Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Оптимальное управление»

Задание 1: линейная задача быстродействия

Студент 315 группы
И. В. Меньшиков

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., ассистент П. А. Точилин

Москва, 2012

Содержание

1 Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f, \tag{1}$$

где $t \in [t_0, +\infty)$, $x, f, u \in \mathbb{R}^2$, $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. На значение управляющих параметров u наложено ограничение: $u \in \mathcal{P}$. Пусть $\mathcal{X}_0$ — начальное множество значений фазового вектора, $\mathcal{X}_1$ — целевое множество значений фазового вектора.

$$\mathcal{P} = \left\{x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2 \,:\, a(x_1 - p_1)^4 + b(x_2 - p_2)^2 \le c\right\}, \ \ a, b, c > 0,$$

$\mathcal{X}_0$ — выпуклая оболочка трех шаров радиусов r_1, r_2, r_3 с центрами в точках $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$,

$$\mathcal{X}_1 = \{x_1\}.$$

Для этой системы ставится задача быстродействия, которая заключается в нахождении допустимого управления $u^*(t)$ и соответствующего ему решения $x^*(t)$ системы (1), переводящего объект из множества $\mathcal{X}_0$ в множество $\mathcal{X}_1$ за минимальное время T. Допустимыми будем считать измеримые управления, в каждый момент времени лежащие в множестве $\mathcal{P} \in \Omega(\mathbb{R}^n)$, где $\Omega(\mathbb{R}^n)$ — пространство непустых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$.

Необходимо написать в среде MatLab программу с пользовательским интерфейсом, которая по заданным параметрам A, B, f, t_0, a, b, c, p_1, p_2, r_1, r_2, r_3, $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, x_1 определяет, разрешима ли задача быстродействия. Если задача разрешима, то программа должна (приближенно) найти значение T, построить графики компонент оптимального управления, компонент оптимальной траектории, сопряженных переменных. Программа должна рассчитывать погрешность выполнения условий трансверсальности для найденной “оптимальной” траектории. Программа должна давать пользователю возможность постепенно улучшать результаты расчетов за счет изменения параметров численного метода и анализа получившихся приближённых результатов.

2 Теоретические выкладки

2.1 Вычисление опорных функций

Пусть задано множество $F \in \Omega(\mathbb{R}^n)$

Определение 1. *Опорной функцией множества F называется скалярная функция $\rho\,(l \mid F)$ векторного аргумента $l \in \mathbb{R}^n$, определяемая условием*

$$\rho\,(l \mid F) = \sup_{x \in F} \langle x, l \rangle\,.$$

Перечислим некоторые свойства опорной функции.

Свойство 1. *Функция* $\rho\left(\cdot \mid F\right)$ *положительно однородна, т.е.*

$$\rho\left(\lambda l \mid F\right) = \lambda \rho\left(l \mid F\right) \quad \forall \lambda \geq 0, \, \forall l \in \mathbb{R}^n.$$

Свойство 2. *Пусть* $F, G \in \Omega(\mathbb{R}^n)$*. Тогда*

$$\rho\left(l \mid F + G\right) = \rho\left(l \mid F\right) + \rho\left(l \mid G\right).$$

Свойство 3. *Пусть* A *— матрица размером* $n \times n$*. Тогда*

$$\rho\left(l \mid AF\right) = \rho\left(A^* l \mid F\right),$$

где A^* *— матрица, сопряженная с* A*.*

Свойство 4. *Пусть* $\mathrm{conv} F$ *— выпуклая оболочка множества* F*. Тогда*

$$\rho\left(l \mid \mathrm{conv} F\right) = \rho\left(l \mid F\right).$$

Свойство 5. *Функция* $\rho\left(l \mid F\right)$ *непрерывна по совокупности переменных* l, F *в каждой точке* (l_0, F_0)*.*

Свойство 6. *Пусть* $F, G \in \Omega(\mathbb{R}^n)$*. Тогда*

$$\rho\left(l \mid F \cup G\right) = \max\left\{\rho\left(l \mid F\right), \rho\left(l \mid G\right)\right\}.$$

Определение 2. *Вектор* $\psi_0 \in F$ *называется опорным вектором множества* F *в направлении* l*, если*

$$\rho\left(l \mid F\right) = \left\langle \psi_0, l \right\rangle.$$

Иными словами, ψ_0 *доставляет максимум скалярного произведения в определении опорной функции. Заметим, что такой вектор существует* $\forall l \in \mathbb{R}^n$*, так как множество* F *не пусто и компактно, а скалярное произведение непрерывно.*

2.1.1 Опорная функция множества $\{a\}$

Вычислим по определению опорную функцию и опорный вектор множества $\{a\}$, состоящего из одной точки $a \in \mathbb{R}^n$:

$$\rho\left(l \mid \{a\}\right) = \sup_{x \in \{a\}} \left\langle x, l \right\rangle = \left\langle a, l \right\rangle,$$

$$\psi_0 = a.$$

2.1.2 Опорная функция множества $B_1(0)$

Пусть $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| \le 1\}$. Вычислим по определению опорную функцию и опорный вектор этого множества. Используем неравенство Коши – Буняковского:

$$\langle x, l \rangle \le ||x|| \, ||l||.$$

Тогда

$$\sup_{||x|| \le 1} \langle x, l \rangle \le \sup_{||x|| \le 1} (||x|| \, ||l||) = ||l||,$$

откуда

$$\rho \left(l \mid B_1(0) \right) = ||l||,$$

$$\psi_0 = \frac{l}{||l||}.$$

2.1.3 Опорная функция множества $B_r(a)$

Пусть $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x - a|| \le r\}$. Вычислим опорную функцию и опорный вектор этого множества.
Множество $B_r(a)$ можно представить в виде

$$B_r(a) = \{a\} + rB_1(0).$$

Тогда опорная функция множества $B_r(a)$ в силу свойств (2) и (3) представляется в виде:

$$\rho \left(l \mid B_r(a) \right) = \rho \left(l \mid \{a\} \right) + r\rho \left(l \mid B_1(0) \right).$$

Окончательно, имеем:

$$\rho \left(l \mid B_r(a) \right) = \langle a, l \rangle + r||l||,$$

$$\psi_0 = a + r\frac{l}{||l||}.$$

2.1.4 Опорная функция множества $\mathcal{X}_0$

$\mathcal{X}_0$ — выпуклая оболочка трех шаров радиусов r_1, r_2, r_3 с центрами в точках $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$. Вычислим её опорную функцию. Используя свойства (4) и (6), получаем:

$$\rho \left(l \mid \mathcal{X}_0 \right) = \rho \left(l \mid \operatorname{conv} \cup_{i=1,2,3} B_{r_i}(x^{(i)}) \right) = \rho \left(l \mid \cup_{i=1,2,3} B_{r_i}(x^{(i)}) \right) = \max_{i=1,2,3} \rho \left(l \mid B_{r_i}(x^{(i)}) \right) =$$

$$= \max_{i=1,2,3} \left(\langle x^{(i)}, l \rangle + r_i ||l|| \right).$$

2.1.5 Опорная функция множества $\mathcal{X}_1$

Так как $\mathcal{X}_1 = \{x_1\}$, то

$$\rho \left(l \mid \mathcal{X}_1 \right) = \langle x_1, l \rangle.$$

2.1.6 Опорная функция множества $\mathcal{P}_0$

Пусть $\mathcal{P}_0 = \left\{x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1^4 + x_2^2 \leq 1\right\}$. Вычислим опорную функцию и опорный вектор этого множества. По определению:

$$\rho\left(l \mid \mathcal{P}_0\right) = \sup_{x \in \mathcal{P}_0} \langle x, l \rangle .$$

Если l — нулевой вектор, то опорная функция равна нулю и любой вектор $\psi_0 \in \mathbb{R}^2$ является опорным.

Пусть теперь вектор l отличен от нуля.

Задача нахождения опорной функции сводится к задаче на условный экстремум, для нахождения которого воспользуемся методом множителей Лагранжа. Определим функцию $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = x_1 l_1 + x_2 l_2 - \lambda(x_1^4 + x_2^2 - 1).$$

Необходимым условием экстремума является равенство нулю всех частных производных функции $\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} & = & l_1 - 4\lambda x_1^3 & = & 0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} & = & l_2 - 2\lambda x_2 & = & 0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} & = & -x_1^4 - x_2^2 + 1 & = & 0. \end{cases}$$

Рассмотрим все случаи обращения в нуль компонент вектора l.

1. Пусть $l_1 = 0$. Решая систему, получаем, что $x = (0, \pm 1)^{\mathrm{T}}$. Тогда опорная функция представляется в виде

   $$\rho\left(l \mid \mathcal{P}_0\right) = \max_{x = (0, \pm 1)^{\mathrm{T}}} x_1 l_1 + x_2 l_2 = |l_2|,$$

   и опорным вектором будет

   $$\psi_0 = (0, \operatorname{sgn} l_2)^{\mathrm{T}}.$$

2. Пусть $l_2 = 0$. Решая систему, получаем, что $x = (\pm 1, 0)^{\mathrm{T}}$. Тогда опорная функция представляется в виде

   $$\rho\left(l \mid \mathcal{P}_0\right) = \max_{x = (\pm 1, 0)^{\mathrm{T}}} x_1 l_1 + x_2 l_2 = |l_1|,$$

   и опорным вектором будет

   $$\psi_0 = (\operatorname{sgn} l_1, 0)^{\mathrm{T}}.$$

3. Пусть $l_1 \neq 0$ и $l_2 \neq 0$. Тогда $x_1 \neq 0$ и $x_2 \neq 0$. Выразим из первого уравнения λ, из второго уравнения x_2 и подставим их в третье уравнение:

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{l_1}{4x_1^3}, \\ x_2 = \dfrac{l_2}{2\lambda} = 2\dfrac{l_2}{l_1}x_1^3, \\ x_1^4 + \left(2\dfrac{l_2}{l_1}\right)^2 x_1^6 = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$f_l(t) = \left(2\frac{l_2}{l_1}\right)^2 t^3 + t^2 - 1.$$

Видно, что третье уравнение системы эквивалентно уравнению $f_l(x_1^2) = 0$. По этой причине будем искать неотрицательные решения уравнения $f_l(t) = 0$.

Рассмотрим свойства функции $f_l(t)$:

(a) $f_l(t)$ бесконечно дифференцируема на всей прямой.

(b) $\dfrac{df_l(t)}{dt} > 0$ при $t > 0$.

(c) $f_l(0) = -1$.

(d) $f_l(1) = \left(2\dfrac{l_2}{l_1}\right)^2 + 1 > 0$.

Таким образом, $f_l(t)$ непрерывна на всей прямой, строго монотонна на интервале $(0, +\infty)$ и меняет знак на отрезке $[0, 1]$. Значит, на луче $[0, +\infty)$ существует единственное число τ_l — корень уравнения $f_l(t) = 0$, причем $\tau_l \in [0, 1]$.

Зная τ_l, можно выписать решение системы:

$$x = \pm\left(\sqrt{\tau_l}, 2\frac{l_2}{l_1}\sqrt{\tau_l^3}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Распишем скалярное произведение $\langle x, l\rangle$:

$$\langle x, l\rangle = \pm\sqrt{\tau_l}l_1 \pm 2\frac{l_2}{l_1}\sqrt{\tau_l^3}l_2 = \pm l_1^{-1}\left(\sqrt{\tau_l}l_1^2 + 2\sqrt{\tau_l^3}l_2^2\right).$$

Выражение в скобках положительно, следовательно для максимизации всего скалярного произведения знак $+$ или $-$ нужно взять так, чтобы он совпал со знаком l_1. Тогда для опорной функции множества $\mathcal{P}_0$ справедливо равенство:

$$\rho\left(l \mid \mathcal{P}_0\right) = \left|\sqrt{\tau_l}l_1 + 2\frac{l_2}{l_1}\sqrt{\tau_l^3}l_2\right| \tag{2}$$

и опорным вектором будет

$$\psi_0 = \operatorname{sgn}(l_1)\left(\sqrt{\tau_l}, 2\frac{l_2}{l_1}\sqrt{\tau_l^3}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Наконец, запишем общие выражения для опорной функции и опорного вектора множества $\mathcal{P}_0$:

$$\rho\left(l \mid \mathcal{P}_0\right) = \begin{cases} |l_1| + |l_2|, & \text{если } \ l_1 l_2 = 0, \\ \left|\sqrt{\tau_l} l_1 + 2\frac{l_2}{l_1}\sqrt{\tau_l^3} l_2\right|, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$\psi_0 = \begin{cases} \left(\operatorname{sgn} l_1, \operatorname{sgn} l_2\right)^{\mathrm{T}}, & \text{если } \ l_1 l_2 = 0, \\ \operatorname{sgn}(l_1)\left(\sqrt{\tau_l}, 2\frac{l_2}{l_1}\sqrt{\tau_l^3}\right)^{\mathrm{T}}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В этом выражении неопределенным остается только значение τ_l, его с любой точностью можно найти численно как единственный неотрицательный корень уравнения

$$\left(2\frac{l_2}{l_1}\right)^2 t^3 + t^2 - 1 = 0, \quad t \in [0, 1].$$

2.1.7 Опорная функция множества $\mathcal{P}$

Множество $\mathcal{P}$ задается выражением:

$$\mathcal{P} = \left\{x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2 \,:\, a(x_1 - p_1)^4 + b(x_2 - p_2)^2 \leq c\right\},$$

где $p = (p_1, p_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2, \quad a, b, c > 0.$
Вычислим его опорную функцию и опорный вектор.
Введем обозначения:

$$\mathcal{P}_1 = \left\{x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2 \,:\, a x_1^4 + b x_2^2 \leq c\right\},$$

$$A = \begin{pmatrix} \left(\frac{a}{c}\right)^{-\frac{1}{4}} & 0 \\ 0 & \left(\frac{b}{c}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что A — самосопряженная матрица, т.е. $A^* = A$.
Покажем, что $A\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_1$. В самом деле:

$$A\mathcal{P}_0 = \{y \,:\, y = Ax,\ x \in \mathcal{P}_0\} = \left\{y \,:\, x = A^{-1}y \in \mathcal{P}_0\right\} =$$

$$= \left\{y = (y_1, y_2)^{\mathrm{T}} \,:\, (\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{4}} y_1, \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{2}} y_2)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{P}_0\right\} =$$

$$= \left\{y = (y_1, y_2)^{\mathrm{T}} \,:\, \left(\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{4}} y_1\right)^4 + \left(\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{2}} y_2\right)^2 \leq 1\right\} =$$

$$= \left\{ y = (y_1, y_2)^{\mathrm{T}} \; : \; ay_1^4 + by_2^2 \le c \right\} = \mathcal{P}_1.$$

Таким образом, множество $\mathcal{P}$ можно представить в виде

$$\mathcal{P} = \{p\} + \mathcal{P}_1 = \{p\} + A\mathcal{P}_0.$$

Тогда для опорной функции множества $\mathcal{P}$ в силу свойств (2) и (3) справедливо следующее представление:

$$\rho\left(l \mid \mathcal{P}\right) = \langle p, l \rangle + \rho\left(A^* l \mid \mathcal{P}_0\right).$$

После подстановки и упрощения, окончательно будем иметь:

$$\rho\left(l \mid \mathcal{P}\right) = \langle p, l \rangle + \begin{cases} \left(\dfrac{a}{c}\right)^{-\frac{1}{4}} |l_1| + \left(\dfrac{b}{c}\right)^{-\frac{1}{2}} |l_2|, & \text{если } \; l_1 l_2 = 0, \\ \left| \sqrt{\tau_{A^*l}} \left(\dfrac{a}{c}\right)^{-\frac{1}{4}} l_1 + 2\dfrac{l_2^2}{l_1} \sqrt{\tau_{A^*l}^3} \left(\dfrac{a}{c}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\dfrac{b}{c}\right)^{-1} \right|, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При этом опорным вектором будет

$$\psi_0 = p + \begin{cases} \left(\left(\dfrac{a}{c}\right)^{-\frac{1}{4}} \operatorname{sgn} l_1, \left(\dfrac{b}{c}\right)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} l_2 \right)^{\mathrm{T}}, & \text{если } \; l_1 l_2 = 0, \\ \operatorname{sgn}\left(l_1\right) \left(\sqrt{\tau_{A^*l}} \left(\dfrac{a}{c}\right)^{-\frac{1}{4}}, 2\dfrac{l_2}{l_1} \sqrt{\tau_{A^*l}^3} \left(\dfrac{a}{c}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\dfrac{b}{c}\right)^{-1} \right)^{\mathrm{T}}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь τ_{A^*l} — неотрицательный корень уравнения

$$\left(2\frac{l_2}{l_1} \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{b}{c}\right)^{-\frac{1}{2}} \right)^2 t^3 + t^2 - 1 = 0, \quad t \in [0, 1].$$

2.2 Принцип максимума Понтрягина

Задана линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f, \; t \in [t_0, +\infty], \tag{3}$$

Определим $T = T[u]$ как минимальный момент времени, в который траектория системы (3), соответствующая управлению u, пересекает целевое множество $\mathcal{X}_1$. Необходимо минимизировать функционал

$$T[u] - t_0 \to \inf \tag{4}$$

при ограничениях:

$$x(t_0) \in \mathcal{X}_0, \; x(T) \in \mathcal{X}_1, \; u \in \mathcal{P}, \tag{5}$$

$$\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1, \mathcal{P} \in \Omega(\mathbb{R}^n), \tag{6}$$

Для такой задачи дадим необходимое условие оптимальности.
Пусть $(u^*(t), x^*(t))$ — решение системы (3). Такую пару будем называть оптимальной, если для неё выполняются условия (4), (5) и (6).

Принцип максимума Понтрягина. *Пусть* $(x^*(t), u^*(t))$ *— оптимальная пара,* $t_1 = T[u^*]$. *Тогда при* $t \geq t_0$ *существует сопряженная функция* $\psi(t)$, *являющаяся нетривиальным решением сопряженной системы*

$$\dot{\psi}(t) = -A^{\mathrm{T}}\psi(t), \tag{7}$$

при этом выполняются 3 условия:

1. *Условие максимума:*
   $\langle \psi(t), Bu^*(t) \rangle = \rho\left(\psi(t) \mid B\mathcal{P}\right)$.
2. *Условие трансверсальности на левом конце:*
   $\langle \psi(t_0), x^*(t_0) \rangle = \rho\left(\psi(t_0) \mid \mathcal{X}_0\right)$.
3. *Условие трансверсальности на правом конце:*
   $\langle -\psi(t_1), x^*(t_1) \rangle = \rho\left(-\psi(t_1) \mid \mathcal{X}_1\right)$.

2.3 Теорема о конечном числе переключений

Рассмотрим задачу быстродействия (3) с единичной матрицей B. Пусть множество управления $\mathcal{P}$ представляет собой отрезок с вершинами в точках $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$. Предположим, что выполнено условие общности положения: векторы $(p_2 - p_1)$ и $A(p_2 - p_1)$ линейно независимы. Тогда справедливо следующее утверждение:

Теорема о конечном числе переключений. *Для каждого нетривиального решения* $\psi(t)$ *уравнения (7) первое условие принципа максимума Понтрягина однозначно (за исключением, возможно, конечного числа точек) определяет управляющую функцию* $u(t)$; *при этом оказывается, что функция* $u(t)$ *кусочно-постоянная и её значениями являются лишь концы отрезка* $\mathcal{P}$.

Доказательство теоремы можно найти в книге [1].

2.4 Теорема о постоянном управлении

Как и в предыдущей теореме, рассмотри задачу быстродействия (3) с единичной матрицей B, где множество управления $\mathcal{P}$ представляет собой отрезок положительной длины с вершинами в точках $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$. Обозначим $p = p_2 - p_1 \neq 0$.

Теорема о постоянном управлении. *Пусть на некотором отрезке времени* $[t_0, t_1]$ *выполнено равенство*

$$\langle \psi(t), p \rangle = 0.$$

Тогда если на отрезке $[t_0, t_1]$ *существует оптимальное управление, то так же существует и постоянное на всем отрезке оптимальное управление.*

2.5 Алгоритм решения задачи

2.5.1 Замена переменной

Воспользуемся тем, что множество $\mathcal{X}_1$ состоит из одной точки x_1, что удобно для задания начального условия при решении задачи Коши. Приняв во внимание автономность системы, можем сделать замену $t = -s$ и сформулировать задачу в обратном времени. Для этого положим:

$$y(s) = x(-t),\ v(s) = u(-t),$$

$$s_0 = -T,\ s_1 = -t_0,$$
$$C = -A,\ D = -B,\ g = -f.$$

Выпишем получившуюся задачу:

$$\dot{y}(s) = Cy(s) + Dv(s) + g,\ s \in [s_0, s_1],$$

$$y(s_0) = x_1,\ y(s_1) \in \mathcal{X}_0,\ v \in \mathcal{P},$$
$$s_1 - s_0 \to \inf$$

2.5.2 Вычисление сопряженных переменных

Для сформулированной задачи выпишем принцип максимума Понтрягина: должна сущестовать сопряженная переменная $\psi(s)$, являющаяся решением системы

$$\begin{cases} \dot{\psi}(s) = -C^{\mathrm{T}}\psi(s), \\ \psi(s_0) = \psi_0 \neq 0, \end{cases} \tag{8}$$

при этом должны выполняться условия:

1. $\langle \psi(s), Dv^*(s) \rangle = \rho\left(\psi(s) \mid D\mathcal{P}\right)$.
2. $\langle \psi(s_0), y^*(s_0) \rangle = \rho\left(\psi(s_0) \mid \mathcal{X}_1\right)$.
3. $\langle -\psi(s_1), y^*(s_1) \rangle = \rho\left(-\psi(s_1) \mid \mathcal{X}_0\right)$.

Можно заметить, что сопряженная переменная определена с точностью до положительной константы, в силу положительной однородности сопряженной системы, скалярного произведения и опорных функций. Чтобы избавиться от неоднозначности, положим $||\psi_0|| = 1$, где $\psi_0 = \psi(s_0)$.
На единичной окружности $||\psi_0|| = 1$ некоторым образом введем сетку и рассмотрим все возможные значения ψ_0 в узлах этой сетки. Каждое значение ψ_0 будем рассматривать как начальное условие задачи Коши для сопряженной системы (8).
Численно решая эти задачи Коши, получим набор сопряженных функций $\psi(s)$.

2.5.3 Вычисление управлений

Обратимся к первому условию принципа максимума:

$$\langle \psi(s), Dv^*(s) \rangle = \rho\left(\psi(s) \mid D\mathcal{P}\right).$$

Перенесем матрицу D в левую часть скалярных произведений:

$$\left\langle D^{\mathrm{T}}\psi(s), v^*(s) \right\rangle = \rho\left(D^{\mathrm{T}}\psi(s) \mid \mathcal{P}\right).$$

Это означает, что вектор $v^*(s)$ является опорным вектором множества $\mathcal{P}$ в направлении $D^{\mathrm{T}}\psi(s)$. Однако, если $D^{\mathrm{T}}\psi(s) = 0$, возникает проблема — любой вектор будет опорным в нулевом направлении. Рассмотрим возможные варианты:

1. Пусть $\operatorname{rank} D = 2$. Тогда равенство нулю вектора $D^{\mathrm{T}}\psi(s)$ равносильно равенству нулю вектора $\psi(s)$. Поскольку сопряженная функция является нетривиальным решением задачи Коши для линейной однородной системы с ненулевым начальным условием (так как ψ_0 выбирается на единичной окружности), то по теореме единственности функция $\psi(s)$ не является тождественным нулем. Покажем, что тогда $\psi(s)$ не обращается в нуль ни в одной точке. Действительно, пусть существует момент времени s_1, в который функция $\psi(s)$ первый раз обращается в нуль. Тогда для данной системы можно сформулировать новую задачу Коши с начальным условием $\psi(s_1) = 0$, при этом в некой окрестности s_1 нулевое решение этой задачи будет единственным, а значит в этой окрестности решение исходной задачи Коши (которое, очевидно, будет так же и решением новой) обязано быть тождественным нулем, что противоречит предположению существования s_1. Таким образом, при невырожденной матрице и ненулевых начальных условиях равенство $D^{\mathrm{T}}\psi(s) = 0$ невозможно.

2. Пусть $\operatorname{rank} D = 1$. Тогда матрицу D можно рассматривать как вырожденную замену переменной v, при которой множество $\mathcal{P}$ переводится в некоторый отрезок с вершинами в точках $p^{(1)} \neq p^{(2)}$. Обозначим $p = p^{(2)} - p^{(1)}$.

   (a) Пусть вектор $\psi(s)$ ортогонален вектору p не более чем в конечном числе точек отрезка $[s_0, s_1]$. Тогда условие максимума позволяет однозначно (за исключением, возможно, конечного числа точек) восстановить управление v как опорный вектор к отрезку $[p^{(1)}, p^{(2)}]$ в направлении $\psi(s)$.

   (b) Пусть вектор $\psi(s)$ ортогонален вектору p как минимум в счетном числе точек на отрезке $[s_0, s_1]$. Рассмотрим функцию

   $$f(s) = \psi_1(s)p_1 + \psi_2(s)p_2.$$

   Поскольку $\psi(s)$ — решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянной матрицей, то $\psi(s)$ является аналитической функцией. Тогда функция $f(s)$ тоже является аналитической. Мы предположили, что функция $f(s)$ на ограниченном множестве обращается в нуль как минимум в счетном числе точек, тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса у множества её нулей существует предельная точка, а тогда по теореме о нулях аналитической функции $f(s)$ тождественна равна нулю на всем отрезке $[s_0, s_1]$. В этом случае для отыскания оптимального управления воспользуемся теоремой о постоянном управлении, согласно которой искомое оптимальное управление может быть выбрано постоянным на всем отрезке $[s_0, s_1]$, что приводит нас к возможности организовать перебор по $[p^{(1)}, p^{(2)}]$.

3. Пусть $\operatorname{rank} D = 0$. Тогда матрица D — нулевая, и в этом случае система вообще не зависит от управления, поэтому абсолютно не важно, какой вектор брать в качестве v^*. Положим $v^* = 0$.

Руководствуясь этими соображениями, и используя выражения для опорного вектора множества $\mathcal{P}$, можем для каждой найденной сопряженной функции получить явное выражение вектора $v^*(s)$.

2.5.4 Вычисление траекторий

Для каждого найденного управления $v^*(s)$ можно вычислить соответствующую траекторию $y^*(s)$. Для этого решается следующая задача Коши:

$$\begin{cases} \dot{y}(s) = Cy(s) + Dv^*(s) + g, \\ y(s_0) = x_1, \end{cases} \tag{9}$$

После этого необходимо определить, какие из получившихся траекторий пересекают целевое множество, и (если таковые найдутся) выбрать из них траекторию, соответствующую минимальному времени перехода.

2.5.5 Проверка условий трансверсальности

После получения “оптимальной” траектории проверяется погрешность выполнения условий трансверсальности. Условие на левом конце выполняется автоматически в силу выбора начального значения в задаче Коши (9). Для условия на правом конце введем следующий критерий качества:

$$\mathcal{T}_r = \left| \rho\left(-\frac{\psi(s_1)}{||\psi(s_1)||} \mid \mathcal{X}_0 \right) - \left\langle -\frac{\psi(s_1)}{||\psi(s_1)||}, y(s_1) \right\rangle \right|$$

Чем ближе значение $\mathcal{T}_r$ к нулю, тем “лучше” выполняется условие трансверсальности.

2.5.6 Возврат к исходным переменным

На последнем шаге алгоритма производится возврат к старым переменным, что достигается простым разворотом получившихся массивов значений “оптимального” управления и траектории.

2.6 Примечания к алгоритму

2.6.1 Численное интегрирование

Для численного решения систем (8) и (9) используется метод Рунге-Кутты четвертого порядка, реализуемый в системе Matlab функцией ode45. Параметры метода, такие как абсолютная и относительная погрешности, а так же максимальный шаг разбиения по времени, можно задать в пользовательском интерфейсе. Заметим, что эти две системы решаются вместе как одна система четвертого порядка, что позволяет алгоритму ode45 учитывать при выборе разбиения по времени характеристики обеих систем. Для определения попадания траектории в целевое множество используется встроенный механизм ode45 — event function. Иногда может возникать ситуация, что разбиение по времени превосходит размеры близлежащего участка целевого множества, и event function не срабатывает. Для устранения этого недостатка в пользовательском интерфейсе можно задать верхнюю границу для разбиения по времени.

2.6.2 Выбор сетки для пребора по ψ_0

Для осуществления перебора необходимо каким-то образом выбрать точки на единичной окружности. Пусть задано число $N > 0$ — количество узлов сетки.
Проще всего было бы взять равномерное разбиение, но такой подход имеет недостаток — полученное разбиение не будет равномерным после взятия опорной функции.
Поступим следующим образом: распределим равномерно числа α_n на отрезке $[0, 2\pi]$, где $n = 1, 2 \ldots N + 1$. Для каждого α_n рассмотрим луч с центром в точке p (напомним, что p — центр множества $\mathcal{P}$) и направляющим вектором $(\cos\alpha_n, \sin\alpha_n)^{\mathrm{T}}$. Найдем точку пересечения этого луча с границей множества $\mathcal{P}$: она существует и единственна в силу строгой выпуклости множества, и её отыскание сводится к решению квадратного уравнения.
Получаем $N + 1$ точку на границе: $v_n \in \partial\mathcal{P}$, $n = 1, 2 \ldots N + 1$. В силу строгой выпуклости, для каждого $n = 1, 2 \ldots N + 1$ существует единственное (с точностью до нормировки) направление l_n, в котором вектор v_n является опорным к множеству $\mathcal{P}$. Формулы для нахождения l_n с легкостью получаются из формул для опорных векторов.
В качестве искомого разбиения возьмем векторы $\dfrac{l_n}{||l_n||}$, $n = 1, 2 \ldots N$. Таким образом, вместо равномерного перебора по ψ_0 фактически осуществляется равномерный перебор по v_0, по которому однозначно восстанавливается значение ψ_0.

2.6.3 Уточнение решения

Опишем реализованный в программе механизм уточнения решения. Исходя из описанных особенностей выбора сетки, для отыскания начального решения введем параметр $\alpha \in [0, 2\pi]$ и будем перебирать значения v_0 по границе множества $\mathcal{P}$ так, что вектор v_0 составляет угол α с горизонтальной осью. После этого по v_0 однозначно восстанавливается значение ψ_0 и задача решается в соответствии с описанным алгоритмом. Чтобы найти уточнение полученного решения, длина отрезка перебора параметра α сокращается в два раза, и новый отрезок формируется так, что его центр совпадает со значением параметра, которое соответствует значению v_0 полученного на предыдущем шаге "оптимального" управления.

2.7 Примеры работы программы

2.7.1 Система с действительными собственными значениями

Рассмотрим задачу быстродействия при следующих параметрах:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.5 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix},\ x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t_0 = 0.$$

В результате работы программы получаем: время быстродействия $T = 0.41689$, погрешность выполнения условия трансверсальности $\mathcal{T}_r = 0.00026952$.
Приведем соответствующие графики.

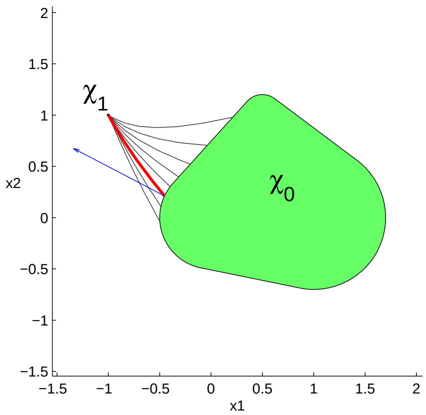

Рис. 1: Фазовый портрет системы

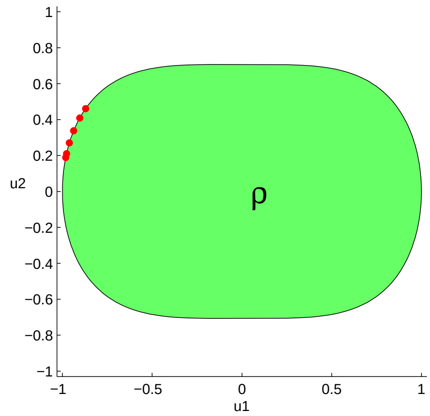

Рис. 2: Оптимальное управления

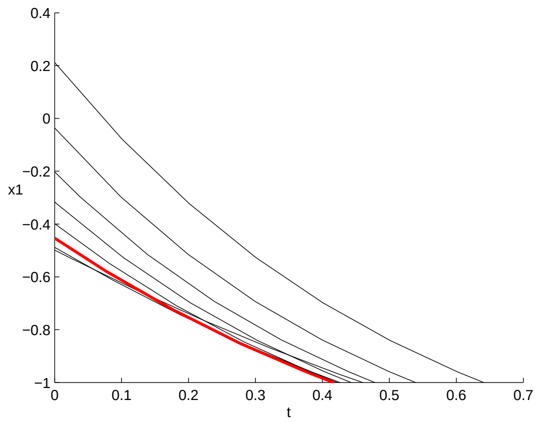

Рис. 3: Зависимость $x_1(t)$

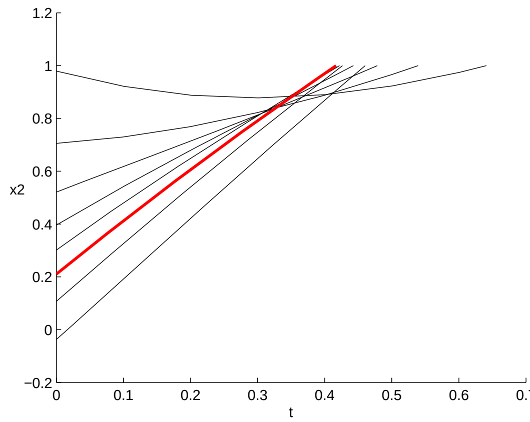

Рис. 4: Зависимость $x_2(t)$

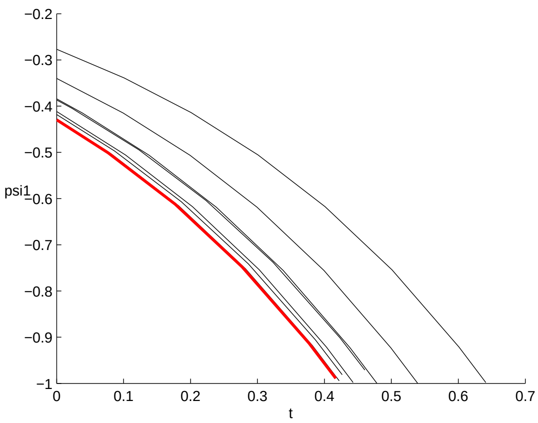

Рис. 5: Зависимость $\psi_1(t)$

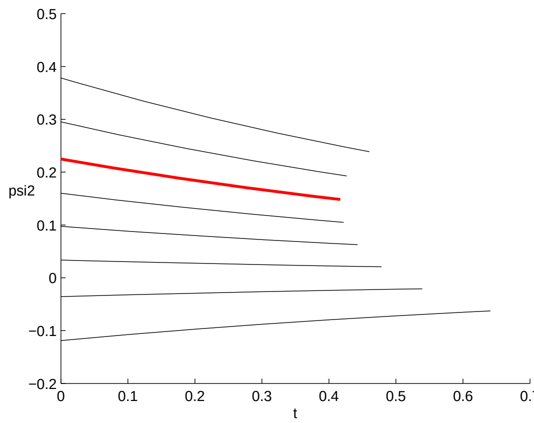

Рис. 6: Зависимость $\psi_2(t)$

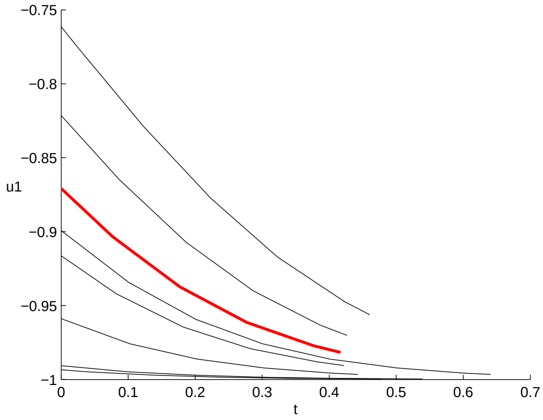

Рис. 7: Зависимость $u_1(t)$

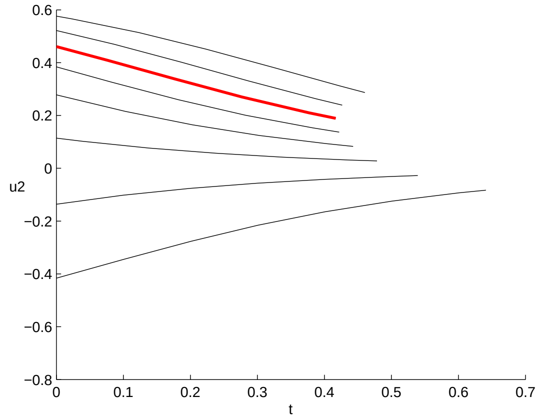

Рис. 8: Зависимость $u_2(t)$

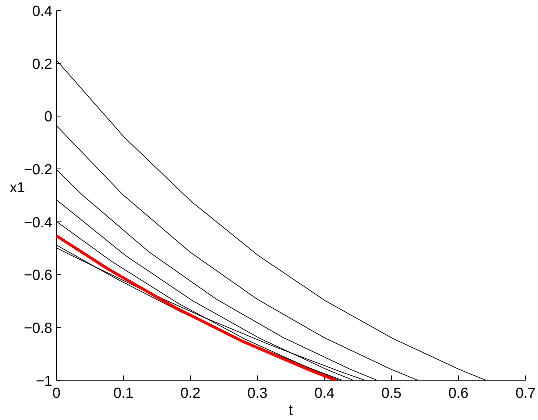

Рис. 9: Зависимость $x_1(t)$

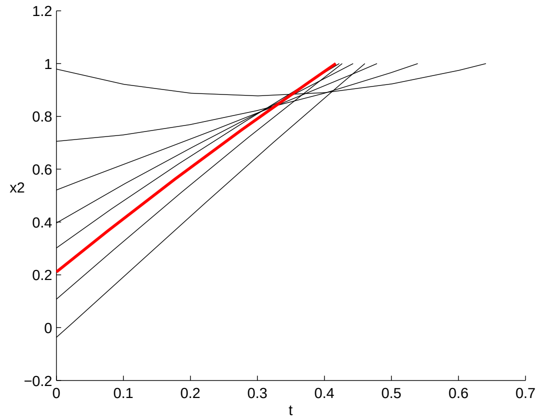

Рис. 10: Зависимость $x_2(t)$

Приведем пример работы механизма улучшения полученного решения.

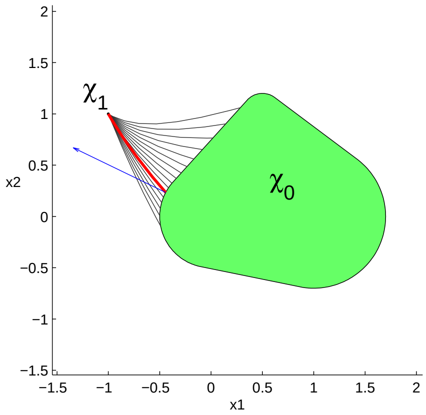

Рис. 11: Первое улучшение, $T = 0.41683$, $\mathcal{T}_r = 0.00015$

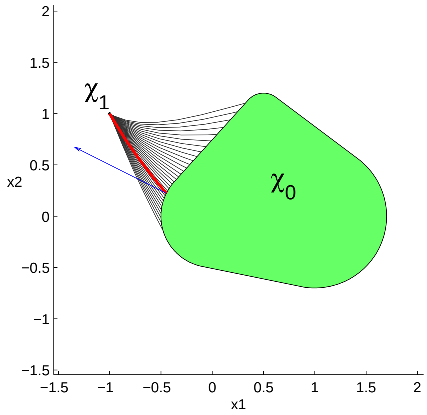

Рис. 12: Второе улучшение, $T = 0.41675$, $\mathcal{T}_r = 0.000003$

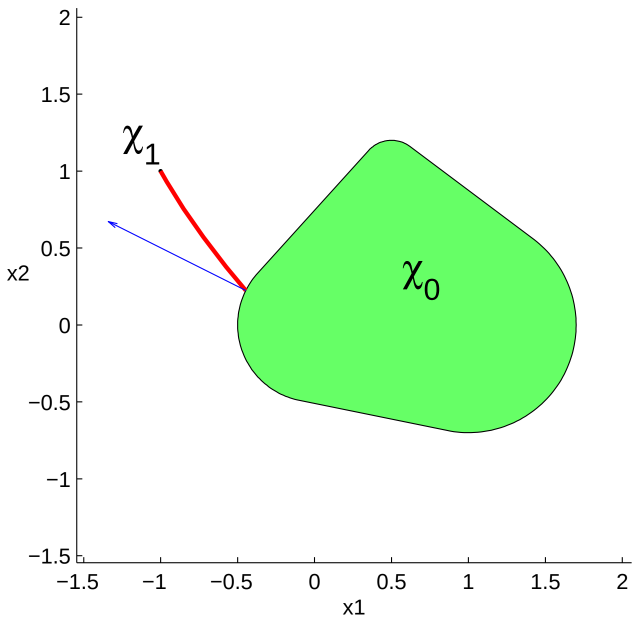

Рис. 13: Двенадцатое улучшение, $T = 0.41675$, $\mathcal{T}_r = 10^{-11}$

2.7.2 Система с комплексными собственными значениями

В только что рассмотренной задаче изменим следующие параметры:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -15 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \; x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0 \end{pmatrix}, \; x_1 = \begin{pmatrix} -0.4 \\ 1.56 \end{pmatrix}.$$

В результате работы программы получаем: время быстродействия $T = 0.051316$, погрешность выполнения условия трансверсальности $\mathcal{T}_r = 7.4374 \cdot 10^{-5}$.

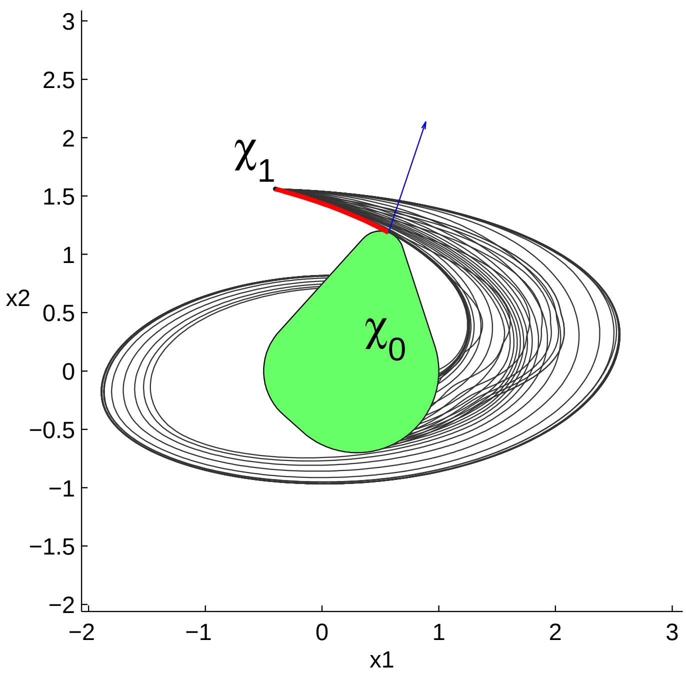

Рис. 14: Фазовая плоскость

Покажем на этом примере отсутствие непрерывности по целевому множеству. При прочих равных условиях положим $x_1 = \begin{pmatrix} -0.4 \\ 1.57 \end{pmatrix}$.

В результате работы программы получаем: время быстродействия $T = 0.22192$, погрешность выполнения условия трансверсальности $\mathcal{T}_r = 0.0041586$. Таким образом, при малом изменении целевого множества время быстродействия существенно возросло, стало быть оно не является непрерывной функцией целевого множества. Причины такого поведения хорошо видны на иллюстрации.

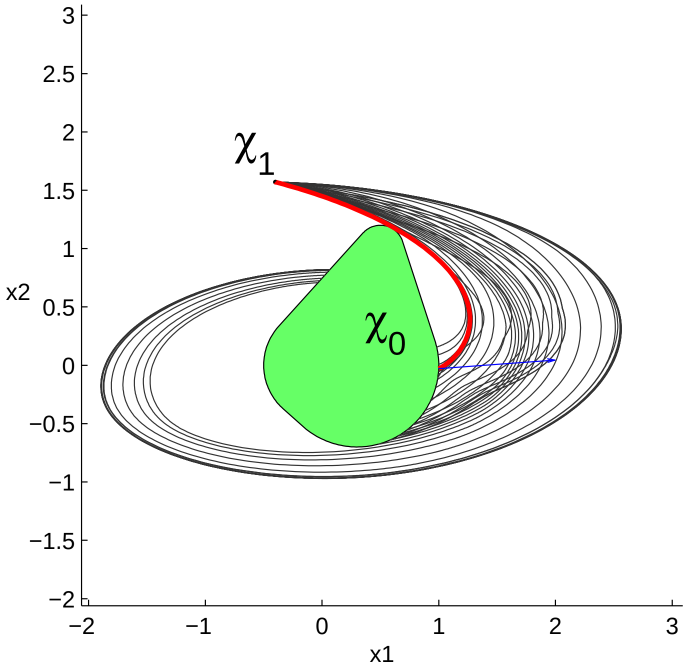

Рис. 15: Фазовая плоскость

Для иллюстрации отсутствия непрерывности по исходному множеству достаточно в исходном примере вместо изменения x_1 немного опустить вниз первый из трех шаров, получится аналогичная картина.

2.7.3 Система с вырожденным управлением

Рассмотрим задачу быстродействия при следующих параметрах:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.6 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \end{pmatrix},\ x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_1 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 2 \end{pmatrix},\ p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t_0 = 0.$$

В результате работы программы получаем: время быстродействия $T = 1.0449$, погрешность выполнения условия трансверсальности $\mathcal{T}_r = 0.013313$. Проанализируем графики решения.

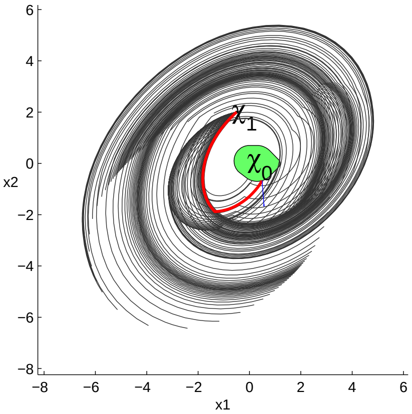

Рис. 16: Фазовая плоскость

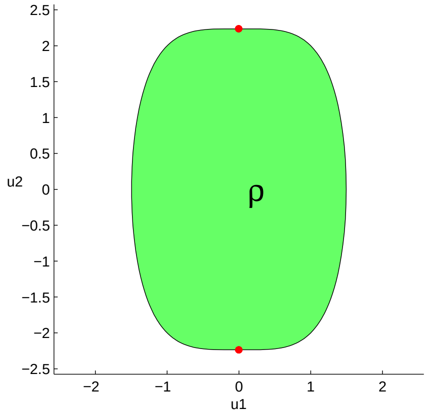

Рис. 17: Значения управления

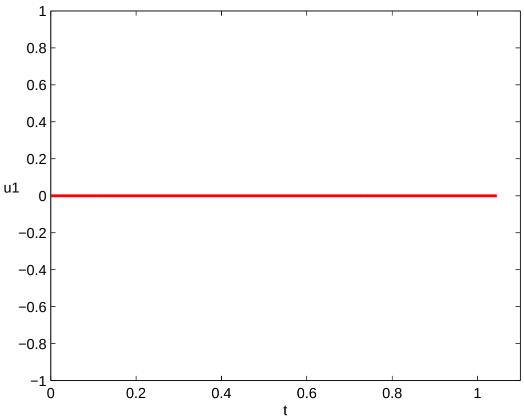

Рис. 18: Зависимоть $u_1(t)$

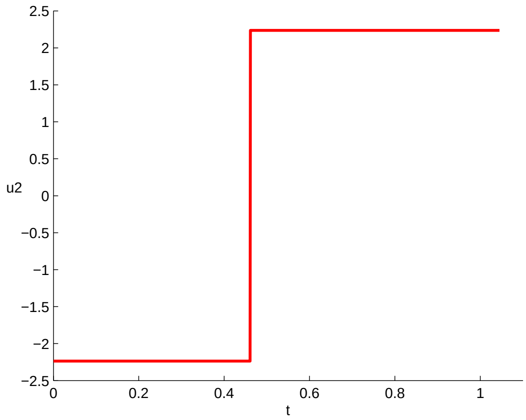

Рис. 19: Зависимоть $u_2(t)$

На графиках видно, что управление терпит разрыв. Это происходит из-за вырожденности матрицы B, которая множество $\mathcal{P}$ переводит в отрезок на вертикальной оси. Видно, что управление принимает значения только на концах отрезка. Это объясняется тем, что для матрицы A и вертикального отрезка выполнено условие общности положения и, следовательно, для системы верна теорема о конечном числе переключений.

Список литературы

[1] *Понтрягин Л. С, Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976.

[2] *Благодатских В. И* Введение в оптимальное управление. – М.: Высшая школа, 2001.

[3] *Киселёв Ю. Н, Аввакумов С. Н., Орлов М. В.* Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. – М.: МАКС Пресс, 2007.

[4] *Калиткин Н. Н.* Численные методы. – М.: Наука, 1984.