие к ε-окресности точки разрыва для любого $\varepsilon > 0$ путем увеличения окна функции.