α

Лекция 1

Пространства: метрические, ...

Содержание лекции:
С настоящей лекции мы начнем изучать структуры на линейном пространстве, которые лежат в основе построения геометрии. Понятие метрики (расстояния) является одним из ключевых для целого ряда областей и приложений математики. Мы систематически исследуем геометрические свойства линейного пространства, введя в него скалярное произведение, которое индуцирует на нем и норму и метрику.

Ключевые слова:
Метрическое пространство, расстояние, норма, нормированное пространство, скалярное произведение, вещественное и комплексное евклидово пространство, метрическая форма, метрический тензор, пространство Минковского, неравенство Шварца.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

1.1 Метрическое и нормированное пространства

Метрическим пространством M называется некоторое множество, на котором определено отображение $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$, обладающее следующими свойствами (аксиомами):

D1. $\rho(x, y) \geq 0, \quad \rho(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$;

D2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

D3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Nota bene Отображение ρ называется **расстоянием**.

Пример 1.1. Пусть $M = \mathbb{R}^n$

1. $\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y, \\ 0 & x = y; \end{cases}$
2. $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\xi^i - \eta^i\right)^2}$;
3. $\rho(x, y) = \sup_{i=1\ldots n} \left|\xi^i - \eta^i\right|$;

Нормированным пространством называется линейное пространство $X(\mathbb{R})$, наделенное отображением $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, обладающим следующими свойствами:

N1. $\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$;

N2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \alpha \in \mathbb{R}$;

N3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Пример 1.2. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, тогда

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |\xi^i|^p}, \quad \|x\|_m = \max_{i=1\ldots n} \left|\xi^i\right|$$

Лемма 1.1. *Любое нормированное пространство может быть метризовано:*

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

►
Произвести проверку аксиом метрического пространства.
◄

1.2 Евклидово пространство

Линейное пространство X над $\mathbb{C}$ называется **комплексным евклидовым пространством**, если на нем задана метрическая форма $g(x,y) = \langle x, y\rangle$ со следующими свойствами

E1. $\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2\rangle = \alpha \langle x, y_1\rangle + \beta \langle x, y_2\rangle$ - линейность по второму аргументу;

E2. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ - эрмитовость;

E3. $\langle x, x\rangle \geq 0, \quad \langle x, x\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$

Nota bene Аналогично можно опеделить *вещественное* евклидово пространство, потребовав вместо аксиомы (E2) симметричность при перестановке аргументов.

Nota bene Заметим, что в случае поля $\Bbbk = \mathbb{C}$ однородность по первому аргументу отсутствует. Действительно:

$$\langle \alpha x, y\rangle = \overline{\langle y, \alpha x\rangle} = \overline{\alpha \langle y, x\rangle} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\langle y, x\rangle} = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle.$$

Отображение g при этом называется **метрической формой** или **скалярным произведением**.

Nota bene Договоримся в дальнейшем обозначать евклидово через $E(\mathbb{R})$ или $E(\mathbb{C})$.

Nota bene Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ - базис пространства $E(\mathbb{C})$ и $x, y \in E(\mathbb{C})$, так что

$$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^n \eta^j e_j.$$

Рассмотрим скалярное произведение $\langle x, y\rangle$:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i,j=1}^n \bar{\xi}^i \eta^j \langle e_i, e_j\rangle = \bar{\xi}^i \eta^j g_{ij}.$$

Совокупность чисел $g_{ij} = g\left(e_i, e_j\right)$ называется **метрическим тензором**:

1. $g_{ji} = \bar{g}_{ij}$;
2. $\bar{\xi}^i \xi^j g_{ij} \geq 0, \quad \bar{\xi}^i \xi^j g_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi^i = 0, \quad \forall i.$

Матрица $G = \|g_{ij}\|$, удовлетворяющая приведенным выше условиям, называется **положительно определенной**.

Nota bene *Псевдоевклидовым* называется просранство X, в котором метрическая форма удовлетворяет более слабому условию

$$g(x, y) = 0 \quad \forall y \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Элемент x, такой что $g(x, x) = 0$ называется *изотропным*.

Пример 1.3. (Пространство Минковского) Пусть $X = \mathbb{R}^4$, $\quad x = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)^T$ и

$$\langle x, y \rangle = \xi^0\eta^0 - \xi^1\eta^1 - \xi^2\eta^2 - \xi^3\eta^3.$$

Рассмотрим вектор $x = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}^T$, тогда

$$\langle x, x \rangle = 1 - 1/3 - 1/3 - 1/3 = 0,$$

и значит x - нулевой вектор ($x \neq 0$, но $g(x, x) = 0$).

1.3 Неравенство Шварца

Лемма 1.2. *Евклидово пространство может быть нормировано:*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

►
Проверка первых двух аксиом нормы проводится непосредственно:

$$\sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0,$$
$$\sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Проверка последней аксиомы сводится к проверке утверждения

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle,$$

которое составляет утверждение теоремы о *неравенстве Шварца.*
◄

Теорема 1.1. *(Неравенство Шварца) Имеет место следующее соотношение между скалярным произведением и порождаемой им нормой*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

►
Рассмотрим билинейную форму, с параметром λ:

$$\|\lambda x + y\|^2 = \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle =$$
$$= \langle \lambda x, \lambda x \rangle + \langle \lambda x, y \rangle + \langle y, \lambda x \rangle + \langle y, y \rangle =$$
$$= |\lambda|^2 \|x\|^2 + \lambda \left(\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle \right) + \|y\|^2 \geq 0.$$

1. Пусть $E = E(\mathbb{R})$, тогда $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ и выражение преобразуется в

   $$|\lambda|^2 \|x\|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \geq 0.$$

   Тогда $D = 4 |\langle x, y \rangle|^2 - 4 \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$ и теорема доказана.

2. Пусть $E = E(\mathbb{C})$, тогда $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ и расмотрим

$$\langle x, y \rangle = e^{i\varphi} \left| \langle x, y \rangle \right|, \quad \varphi = \arg \langle x, y \rangle .$$

Определим вектор $z = e^{-i\varphi} x$, тогда

$$\langle z, y \rangle = e^{-i\varphi} \langle x, y \rangle = r = \left| \langle x, y \rangle \right| \in \mathbb{R},$$
$$\langle z, z \rangle = e^{-i\varphi} \left\langle x, e^{-i\varphi} x \right\rangle = \langle x, x \rangle .$$

Далее применим результат первого доказательства

◀

Лемма 1.3. *Неравенство Шварца обращается в точное равенство, когда x и y - линейно зависимые векторы.*

▶

Пусть $y = \alpha x$, тогда

$$\left| \langle x, \alpha x \rangle \right| \leq \|x\| \, \|\alpha x\|, \quad \Rightarrow \quad |\alpha| \, \|x\|^2 \leq |\bar{\alpha}| \, \|x\|^2, \quad |\bar{\alpha}| = |\alpha| .$$

Пусть $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \, \|y\|$, тогда

$$D/4 = |\langle x, y \rangle| = \|x\| \, \|y\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \neq 0 : \quad \|\lambda x + y\|^2 = 0,$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda x + y = 0.$$

◀

Углом между векторами x и y называется величина ϕ, определяемая равенством:

$$\cos \phi = \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|}, \quad \phi \in [0, \pi].$$

Nota bene Таким образом, угол между коллинеарными векторами будет нулевым, а векторы, чье скалярное произведение будет нулевым, полагаем расположенными под прямым углом друг к другу:

$$\phi = 0, \quad \Leftrightarrow \quad x \uparrow\uparrow y,$$
$$\phi = \pi/2 \quad \Leftrightarrow \quad x \perp y,$$
$$\phi = \pi \quad \Leftrightarrow \quad x \uparrow\downarrow y.$$

β

Лекция 2

Ортогональные системы векторов

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы подробно обсудим ортогональные системы векторов и методы работы с ними. Здесь будут сформулированы основные свойства разложения векторов по ортогональным системам, а также важный алгоритм нахождения ортогонального базиса в заданной линейной оболочке.

Ключевые слова:
Ортогональные векторы, теорема Пифагора, ортогональное дополнение, ортогонализация Грама-Шмидта, ортогональный и ортонормированный базис.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

2.1 Ортогональные векторы

Говорят, что векторы x и y пространства E **ортогональны** (пишут $x \perp y$), если

$$x \neq 0, \quad y \neq 0, \quad \langle x, y \rangle = 0.$$

Ортогональным набором векторов называется набор $\{x_i\}_{i=1}^m$, такой что любые два его вектора ортогональны.

Лемма 2.1. *Всякий ортогональный набор векторов является линейно-независимым.*

▶

Рассмотрим нулевую линейную комбинацию

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = 0, \quad \|x_j\| \neq 0,$$

$$\left\langle x_j, \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \right\rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i \langle x_j, x_i \rangle = \alpha_j \langle x_j, x_j \rangle = \alpha_j \|x_j\|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_j = 0.$$

◀

Теорема 2.1. *(Пифагора) Пусть $\{x_i\}_{i=1}^m$ - набор ненулевых попарно ортогональных векторов, тогда*

$$\left\| \sum_{i=1}^m x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^m \|x_i\|^2 .$$

▶

$$\left\| \sum_{i=1}^m x_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^m x_i, \sum_{j=1}^m x_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^m \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^m \langle x_i, x_i \rangle = \sum_{i=1}^m \|x_i\|^2 .$$

◀

Лемма 2.2. *Пусть вектор x ортогонален каждому вектору из набора $\{y_i\}_{i=1}^m$, тогда*

$$\forall z \in \langle y_1, \ldots, y_m \rangle_{\mathbb{C}} \quad \langle x, z \rangle = 0.$$

▶

Действительно, имеем

$$z = \sum_{i=1}^m \alpha^i y_i, \quad \langle x, z \rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i \right\rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i \langle x, y_i \rangle .$$

◀

Говорят, что x **ортогонален подпространству** $L \le E(\mathbb{C})$, если

$$\forall y \in L \quad \langle x, y \rangle = 0.$$

Nota bene Для обозначения данного факта обычно пишут $x \perp L$.

Ортогональным дополнением пространства L называется множество

$$M = \{x \in X : \quad x \perp L\}.$$

Лемма 2.3. *Ортогональное дополнение является подпространством* $E(\mathbb{C})$.

▶

В этом легко убедиться прямой проверкой.

◀

2.2 Ортогональный базис

Теорема 2.2. *Пусть* $\{x_j\}_{j=1}^m$ *- линейно-независимый набор в евклидовом пространстве* $E(\mathbb{C})$, *тогда* $\{x_j\}_{j=1}^m$ *можно преобразовать в ортогональный набор* $\{e_j\}_{j=1}^k$.

▶

Используем процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

1. $e_1 = x_1$,
2. $e_2 = x_2 + \alpha_2^1 e_1, \quad e_2 \perp e_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2^1 = -\frac{\langle e_1, x_2 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle}$,
3. $e_3 = x_3 + \alpha_3^2 e_2 + \alpha_3^1 e_1, \quad e_3 \perp e_1 \quad e_3 \perp e_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3^1 = -\frac{\langle e_1, x_3 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle}, \quad \alpha_3^2 = -\frac{\langle e_2, x_3 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle}$,

⋮ ...

m. $e_m = x_m + \alpha_m^{m-1} e_{m-1} + \ldots + \alpha_m^2 e_2 + \alpha_m^1 e_1, \quad \Rightarrow \quad \alpha_m^j = -\frac{\langle e_j, x_m \rangle}{\langle e_j, e_j \rangle}$.

◀

Nota bene Для $\{x_j\}_{j=1}^k$ процесс ортогонализации не оборвется, то есть все $e_j \neq 0$.

▶

От противного. Пусть

$$e_m = x_m + \alpha_m^{m-1} e_{m-1} + \ldots + \alpha_m^2 e_2 + \alpha_m^1 e_1 = 0,$$

тогда

$$e_m = x_m + \alpha_m^{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{m-1}^i x_i + \ldots + \alpha_m^2 \sum_{i=1}^{2} \alpha_2^i x_i + \alpha_m^1 x_1 = 1 \cdot x_m + \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i x_i = 0,$$

но это означает, что $\{x_j\}_{j=1}^k$ - линейно зависимый набор. Противоречие.

◀

Nota bene Пусть $\{x_j\}_{j=1}^{k}$ - линейно независимый набор, а $\{x_j\}_{j=1}^{k+1}$ - линейно-зависимый, тогда $e_{k+1} = 0$.

Nota bene Имеет место следующее неравенство: $\|e_m\| \leq \|x_m\|$

▶

Рассмотрим скалярное произведение:

$$\langle e_m, e_m\rangle = \langle e_m, x_m\rangle + 0 + \ldots + 0, \quad \Rightarrow \quad \|e_m\|^2 = \langle e_m, x_m\rangle \leq \|x_m\| \cdot \|e_m\|\,.$$

◀

Базис $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ евклидова пространства $E(\mathbb{C})$ называется

- **ортогональным**, если $\langle e_i, e_{j\neq i}\rangle = 0$.
- **ортонормированным**, если $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$.

Теорема 2.3. *Любой базис евклидова пространства $E(\mathbb{C})$ может быть преобразован к ортонормированному базису.*

▶

Ортогонализация Грама-Шмидта с последующей нормировкой.

◀

Лемма 2.4. *Базис $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ в $E(\mathbb{C})$ ортонормирован тогда и только тогда, когда*

$$\forall x, y \in E(\mathbb{C}): \quad x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^{n} \eta^j e_j, \quad \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\xi^i}\eta^i.$$

Nota bene Матрица Грама скалярного произведения ортогональном базисе имеет диагональный вид, а в ортонормированном базисе имеет вид единичной матрицы.

γ

Лекция 3

Ортогональный проектор

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы продолжим изучать ортогональные системы векторов. Здесь будут определены ортогональное дополнение подпространства и ортогональный проектор - те понятия, которыми наиболее часто оперирует геометрия. Также мы сформулируем и решим одну из самых важных задач геометрии - задачу о перпендикуляре.

Ключевые слова:
Ортогональная сумма подпространств, ортогональный проектор, задача о перпендикуляре, коэффициенты Фурье, неравенство Бесселя, равенство Парсеваля.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

3.1 Ортогональная сумма подпространств

Теорема 3.1. *Пусть L - подпространство линейного пространства $E(\mathbb{C})$ и*

$$M = L^{\perp} = \{x \in X_E : \quad x \perp L\},$$

тогда

$$E = L \dot{+} M \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in E(\mathbb{C}) \quad \exists! z \in L, \ h \in L^{\perp} : \quad x = z + h.$$

►

1. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^k$ - ортонормированный базис в L,
2. Дополним $\{e_j\}_{j=1}^k$ до базиса $E(\mathbb{C})$: $\quad \{e_1, e_2, \ldots, e_k; x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n\}$
3. Проведем процесс ортогонализации Грама-Шмидта
$$\{e_1, e_2, \ldots, e_k; e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_n\},$$
4. $\forall x = \sum_{i=1}^k \xi^i e_i + \sum_{i=k+1}^n \xi^i e_i = z + h \quad \Rightarrow \quad E = L + M.$
5. Пусть $x = h_1 + z_1 = h_2 + z_2$, тогда $h_2 - h_1 = z_1 - z_2$ и
$$\|h_2 - h_1\|^2 = \langle z_1 - z_2, h_2 - h_1 \rangle = 0, \quad \Rightarrow \quad h_2 - h_1 = 0.$$

◄

Nota bene В данном случае прямая сумма $E = L \dot{+} M = L \oplus M$ называется также *ортогональной суммой* подпространств L и M.

Nota bene В более общем случае, сумма попарно ортогональных подпространств $L_i \perp L_{j \neq i}$ называется ортогональной суммой подпространств:

$$E = \bigoplus_{i=1}^{s} L_i.$$

3.2 Ортогональный проектор

Ортогональным проектром на подпространство L называется линейный оператор, обладающий следующим свойством:

$$\mathcal{P}_L^{\perp}(x) = z, \quad x = z + h, \quad z \in L, \quad h \in M = L^{\perp}.$$

Nota bene При этом вектор z называется *ортогональной проекцией* x на L.

Теорема 3.2. *Пусть* $\{e_j\}_{j=1}^m$ *- ортонормированный базис в* $E(\mathbb{C})$*. Тогда вид ортогонального проектора в этом базисе:*

$$\mathcal{P}_L^\perp x = \sum_{i=1}^m \langle x, e_i\rangle\, e_i, \quad \forall x \in E.$$

►
Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что

$$x = z + h \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_L^\perp z = z, \quad \mathcal{P}_L^\perp h = 0.$$

Действительно, пусть e_j - элемент базиса, лежащий в L, тогда

$$\mathcal{P}_L^\perp e_j = \sum_{i=1}^k \langle e_j, e_i\rangle\, e_i = e_j.$$

Если e_l - элемент базиса, лежащий в M $(k < l \leq n)$, тогда

$$\mathcal{P}_L^\perp e_l = \sum_{i=1}^k \langle e_l, e_i\rangle\, e_i = 0.$$

◄

3.3 Задача о перпендикуляре

> **Задачей о перпендикуляре** называется задача об отыскании компонент произвольного вектора x в подпространствах L и M.

Nota bene Алгоритм решения задачи о перпендикуляре:

1. Найти ортонормированный базис $\{e_j\}_{j=1}^k$ подпространства L;
2. Найдем ортогональную проекцию $\mathcal{P}_L^\perp x = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i\rangle\, e_i$,
3. Найдем ортогональную проекцию $\mathcal{P}_M^\perp = x - \mathcal{P}_L^\perp$.

Лемма 3.1. *Имеет место следующее сравнение:*

$$\left\|\mathcal{P}_L^\perp x\right\| \leq \|x\|$$

►
Из теоремы Пифагора непосредственно следует, что

$$\left\|\mathcal{P}_L^\perp x\right\|^2 + \left\|\mathcal{P}_M^\perp x\right\|^2 = \|x\|^2.$$

◄

Коэффициенты $\alpha_i = \langle e_i, x\rangle$ ортонормированном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ пространства $E(\mathbb{C})$ называются **коэффициентами Фурье** вектора x относительно этого базиса.

Лемма 3.2. *Справедливо следующее равенство:*

$$\left\|\mathcal{P}_L^{\perp}x\right\|^2 = \sum_{i=1}^{m} |\langle e_i, x\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^2 .$$

►

Действительно, прямой проверкой можно убедиться, что

$$\left\|\mathcal{P}_L^{\perp}x\right\|^2 = \left\langle \mathcal{P}_L^{\perp}x, \mathcal{P}_L^{\perp}x\right\rangle = \sum_{i,j=1}^{m} \langle\langle e_i, x\rangle e_i, \langle e_j, x\rangle e_j\rangle =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} \langle e_i, x\rangle\langle e_j, x\rangle\langle e_j, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{m} |\langle e_i, x\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^2$$

◄

Лемма 3.3. *(Следствие предыдущих лемм) Неравенство Бесселя:*

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 , \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in L.$$

Теорема 3.3. *Система ортонормированных векторов $\{e_i\}_{i=1}^k$ является полной в $E(\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда для любого $x \in E(\mathbb{C})$ имеет место равенство Парсеваля:*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 , \quad \alpha_i = \langle e_i, x\rangle, \quad \forall x \in E(\mathbb{C}).$$

►

$\Rightarrow$ Очевидно.

$\Leftarrow$ Пусть для любого x выполняется равенство Парсеваля. Предположим, что

$$x = z + h, \quad z = \sum_{i=1}^{m} \langle e_i, x\rangle\, e_i, \quad h \perp z,$$

тогда по теореме Пифагора

$$\|x\|^2 = \|z\|^2 + \|h\|^2 , \quad \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^2 = \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^2 + \|h\|^2 ,$$

откуда следует, что $h = 0$ и система $\{e_i\}_{i=1}^m$ - полная в $E(\mathbb{C})$.

◄

δ

Лекция 4

Индуцированная евклидова структура

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы изучим свойства естественного изморофизма, порожденного метрической формой. Будет введено понятие биортогонального базиса и описан еще один способ разложения произвольного вектора по заданному базису в евклидовом простанстве. Полученные результаты дадут представление о том, какую роль играет введение ортогонального базиса в пространстве.

Ключевые слова:
Индуцированная евклидова структура, теорема Рисса, биортогональный базис, явный вид изморфизма, поднятие и опускание индекса у тензора.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

4.1 Изоморфизм X_E и X_E^*

Теорема 4.1. *Метрическая форма $g(x, y) = \langle x, y\rangle$ индуцирует естественный изоморфизм $\sigma : X_E \to X_E^*$ пространств X_E и X_E^*:*

$$\forall y \in X_E \quad \tilde{x}(y) = \langle x, y\rangle \quad \tilde{x} = \sigma(x).$$

►
Отображение σ *аддитивно*:

$$\sigma(x_1 + x_2)(y) = \langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle = \sigma(x_1)(y) + \sigma(x_2)(y) = (\sigma(x_1) + \sigma(x_2))(y).$$

Отображение σ *полулинейно*:

$$\sigma(\lambda x)(y) = \langle \lambda x, y\rangle = \bar{\lambda}\sigma(x)(y) = (\bar{\lambda}\sigma(x))(y).$$

Докажем *инъективность*. Пусть $\sigma(x_1) = \sigma(x_2)$, тогда

$$\forall y \in X_E \quad \sigma(x_1)(y) = \sigma(x_2)(y) \quad \Leftrightarrow \quad \langle x_1, y\rangle = \langle x_2, y\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle x_1 - x_2, y\rangle = 0,$$

и из аксиом скалярного произведения следует, что $x_1 = x_2$. Для завершения доказательства нам необходимо проверить *сюръективность* отображения σ. Наличие этого свойства доказывается *теоремой Рисса*.
◄

Теорема 4.2. *(Рисс) Для любого $\tilde{x} \in X_E^*$ существует единственный $x \in X_E$, так что*

$$\forall y \in X_E \quad \tilde{x}(y) = \langle x, y\rangle.$$

►
Пусть задан $\tilde{x} \neq 0$. Тогда

$$\exists\, u \in (\ker \tilde{x})^\perp : \quad u \neq 0.$$

Для произвольного $y \in X_E$ рассмотрим следующий вектор:

$$p_y = y - \frac{\tilde{x}(y)}{\tilde{x}(u)} u, \quad p_y \in \ker \tilde{x}.$$

Тогда будем иметь:

$$0 = \langle u, p_y\rangle = \langle u, y\rangle - \frac{\tilde{x}(y)}{\tilde{x}(u)}\|u\|^2,$$

откуда сразу следует, что

$$\tilde{x}(y) = \langle u, y\rangle \frac{\tilde{x}(u)}{\|u\|^2} = \langle x, y\rangle.$$

◄

Nota bene Таким образом, существует обратимое и линейное (с точностью до сопряжения) отображение

$$\sigma^{-1} : \quad X_E^* \to X_E.$$

Биортогональный базис

Nota bene Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис X_E и $\left\{f^k\right\}_{k=1}^n$ - сопряженный ему базис X_E^*. При помощи отображения σ^{-1} "пересадим" векторы базиса $\left\{f^k\right\}_{k=1}^n$ в пространство X_E:

$$\sigma^{-1}(f^k) = e^k$$

Лемма 4.1. *Наборы* $\{e_i\}_{i=1}^n$ *и* $\left\{e^k\right\}_{k=1}^n$ *обладают следующим свойством:*

$$\left\langle e^k, e_i \right\rangle = f^k(e_i) = \delta_i^k.$$

‖ Базисы $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\left\{e^k\right\}_{i=1}^n$ называются **биортогональными**.

Nota bene Рассмотрим следующую цепочку преобразований:

$$e_i = \sigma^{-1}(\sigma(e_i)) = \sigma^{-1}\left(\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} f^k\right) = \sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_{ik}\sigma^{-1}\left(f^k\right) = \sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_{ik} e^k$$

Лемма 4.2. *Пусть* g_{ij} *- метрический тензор, тогда* $\alpha_{ij} = g_{ji}$

►

Действительно, прямой проверкой можно убедиться, что

$$g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{\alpha}_{ik} \langle e^k, e_j \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{\alpha}_{ik}\delta_j^k = \overline{\alpha}_{ij}.$$

◄

Nota bene Таким образом, если G - матрица Грама, тогда $\|\alpha_{ik}\| = \|g_{ki}\| = G$.

Nota bene Прямой проверкой можно убедиться, что

$$e^k = \sum_{i=1}^n \bar{\beta}^{ki} e_i, \quad \|\bar{\beta}^{ki}\| = G^{-1} = \|g^{ik}\|.$$

4.2 Поднятие и опускание индексов

Nota bene Пусть $x \in X_E$ и имеется два его разложения по биортогональным базисам $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\left\{e^k\right\}_{k=1}^n$:

$$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \quad x = \sum_{k=1}^n \xi_k e^k$$

Лемма 4.3. *Имеют место соотношения:*

$$\xi^i = \sum_{k=1}^{n} g^{ik}\xi_k, \quad \xi_k = \sum_{i=1}^{n} g_{ki}\xi^i.$$

►

Прямой проверкой можно убедиться, что

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i = \sum_{i,k=1}^{n} \xi^i \bar{g}_{ik} e^k = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k = x.$$

◄

Nota bene Коэффициенты разложения ξ^i и ξ_k имеют вид:

$$\xi^i = \langle e^i, x\rangle, \quad \xi_k = \langle e_k, x\rangle.$$

Лемма 4.4. *Изоморфизм $\sigma : X_E \to E_X^*$ имеет следующий вид:*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i, \quad \sigma(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \xi^i g_{ik} f^k.$$

►

В этом можно убедиться прямой проверкой:

$$\sigma(x) = \sigma\left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i\right) = \sigma\left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i \sum_{k=1}^{n} \bar{g}_{ik} e^k\right) = \sum_{i,k=1}^{n} \overline{\xi^i} g_{ik} \sigma\left(e^k\right) = \sum_{i,k=1}^{n} \overline{\xi^i} g_{ik} f^k.$$

◄

Лемма 4.5. *Для ортонормированного базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ имеет место:*

$$e_i = e^i, \quad \xi_i = \xi^i \quad \Leftrightarrow \quad g_{ik} = \delta_{ik}.$$

Поднятием индекса называется процедура замены *нижнего индекса на верхний* в соответствии с формулой:

$$\xi^i = \sum_{k=1}^{n} g^{ik}\xi_k,$$

Опусканием индекса называется процедура замены *верхнего индекса на нижний* в соответствии с формулой:

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n} g_{ki}\xi^i.$$

Nota bene Поднятие и опускание индексов у произвольных тензоров производится аналогично описанному для координат векторов. Именно, пусть $\omega \in \Omega_0^p$, тогда $\sigma(\omega) \in \Omega_1^{p-1}$ и получается с помощью следующего преобразования (опускание первого индекса):

$$\tilde{\omega}_{j_1}^{i_2, i_3, \ldots, i_p} = g_{j_1 i_1}\omega^{i_1, i_2, \ldots, i_p}$$

ϵ

Лекция 5

Эрмитов оператор

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы рассматриваем частный, но очень важный случай оператора, который обладает свойством эрмитовости. Данный тип операторов часто встречается в различных приложениях, а его теория позволяет быстро получить важные свойства эрмитовых и симметрических матриц. Этими свойствами мы будем широко пользоваться в дальнейшем.

Ключевые слова:
Сопряженный оператор, эрмитовски сопряженный оператор, матрица сопряженного оператора, самосопряженный оператор, эрмитов оператор, спектр и собственные векторы эрмитова оператора, спектральная теорема для эрмитова оператора.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

5.1 Сопряженный оператор

Nota bene Пусть $\varphi \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(X)$ - эндоморфизм пространства $X(\Bbbk)$. Напомним, что *сопряженным* к φ называется линейный оператор $\varphi^* \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(X^*)$, определяемый следующим образом:

$$\forall x \in X(\Bbbk), \quad \forall f \in X^*(\Bbbk) \quad f(\varphi x) = (\varphi^* f)(x).$$

Операция сопряжения обладает следующими свойствами:

- аддитивность: $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$;
- однородность: $(\lambda\varphi)^* = \lambda\varphi^*$;
- контравариантность: $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$;
- инволютивность: $(\varphi^*)^* = \varphi$.

Из данных свойств, в частности, следует, что для данного оператора φ сопряженный ему определяется единственным образом.

Лемма 5.1. *Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ - базис пространства $X(\Bbbk)$ и A_φ - матрица оператора φ в этом базисе. Тогда в сопряженном к $\{e_j\}_{j=1}^n$ базисе пространства $X^*(\Bbbk)$ матрица φ^* будет иметь вид A^T:*

$$\varphi \leftrightarrow A_\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi^* \leftrightarrow A_{\varphi^*} = A_\varphi^T.$$

5.2 Эрмитовски сопряженный оператор

> Оператор $\varphi^\dagger \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(X_E)$ называется **эрмитовски сопряженным** к оператору φ, если он обладает следующим свойством:
>
> $$\langle x, \varphi y\rangle = \langle \varphi^\dagger x, y\rangle.$$

Теорема 5.1. *(существования) Для любого оператора $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(X_E)$ существует единственный эрмитовски сопряженный оператор $\varphi^\dagger$.*

►

Действительно, с использованием изоморфизма $\sigma : X_E \to X_E^*$ указанное выше условие можно переформулировать, именно:

$$\langle x, \varphi y\rangle = \sigma(x)(\varphi y) = [(\varphi^* \circ \sigma)x](y),$$
$$\langle \varphi^\dagger x, y\rangle = \sigma(\varphi^\dagger x)(y) = [(\sigma \circ \varphi^\dagger)x](y),$$

откуда сразу следует

$$\varphi^\dagger = \sigma^{-1} \circ \varphi^* \circ \sigma,$$

где φ^* сопряжен к φ. Из его единственности следует единственность $\varphi^\dagger$.

◄

Nota bene Свойства операции эрмитовского сопряжения теже, что и свойства операции сопряжения.

Лемма 5.2. *Пусть* $\{e_j\}_{j=1}^n$ *- базис евклидова пространства* $X_E(\mathbb{C})$ *и* G *- его матрица Грама. Тогда если* A_φ *- матрица оператора* φ *в этом базисе, то матрица* $\varphi^\dagger$ *будет имеет вид*

$$A_{\varphi^\dagger} = G^{-1}A^\dagger G, \quad A^\dagger = \bar{A}^T.$$

▶

По определению скалярного произведения:

$$\langle x, \varphi y\rangle = \xi^\dagger G(A_\varphi \eta) = (\xi^\dagger G A_\varphi G^{-1})G\eta = (G^{-1}A_\varphi^\dagger G\xi)^\dagger G\eta = \langle \varphi^\dagger x, y\rangle.$$

◀

5.3 Эрмитовский оператор

> Оператор, обладающий свойством $\varphi^\dagger = \varphi$ называется **самосопряженным**, если $\Bbbk = \mathbb{R}$ и **эрмитовским**, если $\Bbbk = \mathbb{C}$.

Nota bene Матрицы самосопряженного φ и эрмитовского ψ операторов обладают соответственно свойствами:

$$A_\varphi^T = A_\varphi, \quad B_\psi^\dagger = B_\psi.$$

Пример 5.1. Примеры матрицы A самосопряженного оператора и матрицы B эрмитовского оператора:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 5 \end{pmatrix}.$$

Nota bene В случае вещественного поля $\mathbb{R}$ операции $\dagger$ и T совпадают.

5.4 Спектральные свойства эрмитова оператора

Лемма 5.3. *Все собстdенные значения эрмитова оператора* φ *вещественны.*

▶

Пусть λ - собственное значение φ и x - соответствующий собственный вектор. Тогда

$$\langle \varphi x, x\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle, \quad \langle x, \varphi x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle \quad \Rightarrow \quad \overline{\lambda} = \lambda$$

◀

Лемма 5.4. *Собственные векторы эрмитова оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны:*

$$\varphi x_1 = \lambda_1 x_1, \quad \varphi x_2 = \lambda_2 x_2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 \perp x_2.$$

▶
Действительно,

$$\begin{gathered} \langle \varphi x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, \varphi x_2 \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle \lambda_1 x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, \lambda_2 x_2 \rangle \\ \lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle = \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle, \quad \overline{\lambda}_2 = \lambda_2, \quad \Rightarrow \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \langle x_1, x_2 \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1, x_2 \rangle = 0. \end{gathered}$$

◀

Лемма 5.5. *Если L - инвариантное подпространство эрмитова оператора φ, тогда $L^\perp$ - также инвариантное подпространство.*
▶
Пусть $x \in L$ и $y \in L^\perp$, тогда

$$0 = \langle \varphi x, y \rangle = \langle x, \varphi y \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi y \in L^\perp.$$

◀

Теорема 5.2. *Эрмитов оператор φ явяется оператором скалярнгго типа.*
▶
Покажем, что собсвенные векторы φ образуют базис $X_E(\mathbb{C})$. Проведем доказательство от противного: пусть $\{x_j\}_{j=1}^m$ - максимальный ЛНЗ набор:

$$\varphi x_j = \lambda_j x_j, \quad j = 1 \ldots m \quad m < n = \dim_{\mathbb{C}} X_E.$$

Пусть далее

$$L = \langle x_1, x_2, \ldots, x_m \rangle_{\mathbb{C}}, \quad M = L^\perp, \quad \varphi_M : M \to M$$

Так как M -инвариантное подпространство φ, существует по крайней мере один вектор $\tilde{x} \in M$, такой что

$$\varphi_M \tilde{x} = \tilde{\lambda} \tilde{x}.$$

Но $\tilde{x} \perp L$ и значит $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, \tilde{x}\}$ - ЛНЗ. Противоречие.
◀

Теорема 5.3. *(Спектральная теорема для эрмитова оператора) Пусть $\varphi : X_E \to X_E$ - эрмитов оператор и $\{e_j\}_{j=1}^n$ - ОНБ X_E, состоящий из собственных векторов φ, тогда:*

$$\varphi(*) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle *, e_i \rangle e_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

ζ

Лекция 6

Унитарный оператор

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы продолжаем рассматривать специального вида операторы в евклидовом пространстве. Унитарный оператор играет ведущую роль при исследовании эволюции любой динамической системы, так как любое преобразование во времени состояния динамической системы описывается непрерывным семейством унитарных операторов. На множестве унитарных операторов можно определить структуру группы, что имеет далеко идущие следствия, обсуждение которых, однако, выходит за рамки нашего курса.

Ключевые слова:
Изометрия, унитарный оператор, определитель унитарного оператора, матрица унитарного оператора, спектральные свойства унитарного оператора, ортогональный оператор, спектральная теорема, диагонализация эрмитовой матрицы.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

6.1 Определение унитарного оператора

Лемма 6.1. *Пусть $\upsilon \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(X_E)$ - эндоморфизм пространства $X_E(\Bbbk)$, тогда следующие свойства эквиваентны:*

1. *изометрия:* $\langle \upsilon x, \upsilon y\rangle = \langle x, y\rangle$;
2. *сохранение нормы:* $\|\upsilon x\| = \|x\|$;
3. *свойство сопряженного:* $\upsilon^\dagger = \upsilon^{-1}$

►
Проверим следующие импликации:

- Опр.(1) ⇒ Опр.(2):
$$\|\upsilon x\|^2 = \langle \upsilon x, \upsilon x\rangle = \langle xx\rangle = \|x\|^2;$$
- Опр.(2) ⇒ Опр.(1):
$$\|\upsilon(x+y)\|^2 = \|\upsilon x\|^2 + \|\upsilon y\|^2 + 2\Re\langle \upsilon x, \upsilon y\rangle,$$
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y^2\| + 2\Re\langle x, y\rangle \quad \Rightarrow \quad \Re\langle x, y\rangle = \Re\langle \upsilon x, \upsilon y\rangle$$
Для $\Im$ аналогично рассматриваем $\|\upsilon(x + i\cdot y)\|^2$
- Опр.(1) ⇒ Опр.(3):
$$\langle \upsilon x, \upsilon y\rangle = \langle x, \upsilon^\dagger \upsilon y\rangle = \langle x, y\rangle \quad \Rightarrow \quad \upsilon^\dagger\upsilon = \mathcal{I}.$$
- Опр.(3) ⇒ Опр.(1):
$$\langle x, y\rangle = \langle x, \mathcal{I} y\rangle = \langle x, \upsilon^\dagger \upsilon y\rangle = \langle \upsilon x, \upsilon y\rangle.$$

◄

Унитарным называется оператор $\upsilon \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(X_E)$, обладающий одним из перечисленных выше свойств (и, как следствие, всем остальными).

Лемма 6.2. *Определитель оператора υ имеет слеудющее свойство:*
$$|\det \upsilon| = 1.$$

►
Прямой проверкой можно убедиться, что
$$\det \mathcal{I} = \det\left(\upsilon^\dagger \upsilon\right) = \det \upsilon^\dagger \det \upsilon = \overline{\det \upsilon} \cdot \det \upsilon = |\det \upsilon|^2 = 1.$$

◄

Nota bene Унитарный оператор в вещественном евклидовом пространстве X_E называется **ортогональным** оператором.

6.2 Матрица унитарного оператора

Nota bene Матрицы унитарного и ортогонального операторов имеют свойсва:

$$\mathbb{C}: \quad \upsilon \leftrightarrow U, \quad \overline{U^T} = U^{-1};$$
$$\mathbb{R}: \quad \upsilon \leftrightarrow U, \quad U^T = U^{-1}.$$

Nota bene В вещественном случае

$$\det \upsilon = \det U = \pm 1$$

Лемма 6.3. *Пусть $U = \|u_{ik}\|$ - матрица унитарного оператора, тогда:*

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{u}_{ij} u_{kj} = \delta_{ik}.$$

Nota bene Столбцы матрицы унитарного оператора ортогональны.

Пример 6.1. Матрица Эйлера - пример ортогональной матрицы:

$$U = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Лемма 6.4. *Множество унитарных операторов, действующих на пространстве X_E образует мультипликативную группу:*

$$U(n) = \left\{\upsilon: \quad \upsilon^\dagger \upsilon = \mathcal{I}\right\}, \quad \dim_{\Bbbk} X_E = n.$$
$$SU(n) = \left\{\upsilon: \quad \upsilon^\dagger \upsilon = \mathcal{I}, \quad \det \upsilon = 1\right\}.$$

▶
Пусть $\upsilon_1, \upsilon_2 \in U(n)$, тогда $\upsilon_1 \upsilon_2 \in U(n)$. Действительно:

$$\langle \upsilon_1 \upsilon_2 x, \upsilon_1 \upsilon_2 y \rangle = \langle \upsilon_2 x, \upsilon_2 y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

◀

6.3 Спектральные свойства унитарного оператора

Лемма 6.5. *Все собственные значения оператора υ по модулю равны единице:*

$$|\lambda| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = e^{i\chi}.$$

▶
Пусть $\upsilon x = \lambda x$, тогда

$$\langle \upsilon x, \upsilon x \rangle = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = |\lambda|^2 \langle x, x \rangle \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = 1.$$

◀

Лемма 6.6. *Собственные векторы унитарного оператора, отвечающие различным собственным значениям ортогональны:*

$$\upsilon x_1 = \lambda_1 x_1, \quad \upsilon x_2 = \lambda_2 x_2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1, x_2 \rangle = 0.$$

▶
Убедимся прямой проверкой:

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \langle \upsilon x_1, \upsilon x_2 \rangle = \bar{\lambda}_1 \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle = e^{-i\chi_1} e^{i\chi_2} \langle x_1, x_2 \rangle = e^{i(\chi_2 - \chi_1)} \langle x_1, x_2 \rangle.$$

Откуда сразу следует:

$$\left(e^{i(\chi_1 - \chi_2)} - 1\right) \langle x_1, x_2 \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1, x_2 \rangle = 0.$$

◀

Лемма 6.7. *Любое инвариантное подпространство υ является ультраинвариантным.*
▶
Для любых $x \in L$ и $y \in L^\perp$ имеем:

$$0 = \langle x, y \rangle = \langle \upsilon x, \upsilon y \rangle \quad \Rightarrow \quad \upsilon x \perp \upsilon y \quad \Rightarrow \quad \upsilon y \in M.$$

◀

Теорема 6.1. *Унитарный оператор является опертором скалярного типа.*
▶
Доказательство как для случая эрмитова оператора. ◀

Nota bene Ортогональный оператор, вообще говоря, не является скалярным.

Теорема 6.2. *(Спектральная теорема для унитарного оператора) Пусть $\upsilon : X_E \to X_E$ - унитарный оператор и $\{e_j\}_{j=1}^n$ - ОНБ X_E, состоящий из собственных векторов υ, тогда:*

$$\upsilon * = \sum_{j=1}^n e^{i\chi_j} \langle e_j, * \rangle e_j.$$

Лемма 6.8. *Любая эрмитова матрица может быть приведена к диагональной форме унитарным преобразованием.*

Лемма 6.9. *Для любого унитарного оператора υ найдется такой самосопряженный оператор φ, что:*

$$\upsilon = e^{i\varphi}.$$

η

Лекция 7

Квадратичные формы в линейном пространстве

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы обсудим квадратичные формы и основные задачи, связанные с ними. Квадратичные формы играют особую роль ввиду того, что могут определять геометрию пространства, над которым они заданы наподобие того как скалярное произведение задает геометрию в евклидовом пространстве. Мы изучим общие аспекты исследования квадратичных форм и коротко затронем вопросы геометрической интерпретации полученных результатов.

Ключевые слова:
Билинейная форма, квадратичная форма, канонический вид КФ, приведение к главным осям, индексы инерции КФ, сигнатура КФ, положительно определенные КФ, теорема Лагранжа.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

7.0.1 Определение квадтратичной формы

Nota bene Напомним, что билинейной формой над вещественным линейным пространством $X(\mathbb{R})$ называется отображение $b : X \times X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее следующим свойствам:

$$b(x_1 + x_2, y) = b(x_1, y) + b(x_2, y), \quad b(\lambda x, y) = \lambda b(x, y),$$
$$b(x, y_1 + y_2) = b(x, y_1) + b(x, y_2), \quad b(x, \lambda y) = \lambda b(x, y).$$

Nota bene Билинейная форма является тензором второго ранга и типа $(2, 0)$:

$$b \in \Omega_0^2(\mathbb{R}).$$

Nota bene Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ базис X, тогда

$$b \leftrightarrow b_{ij}, \quad x \leftrightarrow \xi^i, \quad y \leftrightarrow \eta^j$$

тогда

$$b(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi^i \eta^j b_{ij} = \xi^T B \eta,$$

где B - матрица квадратичной формы b.

Пример 7.1. Пример квадратичной формы в $\mathbb{R}^2$ и соответствующей ей матрицы:

$$b(x, y) = a_{11} x^1 y^1 + a_{12} x^1 y^2 + a_{21} x^2 y^1 + a_{22} x^2 y^2 \quad \Rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}. \end{pmatrix}$$

Квадратичной формой, соответствующей билинейной форме b называется отображение $q : X \to \mathbb{R}$, такое что:

$$q(x) = b(x, x), \quad \forall x \in X.$$

Nota bene В базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$ пространства $X(\mathbb{R})$ квадратичная форма имеет вид

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi^i \xi^j q_{ij} = \xi^T Q \xi,$$

где Q - матрица квадратичной формы.

Пример 7.2. Метрика Минковского:

$$\mu(x) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

Лемма 7.1. *Закон преобразования коэффициентов билинейной формы при переходе к новом базису при помощи матрицы T имеет вид:*

$$\tilde{Q} = T^T Q T.$$

Лемма 7.2. *Матрица квадратичной формы q симметрична в любом базисе:*

$$Q^T = Q.$$

Диагонализация матрицы квадратичной формы

Говорят, что квадратичная форма **диагональна** в некотором базисе линейного пространства $X(\mathbb{R})$, если диагональна ее матрица в этом базисе:

$$Q = \operatorname{diag}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}.$$

Если при этом $\alpha_j \in \{0, \pm 1\} \quad \forall j$, то говорят, что квадратичная форма q имеет в соответствующем базисе **канонический** вид.

Процедура нахождения базиса, в котором данная квадратичная форма является диагональной, называется **приведением к главным осям**.

Nota bene Пусть квадратичная форма приведена к диагональному виду, тогда

$$q(x) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i |\xi^i|^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j |\xi^{p+j}|^2,$$

где $\alpha_i > 0$, $\beta_j < 0$ и $n - p - q - z$.

Числа p, q и z называются соответственно **положительным**, **отрицательным** и **нулевым индексами инерции** квадратичной формы q.

Теорема 7.1. *(об индексах инерции КФ) Индексы инерции квадратичной формы не зависят от способа ее приведения к главным осям:*

$$p' = p, \quad q' = q, \quad p + q \le n.$$

►

Докажем от противного. Пусть $p > p'$ и рассмотрим соответствующий базис $X(\mathbb{R})$:

$$\{e_j\}_{j=1}^{n} = \{e_1, e_2, \dots e_p; e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_{p+q}; e_{p+q+1}, \dots, e_n\},$$

и линейные оболочки

$$L = \langle e_1, e_2, \dots e_p \rangle_{\mathbb{R}}, \quad L' = \langle \tilde{e}_{p'+1}, \tilde{e}_{p'+2}, \dots \tilde{e}_n \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Заметим, что

$$\dim L + \dim L' = p + (n - p') = n + (p - p') > 0,$$

и тогда

$$\dim(L \cap L') = \dim L + \dim L' - \dim(L + L').$$

Значит $\dim_{\mathbb{R}} L \cap L' > 0$ и $L \cap L' \neq \{0\}$. Пусть теперь $z \in L \cap L', z \neq 0$ тогда

$$q(z) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \left|\zeta^i\right|^2 > 0, \qquad q(z) = \sum_{i=p'+1}^{n} \alpha_i \left|\tilde{\zeta}^i\right|^2 \le 0.$$

Значит предположение $p > p'$ неверно и, следовательно, $p \le p'$. Аналогично можно доказать, что $p' \le p$ и тогда $p = p'$ и $q' = q$.

◄

Тройка $(n_+, n_-, n_0) \triangleq (p, q, z)$ называется **сигнатурой** квадратичной формы.

Пример 7.3. Алгебраические поверхности второго порядка в $\mathbb{R}^3$:

- эллипсоид $(3, 0, 0)$:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

- однополостный гиперболоид $(2, 1, 0)$:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- двуполостных гиперболоид $(1, 2, 0)$:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- эллиптический цилиндр $(2, 0, 1)$:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Квадратичная форма q называется **положительно определенной**, если:

$$n_+ = n = \dim_{\mathbb{R}} X \quad \Rightarrow \quad \forall x \in X \quad q(x) \geq 0, \quad q(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Теорема 7.2. *(Лагранжа) Квадратичная форма в линейном пространстве может быть приведена к диагональному виду методом выделения полных квадратов.*
▶
Пусть в некотором базисе пространства E квадратичная форма имеет вид

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij} \xi^i \xi^j.$$

Если $q_1 = 0$, то перенумеруем элементы так, чтобы $q_{11} \neq 0$. Если все $q_{ii} = 0$, то воспользуемся заменой (при условии что $q_{1k} \neq 0$)

$$\tilde{\xi}^1 = \xi^1 - \xi^k, \quad \tilde{\xi}^k = \xi^1 + \xi^k, \quad \tilde{\xi}^i = \xi^i.$$

Далее будем полагать, что $q_{11} \neq 0$ и выделим следующую группу слагаемых:

$$q(x) = q_{11} \left|\xi^1\right|^2 + 2q_{12}\xi^1\xi^2 + \ldots + 2q_{1n}\xi^1\xi^n + \sum_{i,j=2}^{n} q_{ij}\xi^i\xi^j.$$

Преобразуем группу следующим образом:

$$q_{11}\left|\xi^1\right|^2+2q_{12}\xi^1\xi^2+\ldots+2q_{1n}\xi^1\xi^n=$$
$$=q_{11}\left(\xi^1+\frac{q_{12}}{q_{11}}\xi^2+\frac{q_{13}}{q_{11}}\xi^3+\ldots+\frac{q_{1n}}{q_{11}}\xi^n\right)^2-\frac{q_{12}^2}{q_{11}}\left|\xi^2\right|^2-\ldots-\frac{q_{1n}^2}{q_{11}}\left|\xi^n\right|^2-$$
$$-2\frac{q_{12}q_{13}}{q_{11}}\xi^2\xi^3-\ldots-\frac{q_{1,n-1}q_{1n}}{q_{11}}\xi^{n-1}\xi^n.$$

Значит выражение для q может быть переписано так:

$$q(x)=q_{11}\left(\xi^1+\frac{q_{12}}{q_{11}}\xi^2+\frac{q_{13}}{q_{11}}\xi^3+\ldots+\frac{q_{1n}}{q_{11}}\xi^n\right)^2+\sum_{i,j=2}^{n}\tilde{q}_{ij}\xi^i\xi^j,$$

где $\tilde{q}_{ij}$ - коэффициенты, полученные после преобразования. Пусть далее

$$\eta^1=\xi^1+\frac{q_{12}}{q_{11}}\xi^2+\frac{q_{13}}{q_{11}}\xi^3+\ldots+\frac{q_{1n}}{q_{11}}\xi^n,$$
$$\eta^2=\xi^2,\quad \ldots,\quad \eta^n=\xi^n.$$

Тогда в новых координатах форма примет вид

$$q(x)=q_{11}\left|\eta^1\right|^2+\sum_{i,j=2}^{n}\tilde{q}_{ij}\eta^i\eta^j$$

Если форма $\sum_{i,j=2}^{n}\tilde{q}_{ij}\eta^i\eta^j$ тождественно равна нулю, то вопрос о ее диагонализации решен, в противном случае повторяем описанный выше алгоритм не меняя координату η^1. Очевидно, все приведенные преобразования являлись невырожденными.
◄

Лекция 8

Квадратичные формы в евклидовом пространстве

Содержание лекции:

В этой лекции мы обсудим вопрос диагонализации квадратичной формы в евклидовом пространстве. Евклидова страктура дает возможность ввести линейный оператор, связанный с квадратичной формой и свести задачу диагонализации данной формы к спектральной задаче для оператора. Позвожности и границы применимости этого метода мы изучим в настоящей лекции.

Ключевые слова:

Присоединенный оператор, собственные векторы ПО, собственные значения ПО, диагонализация КФ унитарным преобразованием, диагонализация пары квадратичных форм.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

mathdep.ifmo.ru/geolin

8.1 Присоединенный оператор

> Пусть q - квадратичная форма в евклидовом пространстве X_E и $\varphi : X_E \to X_E$ - линейный оператор. Оператор φ называется **присоединенным** к квадратичной форме q, если
> $$q(x,x) = \langle x, \varphi x \rangle$$

Лемма 8.1. *Оператор φ, присоединненый к квадратичной форме q обладает свойством $\varphi^\dagger = \varphi$, то есть является эрмитовым.*

▶

В этом можно убедиться прямой проверкой:

$$q(x,x) = \langle x, \varphi x \rangle = \langle \varphi x, x \rangle .$$

◀

Лемма 8.2. *В произвольном базисе евклидова пространства X_E имеет место следующее выражение, связывающее матрицу A оператора φ и матрицу Q квадратичной формы q:*

$$Q = A^T G = AG.$$

▶

Действительно,

$$q(x,x) = \xi^T Q \xi = \xi^T A^T G \xi = \langle \varphi x, x \rangle , \quad \forall x \in X_E, \quad x \leftrightarrow \xi.$$

◀

Nota bene Оператор φ рассматриваемый как тензор типа $(1,1)$ является результатом процедуры поднятия индекса тензора типа $(0,2)$, который соответствует квадратичной форме q:

$$a^i_j = g^{ik} q_{kj}.$$

Nota bene В случае ортонормированного базиса имеет место равенство

$$a^i_j = q_{ij}.$$

8.2 Диагонализация КФ в X_E

Теорема 8.1. *В базисе и собственных векторов оператора φ матрица квадратичной формы q имеет диагональный вид.*

▶

Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ - ортонормированный базис, составленный из собственных векторов оператора φ:

$$\varphi e_j = \lambda_j e_j, \quad \forall x \in X_E \quad x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i.$$

Тогда будем иметь

$$q(x,x) = \langle x, \varphi x\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_j \xi^i \xi^j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_j \left|\xi^j\right|^2.$$

◄

Лемма 8.3. *Собственные числа оператора φ, присоединенного к квадратичной форме q определяются соотношением*

$$\det\left(Q - \lambda G\right) = 0.$$

►

Спектр оператора φ - это корни его характеристического полинома

$$\det(\varphi - \lambda \mathcal{I}) = 0,$$

но $A = QG^{-1}$ и поэтому

$$\det(QG^{-1} - \lambda I) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det(Q - \lambda G) = 0.$$

◄

Nota bene Аналогично, собственные векторы оператора φ вычисляются из системы

$$(A - \lambda G)\xi = 0, \quad \lambda \in \sigma_\varphi.$$

Лемма 8.4. *Любая квадратичная форма может быть приведена к диагональному виду унитарным (ортогональным) преобразованием.*

8.3 Диагонализация пары КФ

Теорема 8.2. *Пусть q и p - квадратичные формы в линейном пространстве X и одна из форм (например p) положительно определена. Тогда в пространсве X можно указать такой базис, в котором форма p будет иметь канонический вид, а форма q - диагональный.*

►

Так как квадратичная форма p положительно определена, то пространство X может быть наделено евклидовой структурой, именно:

$$p(x) = g(x,x) \quad \to \quad g^{(s)}(x,y) > 0.$$

Форма g удовлетворяет аксиомам скалярного произведения и значит (X, g) - евклидово пространство. Находя ортонормированный базис, в котором форма q имеет диагональный вид, мы в силу определения скалярного произведения получаем канонический вид формы p (матрица Грама в ортонормированном базисе - единичная). ◄