Лекция 1

Симметрическая группа перестановок

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы коротко напомним об основных свойствах перестановок и действий с ними. В дальнейшем приведенные здесь факты окажутся полезными.

Ключевые слова:
Перестановка, транспозиция, инверсия, четность перестановки, подстановка, четность подстановки, композиция подстановок, циклические подстановки.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

1.1 Перестановки

Nota bene Здесь мы будем рассматривать некоторое конечное множество M_n, состоящее из n элементов

$$M_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

которые могут быть перенумерованы при помощи первых n натуральных чисел. Так как свойства элементов множества M_n не будут играть никакой роли, примем, что элементами M_n являются сами числа $1, 2, \dots, n$, то есть

$$M_n = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Перестановкой элементов конечного множества M_n называется всякое упорядоченное расположение всех его элементов.

Пример 1.1. Некоторые перестановки из 4 чисел:

$$(1, 2, 3, 4), \quad (3, 2, 1, 4), \quad (4, 2, 3, 1).$$

Лемма 1.1. *Число перестановок из n символов равно*

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!.$$

►
Произвольная перестановка из n элементов имеет вид

$$(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где x_i можно выбрать $(n-i+1)$ различными способами (при выбранных предыдущих значений i). Число различных перестановок равно числу способов придать различные значения элементам x_i.
◄

Транспозицией на множестве перестановок называется преобразование, при котором меняются местами какие-либо два символа перестановки, а остальные символы остаются на месте.

Лемма 1.2. *От любой перестановки из n символов можно перейти к любой другой перестановке из тех же символов при помощи конечного числа транспозиций.*
►
Данное утверждение эквивалентно утверждению о том, что все $n!$ перестановок из n символов можно расположить в таком порядке, что каждая следующая будет получаться из предыдущей одной транспозицией, причем начинать можно с любой перестановки. Используем индукцию:

- База индукции:
$$(1, 2) \to (2, 1), \quad (2, 1) \to (1, 2).$$

- Предположение: пусть доказано для перестановок из $(n-1)$ элементов.
- Переход: рассмотрим перестановку, состоящую из n элементов

  $$(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

  по индукционному предположению все перестановки, у которых x_1 стоит на первом месте можно упорядочить согласно требованиям теоремы, причем начиная с данной перестановки. В последней из полученных таким образом перестановок совершаем транспозицию символа x_1 с произвольным другим символом, например x_2 и упорядочим все перестановки, у которых на первом месте стоит x_2. Таким образом перебираются все перестановки из n элементов.

◀

Пример 1.2. Пример упорядочения перестановок из 3 символов согласно доказательству:

$$(1,2,3) \to (1,3,2) \to (2,3,1) \to (2,1,3) \to (3,1,2) \to (3,2,1).$$

1.2 Четность перестановки

Говорят, что в перестновке числа x_i и x_j образуют **инверсию**, если

$$x_i > x_j, \quad i < j.$$

Перестановка называется **четной**, если ее символы составляют четное число инверсий, и **нечетной** - в противном случае.

Nota bene Перестановка $(1, 2, 3, \dots, n)$ четная при любом n, так как не содержит инверсий. Она называется базовой перестановкой.

Пример 1.3. Перестановки и четности:

$$\begin{array}{ccccc} (2,1,3,4) & - & 1 \text{ инверсия} & - & \text{нечетная;} \\ (4,1,3,2) & - & 4 \text{ инверсии} & - & \text{четная.} \end{array}$$

Лемма 1.3. *Всякая транспозиция меняет четность перестановки.*

▶

Сначала рассмотрим случай, когда транспонируемые символы стоят рядом:

$$(\dots, x_i, x_j, \dots).$$

В этом случае транспозиция элементов x_i и x_j не меняет инверсий, которые данные элементы образуют со всеми остальными (x_i и x_j остались справа от предстоящих элементов и слева от последующих). Однако, если x_i и x_j не образовывали инверсию, то после транспозиции будут. Таким образом число инверсий изменилось на одну, то есть сменило четность.

Докажем теперь общий случай, когда x_i и x_j не стоят рядом, то есть между ними находятся $k \geq 1$ элементов. Тогда, чтобы совершить транспозицию x_i и x_j необходимо совершить $2k+1$ транспозиций: по k транспозиций каждого из x_i и x_j с этими k символами и еще одна транспозиция - переставить местами x_i и x_j. Таким образом общее число транспозиций нечетное и следовательно четность перестановки изменится.
◀

Лемма 1.4. *При $n \geq 2$ число четных перестановок из n символов равно числу нечетных, то есть равно $n!/2$.*
▶
Все перестановки из n символов можно упорядочить так, что каждая получается из предыдущей одной транспозицией. Транспозиция меняет четность перестановки и значит любые две соседние перестановки будут иметь противоположные четности. Теперь утверждение следует из замечания о том, что при $n \geq 2$ число $n!$ - четное.
◀

1.3 Подстановки

Подстановкой степени n будем называть следующий символ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix},$$

который *содержит* в каждой из строк перестановку из n элементов множества M_n и *определяет* в какой из элементов нижней строки переходит каждый элемент верхней строки.

Пример 1.4. Рассмотрим конкретный случай:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 1 \to 2, \quad 2 \to 1, \quad 3 \to 3.$$

Nota bene Каждая подстановка $\sigma : M_n \to M_n$ степени n определяет взаимно однозначное отображение множества M_n на себя:

$$\sigma : \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Пример 1.5. Действие подстановки на перестановку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} (4,3,2,1) = (1,3,4,2).$$

Подстановка называется **четной**, если четности соответствующих ей двух перестановок совпадают и **нечетной** - в противном случае.

Nota bene Сформулируем несколько *очевидных* лемм, следующих прямо из определения подстановки:

Лемма 1.5. *Общее число подстановок степени n равно $n!$*

Лемма 1.6. *Число четных подстановок равно числу нечетных и равно $n!/2$.*

Лемма 1.7. *Четная подстановка не меняет четность перестановки, тогда как нечетная подстановка - меняет.*

1.4 Симметрическая группа

Определим на множестве S_n подстановок степени n операцию **композиции подстановок**. Пусть $\sigma, \chi \in S_n$ две подстановки:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \chi(1) & \chi(2) & \dots & \chi(n) \end{pmatrix},$$

тогда результатом их композиции будет следующий символ

$$\chi \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \chi(\sigma(1)) & \chi(\sigma(2)) & \dots & \chi(\sigma(n)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ (\chi\circ\sigma)(1) & (\chi\circ\sigma)(2) & \dots & (\chi\circ\sigma)(n). \end{pmatrix}$$

Nota bene Композиция подстановок является подстановкой.

Пример 1.6. Пусть даны две подстановки:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем их композицию:

$$\chi \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma \circ \chi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nota bene Композиция подстановок - некоммутативная операция:

$$\chi \circ \sigma \neq \sigma \circ \chi.$$

Лемма 1.8. *Операция композиции ассоциативна:*

$$\forall \sigma, \chi, \varphi \quad (\sigma \circ \chi) \circ \varphi = \sigma \circ (\chi \circ \varphi)$$

Лемма 1.9. *На множестве S_n относеительно закона композиции существует нейтральный элемент:*

$$\exists \ \mathrm{id} \in S_n : \quad \forall \sigma \in S_n \quad \sigma \circ \mathrm{id} = \sigma = \mathrm{id} \circ \sigma.$$

►
Предъявляем:

$$\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

◄

Лемма 1.10. *Для каждого элемента $\sigma \in S_n$ сущесвует обратный σ^{-1}:*

$$\forall \sigma \in S_n \quad \exists \sigma^{-1} \in S_n : \quad \sigma \circ \sigma^{-1} = \mathrm{id} = \sigma^{-1} \circ \sigma.$$

►
Предъявляем:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}, \quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix},$$

◄

Теорема 1.1. *Операция композиции на множестве S_n индуцирует структуру некоммутативной группы - группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(M_n)$ множества M_n.*

Nota bene Всякая транспозиция $t_{ij}^{(n)}$ элементов x_i и x_j перестановки является элементом $S_n = \mathrm{Aut}(M_n)$:

$$t_{ij}^{(n)} = \begin{pmatrix} \dots & i & \dots & j & \dots \\ \dots & j & \dots & i & \dots \end{pmatrix}$$

Лемма 1.11. *Всякая подстановка σ представима в виде произведения транспозиций.*
►
Все перестановки из n чисел можно получить из одной из них последовательным применением транспозиций. Следовательно, всякая подстановка может быть получена из тождественной подстановки путем последовательного применения транспозиций в нижней строке, то есть последовательных композиций с подстановками вида $t_{ij}^{(n)}$.
◄

Пример 1.7. Разложение подстановки в композицию транспозиций:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,2)(1,5)(3,4), \quad (i,j) \triangleq t_{ij}^{(5)}.$$

Nota bene Разложение подстановки в композицию транспозиций не единственно.

Лемма 1.12. *При любом разложении подстановки в композицию транспозиций четность числа элементов композиции совпадает с четностью подстановки.*

1.5 Циклические подстановки

> **Циклической (или циклом)** называется подстановка, которая переставляет элементы некоторого подмножества $A \subset M_n$ циклическим образом. При этом мощность множества A называется **длиной цикла**.

Пример 1.8. Рассмотрим цикл:

$$\langle 1,3,2 \rangle = (1 \to 3 \to 2 \to 1),$$

Ему соответствует следующая подстановка:

$$\langle 1,2,3 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nota bene Всякая транспозиция является циклической подстановкой:

$$t_{ij}^{(n)} = \langle i,j \rangle$$

> Два цикла степени n называются **независимыми**, если они не имеют общих переставляемых символов.

Пример 1.9. Пример независимых циклов для подстановки степени 6:

$$\langle 1,5 \rangle, \quad \langle 2,3,4 \rangle.$$

Лемма 1.13. *Всякая подстановка может быть единственным образом разложена в композицию попарно независимых циклов.*

Пример 1.10. Разложение подстановки степени 5 в композицию циклов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \langle 1,3 \rangle \langle 2,5,4 \rangle.$$

Nota bene Наконец, напомним наиболее важные комбинаторные понятия:

- **сочетанием** из n по k называется набор из k элементов, выбранных из n-элементного множества, в котором *не учитывается* порядок элементов. Число сочетаний равно
$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k!)}.$$

- **размещением** из n по k называется набор из k элементов, выбранных из n-элементного множества, в котором *учитывается* порядок элементов. Число размещений равно
$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

β

Лекция 2

Пространство полилинейных форм

Содержание лекции:

В лекции рассматриваются отображения, обладающие свойством полилинейности - линейности по каждому аргументу. Мы покажем, что на множестве таких обьектов может быть введена структура линейного пространства и методы исследования этого пространства являются обобщением изученных нами ранее методов для векторного и сопряженных пространств. Координаты полилинейного отображения формируют один из важнейщих обьектов геометрии - тензор.

Ключевые слова:
Полилинейная форма (ПЛФ), тип ПЛФ, валентность ПЛФ, линейное пространство ПЛФ, тензор ПЛФ, базис пространства ПЛФ, размерность пространства ПЛФ.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

2.1 Полилинейные формы

Nota bene Соглашение о "немом" суммировании:

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j \xi^j \equiv \varphi_j \xi^j.$$

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_p \in X(\Bbbk)$ и $y^1, y^2, \dots, y^q \in X^*(\Bbbk)$.

Полилинейной формой (ПЛФ) U называется отображение от p векторных аргументов $x_1, x_2, \dots, x_p$ и q аргументов-форм $y^1, y^2, \dots, y^q$, принимающее значения из некоторого линейного пространства $W = W(\Bbbk)$:

$$U: \quad X \times X \times \ldots \times X \times X^* \times X^* \times \ldots \times X^* \to W$$

и линейная по каждому аргументу

$$U(x_1, \dots, \alpha x_i' + \beta x_i'', \dots, x_p; y^1, y^2, \dots, y^q) \equiv$$
$$\alpha U(x_1, \dots, x_i', \dots, x_p; y^1, y^2, \dots, y^q) + \beta U(x_1, \dots, x_i'', \dots, x_p; y^1, y^2, \dots, y^q).$$

Nota bene Здесь и далее будет подробно рассмотрен случай так называемой *полилинейной функции*, значения которой лежат в поле $\Bbbk$, то есть впредь мы будем считать, что $W(\Bbbk) = \Bbbk$.

Nota bene Говорят, что ПЛФ, заданная на p векторах пространства X и q векторах пространства X^* имеет *валентность* (p, q).

Пример 2.1.

1. $X^*: \quad (f, x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad (1, 0)$ - линейная форма над X;
2. $X^{**}: \quad (\hat{x}, y) = \hat{x}(y) \quad \Rightarrow \quad (0, 1)$ - линейная форма над X^*;
3. $E_3: \quad U(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \quad \Rightarrow \quad (2, 0)$ - скалярное произведение;
4. $E_3: \quad U(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \quad \Rightarrow \quad (3, 0)$ - смешанное произведение;

Полилинейные формы U и V валентности (p, q) называются **равными**, если

$$U(x_1, x_2, \dots, x_p; y^1, y^2, \dots, y^q) = V(x_1, x_2, \dots, x_p; y^1, y^2, \dots, y^q),$$

для любых наборов аргументов $x_1, x_2, \dots, x_p; \in X$ и $y^1, y^2, \dots, y^q \in X^*$.

Нуль-формой Θ валентности (p, q) называется такая ПЛФ, что

$$\Theta(x_1, x_2, \dots, x_p; y^1, y^2, \dots, y^q) = 0,$$

для любых наборов аргументов $x_1, x_2, \dots, x_p; \in X$ и $y^1, y^2, \dots, y^q \in X^*$.

Пусть далее $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис X, $\{f^j\}_{j=1}^n$ - базис X^*.

Пусть U и V - ПЛФ валентности (p, q). Отображение $W = U + V$ называется **суммой ПЛФ** U и V если

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_p; y^1, y^2, \ldots, y^q) = \\ U(x_1, x_2, \ldots, x_p; y^1, y^2, \ldots, y^q) + V(x_1, x_2, \ldots, x_p; y^1, y^2, \ldots, y^q),$$

для любых наборов аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_p; \in X$ и $y^1, y^2, \ldots, y^q \in X^*$.

Отображение λU называется **произведением ПЛФ** U на элемент $\lambda \in K$, если

$$(\lambda U)(x_1, x_2, \ldots, x_p; y^1, y^2, \ldots, y^q) = \lambda \cdot U(x_1, x_2, \ldots, x_p; y^1, y^2, \ldots, y^q)$$

для любых наборов аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_p; \in X$ и $y^1, y^2, \ldots, y^q \in X^*$.

Теорема 2.1. *Множество всех ПЛФ валентности* (p, q) *образует линейной пространство* Ω^p_q *над полем* K.

►

Проверка аксиом линейного пространства.

◄

2.2 Тензор ПЛФ

Тензором ПЛФ W валентности (p, q) называется набор из n^{p+q} чисел

$$\omega^{j_1, j_2, \ldots, j_q}_{i_1, i_2, \ldots, i_p} = W\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \ldots, f^{j_q}\right), \\ i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, \ldots, n, \quad j_1, j_2, \ldots, j_q = 1, \ldots, n.$$

Nota bene Говорят, что тензор $\omega^{j_1, j_2, \ldots, j_q}_{i_1, i_2, \ldots, i_p}$ имеет ранг (p, q).

Nota bene Для краткости записи часто используют мультииндекс:

$$\omega^{j_1, j_2, \ldots, j_q}_{i_1, i_2, \ldots, i_p} \equiv \omega^{\vec{j}}_{\vec{i}}.$$

Пример 2.2. Пусть $W(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ -скалярное произведение и

$$x_1 = \sum_{i=1}^{3} \xi^i_1 e_i, \quad x_2 = \sum_{j=1}^{3} \xi^j_2 e_j,$$

тогда

$$W(x_1, x_2) = (e_i.e_j)\, \xi^i_1 \xi^j_2 = g_{ij} \xi^i_1 \xi^j_2,$$

где g_{ij} - метрический тензор, которому соответствует матрица (Грама):

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

Лемма 2.1. *Задание ПЛФ эквивалентно заданию ее тензора в паре базисов пространств X и X^*.*

▶

$\Rightarrow$ Очевидно.

$\Leftarrow$ Имеет место:

$$W(x_1, x_2, \dots, x_p; y^1, y^2, \dots, y^q) =$$
$$W\left(\xi_1^{i_1} e_{i_1}, \xi_2^{i_2} e_{i_2}, \dots, \xi_p^{i_p} e_{i_p}; \eta_{j_1}^1 f^{j_1}, \eta_{j_2}^2 f^{j_2}, \dots, \eta_{j_q}^q f^{j_q}, \right) =$$
$$\xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_p^{i_p} \eta_{j_1}^1 \eta_{j_2}^2 \dots \eta_{j_q}^q W\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \dots, f^{j_q}\right) =$$
$$\xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_p^{i_p} \eta_{j_1}^1 \eta_{j_2}^2 \dots \eta_{j_q}^q \omega_{i_1, i_2, \dots, i_p}^{j_1, j_2, \dots, j_q}.$$

◀

Nota bene Рассмотрим в Ω_q^p набор ПЛФ $\left\{ {}^{s_1, s_2, \dots, s_p}_{t_1, t_2, \dots, t_q} W \right\}$, обладающий в паре базисов пространств X и X^* свойством

$${}^{s_1, s_2, \dots, s_p}_{t_1, t_2, \dots, t_q} W(x_1, x_2, \dots, x_p; y^1, y^2, \dots, y^q) = \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} \dots \xi_p^{s_p} \eta_{t_1}^1 \eta_{t_2}^2 \dots \eta_{t_q}^q$$

то есть

$${}^{s_1, s_2, \dots, s_p}_{t_1, t_2, \dots, t_q} w_{i_1, i_2, \dots, i_p}^{j_1, j_2, \dots, j_q} = \delta_{i_1}^{s_1} \delta_{i_2}^{s_2} \dots \delta_{i_p}^{s_p} \delta_{t_1}^{j_1} \delta_{t_2}^{j_2} \dots \delta_{t_q}^{j_q}.$$

2.3 Базис $\Omega_q^p(\mathbb{k})$

Теорема 2.2. *Набор $\left\{ {}^{s_1, s_2, \dots, s_p}_{t_1, t_2, \dots, t_q} W \right\}$ образует базис в пространстве Ω_q^p.*

▶

ПН: для произвольной $U \in \Omega_q^p$ имеем

$$U(x_1, x_2, \dots, x_p; y^1, y^2, \dots, y^q) = \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_p^{i_p} \eta_{j_1}^1 \eta_{j_2}^2 \dots \eta_{j_q}^q u_{i_1, i_2, \dots, i_p}^{j_1, j_2, \dots, j_q} =$$
$${}^{i_1, i_2, \dots, i_p}_{j_1, j_2, \dots, j_q} W\left(x_1, x_2, \dots, x_p; y^1, y^2, \dots, y^q\right) u_{i_1, i_2, \dots, i_p}^{j_1, j_2, \dots, j_q}.$$

ЛНЗ: рассмотрим линейную комбинацию

$${}^{s_1, s_2, \dots, s_p}_{t_1, t_2, \dots, t_q} W \alpha_{s_1, s_2, \dots, s_p}^{t_1, t_2, \dots, t_q} = \Theta,$$

и вычислим ее левую часть на поднаборах сопряженных базисов:

$${}^{s_1, s_2, \dots, s_p}_{t_1, t_2, \dots, t_q} W\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \dots, f^{j_q}\right) \alpha_{s_1, s_2, \dots, s_p}^{t_1, t_2, \dots, t_q} =$$
$$\delta_{i_1}^{s_1} \delta_{i_2}^{s_2} \dots \delta_{i_p}^{s_p} \delta_{t_1}^{j_1} \delta_{t_2}^{j_2} \dots \delta_{t_q}^{j_q} \alpha_{s_1, s_2, \dots, s_p}^{t_1, t_2, \dots, t_q} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\vec{s}}^{\vec{t}} = 0$$

◀

Nota bene Размерность пространства ПЛФ валентности (p, q) равна

$$\dim \Omega_q^p = n^{p+q}, \quad \dim X = \dim X^* = n.$$

Лекция 3

Симметричные и антисимметричные ПЛФ

Содержание лекции:
В приложениях, как правило, важную роль играют полилинейные отображения, которые обладают полной симметричностью или антисимметричностью по всем своим аргументам. Одно из важнейших применений данных объектов - теория дифференциальных форм в геометрии и анализе. В настоящей лекции мы исследуем свойства симметричных и антисимметричных ПЛФ, а также укажем методы их "изготовления" из произвольной формы.

Ключевые слова:
Симметричные и антисимметричные формы. Достаточное условие антисимметричности ПЛФ. Операции симметризации и антисимметризации. Свойства операций Sym и Alt. Базис пространства антисимметричных ПЛФ.

Авторы курса:

Трифанов А. И.   Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

3.1 Симметричные и антисимметричные ПЛФ

В данной лекции мы будем рассматривать подмножества простанства $\Omega_0^p(\mathbb{k})$.

> Полилинейная форма $U \in \Omega_0^p(\mathbb{k})$ называется **симметричной**, если ее значения не зависят от порядка следования аргументов, то есть
>
> $$U(x_1, x_2, \ldots, x_p) = U(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}), \quad \sigma \in S_n.$$

Лемма 3.1. *Множество всех симметричных ПЛФ валентности $(p, 0)$ образует подпространство $\Sigma^p(\mathbb{k})$ пространства $\Omega_0^p(\mathbb{k})$.*

Лемма 3.2. *Тензор симметричной ПЛФ симметричен по своим индексам:*

$$U \in \Sigma^p(\mathbb{k}) \quad \Leftrightarrow \quad U \leftrightarrow u_{\vec{i}_p} = u_{i_1, i_2, \ldots, i_p},$$
$$u_{i_1, i_2, \ldots, i_p} = u_{\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_p)}, \quad \sigma \in S_p.$$

> Полилинейная форма $V \in \Omega_0^p(\mathbb{k})$ называется **антисимметричной**, если она меняет знак при транспозиции любых двух ее аргументов или
>
> $$V(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (-1)^{[\sigma]} V(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}), \quad \sigma \in S_p.$$

Лемма 3.3. *Множество всех антисимметричных ПЛФ валентности $(p, 0)$ образует подпространство $\Lambda^p(\mathbb{k})$ пространства $\Omega_0^p(\mathbb{k})$.*

Лемма 3.4. *Тензор антисимметричной ПЛФ антисимметричен по своим индексам:*

$$V \in \Lambda^p(\mathbb{k}) \quad \Leftrightarrow \quad V \leftrightarrow v_{\vec{i}_p} = u_{i_1, i_2, \ldots, i_p},$$
$$v_{i_1, i_2, \ldots, i_p} = (-1)^{[\sigma]} v_{\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_p)}, \quad \sigma \in S_p.$$

Теорема 3.1. *Для того, чтобы ПЛФ была антисимметричной необходимо и достаточно, чтобы она обращалась в ноль при совпадении любых двух ее аргументов:*

$$V \in \Lambda^p(\mathbb{k}) \quad \Leftrightarrow \quad V(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = 0.$$

►

$\Rightarrow$ Пусть $X \in \Lambda^p(\mathbb{k})$, тогда

$$V(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = -V(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p)$$
$$\Leftrightarrow \quad V(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = 0.$$

$\Rightarrow$ Пусть $V(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = 0$, и $x_i = x_i' + x_i''$ тогда

$$V(x_1, \ldots, x_i' + x_i'', \ldots, x_i' + x_i'', \ldots, x_p) = 0,$$
$$V(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_i', \ldots, x_p) + V(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_i'', \ldots, x_p) +$$
$$V(x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_i', \ldots, x_p) + V(x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_i'', \ldots, x_p) = 0,$$
$$V(x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_i', \ldots, x_p) = -V(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_i'', \ldots, x_p).$$

◄

Nota bene Значение антисимметричной формы на ЛЗ наборе векторов равно нулю.

Nota bene При $p > n = \dim_{\Bbbk} X$ пространство $\Lambda^p(\Bbbk)$ тривиально (содержит только нуль-форму):

$$\Lambda^p(\Bbbk) = \{\Theta\}\,.$$

3.2 Симметризация и антисимметризация

Nota bene Для дальнейшего изложения наложим некоторые ограничения на поле $\Bbbk$. Именно, будем считать, что характеристика поля $\Bbbk$ равна нулю, то есть $\Bbbk$ содержит поле рациональных чисел в качестве подполя.

Теорема 3.2. *Пусть $W \in \Omega^p_0(\Bbbk)$, тогда*

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\sigma \in S_p} W\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right).$$

- симметричная ПЛФ из $\Sigma^p(\Bbbk)$.

►

Пусть $\chi \in S_n$ - произвольная перестановка тогда

$$U(x_{\chi(1)}, x_{\chi(2)}, \ldots, x_{\chi(p)}) = \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\sigma \in S_p} W(x_{\sigma\circ\chi(1)}, x_{\sigma\circ\chi(2)}, \ldots, x_{\sigma\circ\chi(p)}) =$$

$$= \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\varphi\circ\chi^{-1}} W(x_{\varphi(1)}, x_{\varphi(2)}, \ldots, x_{\varphi(p)}) = \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\varphi \in S_p} W(x_{\varphi(1)}, x_{\varphi(2)}, \ldots, x_{\varphi(p)}) = U(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

◄

> Операция изготовления симметричной ПЛФ U из произвольной ПЛФ W называется **операцией симметризации** формы W. Для нее пишут
>
> $$U = \operatorname{Sym} W$$

Nota bene Нормировочный множитель $1/p!$ необходим для того, чтобы

$$\operatorname{Sym} U = U, \quad U \in \Sigma^p.$$

Теорема 3.3. *Пусть $W \in \Omega^p_0$, тогда*

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]}\, W\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right)$$

- антисимметричная ПЛФ из $\Lambda^p(\Bbbk)$.

►

Пусть $\chi \in S_n$ - произвольная перестановка тогда

$$V(x_{\chi(1)}, x_{\chi(2)}, \ldots, x_{\chi(p)}) = \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} \cdot W(x_{\sigma\circ\chi(1)}, x_{\sigma\circ\chi(2)}, \ldots, x_{\sigma\circ\chi(p)}) =$$

$$= \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\varphi\circ\chi^{-1}} (-1)^{[\varphi\circ\chi^{-1}]} \cdot W(x_{\varphi(1)}, x_{\varphi(2)}, \ldots, x_{\varphi(p)}) =$$

$$= (-1)^{[\chi^{-1}]} \cdot \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\varphi \in S_p} (-1)^{[\varphi]} W(x_{\varphi(1)}, x_{\varphi(2)}, \ldots, x_{\varphi(p)}) = (-1)^{[\chi]} \cdot V(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

◄

Операция изготовления антисимметричной ПЛФ V из произвольной ПЛФ W называется **операцией антисимметризации (альтернирования)** формы W. Для нее пишут

$$V = \operatorname{Alt} W$$

3.3 Свойства операций Sym и Alt

1. Линейность:

$$\begin{aligned} \operatorname{Sym}(U+V) &= \operatorname{Sym} U + \operatorname{Sym} V, \quad \operatorname{Sym}(\alpha U) = \alpha \operatorname{Sym}(U), \\ \operatorname{Alt}(U+V) &= \operatorname{Alt} U + \operatorname{Alt} V, \quad \operatorname{Alt}(\alpha U) = \alpha \operatorname{Alt}(U) \end{aligned}$$

2. Композиция:

$$\begin{aligned} \operatorname{Sym} \circ \operatorname{Sym} &= \operatorname{Sym}, \quad \operatorname{Sym} \circ \operatorname{Alt} = 0, \\ \operatorname{Alt} \circ \operatorname{Alt} &= \operatorname{Alt}, \quad \operatorname{Alt} \circ \operatorname{Sym} = 0. \end{aligned}$$

3.4 Базис пространства $\Lambda^p(\Bbbk)$

$$\operatorname{Alt} W(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} W\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right)$$

Nota bene Пространство $\Lambda^p(K)$ является подпространством $\Omega^p_0(\Bbbk)$, базис которого формирует набор ПЛФ $\{{}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}W\}$ такие что

$${}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}W\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) = \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} \ldots \xi_p^{s_p}.$$

Построим систему антисимметричных ПЛФ $\{{}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F\}$, следующим образом:

$${}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F = p! \operatorname{Alt}\left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}W\right).$$

Лемма 3.5. *ПЛФ* ${}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F$ *обладают свойством антисимметричности по индексам* $(s_1, s_2, \ldots, s_p)$*:*

$$ {}^{s_1,\ldots,s_i,\ldots,s_j,\ldots,s_p}F = -{}^{s_1,\ldots,s_j,\ldots,s_i,\ldots,s_p}F. $$

►

Заметим, что

$$ {}^{s_1,\ldots,s_i,\ldots,s_j,\ldots,s_p}W(x_1, \ldots x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) = {}^{s_1,\ldots,s_j,\ldots,s_i,\ldots,s_p}W(x_1, \ldots x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_p), $$

откуда сразу можем получить:

$$ \begin{gathered} {}^{s_1,\ldots,s_i,\ldots,s_j,\ldots,s_p}F\left(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_j, \ldots, x_p\right) = \\ = \operatorname{Alt}\left({}^{s_1,\ldots,s_i,\ldots,s_j,\ldots,s_p}W\right)\left(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_j, \ldots, x_p\right) = \\ = -\operatorname{Alt}\left({}^{s_1,\ldots,s_i,\ldots,s_j,\ldots,s_p}W\right)\left(x_1, \ldots, x_j, \ldots x_i, \ldots, x_p\right) = \\ = -\operatorname{Alt}\left({}^{s_1,\ldots,s_j,\ldots,s_i,\ldots,s_p}W\right)\left(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_j, \ldots, x_p\right). \end{gathered} $$

◄

Nota bene Имеют место следующие свойства:

1. ${}^{s_1,\ldots,s_i,\ldots,s_i,\ldots,s_p}F = \Theta$;
2. ${}^{\sigma(s_1),\sigma(s_2),\ldots,\sigma(s_p)}F = (-1)^{[\sigma]}\left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F\right)$.

Теорема 3.4. *Следующий набор образует базис в пространстве* $\Lambda^p(K)$*:*

$$ \left\{{}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F : \quad 1 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_p \le n\right\} $$

Nota bene Далее для краткости записи введем следующее обозначение:

$$ \vec{s} = \left\{(s_1, s_2, \ldots s_p) : \quad 1 \le s_1 < \ldots < s_p \le n\right\}. $$

►

ПН: рассмотрим произвольную форму $U \in \Lambda^p \subset \Omega^p$:

$$ U = {}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}W \cdot u_{s_1,s_2,\ldots,s_p}, $$

тогда

$$ \begin{gathered} \operatorname{Alt} U = U = u_{s_1,s_2,\ldots,s_p} \operatorname{Alt}\left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}W\right) = \frac{1}{p!} \cdot \left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F\right) u_{s_1,s_2,\ldots,s_p} = \\ \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\vec{s}} \sum_{\sigma \in S_p} \left({}^{\sigma(s_1),\sigma(s_2),\ldots,\sigma(s_p)}F\right) u_{\sigma(s_1),\sigma(s_2),\ldots,\sigma(s_p)} = \\ \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\vec{s}} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} \left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F\right) (-1)^{[\sigma]} u_{s_1,s_2,\ldots,s_p} = \\ \frac{1}{p!} \cdot p! \cdot \sum_{\vec{s}} \left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F\right) u_{s_1,s_2,\ldots,s_p} = \sum_{1 \le s_1 < \ldots < s_p \le n} \left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F\right) u_{s_1,s_2,\ldots,s_p}. \end{gathered} $$

ЛНЗ: рассмотрим линейную комбинацию:

$$\left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F\right)\alpha_{s_1,s_2,\ldots,s_p} = \Theta.$$

и вычислим значение правой части на векторах базиса $\{e_k\}_{k=1}^n$:

$$\begin{gathered}
\left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F\right)\left(e_{i_1},e_{i_2},\ldots,e_{i_p}\right)\alpha_{s_1,s_2,\ldots,s_p} = \\
\alpha_{s_1,s_2,\ldots,s_p}\cdot p!\cdot \mathrm{Alt}\left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}W\right)\left(e_{i_1},e_{i_2},\ldots,e_{i_p}\right) = \\
\alpha_{s_1,s_2,\ldots,s_p}\cdot p!\cdot\frac{1}{p!}\cdot\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^{[\sigma]}\left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}W\right)\left(e_{\sigma(i_1)},e_{\sigma(i_2)},\ldots,e_{\sigma(i_p)}\right) = \\
\alpha_{s_1,s_2,\ldots,s_p}\cdot\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^{[\sigma]}\delta^{s_1}_{\sigma(i_1)}\delta^{s_2}_{\sigma(i_2)}\ldots\delta^{s_p}_{\sigma(i_p)} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad \alpha_{s_1,s_2,\ldots,s_p} = 0 \quad \forall\,(s_1,s_2,\ldots,s_p)\,.
\end{gathered}$$

◄

Nota bene Из теоремы о базисе пространства Λ^p следует, что

$$\dim_{\Bbbk}\Lambda^p = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

3.5 Свойства размерностей $\Lambda^p(\Bbbk)$

1. $p=0: \quad \Lambda^0\equiv\Bbbk, \quad \dim_{\Bbbk}\Lambda^0 = 1$
2. $p=1: \quad \Lambda^1 = X^*, \quad \dim_{\Bbbk}\Lambda^1 = n;$

... $\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots$

3. $p=n: \quad \Lambda^n, \quad \dim_{\Bbbk}\Lambda^n = 1.$

Nota bene Базис пространства Λ^n состоит из одного элемента $\left\{{}^{1,2,\ldots,n}F\right\}$

Лемма 3.6. *Для любого $V\in\Lambda^n$ имеет место:*

$$V = \alpha\left({}^{1,2,\ldots,n}F\right), \quad \alpha\in\Bbbk.$$

►

$$\begin{gathered}
\left({}^{1,2,\ldots,n}F\right)(x_1,x_2,\ldots,x_p) = p!\cdot\mathrm{Alt}\left({}^{1,2,\ldots,n}W\right)(x_1,x_2,\ldots,x_p) = \\
p!\cdot\frac{1}{p!}\cdot\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^{[\sigma]}\left({}^{1,2,\ldots,n}W\right)\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(n)}\right) = \\
\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^{[\sigma]}\xi^1_{\sigma(1)}\xi^2_{\sigma(2)}\ldots\xi^n_{\sigma(n)} \equiv \det\|\xi^i_j\|.
\end{gathered}$$

◄

δ

Лекция 4

Произведения ПЛФ

Содержание лекции:

В лекции рассматривается операция произведения двух ПЛФ и ее алгебраические свойства, вводится определение новой структуры - внешней алгебры ПЛФ. Широкое практическое приложение имеет алгебра антисимметричных форм, однако введенная операция произведения ПЛФ не сохраняет антисимметричность результата. В связи с этим вводится операция внешнего произведения антисимметричных форм, которая индуцирует новую алгебраическую структуру - алгебру Грассмана.

Ключевые слова:
Произведение ПЛФ, свойства произвдения ПЛФ, внешняя алгебра форм, внешнее произведение антисимметричных ПЛФ, свойства внешнего произведения, алгебра антисимметричных форм, алгебра Грассмана.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

4.1 Произведение ПЛФ

Пусть $U \in \Omega_{q_1}^{p_1}(\Bbbk)$ и $V \in \Omega_{q_2}^{p_2}(\Bbbk)$. Отображение $W = U \cdot V$ называется **произведением** ПЛФ U на ПЛФ V, если

$$W\left(x_1, x_2, \ldots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \ldots, x_{p_1+p_2}; y^1, y^2, \ldots, y^{q_1}, y^{q_1+1}, \ldots, y^{q_1+q_2}\right) =$$
$$U\left(x_1, x_2, \ldots, x_{p_1}; y^1, y^2, \ldots, y^{q_1}\right) \cdot V\left(x_1, x_2, \ldots, x_{p_2}; y^1, y^2, \ldots, y^{q_2}\right)$$

Лемма 4.1. *Отображение W - ПЛФ, причем $W \in \Omega_{q_1+q_2}^{p_1+p_2}(\Bbbk)$.*
▶
Очевидно. ◀

Свойства произведения ПЛФ

1. Некоммутативность: $U \cdot V \neq V \cdot U$:

$$W_1(x_1, x_2) = \left(f^1 \cdot f^2\right)(x_1, x_2) = f^1(x_1) f^2(x_2),$$
$$W_2(x_1, x_2) = \left(f^2 \cdot f^1\right)(x_1, x_2) = f^2(x_1) f^1(x_2).$$

2. Ассоциативность: $U \cdot (V \cdot W) = (U \cdot V) \cdot W = U \cdot V \cdot W$;

3. Дистрибутивность по сумме: $U \cdot (V + W) = U \cdot V + U \cdot W$;

4. Нуль-форма: $U \cdot \Theta_{\Omega_{q_2}^{p_2}} = \Theta_{\Omega_{q_1}^{p_1}} \cdot V = \Theta_{\Omega_{q_1+q_2}^{p_1+p_2}}$;

5. Дистрибутивность по произведению: $(\alpha \cdot U) \cdot V = U \cdot (\alpha \cdot V)$;

6. Пусть $U \in \Omega_0^p$, тогда набор

$$^{s_1, s_2, \ldots, s_p}W = f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot \ldots \cdot f^{s_p},$$

образует базис в Ω_0^p, если $\left\{f^k\right\}_{k=1}^n$ образует базис в X^*.
▶
Для произвольного набора векторов $\{x_i\}_{i=1}^p$ имеем:

$$^{s_1, s_2, \ldots, s_p}W(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} \ldots \xi_p^{s_p} =$$
$$f^{s_1}(x_1) \cdot f^{s_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot f^{s_p}(x_p) = \left(f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot \ldots \cdot f^{s_p}\right)(x_1, x_2, \ldots, x_p).$$

◀

Nota bene Пусть $\left\{f^k\right\}_{k=1}^n$ - базис X^* и $\{\hat{x}_j\}_{j=1}^n$ - дуальный базис X^{**}, тогда базис $\Omega_q^p(\Bbbk)$ образуют ПЛФ вида

$$^{s_1, s_2, \ldots, s_p}_{t_1, t_2, \ldots, t_q}W = f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot \ldots \cdot f^{s_p} \cdot \hat{x}_{t_1} \cdot \hat{x}_{t_2} \cdot \ldots \cdot \hat{x}_{t_q}.$$

7. Пусть $U \in \Omega^p$ и $V \in \Omega^q$, тогда

$$\operatorname{Sym}(U \cdot V) = \operatorname{Sym}(\operatorname{Sym} U \cdot V) = \operatorname{Sym}(U \cdot \operatorname{Sym} V),$$
$$\operatorname{Alt}(U \cdot V) = \operatorname{Alt}(\operatorname{Alt} U \cdot V) = \operatorname{Alt}(U \cdot \operatorname{Alt} V).$$

▶
Докажем данное свойство для операции Alt:

$$[\operatorname{Alt}(\operatorname{Alt} U \cdot V)](x_1, \ldots, x_p, x_{p+1} \ldots x_{p+q}) =$$
$$\operatorname{Alt}\left[\frac{1}{p!} \cdot \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} (U \cdot V)\right] \left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}, x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+q}\right) =$$
$$\frac{1}{p!} \cdot \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \operatorname{Alt}(U \cdot V) \left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}, x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+q}\right).$$

В силу антисимметричности формы имеем

$$\operatorname{Alt}(U \cdot V) \left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}, x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+q}\right) =$$
$$= (-1)^{[\sigma]} \operatorname{Alt}(U \cdot V)(x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+q}),$$

и тогда получаем

$$\frac{1}{p!} \cdot \sum_{\sigma} \operatorname{Alt}[U \cdot V](x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+q}) =$$
$$\operatorname{Alt}(U \cdot V)(x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+q}).$$

◀

4.2 Антисимметричное произведение ПЛФ

Антисимметричным произведением ПЛФ $U \in \Lambda^p$ на ПЛФ $V \in \Lambda^r$ называется отображение

$$U \wedge V = \frac{(p+r)!}{p! \cdot r!} \operatorname{Alt}(U \cdot V).$$

Лемма 4.2. *Отображение $U \wedge V$ - антисимметричная ПЛФ, причем*

$$U \wedge V \in \Lambda^{p+r}.$$

▶
Очевидно. ◀

Nota bene Имеет место следующее свойство:

$$p + r > n = \dim X \quad \Rightarrow \quad U \wedge V = \Theta.$$

Свойства антисимметричного произведения

1. Антикоммутативность:
$$U \wedge V = (-1)^{pr} V \wedge U$$

   ►

   Имеет место:
$$\left(U \wedge V\right)\left(x_1, \ldots x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+r}\right) =$$
$$\frac{(p+r)!}{p! \cdot r!} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} U\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right) \cdot V\left(x_{\sigma(p+1)}, \ldots, x_{\sigma(p+r)}\right)$$

   Хотим получить:
$$(\sigma(1), \ldots, \sigma(p), \sigma(p+1), \ldots, \sigma(p+r)) \to (\sigma(p+1), \ldots, \sigma(p+r), \sigma(1), \ldots, \sigma(p))$$

   для этого необходимо
$$p + p + p + \ldots + p = p \cdot r$$

   транспозиций. И значит
$$\left(U \wedge V\right)\left(x_1, \ldots x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+r}\right) = (-1)^{p \cdot r}\left(V \wedge U\right)\left(x_1, \ldots x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+r}\right).$$

   ◄

2. Вынесение скаляра:
$$(\alpha U) \wedge V = U \wedge (\alpha V) = \alpha\left(U \wedge V\right).$$

   ►
   Очевидно. ◄

3. Ассоциативность:
$$U \wedge (V \wedge W) = (U \wedge V) \wedge W = U \wedge V \wedge W = \frac{(p+r+s)!}{p! \cdot r! \cdot s!} \operatorname{Alt}\left(U \cdot V \cdot W\right).$$

   ►

   По определению:
$$\left(U \wedge V\right) \wedge W = \left(\frac{(p+r)!}{p! \cdot r!} \operatorname{Alt}\left(U \cdot V\right)\right) \wedge W =$$
$$\frac{((p+r)+s)!}{(p+r)! \cdot s!} \operatorname{Alt}\left(\frac{(p+r)!}{p! \cdot r!} \operatorname{Alt}\left(\left(U \cdot V\right) \cdot W\right)\right) =$$
$$\frac{(p+r+s)!}{p! \cdot r! \cdot s!} \operatorname{Alt}\left(\operatorname{Alt}\left(U \cdot V\right) \cdot W\right) = \frac{(p+r+s)!}{p! \cdot r! \cdot s!} \operatorname{Alt}\left(U \cdot V \cdot W\right).$$

   ◄

4. Дистрибутивность:
$$U \wedge (V + W) = U \wedge V + U \wedge W.$$

►

Следует из дистрибутивности умножения и линейности Alt. ◄

5. Нуль-форма:
$$U \wedge \Theta = \Theta \wedge V = \Theta.$$

6. Пусть $\{f^i\}_{i=1}^n$ базис X^*, тогда
$$^{i_1,i_2,\ldots,i_p}F = f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \ldots \wedge f^{i_p}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n$$

►

Из определения следует:
$$^{i_1,i_2,\ldots,i_p}F = p!\,\mathrm{Alt}\left(^{i_1,i_2,\ldots,i_p}W\right) = p!\,\mathrm{Alt}\left(f^{i_1} \cdot f^{i_2} \cdot \ldots \cdot f^{i_p}\right) =$$
$$p!\,\mathrm{Alt}\left(\mathrm{Alt}\left(f^{i_1} \cdot f^{i_2}\right) \cdot \ldots \cdot f^{i_p}\right) = \frac{p!}{2!}\,\mathrm{Alt}\left(f^{i_1} \wedge f^{i_2} \cdot \ldots \cdot f^{i_p}\right) =$$
$$\frac{p!}{2!}\,\mathrm{Alt}\left(\mathrm{Alt}\left(f^{i_1} \wedge f^{i_2} \cdot f^{i_3}\right) \cdot \ldots \cdot f^{i_p}\right) =$$
$$\frac{p!}{3!}\,\mathrm{Alt}\left(f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge f^{i_3} \cdot \ldots \cdot f^{i_p}\right) = \ldots =$$
$$\mathrm{Alt}\left(f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \ldots \wedge f^{i_p}\right) = f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \ldots \wedge f^{i_p}.$$

◄

$\mathcal{E}$

Лекция 5

Основы теории определителей

Содержание лекции:
В лекции кратко рассматривается общая теория определителя как полилинейной формы, а также как формы обьема в линейном (аффином) пространстве. Доказывается ряд свойств определителя набора вектров, которые используются при вычислении определителей. Вводятся основные понятия, необходимые в теории рангов.

Ключевые слова:
Определитель как антисимметричная ПЛФ, определитель набора векторов, свойства определителей, дополнительный минор элемента, алгебраическое дополнение, минор матрицы, теорема Лапласа.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

5.1 Определитель как ПЛФ

Детерминантом набора векторов $\{x_k\}_{k=1}^n$, называется число:

$$\det\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = {}^{1,2,\ldots,n} F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = f^1 \wedge f^2 \wedge \ldots \wedge f^n \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right),$$

где ${}^{1,2,\ldots,n}F \in \Lambda^p$ - базисная форма Λ^p.

Лемма 5.1. *Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ - базис X, тогда если $x_k = \sum_{j=1}^n \xi_k^j e_j$, то*

$$\det\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \sum_\sigma (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma(1)} \xi_2^{\sigma(2)} \ldots \xi_n^{\sigma(n)}.$$

►

Прямой проверкой убеждаемся, что

$$\det\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = {}^{1,2,\ldots,n} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$n! \operatorname{Alt}({}^{1,2,\ldots,n}W)(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$n! \frac{1}{n!} \sum_\sigma (-1)^{[\sigma]} ({}^{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)}W)(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$\sum_\sigma (-1)^{[\sigma]} ({}^{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)}W(x_1, x_2, \ldots, x_n)) =$$
$$\sum_\sigma (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma(1)} \xi_2^{\sigma(2)} \ldots \xi_n^{\sigma(n)}$$

◄

5.2 Определитель как форма обьема

Параллелепипедом (k-мерным) T, построенным на векторах набора $\{x_j\}_{j=1}^k$ называется множество всех их линейных комбинаций с коэффициентами $\alpha_j \in [0, 1]$:

$$T = \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha^j x_j, \quad x_j \in X, \quad \alpha^j \in [0, 1] \right\}$$

Формой обьема в n-мерном пространстве X называется отображение $w^{(n)}$

$$w^{(n)}(T) = w^{(n)}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right),$$

обладающее следующими свойствами:

1. $w^{(n)}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \in \mathbb{R}$
2. $w^{(n)}$ - линейна по каждому своему аргументу;
3. $w^{(n)}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{x_j\}_{j=1}^n$ - ЛЗ.

Лемма 5.2. *Форма обьема* $w^{(n)}$ *- антисимметричная ПЛФ из* Λ^n.

▶

Из свойств (1) и (2) следует полилинейность, а из свойства (3) - антисимметричность.

◀

5.3 Свойства определителя

1. Линейность определителя (определитель - ПЛФ):

$$\det\{x_1, \ldots, \alpha x_k' + \beta x_k'', \ldots, x_n\} = \\ \alpha \det\{x_1, \ldots, x_k', \ldots, x_n\} + \beta \det\{x_1, \ldots, x_k'', \ldots, x_n\}.$$

2. Антисимметричность (определитель - антисиметричная ПЛФ):

$$\det\{x_1, \ldots, x_s, \ldots, x_t, \ldots, x_n\} = -\det\{x_1, \ldots, x_t, \ldots, x_s, \ldots, x_n\}$$

   Определитель матрицы C меняет знак при транспозиции любых двух ее столбцов или строк.

3. Критерий линейной зависимости:

$$\{x_k\}_{k=1}^n - \text{ЛЗ} \quad \Leftrightarrow \quad \det\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = 0.$$

4. Определитель набора не изменится, если к любому вектору набора добавить линейную комбинацию других векторов набора:

$$\det\left\{x_1, \ldots, x_k + \sum_{i \neq k}^{n} \alpha^i x_i, \ldots, x_n\right\} = \\ \det\{x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n\} + \det\left\{x_1, \ldots, \sum_{i = \neq k}^{n} \alpha^i x_i, \ldots, x_n\right\} = \\ \det\{x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n\}.$$

5. Пусть

$$C = \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \ldots & \xi_n^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \ldots & \xi_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_1^n & \xi_2^n & \ldots & \xi_n^n \end{pmatrix}.$$

   Введем определение:

$$\det C = \det\{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

   тогда имеет место:

$$\det C^T = \det C, \quad C^T = \|\xi_k^i\|^T = \|\xi_i^k\|.$$

►

По определению имеем:

$$\det C^T = \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma(1)} \xi_2^{\sigma(2)} \dots \xi_n^{\sigma(n)} = \sum_{\sigma'} (-1)^{[\sigma']} \xi^1_{\sigma'(1)} \xi^2_{\sigma'(2)} \dots \xi^n_{\sigma'(n)} = \det C.$$

Всякое свойство определителя, доказанное для столбцов, справедливо и для строк и наоборот.

◄

6. Разложение определителя по элементам строки (или столбца матрицы):

$$\det\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n\,(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$
$$f^1 \wedge \dots \wedge f^j \wedge \dots \wedge f^n\,(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) =$$
$$f^1 \wedge \dots \wedge f^j \wedge \dots \wedge f^n \left(x_1, \dots, \sum_{m=1}^{n} \xi_j^m e_m, \dots, x_n\right) =$$
$$\sum_{m=1}^{n} \xi_j^m f^1 \wedge \dots \wedge f^j \wedge \dots \wedge f^n\,(x_1, \dots, e_m, \dots, x_n) =$$
$$\sum_{m=1}^{n} \xi_j^m (-1)^{|m-j|} f^1 \wedge \dots \wedge f^m(e_m) \wedge \dots \wedge f^n\,(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) =$$
$$\sum_{m=1}^{n} \xi_j^m (-1)^{|m-j|} \det\{x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n\}.$$

5.4 Минор и алгебраическое дополнение

Минором M_j^k, дополнительным к элементу ξ_j^k называется определитель матрицы C', полученной из исходной матрицы $C = \|\xi_j^k\|$ вычеркиванием k-ой строки и j-го столбца:

$$M_j^k = \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \dots & \xi_k^1 & \dots & \xi_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_1^j & \vdots & \xi_k^j & \vdots & \xi_n^j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_1^n & \dots & \xi_k^n & \dots & \xi_n^n \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением A_j^k элемента ξ_j^k называется число

$$A_j^k = (-1)^{k+j} M_j^k.$$

Теорема 5.1. *Имеет место следующая рекуррентная формула:*

$$\det C = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^k A_j^k = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \xi_j^k M_j^k,$$
$$\det C = \sum_{k=1}^{n} \xi_j^k A_j^k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} \xi_j^k M_j^k.$$

Пример 5.1. Важные частные случаи:

1. определитель диагональной матрицы:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n.$$

2. определитель треугольной матрицы:

$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{vmatrix} = t_{11} t_{22} \dots t_{nn}.$$

> **Минором** порядка r **матрицы** C называется определитель $L_{j_1,j_2,\dots,j_r}^{i_1,i_2,\dots,i_r}$ матрицы, полученной из исходной **взятием** элементов, стоящих на пересечении строк с номерами $i_1, i_2, \dots, i_r$ и столбцов с номерами $j_1, j_2, \dots, j_r$, причем $1 \le i_1 \le i_2 \le \dots \le i_r$ и $1 \le j_1 \le j_2 \le \dots \le j_r$

> **Минором** $M_{j_1,j_2,\dots,j_r}^{i_1,i_2,\dots,i_r}$, **дополнительным к минору** $L_{j_1,j_2,\dots,j_r}^{i_1,i_2,\dots,i_r}$ называется определитель матрицы, полученной из исходной **вычеркиванием** строк с номерами $i_1, i_2, \dots, i_r$ и столбцов с номерами $j_1, j_2, \dots, j_r$.

Теорема 5.2. *(Теорема Лапласа) Определитель матрицы C может быть вычислен следующим образом:*

$$\det C = \sum_{1 \le j_1 \le j_2 \le \dots \le j_r} (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_r+j_1+j_2+\dots+j_r} L_{j_1,j_2,\dots,j_r}^{i_1,i_2,\dots,i_r} M_{j_1,j_2,\dots,j_r}^{i_1,i_2,\dots,i_r},$$
$$\det C = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \dots \le i_r} (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_r+j_1+j_2+\dots+j_r} L_{j_1,j_2,\dots,j_r}^{i_1,i_2,\dots,i_r} M_{j_1,j_2,\dots,j_r}^{i_1,i_2,\dots,i_r},$$

Пример 5.2. Определитель блочной матрицы:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} = A_{11} A_{22} \dots A_{nn}.$$

Лекция 6

Ранг матрицы

Содержание лекции:
Лекция посвящена вопросам линейной зависимости и линейной независимости стобцов и строк матриц. Удобным здесь служит понятие ранга матрицы. Мы увидим для каких матричных преобразований ранг является инвариантом, а также дадим альтернативные формулировки основных теорем о системах линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова:
Признак линейной зависимости, ранг матрицы, базисный минор матрицы, базисные строки, базисные стобцы, элементарные преобразования, теорема Крамера, расширенная матрица СЛАУ, альтернативная формулировка теоремы Кронеккера-Капелли.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

6.1 Критерий линейной зависимости

Теорема 6.1. *(Признак линейной зависимости набора векторов) Чтобы набор векторов $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ был линейно-зависимым необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall v \in \Lambda^p \quad v(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0, \quad p \leq \dim_{\Bbbk} X = n.$$

►
⇒ Очевидно по свойству антисимметричных ПЛФ.
⇐ Докажем от противного: пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ - линейно-независимый набор, такой что

$$\forall\, v \in \Lambda^p \quad v(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0.$$

Дополним набор $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ до базиса $\{x_i\}_{i=1}^n$ линейного пространства X и построим сопряженный ему базис $\{y^j\}_{j=1}^n$ линейного пространства X^*:

$$\left(y^j, x_i\right) = \delta_i^j.$$

Далее, рассмотрим внешнее произведение линейных форм $y^1 \wedge y^2 \wedge \ldots \wedge y^p$, именно:

$$y^1 \wedge y^2 \wedge \ldots \wedge y^p \left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) = C \cdot \left[\operatorname{Alt}\left(y^1 \cdot y^2 \cdot \ldots \cdot y^p\right)\right] \left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) =$$
$$\tilde{C} \sum_\sigma (-1)^{[\sigma]} y^1 \cdot y^2 \cdot \ldots \cdot y^p \left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right) = \tilde{C} \sum_\sigma (-1)^{[\sigma]} \delta^1_{\sigma(1)} \delta^2_{\sigma(2)} \ldots \delta^p_{\sigma(p)} =$$
$$= \tilde{C} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \neq 0.$$

Противоречие! Значит $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ - линейно-зависимый набор. ◄

Nota bene Чтобы набор векторов $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ был линейно-зависимым необходимо и достаточно, чтобы он аннулировал все базисные ПЛФ пространства Λ^p:

$$\{x_i\}_{i=1}^p - \text{ЛЗ} \quad \Leftrightarrow \quad {}^{i_1 i_2 \ldots i_p}F(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0, \quad \forall\, 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n.$$

Nota bene Так как известно, что

$$\det \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} =^{1,2,\ldots,n} F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

то для поднаборов $\{x_i\}_{i=1}^p$ будем иметь

$${}^{i_1, i_2, \ldots, i_k}F(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum_\sigma (-1)^{[\sigma]} \xi^{i_1}_{\sigma(1)} \xi^{i_2}_{\sigma(2)} \ldots \xi^{i_p}_{\sigma(p)} = L^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{1,2,\ldots,p}.$$

Таким образом, чтобы набор $\{x_i\}_{i=1}^p$ был линейно зависимым необходимо и достаточно, чтобы значение всех миноров порядка p на нем равнялось нулю:

$$L^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{1,2,\ldots,p} = 0.$$

Пусть $A = \|\alpha^i_k\|$ - $m \times n$ - матрица и $L^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_r}$ - ее наибольшего порядка минор, отличный от нуля. Тогда говорят, что матрица A имеет **ранг** r.

Nota bene Обозначения:

$$rg(A), \quad rk(A), \quad \operatorname{rank}(A).$$

Nota bene Пусть

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & b_2 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & b_3 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_r \end{pmatrix}$$

и $b_i \neq 0$, тогда

1. $L_1^1 = b_1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rank}(A) \geq 1$;
2. $L_{1,2}^{1,2} = b_1 b_2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rank}(A) \geq 2$;

   $\dots \quad \dots \quad \dots;$

r. $L_{1,2,\dots,r}^{1,2,\dots,r} = \Pi_{i=1}^r b_i \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rank}(A) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rank}(A) \geq r$;

r+1. Все миноры порядка $(r+1)$ и выше равны нулю. Значит $\operatorname{rank}(A) = r$.

> Пусть ранг матрицы равен r, тогда любой ненулевой его минор порядка r называется **базисным минором**, а соответствующие ему строки и столбцы называются **базисными строками** и **базисными столбцами**.

Теорема 6.2. *(О базисном миноре)*

1. *Число линейно-независимых строк (столбцов) матрицы A равно* $\operatorname{rank}(A)$.
2. *Любая строка (столбец) матрицы A может быть представлена в виде линейной комбинации базисных строк (столбцов).*

►

1. Пусть $\operatorname{rank} A = r$, тогда существует базисный минор

   $$L_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r} \neq 0,$$

   и значит найдется линейно-независимый набор $\{a_k\}_{k=1}^r$ из r векторов, образующий базис пространства столбцов матрицы A, так как любой набор из $r+1$ вектора будет линейно-зависимым. Аналогично доказывается утверждение для строк, так как $\det A^T = \det A$.

2. Доказательство следует прямо из того, что

   $$\operatorname{rank}(A) = \dim \mathcal{L}\left\{a_1 a_2, \dots, a_n\right\}.$$

◄

Элементарными (гауссовыми) преобразованиями матрицы называются следующие операции:

1. транспозиция строк (столбцов);
2. почленное сложение/вычитание строк (столбцов);
3. умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля.

Теорема 6.3. *Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.*
▶
Следует из свойств определителей. ◀

6.1.1 Альтернативные формулировки теорем Крамера и Кронекера-Капелли

Теорема 6.4. *(Теорема Крамера) Рассмотрим систему уравнений:*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^i \xi^k = \beta^i, \quad i = 1 \dots n, \quad A = A_{n\times n}, \quad \det A \neq 0.$$

Тогда

1. *система совместна и определена;*
2. *решение системы задается выражениями:*

$$\xi^k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \quad \Delta = \det A, \quad \Delta_k = \det\left\{a_1, a_2, \dots, b, \dots, a_n\right\}, \quad a_k \to b.$$

▶

1. Из условия имеем:

$$\det A \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \det\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \text{ - ЛНЗ},$$

и значит $\{a_j\}_{j=1}^n$ образует базис всего пространства $\Bbbk^n$.

2. Найдем вид решения системы:

$$\Delta_k = \det\{a_1, a_2, \dots, b, \dots, a_n\} = \det\left\{a_1, a_2, \dots, \sum_{k=1}^{n} \xi^k a_k, \dots, a_n\right\} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \xi^k \det\{a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n\} = \xi^k \cdot \det\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \xi^k \cdot \Delta.$$

◀

Расширенной матрицей системы $\sum_{k=1}^{n} a_k \xi^k = b$ называется матрица вида

$$\tilde{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n \mid b) .$$

Теорема 6.5. *(Кронекера-Капелли) Чтобы система была совместна необходимо и достаточно, чтобы ранги матриц A и $\tilde{A}$ совпадали.*

►

$\Rightarrow$ Пусть система $\sum_{k=1}^{n} a_k \xi^k = b$ - совместна, тогда

$$b \in \mathcal{L}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A}.$$

$\Leftarrow$ Имеем:

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A} \quad \Rightarrow \quad b \in \mathcal{L}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} .$$

◄

θ

Лекция 7

Тензорное произведение пространств

Содержание лекции:

В данной лекции обсуждаются билинейные отображения и структуры, которые ими индуцируются. Здесь мы подробно рассмотрим тензорное произведение двух пространств и обсудим как связанные с ним определения связаны с тем, что обсуждалось ранее. Также мы изучим свойства операции тензорного произведения и обсудим наиболее важные следствия этих свойств.

Ключевые слова:

Билинейное отображение, тензорное произведение двух пространств, базис тензорного произведения, координаты тензора, разложимые элементы, основной принцип тензорной алгебры.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

mathdep.ifmo.ru/geolin

7.1 Определение тензорного произведения

Nota bene Пусть X, Y, Z - линейные пространства над полем $\Bbbk$, причем

$$\dim_{\Bbbk} X = n, \quad \dim_{\Bbbk} Y = m,$$

и пусть дано билинейное отображение $b : X \times Y \to Z$:

$$\begin{gathered} b(x_1 + x_2, y) = b(x_1, y) + b(x_2, y), \\ b(x, y_1 + y_2) = b(x, y_1) + b(x, y_2), \\ b(\alpha x, y) = \alpha b(x, y) = b(x, \alpha y), \end{gathered}$$

для любых $x, x_1, x_2 \in X$, $y, y_1, y_2 \in Y$, $\alpha \in \Bbbk$.

Nota bene Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис X, $\{f_j\}_{j=1}^m$ - базис Y, $x \in X$ и $y \in Y$, тогда

$$x = \sum_{i=1}^n e_i \xi^i, \quad y = \sum_{j=1}^m f_j \eta^j,$$

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b(e_i, f_j) \xi^i \eta^j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h_{ij} \xi^i \eta^j \in Z.$$

Лемма 7.1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *набор $\{b(e_i, f_j)\}$ является базисом в Z;*

2. *для любого $z \in Z$ единственно разложение*

$$z = \sum_{i=1}^n b(e_i, y_i), \quad y_i \in Y.$$

3. *для любого $z \in Z$ единственно разложение*

$$z = \sum_{j=1}^m b(x_j, f_j), \quad x_j \in X.$$

►
Доказательство (1) ⇔ (2)

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \zeta^{ij} b(e_i, f_j) = \sum_{i=1}^n b\left(e_i, \sum_{j=1}^m \zeta^{ij} f_j\right) = \sum_{i=1}^n b\left(e_i, y_i\right).$$

Доказательство (1) ⇔ (3) проводится аналогично. ◄

> **Тензорным произведением** линейных пространств X и Y называется линейное пространство $T = X \otimes Y$ вместе с билинейным отображением
>
> $$\otimes : \quad X \times Y \to T,$$
>
> так что если $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис X и $\{f_j\}_{j=1}^m$ - базис Y, то $\{e_i \otimes f_j\}$ - базис T.

Nota bene Имеет место равенство:

$$\dim_{\Bbbk} T = \dim_{\Bbbk} X \cdot \dim_{\Bbbk} Y.$$

Nota bene Пусть $z \in T$, тогда единственно разложение

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (e_i \otimes f_j) \zeta^{ij},$$

и набор ζ^{ij} называется *координатами* элемента z в базисе $\{e_i \otimes f_j\}$.

> Элемент $z \in T$ называется **разложимым**, если
>
> $$\exists\, x \in X, y \in Y : \quad z = x \otimes y.$$

Nota bene Не все элементы T являются разложимыми:

$$z = e_1 \otimes f_2 + e_2 \otimes f_1.$$

7.2 Основная теорема тензорной алгебры

Лемма 7.2. *Для произвольного билинейного отображения $b : X \times Y \to Z$ существует единственное линейное отображение $\tilde{b} : X \otimes Y \to Z$, такое что:*

$$\forall x, \in X, \quad y \in Y \quad b(x, y) = \tilde{b}(x \otimes y).$$

▶
Искомое отображение $\tilde{b}$ задается на базисных векторах пространства $X \otimes Y$ при помощи формулы:

$$\tilde{b}(e_i \otimes f_j) = b(e_i, f_j),$$

и по линейности может быть доопределено на всех элементах $X \otimes Y$.
◀

Nota bene Утверждение леммы эквивалентно коммутативности диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[rr] \arrow[dr, "b"'] & & X \otimes Y \arrow[dl, "\tilde{b}"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

Лемма 7.3. *С точностью до изоморфизма тензорное произведение единственно:*

$$T_1 = X \otimes_1 Y, \quad T_2 = X \otimes_2 Y \quad \Rightarrow \quad T_1 \simeq T_2.$$

▶
Искомый изоморфизм $\psi : T_1 \to T_2$ определяется следующим образом:

$$\psi(e_i \otimes_1 f_j) = e_i \otimes_2 f_j,$$

и по линейности доопределяется на всех элементах T_1.
◀

Лемма 7.4. *Операция $\otimes$ имеет следующие свойства:*

$$X \otimes Y \simeq Y \otimes X,$$
$$X \otimes (Y \otimes Z) \simeq (X \otimes Y) \otimes Z.$$

Nota bene Тензорное произведение произвольного числа линейных пространств $X_1, X_2, \ldots, X_p$ можно определить индукцией по p, полагая, что отображение

$$b: \quad X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_p \to Z,$$

является p-линейным.

Теорема 7.1. *(Основной принцип тензорной алгебры) Для любого p-линейного отображения $b : X_1 \times \ldots \times X_p \to Z$ существует единственное линейное отображение $\tilde{b} : X_1 \otimes \ldots \otimes X_p \to Z$, такое что следующая диаграмма является коммутативной:*

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times \ldots \times X_p \arrow[rr] \arrow[dr, "b"'] & & X_1 \otimes \ldots \otimes X_p \arrow[dl, "\tilde{b}"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

7.3 Изоморфизмы тензорных произведений

Пример 7.1. Для любых $\alpha \in X^*$ и $y \in Y$, определим билинейное отображение:

$$\alpha \otimes y : \quad X \to Y, \quad (\alpha \otimes y)(x) = \alpha(x)y, \quad \forall x \in X.$$

Тем самым мы получим билинейное отображение

$$\otimes : \quad X^* \times Y \to \mathrm{Hom}(X; Y),$$

где $\mathrm{Hom}(X; Y)$ - множество линейных отображений из пространства X в пространство Y. Имеет место изоморфизм:

$$\mathrm{Hom}(X; Y) \simeq X^* \otimes Y.$$

Пример 7.2. Для любых $\alpha \in X^*$ и $\beta \in Y^*$ определим билинейное отображение

$$\alpha \otimes \beta : \quad X \times Y \to \Bbbk, \quad (\alpha \otimes \beta)(x, y) = \alpha(x)\beta(y).$$

Получим билинейное отображение

$$\otimes : \quad X^* \times Y^* \to \mathrm{Hom}(X, Y; \Bbbk).$$

Кроме того, имеет место изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(X, Y; \Bbbk) \simeq X^* \otimes Y^*.$$

Nota bene В силу основного принципа имеет место следующий изоморфизм:

$$\mathrm{Hom}(X \otimes Y; Z) \simeq \mathrm{Hom}(X, Y; Z),$$

переводящий линейное отображение $\tilde{b} : X \otimes Y \to Z$ в билинейное отображение $b : X \times Y \to Z$. В частности, при $Z = \Bbbk$ можно получить

$$(X \otimes Y)^* \simeq \mathrm{Hom}(X, Y; \Bbbk).$$

Пример 7.3. Последнее замечание может быть обобщено на случай произвольного числа пространств, что дает

$$\mathrm{Hom}(X_1 \otimes \ldots \otimes X_p; Z) \simeq \mathrm{Hom}(X_1, \ldots, X_p; Z),$$

и при $Z = \Bbbk$ можно получить

$$(X_1 \otimes \ldots \otimes X_p)^* \simeq \mathrm{Hom}(X_1, \ldots, X_p; \Bbbk).$$

Лекция 8

Тензорная алгебра

Содержание лекции:
Данная лекция завершает знакомство с основынми операциями полилинейной алгебры и посвящена построению алгебраических структур, которые индуцируются рассматриваемыми операциями. Здесь мы обсудим пространство тензоров над выбранным линейным пространством и обобщим наши представления о полилинейных отображениях и их свойствах.

Ключевые слова:
Тензор, пространство тензоров, координаты тензора, тензорное произведение, транспонирование тензора, свертка тензора, симметризация и антисимметризация тензора, внешняя прямая сумма, алгебра, градуировка алгебры.

Авторы курса:

Трифанов А. И.   Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

8.1 Операции с тензорами

> **Пространством тензоров** типа (p, q) над $X(\Bbbk)$ называется пространство
>
> $$T^p_q(\Bbbk) = X^* \otimes X^* \ldots \otimes X^* \otimes X \otimes X \otimes \ldots \otimes X.$$

Пример 8.1.

1. $T^0_0(\Bbbk) \simeq \Bbbk, \quad T^1_0 \simeq X^*, \quad T^0_1 \simeq X;$
2. $T^p_0(\Bbbk) \simeq \mathrm{Hom}(X, \ldots, X; \Bbbk) \simeq \Omega^p_0;$
3. $T^p_1(\Bbbk) \simeq \mathrm{Hom}(X, \ldots, X; X) \simeq \mathrm{Hom}(X, \ldots, X, X^*; \Bbbk) \simeq \Omega^p_1;$

Nota bene Элементами пространства T^p_q яляются тензоры:

$$\alpha^1 \otimes \ldots \otimes \alpha^p \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x_q,$$

где $\alpha^1, \ldots, \alpha^p \in X^*$ и $x_1, \ldots, x_q \in X$.

Nota bene С тензорами определены следующие операции:

1. Произведение тензоров:

$$\begin{aligned}&(\alpha^1 \otimes \ldots \otimes \alpha^{p_1} \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x_{q_1}) \otimes (\beta^1 \otimes \ldots \otimes \beta^{p_2} \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_{q_2})\\ &= \alpha^1 \otimes \ldots \otimes \alpha^{p_1} \otimes \beta^1 \otimes \ldots \otimes \beta^{p_2} \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x_{q_1} \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_{q_2}.\end{aligned}$$

   Таким образом

$$v \in T^{p_1}_{q_1}(\Bbbk), \quad w \in T^{p_2}_{q_2}(\Bbbk) \quad \Rightarrow \quad v \otimes w \in T^{p_1+p_2}_{q_1+q_2}(\Bbbk).$$

2. Транспонирование t_{ij} по паре нижних индексов (i, j):

$$t_{ij}: \quad \ldots \otimes x_i \otimes \ldots \otimes x_j \otimes \ldots \mapsto \ldots \otimes x_j \otimes \ldots \otimes x_i \otimes \ldots.$$

   Аналогично для пары верхних индексов t^{ij}:

$$t^{ij}: \quad \ldots \otimes \alpha^i \otimes \ldots \otimes \alpha^j \otimes \ldots \mapsto \ldots \otimes \alpha^j \otimes \ldots \otimes \alpha^i \otimes \ldots.$$

   Таким образом:

$$t^{ij}, t_{ij}: \quad T^p_q(\Bbbk) \to T^p_q(\Bbbk).$$

3. Свертка тензора c^i_j по индексам i и j:

$$c^i_j: \quad \ldots \otimes \alpha^i \otimes \ldots \otimes x_j \otimes \ldots \mapsto \alpha^i(x_j) \cdot \ldots \otimes \ldots \otimes \ldots.$$

   Таким образом

$$c^i_j: \quad T^p_q(\Bbbk) \to T^{p-1}_{q-1}(\Bbbk).$$

4. Симметризация и антисимметризация тензора:

$$\mathrm{Sym}: \quad x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_p \mapsto \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(p)},$$

$$\mathrm{Alt}: \quad x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_p \mapsto \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(p)},$$

Таким образом:

$$\mathrm{Sym}: \quad T_0^p(\Bbbk) \to \Sigma^p(\Bbbk), \quad \mathrm{Alt}: \quad T_0^p(\Bbbk) \to \Lambda^p(\Bbbk).$$

Nota bene Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис $X(\Bbbk)$ и $\{f^j\}_{j=1}^n$ - дуальный базис $X^*(\Bbbk)$, тогда базисом пространства $T_q^p(\Bbbk)$ будет набор

$$f^{s_1} \otimes f^{s_2} \otimes \ldots \otimes f^{s_p} \otimes e_{t_1} \otimes e_{t_2} \otimes \ldots \otimes e_{t_q},$$

и каждый элемент $w \in T_q^p(\Bbbk)$ единственным образом может быть представлен в виде:

$$w = w_{s_1,s_2,\ldots,s_p}^{t_1,t_2,\ldots,t_q} \cdot f^{s_1} \otimes f^{s_2} \otimes \ldots \otimes f^{s_p} \otimes e_{t_1} \otimes e_{t_2} \otimes \ldots \otimes e_{t_q}.$$

Набор скаляров $w_{s_1,s_2,\ldots,s_p}^{t_1,t_2,\ldots,t_q}$ называется **координанатами тензора** w в паре дуальных базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\{f^j\}_{j=1}^n$ пространств $X(\Bbbk)$ и $X^*(\Bbbk)$ соответственно.

Лемма 8.1. *При переходе от базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ к новому базису $\{\tilde{e}_m\}_{m=1}^n$, координаты тензора преобразуются в соответствии со следующим правилом:*

$$\tilde{w}_{s_1,s_2,\ldots,s_p}^{t_1,t_2,\ldots,t_q} = \tau_{s_1}^{i_1} \ldots \tau_{s_p}^{i_p} \sigma_{j_1}^{t_1} \ldots \sigma_{j_q}^{t_q} w_{i_1,i_2,\ldots,i_p}^{j_1,j_2,\ldots,j_q}.$$

Здесь $T = \|\tau_s^i\|$ и $S = \|\sigma_j^t\|$ - матрицы прямого и обратного перехода соответственно.

▶

Справедливость утверждения следует из билинейности тензорного произведения.

◀

8.2 Определение тензорной алгебры

Внешней прямой суммой пространств $X_1, X_2, \ldots, X_p$ называется линейное пространство $X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_p$, составленное из всех последовательностей вида

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p), \quad x_i \in X_i,$$

с покомпонентным сложением и умножением на скаляры из $\Bbbk$:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p) + (y_1, y_2, \ldots, y_p) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_p + y_p),$$
$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_p)$$

Пример 8.2. Следующие пространства образуются как внешние прямые суммы:

- Пространство многочленов $\mathcal{P}^n[x]$ степени не выше n:

$$\mathcal{P}^n[x] = \mathcal{P}_0[x] \oplus \mathcal{P}_1[x] \oplus \ldots \oplus \mathcal{P}_n[x],$$

  где $\mathcal{P}_k[x]$ - пространство многочленов степени k.

- Пространство тензоров T конечного типа:

$$T = T^0_0 \oplus T^1_0 \oplus T^1_1 \oplus \ldots \oplus T^p_q.$$

Nota bene Прямая сумма может быть распространена на бесконечное число слагаемых, но могут рассматриваются при этом только *финитные последовательности.*

Пример 8.3. Примеры пространств - бесконечных прямых сумм:

- Пространство всех многочленов $\mathcal{P}[x]$:

$$\mathcal{P}[x] = \mathcal{P}_0[x] \oplus \mathcal{P}_1[x] \oplus \ldots$$

- Пространство тензоров всех типов $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T}(\Bbbk) = T^0_0(\Bbbk) \oplus T^1_0(\Bbbk) \oplus T^1_1(\Bbbk) \oplus \ldots$$

Линейное пространство $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\Bbbk)$ называется **алгеброй** над полем $\Bbbk$, если на $\mathbb{A}$ определена операция, индуцирующая на нем структуру кольца с согласованным умножением на элементы поля $\Bbbk$.

Пример 8.4.

- Множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел образует алгебру над $\mathbb{R}$;
- Множество $\Bbbk^4$ кватернионов образует алгебру как над $\mathbb{R}$, так и над $\mathbb{C}$;
- Пространство $P[x]$ вместе со стандартной операцией умножения многочленов является алгеброй, называемой *алгеброй многочленов*;
- Пространство $\mathcal{T}(\Bbbk)$ вместе с операцией тензорного умножения образует алгебру, называемую *тензорной алгеброй.*

Говорят, что в алгебре $\mathbb{A}$ задана **градуировка**, если при

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_0 \oplus \mathbb{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{A}_i \oplus \ldots .$$

имеет место следующее свойство относительно умножения в алгебре:

$$\mathbb{A}_i \cdot \mathbb{A}_j \subseteq \mathbb{A}_{i+j}.$$

Алгебры, обладающие данным свойством называются **градуированными**.

Пример 8.5. Примеры градуированных алгебр:

- $(\mathcal{P}[x], +, \cdot)$ - алгебра многочленов;
- $(\mathcal{T}(\Bbbk), \oplus, \otimes)$ - алгебра тензоров;
- $(\Sigma, \oplus, \vee)$ - алгебра симметричных тензоров;
- $(\Lambda, \oplus, \wedge)$ - алгебра антисимметричных тензоров (алгебра Грассмана);
