

534  
к-431

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

**Н. А. Кириченко**

**ЭЛЕКТРИЧЕСТВО  
И  
МАГНЕТИЗМ**

ГОУ ВПО

"Московский  
физико-технический институт  
(государственный университет)"

**БИБЛИОТЕКА**



*Допущено*

*Учебно-методическим объединением  
высших учебных заведений Российской Федерации  
по образованию в области прикладных математики и физики  
в качестве учебного пособия для студентов вузов  
по направлению «Прикладные математика и физика»*

**МОСКВА  
МФТИ  
2011**

УДК 537(075)

ББК 22.23я73

К43

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор С. М. Козел

Доктор физико-математических наук, профессор Г. Р. Локшин

Кириченко, Н. А.

К43 Электричество и магнетизм: учеб. пособие / Н. А. Кириченко.

М.: МФТИ, 2011. – 420 с.

ISBN 978-5-7417-0356-4

Изложены основные вопросы физики электрических и магнитных явлений, изучаемые в курсе общей физики. Пособие подготовлено на основе лекций, читавшихся автором в Московском физико-техническом институте.

Предназначено студентам второго курса, изучающим данный предмет, а также студентам старших курсов и преподавателям в качестве справочного материала.

УДК 537(075)

ББК 22.23я73

Учебное издание

Кириченко Николай Александрович

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Редакторы О.П. Котова, Л.В. Себова. Корректор И.А. Волкова

Подписано в печать 18.07.2011. Формат 60 × 84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Усл. печ. л. 26,25.  
Уч.-изд. л. 26,0. Тираж 700 экз. Заказ №2011361

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»  
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

Отпечатано ООО «Рождествоно Паблиши» г. Тверь, ул. 2-я Лазо, д.30  
При участии ООО «Издательство ИНИКО» г. Тверь, пр-т Ленина, д.5

ISBN 978-5-7417-0356-4

© Кириченко Н. А., 2011

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
«Московский физико-технический институт  
(государственный университет)», 2011

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b>	11
<b>Глава 1. ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ</b>	12
1.1. Основные понятия .....	12
1.1.1. Определения (12). 1.1.2. Закон Кулона (13). 1.1.3. Напряжённость электрического поля (13). 1.1.4. Силовая линия (14). 1.1.5. Принцип суперпозиции (14). 1.1.6. Дипольный момент системы зарядов (14). 1.1.7. Поле точечного диполя (15). 1.1.8. Момент сил, действующий на диполь в однородном электрическом поле (16). 1.1.9. Плотность заряда (17). 1.1.10. Поле на оси равномерно заряженного диска (17).	
1.2. Теорема Гаусса для электрического поля в вакууме .....	19
1.2.1. Формулировка теоремы Гаусса (19). 1.2.2. Доказательство теоремы Гаусса (20). 1.2.3. Примеры применения теоремы Гаусса (23).	
1.3. Потенциал .....	27
1.3.1. Потенциальный характер электростатического поля (27). 1.3.2. Разность потенциалов и потенциал (28). 1.3.3. Связь потенциала с напряжённостью поля (29). 1.3.4. Уравнения Пуассона и Лапласа (29). 1.3.5. Теорема единственности для уравнений Лапласа и Пуассона (30). 1.3.6. Теорема о циркуляции для электростатического поля (31). 1.3.7. Теорема о циркуляции в дифференциальной форме (31). 1.3.8. Границные условия (32). 1.3.9. Потенциал поля точечного диполя (33). 1.3.10. Поле системы зарядов на большом расстоянии (33). 1.3.11. Энергия жёсткого диполя в электрическом поле (34). 1.3.12. Диполь в неоднородном электрическом поле (34). 1.3.13. Энергия другого диполя в электрическом поле (36).	
1.4. Проводники в электрическом поле .....	37
1.4.1. Электростатическое поле в проводниках (37). 1.4.2. Границные условия на поверхности проводника (37). 1.4.3. Метод зеркальных изображений (38). 1.4.4. Примеры (39). 1.4.5. Электростатическая защита (40). 1.4.6. Проводящий шар в электрическом поле (41).	
1.5. Диэлектрики в электрическом поле .....	42
1.5.1. Определения (42). 1.5.2. Вектор поляризации (43). 1.5.3. Теорема Гаусса для электрического поля в диэлектриках (46). 1.5.4. Поляризуемость и диэлектрическая проницаемость среды (46). 1.5.5. Границные условия (47). 1.5.6. Электреты (48). 1.5.7. Электрическое поле однородно поляризованного шара (51). 1.5.8. Диэлектрический шар в однородном внешнем электрическом поле (51). 1.5.9. Диэлектрическая проницаемость газа из металлических шариков (53).	
1.6. О механизмах поляризации диэлектриков .....	54
1.7. Электрическая ёмкость .....	55
1.7.1. Электрическая ёмкость уединённых проводников (55). 1.7.2. Ёмкость конденсатора (55). 1.7.3. Ёмкость плоского конденсатора (56). 1.7.4. Ёмкость сферического конденсатора (56). 1.7.5. Ёмкость цилиндрического конденсатора (57). 1.7.6. Ёмкость системы двух проводников (58).	

<b>1.8. Энергия электрического поля</b>	59
1.8.1. Взаимная энергия зарядов (59). 1.8.2. Примеры (60). 1.8.3. Энергия электрического поля в конденсаторе (61). 1.8.4. Энергия электрического поля (общий вывод) (63). 1.8.5. Энергия поля в вакууме и в среде (64). 1.8.6. Собственная и взаимная энергия зарядов (64). 1.8.7. Энергетический метод вычисления сил в электрическом поле (66).	
<b>Глава 2. ПОСТОЯННЫЙ ТОК</b>	70
<b>2.1. Основные определения</b>	70
2.1.1. Сила и плотность тока (70). 2.1.2. Закон сохранения заряда и уравнение непрерывности (72).	
<b>2.2. Закон Ома и его следствия</b>	73
2.2.1. Закон Ома (73). 2.2.2. Теория проводимости (теория Друде) (74). 2.2.3. Правила Кирхгофа (75). 2.2.4. Закон Джоуля — Ленца (76).	
<b>2.3. Токи в неограниченных средах</b>	77
<b>2.4. Закон «трёх вторых» Ленгмиюра</b>	79
<b>Глава 3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ</b>	83
<b>3.1. Сила Лоренца и сила Ампера</b>	83
3.1.1. Магнитное поле (83). 3.1.2. Сила Лоренца (83). 3.1.3. Сила Ампера (37). 3.1.4. Связь силы Лоренца и силы Ампера (84).	
<b>3.2. Закон Био—Савара и его следствия</b>	84
3.2.1. Закон Био—Савара (84). 3.2.2. Поле прямого бесконечно длинного тонкого провода с током (85). 3.2.3. Сила взаимодействия двух параллельных проводов с током (86). 3.2.4. Магнитное поле витка с током на его оси (87). 3.2.5. Поле идеального соленоида на его оси (88). 3.2.6. Магнитное поле равномерно движущегося заряда (90).	
<b>3.3. Теорема Гаусса и теорема о циркуляции для магнитного поля в вакууме</b>	90
3.3.1. Векторный потенциал (90). 3.3.2. Теорема Гаусса для магнитного поля (92). 3.3.3. Теорема о циркуляции магнитного поля в вакууме (92). 3.3.4. Магнитное поле прямого провода (93). 3.3.5. Магнитное поле внутри идеального соленоида (94).	
<b>3.4. Магнитный момент</b>	96
3.4.1. Магнитный момент (96). 3.4.2. Момент сил, действующих на виток с током в магнитном поле (96). 3.4.3. Потенциальная энергия витка с током в магнитном поле (98). 3.4.4. Сила, действующая на магнитный момент в неоднородном магнитном поле (98). 3.4.5. Магнитный момент системы движущихся зарядов и токов (99). 3.4.6. Гиromагнитное отношение (100). 3.4.7. Магнитный момент вращающегося равномерно заряженного шара (101). 3.4.8. Магнитное поле системы токов на большом расстоянии (101).	
<b>ГЛАВА 4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ</b>	104
<b>4.1. Магнитное поле в веществе</b>	104
4.1.1. Микрополе и среднее поле (104). 4.1.2. Токи проводимости и молекулярные токи (104). 4.1.3. Вектор намагниченности (105). 4.1.4. Связь вектора намагниченности с молекулярными токами (105). 4.1.5. Теорема о циркуляции	

магнитного поля. Вектор $\mathbf{H}$ (117). 4.1.6. Границные условия для векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ (118).	
<b>4.2. Магнитные среды</b> .....	109
4.2.1. Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость (109). 4.2.2. Парамагнетики, диамагнетики, ферромагнетики (110). 4.2.3. Преломление силовых линий (111). 4.2.4. Намагничивание стержня во внешнем однородном поле (112). 4.2.5. Магнитное поле однородно намагниченного шара (113). 4.2.6. Намагничивание шара во внешнем однородном поле (114). 4.2.7. Постоянный магнит (115).	
<b>4.3. Магнитные цепи</b> .....	117
4.3.1. Захват магнитного потока сердечником (117). 4.3.2. Простейшая магнитная цепь. Закон Ома для магнитной цепи (118). 4.3.3. Правила Кирхгофа для магнитных цепей (120).	
<b>Глава 5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ</b> .....	122
5.1. Работа сил Ампера при перемещении витка с током в магнитном поле .....	122
5.2. Электромагнитная индукция в движущихся и неподвижных проводниках.	124
5.2.1. ЭДС индукции (124). 5.2.2. Правило Ленца (125). 5.2.3. Возникновение индукционных токов (125). 5.2.4. Закон сохранения магнитного потока (126). 5.2.5. Фарадеевская и максвелловская трактовка электромагнитной индукции (127). 5.2.6. Вихревое электрическое поле (127). 5.2.6. Выражение электрического поля через потенциалы (127).	
<b>Глава 6. ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ</b> .....	129
6.1. Нерелятивистские законы преобразования полей .....	129
6.1.1. Преобразование электрического поля (129). 6.1.2. Преобразование магнитного поля (129).	
6.2. Релятивистские законы преобразования полей .....	130
6.2.1. Инвариантность заряда (130). 6.2.2. Преобразования полей (131). 6.2.3. Преобразование потенциалов (132).	
6.3. Магнитный момент в электрическом поле .....	134
<b>Глава 7. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ</b> .....	136
7.1. Движение частиц в однородных полях .....	136
7.1.1. Движение в однородном электрическом поле (136). 7.1.2. Движение в однородном магнитном поле (136). 7.1.3. Движение в однородных параллельных электрическом и магнитном полях $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$ (137). 7.1.4. Движение в скрещенных полях $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ (138). 7.1.5. Общий случай скрещенных полей (141).	
7.2. Методы измерения удельного заряда электрона .....	141
7.2.1. Измерение $q/m$ по отклонению траектории в электрическом поле (142). 7.2.2. Измерение $q/m$ по отклонению траектории в магнитном поле (143).	

7.2.3. Метод Томсона (144).	
<b>7.3. Опыты Милликена .....</b>	<b>145</b>
<b>Глава 8. ИНДУКТИВНОСТЬ. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ.....</b> 147	
<b>8.1. Индуктивность .....</b>	<b>147</b>
8.1.1. Коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции (147). 8.1.2. Индуктивность идеального соленоида (148). 8.1.3. Индуктивность торOIDальной катушки (148). 8.1.4. Взаимная индукция двух индуктивно связанных катушек (149). 8.1.5. Установление тока в $LR$ -контуре, содержащем источник ЭДС (151). 8.1.6. Экстраток и экстрапонряжение размыкания (152).	
<b>8.2. Магнитная энергия тока .....</b>	<b>153</b>
8.2.1. Магнитная энергия (153). 8.2.2. Энергия магнитного поля в соленоиде (154). 8.2.3. Энергия магнитного поля (общий случай) (155). 8.2.4. Теорема взаимности (157). 8.2.5. Энергия системы токов (158). 8.2.6. Пример применения теоремы взаимности (159).	
<b>8.3. Энергетический метод вычисления сил в магнитном поле .....</b>	<b>160</b>
8.3.1. Два подхода к вычислению сил (160). 8.3.2. Втягивание стержня из магнетика в соленоид (162). 8.3.3. Подъемная сила электромагнита (163).	
<b>Глава 9. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА .....</b> 165	
<b>9.1. Парамагнетизм .....</b>	<b>165</b>
9.1.1. Теория Ланжевена (165). 9.1.2. Теория Бриллюэна (167).	
<b>9.2. Диамагнетизм .....</b>	<b>169</b>
9.2.1. Ларморова прецессия (169). 9.2.2. Диамагнитная восприимчивость (170). 9.2.3. Диамагнетизм и электромагнитная индукция (172).	
<b>9.3. Ферромагнетизм .....</b>	<b>173</b>
9.3.1. Гистерезисные явления (173). 9.3.2. Закон Кюри-Вейсса (175). 9.3.3. О природе ферромагнетизма (176). 9.3.4. Доменная структура ферромагнетиков (176).	
<b>9.4. Сверхпроводники в магнитном поле .....</b>	<b>178</b>
9.4.1. Сверхпроводимость (178). 9.4.2. Разрушение сверхпроводимости магнитным полем (179). 9.4.3. Диамагнетизм сверхпроводников (180). 9.4.4. Эффект Мейсснера (181). 9.4.5. Границные условия на поверхности сверхпроводника (181). 9.4.6. Сверхпроводящий шар в магнитном поле (182).	
<b>Глава 10. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА .....</b> 184	
<b>10.1. Ток смещения .....</b>	<b>184</b>
10.1.1. Ток смещения и закон сохранения заряда (184). 10.1.2. Стекание заряда с шара во внешнюю среду (185). 10.1.3. Ток смещения в конденсаторе (186).	
<b>10.2. Система уравнений Максвелла .....</b>	<b>188</b>
10.2.1. Уравнения Максвелла в интегральной форме (188). 10.2.2. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме (188). 10.2.3. Материальные уравнения (189). 10.2.4. Границные условия (189).	
<b>10.3. Закон сохранения энергии для электромагнитного поля.....</b>	<b>191</b>
10.3.1. Теорема Пойнтинга (191). 10.3.2. Примеры (194).	

<b>Глава 11. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ .....</b>	<b>198</b>
<b>11.1. Волновое уравнение .....</b>	<b>198</b>
11.1.1. Бегущие и стоячие волны (198). 11.1.2. Волновое уравнение (201).	
11.1.3. Уравнение Гельмгольца (202). 11.1.4. Волновое уравнение для электромагнитного поля (частный случай) (203). 11.1.5. Волновое уравнение для поля в линейной среде (205).	
<b>11.2. Плоские электромагнитные волны .....</b>	<b>206</b>
11.2.1. Соотношение между амплитудами полей в бегущей электромагнитной волне (206). 11.2.2. Поперечность электромагнитных волн (207). 11.2.3. Вектор Пойнтинга для плоской электромагнитной волны (208). 11.2.4. Интенсивность излучения (209).	
<b>11.3. Импульс электромагнитного поля .....</b>	<b>216</b>
11.3.1. Импульс электромагнитного поля (209). 11.3.2. Другой вывод формулы для импульса поля (210). 11.3.3. Давление света (211).	
<b>11.4. Момент импульса поля .....</b>	<b>212</b>
<b>ГЛАВА 12. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН .....</b>	<b>215</b>
<b>12.1. Излучение .....</b>	<b>215</b>
<b>12.2. Излучение точечного диполя .....</b>	<b>216</b>
12.2.1. Сферические волны (216). 12.2.2. Излучение колеблющегося диполя (174).	
<b>12.3. Дипольное излучение (теория) .....</b>	<b>220</b>
12.3.1. Волновые уравнения для потенциалов (220). 12.3.2. О калибровке потенциалов (222). 12.3.3. Запаздывающие потенциалы (223). 12.3.4. Потенциалы колеблющегося точечного диполя (224). 12.3.5. Излучение точечного диполя (225).	
<b>ГЛАВА 13. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН.....</b>	<b>227</b>
<b>13.1. Электромагнитные волны в двухпроводной линии .....</b>	<b>227</b>
13.1.1. Двухпроводная линия (227). 13.1.2. Телеграфные уравнения. Волновое уравнение (228). 13.1.3. Стоящие и бегущие волны в линии передач (231).	
13.1.4. Скорость распространения волн в коаксиальной двухпроводной линии (232). 13.1.5. Скорость распространения волн в открытой двухпроводной линии (233). 13.1.6. Волновое сопротивление (234). 13.1.7. Коэффициент стоячей волны (235). 13.1.8. Коэффициент отражения (236).	
<b>13.2. Электромагнитные волны в волноводах .....</b>	<b>237</b>
13.2.1. Волноводы (237). 13.2.2. Уравнение Гельмгольца (238).	
13.2.3. $TE_{m0}$ -волна (239). 13.2.4. Критическая частота (240). 13.2.5. Общий случай $TE$ -волны ( $H$ -волны) (241). 13.2.6. Магнитное поле $TE$ -волны (242).	
13.2.7. Длина волн и фазовая скорость волн в волноводе (431).	
<b>13.3. Собственные колебания поля в объёмных резонаторах .....</b>	<b>247</b>
<b>13.4. Отражение волн от металлов .....</b>	<b>249</b>
<b>13.5. Отражение и преломление электромагнитных волн на границе раздела диэлектриков .....</b>	<b>252</b>

13.5.1. Отражение и преломление волн (252). 13.5.2. Эффект полного внутреннего отражения (254). 13.5.3. Формулы Френеля (255). 13.5.4. Случай нормального падения волны на границу раздела сред (259). 13.5.5. Коэффициенты отражения и прохождения по энергии (259). 13.5.6. Угол Бристера (262). 13.5.7. Коэффициенты отражения и прохождения при углах, равных углу полного внутреннего отражения (262). 13.5.8. Однородные и неоднородные волны (263).	
<b>13.6. Поверхностные волны</b>	265
13.6.1. Поверхностные электромагнитные волны (265). 13.6.2. Распространение ПЭВ (267). 13.6.3. Электрическое поле ПЭВ (270). 13.6.4. Возбуждение поверхностных волн (272).	
<b>Глава 14. ДИСПЕРСИЯ ВОЛН</b>	274
<b>14.1. Фазовая и групповая скорость</b>	274
14.1.1. Дисперсия (274). 14.1.2. Групповая скорость (274). 14.1.3. Распыливание волнового пакета (277). 14.1.4. Формула Рэлея (279).	
<b>14.2. Классическая теория дисперсии</b>	280
14.2.1. Зависимость диэлектрической проницаемости среды от частоты излучения (280). 14.2.2. Нормальная и аномальная дисперсии (281).	
<b>14.3. О коэффициентах отражения и прохождения при наличии дисперсии</b>	284
<b>Глава 15. СКИН-ЭФФЕКТ</b>	287
<b>15.1. Основное уравнение</b>	287
<b>15.2. Вытеснение переменного тока из объема проводника</b>	288
<b>15.3. Скин-эффект и явление электромагнитной индукции</b>	290
<b>Глава 16. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ</b>	292
<b>16.1. Плазма. Основные понятия</b>	292
16.1.1. Плазма (292). 16.1.2. Квазинейтральность плазмы (292). 16.1.3. Дебаевский радиус (293). 16.1.4. Дебаевское экранирование (294). 16.1.5. Разреженная и плотная плазма (295). 16.1.6. Плазменные колебания и плазменная частота (297).	
<b>16.2. Диэлектрическая проницаемость плазмы</b>	297
16.2.1. Диэлектрическая проницаемость плазмы (297). 16.2.2. Отражение электромагнитных волн от плазмы (299).	
<b>16.3. Магнитное удержание плазмы</b>	302
16.3.1. Диамagnetизм плазмы (302). 16.3.2. Основное уравнение магнитной гидродинамики плазмы (303). 16.3.3. Пинч-эффект (305). 16.3.4. Равновесие z-пинча (305). 16.3.5. Неустойчивость z-пинча (307).	
<b>Глава 17. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ</b>	309
<b>17.1. Свободные колебания в колебательном контуре</b>	309
17.1.1. Квазистационарные процессы (309). 17.1.2. Уравнение колебательного контура (309). 17.1.3. Уравнение свободных колебаний (311). 17.1.4. Гармони-	

ческие колебания (311). 17.1.5. Затухающие колебания (312). 17.1.6. Закон сохранения энергии (315). 17.1.7 Превращения энергии в контуре без потерь (316).	
17.1.8. Логарифмический декремент (316). 17.1.9. Добротность колебательной системы (318). 17.1.10. Энергетический смысл добротности (319).	
<b>17.2. Вынужденные колебания под действием гармонической ЭДС</b>	319
17.2.1. Резонанс (319). 17.2.1. Процесс установления вынужденных колебаний (323).	
<b>17.3. Метод комплексных амплитуд, Импеданс</b>	325
17.3.1. Комплексная амплитуда (325). 17.3.2. Закон Ома в комплексной форме. Импеданс (326). 17.3.3. Векторные диаграммы (328). 17.3.4. Резонанс напряжений и токов (330). 17.3.5. Правила Кирхгофа для переменных токов (332). 17.3.6. Сложение импедансов (333). 17.3.7. Мощность переменного тока (335).	
<b>17.4. Ряд и интеграл Фурье</b>	336
17.4.1. Теорема Фурье. Ряд Фурье (336). 17.4.2. Векторная интерпретация теоремы Фурье (337). 17.4.3. Примеры разложения в ряд Фурье (338). 17.4.4. Действительная форма ряда Фурье (340). 17.4.5. Интеграл Фурье (341). 17.4.6. Пример спектрального разложения (342). 17.4.7. $\delta$ -функция (343). 17.4.8. Состоинение неопределённостей (345).	
<b>17.5. Вынужденные колебания под действием негармонической внешней силы (спектральный подход)</b>	346
17.5.1. Представление отклика на сложный сигнал в виде суммы откликов на простые сигналы (346). 17.5.2. Функция отклика (347).	
<b>17.6. Модулированные колебания</b>	349
17.6.1. Амплитудная модуляция (350). 17.6.2. Частотная и фазовая модуляция (351). 17.6.3. Векторные диаграммы модулированных сигналов (353).	
<b>17.7. Детектирование сигнала</b>	355
17.7.1. Фильтрация сигнала (355). 17.7.2. Выпрямляющие преобразователи (356). 17.7.3. Квадратичное детектирование (357). 17.7.4. Квадратичное детектирование амплитудно-модулированного сигнала (358). 17.7.5. Квадратичное детектирование фазово-модулированного сигнала (359). 17.7.6. Приём без несущей (360). 17.7.7. Приём с изменением фазы несущей (360).	
<b>17.8. Параметрические колебания</b>	362
<b>17.9. Автоколебания</b>	368
17.9.1. Обратная связь (368). 17.9.2. Генератор Ван-дер-Поля (369). 17.9.3. Условие самовозбуждения (371). 17.9.4. Энергетический смысл условия неустойчивости (373). 17.9.5. Амплитуда автоколебаний вблизи порога неустойчивости (373).	
<b>Глава 18. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФЛУКТУАЦИИ</b>	376
<b>18.1. Дробовой шум</b>	376
18.1.1. Дробовой шум (376). 18.1.2. Дисперсия тока (377). 18.1.3. Спектральный состав дробового шума (379).	
<b>18.2. Тепловые шумы в электрических цепях</b>	382
18.2.1. Тепловой шум (382). 18.2.2. Оценка теплового шума (383). 18.2.3. Спектр теплового шума (385).	

<b>18.3. Статистическая теория теплового шума .....</b>	<b>387</b>
18.3.1. Корреляционная функция (387). 18.3.2. Формулы Найквиста (392).	
18.3.3. Энергия и мощность (394).	
<b>Приложение 1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ.....</b>	<b>397</b>
П.1.1. Двойное лучепреломление (397). П.1.2. Диэлектрическая проницаемость (400). П.1.3. Уравнение Френеля для одноосных кристаллов (401). П.1.4. Элементарная теория анизотропных диэлектриков (405).	
<b>Приложение 2. ОСНОВНЫЕ ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ. О СИСТЕМЕ СИ .....</b>	<b>407</b>
<b>Приложение 3. НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА .....</b>	<b>414</b>
П.3.1. Дифференциальные операции первого порядка (414). П.3.2. Дифференциальные операции второго порядка (416). П.3.3. Некоторые тождества (417).	
<b>Приложение 4. ФИЗИЧЕСКИЕ КОНСТАНТЫ.....</b>	<b>419</b>
<b>Литература.....</b>	<b>420</b>

## Предисловие

Предлагаемое пособие основано на лекциях, читавшихся автором студентам МФТИ в курсе общей физики. Изложены основные вопросы, включённые в настоящее время в программу.

Общая физика — это динамичный, развивающийся предмет, куда включаются, наряду с устоявшимися фундаментальными разделами, и актуальные вопросы, затрагивающие основные направления современной физики. Поэтому в традиционных учебниках не всегда можно найти нужную информацию. Данное пособие имеет целью частично заполнить этот пробел.

К сожалению, из-за ограниченного объёма книги большое число интересных и важных вопросов не получило отражения. В частности, почти не затрагивались вопросы эксперимента. В то же время изложение построено так, чтобы логика физики, её методы были понятны, а все основные утверждения получили обоснование.

Поскольку в электродинамике широко используется векторный анализ, в приложении приведены важнейшие определения и формулы из этого раздела математики. Используемая при изучении колебаний и волн теория рядов и интегралов Фурье излагается непосредственно в тексте книги.

В данной книге используется преимущественно гауссова система единиц. Вместе с тем в приложении даётся вид важнейших соотношений в системе СИ. Там же приводятся основные единицы измерения. При изложении теории колебаний в электрических цепях используется система СИ.

Для более полного изучения предмета можно рекомендовать книги [1–9], список которых приведён в конце пособия.

# Глава 1. ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

## 1.1. Основные понятия

### 1.1.1. Определения

Электромагнитное взаимодействие является одним из фундаментальных типов взаимодействий, наряду с гравитационным, слабым и сильным взаимодействиями. Оно осуществляется на расстоянии, без прямого контакта взаимодействующих тел, и передается с помощью особого носителя — электромагнитного поля.

Электромагнитным полем называется область пространства, где действуют электрические и магнитные силы.

Поле создаётся электрическими зарядами и действует на заряды.

Заряд — это мера взаимодействия заряженного тела с полем. Фактически, заряд определяет интенсивность взаимодействия заряженных тел.

Опытным путём было установлено, что в природе существуют заряды двух типов, которые условно делят на *положительные* и *отрицательные*. Положительный заряд несёт, например, протоны, а отрицательный — электроны.

В природе заряд меняется (переносится) дискретно, причём любой ненулевой заряд кратен некоторому элементарному заряду, численно равному заряду электрона:

$$e = 4,803 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГСЭ} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл},$$

будучи либо положительным, либо отрицательным<sup>1</sup>.

Заряд — это сохраняющаяся величина. Положительные и отрицательные заряды могут рождаться в равных количествах или взаимно уничтожать друг друга. При этом суммарный электрический заряд вещества не меняется.

<sup>1</sup> Строго говоря, минимальная порция заряда — в три раза меньше. Зарядами  $\pm e/3, \pm e/3$  обладают кварки.

Для исследования поля, создаваемого какими-либо зарядами (заряженными телами), можно использовать *пробные заряды*.

*Пробным* называется такой небольшой по величине точечный заряд, который не производит заметного перераспределения зарядов, создающих исследуемое поле.

Покоящиеся заряды создают неизменное во времени поле, которое называется *электростатическим*.

### 1.1.2. Закон Кулона

Экспериментально установлено, что заряды одного знака (одноимённые заряды) отталкиваются, а заряды разного знака (разноимённые заряды) — притягиваются.

*Точечным* называется такой заряд, размерами и формой которого в рассматриваемых условиях можно пренебречь.

Закон, установленный Ш. Кулоном в 1785 г., утверждает, что сила, действующая на точечный заряд  $q$  со стороны точечного заряда  $Q$ , равна по величине

$$F = \frac{Qq}{r^2}$$

и направлена по прямой, соединяющей заряды. В векторной форме закон Кулона записывается в виде

$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{r^3} \mathbf{r}.$$

Радиус-вектор  $\mathbf{r}$  направлен от центра (заряда  $Q$ ) к заряду  $q$  (рис. 1.1.1). На рисунке направление силы отвечает случаю зарядов  $Q$  и  $q$  одинакового знака.

Рис. 1.1.1. Сила  $\mathbf{F}$ , действующая на заряд  $q$  со стороны заряда  $Q$



### 1.1.3. Напряжённость электрического поля

Опытным путём установлено, что если поместить в электрическое поле точечный заряд  $q$ , то отношение силы  $\mathbf{F}$ , действующей на этот заряд, к величине заряда не зависит от величины заряда. Следовательно, отношение  $F/q$  характеризует поле, но не заряд.

*Напряжённостью* электрического поля в некоторой точке называется сила, действующая на единичный точечный заряд:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}, \quad \mathbf{F} = q\mathbf{E}.$$

В соответствии с законом Кулона напряжённость поля точечного заряда  $Q$  равна

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{r^3} \mathbf{r}.$$

#### 1.1.4. Силовая линия

*Силовой линией* называется такая линия, в каждой точке которой направление касательной к ней совпадает с направлением напряжённости поля в той же точке (рис. 1.1.2).

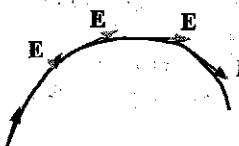


Рис. 1.1.2. Силовая линия. Стрелки указывают направление электрического поля в различных точках этой линии

#### 1.1.5. Принцип суперпозиции

Сила, действующая на заряд  $q$  со стороны системы других зарядов, равна векторной сумме сил, независимо действующих на рассматриваемый заряд со стороны каждого из зарядов системы:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i.$$

Поскольку  $\mathbf{F}_i = q\mathbf{E}_i$ , то напряжённость поля в данной точке также равна векторной сумме напряжённостей полей, независимо создаваемых в данной точке каждым из зарядов системы:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i.$$

#### 1.1.6. Дипольный момент системы зарядов

Для произвольной системы зарядов дипольный момент определяется формулой

$$\mathbf{P} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i,$$

где  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор  $i$ -го заряда.

В общем случае эта величина зависит от выбора начала отсчёта. Однако если система в целом электронейтральна:  $\sum_i q_i = 0$ , то дипольный момент  $\mathbf{p}$  определён однозначно.

Действительно, сменим в определении вектора  $\mathbf{p}$  начало отсчёта, так что новое начало отсчёта имеет радиус-вектор  $\mathbf{r}_0$  относительно прежнего. Тогда, обозначая новые радиус-векторы зарядов как  $\mathbf{r}'_i$ , имеем  $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0$ , откуда следует

$$\mathbf{p}' = \sum_i q_i \mathbf{r}'_i = \sum_i q_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) = \mathbf{p} - \left( \sum_i q_i \right) \mathbf{r}_0 = \mathbf{p}.$$

**Элементарный (примитивный) диполь** — это система, состоящая из двух точечных зарядов, одинаковых по величине и противоположных по знаку (рис. 1.1.3).

Рис. 1.1.3. Диполь с плечом  $l$  и дипольным моментом  $\mathbf{p} = ql$



**Плечо диполя** — это вектор, идущий от отрицательного заряда к положительному, длина которого равна расстоянию между зарядами.

**Дипольным моментом диполя** называется вектор  $\mathbf{p} = ql$ .

Диполь называется *точечным*, если расстояние между его зарядами (плечо диполя)  $l$  мало по сравнению с расстоянием  $r$  от диполя до точки наблюдения:  $l \ll r$ .

В случае элементарного диполя общее определение дипольного момента совпадает с определением, данным для частного случая:

$$\mathbf{p} = (+q)\mathbf{r}_+ + (-q)\mathbf{r}_- = q(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = ql,$$

где  $\mathbf{l} = \mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-$ ,

Диполь называется *жёстким*, если расстояние между образующими его зарядами неизменно. Если же расстояние между зарядами может меняться под действием внешних сил, то такой диполь называется *упругим* (или *квазиупругим*).

### 1.1.7. Поле точечного диполя

Поле точечного диполя можно найти (рис. 1.1.4) с помощью принципа суперпозиции и с учётом неравенства  $l \ll r$ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_- + \mathbf{E}_+ = \frac{(-q)\mathbf{r}_-}{r_-^3} + \frac{(+q)\mathbf{r}_+}{r_+^3}, \quad \mathbf{r}_- = \mathbf{l} + \mathbf{r}_+.$$

Обозначим  $\mathbf{E}_0 = q\mathbf{r}/r^3$ ,  $\mathbf{r}_+ = \mathbf{r}$ . Считая  $l \ll r_+, r_-$  и разлагая функцию  $\mathbf{E}$  по степеням малого смещения  $\mathbf{l} = (l_x, l_y, l_z)$ , получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\mathbf{E}_0(\mathbf{r} + \mathbf{l}) + \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = -\left[l_x \frac{\partial \mathbf{E}_0(\mathbf{r})}{\partial x} + l_y \frac{\partial \mathbf{E}_0(\mathbf{r})}{\partial y} + l_z \frac{\partial \mathbf{E}_0(\mathbf{r})}{\partial z}\right] = \\ &= -(l\nabla)\mathbf{E}_0 = \frac{3(p\mathbf{r})\mathbf{r} - p\mathbf{r}^2}{r^5}.\end{aligned}$$

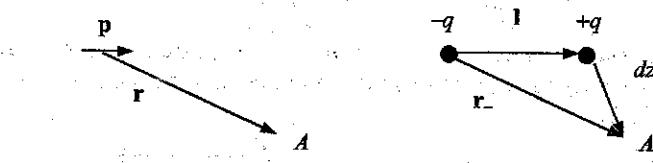


Рис. 1.1.4. К расчёту поля точечного диполя

Здесь введён вектор дипольного момента  $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ . Кроме того, для компактности записи содержимого квадратной скобки использован векторный оператор «набла»:

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}.$$

Таким образом, напряжённость поля точечного диполя убывает с расстоянием по закону  $E \sim 1/r^3$ .

Силовые линии диполя идут от положительного заряда к отрицательному, как это показано на рис. 1.1.5.

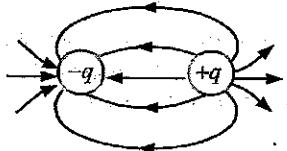


Рис. 1.1.5. Силовые линии поля диполя

### 1.1.8. Момент сил, действующий на диполь в однородном электрическом поле

Рассмотрим поведение жёсткого точечного диполя, находящегося в однородном электрическом поле — рис. 1.1.6. Поскольку в однородном поле силы, действующие на заряды диполя, одинаковы по величине и противоположно направлены,  $\mathbf{F}_+ = -\mathbf{F}_- = q\mathbf{E}$ , находим

$$\mathbf{M} = \mathbf{l} \times \mathbf{F}_+ = \mathbf{p} \times \mathbf{E}, M = -pE \sin \theta.$$

Отсюда следует, что диполь в электрическом поле ориентируется по направлению поля. На это указывает знак « $\rightarrow$ » в последней формуле.

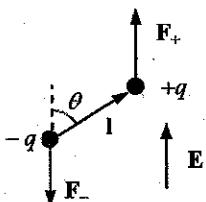


Рис. 1.1.6. Диполь в однородном электрическом поле (к вычислению момента сил, действующих на диполь в электрическом поле)

### 1.1.9. Плотность заряда

Выделим элементарный объём  $dV$ . Если в этом объёме находится заряд  $dq$ , то *объёмной плотностью* заряда называется величина

$$\rho = dq/dV.$$

Пусть заряд распределён в тонком слое. Выделим элемент слоя площадью  $dS$ , несущий заряд  $dq$ . *Поверхностной плотностью* заряда называется величина

$$\sigma = dq/dS.$$

Аналогично определяется *линейная плотность* как заряд, приходящийся на единицу длины нити (образца, поперечные размеры которого малы по сравнению с продольными размерами):

$$\tau = dq/dl.$$

### 1.1.10. Поле на оси равномерно заряженного диска

Пусть имеется тонкий диск радиуса  $R$ , по поверхности которого равномерно распределён заряд  $Q$ . Поверхностная плотность заряда равна  $\sigma = Q/\pi R^2$ . Найдём электрическое поле на оси диска на расстоянии  $d$  от его плоскости (рис. 1.1.7).

Выберем на поверхности диска бесконечно малый участок площадью  $dS = \rho d\rho \cdot d\varphi$ , как показано на рис. 1.1.7. Этот участок несёт заряд  $dq = \sigma dS$  и в точке  $P$  на оси создаёт поле  $d\mathbf{E} = \frac{\sigma dS}{r^3} \mathbf{r}$ . Выбирая все участки на поверхности диска в кольце шириной  $d\rho$ , отстоящем от центра на расстоянии  $\rho$ , замечаем, что суммарное поле, создаваемое слоем  $(\rho \div \rho + d\rho)$ , направлено вдоль оси  $x$  и равно

$$dE = dE_x = \frac{\sigma \cdot 2\pi \rho d\rho}{r^2} \cos \theta.$$

Учтём, что

$$r^2 = \rho^2 + d^2, \cos \theta = \frac{d}{r}.$$

Тогда поле, создаваемое всем диском в точке  $P$ , оказывается равным

$$E = \int_{\rho=0}^{R=R} dE = 2\pi\sigma d \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} = 2\pi\sigma \left( 1 - \frac{d}{\sqrt{R^2 + d^2}} \right).$$

В частных случаях малого и большого расстояний  $d$  от плоскости диска находим:

$$E = 2\pi\sigma \text{ при } d \rightarrow 0,$$

$$E = \frac{\pi R^2 \sigma}{d^2} = \frac{Q}{d^2} \text{ при } d \gg R.$$

Таким образом, поле вдали от заряженного диска совпадает с полем точечного заряда той же величины.

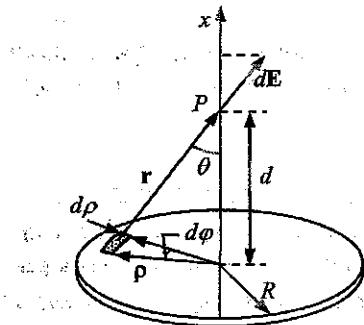


Рис. 1.1.7. К расчёту поля на оси равномерно заряженного диска

Заметим, что по другую сторону диска ( $x < 0$ ) поле даётся теми же формулами, но направлено в противоположную сторону.

Формула  $E = 2\pi\sigma$  даёт величину напряжённости поля, создаваемого бесконечной плоскостью, равномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$  на произвольном расстоянии от этой плоскости. Действительно, устремляя формально радиус пластины к бесконечности,  $R \rightarrow \infty$ , замечаем, что любая точка на поверхности может быть выбрана за начало отсчёта. Кроме того, на любом конечном расстоянии от плоскости ( $R \rightarrow \infty$ ) окажется  $d/R \rightarrow 0$ . Сказанное озна-

чает, что бесконечная плоскость создаёт однородное поле с напряжённостью, по величине равной  $E = 2\pi\sigma$ , и направленной симметрично в противоположные стороны по разные стороны плоскости.

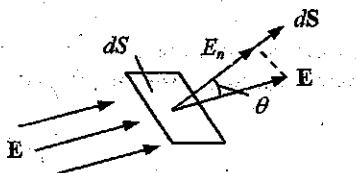
## 1.2. Теорема Гаусса для электрического поля в вакууме

### 1.2.1. Формулировка теоремы Гаусса

Для расчёта электрических полей, а также для формулировки общих уравнений электродинамики большое значение имеет теорема Гаусса.

Определим вектор площади элементарной плоскадки  $dS$  как  $dS = \mathbf{n}dS$ , где  $dS$  — площадь элементарной плоскадки, а  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к этой плоскадке (рис. 1.2.1).

Рис. 1.2.1. К определению вектора площади элементарной плоскадки и потока вектора  $\mathbf{E}$  через эту плоскадку;  $E_n = E \cos \theta$



Поток вектора напряжённости поля  $\mathbf{E}$  через плоскадку  $dS$  равен (рис. 1.2.1)

$$d\Phi = EdS \cos \theta = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}.$$

Поток через замкнутую поверхность равен  $\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ .

*Теорема Гаусса в интегральной форме* имеет вид

$$\Phi = 4\pi q \text{ или } \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q, \quad q = \int_V \rho dV, \quad (1.2.1)$$

где  $q$  — полный заряд, находящийся в объёме  $V$ , ограниченном поверхностью  $S$ ,  $\rho$  — объёмная плотность заряда.

*Теорема Гаусса в дифференциальной форме* имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (1.2.2)$$

Это равенство содержит операцию «дивергенция», даваемую в декартовых координатах формулой

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{E}.$$

В последнем равенстве использован векторный оператор «набла»:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

### 1.2.2. Доказательство теоремы Гаусса

#### 1) Точечный заряд $q$ в центре сферы радиуса $r$

Поместим начало координат в центр сферы. В этом случае вектор элементарной площадки на поверхности сферы параллелен радиус-вектору этой площадки:  $d\mathbf{S} \parallel \mathbf{r}$  (в случае замкнутой поверхности за направление вектора  $d\mathbf{S}$  принимается внешняя нормаль к поверхности). Поскольку  $\mathbf{E} = q\mathbf{r}/r^3$ , то поток напряжённости поля через рассматриваемую площадку равен

$$d\Phi = \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{q}{r^2} dS.$$

Суммируя потоки по всем элементарным площадкам, находим поток через всю поверхность сферы:

$$\Phi = \frac{q}{r^2} S = \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi q.$$

#### 2) Поверхность — несферическая

В этом случае для элементарного потока имеем выражение

$$d\Phi = \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{q}{r^3} \mathbf{r} d\mathbf{S} = \frac{q}{r^2} dS_{||},$$

где  $dS_{||}$  — проекция вектора  $d\mathbf{S}$  на радиус-вектор  $\mathbf{r}$  (рис. 1.2.2).

Если  $d\Omega$  — телесный угол, под которым видна площадка, то  $dS_{||} = dS \cos \theta = r^2 d\Omega$  и, следовательно,

$$d\Phi = \frac{q}{r^2} dS_{||} = \frac{q}{r^2} r^2 d\Omega = q d\Omega, \quad \Phi = \int q d\Omega = 4\pi q.$$

#### 3) Заряд находится вне замкнутой поверхности

Выберем произвольную силовую линию, дважды пересекающую поверхность, и вокруг неё конус с телесным углом при вершине  $d\Omega$ . Этот конус вырезает на рассматриваемой поверхности две элементарные площадки (рис. 1.2.3). Соответственно поток напряжённости поля через эти площадки  $d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2$ .

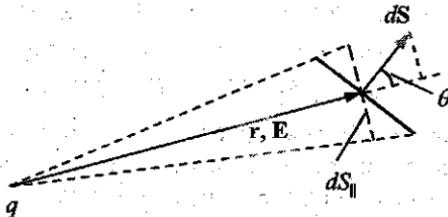
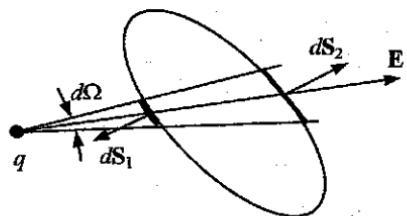


Рис. 1.2.2. Нахождение потока напряжённости поля через произвольно ориентированную элементарную площадку

Рис. 1.2.3. Заряд находится вне замкнутой поверхности



Подобно тому, как было сделано выше, находим:

$$d\Phi_1 = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_1 = -\frac{q}{r_1^2} dS_{1,\parallel} = -qd\Omega,$$

$$d\Phi_2 = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_2 = +\frac{q}{r_2^2} dS_{2,\parallel} = +qd\Omega.$$

Здесь учтено, что площадки  $d\mathbf{S}_1$  и  $d\mathbf{S}_2$  ориентированы противоположно по отношению к радиус-вектору, идущему от точечного заряда  $q$  (рис. 1.2.3). Таким образом, для каждой силовой линии, пересекающей поверхность дважды,  $d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 = 0$ . Если же силовая линия не пересекает поверхность, то соответствующий поток напряжённости равен нулю по смыслу понятия потока.

#### 4) Заряд находится внутри поверхности, но силовая линия пересекает поверхность более чем в одной точке

В простейшем случае число пересечений составляет три (рис. 1.2.4). В общем случае число пересечений нечётно.

Выбирая элементарный конус вокруг соответствующей силовой линии, и суммируя потоки напряжённости через площадки, высекаемые конусом на поверхности, имеем  $d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 + d\Phi_3$ . Как видно из рисунка, потоки напряжённости через площадки 1, 2 и 3 чередуются по знаку вследствие чередования ориентации внешних нормалей к поверх-

ности вдоль силовой линии:  $d\Phi_1 = -d\Phi_2 = +d\Phi_3$ . Равенство этих потоков по абсолютной величине доказывается точно так же, как это сделано выше и следует из равенств  $|dS| = r^2 d\Omega$ ,  $E = q/r^2$  и того, что в произведении  $E dS$  множитель  $r^2$  сокращается. Таким образом, получаем, что если заряд находится внутри поверхности, то независимо от числа точек пересечения силовой линии с поверхностью выполняется равенство типа

$$d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 + d\Phi_3 = d\Phi_1 \Rightarrow \Phi = \int_{4\pi} q d\Omega = 4\pi q.$$

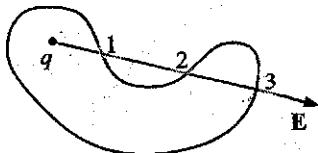


Рис. 1.2.4. Силовая линия пересекает поверхность в трёх точках

### 5) Система зарядов

Пусть теперь имеется произвольная система зарядов  $\{q_i\}$ . В силу принципа суперпозиции поле, создаваемое этой системой, равно

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i = \sum_i \frac{q_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i,$$

где  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор точки наблюдения, относительно положения  $i$ -го заряда. Выберем некоторую замкнутую поверхность. Соответственно поток напряжённости поля  $\mathbf{E}$  можно представить как сумму потоков, создаваемых отдельными зарядами системы:

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \sum_i \oint_S \mathbf{E}_i d\mathbf{S} = \sum_i \Phi_i,$$

Разобъём заряды на две группы: одни находятся внутри поверхности, а другие — вне её. Как было показано, если заряд находится вне поверхности, то создаваемый им поток равен нулю. Следовательно, для нахождения потока достаточно учитывать только заряды, находящиеся внутри поверхности. Для них  $\Phi_i = 4\pi q_i$ . Окончательно получаем

$$\Phi = \sum_i \Phi_i = \sum_i 4\pi q_i = 4\pi q.$$

Для доказательства теоремы Гаусса в дифференциальной форме применим доказанное интегральное соотношение к малому объёму  $\Delta V$ , поделив обе стороны равенства на  $\Delta V$ :

$$\frac{1}{\Delta V} \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi \frac{q}{\Delta V},$$

Перейдём здесь к пределу  $\Delta V \rightarrow 0$ , когда поверхность  $S$  стягивается в точку, и учтём, что

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\Delta V} \oint_{S(\Delta V)} \mathbf{E} d\mathbf{S} \right) = \operatorname{div} \mathbf{E},$$

где  $S(\Delta V)$  — поверхность, ограничивающая объём  $\Delta V$ . Поскольку предел  $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} (q/\Delta V) = \rho$  есть плотность заряда в рассматриваемой точке, то получаем

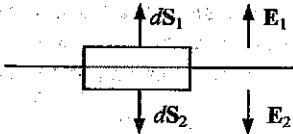
$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho.$$

### 1.2.3. Примеры применения теоремы Гаусса

#### 1) Поле равномерно заряженной плоскости

Выберем элементарную площадку площадью  $dS$  на плоскости и вокруг неё элементарный объём в виде прямоугольного параллелепипеда, две стороны которого параллельны рассматриваемой плоскости, так что  $|d\mathbf{S}_1| = |d\mathbf{S}_2| = dS$  (рис. 1.2.5).

Рис. 1.2.5. К расчёту поля равномерно заряженной плоскости



Из соображений симметрии следует, что вектор напряжённости поля направлен по нормали к плоскости, причём в противоположные стороны по разные стороны от плоскости. Тогда поток через выбранную поверхность равен

$$\Phi = \mathbf{E}_1 d\mathbf{S}_1 + \mathbf{E}_2 d\mathbf{S}_2 = 2EdS.$$

Пусть поверхностная плотность заряда на плоскости (т.е. заряд, приходящийся на единицу площади поверхности  $dq/dS$ ) равна  $\sigma$ . Тогда из теоремы Гаусса следует

$$\Phi = 2EdS = 4\pi\sigma dS \Rightarrow E = 2\pi\sigma. \quad (1.2.3)$$

## 2) Поле равномерно заряженной нити

Пусть бесконечно длинная нить равномерно заряжена с линейной плотностью заряда  $\tau$ . Из соображений симметрии ясно, что силовые линии поля направлены от нити по нормали к ней (рис. 1.2.6).

Окружим нить цилиндром радиуса  $r$  с длиной образующей, равной  $dl$  (рис. 1.2.6 справа). Поскольку линейная плотность заряда равна  $\tau$ , то в объёме цилиндра находится заряд  $dq = \tau dl$ . Имея в виду, что площадь боковой поверхности цилиндра равна  $dS = 2\pi r dl$ , по теореме Гаусса находим

$$\Phi = 2\pi r dl E(r) = 4\pi\tau dl \Rightarrow E = \frac{2\tau}{r} \quad (1.2.4)$$

( $r$  — расстояние от оси нити).

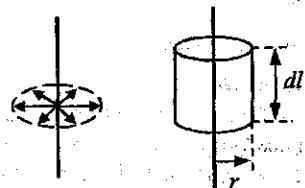


Рис. 1.2.6. Слева — силовые линии поля бесконечно длинной равномерно заряженной нити; справа — цилиндр, окружающий нить

## 3) Поле равномерно заряженного шара

Пусть имеется шар радиуса  $R$ , заряженный сферически симметрично с плотностью заряда  $\rho(r)$  (рис. 1.2.7).

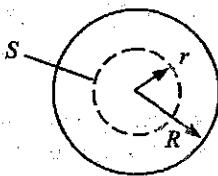


Рис. 1.2.7. К расчёту поля шара, равномерно заряженного по его объёму

Из соображений симметрии следует, что поле всюду направлено параллельно радиус-вектору:  $E \parallel r$ . Используем теорему Гаусса в интегральной форме. Выберем сферическую поверхность  $S$  радиуса  $r$  с центром в центре шара (рис. 1.2.7). Применение теоремы Гаусса даёт:

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q(r) \Rightarrow E(r) = \frac{q(r)}{r^2}, \quad (1.2.5)$$

где  $q(r) = \int_0^r \rho(r) 4\pi r^2 dr$  — полный заряд, находящийся внутри сферы радиуса  $r$ .

В частном случае  $\rho = \text{const}$  по формуле (1.2.5) находим:

$$\text{при } r < R: q(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho = Q \left( \frac{r}{R} \right)^3 \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{4\pi}{3} \rho \mathbf{r}, \quad (1.2.6)$$

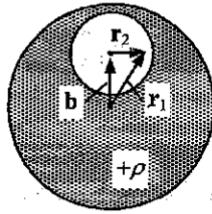
$$\text{при } r > R: q(r) = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho = Q \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{Q}{r^3} \mathbf{r}$$

( $Q$  — полный заряд шара).

#### 4) Поле в сферической полости внутри шара

Пусть имеется шар, равномерно заряженный по объёму с плотностью заряда  $\rho$ . Допустим, что в этом шаре вырезана сферическая полость (рис. 1.2.8). Найдём поле в этой полости.

Рис. 1.2.8. Равномерно заряженный шар с вырезанной в нём сферической полостью



Если бы полости не было, то внутри шара присутствовало бы поле с напряжённостью

$$\mathbf{E}_1 = \frac{4\pi}{3} \rho \mathbf{r}_1,$$

где  $\mathbf{r}_1$  — радиус-вектор точки наблюдения относительно центра шара.

Отсутствие зарядов в полости можно интерпретировать так, что в этой области к зарядам исходного шара добавлены заряды с плотностью  $(-\rho)$ , точно компенсирующие присутствующие здесь заряды. Теперь согласно принципу суперпозиции поле в полости можно представить как сумму поля исходного шара и поля, создаваемого внесёнными зарядами  $(-\rho)$ . Поскольку поле в области полости, создаваемое внесёнными зарядами, равно

$$\mathbf{E}_2 = \frac{4\pi}{3} (-\rho) \mathbf{r}_2,$$

где  $\mathbf{r}_2$  — радиус-вектор точки наблюдения относительно центра полости, то

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{4\pi}{3}\rho\mathbf{r}_1 + \frac{4\pi}{3}(-\rho)\mathbf{r}_2 = \frac{4\pi}{3}\rho(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{4\pi}{3}\rho\mathbf{b}.$$

Здесь  $\mathbf{b} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  — вектор соединяющий центры шара и полости.

Таким образом, поле внутри полости однородное и (в случае  $\rho > 0$ ) направлено от центра шара к центру полости (рис. 1.2.8).

Рассмотрим частный случай. Пусть в исходно электронейтральном шаре радиуса  $R$  положительные заряды сместились относительно отрицательных на бесконечно малое расстояние  $\delta$  (рис. 1.2.9 слева). В результате такого смещения нескомпенсированными остаются заряды только на поверхности шара:

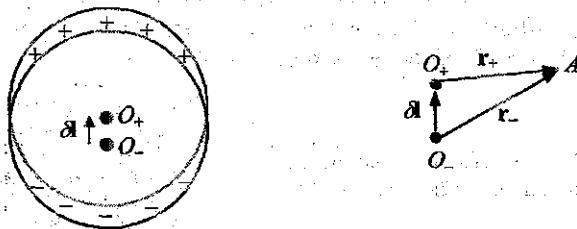


Рис. 1.2.9. Слева — смещение положительных зарядов относительно отрицательных на малое расстояние  $\delta$ .  $O_-$  и  $O_+$  — центры шаров, несущих соответственно отрицательные и положительные заряды; справа — радиус-векторы точки наблюдения  $A$  относительно центров положительно и отрицательно заряженных шаров

Поле, создаваемое такой системой зарядов, находится аналогично полю в полости. Именем, пусть  $\mathbf{r}_+$  и  $\mathbf{r}_-$  — радиус-векторы точки наблюдения относительно центров положительно и отрицательно заряженных шаров (рис. 1.2.9 справа). Поля во внутренней области, создаваемые этими шарами, равны

$$\mathbf{E}_+ = \frac{4}{3}\pi\rho\mathbf{r}_+, \quad \mathbf{E}_- = \frac{4}{3}\pi(-\rho)\mathbf{r}_-.$$

Здесь  $\rho$  и  $(-\rho)$  — плотности зарядов шаров. Полное поле в точке наблюдения есть

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{4}{3}\pi\rho(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = -\frac{4\pi}{3}\rho\delta\mathbf{l}. \quad (1.2.7)$$

Здесь  $\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_- = -\delta l$  (рис. 1.2.9 справа). Это поле однородно во всём объёме шара и направлено от центра положительно заряженного шара к центру отрицательно заряженного шара.

Найдём распределение заряда по поверхности шара. Для этого найдём толщину поверхностного слоя, в котором заряды нескомпенсированы.

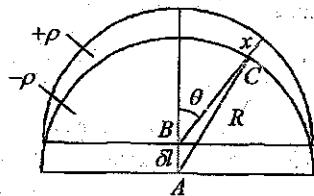
Рассмотрим треугольник  $ABC$  (рис. 1.2.10). Его сторона  $AC$  имеет длину  $R$ , а сторона  $BC$  — длину  $R - x$ , где  $x$  — искомая толщина в направлении, задаваемом углом  $\theta$ . По теореме косинусов

$$R^2 = (R-x)^2 + 2(R-x)\delta l \cos \theta + (\delta l)^2.$$

Считая смещение шаров  $\delta l$  и толщину слоя  $x$  малыми одного порядка, и пренебрегая поправками порядка  $(\delta l)^2$  и выше, находим  $x = \delta l \cos \theta$ . Отсюда следует, что поверхностная плотность заряда составляет

$$\sigma = \sigma_0 \cos \theta, \quad \sigma_0 = \rho \delta l. \quad (1.2.8)$$

Рис. 1.2.10. К определению поверхностной плотности заряда, возникающей при малом смещении шаров



Заметим, что вне шара поле такой системы поверхностных зарядов совпадает с полем точечного диполя:

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{pr})\mathbf{r} - \mathbf{p}\mathbf{r}^2}{r^5}, \quad \mathbf{p} = Q\delta l, \quad Q = \frac{4}{3}\pi\rho R^3,$$

поскольку поля от каждого из шаров во внешнем пространстве совпадают с полями точечных зарядов, расположенных в центре шаров. Величина же  $\delta l$  есть плечо такого диполя.

### 1.3. Потенциал

#### 1.3.1. Потенциальный характер электростатического поля

Пусть электростатическое поле создаётся точечным зарядом  $Q$ , т.е.  $\mathbf{E} = \frac{Q}{r^3} \mathbf{r}$ . Работа поля при перемещении заряда  $q$  из точки 1 в точку 2 (рис. 1.3.1) равна

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} q\mathbf{E}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = qQ \int_{(1)}^{(2)} \frac{\mathbf{r} d\mathbf{r}}{r^3} = qQ \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Эта работа зависит от положения начальной и конечной точек, но не зависит от траектории, соединяющей эти точки. Следовательно, поле точечного заряда консервативно.

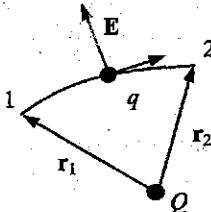


Рис. 1.3.1. Перемещение пробного заряда  $q$  в электрическом поле, создаваемом точечным зарядом  $Q$

Если электростатическое поле создаётся системой зарядов, то по принципу суперпозиции

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{E}_i = \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i),$$

где  $\mathbf{E}_i$  — поле, создаваемое в точке  $i$ -м зарядом, находящимся в точке  $\mathbf{r}_i$ . Поскольку каждое из полей  $\mathbf{E}_i$  консервативно, то и суммарное поле также консервативно. Таким образом, электростатическое поле произвольной системы зарядов консервативно, и можно ввести потенциальную энергию заряда  $q$  в этом поле: работа сил поля на пути  $1 \rightarrow 2$  равна убыли потенциальной энергии рассматриваемого заряда:

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} q\mathbf{E}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = U_1 - U_2.$$

### 1.3.2. Разность потенциалов и потенциал

Разностью потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  поля между точками 1 и 2 называется работа сил поля по перемещению единичного заряда из точки 1 в точку 2:

$$\int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (1.3.1)$$

Потенциал определён с точностью до произвольной постоянной. Выбирая какую-либо точку  $r_0$  за начало отсчёта, т.е. полагая  $\varphi(r_0) = 0$ , мы определяем потенциалы всех прочих точек по отношению к вы-

бранный. Часто за начало отсчёта выбирают бесконечно удалённую точку, полагая  $\varphi(\infty) = 0$ . По отношению к ней потенциал точечного заряда  $Q$  равен  $\varphi(r) = Q/r$ .

Поскольку электростатическое поле можно характеризовать потенциалом  $\varphi(r)$ , то говорят, что это поле *потенциальное*.

### 1.3.3. Связь потенциала с напряжённостью поля

Согласно (1.3.1) на бесконечно малой траектории  $r \rightarrow r + dr$  имеем

$$\varphi(r) - \varphi(r + dr) = -d\varphi = \mathbf{E}(r)dr.$$

Поскольку  $\mathbf{E}dr = E_x dx + E_y dy + E_z dz$ , то

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi.$$

Используя векторный оператор «набла», перепишем полученную связь в краткой форме:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi.$$

*Пример.* Найдём потенциал однородного электрического поля  $E_0 = \text{const}$ . Из последнего равенства следует, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -E_{0x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -E_{0y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -E_{0z},$$

откуда следует

$$\varphi = -\left(E_{0x}x + E_{0y}y + E_{0z}z\right) = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}.$$

Константа интегрирования здесь выбрана таким образом, что  $\varphi = 0$  в начале координат  $\mathbf{r} = 0$ .

### 1.3.4. Уравнения Пуассона и Лапласа

Поскольку

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (1.3.2)$$

то отсюда следует *уравнение Пуассона для потенциала поля*:

$$\text{div grad } \varphi = 4\pi\rho \quad \text{или} \quad \Delta \varphi = 4\pi\rho. \quad (1.3.3)$$

Здесь введён оператор Лапласа (лапласиан)

$$\Delta = \text{div grad} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

В области пространства, свободной от зарядов ( $\rho = 0$ ), уравнение Пуассона сводится к *уравнению Лапласа*

$$\Delta\phi = 0. \quad (1.3.4)$$

### 1.3.5. Теорема единственности для уравнений Лапласа и Пуассона

**Теорема 1.** Если  $D$  — открытая область пространства, а  $\Gamma$  — её граница, то, решение краевой задачи для уравнения Лапласа

$$\begin{aligned} \Delta\phi = 0, \quad \mathbf{r} \in D, \\ \left.\phi\right|_{\mathbf{r} \in \Gamma} = 0 \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

единственno.

**Доказательство:** Допустим противное, т.е. предположим, что где-то в области  $D$  функция  $\phi \neq 0$ . Поскольку всюду на границе области  $\phi = 0$ , то это значит, что где-то внутри  $D$  достигается экстремум. Допустим для определённости, что это максимум. Тогда в этой точке

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} < 0, \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} < 0, \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} < 0. \end{aligned}$$

Последние неравенства означают, что в точке максимума

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} < 0.$$

Но это неравенство противоречит уравнению  $\Delta\phi = 0$  в (1.3.5), которое должно выполняться всюду в  $D$ . Полученное противоречие доказывает теорему.

### Теорема 2. Решение краевой задачи для уравнения Пуассона

$$\begin{aligned} \Delta\phi = -4\pi\rho, \quad \mathbf{r} \in D, \\ \left.\phi\right|_{\mathbf{r} \in \Gamma} = f(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

единственno.

Здесь, как и в теореме 1,  $D$  — открытая область пространства,  $\Gamma$  — её граница, а  $f(\mathbf{r})$  — заданная функция.

**Доказательство.** Допустим, что краевая задача (1.3.6) имеет, по крайней мере, два решения:  $\phi_1(\mathbf{r})$  и  $\phi_2(\mathbf{r})$ , не равные тождественно друг другу:

$$\begin{cases} \Delta\phi_1 = -4\pi\rho, \quad \mathbf{r} \in D, \\ \left.\phi_1\right|_{\mathbf{r} \in \Gamma} = f(\mathbf{r}), \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta\phi_2 = -4\pi\rho, \quad \mathbf{r} \in D, \\ \left.\phi_2\right|_{\mathbf{r} \in \Gamma} = f(\mathbf{r}). \end{cases} \quad (1.3.7)$$

Введём функцию  $\psi(\mathbf{r}) = \varphi_1(\mathbf{r}) - \varphi_2(\mathbf{r})$ . Поскольку функции  $\varphi_1(\mathbf{r})$  и  $\varphi_2(\mathbf{r})$  удовлетворяют уравнениям (1.3.7), то функция  $\psi(\mathbf{r})$  удовлетворяет краевой задаче

$$\Delta\psi = 0, \quad \mathbf{r} \in D,$$

$$\psi|_{\text{rel}\Gamma} = 0.$$

Но по теореме 1 решение последней задачи есть  $\psi = 0$ . Поэтому всюду в  $D$   $\varphi_1(\mathbf{r}) = \varphi_2(\mathbf{r})$ , что и доказывает теорему.

### 1.3.6. Теорема о циркуляции для электростатического поля

Так как электростатическое поле потенциально, то работа поля над зарядом не зависит от формы траектории. Это значит, что для произвольной траектории  $L$  при совпадении начальной и конечной точек имеем

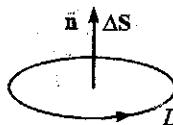
$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{r} = \oint_L (E_x dx + E_y dy + E_z dz) = 0. \quad (1.3.8)$$

Входящий сюда интеграл называется *циркуляцией* вектора  $\mathbf{E}$  по контуру  $L$ , а сформулированное равенство называется *теоремой о циркуляции в интегральной форме*.

### 1.3.7. Теорема о циркуляции в дифференциальной форме

Пусть замкнутый контур  $L(\Delta S)$  охватывает малую поверхность площадью  $\Delta S$ . Вектор  $\Delta S$  направлен по нормали к рассматриваемой площадке и по величине равен площади этой площадки:  $\Delta S = n \Delta S$ ,  $n^2 = 1$ . Направление вектора  $n$  задаётся положительным направлением обхода контура  $L$  и определяется правилом винта (рис. 1.3.2).

Рис. 1.3.2. Вектор площади площадки  $\Delta S$ .  $n$  — нормаль к площадке, направление которой определяется в соответствии с обходом контура  $L$  по правилу винта



Применим теорему о циркуляции, используя указанный контур:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{r} = 0.$$

$L(\Delta S)$

Рассмотрим предел

$$(\operatorname{rot} \mathbf{E})_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\Delta S} \oint_{L(\Delta S)} \mathbf{E} d\mathbf{r} \right),$$

когда контур стягивается в точку. Этот предел представляет собой проекцию вектора  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$  на направление нормали  $n$ . Ввиду произвольности выбора контура заключаем, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (1.3.9)$$

Сформулированное уравнение выражает теорему о циркуляции в дифференциальной форме. В прямоугольных координатах оно имеет вид

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0.$$

### 1.3.8. Границные условия

При переходе через границу раздела сред электрическое поле меняется по определенным законам.

1) Применим теорему Гаусса к бесконечно малому прямоугольному параллелепипеду, охватывающему часть границы раздела двух сред (рис. 1.3.3 слева). Полагая  $dS_1 = dS_2 = dS$ ,  $q = \sigma dS$ ,  $dS_2 = -dS_1$ ,  $dS_1 = ndS$ , имеем

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi q \Rightarrow \mathbf{E}_1 d\mathbf{S}_1 + \mathbf{E}_2 d\mathbf{S}_2 = 4\pi\sigma dS.$$

Отсюда следует первое граничное условие:

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)n = 4\pi\sigma,$$

или, что эквивалентно,

$$E_{1n} - E_{2n} = 4\pi\sigma.$$

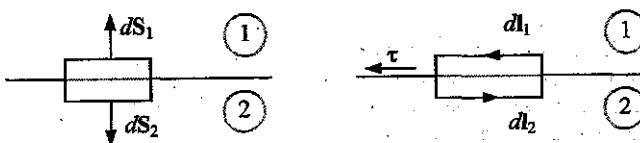


Рис. 1.3.3. К выводу условий на границе раздела сред

2) Применим теорему о циркуляции к бесконечно малому прямоугольному контуру, проходящему на бесконечно малом расстоянии над и под поверхностью раздела сред (рис. 1.3.3 справа), получаем

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0 \Rightarrow \mathbf{E}_1 d\mathbf{l}_1 + \mathbf{E}_2 d\mathbf{l}_2 = 0.$$

Поскольку  $d\mathbf{l}_2 = -d\mathbf{l}_1$ ,  $d\mathbf{l}_1 = \tau d\ell$ , то  $(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)\tau = 0$ . Отсюда находим второе граничное условие:

$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0.$$

### 1.3.9. Потенциал поля точечного диполя

Потенциал поля в точке  $A$  (рис. 1.3.4) складывается из потенциалов полей, создаваемых зарядами  $(-q)$  и  $(+q)$ :

$$\varphi_A \equiv \varphi(\mathbf{r}) = \varphi_- + \varphi_+.$$

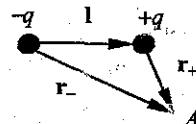


Рис. 1.3.4. К расчёту потенциала диполя

Пусть  $\mathbf{r}_-$  и  $\mathbf{r}_+$  — радиус-векторы точки наблюдения относительно положительного и отрицательного зарядов диполя. Поскольку  $\mathbf{r}_- = \mathbf{r}_+ + \mathbf{l}$ , то, обозначая  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_+$  и вводя вектор дипольного момента  $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ , получаем в пределе точечного диполя ( $l \ll r$ ):

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{q}{|\mathbf{r} + \mathbf{l}|} + \frac{q}{|\mathbf{r}|} = -(\nabla) \frac{q}{r} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (1.3.10)$$

### 1.3.10. Поле системы зарядов на большом расстоянии

Рассмотрим систему зарядов  $\{q_i\}$ , занимающую конечную область в пространстве. Найдём поле, создаваемое этой системой на расстояниях, много больших размера этой области. Пусть  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор  $i$ -го заряда, а  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки наблюдения. Тогда потенциал поля в точке наблюдения равен сумме потенциалов, создаваемых всеми зарядами:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_i \varphi_i(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \quad (1.3.11)$$

Величина  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$  в знаменателях есть расстояния от  $i$ -го заряда до точки наблюдения. Для преобразования этого выражения учтём, что  $r \gg r_i$ . Поэтому

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\mathbf{r}_i}} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}_i}{r^2}\right).$$

Подстановка этого выражения в (1.3.11) даёт

$$\phi(\mathbf{r}) \approx \sum_i q_i \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}_i}{r^2}\right) \approx \frac{Q}{r} + \frac{1}{r^3} \sum_i \mathbf{r}(q_i \mathbf{r}_i) = \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{r^3}. \quad (1.3.12)$$

Здесь введены полный заряд  $Q$  и дипольный момент  $\mathbf{p}$  системы:

$$Q = \sum_i q_i, \quad \mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i.$$

Если  $Q \neq 0$ , то на больших расстояниях поле такое же, как поле точечного заряда  $Q$ . Второе же слагаемое в (1.3.12) убывает быстрее с ростом расстояния  $r$ . Если же  $Q = 0$ , то поле оказывается таким же, как поле точечного диполя  $\mathbf{p}$  (см. (1.3.10)):

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} \phi(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{p}r^2}{r^5}. \quad (1.3.13)$$

### 1.3.11. Энергия жёсткого диполя в электрическом поле

Пусть вектор дипольного момента составляет угол  $\theta$  с направлением поля. Тогда момент сил, действующих на диполь, равен

$$\mathbf{M} = -p\mathbf{E} \sin \theta.$$

Знак « $-$ » здесь означает, что момент сил стремится уменьшить угол  $\theta$ , ориентируя диполь по направлению поля:

Работа сил поля по повороту диполя от начального угла  $\theta_0$  до угла  $\theta$  равна

$$A = \int_{\theta_0}^{\theta} M d\theta = pE (\cos \theta - \cos \theta_0) = U(\theta_0) - U(\theta).$$

Выбирая в качестве начала отсчёта  $\theta_0 = \pi/2$ ,  $U(\theta_0) = 0$ , получаем

$$U = -p\mathbf{E}. \quad (1.3.14)$$

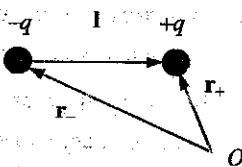
### 1.3.12. Диполь в неоднородном электрическом поле

Пусть диполь находится в неоднородном внешнем поле (рис. 1.3.5). Тогда силы, действующие на его компоненты, не равны по величине, и возникает сила, действующая на диполь как целое. Найдём эту силу:

$$\mathbf{F} = (+q)\mathbf{E}_+ + (-q)\mathbf{E}_-.$$

Здесь  $E_+$  и  $E_-$  — поля в точках, где находятся соответственно положительный и отрицательный заряды.

Рис. 1.3.5. К расчёту силы, действующей на диполь в неоднородном электрическом поле



Учтём, что  $r_+ = l + r_-$ ,  $E_+ = E(r_+)$ ,  $E = E(r_-)$ . Поэтому

$$F = q(E_+ - E_-) = q[E(r_- + l) - E(r_-)] = q(lV)E.$$

Разлагая разность  $E(r_- + l) - E(r_-)$  по степеням малой величины  $l$ ,  $|l| \ll |r|$ , и полагая радиус-вектор заряда  $(-q)$  равным радиус-вектору диполя:  $r_- = r$ , получим

$$F = q(lV)E. \quad (1.3.15)$$

Перешлем последнее выражение, введя вектор дипольного момента  $p = ql$ :

$$F = (pV)E. \quad (1.3.16)$$

Если поле однородное, то  $F = 0$ . Если же поле неоднородное, то в общем случае сила отлична от нуля.

Выберем ось  $Z$  вдоль вектора напряжённости:  $E \parallel OZ$ . Предположим, что дипольный момент ориентирован по направлению поля. Тогда сила направлена по этой же оси, причём  $F \equiv F_z = p dE/dz$ . Отсюда следует, в частности, что при  $dE/dz > 0$  окажется  $F > 0$ . Это значит, что диполь втягивается в область сильного поля.

Формула для энергии точечного диполя (1.3.14) в электростатике применима и в случае неоднородного поля. При этом силу можно вычислять как по формуле (1.3.16), так и по формуле

$$F = -\operatorname{grad} U = \operatorname{grad}(pE). \quad (1.3.17)$$

Эквивалентность формул (1.3.16) и (1.3.17) связана с тем, что напряжённость электростатического поля может быть представлена как  $E = -\operatorname{grad} \varphi$ . Тогда

$$F = V(pE) = -V(p\nabla\varphi) = -V\left(p_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + p_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + p_z \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).$$

Перестановка порядка дифференцирования даёт окончательно:

$$\mathbf{F} = - \left( p_x \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \phi) + p_y \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \phi) + p_z \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \phi) \right) = (\mathbf{p} \nabla) \mathbf{E}.$$

Отметим, что тождество  $\text{grad}(\mathbf{p} \mathbf{E}) = (\mathbf{p} \nabla) \mathbf{E}$  справедливо только для случая потенциального поля  $\mathbf{E} = -\text{grad} \phi$ .

### 1.3.13. Энергия упругого диполя в электрическом поле

Выше мы нашли энергию жёсткого диполя, т.е. диполя с неизменным расстоянием между образующими его зарядами. Однако может оказаться, что расстояние между зарядами пренебрежимо мало, но расстёт под действием внешнего электрического поля. Таким способом формируется дипольный момент у ряда веществ, имеющих неполярные молекулы. Найдём энергию такого упругого диполя, считая, что в отсутствие поля дипольный момент равен нулю.

Рассмотрим модель, в которой диполь (молекула) состоит из зарядов, соединённых пружиной с жёсткостью  $\kappa$  (это допущение справедливо при не слишком сильных полях). Тогда под действием электрического поля длина пружины увеличивается на такую величину  $l$ , что сила со стороны поля уравновешивается силой упругости пружины:

$$\kappa l = qE.$$

Отсюда находим, что дипольный момент  $p = ql$  зависит от приложенного поля по закону

$$p = \frac{q^2 E}{\kappa} = \beta E.$$

Коэффициент  $\beta$  называется *поляризуемостью* молекулы.

Потенциальная энергия деформации пружины равна

$$U = \frac{\kappa l^2}{2}.$$

Исключая отсюда жёсткость  $\kappa$  пружины по формуле  $\kappa = qE/l$ , получим

$$U = \frac{\kappa l^2}{2} = \frac{qEl}{2} = \frac{pE}{2}.$$

Здесь вектор дипольного момента, индуцированный внешним полем, параллелен электрическому полю. Поэтому последнюю формулу можно переписать в векторной форме:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{p} \mathbf{E}. \quad (1.3.18)$$

## 1.4. Проводники в электрическом поле

### 1.4.1. Электростатическое поле в проводниках

Проводниками называют вещества, обладающие малым сопротивлением. В них имеются свободные заряды (электроны), которые могут перемещаться под действием сколь угодно слабых полей.

Если рассматривается стационарное состояние, когда нет токов, то в объёме проводника электрическое поле  $E = 0$ . Действительно, если бы имелось ненулевое поле,  $E \neq 0$ , то возникло бы упорядоченное движение зарядов, т.е. ток. Ток будет течь до тех пор, пока заряды не расположатся так, чтобы поле отсутствовало всюду в объёме вещества.

В состоянии равновесия

1) поле в объёме вещества равно нулю:  $E^{(i)} = 0$ ;

2) поскольку  $\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} E^{(i)}$ , а  $E^{(i)} = 0$ , то объёмная плотность зарядов в веществе равна нулю:  $\rho = 0$ . Это значит, что свободные заряды могут располагаться только на поверхности.

### 1.4.2. Границные условия на поверхности проводника

1) Пусть среда 1 — вакуум, а среда 2 — проводник (рис. 1.4.1). Применяя теорему Гаусса к бесконечно малому прямоугольному параллелепипеду, охватывающему часть границы раздела двух сред, имеем:

$$\oint_S EdS = 4\pi q \Rightarrow E_1 dS_1 + E_2 dS_2 = 4\pi\sigma dS.$$

Здесь учтено, что  $dS_1 = dS_2 = dS$ ,  $q = \sigma dS$ . Поскольку  $dS_2 = -dS_1$ ,  $dS_1 = n dS$ , то  $(E_1 - E_2)n = 4\pi\sigma$ . Учтём также, что в проводнике 2 поле равно нулю,  $E_2 = 0$ . Отсюда следует, что

$$E_{1n} = 4\pi\sigma.$$

2) Применяя теорему о циркуляции к бесконечно малому контуру, проходящему над и под поверхностью раздела сред (см. рис. 1.4.2), получаем

$$\oint_L Edl = 0 \Rightarrow E_1 dl_1 + E_2 dl_2 = 0.$$

Поскольку  $dl_2 = -dl_1$ ,  $dl_1 = \tau dl$ ,  $E_2 = 0$ , то

$$E_{1\tau} = 0.$$

Таким образом, поле вблизи поверхности проводника направлено по нормали к поверхности и пропорционально поверхности плотности заряда.

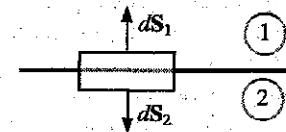


Рис. 1.4.1. К выводу граничного условия на поверхности проводника: прямоугольный параллелепипед охватывает поверхность  $dS$  металла

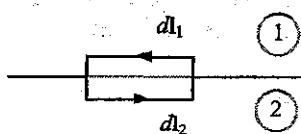


Рис. 1.4.2. К выводу граничного условия на поверхности проводника: прямоугольный контур проходит над и под поверхностью металла

### 1.4.3. Метод зеркальных изображений

Пусть имеется система зарядов:

$$\{q\} + \{q'\}, \{q\} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}, \{q'\} = \{q'_1, q'_2, \dots, q'_m\}.$$

Проведём мысленно эквилиптенциальную поверхность  $S$  (на которой потенциал принимает значение  $\varphi = \varphi_0$ ), разделяющую пространство на две области: I и II. В этих областях находятся соответственно группы зарядов  $\{q\}$  и  $\{q'\}$  (рис. 1.4.3).

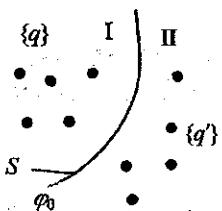


Рис. 1.4.3. Система зарядов, разделённая эквилиптенциальной поверхностью  $\varphi_0$  на две группы, находящиеся по разные стороны от неё

По теореме единственности поля в области I однозначно определяется зарядами  $\{q\}$  и значением потенциала  $\varphi = \varphi_0$  на границе раздела областей. Иными словами, поле в этой области (и только здесь!) не изменится, если заменить систему зарядов  $\{q\}$  другой системой  $\{q''\}$ , если только эта новая система создаёт (совместно с зарядами  $\{q\}$ ) на поверхности  $S$  тот же потенциал  $\varphi = \varphi_0$ . Это значит, что для расчёта

поля в области I можно, например, заменить группу зарядов  $\{q'\}$  проводящей поверхностью, имеющей потенциал  $\phi = \phi_0$ .

Обратно, если имеется группа зарядов  $\{q\}$  и проводящая поверхность  $S$  с потенциалом  $\phi = \phi_0$ , то для расчёта поля можно заменить эту поверхность такой группой зарядов  $\{q'\}$ , которая совместно с зарядами  $\{q\}$  создаёт в точках поверхности  $S$  требуемый потенциал  $\phi = \phi_0$ . Фиктивные заряды  $\{q'\}$  в этом случае называются *изображениями зарядов*  $\{q\}$ .

#### 1.4.4. Примеры

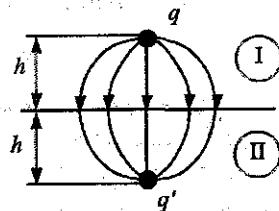
##### 1) Точечный заряд над плоской поверхностью металла

Изображением точечного заряда  $q$  в этом случае является заряд  $q' = -q$ , расположенный симметрично относительно плоскости (рис. 1.4.4). При этом в точках плоскости потенциал равен

$$\phi = \frac{q}{r} + \frac{(-q)}{r'} = 0.$$

В объёме металла напряжённость поля равна нулю, а вне металла совпадает с полем диполя  $\{q, q'\}$ .

Рис. 1.4.4. Расчёт поля, созданного точечным зарядом, находящимся над плоской поверхностью металла



##### 2) Заряд вблизи проводящей сферы

а) Пусть сфера имеет потенциал  $\phi = 0$  (сфера заземлена).

Расположим заряд-изображение  $q'$ , заменяющее сферу, на расстоянии  $b = R^2/d$  от центра сферы (рис. 1.4.5).

Тогда окажется, что треугольники  $OBq$  и  $Bq'q$  подобны, причём  $\frac{r'}{R} = \frac{r}{d}$ . В точках сферы потенциал равен

$$\phi = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} = \frac{q}{r} + q' \frac{d}{Rr}.$$

Если величину заряда-изображения положить равной  $q' = -q \frac{R}{d}$ , то во всех точках сферы окажется  $\phi = 0$ .

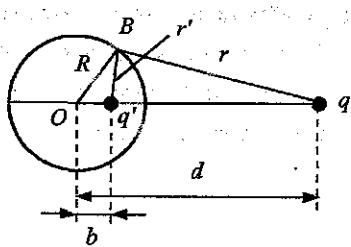


Рис. 1.4.5. Расчёт поля, созданного точечным зарядом, находящимся близи металлической сферы

б) Если сфера изолирована и несёт заряд  $q_0$ , то её потенциал оказывается ненулевым. В этом случае изображение образуется двумя зарядами: первый находится на расстоянии  $b = R^2/d$  от центра сферы и имеет заряд  $q' = -q \frac{R}{d}$  (аналогично случаю заземлённой сферы). Кроме того, добавляется второй заряд-изображение  $q''$ , который находится в центре сферы и имеет величину

$$q'' = q_0 - q' = q_0 + q \frac{R}{d}.$$

Этот второй заряд оставляет сферическую поверхность эквилиптенциальной, но делает суммарный заряд области, ограниченной внешней поверхностью сферы, равным  $q_0$ :  $q'' + q' = q_0$ . Потенциал сферы оказывается равным  $\phi = q''/R$ .

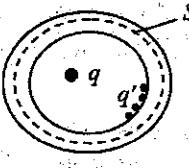
#### 1.4.5. Электростатическая защита

Идея электростатической защиты основана на теоремах Фарадея.

**Теорема 1.** Пусть заряды  $q$  находятся внутри металлической оболочки (рис. 1.4.6). Тогда сумма зарядов, индуцированных на внутренней стороне оболочки, равна по величине и противоположна по знаку сумме зарядов, находящихся внутри оболочки:  $q + q' = 0$ .

**Доказательство.** Выберем поверхность  $S$ , целиком проходящую в объёме оболочки. Так как оболочка проводящая, то на этой поверхности поле всюду равно нулю. Поэтому на основании теоремы Гаусса имеем  $\oint E dS = 4\pi(q + q') = 0$ .

Рис. 1.4.6. Заряды  $q$ , находящиеся внутри металлической оболочки (к доказательству первой теоремы Фарадея)

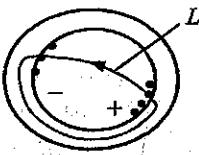


**Теорема 2.** Если в полости зарядов нет, то электростатическое поле в ней равно нулю.

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. поле отлично от нуля. Поскольку силовые линии электростатического поля могут начинаться и кончаться только на зарядах, то где-то на внутренней поверхности оболочки должны присутствовать заряды, причём суммарный заряд должен быть равным нулю. Выберем силовую линию, идущую от положительных зарядов к отрицательным, и замкнём её в объёме оболочки (рис. 1.4.7).

Циркуляция напряжённости поля по этому контуру ( $L$ ) отлична от нуля,  $\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} > 0$ , поскольку в полости контур совпадает с силовой линией и на нём  $\mathbf{E} d\mathbf{l} > 0$ , а в оболочке  $\mathbf{E} = 0$ . Но согласно теореме о циркуляции для любого контура  $\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$ . Полученное противоречие доказывает теорему.

Рис. 1.4.7. К доказательству второй теоремы Фарадея



Таким образом, на внутренней поверхности оболочки индуцированных зарядов нет, а поле в полости равно нулю. Этот вывод справедлив независимо от того, есть какие-либо заряды вне оболочки или их нет. Следовательно, проводящая оболочка полностью экранирует поле всех зарядов, находящихся вне оболочки.

#### 1.4.6. Проводящий шар в электрическом поле

Пусть металлический шар помещён во внешнее однородное электрическое поле  $\mathbf{E}_0$  (рис. 1.4.8). В соответствии с теоремой Фарадея поле внутри шара отсутствует:  $\mathbf{E}^{(i)} = 0$ . С другой стороны, это поле склады-

вается из внешнего поля  $E_0$  и поля  $E_{\text{инд}}$ , создаваемого индуцированными поверхностными зарядами:

$$E^{(i)} = E_0 + E_{\text{инд}} = 0.$$

Поскольку внешнее поле однородное, то и индуцированное поле  $E_{\text{инд}} = -E_0$  однородное.

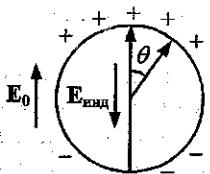


Рис. 1.4.8. Металлический шар во внешнем электрическом поле приобретает дипольный момент вследствие перераспределения зарядов по его поверхности

Как было показано в разделе 1.2.3, если заряды распределены по поверхности шара с плотностью  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ , то поле внутри шара однородное и равно

$$E_{\text{инд}} = -\frac{4\pi}{3} \sigma_0 n,$$

где  $n$  — единичный вектор, направленный по вектору  $E_0$  (рис. 1.4.8). Поскольку  $E_{\text{инд}} = -E_0$ , то

$$\sigma = +\sigma_0 \cos \theta, \quad \sigma_0 = \frac{3}{4\pi} E_0.$$

Согласно сказанному в 1.2.3, такое распределение заряда получается смещением шаров с плотностями зарядов соответственно  $+\rho$  и  $-\rho$  на такое расстояние  $\delta l$ , что  $\sigma_0 = \rho \delta l$ . Но в случае шара радиуса  $R$  это приводит к появлению дипольного момента

$$\mathbf{p} = \left( \rho \frac{4\pi}{3} R^3 \right) \delta l = \frac{4\pi}{3} \sigma_0 R^3 = R^3 E_0.$$

С учётом сказанного находим поле во внешнем пространстве:

$$E = E_0 + \frac{3(pr)r - pr^2}{r^5}.$$

## 1.5. Диэлектрики в электрическом поле

### 1.5.1. Определения

При помещении вещества в электрическое поле происходит пространственное перераспределение заряда.

*Свободные заряды* — это заряды, которые могут перемещаться на большие расстояния в веществе (много большие межатомных расстояний). В диэлектриках свободных зарядов, как правило, мало.

*Связанные (поляризационные) заряды* — это заряды, которые под действием внешних полей или сил мало смещаются относительно своего положения равновесия и возвращаются назад, в положение равновесия, после снятия внешнего воздействия.

*Диэлектриками* называют вещества, плохо проводящие электрический ток<sup>1</sup>. Их большое сопротивление связано с тем, что в них очень мало свободных зарядов. Связанные же заряды тока не производят.

*Микрополе*  $E_m$  — это результат сложения полей многих зарядов (покоящихся или движущихся). Это поле быстро меняется от точки к точке и во времени.

*Среднее поле*  $E$  — это результат усреднения микрополя по физически бесконечно малому объёму  $\Delta V$ :

$$E = \frac{1}{\Delta V} \int E_m dV. \quad (1.5.1)$$

Это поле меняется существенно медленнее, чем микрополе. При изучении среднего поля можно вводить объёмное распределение зарядов (с объёмной плотностью  $\rho = dq/dV$ ), учитывая отдельно заряды, локализованные на поверхности (с поверхностной плотностью  $\sigma = dq/dS$ ) или на нити (с линейной плотностью  $\tau = dq/dl$ ). Далее мы будем рассматривать только среднее поле.

### 1.5.2. Вектор поляризации

*Поляризация* — это пространственное перераспределение (смещение) связанных зарядов, приводящее к появлению объёмного дипольного момента среды. Поляризация может возникать как под действием электрических полей, так и при воздействии иных внешних факторов — механических усилий, изменения температуры.

*Вектор поляризации*  $P$  — это дипольный момент единицы объёма вещества.

Поляризация называется *однородной*, если вектор поляризации  $P$  является постоянным по объёму вещества:  $P = \text{const}$ , и *неоднородной*, если  $P$  меняется от точки к точке.

<sup>1</sup> Полупроводники при низких температурах тоже плохо проводят ток. Однако при повышении температуры их сопротивление уменьшается — в отличие от диэлектриков, сопротивление которых велико вплоть до высоких температур.

Найдём связь вектора поляризации с поляризационными зарядами.

### 1) Поверхностная плотность поляризационных зарядов

Пусть поляризация однородная. Рассмотрим косоугольный параллелепипед, вырезанный из поляризованного вещества (см. рис. 1.5.1). Если  $S$  — площадь боковой грани, а  $l$  — длина параллелепипеда, то его объём  $V = Sl \cos \theta = Sl$ .

Если на гранях параллелепипеда находятся поверхностные заряды с плотностью  $\sigma$  (рис. 1.5.1), то его дипольный момент составит  $\mathbf{p} = (\sigma S)\mathbf{l}$ , где  $\mathbf{l}$  — плечо диполя,  $S$  — площадь боковой грани параллелепипеда. Соответственно вектор поляризации окажется равным  $\mathbf{P} = \mathbf{p}/V$ .

Найдём проекцию вектора поляризации на нормаль к торцу параллелепипеда (т.е. проекцию  $\mathbf{P}$  на вектор площади торца  $\mathbf{S}$ ):

$$P_n = \frac{\mathbf{PS}}{S} = \frac{1}{S} \left( \frac{\sigma S \mathbf{l}}{Sl} \right) \mathbf{S} = \sigma. \quad (1.5.2)$$

Таким образом, имеем  $P_n = \sigma$ .

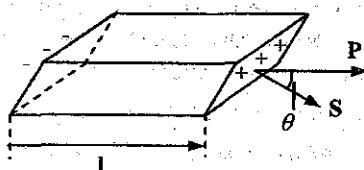


Рис. 1.5.1. К нахождению связи вектора поляризации с плотностью поляризационных зарядов

### 2) Объёмная плотность поляризационных зарядов

Пусть теперь поляризация неоднородная. Рассмотрим в веществе некоторый объём произвольной формы. Разобьем всю его поверхность на элементарные площадки. Если в результате поляризации на площадке  $d\mathbf{S}$  внешней поверхности оказывается заряд  $dq = \sigma d\mathbf{S}$ , то это можно интерпретировать так, что в объём через рассматриваемую площадку вошёл заряд  $(dq)_{\text{вх}} = -dq = -\sigma d\mathbf{S}$ . Тогда через всю поверхность в выделенный объём вещества вошёл поляризационный заряд

$$q_{\text{пол}} = - \oint_S \sigma d\mathbf{S} = - \oint_S P_n d\mathbf{S} = - \oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S}. \quad (1.5.3)$$

Преобразуя поверхностный интеграл в объёмный с помощью теоремы Остроградского-Гаусса, получаем

$$q_{\text{пол}} = - \int_V \operatorname{div} \mathbf{P} dV.$$

Если ввести объёмную плотность поляризационных зарядов по формуле  $q_{\text{пол}} = \int_V \rho_{\text{пол}} dV$ , то ввиду произвольности выбранного объёма находим

$$\rho_{\text{пол}} = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (1.5.4)$$

В частном случае однородной поляризации, когда  $\mathbf{P} = \text{const}$ , имеем  $\rho_{\text{пол}} = 0$ .

Найденную формулу можно получить, непосредственно рассматривая бесконечно малый элемент объёма. Именно, выберем прямоугольный параллелепипед со сторонами, направленными вдоль координатных осей  $\{x, y, z\}$  и имеющими длины соответственно  $dx, dy, dz$  (рис. 1.5.2). Учтём, что на торцах параллелепипеда  $P_n = \sigma$ . Это значит, что через площадку с координатой  $x + dx$  из объёма выйдет заряд

$$(dq_{\text{вых}})_x = \sigma(x + dx, y, z) dy dz = P_x(x + dx, y, z) dy dz,$$

а через площадку с координатой  $x$  в объём войдёт заряд

$$(dq_{\text{вх}})_x = -\sigma(x, y, z) dy dz = P_x(x, y, z) dy dz$$

(на этой грани  $P_n = -P_x$ , поскольку единичная нормаль к грани ориентирована противоположно оси  $x$ , и на ней  $\sigma(x) = -P_x$ ).

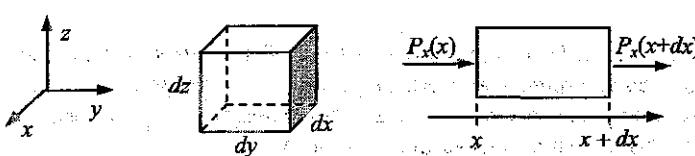


Рис. 1.5.2. К выводу связи вектора поляризации и объёмной плотности заряда

Итого, в результате поляризации в объём войдёт заряд

$$\begin{aligned} (dq)_x &= (dq_{\text{вх}})_x - (dq_{\text{вых}})_x = [P_x(x, y, z) - P_x(x + dx, y, z)] dy dz = \\ &= -\frac{\partial P_x}{\partial x} dx dy dz. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляется заряд, попавший в рассматриваемый объём через другие грани параллелепипеда. Таким образом, в объём войдёт суммарный поляризационный заряд

$$dq_{\text{пол}} = (dq)_x + (dq)_y + (dq)_z = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right) dx dy dz.$$

Поскольку объём параллелепипеда равен  $dV = dx dy dz$ , находим объёмную плотность поляризационных зарядов:

$$\rho_{\text{пол}} = dq_{\text{пол}} / dV = -\operatorname{div} \mathbf{P}.$$

### 1.5.3. Теорема Гаусса для электрического поля в диэлектриках

#### Теорема Гаусса

В общем случае в теореме Гаусса (в дифференциальной форме) следует учесть наличие не только свободных, но и связанных (поляризационных) зарядов:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi(\rho + \rho_{\text{пол}}), \quad (1.5.5)$$

где  $\rho$  — плотность свободных зарядов, а  $\rho_{\text{пол}}$  — плотность поляризационных зарядов. Учитывая равенство  $\rho_{\text{пол}} = -\operatorname{div} \mathbf{P}$ , получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi(\rho - \operatorname{div} \mathbf{P}).$$

Обозначим

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}. \quad (1.5.6)$$

Тогда теорема Гаусса примет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho. \quad (1.5.7)$$

Введённый в (1.5.6) вектор  $\mathbf{D}$  называется *вектором электрической индукции*.

Соотношение (1.5.7) представляет собой *теорему Гаусса для электрического поля в веществе в дифференциальной форме*.

Сформулируем теорему Гаусса в интегральной форме. Разделяя заряды на свободные и поляризационные, имеем

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi(q + q_{\text{пол}}); \quad q_{\text{пол}} = -\oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S}. \quad (1.5.8)$$

Вводя вектор электрической индукции соотношением (1.5.6), получаем

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = 4\pi q, \quad (1.5.9)$$

где  $q$  — суммарный свободный заряд, находящийся в объёме, ограниченном поверхностью  $S$ .

Таким образом, в формулировку теоремы Гаусса для поля в веществе входят только свободные заряды. Поляризационные же заряды учтены в определении вектора индукции  $\mathbf{D}$ .

### 1.5.4. Поляризуемость и диэлектрическая проницаемость среды

При относительно слабых внешних полях смещение поляризационных зарядов мало и пропорционально приложенному полю. Поэтому

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}. \quad (1.5.10)$$

Коэффициент  $\alpha$  называется *поляризуемостью среды*. Соответственно из определения вектора  $\mathbf{D}$  в (1.5.6) находим

$$\mathbf{D} = (1 + 4\pi\alpha)\mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}. \quad (1.5.11)$$

Введённая здесь величина

$$\epsilon = 1 + 4\pi\alpha \quad (1.5.12)$$

называется *диэлектрической проницаемостью* среды. Для случая постоянных электрических полей оказывается  $\alpha > 0$ ,  $\epsilon > 1$ .

Считая  $\epsilon = \text{const}$ , с учётом  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  перепишем теорему Гаусса:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \frac{\rho}{\epsilon}. \quad (1.5.13)$$

Отсюда, в частности, следует, что поле точечного заряда в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  равно

$$\mathbf{E} = \frac{q}{\epsilon r^3} \mathbf{r}. \quad (1.5.14)$$

Поскольку  $\epsilon > 1$ , то электростатическое поле, создаваемое в среде какой-либо системой зарядов, оказывается слабее поля, созданного той же системой зарядов в вакууме. Иными словами, поляризационные заряды приводят к ослаблению поля.

### 1.5.5. Границные условия

1) Применяя теорему Гаусса к бесконечно малому прямоугольному параллелепипеду, охватывающему часть границы раздела двух сред (рис. 1.5.3), имеем

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = 4\pi q \Rightarrow \mathbf{D}_1 d\mathbf{S}_1 + \mathbf{D}_2 d\mathbf{S}_2 = 4\pi\sigma dS.$$

Верхняя и нижняя грани параллелепипеда имеют одинаковые площади  $d\mathbf{S}_1 = d\mathbf{S}_2 = d\mathbf{S}$ , так что  $q = \sigma dS$ . Поскольку  $d\mathbf{S}_1 = -d\mathbf{S}_2 = n d\mathbf{S}$ , то  $(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2)n = 4\pi\sigma$ . Окончательно находим

$$D_{1n} - D_{2n} = 4\pi\sigma. \quad (1.5.15)$$

2) Применяя теорему о циркуляции к бесконечно малому контуру, проходящему над и под поверхностью раздела сред (рис. 1.5.4), получаем

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0 \Rightarrow \mathbf{E}_1 d\mathbf{l}_1 + \mathbf{E}_2 d\mathbf{l}_2 = 0, \quad L$$

Поскольку  $d\mathbf{l}_2 = -d\mathbf{l}_1$ ,  $d\mathbf{l}_1 = \tau d\mathbf{l}$ , то  $(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)\tau = 0$ . Отсюда находим

$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0. \quad (1.5.16)$$

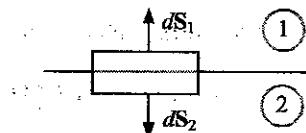


Рис. 1.5.3. Тонкий прямоугольный параллелепипед охватывает часть поверхности вещества

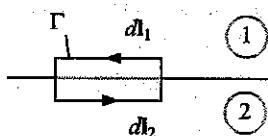


Рис. 1.5.4. Контур  $\Gamma$ , проходящий выше и ниже границы раздела сред

### 1.5.6. Электреты

Электреты — это диэлектрики, длительное время сохраняющие поляризацию после снятия внешнего поля.

Электреты можно изготовить, нагревая диэлектрик и подвергая его воздействию сильного поля  $E$ , так что полярные молекулы выстраиваются по полю. Если затем диэлектрик охладить, то поляризация вещества длительное время сохраняется, поскольку поворот молекул в затвердевшем веществе затруднён. В результате получают «замороженную» поляризацию. В других способах используют облучение диэлектрика радиацией, светом, помпажа: диэлектрик в сильное электрическое поле без нагревания или в магнитное поле, подвергая полимеры механической деформации и т.д.

### 1.5.7. Электрическое поле однородно поляризованного шара

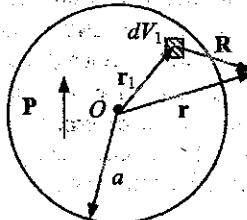
Пусть имеется шар радиуса  $a$ , изготовленный из электрета с однородной «замороженной» поляризацией  $P$  (рис. 1.5.5). Найдём непосредственным вычислением электрическое поле этого шара.

Поместим начало координат в центре шара  $O$ . Выберем элемент объёма шара  $dV_1$ . Его дипольный момент равен  $d\mathbf{p} = P dV_1$ . В точке наблюдения  $A$  он создаёт потенциал  $d\phi = d\mathbf{p}/R^3$ . В обозначениях рис. 1.5.5 радиус-вектор точки наблюдения относительно выбранного

элементарного диполя равен  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ , где  $\mathbf{r}_1$  — радиус-вектор самого диполя. Поэтому потенциал, создаваемый всеми частями шара, равен

$$\varphi = \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \mathbf{P}}{V |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} dV_1 = \mathbf{P} \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{E}_1 = \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{V |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} dV_1.$$

Рис. 1.5.5. К вычислению электрического поля однородно поларизованного шара в точке  $A$  посредством суммирования полей элементарных диполей, образующих шар



Введённый здесь вектор  $\mathbf{E}_1$  формально совпадает с напряжённостью электрического поля, созданного распределением зарядов с объёмной плотностью  $\rho = 1$ . Поэтому можно сразу записать

$$\mathbf{E}_1|_{r < a} = \frac{4\pi}{3} \mathbf{r}, \quad \mathbf{E}_1|_{r > a} = \frac{4\pi a^3}{3 r^3} \mathbf{r}.$$

Соответственно распределение потенциала даётся формулами

$$\varphi|_{r < a} = \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} \mathbf{r}, \quad \varphi|_{r > a} = \frac{4\pi a^3}{3 r^3} \mathbf{P} \mathbf{r} = \frac{\mathbf{P} \mathbf{r}}{r^3}. \quad (1.5.17)$$

Здесь  $\mathbf{p} = (4\pi a^3 / 3) \mathbf{P}$  — дипольный момент всего шара. Для напряжённости поля по формуле  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$  находим

$$\mathbf{E}|_{r < a} = -\frac{4\pi}{3} \mathbf{P}, \quad \mathbf{E}|_{r > a} = \frac{3(\mathbf{p} \mathbf{r}) \mathbf{r} - \mathbf{p} r^2}{r^5}. \quad (1.5.18)$$

Таким образом, поле внутри шара однородно, а вне шара совпадает с полем точечного диполя, находящегося в центре шара.

Что касается вектора электрической индукции  $\mathbf{D}$ , то вне шара он совпадает с вектором напряжённости

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} \text{ при } r > a,$$

а в объёме шара

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} = \frac{8\pi}{3} \mathbf{P} \text{ при } r < a. \quad (1.5.19)$$

К полученным результатам можно прийти, применив искусственный приём, использованный в разделе 1.2.3. Повторим те же рассуждения применительно к поставленной задаче.

Однородно поляризованный шар можно рассматривать как результат равномерного бесконечно малого смещения на  $\delta$  положительных зарядов относительно отрицательных в исходно электронейтральном шаре (рис. 1.5.6 слева). В результате такого смещения нескомпенсированными остаются заряды только вблизи поверхности шара.

Пусть  $r_+$  и  $r_-$  — радиус-векторы точки наблюдения относительно центров положительно и отрицательно заряженных шаров (рис. 1.5.6 справа). Поля, создаваемые в точке наблюдения этими шарами во внутренней области, равны

$$\mathbf{E}_+ = \frac{4}{3}\pi\rho\mathbf{r}_+, \quad \mathbf{E}_- = -\frac{4}{3}\pi\rho\mathbf{r}_-.$$

Здесь  $\rho$  и  $(-\rho)$  — плотности зарядов шаров. Полное поле в точке наблюдения есть

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{4}{3}\pi\rho(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-).$$

Как видно из рис. 1.5.6 справа,  $\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_- = -\delta\mathbf{l}$ . Вводя вектор поляризации  $\mathbf{P} = \rho\delta\mathbf{l}$ , получаем

$$\mathbf{E} = -\frac{4}{3}\pi\mathbf{P}.$$

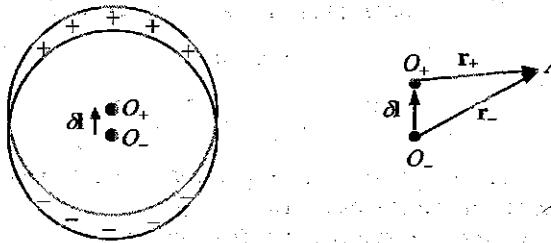


Рис. 1.5.6. Слева — смещение положительных зарядов относительно отрицательных на малое расстояние  $\delta$ .  $O_-$  и  $O_+$  — центры шаров соответственно с отрицательным и положительным зарядами; справа — радиус-векторы точки наблюдения  $A$  относительно центров положительно и отрицательно заряженных шаров

Вне шара поле совпадает с полем точечного диполя

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{pr})\mathbf{r} - \mathbf{pr}^2}{r^5}, \quad \mathbf{p} = Q\delta\mathbf{l}, \quad Q = \frac{4}{3}\pi\rho a^3,$$

поскольку поля от каждого из шаров во внешнем пространстве совпадают с полем точечного заряда. Величина же  $\delta$  есть плечо такого диполя.

В соответствии со свойством вектора поляризации поверхностная плотность зарядов на поляризованном шаре (рис. 1.5.7) равна

$$\sigma = P_n = P \cos \theta.$$

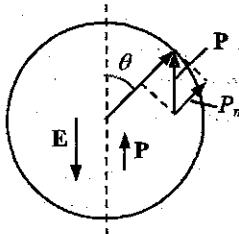
Связем эту величину с электрическим полем внутри шара. Поскольку

$$\mathbf{E} = -\frac{4\pi}{3}\mathbf{P}, \quad \text{то} \quad \sigma = -\frac{3}{4\pi}E \cos \theta \quad (\text{знак } \leftarrow \text{ учитывает тот факт, что внутри шара поле } \mathbf{E} \text{ направлено против вектора поляризации, что означает } E < 0).$$

### 1.5.8. Дизелектрический шар в однородном внешнем электрическом поле

Согласно теореме единственности электрическое поле однозначно определяется распределением свободных зарядов и значениями дизелектрической проницаемости во всех точках. Это означает, что если найти некоторое решение уравнений электростатики, удовлетворяющее всем граничным условиям, то это решение единственное. Применим сказанное к следующей задаче.

Рис. 1.5.7. К расчёту поверхностной плотности зарядов на однородно поляризованном шаре



Пусть незаряженный шар радиуса  $a$  из вещества с дизелектрической проницаемостью  $\epsilon$  внесён в однородное электрическое поле  $E_0$ . Требуется найти поле внутри и вне шара.

Формально задача сводится к решению уравнения Лапласа для потенциала  $\Delta\phi = 0$  с соответствующими граничными условиями на поверхности шара:

$$\phi^{(i)} \Big|_{r=a} = \phi^{(e)} \Big|_{r=a}, \quad \epsilon \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial r} \Big|_{r=a}, \quad (1.5.20)$$

где индексы  $i$  и  $e$  указывают на области соответственно внутри и вне шара. Второе условие означает непрерывность компоненты  $D_n$  вектора электрической индукции на границе раздела сред.

Помимо сформулированных условий нужно учесть, что на бесконечности поле должно совпадать с исходным внешним полем  $\mathbf{E}_0$ , которому соответствует потенциал  $\varphi_0 = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}$ :

$$\varphi|_{r \rightarrow \infty} = \varphi_0(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}. \quad (1.5.21)$$

Решение сформулированной задачи может быть получено применением методов математической физики. Мы, однако, поступим иначе. Учтём, что шар поляризуется, в результате чего полное поле будет складываться из внешнего поля  $\mathbf{E}_0$  и поля, создаваемого поляризационными зарядами. Проверкой убедимся, что поле вида

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r})|_{r < a} &= \mathbf{E}_0 - \frac{4\pi}{3} \mathbf{P}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r})|_{r > a} = \mathbf{E}_0 + \frac{3(\mathbf{pr})\mathbf{r} - \mathbf{pr}^2}{r^5}, \\ \mathbf{D}(\mathbf{r})|_{r < a} &= \mathbf{E}_0 + \frac{8\pi}{3} \mathbf{P}, \quad \mathbf{D}(\mathbf{r})|_{r > a} = \mathbf{E}_0 + \frac{3(\mathbf{pr})\mathbf{r} - \mathbf{pr}^2}{r^5}, \end{aligned} \quad (1.5.22)$$

где  $\mathbf{p} = 4\pi a^3 \mathbf{P}/3$ , удовлетворяет необходимым требованиям.

Поле (1.5.22) представляет собой суперпозицию внешнего поля и поля однородно поляризованного шара с поляризацией  $\mathbf{P}$ . Это поле удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0,$$

поскольку внутри шара оно постоянно, а во внутренней области совпадает с полем точечного диполя  $\mathbf{p}$ , расположенного в центре шара и потому потенциально. Поэтому нужно проверить выполнение граничных условий.

Из (1.5.22) видно, что на больших расстояниях от шара поле однородное и совпадает с внешним полем  $\mathbf{E}_0$ . Как и должно быть, поскольку поляризационные заряды не меняют поле на большом расстоянии от них.

На поверхности шара должны выполняться условия непрерывности составляющей напряжённости электрического поля, касательной к поверхности шара, а также непрерывности нормальной к поверхности шара составляющей индукции:

$$E_t^{(i)} = E_t^{(e)}, \quad D_n^{(i)} = D_n^{(e)}, \quad (1.5.23)$$

где индексы  $i$  и  $e$  относятся соответственно к внутренней и внешней сторонам поверхности шара. Этот набор условий эквивалентен условиям (1.5.20).

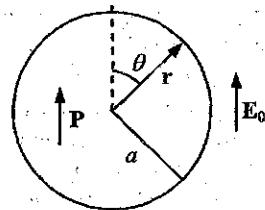
Используя обозначения рис. 1.5.8, можно увидеть, что с учётом выражений (1.5.22) граничные условия (1.5.23),

$$E_t^{(i)} = E_t^{(e)} \Rightarrow \left( E_0 - \frac{4\pi}{3} P \right) \sin \theta = \left( E_0 - \frac{P}{a^3} \right) \sin \theta,$$

$$D_n^{(i)} = D_n^{(e)} \Rightarrow \left( E_0 + \frac{8\pi}{3} P \right) \cos \theta = E_0 \cos \theta + \frac{3P \cos \theta}{a^3}$$

удовлетворяются тождественно. Отсюда следует, что согласно теореме единственности формулы (1.5.22) дают решение поставленной задачи.

Рис. 1.5.8. К формулировке граничных условий на поверхности диэлектрического шара во внешнем поле  $E_0$



Таким образом, поле внутри шара оказывается однородным. Найдём вектор поляризации шара, если известна диэлектрическая проницаемость материала. Учтём, что по определению вектора индукции и диэлектрической проницаемости

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} \Rightarrow (\varepsilon - 1)\mathbf{E} = 4\pi \mathbf{P}.$$

Подставим сюда выражение для поля  $\mathbf{E}|_{r < a}$  из (1.5.22):

$$(\varepsilon - 1) \left( E_0 - \frac{4\pi}{3} P \right) = 4\pi P,$$

или

$$P = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} E_0, \quad P = \frac{4\pi}{3} a^3 P = a^3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} E_0. \quad (1.5.24)$$

Наконец, подставляя найденное выражение для  $P$  в формулу для поля внутри шара, найдём

$$E = E_0 - \frac{4\pi}{3} P = \frac{3}{\varepsilon + 2} E_0. \quad (1.5.25)$$

### 1.5.9. Диэлектрическая проницаемость газа из металлических шариков

Найдём диэлектрическую проницаемость газа, образованного металлическими шариками радиуса  $a$ . Концентрацию шариков в газе  $n$  считаем малой:  $na^3 \ll 1$ . Взаимодействием частиц газа пренебрегаем.

Как показано в разделе 1.2.3, каждый шарик во внешнем поле  $\mathbf{E}$  приобретает дипольный момент  $\mathbf{p} = a^3 \mathbf{E}$ . Вектор поляризации газа  $\mathbf{P} = n\mathbf{p} = na^3 \mathbf{E}$ , а вектор электрической индукции  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \epsilon\mathbf{E}$ . Поэтому

$$\epsilon = 1 + 4\pi n a^3.$$

## 1.6. О механизмах поляризации диэлектриков

Можно выделить два основных механизма поляризации.

1) Если молекулы вещества имеют собственный дипольный момент, то под действием внешнего поля эти элементарные диполи начинают ориентироваться по направлению поля. Упорядочению препятствует тепловое движение, стремящееся разориентировать диполи. Конкуренция таких факторов определяет поляризацию среды в зависимости от величины приложенного поля и температуры. В данном случае говорят о веществе с *жёсткими диполями* или с *полярными молекулами*.

К веществам такого типа относятся  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{NH}_3$ ,  $\text{HCl}$ ,  $\text{SO}_2$ .

2) Если молекулы (атомы) среды не имеют собственного дипольного момента, то под действием внешнего поля заряды внутри молекулы могут смещаться относительно друг друга, приводя к появлению дипольного момента. В этом случае говорят о веществе, составленном из *упругих диполей*, или о веществе с *неполярными молекулами*.

К числу таких веществ относятся  $\text{N}_2$ ,  $\text{CO}_2$ ,  $\text{CH}_4$ ,  $\text{CCl}_4$ . К этому же типу относятся и вещества типа  $\text{NaCl}$ , кристаллическая решётка которых состоит из двух ионных подрешёток —  $\text{Na}$  и  $\text{Cl}$ . В отсутствие поля подрешётки вдавнуты друг в друга, и вещество не обладает дипольным моментом. Однако под действием внешнего поля происходит смещение подрешёток, приводящее к появлению дипольного момента (поляризации среды).

Поляризация вещества может возникать не только под действием электрического поля. Если она возникает в результате создания механических усилий, то вещество называют *пьезоэлектриком*. Это — кристаллические вещества, состоящие из подрешёток ионов разных знаков заряда. В таком веществе под действием внешних сил происходит относительное смещение подрешёток, что ведёт к появлению поляризации. Примером пьезоэлектрика является  $\text{SiO}_2$ .

Если поляризация возникает в результате нагрева твёрдого вещества, то говорят о *пироэлектриках*.

Наконец, в некоторых веществах может самопроизвольно (спонтанно) возникать поляризация, направление которой в общем случае

случайно. Такие вещества называются *сегнетоэлектриками*. Примерами являются сегнетова соль  $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$  и титанат бария  $\text{BaNiO}_3$ . У этих веществ спонтанная поляризация возникает при температуре ниже некоторой характерной величины  $T_K$ , называемой *температурой Кюри*. При  $T > T_K$  вещество ведёт себя как обычный диэлектрик с полярными молекулами, причём поляризуемость зависит от температуры по закону Кюри–Вейсса

$$\alpha \sim 1/(T - T_K).$$

Возникновение спонтанной поляризации связано с взаимодействием молекул-диполей, приводящим к их взаимному ориентирующему действию: случайное усиление поля в каком-либо месте вещества приводит к тому, что другие молекулы-диполи начинают ориентироваться по направлению возникшего поля. Это приводит к усилению поля и к выстраиванию в том же направлении других молекул-диполей. Возникновению спонтанной поляризации препятствуют тепловые движения (колебания) молекул, стремящиеся разориентировать отдельные диполи.

## 1.7. Электрическая ёмкость

### 1.7.1. Электрическая ёмкость уединённых проводников

Если проводник несёт заряд  $q$ , то его потенциал равен  $\varphi$ . Если заряд увеличить в  $k$  раз, то в силу принципа суперпозиции в  $k$  раз увеличится и работа по перемещению пробного заряда в поле проводника от его поверхности на бесконечность. Это значит, что в  $k$  раз возрастёт и потенциал. Следовательно, отношение  $\varphi/q$  не зависит от заряда проводника и характеризует сам проводник. Соответственно полагают

$$C = q/\varphi, \text{ или } q = C\varphi. \quad (1.7.1)$$

Введённая здесь величина  $C$  называется *ёмкостью* проводника.

Для шара радиуса  $a$  имеем

$$\varphi = q/\epsilon a \Rightarrow C = q/\varphi = \epsilon a.$$

### 1.7.2. Ёмкость конденсатора

Рассмотрим систему двух проводников (рис. 1.7.1). Нанесём на один проводник заряд  $(-q)$ , а на другой — заряд  $(+q)$ . Разность потенциалов проводников

$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$$

пропорциональна заряду  $q$ . Соответственно ёмкость (точнее — взаимная ёмкость) данной пары проводников определяется соотношением

$$C = q / \Delta\phi, \text{ или } q = C\Delta\phi = C(\phi_+ - \phi_-).$$



Рис. 1.7.1. Конденсатор, составленный из двух проводников, заряженных одинаковым по величине, но противоположным по знаку зарядом.

### 1.7.3. Ёмкость плоского конденсатора

*Плоский конденсатор* — это две близко расположенные плоские металлические пластины (рис. 1.7.2). Последнее означает, что поле внутри конденсатора однородное, а краевые эффекты (отклонения от однородности на краях конденсатора) слабо влияют на распределение зарядов и энергию, запасаемую в конденсаторе.

Если размеры пластин велики, то вне конденсатора поле практически отсутствует, а внутри оно почти всюду однородное с напряжённостью

$$E = 4\pi\sigma/\epsilon$$

(по  $2\pi\sigma/\epsilon$  от каждой пластины). Здесь  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды в конденсаторе,  $\sigma$  — поверхностная плотность зарядов,  $\sigma = q/S$ ,  $S$  — площадь одной пластины конденсатора.

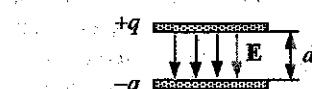


Рис. 1.7.2. Плоский конденсатор

Разность потенциалов пластин равна

$$\Delta\phi = \phi_+ - \phi_- = \int_{(-)}^{(+)} Edx = Ed = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} d = \frac{4\pi q}{\epsilon S} d.$$

Отсюда находим

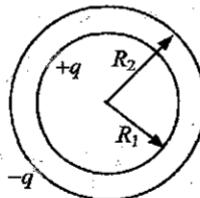
$$C = \frac{q}{\Delta\phi} = \frac{\epsilon S}{4\pi d}. \quad (1.7.2)$$

### 1.7.4. Ёмкость сферического конденсатора

*Сферический конденсатор* — это две концентрические проводящие сферы, из которых одна несёт положительный заряд, а другая — такой же, но отрицательный заряд (рис. 1.7.3). Пространство между сферами заполнено диэлектриком (с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ ).

По теореме Гаусса поле вне такого конденсатора равно нулю, поскольку суммарный заряд системы равен нулю, а система сферически симметрична.

Рис. 1.7.3. Сферический конденсатор — система из двух концентрических металлических сфер



Пусть радиус внутренней сферы  $R_1$ , а внешней  $R_2$ . Нанесём на внутреннюю сферу заряд  $(+q)$ , а на внешнюю  $(-q)$ . Тогда между обкладками такого конденсатора распределение потенциала при  $R_1 < r < R_2$  даётся формулой  $\phi(r) = q/\epsilon r$ . Разность потенциалов между обкладками оказывается равной

$$\Delta\phi = \phi_+ - \phi_- = \frac{q}{\epsilon R_1} - \frac{q}{\epsilon R_2}$$

Отсюда находим ёмкость:

$$C = \frac{q}{\Delta\phi} = \frac{\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (1.7.3)$$

В частном случае, когда расстояние между поверхностями мало,  $d = R_2 - R_1 \ll R_1, R_2$ , полученная формула переходит в формулу для ёмкости плоского конденсатора. Действительно, в этом пределе  $R_1 R_2 \approx R^2 = S/4\pi$ , где  $S$  — площадь одной обкладки конденсатора (площади обкладок мало отличаются друг от друга). Соответственно, получаем  $C \approx \epsilon S/4\pi d$ .

### 1.7.5. Ёмкость цилиндрического конденсатора

*Цилиндрической конденсатор* — это система из двух коаксиальных проводящих цилиндрических оболочек, между которыми находится диэлектрик (рис. 1.7.4).

Пусть радиус внутренней обкладки конденсатора равен  $a$ , а внешней —  $b$ . Длина конденсатора  $l$ . Нанесём на внутреннюю обкладку заряд  $(+q)$ , а на внешнюю  $(-q)$ . Индукцию электрического поля в пространстве между обкладками можно найти по теореме Гаусса, учитывая, что поле направлено по радиусу:

$$\oint D dS = 4\pi q \Rightarrow D \cdot 2\pi r l = 4\pi q \Rightarrow D = 2q/r l.$$

Напряжённость поля  $E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{2q}{\varepsilon l}$ , так что разность потенциалов между обкладками конденсатора оказывается равной

$$\varphi_+ - \varphi_- = \int_{(+)}^{(-)} E dr = \frac{2q}{\varepsilon l} \ln \frac{b}{a}.$$

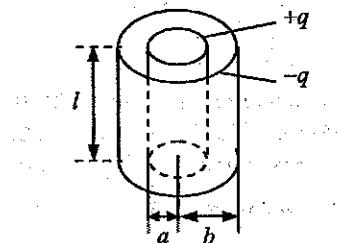


Рис. 1.7.4. Цилиндрический конденсатор — система из двух соосных металлических цилиндров

Отсюда находим ёмкость:

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon l}{2 \ln(b/a)}. \quad (1.7.4)$$

Можно ввести ёмкость единицы длины конденсатора:

$$C_1 = \frac{C}{l} = \frac{\varepsilon}{2 \ln(b/a)}.$$

В частном случае, когда расстояние между обкладками конденсатора мало,  $d = b - a \ll a, b$ , формула (1.7.4) переходит в формулу для ёмкости плоского конденсатора. Действительно, в пределе  $(b - a)/a \ll 1$  имеем

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln\left(1 + \frac{b-a}{a}\right) \approx \frac{b-a}{a} = \frac{d}{a}.$$

Таким образом, находим

$$C = \frac{\varepsilon l}{2 \ln(b/a)} = \frac{\varepsilon al}{2d} = \frac{\varepsilon S}{4\pi d},$$

где  $S = 2\pi al$  — площадь боковой поверхности (обкладки) конденсатора.

### 1.7.6. Ёмкость системы двух проводников

Найдём (взаимную) ёмкость системы из двух металлических тел (шаров), имеющих собственные ёмкости  $C_1$  и  $C_2$  и находящихся на рас-

стоянии  $d$  друг от друга, считая  $d \gg C_1, d \gg C_2$ . Последнее означает, что по отношению друг к другу шары могут считаться точечными.

Нанесём заряд  $+q$  на шар ёмкостью  $C_1$  и заряд  $-q$  на шар ёмкостью  $C_2$ . Запишем потенциалы шариков с учётом их взаимного влияния:

$$\varphi_1 = \frac{q}{C_1} - \frac{q}{d}, \quad \varphi_2 = -\frac{q}{C_2} + \frac{q}{d}.$$

Отсюда следует

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{2}{d} \right).$$

Соответственно находим (взаимную) ёмкость системы:

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{2}{d}} \approx \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \left( 1 + \frac{2C_1 C_2}{C_1 + C_2} \frac{1}{d} \right).$$

В частном случае, когда проводники, образующие конденсатор, являются шарами радиусов соответственно  $R_1$  и  $R_2$ , отсюда следует

$$C_1 = R_1, \quad C_2 = R_2, \quad C = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \left( 1 + \frac{2R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{d} \right).$$

## 1.8. Энергия электрического поля

### 1.8.1. Взаимная энергия зарядов

Чтобы сблизить два заряда  $q_1$  и  $q_2$  до расстояния  $r_{12}$ , нужно совершить работу против сил поля  $A_{12} = q_1 q_2 / r_{12}$ . Это значит, что рассматриваемая пара зарядов обладает энергией

$$U_{12} = q_1 q_2 / r_{12}.$$

Если имеется система зарядов  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ , то их *взаимная энергия* равна

$$U = \sum_{\substack{i, k \\ i < k}} \frac{q_i q_k}{r_{ik}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, k \\ i < k}} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}.$$

В первом равенстве суммирование производится только по *различным* парам. Например, в случае системы трёх зарядов  $\{q_1, q_2, q_3\}$  в сумму входят три слагаемых:

$$\frac{q_1 q_2}{r_{12}}, \quad \frac{q_1 q_3}{r_{13}}, \quad \frac{q_2 q_3}{r_{23}}.$$

Во втором равенстве суммирование выполняется уже по *всем* парам, включая повторяющиеся. В примере системы трёх зарядов в сумму входят шесть слагаемых:

$$\frac{q_1 q_2}{r_{12}}, \frac{q_2 q_1}{r_{21}}, \frac{q_1 q_3}{r_{13}}, \frac{q_3 q_1}{r_{31}}, \frac{q_2 q_3}{r_{23}}, \frac{q_3 q_2}{r_{32}}.$$

Это привело к появлению коэффициента  $(1/2)$  перед знаком суммы.

Поскольку потенциал поля в точке нахождения  $i$ -го заряда, создаваемый всеми зарядами, кроме  $i$ -го, равен

$$\varphi_i = \sum_{k, k \neq i} \frac{q_k}{r_{ik}},$$

то потенциальная энергия всей системы зарядов оказывается равной

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i \left( \sum_{k, k \neq i} \frac{q_k}{r_{ik}} \right) = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i \quad (1.8.1)$$

(начало отсчёта потенциала выбрано в бесконечно удалённой точке, т.е.  $\varphi|_{r \rightarrow \infty} = 0$ ).

Если заряды непрерывно распределены в пространстве с объёмной плотностью  $\rho(\mathbf{r})$ , а также по поверхностям — с поверхностной плотностью  $\sigma(\mathbf{r})$ , то вместо (1.8.1) для энергии этой системы будем иметь выражение

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) dS. \quad (1.8.2)$$

### 1.8.2. Примеры

При нахождении энергии системы зарядов следует иметь в виду, что энергии является функцией состояния и не зависит от того, в каком процессе это состояние получено.

#### 1) Шар, равномерно заряженный по поверхности

Пусть шар радиуса  $R$  несёт полный заряд  $Q$ , равномерно распределенный по поверхности. Для нахождения его энергии будем небольшими порциями переносить заряд из бесконечности и высаживать на поверхности шара. Каждая новая порция перемещается в поле уже имеющихся на шаре зарядов. Если шар уже несёт заряд  $q$ , то при переносе порции  $dq$  совершается работа против сил поля  $dA = dU = \varphi dq$ , где  $\varphi = q/R$  — потенциал шара. Следовательно,

$$U = \int_0^R \frac{q}{R} dq = \frac{Q^2}{2R}. \quad (1.8.3)$$

Этот же результат можно получить из формулы (1.8.2), в которой следует положить  $\rho = 0$ ,  $\sigma = Q/4\pi R^2$ ,  $\phi = Q/R$ :

$$U = \frac{1}{2} \int_S \sigma(r) \phi(r) dS = \frac{1}{2} \sigma \phi S = \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \frac{Q}{R} \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q^2}{2R}.$$

## 2) Шар, равномерно заряженный по объёму

Для расчёта энергии равномерно заряженного шара будем переносить из бесконечности заряд порциями  $dq$  и высаживать в сферическом слое  $r + dr$ :

$$dU = \phi dq = \frac{q(r)}{r} dq.$$

Здесь  $q(r)$  — заряд, накопленный в шаре радиуса  $r$ . Поскольку объёмная плотность заряда должна быть постоянной, то

$$q(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho, \quad dq = 4\pi r^2 dr \cdot \rho.$$

С учётом этих выражений находим

$$U = \int_{r=0}^R \frac{q(r)}{r} dq = \int_{r=0}^R \frac{(4\pi)^2 \rho^2}{3} r^4 dr = \frac{16\pi^2 \rho^2}{15} R^5 = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{R}.$$

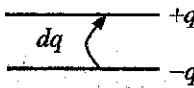
В последнем равенстве учтено, что полный заряд шара равен

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho.$$

## 1.8.3. Энергия электрического поля в конденсаторе

Рассмотрим плоский конденсатор (рис. 1.8.1). Пусть площадь одной из его пластин равна  $S$ , а расстояние между пластинами  $d$ .

Рис. 1.8.1. Зарядка конденсатора  
посредством переноса заряда  
с нижней пластины на верхнюю



Работа по переносу заряда  $dq$  с нижней пластины на верхнюю равна  $dU = \phi dq$ , где  $\phi$  — разность потенциалов пластин.

Поскольку  $\phi = q/C$  ( $C$  — ёмкость конденсатора), то при накоплении заряда  $(+q)$  на верхней пластине конденсатора и  $(-q)$  — на нижней энергия будет равна

$$dU = \frac{q dq}{C} \Rightarrow U = \frac{q^2}{2C}$$

Используя связь  $q = C\phi$ , перепишем полученную формулу в следующих эквивалентных формах:

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} q\phi = \frac{C\phi^2}{2}. \quad (1.8.4)$$

Преобразуем последнее выражение. Поскольку в конденсаторе поле однородное, то

$$\phi = Ed, \quad q = C\phi, \quad C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}.$$

Соответственно для энергии конденсатора получаем:

$$U = \frac{1}{2} C\phi^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon S}{4\pi d} (Ed)^2 = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} V, \quad (1.8.5)$$

где  $V = Sd$  — объём конденсатора. Плотность энергии равна

$$u = \frac{U}{V} = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} = \frac{ED}{8\pi} = \frac{D^2}{8\pi\epsilon}.$$

Имея в виду связь индукции и напряжённости поля  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ , запишем выражение для плотности энергии в трёх эквивалентных формах:

$$u = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} = \frac{ED}{8\pi} = \frac{D^2}{8\pi\epsilon}. \quad (1.8.6)$$

В общем случае  $\mathbf{D} \neq \epsilon \mathbf{E}$ , так что расчёт нуждается в уточнении. Рассмотрим, как и выше, плоский конденсатор. Изменение поля в нём обусловлено изменением заряда пластин, причём  $dU = \phi \delta q$ . В конденсаторе поле однородное, так что  $\phi = Ed$ . Заряды на пластинах свободные и по теореме Гаусса определяют индукцию поля:

$$D = 4\pi\sigma = \frac{4\pi q}{S}.$$

Отсюда следует  $\delta D = \frac{4\pi}{S} \delta q$ , или  $\delta q = \frac{S}{4\pi} \delta D$ . Соответственно находим изменение энергии:

$$\delta U = \phi \delta q = (Ed) \frac{S}{4\pi} \delta D = \frac{E \delta D}{4\pi} V,$$

где  $V = Sd$  — объём конденсатора.

Таким образом, при пространственном перераспределении свободных зарядов и соответствующем изменении индукции поля на  $\delta\mathbf{D}$  плотность энергии поля меняется на

$$\delta u = \frac{\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D}}{4\pi}. \quad (1.8.7)$$

В этой формуле не подразумевается какая-либо заранее определённая связь  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ , и она применима, например, для расчёта энергий поля при наличии электретов или веществ с сложной связью  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ . Для линейных же сред, в которых  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ,  $\epsilon = \text{const}$ , отсюда следует обычное выражение:  $u = \epsilon E^2 / 8\pi$ .

Таким образом, энергия конденсатора выражена через характеристики поля (а не заряды), что позволяет дать новую интерпретацию результата. Переносчиком взаимодействия зарядов является электрическое поле, так что оно же является носителем энергии, передаёт энергию от одного заряда к другому. Электрическое поле присутствует только в объёме конденсатора, так что и его энергия локализована в тех областях пространства, где присутствует поле.

#### 1.8.4. Энергия электрического поля (общий вывод)

Выше мы получили формулу для энергии электрического поля для частного случая, когда поле однородно и локализовано в конденсаторе. Приведём теперь более общий вывод. Исходим из выражения для вариации энергии системы зарядов:

$$\delta U = \frac{1}{2} \int \delta\rho(\mathbf{r}) \cdot \phi(\mathbf{r}) dV. \quad (1.8.8)$$

Здесь  $\delta\rho$  — изменение объёмной плотности свободных зарядов. Тогда по теореме Гаусса имеем

$$\delta\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \delta\mathbf{D}.$$

Подставим это выражение в (1.8.8):

$$\delta U = \frac{1}{8\pi} \int \phi \operatorname{div} \delta\mathbf{D} dV = \frac{1}{8\pi} \int [\operatorname{div}(\phi \delta\mathbf{D}) - \delta\mathbf{D} \cdot \operatorname{grad} \phi] dV. \quad (1.8.9)$$

Интегрирование распространено на всё бесконечное пространство. Но на большом расстоянии от системы зарядов поле обращается в нуль. Поэтому, преобразуя первое слагаемое в правой части с помощью теоремы Гаусса, получаем

$$\int_{S_\infty} \operatorname{div}(\phi \delta\mathbf{D}) dS = \oint_{S_\infty} (\phi \delta\mathbf{D}) d\mathbf{S} = 0,$$

где  $S_\infty$  — замкнутая бесконечно удалённая поверхность.

Во втором слагаемом в (1.8.9) учтём связь потенциала и напряжённости поля:  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ . Таким образом, приходим к формуле

$$\delta U = \int \frac{\mathbf{E} \delta \mathbf{D}}{8\pi} dV, \quad (1.8.10)$$

совпадающей с той, что была получена для случая плоского конденсатора, но свободная от использовавшихся ранее ограничений.

### 1.8.5. Энергия поля в вакууме и в среде

Если поле с напряжённостью  $\mathbf{E}$  создаётся в вакууме, то плотность энергии равна  $u^{(0)} = E^2/8\pi$ . Если поле с той же напряжённостью  $\mathbf{E}$  создаётся в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , то энергия равна  $u = \epsilon E^2/2$ . Отличие  $u$  от  $u^{(0)}$  связано с тем, что в веществе, помимо самого поля, производится работа по созданию поляризации среды. Покажем это на примере среды, молекулы которой представляют собой упругие диполи.

Под действием электрического поля молекулы приобретают дипольный момент  $\mathbf{p} = \beta \mathbf{E}$ , где  $\beta$  — поляризуемость молекулы. Если в единице объёма вещества содержится  $n$  молекул, то вектор поляризации окажется равным  $\mathbf{P} = n\mathbf{p}$ . Поскольку энергия деформации одной молекулы равна  $u_{\text{дeф}}^{(1)} = \mathbf{p}\mathbf{E}/2$ , то для молекул в единице объёма среды энергия есть

$$u_{\text{дeф}} = n \frac{\mathbf{p}\mathbf{E}}{2} = \frac{\mathbf{P}\mathbf{E}}{2}.$$

Складывая эту энергию с энергией собственно поля, находим

$$u = u_{\text{эл}} + u_{\text{дeф}} = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{\mathbf{P}\mathbf{E}}{2} = \frac{\mathbf{E}(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P})}{8\pi} = \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{8\pi}.$$

Это совпадает с выражением, полученным ранее без конкретизации механизма поляризации.

### 1.8.6. Собственная и взаимная энергия зарядов

В разделе 1.8.1 была найдена взаимная энергия системы зарядов:

$$U_q = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k \\ i \neq k}} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}. \quad (1.8.11)$$

Перейдя к полям, мы получили другое выражение для энергии. В частности, в вакууме

$$U_E = \int \frac{E^2}{8\pi} dV. \quad (1.8.12)$$

Между этими выражениями имеется противоречие. Дело в том, что величина, даваемая формулой (1.8.11), может быть как положительной, так и отрицательной. Например, для системы двух частиц  $U = q_1 q_2 / r_{12}$ , и для частиц с зарядами одного знака  $U > 0$ , а для частиц с зарядами разного знака  $U < 0$ . В то же время формула (1.8.12) даёт значение энергии всегда положительное, поскольку содержит интеграл от неотрицательной величины.

Причина отмеченного противоречия состоит в том, что при переходе от представления (1.8.11) к (1.8.12) мы включили в полную энергию часть, представляющую собой *собственную энергию зарядов*. Поясним сказанное. Пусть система состоит из двух зарядов  $q_1$  и  $q_2$ . Заряд  $q_1$  создаёт электрическое поле  $\mathbf{E}_1$ , и его *собственная* энергия равна

$$U_1 = \int \frac{E_1^2}{8\pi} dV.$$

Точно так же заряд  $q_2$  обладает собственной энергией

$$U_2 = \int \frac{E_2^2}{8\pi} dV.$$

Система зарядов создаёт поле  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ , несущее энергию

$$U = \int \frac{E^2}{8\pi} dV = \int \frac{(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2}{8\pi} dV = U_{\text{собст}} + U_{\text{вз}}$$

Эта энергия включает, наряду с собственной энергией зарядов

$$U_{\text{собст}} = U_1 + U_2 = U_1 = \int \frac{E_1^2}{8\pi} dV + \int \frac{E_2^2}{8\pi} dV, \quad (1.8.13)$$

также их взаимную энергию

$$U_{\text{вз}} = \int \frac{\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2}{4\pi} dV. \quad (1.8.14)$$

Она соответствует величине (1.8.11), причём в зависимости от взаимной ориентации полей зарядов она может быть как положительной, так и отрицательной.

Когда говорят о собственной энергии зарядов, то имеют в виду, что они в конкретной задаче являются *неделимыми*, так что  $U_{\text{собст}}$  представляет собой постоянную величину, которую можно не учитывать,

изменив начальный уровень отсчёта энергии. Поскольку при выводе формулы (1.8.12) заряды считались неограниченно делимыми, в полную энергию вошла и та часть, которая является их собственной энергией.

### 1.8.7. Энергетический метод вычисления сил в электрическом поле

Будем рассматривать действие сил поля в условиях, когда температура среды неизменна:

$$T = \text{const.}$$

В этом случае выражение

$$\Delta F = \frac{\mathbf{ED}}{8\pi} V$$

определяет свободную энергию в объёме  $V$ , связанную с полем.

Одним из эффективных приёмов расчёта сил является метод виртуальных перемещений, в котором вычисляется работа сил поля  $\delta A = f \delta x$  при бесконечно малом смещении  $\delta x$ , после чего сила находится из равенства  $f = \delta A / \delta x$ .

Рассмотрим сперва два метода нахождения работы.

1) Пусть на проводниках поддерживаются постоянными заряды:  $q = \text{const}$ , т.е. нет внешних источников энергии. Тогда работа сил поля происходит за счёт энергии поля:

$$(\delta A)_{\text{эл}} = \mathbf{f} \delta \mathbf{r} = -(dF)_{q, T}. \quad (1.8.15)$$

Рассмотрим в качестве примера конденсатор. Изменение свободной энергии связано с изменением ёмкости:

$$F = \frac{q^2}{2C}, \quad (dF)_{q, T} = \frac{q^2}{2} \delta \left( \frac{1}{C} \right) = -\frac{q^2}{2C^2} \delta C = -\frac{1}{2} \varphi^2 \delta C. \quad (1.8.16)$$

Учтено, что  $\varphi = q/C$ . Из (1.8.15) следует, что

$$(\delta A)_{\text{эл}} = \frac{1}{2} \varphi^2 \delta C.$$

2) Пусть теперь на проводниках поддерживаются постоянными потенциалы:  $\varphi = \text{const}$ . С этой целью в систему включены батареи ЭДС, поставляющие заряды и расходующие энергию на совершение работы.

Рассмотрим конденсатор в цепи, содержащей ЭДС (рис. 1.8.2). В этом случае для свободной энергии имеем выражение

$$F = \frac{C\phi^2}{2} \Rightarrow (dF)_{\phi,T} = \frac{\phi^2}{2} \delta C. \quad (1.8.17)$$

Сравнение с (1.8.16) показывает, что

$$(dF)_{\phi,T} = -(dF)_{q,T}. \quad (1.8.18)$$

Рис. 1.8.2. Конденсатор подключён к источнику энергии внешней ЭДС, поддерживающей постоянные потенциалы пластин



Отличие рассмотренных случаев состоит в том, что во второй ситуации дополнительная работа совершается батареей ЭДС. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Поставка заряда от батареи равна  $\delta q = \delta(C\phi) = \phi\delta C$ . Соответственно работа батареи оказывается равной  $\delta A = \phi\delta q = \phi^2\delta C$ . По закону сохранения энергии

$$(\delta A)_{\text{бат.}} = (dF)_{\phi,T} + (\delta A)_{\text{эл.}}$$

или

$$(\delta A)_{\text{эл.}} = (\delta A)_{\text{бат.}} - (dF)_{\phi,T} = \phi^2\delta C - \frac{1}{2}\phi^2\delta C = \frac{1}{2}\phi^2\delta C = (dF)_{\phi,T}.$$

Итого, находим работу сил электрического поля:

$$(\delta A)_{\text{эл.}} = -(dF)_{q,T} = (dF)_{\phi,T} = \frac{1}{2}\phi^2\delta C.$$

Имея в виду сказанное, рассмотрим теперь два примера вычисления сил.

**Пример 1.** Найдём силу притяжения пластин заряженного конденсатора (рис. 1.8.3).

В условиях, когда пластины конденсатора неподвижны, сила их притяжения определяется только величиной заряда на них и не зависит от способа вычисления — в предположении о постоянстве зарядов или потенциалов.

Пусть сначала  $q = \text{const}$ . Тогда потенциал и напряжённость поля равны соответственно

$$\phi = q/C, E = \phi/d$$

(в объёме конденсатора поле практически однородно). При виртуальном перемещении верхней пластины на  $\delta x$  работа сил поля равна

$$(\delta A)_{\text{пл.}} = f \delta x = -(dF)_{q,T} = \frac{1}{2} \varphi^2 \delta C. \quad (1.8.19)$$

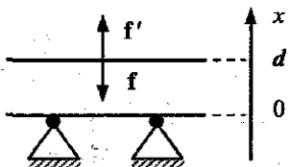


Рис. 1.8.3. Внешняя сила  $f'$  уравновешивает силу притяжения  $f$  верхней пластины к нижней (закреплённой).

Поскольку ёмкость конденсатора равна  $C = \epsilon S / 4\pi x$ , где  $x$  — расстояние между пластинами, то

$$\delta C = -\frac{\epsilon S}{4\pi x^2} \delta x = -\frac{C}{x} \delta x \Rightarrow f \delta x = -\frac{1}{2} \varphi^2 \frac{C}{x} \delta x.$$

Полагая  $x = d$ , находим

$$f = -\frac{1}{2d} C \varphi^2 = -\frac{1}{2d} \frac{\epsilon S}{4\pi d} (Ed)^2 = -\frac{\epsilon E^2}{8\pi} S. \quad (1.8.20)$$

Знак «минус» свидетельствует о том, что пластины притягиваются друг к другу.

Если проводить расчёт в предположении о постоянстве потенциалов пластин:  $\varphi = \text{const}$ , то

$$(\delta A)_{\text{пл.}} = f dx = (dF)_{\varphi,T} = \frac{1}{2} \varphi^2 \delta C.$$

Дальнейший расчёт в точности такой же, как и в предположении  $q = \text{const}$ , и приводит к тому же результату (1.8.20).

**Пример 2.** Найдём силу, с которой пластина из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  втягивается в конденсатор (рис. 1.8.4.). Будем предполагать, что толщина диэлектрической пластины равна расстоянию между пластинами конденсатора.

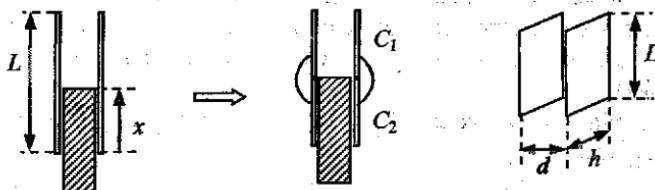


Рис. 1.8.4. Слева — конденсатор, в который частично вдвинута диэлектрическая пластина, заменяется системой двух параллельно соединённых конденсаторов; справа — размеры конденсатора.

Заменим конденсатор с частично вдвинутой в него пластиной диэлектрика, двумя параллельно соединёнными конденсаторами, из которых один — вакуумный, а другой заполнен диэлектриком.

Ёмкость системы из двух параллельно соединённых конденсаторов равна

$$C = C_1 + C_2, \quad C_1 = \frac{S_1}{4\pi d}, \quad C_2 = \frac{\varepsilon S_2}{4\pi d}.$$

Суммарная площадь пластин конденсаторов неизменна, и можно записать

$$S_1 + S_2 = S, \quad S_1 = (1 - \nu)S, \quad S_2 = \nu S, \quad \nu = \frac{x}{L}, \quad S = Lh.$$

Следовательно,

$$C = \frac{S}{4\pi d} [(1 - \nu) + \varepsilon \nu] = \frac{S}{4\pi d} \left[ 1 + (\varepsilon - 1) \frac{x}{L} \right].$$

При фиксированных зарядах на пластинах энергия, запасённая в конденсаторе, равна  $U = q^2/2C$ . На основании соотношения  $(\delta A)_{\text{эл}} = -(dF)_q$  находим силу, действующую на диэлектрическую пластину:

$$f = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial x}.$$

Имеем

$$\frac{\partial U}{\partial C} = -\frac{q^2}{2C^2}, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{S}{4\pi d} (\varepsilon - 1) \frac{1}{L},$$

так что

$$f = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{q^2}{2C^2} \frac{(\varepsilon - 1)S}{4\pi L d}.$$

Перейдём от заряда на пластинах к напряжённости поля:  $q = C\phi = CEd$ . Имея в виду, что площадь пластины конденсатора  $S = hL$  (рис. 1.8.4 справа), находим

$$f = \frac{(\varepsilon - 1)E^2}{8\pi} \frac{Sd}{L} = \frac{(\varepsilon - 1)E^2}{8\pi} hd, \quad f_1 = \frac{f}{S_{\text{пл}}} = \frac{(\varepsilon - 1)E^2}{8\pi}.$$

Величина  $S_{\text{пл}} = hd$  есть площадь поперечного сечения диэлектрической пластины. Поскольку  $\varepsilon > 1$ , то  $f > 0$ . Это значит, что пластина втягивается в конденсатор.

## Глава 2. ПОСТОЯННЫЙ ТОК

### 2.1. Основные определения

#### 2.1.1. Сила и плотность тока

*Электрический ток* — это упорядоченное движение зарядов (электронов и ионов).

*Постоянный ток* — это неизменное во времени движение зарядов.

Пусть ток течёт по проводнику. Тогда *силой тока* (или, кратко, *током*) называется количество заряда, переносимого через сечение проводника за единицу времени:  $[A] = \text{заряд}/\text{с}$ .

Аналогично определяется сила тока в пучке заряженных частиц (ионов или электронов).

*Плотностью тока* называется количество заряда, переносимого за единицу времени через единичную площадку.

Пусть  $n$  — число носителей с зарядом  $e$  в единице объёма. Тогда величина  $\rho = en$  есть объёмная плотность заряда.

Выделим малый объём. Пусть в нём находится  $N$  носителей. Их средняя скорость равна

$$\mathbf{u} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i, \quad (2.1.1)$$

где суммирование производится по всем частицам в рассматриваемом объёме. Величина (2.1.1) называется также *дрейфовой скоростью*.

Возьмём площадку  $dS$  на пути носителей, перпендикулярную дрейфовой скорости. За время  $dt$  эту площадку пересекут носители, находящиеся в цилиндре объёмом  $dV = u dt dS$  (рис. 2.1.1). Их число равно  $dN = n u dt dS$ , а перенесут они суммарный заряд

$$dq = en u dt dS = \rho u dt dS.$$

За единицу времени через единичную площадку пройдёт заряд

$$j = \frac{en u dt dS}{dt dS} = enu = \rho u.$$

Мы получили выражение для плотности тока:  $j = \rho u$ . В векторном виде оно записывается следующим образом:

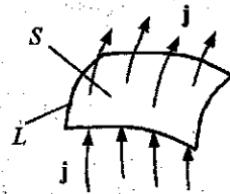
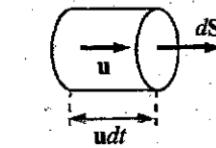
$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{u}. \quad (2.1.2)$$

Рис. 2.1.1. К определению плотности тока. Заряд, имеющий среднюю скорость  $u$  и находящийся в цилиндре длиной  $udt$ , пересекает площадку  $dS$  за время  $dt$

Пусть имеется некоторая поверхность  $S$  (рис. 2.1.2), опирающаяся на контур  $L$ . Тогда полный ток, текущий через эту поверхность, выражается через плотность тока формулой

$$J = \int_S j dS.$$

Рис. 2.1.2. Ток с плотностью  $j$  течёт через поверхность  $S$ , опирающуюся на контур  $L$



Если в системе присутствуют носители разного типа (электроны, ионы с различными зарядами), то плотность тока складывается из плотностей тока каждой из компонент системы:

$$\mathbf{j} = \sum_i e_i n_i \mathbf{u}_i = \sum_i \mathbf{j}_i.$$

Рис. 2.1.3. К определению линейной плотности тока



Если ток течёт по поверхности (рис. 2.1.3), то удобно вводить *линейную плотность тока*: так называется заряд, пересекающий участок контура единичной длины за единицу времени, т.е. ток в расчёте на единицу длины пересекаемого им контура,

$$i = dJ/dl.$$

## 2.1.2. Закон сохранения заряда и уравнение непрерывности

Выберем некоторую (произвольную) замкнутую поверхность  $S(V)$ . Эта поверхность ограничивает объём  $V$ . Через площадку  $dS$  рассматриваемой поверхности за единицу времени переносится заряд  $\int j dS$ , а через всю поверхность из объёма  $V$  уходит заряд  $\oint j dS$ . Если в объёме

$V$  находится заряд  $Q$ , то этот же интеграл даёт скорость убыли этого заряда:

$$-\frac{dQ}{dt} = \oint_S j dS.$$

Полученное соотношение выражает **закон сохранения заряда** (в интегральной форме): заряды не исчезают и не рождаются, но только могут со временем перераспределяться в пространстве.

Полный заряд в объёме  $V$  равен  $Q = \int_V \rho dV$ . Поэтому

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \oint_{S(V)} j dS = \int_V \operatorname{div} j dV.$$

Второе равенство есть результат преобразования поверхностного интеграла в интеграл по объёму на основании теоремы Остроградского-Гаусса. Отсюда ввиду произвольности выбранного объёма  $V$  заключаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0. \quad (2.1.3)$$

Это соотношение называется **законом сохранения заряда в дифференциальной форме** или **уравнением непрерывности**.

В стационарном случае, когда  $\partial \rho / \partial t = 0$ , уравнение непрерывности принимает вид

$$\operatorname{div} j = 0.$$

Соответственно для интегральной формы получаем

$$\oint_S j dS = 0.$$

Данное равенство означает, что из объёма, ограниченного замкнутой поверхностью  $S$ , вытекает точно такое же количество заряда, какое в этот объём втекает.

## 2.2. Закон Ома и его следствия

### 2.2.1. Закон Ома

Георг Ом в 1827 году экспериментально установил, что сила тока  $J$ , текущего по однородному металлическому проводнику, в котором не действуют сторонние силы, пропорциональна напряжению  $U$  на концах проводника:

$$J = U/R.$$

Обобщение этого закона даётся в двух формах: дифференциальной (локальной) и интегральной.

#### 1) Дифференциальная форма

Опыт показывает, что для многих тел (проводников) в широких пределах плотность тока в веществе пропорциональна напряжённости электрического поля:

$$j = \lambda E, \quad (2.2.1)$$

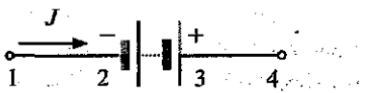
где  $\lambda$  — проводимость среды. Величина  $\rho_c = 1/\lambda$  называется *удельным сопротивлением*.

При наличии сторонних сил вводится эффективная напряжённость поля этих сил:  $E_{\text{стор}} = F_{\text{стор}}/e$ , после чего закон Ома записывается в виде

$$j = \lambda(E + E_{\text{стор}}).$$

2) Интегральная форма. Рассмотрим участок цепи, содержащий источник ЭДС и проводящие участки с удельным сопротивлением  $\lambda$  (рис. 2.2.1).

Рис. 2.2.1. Участок цепи, включающий ЭДС и проводящие элементы



Пусть  $S$  — площадь поперечного сечения проводника. Тогда полный ток равен

$$J = jS, \quad j = \lambda(E + E_{\text{стор}}),$$

или

$$E + E_{\text{стор}} = \frac{j}{\lambda} = \frac{J}{\lambda S}.$$

Проинтегрируем это равенство по всему рассматриваемому участку цепи от точки 1 до точки 4, предполагая, что ток во всех участках цепи одинаков:

$$\int_{(1)}^{(4)} (E + E_{\text{стор}}) dl = J \int_{(1)}^{(4)} \frac{dl}{\lambda S}.$$

Введём обозначение

$$R = \int_{(1)}^{(4)} \frac{dl}{\lambda S} \quad (2.2.2)$$

для полного сопротивления рассматриваемого участка. Если удельное сопротивление  $\lambda$  и поперечное сечение  $S$  постоянны по всей длине проводника, то  $R = l/\lambda S = \rho_c l/S$ .

Далее учтём, что  $\int_{(1)}^{(4)} Edl = \varphi_1 - \varphi_4$ . Введём электродвижущую силу

(ЭДС) — источника сторонней силы:

$$\int_{(1)}^{(4)} E_{\text{стор}} dl = \mathcal{E}. \quad (2.2.3)$$

Здесь используется следующее правило знаков:

$\mathcal{E} > 0$  — при прохождении источника в направлении от «—» к «+»;

$\mathcal{E} < 0$  — при прохождении источника в направлении от «+» к «—».

В итоге приходим к закону Ома в интегральной форме для участка цепи:

$$\varphi_1 - \varphi_4 + \mathcal{E} = JR. \quad (2.2.4)$$

Если участок цепи замкнутый, т.е. точки 1 и 4 совпадают, то закон Ома принимает вид

$$\mathcal{E} = JR. \quad (2.2.5)$$

### 2.2.2. Теория проводимости (теория Друде)

В 1900 году Пауль Друде предложил простую теорию, объясняющую проводимость различных веществ. Она основана на представлении о дискретности заряда. Ввиду простоты и наглядности эта теория применяется для различных оценок до настоящего времени.

Рассмотрим движение электрона в постоянном однородном поле  $E$ . Уравнение движения имеет вид  $ma = eE$  или  $a = eE/m$ . Если начальная скорость электрона была нулевой, то до столкновения с рассеивающим центром она меняется по закону  $v = at = (eE/m)t$ . После столкновения скорость обращается в среднем в нуль, и начинается новый цикл ускорения. Если время свободного пробега равно  $\tau$ , то средняя скорость

упорядоченного движения электрона от столкновения до столкновения составит

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{v}} = \frac{e\mathbf{E}}{2m}\tau.$$

Отсюда находим плотность тока:

$$\mathbf{j} = ne\mathbf{u} = \frac{ne^2\tau}{2m}\mathbf{E} = \lambda\mathbf{E}.$$

Таким образом, мы получили закон Ома, а также явное выражение для проводимости:

$$\lambda = \frac{ne^2\tau}{2m}. \quad (2.2.6)$$

### 2.2.3. Правила Кирхгофа

1) Для любого узла сумма токов, входящих в узел (с учётом знаков), равна нулю:

$$\sum_k J_k = 0.$$

Это правило выражает закон сохранения заряда: заряды в узлах не могут рождаться или исчезать.

2) Для любого замкнутого участка цепи выполняется равенство

$$\sum_i \mathcal{E}_i = \sum_k J_k R_k.$$

В этих правилах токи и ЭДС являются алгебраическими величинами, т.е. могут быть как положительными, так и отрицательными в зависимости от направления обхода контура (участка цепи).

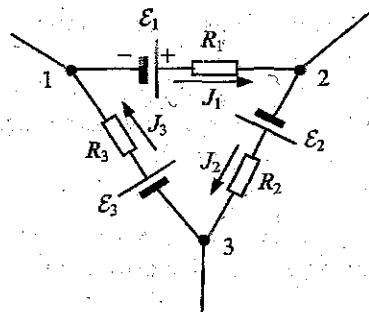


Рис. 2.2.2. Замкнутый контур 1–2–3–1, содержащий элементы ЭДС и сопротивления

Получим второе правило Кирхгофа для случая цепи, показанной на рис. 2.2.2. Выберем положительное направление обхода контура как показано на рис. 2.2.2. Применим закон Ома к участкам цепи 12, 23, 31:

$$\varphi_1 - \varphi_2 + J_1 R_1 = \mathcal{E}_1,$$

$$\varphi_2 - \varphi_3 + J_2 R_2 = \mathcal{E}_2,$$

$$\varphi_3 - \varphi_1 + J_3 R_3 = \mathcal{E}_3.$$

Складывая почленно эти равенства, получаем

$$J_1 R_1 + J_2 R_2 + J_3 R_3 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3.$$

Это равенство есть второе правило Кирхгофа. Аналогично рассматривается цепь, содержащая произвольное число разветвлений.

#### 2.2.4. Закон Джоуля–Ленца

Пусть заряд движется со скоростью  $\mathbf{v}$  и на него действует постоянная сила  $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$  со стороны электрического поля. Скорость заряда можно представить как сумму средней (дрейфовой) скорости  $\mathbf{u}$  и случайной составляющей  $\mathbf{v}_{\text{сл}}$ , обусловленной столкновениями с атомами (молекулами) среды:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}_{\text{сл}}, \quad \langle \mathbf{v}_{\text{сл}} \rangle = 0.$$

За время  $dt$  заряд сместится на  $\mathbf{v} dt$ , и над ним будет совершена работа  $dA = \mathbf{F} \mathbf{v} dt = \mathbf{F}(\mathbf{u} + \mathbf{v}_{\text{сл}}) dt$ . При усреднении по всем зарядам системы  $\langle \mathbf{F} \mathbf{v}_{\text{сл}} \rangle = 0$  вследствие случайного характера  $\mathbf{v}_{\text{сл}}$ . Если в единице объема находится  $n$  зарядов, то над ними за единицу времени совершается работа

$$w = n \mathbf{F} \mathbf{u} = j \mathbf{E}. \quad (2.2.7)$$

Здесь введена плотность тока:  $j = enu = \rho u$ . Эта работа рассеивается в системе и идет на увеличение внутренней энергии.

Полученное соотношение называется *законом Джоуля–Ленца* в дифференциальной (локальной) форме. Ему можно придать другой вид, если воспользоваться законом Ома  $j = \lambda \mathbf{E}$ :

$$w = j^2 / \lambda = \lambda \mathbf{E}^2.$$

При наличии в среде объемных токов мощность энерговыделения, т.е. работа над зарядами в каком-то объеме в единицу времени, равна

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{j^2}{\lambda} dV.$$

Применим это равенство к току в проводнике. Если площадь сечения проводника  $S$ , его длина  $l$ , а ток в проводнике равен  $J$ , то  $J = J/S$ ,  $dV = Sdl$ , и мы получаем

$$W = \int \frac{1}{\lambda} \left( \frac{J}{S} \right)^2 Sdl = J^2 \int \frac{dl}{\lambda S} = J^2 R,$$

где интегрирование выполняется по длине проводника. Здесь введено сопротивление

$$R = \int \frac{dl}{\lambda S}.$$

Соотношение  $W = J^2 R$  представляет собой закон Джоуля–Ленца в штатральной форме.

Для замкнутой цепи, содержащей ЭДС  $\mathcal{E}$ , из закона Ома в интегральной форме  $JR = \mathcal{E}$  следуют две другие формы закона Джоуля–Ленца:

$$W = \mathcal{E}^2 / R = J\mathcal{E}. \quad (2.2.8)$$

Поскольку  $\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}_{\text{стор}} dl$ , т.е. ЭДС есть результат действия сторонних сил, то, как видно из равенства  $W = J\mathcal{E}$ , электрическое поле само не производит тепловую энергию. Тепло производится за счёт работы сторонних сил (благодаря которым и возникает ток в системе). Иными словами, сторонние силы приводят заряды в движение, а сообщённая ими зарядам кинетическая энергия расходуется на преодоление сил трения в проводнике. Эти потери энергии проявляются в виде электрического сопротивления.

### 2.3. Токи в неограниченных средах

Пусть в проводящую среду с проводимостью  $\lambda$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  помещены два электрода  $A$  и  $B$  (рис. 2.3.1). Будем считать, что электроды — это хорошие проводники, так что их поверхности являются эквилиптенциальными, с потенциалами соответственно  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$ . Найдём полное сопротивление среды.

Введём взаимную ёмкость системы электродов:

$$C = \frac{q}{\varphi_A - \varphi_B}, \quad (2.3.1)$$

где принято, что на обкладках такого конденсатора помещены заряды  $+q$  и  $-q$ .

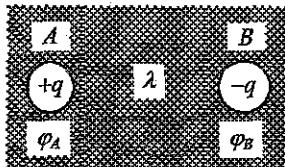


Рис. 2.3.1. Два электрода в среде с проводимостью  $\lambda$

Далее задача решается в три шага.

1) Из теоремы Гаусса для проводника с зарядом  $+q$  имеем

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{\epsilon} q,$$

где интегрирование проводится по внешней поверхности проводника.

В соответствии с определением ёмкости (2.3.1) получаем

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{\epsilon} q = \frac{4\pi}{\epsilon} C(\varphi_A - \varphi_B). \quad (2.3.2)$$

2) По закону Ома плотность тока, стекающего с электрода  $A$ , равна  $j = \lambda E$ , где  $E$  — напряжённость электрического поля вблизи его поверхности. Полный ток, стекающий с электрода  $A$ , равен

$$J = \oint j d\mathbf{S} = \lambda \oint \mathbf{E} d\mathbf{S}.$$

Исключая отсюда поверхностный интеграл с помощью соотношения (2.3.2), находим

$$J = \lambda \cdot \frac{4\pi}{\epsilon} C(\varphi_A - \varphi_B). \quad (2.3.3)$$

3) Сопротивление между электродами определяется формулой

$$R = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{J}.$$

Поэтому из (2.3.3) следует, что сопротивление среды между электродами равно

$$R = \frac{\epsilon}{4\pi\lambda C}. \quad (2.3.4)$$

Поскольку ёмкость пропорциональна диэлектрической проницаемости:  $C \sim \epsilon$ , то сопротивление не зависит от  $\epsilon$ .

Если электроды представляют собой проводники с собственными ёмкостями  $C_A$  и  $C_B$ , удалённые друг от друга на большое расстояние, то их взаимная ёмкость равна

$$C = \frac{C_A C_B}{C_A + C_B} \quad (2.3.5)$$

(см. раздел 1.7.6). В частном случае шаров радиусами  $r_A$  и  $r_B$  из (2.3.4) находим

$$C_A = \epsilon r_A, \quad C_B = \epsilon r_B, \quad R = \frac{1}{4\pi\lambda} \left( \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} \right).$$

Видно, что в этом случае сопротивление  $R$  практически не зависит от расстояния между шарами.

Если электроды представляют собой обкладки плоского конденсатора (с площадью пластин  $S$  и расстоянием между ними  $d$ ), то

$$C = \epsilon S / 4\pi d.$$

При этом формула для сопротивления принимает вид

$$R = d / \lambda S,$$

что совпадает с известным выражением для сопротивления проводника длиной  $d$ , поперечным сечением  $S$  и проводимостью  $\lambda$ .

## 2.4. Закон «трёх вторых» Ленгмюра

Рассмотрим вакуумный диод (лампу) — систему из двух электродов (катода и анода) в вакууме, между которыми поддерживается разность потенциалов  $V$ . Если один из электродов (катод) нагрет, то часть электронов имеет достаточную энергию, чтобы выйти из металла наружу. Для чистых металлов работа выхода составляет несколько электронвольт. Далее электроны увлекаются внешним электрическим полем в направлении анода и создают ток  $J$ .

Если бы на анод попадали все эмитированные с катода электроны, то в стационарных условиях ток  $J$  не зависел бы от величины приложенного напряжения  $V$  и равнялся бы току насыщения. Последний определяется только количеством электронов, испущенных катодом в единицу времени.

В действительности в пространстве между катодом и анодом образуется отрицательный объёмный заряд, препятствующий прохождению тока. Рассмотрим это явление подробнее.

Допустим, что электроды лампы плоские, имеющие площадь  $S$  (рис. 2.4.1). Будем считать температуру катода неизменной, чтобы скорость эмиссии была постоянной. Распределение потенциала между электродами определяется из уравнения Пуассона:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -4\pi\rho = -4\pi ne, \quad (2.4.1)$$

где  $e < 0$  — заряд электрона,  $n$  — концентрация электронов в пространстве между электродами. Будем считать, что скорости электронов зависят только от расстояния  $x$  до катода,  $u = u(x)$ , причём начальная скорость равна нулю,  $u(0) = 0$ .



Рис. 2.4.1. Электроны, испускаемые нагретым катодом, попадают на анод

Плотность тока ( $j = J/S$ ) равна

$$j = en(x)u(x), \quad u \geq 0, \quad j < 0. \quad (2.4.2)$$

Ввиду стационарности рассматриваемого процесса эта величина не зависит от координаты, иначе согласно закону сохранения заряда

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\partial j}{\partial x} \quad (2.4.3)$$

плотность заряда менялась бы со временем.

Скорость электронов в зависимости от координаты определяется из уравнения

$$\frac{mu^2(x)}{2} = -e\phi(x) \quad (2.4.4)$$

(потенциал катода мы принимаем равным нулю:  $\phi(0) = 0$ ). Поскольку  $n = \sqrt{-2e\phi/m}$ , то

$$n = \frac{j}{eu} = \frac{j}{e\sqrt{-2e\phi/m}} = \frac{j}{e} \sqrt{\frac{m}{2e\phi}}$$

Соответственно уравнение Пуассона (2.4.1) принимает вид

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -4\pi ne = \frac{a^2}{\sqrt{\phi}}, \quad a^2 = -4\pi j \sqrt{\frac{m}{2e}} > 0. \quad (2.4.5)$$

Параметр  $a$  не зависит от координаты и определяется только скоростью эмиссии электронов  $j$ .

Сформулируем граничные условия для уравнения (2.4.5). Одно условие состоит в том, что  $\phi(0) = 0$ . Второе условие — напряжённость

электрического поля у катода равна нулю. Действительно, если  $eE = -e d\phi/dx > 0$ , то все эмиттируемые электроны увлекались бы полем к аноду, и ток достиг бы насыщения при любых напряжениях  $V$  на аноде. Если же  $eE = -e d\phi/dx < 0$ , то все электроны возвращались бы на катод независимо от величины  $V$ , и ток не возникал бы. Таким образом, получаем

$$\phi(0) = 0, \frac{d\phi}{dx} \Big|_{x=0} = 0. \quad (2.4.6)$$

Для решения уравнения (2.4.5) умножим почленно обе стороны равенства на  $\varphi'$ :

$$\varphi' \varphi'' = \frac{a^2}{\sqrt{\varphi}} \varphi' \Rightarrow \frac{1}{2} \varphi'^2 = 2a^2 \sqrt{\varphi} \Rightarrow \varphi' = 2a\varphi^{1/4}$$

(учтено граничное условие (2.4.6)). Решая получившееся уравнение, находим

$$\frac{d\varphi}{\varphi^{1/4}} = 2adx \Rightarrow \frac{4}{3} \varphi^{3/4} = 2ax \Rightarrow \varphi(x) = \left(\frac{3}{2} ax\right)^{4/3}.$$

Полагаем  $\varphi(d) = V$ . Тогда из получившегося равенства следует

$$a = \frac{2}{3d} V^{3/4}.$$

Поскольку  $a^2 = 4\pi |j| \sqrt{-m/2e} > 0$ , то

$$|j| = \frac{a^2}{4\pi} \sqrt{\frac{2e}{m}} = CV^{3/2}, \quad C = \frac{1}{9\pi d^2} \sqrt{\frac{2e}{m}}. \quad (2.4.7)$$

Найденная зависимость тока от приложенного напряжения называется законом трёх вторых Ленгмюра (рис. 2.4.2).

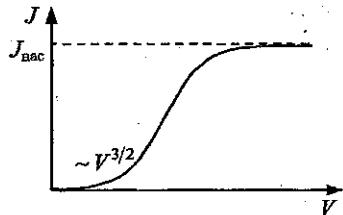


Рис. 2.4.2. Вольтамперная характеристика вакуумного диода

1) Найденная зависимость  $J(V)$  нелинейная, не удовлетворяющая закону обычному Ома.

2) При высоких напряжениях  $V$  ток достигает насыщения,  $J \rightarrow J_{\text{нас}}$ , поскольку эмиссионная способность катода достигает насыщения.

Выше предполагалось, что начальная скорость электронов равна нулю. Если учесть начальное распределение по скоростям электронов, вылетающих с катода, обусловленное тепловым движением, то в пространстве между электродами возникнет минимум потенциала, создающий потенциальный барьер для пролёта электронов (рис. 2.4.3). Этот минимум (точка  $x = x_0$  на кривой 2 рис. 2.4.2) возникает вследствие того, что более быстрые электроны создают область с повышенной плотностью отрицательного заряда между электродами.

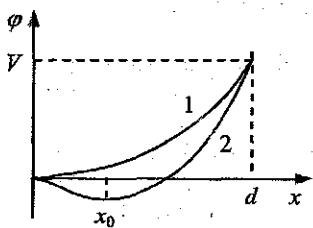


Рис. 2.4.3. Распределение потенциала в вакуумном диоде между катодом ( $x = 0$ ) и анодом ( $x = d$ ). 1 -- случай, когда все эмитируемые электроны имеют нулевую начальную скорость, 2 -- учтён тепловой разброс начальных скоростей электронов

Благодаря наличию минимума медленные электроны возвращаются к катоду, поскольку их кинетической энергии оказывается недостаточно для преодоления барьера. Быстрые же электроны достигают анода. В области за барьером ( $x > x_0$ ) происходит обычное ускорение всех попавших туда электронов. Образовавшийся потенциальный барьер называют *виртуальным катодом*, поскольку образующий его отрицательный объёмный заряд играет роль аналогичную обычному катоду лампы.

## Глава 3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

### 3.1. Сила Лоренца и сила Ампера

#### 3.1.1. Магнитное поле

Магнитным полем называется силовое поле, действующее на движущиеся заряды, токи и на тела, обладающие магнитным моментом.

Источниками магнитного поля являются токи (микроскопические и макроскопические), а также движущиеся заряды.

Неизменные во времени токи создают постоянные магнитные поля. В данной главе рассматриваются только такие поля.

Магнитное поле характеризуется вектором *магнитной индукции*  $\mathbf{B}$ , определяющим силу, действующую на движущийся заряд.

#### 3.1.2. Сила Лоренца

Силой Лоренца называется сила, действующая на движущийся заряд  $q$  со стороны магнитного поля:

$$\mathbf{F}_L = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

где вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$  не зависит от величины заряда и характеризует поле.

Полная сила, действующая на заряд, включает также силу со стороны электрического поля:

$$\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right).$$

#### 3.1.3. Сила Ампера

Силой Ампера (или амперовой силой) называют силу, действующую на токи со стороны магнитного поля.

Будем называть произведение  $j dV$  *объёмным элементом тока*, а произведение  $J dl$  — *линейным элементом тока*.

Анализ экспериментальных данных позволил установить, что

1) сила, действующая на объёмный элемент тока  $j dV$ , равна

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} dV,$$

2) сила, действующая на линейный элемент тока  $JdI$ , равна

$$d\mathbf{F} = \frac{J}{c} dI \times \mathbf{B},$$

где  $\mathbf{B}$  — вектор, характеризующий магнитное поле в месте нахождения элемента тока, называемый *индукцией*.

Эти соотношения называют *законом Ампера*<sup>1</sup>.

Пусть ток течёт по проводнику с площадью поперечного сечения  $S$ . Введём вектор участка проводника длиной  $dI$  формулой  $dI = n dI$ , где  $n$  — единичный вектор вдоль проводника. Тогда  $\mathbf{j} = (J/S)\mathbf{n}$  и выражение для объёмного элемента тока можно переписать в виде

$$\mathbf{j} dV = \left( \frac{J}{S} \mathbf{n} \right) (S dI) = J dI.$$

Это соотношение показывает эквивалентность выражений для силы Ампера в случаях объёмного и линейного элементов тока.

### 3.1.4. Связь силы Лоренца и силы Ампера

Сила Лоренца, действующая на заряд  $dq$ , равна

$$d\mathbf{F} = \frac{dq}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Поскольку  $dq = \rho dV$  и  $\rho \mathbf{v} = \mathbf{j}$ , то сразу получаем силу Ампера, действующую на объёмный элемент тока:  $d\mathbf{F} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} dV$ .

## 3.2. Закон Био—Савара и его следствия

### 3.2.1. Закон Био—Савара

Закон Био—Савара установлен экспериментально (1820 г.) путём анализа экспериментальных данных и определяет магнитное поле, создаваемое объёмным и линейным элементами тока.

Если радиус-вектор точки наблюдения по отношению к рассматриваемому элементу тока есть  $\mathbf{r}$  (рис. 3.2.1), то поле, создаваемое объёмным элементом тока  $\mathbf{j} dV$ , равно

<sup>1</sup> Стого говоря, А.М. Ампер установил закон взаимодействия двух проводников, по которым течёт постоянный ток (1820 г.).

$$d\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} dV, \quad (3.2.1)$$

а поле линейного элемента тока  $Jd\mathbf{l}$  даётся выражением

$$d\mathbf{B} = \frac{J}{c} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (3.2.2)$$



Рис. 3.2.1. Объёмный (слева) и линейный (справа) элементы тока создают магнитное поле в точке наблюдения  $A$

### 3.2.2. Поле прямого бесконечно длинного тонкого провода с током

Найдём магнитное поле на расстоянии  $R$  от бесконечно длинного провода с током (рис. 3.2.2).

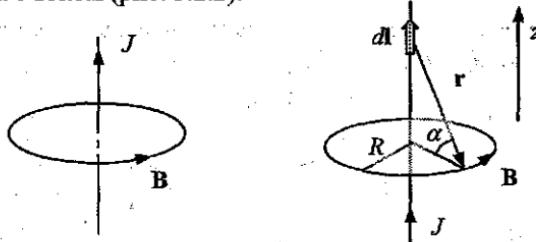


Рис. 3.2.2. Слева -- силовые линии индукции магнитного поля длинного провода с током; справа -- к расчёту магнитного поля, создаваемого бесконечно длинным проводом с током.

Из закона Био-Савара (3.2.2) следует, что магнитные силовые линии перпендикулярны плоскости, содержащей радиус-вектор точки наблюдения и провод с током. Это значит, что они представляют собой окружности с центрами, лежащими на проводе, плоскость которых перпендикулярна проводу.

Выберем силовую линию -- окружность радиуса  $R$ . Если радиус-вектор  $\mathbf{r}$  точки наблюдения (по отношению к элементу тока) образует угол  $\alpha$  с плоскостью окружности, образованной рассматриваемой силовой линией (рис. 3.2.2), то

$$|d\mathbf{l} \times \mathbf{r}| = dl r \cos \alpha = R dl.$$

Выберем ось  $z$  вдоль провода и поместим начало координат в центр окружности. Тогда  $dl = dz$ . Учтём также, что

$$z = R \operatorname{tg} \alpha, \quad dz = \frac{R d\alpha}{\cos^2 \alpha}, \quad r = \frac{R}{\cos \alpha}.$$

Тогда из закона Био — Савара следует

$$dB = \frac{J R dz}{c r^3} = \frac{J}{c} \frac{R^2 d\alpha}{\cos^2 \alpha (R/\cos \alpha)^3} = \frac{J}{cR} \cos \alpha d\alpha.$$

Суммируя по всем элементам тока (при этом угол  $\alpha$  меняется в пределах  $(-\pi/2, \pi/2)$ ), получим поле в точках рассматриваемой силовой линии:

$$B = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{J}{cR} \cos \alpha d\alpha = \frac{2J}{cR}. \quad (3.2.3)$$

### 3.2.3. Сила взаимодействия двух параллельных проводов с током

Найдём силу взаимодействия двух тонких параллельных проводов, по которым текут токи  $J_1$  и  $J_2$  (рис. 3.2.3а).

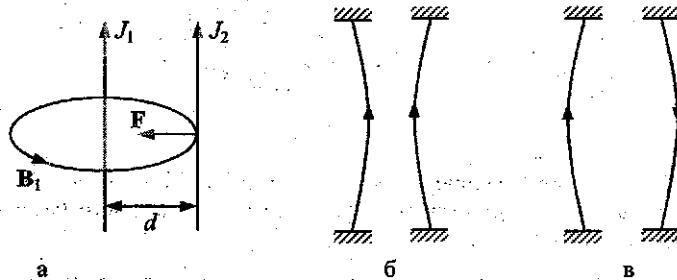


Рис. 3.2.3. а — по параллельным проводам, расположенным на расстоянии  $d$  друг от друга, текут токи  $J_1$  и  $J_2$  (здесь — в одном направлении); б — токи, текущие в одном направлении, притягиваются; в — токи, текущие в противоположных направлениях, отталкиваются

Поле, создаваемое током  $J_1$  в точках, где находится провод с током  $J_2$ , равно

$$B_1(d) = \frac{2J_1}{cd}.$$

Это поле по закону Ампера создаёт силу, действующую на участок провода 2 длиной  $dl$ :

$$d\mathbf{F} = \frac{J_2}{c} dl \times \mathbf{B}_1, \quad dF = \frac{2J_1 J_2}{c^2 d} dl.$$

Сила, действующая на участок провода 2 длины  $l$ , равна

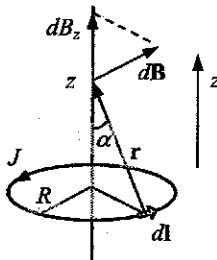
$$F = \frac{2J_1 J_2}{c^2 d} l.$$

Если токи в проводах текут в одном направлении, то это — сила притяжения (как показано на рис. 3.2.3б). Если же токи текут в противоположных направлениях, то между проводами возникает сила отталкивания (рис. 3.2.3в).

### 3.2.4. Магнитное поле витка с током на его оси

Пусть ток циркулирует по круговому витку радиуса  $R$  (рис. 3.2.4). Найдём магнитное поле на оси на расстоянии  $z$  от плоскости витка.

Рис. 3.2.4. К расчёту магнитного поля, создаваемого витком с током на его оси



Поле, создаваемое линейным элементом тока, определяется законом Био-Савара  $d\mathbf{B} = \frac{J}{cr^3} dl \times \mathbf{r}$ . Поскольку  $dl \perp \mathbf{r}$ , то

$$|d\mathbf{B}| = \frac{J}{cr^2} dl.$$

После суммирования по всем участкам провода ненулевой останется только  $z$ -компоненты поля. Для рассматриваемого элемента тока

$$dB_z = \frac{J}{cr^2} dl \sin \alpha.$$

Поскольку все участки провода дают одинаковый вклад в  $dB_z$ , то получаем

$$B = \frac{2\pi R}{cr^2} J \sin \alpha = \frac{2\pi}{cR} J \sin^3 \alpha, \quad (3.2.4)$$

где учтено, что  $l = 2\pi R$ ,  $R = r \sin \alpha$ . Это выражение можно записать в следующем виде:

$$B = \frac{2\pi R^2}{cr^3} J = \frac{2\pi R^2}{c(R^2 + z^2)^{3/2}} J. \quad (3.2.5)$$

В частности, в центре витка ( $\alpha = \pi/2$ ,  $z = 0$ ) имеем  $B = 2\pi J/cR$ .

### 3.2.5. Поле идеального соленоида на его оси

*Идеальный соленоид* — это соленоид, все витки которого плоские, а их плоскости перпендикулярны оси соленоида, причём расстоянием между соседними витками можно пренебречь.

Рассмотрим соленоид длины  $L$ , радиуса  $R$  и с плотностью намотки  $n$  витков на 1 см длины (рис. 3.2.5). Пусть по виткам течёт ток  $J$ . Найдём поле в точках оси соленоида. Соленоид считаем идеальным.

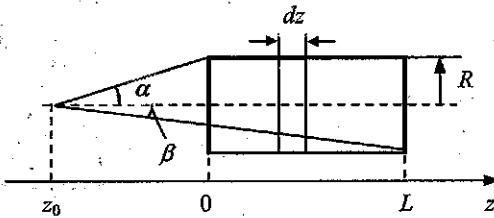


Рис. 3.2.5. Идеальный соленоид конечной длины. Координата  $z$  отсчитывается от левого края соленоида.

Пусть из точки наблюдения ( $z = z_0$ ) радиусы первого и последнего витков видны под углами соответственно  $\alpha$  и  $\beta$ , причём границы соленоида имеют координаты  $z = 0$  и  $z = l$ . Выделим слой длиной  $dz$ , содержащий  $n dz$  витков. Пусть радиус этого слоя виден под углом  $\varphi$ . Тогда вклад выбранного слоя в поле в точке наблюдения равен (согласно (3.2.4))

$$dB = \frac{2\pi J n dz}{cR} \sin^3 \varphi.$$

Имея в виду, что координата слоя связана с углом  $\varphi$  и радиусом соленоида  $R$  соотношением (рис. 3.2.5)

$$z - z_0 = R \operatorname{ctg} \varphi,$$

имеем  $dz = -\frac{Rd\phi}{\sin^2 \phi}$  (на рис. 3.2.5 координата точки наблюдения  $z_0 < 0$ , а координата слоя  $z > 0$ ). Суммируя поля, создаваемые всеми витками соленоида, находим:

$$B = -\frac{2\pi J n}{c} \int_{\alpha}^{\beta} \sin \phi d\phi = \frac{2\pi J n}{c} (\cos \beta - \cos \alpha). \quad (3.2.7)$$

В частном случае длинного соленоида дальний торец виден под малым углом  $\beta \approx 0$ , так что

$$B = \frac{2\pi J n}{c} (1 - \cos \alpha).$$

Отсюда следует, что на такого торце соленоида ( $\alpha = \pi/2$ ) поле равно  $B = 2\pi n J / c$ , а в глубине, вдали от его края ( $\alpha \approx \pi$ ),  $B = 4\pi n J / c$ .

Если сместить начало координат в центр соленоида ( $x = z - L/2$ ), то аналитически зависимость поля от координаты даётся формулой

$$B(x) = \frac{2\pi J n}{c} \left[ \frac{L/2 - x}{\sqrt{(L-x)^2 + R^2}} + \frac{L/2 + x}{\sqrt{(L/2+x)^2 + R^2}} \right].$$

Эта зависимость показана на рис. 3.2.6 для случая длинного соленоида, имеющего отношение длины к диаметру  $L/R = 10 \gg 1$ . Видно, что поле в центре соленоида практически вдвое больше поля на краю.

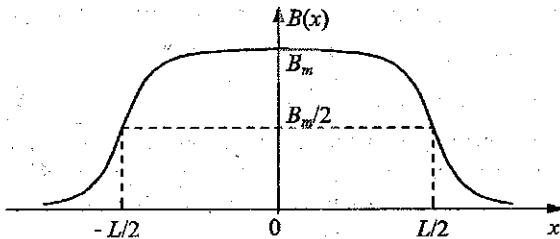


Рис. 3.2.6. Зависимость поля на оси длинного соленоида от координаты. График построен для  $L/R = 10$ ,  $B_m = 4\pi n J / c$  — поле в центре соленоида, на торцах соленоида поле приблизительно равно  $B_m/2$ .

Как видно из приведённой формулы, краевые эффекты существенно проявляются на расстояниях  $\sim R$  от торцов соленоида. В объёме соленоида на расстояниях  $\gg R$  поле близко к такому же, как в бесконеч-

но длинном соленоиде. Нетрудно найти, что при  $R \ll L$  в центре соленоида ( $x = 0$ )

$$B = B_\infty \left(1 - \frac{R^2}{2L^2}\right), \quad B_\infty = \frac{4\pi Jn}{c}. \quad (3.2.8)$$

### 3.2.6. Магнитное поле равномерно движущегося заряда

По закону Био–Савара для объёмного элемента тока

$$d\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} dV.$$

Поскольку  $\mathbf{j} = e\mathbf{v}$ , то  $\mathbf{j} dV = (e\mathbf{n} \cdot dV)\mathbf{v} = \rho dV\mathbf{v}$ . Величина  $q = \rho dV$  — полный заряд в объёме  $dV$ . Поэтому, произведя переобозначение  $d\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ , получаем

$$\mathbf{B} = \frac{q}{c} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \frac{q\mathbf{r}}{r^3}.$$

Вектор  $\mathbf{E} = qr/r^3$  есть напряжённость электрического поля, созданного зарядом  $q$ . Поэтому создаваемое им магнитное поле равно

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}.$$

В силу принципа суперпозиции такое же выражение определяет магнитное поле произвольной системы зарядов, движущихся (как целое) со скоростью  $\mathbf{v}$ .

## 3.3. Теорема Гаусса и теорема о циркуляции для магнитного поля в вакууме

### 3.3.1. Векторный потенциал

Преобразуем формулу, выражающую закон Био–Савара. Пусть радиус-вектор точки наблюдения есть  $\mathbf{r}$ , а радиус-вектор объёмного элемента тока, создающего магнитное поле, есть  $\mathbf{r}_1$ . Тогда

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} dV_1.$$

Здесь  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$  — радиус-вектор точки наблюдения относительно выбранного элемента тока. Используем тождество

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} = -\nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \right),$$

в котором операция  $\nabla$  действует на координаты  $\mathbf{r}$ . Соответственно имеем:

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{dV_1}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \times \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \right).$$

Преобразуем данное выражение с помощью тождества

$$\mathbf{a} \times \nabla \varphi = -\text{rot}(\mathbf{a} \varphi),$$

в котором считается  $\mathbf{a} = \text{const}$ . Это даёт

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \text{rot} \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \right) dV_1.$$

Наконец, суммируя поля, создаваемые всеми элементами тока, получим

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \text{rot} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} dV_1.$$

Обозначая

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} dV_1, \quad (3.3.1)$$

приходим к формуле

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}.$$

Введённый здесь вектор  $\mathbf{A}$  называется *векторным потенциалом*. Его роль по отношению к магнитному полю подобна той, которую скалярный потенциал  $\varphi$  играет по отношению к электрическому полю.

Для системы движущихся зарядов векторный потенциал записывается следующим образом:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \sum_i \frac{q_i \mathbf{v}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|},$$

где  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{v}_i$  — радиус-вектор и скорость  $i$ -го заряда, а суммирование производится по всем зарядам, участвующим в создании поля.

Если ток течёт по тонкому проводнику  $L$ , то векторный потенциал поля вне проводника даётся контурным интегралом:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{J}{c} \int_L \frac{d\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}.$$

Покажем, что  $\text{div} \mathbf{A} = 0$ . Для этого, заменив переменные интегрирования  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ , перепишем выражение (3.3.1) для векторного потенциала в следующей форме:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_2|} dV_2,$$

Находим дивергенцию:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int_V \frac{\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_2|} dV_2.$$

Поскольку для стационарных токов в силу уравнения непрерывности  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ , то получаем  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ .

### 3.3.2. Теорема Гаусса для магнитного поля

Имея в виду тождество  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv 0$ , из формулы  $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$  получаем *теорему Гаусса в дифференциальной форме*:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Применяя теорему Остроградского-Гаусса

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{B} dV,$$

получаем *теорему Гаусса в интегральной форме*:

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0.$$

Теорема Гаусса утверждает, что нет свободных (несвязанных) магнитных зарядов, на которых могли бы начинаться или кончаться силовые линии индукции магнитного поля.

### 3.3.3. Теорема о циркуляции магнитного поля в вакууме

Найдём ротор магнитного поля:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A},$$

где учтено, что  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ . Для нахождения  $\Delta \mathbf{A}$  воспользуемся формальной аналогией с соотношениями электростатики:

$$\Delta \phi = -4\pi\rho, \quad \phi = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} dV_1.$$

Поскольку  $\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} dV_1$ , то по аналогии находим уравнение

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Вспоминая, что  $\operatorname{rot} \mathbf{B} = -\Delta \mathbf{A}$ , приходим к *теореме о циркуляции в дифференциальной форме*:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Выберем какую-либо поверхность  $S$  и проинтегрируем почленно последнее уравнение по этой поверхности:

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{B} d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}.$$

Входящий в правую часть равенства интеграл  $\int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = J$  есть полный ток, пересекающий поверхность  $S$ . Левая часть равенства преобразуется по формуле Стокса:

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{B} d\mathbf{S} = \oint_{L(S)} \mathbf{B} d\mathbf{l},$$

где  $L$  — контур, на который опирается поверхность  $S$ . Отсюда вытекает теорема о циркуляции в интегральной форме:

$$\oint_{L(S)} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} J.$$

### 3.3.4. Магнитное поле прямого провода

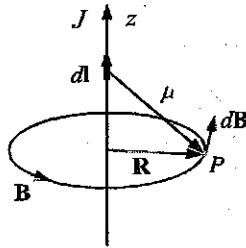
В качестве простого примера применения теоремы о циркуляции (в интегральной форме) найдём поле прямого провода с током, ранее полученное прямым применением закона Био—Савара.

Из закона Био—Савара для линейного элемента тока  $d\mathbf{B} = \frac{J d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{c r^3}$

следует, что силовые линии — это окружности с центрами в точках провода (рис. 3.3.1). Применим теорему о циркуляции и используя в качестве контура окружность радиуса  $R$ , находим:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} J \Rightarrow B \cdot 2\pi R = \frac{4\pi}{c} J \Rightarrow B = \frac{2J}{cR}.$$

Рис. 3.3.1. К расчёту магнитного поля прямого провода. Магнитное поле  $d\mathbf{B}$ , создаваемое в точке  $P$  линейным элементом тока  $Jdl$ , направлено по касательной к окружности с центром на оси провода



Введём единичный вектор ( $|t|=1$ ), касательный к силовой линии радиуса  $R$ :

$$t = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{R}}{R},$$

где  $\mathbf{k}$  — единичный вектор вдоль оси  $z$ . Тогда в векторной форме магнитное поле провода записывается следующим образом:

$$\mathbf{B} = \frac{2J}{cR} t.$$

### 3.3.5. Магнитное поле внутри идеального соленоида

Рассмотрим длинный идеальный соленоид (рис. 3.3.2). Найдём сначала направление силовых линий магнитного поля такого соленоида. Возьмём точку наблюдения  $P$  и выделим два витка, расположенные симметрично (по высоте) относительно точки  $P$ . На витках возьмём элементы тока, расположенные точно друг под другом (рис. 3.3.2). Тогда расстояние от этих элементов до точки наблюдения окажется одинаковым:  $r_1 = r_2$ .

Магнитное поле в точке  $P$ , создаваемое выбранными элементами тока, равно

$$d\mathbf{B} = dB_1 + dB_2,$$

$$dB_1 = \frac{J dl_1 \times r_1}{c r_1^3}, \quad dB_2 = \frac{J dl_2 \times r_2}{c r_2^3}.$$

Учтём, что  $dl_1 = dl_2 = dl$ ,  $r_1 = r_2 = r$ . Тогда

$$d\mathbf{B} = \frac{J dl \times (r_1 + r_2)}{c r^3}.$$

Поскольку векторы  $r_1 + r_2$  и  $dl$  направлены перпендикулярно оси соленоида, то вектор  $d\mathbf{B}$  направлен *вдоль* оси соленоида. Таким образом, поле бесконечно длинного идеального соленоида всюду направлено параллельно его оси.

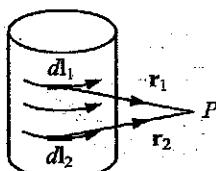


Рис. 3.3.2. Идеальный соленоид:  
Выбор пар витков для определения  
направления силовых линий  
магнитного поля

### 1) Поле вне соленоида (вдали от торцов)

Пусть соленоид имеет радиус  $R$ . Возьмём прямоугольный контур, начинающийся на расстоянии  $r > R$  от оси и включающий бесконечно удалённую точку, причём его плоскость параллельна оси соленоида. Пусть контур целиком проходит вне соленоида, так что ток его не пересекает:  $J_{\text{пер}} = 0$  (рис. 3.3.3 слева). Поэтому по теореме о циркуляции находим

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} J_{\text{пер}} = 0,$$

или  $B(r)dh - B(\infty)dh = 0$  (горизонтальные участки не вносят вклада в циркуляцию, поскольку на этих участках  $d\mathbf{l} \perp \mathbf{B}$ ). Т.к. на бесконечности поле обращается в нуль, то всюду вне соленоида поле отсутствует:

$$B(r) = 0 \text{ при } r > R.$$

### 2) Поле внутри соленоида (вдали от торцов)

Выберем теперь контур, который начинается внутри соленоида (при  $r < R$ ) и также уходит на бесконечность (рис. 3.3.3 справа). Теперь плоскость контура пересекают линии тока. Если на единицу длины соленоида приходится  $n$  витков, в каждом из которых течёт ток  $J$ , то на единицу длины боковой поверхности соленоида приходится ток  $i = nJ$ , а ток, пересекающий контур ширины  $dh$ , равен  $J_{\text{пер}} = nJ \cdot dh = i \cdot dh$  ( $i$  — линейная плотность тока).

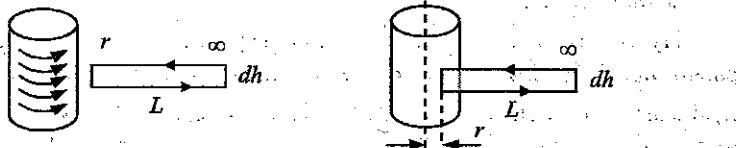


Рис. 3.3.3. К вычислению магнитного поля идеального соленоида. Слева — токи не пересекают контур интегрирования (контур целиком лежит вне соленоида). Справа — токи пересекают контур интегрирования (контур частично проходит внутри соленоида)

Применим теперь теорему о циркуляции:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} J_{\text{пер}} \Rightarrow B(r)dh - B(\infty)dh = \frac{4\pi}{c} nJ \cdot dh.$$

Поскольку  $B(\infty) = 0$ , то находим

$$B(r) = \frac{4\pi}{c} nJ = \frac{4\pi}{c} i.$$

Таким образом, в объеме длинного идеального соленоида вдали от его торцов поле однородное.

### 3.4. Магнитный момент

#### 3.4.1. Магнитный момент

Элементарным источником магнитного поля является замкнутый виток с током. Ему приписывают **магнитный момент**

$$\mathbf{m} = \frac{J}{c} \mathbf{S}, \quad (3.4.1)$$

где  $S$  — вектор площади витка (рис. 3.4.1).

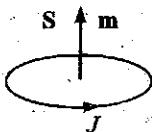


Рис. 3.4.1. Определение магнитного момента  $m$  витка с током

Таким образом, вектор магнитного момента направлен по нормали к плоскости витка, причем его направление определяется по правилу винта в соответствии с направлением тока в контуре.

#### 3.4.2. Момент сил, действующих на виток с током в магнитном поле

Пусть однородное магнитное поле параллельно плоскости витка и равно  $B_{||}$ . Выделим в плоскости витка полоску ширины  $dh$ , параллельную магнитному полю (рис. 3.4.2). Силы Ампера, действующие на элементы тока  $Jdl_1$  и  $Jdl_2$ , равны

$$dF_1 = \frac{J}{c} dl_1 \times B_{||}, \quad dF_2 = \frac{J}{c} dl_2 \times B_{||}.$$

Эти силы направлены перпендикулярно плоскости витка, причем сила  $dF_1$  направлена «к нам», а сила  $dF_2$  — «от нас». Поскольку векторы  $dl_1$  и  $dl_2$  образуют углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  с вектором  $B$ , то

$$|dF_1| = \frac{J}{c} dl_1 B_{||} \sin \alpha_1, \quad |dF_2| = \frac{J}{c} dl_2 B_{||} \sin \alpha_2.$$

Заменяя здесь  $dl_1 \sin \alpha_1 = dl_2 \sin \alpha_2 = dh$ , получим

$$|d\mathbf{F}_1| = |d\mathbf{F}_2| = \frac{J}{c} B_{||} dh.$$

Силы  $d\mathbf{F}_1$  и  $d\mathbf{F}_2$  равны по величине, противоположны по направлению и образуют пару сил с плечом  $a$ . Поэтому создаваемый ими момент сил равен

$$dM = a d\mathbf{F}_1 = \frac{J}{c} B_{||} a dh.$$

Суммируя по всем парам, образующим контур витка, получаем полный момент сил:

$$M = \frac{J}{c} B_{||} S = m B_{||},$$

где введён магнитный момент витка  $m = JS/c$ .

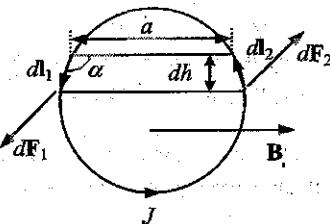


Рис. 3.4.2. Виток с током в магнитном поле. Поле  $B_{||}$  параллельно плоскости витка. Пара сил  $\{d\mathbf{F}_1, d\mathbf{F}_2\}$  перпендикулярна плоскости витка и образует момент сил, поворачивающий плоскость витка

Если магнитное поле направлено произвольно по отношению к плоскости витка, то его можно разложить на две составляющие: параллельную и перпендикулярную плоскости витка:  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{||} + \mathbf{B}_{\perp}$ . Составляющая  $\mathbf{B}_{\perp}$  приводит к силам, лежащим в плоскости витка и перпендикулярным к контуру. Поэтому эта составляющая поля может лишь вызывать деформации контура (растяжения-сжатия), не меняя его ориентации в пространстве. Поэтому поворот витка связан только с компонентой поля  $\mathbf{B}_{||}$ . Таким образом, момент сил, действующий на виток с током, в векторной форме может быть представлен в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}.$$

Здесь в соответствии с определением (3.4.1) введен вектор магнитного момента витка с током  $\mathbf{m} = JS/c$ .

Таким образом, магнитный момент  $\mathbf{m}$  ориентируется по направлению магнитного поля  $\mathbf{B}$ .

### 3.4.3. Потенциальная энергия витка с током в магнитном поле

Рассмотрим виток, в котором циркулирует ток  $J$ . Если вектор площади витка есть  $\mathbf{S}$ , то магнитный момент равен  $\mathbf{m} = JS/c$ . Считаем, что магнитный момент не меняется по величине, но только может менять направление в пространстве. Последнее допущение существенно, и оно предполагает, что в цепь витка включён источник энергии (батарея ЭДС), поддерживающий ток неизменным.

Если виток находится в магнитном поле, то возникает момент сил, стремящихся ориентировать его магнитный момент по направлению поля:

$$M = -mB \sin \theta.$$

Здесь  $\theta$  — угол между направлениями поля и магнитного момента, а знак « $\rightarrow$ » отражает тот факт, что под действием только сил поля угол  $\theta$  уменьшается.

Работа сил поля по повороту магнитного момента от данного угла  $\theta$  до некоторого  $\theta_0$ , принимаемого в качестве начала отсчёта, равна

$$A = \int_{\theta}^{\theta_0} M(\theta_1) d\theta_1 = -mB \int_{\theta}^{\theta_0} \sin \theta_1 d\theta_1 = mB (\cos \theta_0 - \cos \theta).$$

Из определения потенциальной энергии  $A = U(\theta) - U(\theta_0)$  находим

$$U = -mB \cos \theta = -mB. \quad (3.4.2)$$

Тот факт, что потенциальная энергия достигает минимума ( $U = -mB$ ) при  $\theta = 0$ , означает, что момент стремится ориентироваться по направлению поля ( $\mathbf{m} \uparrow \uparrow \mathbf{B}$ ).

### 3.4.4. Сила, действующая на магнитный момент в неоднородном магнитном поле

Во внешнем магнитном поле потенциальная энергия магнитного момента равна  $U = -mB$ . Сила, действующая на момент, есть

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} U = \operatorname{grad}(mB).$$

Если в среде, в которой находится момент, отсутствуют токи проводимости, то  $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$ . Тогда имеет место тождество

$$\mathbf{0} = \mathbf{m} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(mB) - (m\nabla)B,$$

или

$$\nabla(\mathbf{mB}) = (\mathbf{m}\nabla)\mathbf{B}.$$

Поэтому для силы получается следующее выражение:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m}\nabla)\mathbf{B}. \quad (3.4.3)$$

В частном случае, когда момент направлен вдоль поля, а поле зависит только от координаты  $z$ , сила направлена по оси  $z$  и равна

$$F = m \frac{dB}{dz}.$$

### 3.4.5. Магнитный момент системы движущихся зарядов и токов

Магнитным моментом системы зарядов называется вектор

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum_i q_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i, \quad (3.4.4)$$

где суммирование распространяется на все заряды. Здесь  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{v}_i$  — радиус-вектор и скорость  $i$ -го заряда  $q_i$ .

Пусть движение зарядов производит токи с плотностью  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ . Получим выражение для магнитного момента этой системы, исходя из (3.4.4). Разобьём пространство, где циркулируют токи, на участки объёма  $dV$ , в которых заряд имеет плотность  $\rho$  и движется со скоростью  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ . Тогда в объёме  $dV$  содержится заряд  $dq = \rho dV$ . Выполнив суммирование в (3.4.4) по всем зарядам  $dq$ , получим

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{2c} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) dV. \quad (3.4.5)$$

Здесь учтено выражение для плотности тока  $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ . Полученное выражение определяет магнитный момент произвольной системы токов. Покажем, как из этого выражения получается формула для магнитного момента витка с током.

Пусть ток  $J$  циркулирует по витку площадью  $S$  (рис. 3.4.3). Для каждого участка провода длиной  $dl$  заменяем объёмный элемент тока эквивалентным линейным элементом:  $jdV = Jdl$ .

По формуле (3.4.5) находим магнитный момент кольцевого тока:

$$\mathbf{m} = \frac{J}{2c} \oint_{\Gamma} \mathbf{r} \times d\mathbf{l} = \frac{J}{2c} \oint_{\Gamma} \mathbf{r} \times d\mathbf{r}. \quad (3.4.6)$$

Здесь учтено, что ток одинаков во всех участках витка, а интегрирование по объёму, занимаемому токами, заменено интегрированием по

контуру  $\Gamma$ , образующему виток. Кроме того, мы сменили обозначение:  $d\mathbf{l} \rightarrow d\mathbf{r}$ .

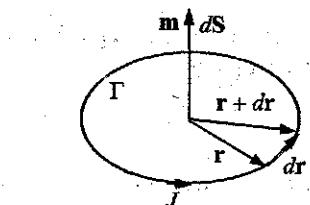


Рис. 3.4.3. Ток, циркулирующий по витку, образующему контур  $\Gamma$

Найдём интеграл, входящий в (3.4.6). Выделим сектор (рис. 3.4.3), описываемый радиус-вектором в ходе циркуляции тока за малое время  $dt$ . Вектор площади этого сектора запишем в виде

$$d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times d\mathbf{r}.$$

Следовательно, формулу (3.4.6) можно переписать в виде

$$\mathbf{m} = \frac{J}{c} \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \mathbf{r} \times d\mathbf{r}.$$

Это совпадает с определением магнитного момента (3.4.1).

### 3.4.6. Гиromагнитное отношение

Пусть система частиц, обладающих одинаковыми зарядами  $q$  и массами  $m$ , циркулирует в некоторой области пространства. Найдём соотношение между магнитным моментом и моментом импульса этой системы.

Преобразуем формулу (3.4.4) для магнитного момента системы заряженных частиц:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum_i q \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \frac{q}{2c} \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \frac{q}{2mc} \sum_i m \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \gamma \mathbf{L}.$$

Здесь учтено, что момент импульса системы частиц равен

$$\mathbf{L} = \sum_i m \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i.$$

Таким образом, в принятых условиях, независимо от характера движения отдельных частиц, имеет место соотношение

$$\mathbf{m} = \gamma \mathbf{L}. \quad (3.4.7)$$

Коэффициент  $\gamma = q/2mc$  называется *гиromагнитным отношением*.

### 3.4.7. Магнитный момент равномерно вращающегося заряженного шара

Рассмотрим шар радиуса  $R$ , равномерно заряженный по объёму и несущий полный заряд  $Q$ . Пусть этот шар вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг своей оси. Для нахождения его магнитного момента воспользуемся тем, что отношение его магнитного момента и момента импульса равно гиромагнитному отношению:  $m = \gamma L$ ,  $\gamma = Q/2Mc$ , где  $M$  — масса шара,  $Q$  — его заряд. Момент импульса шара, вращающегося с угловой скоростью  $\omega$ , равен

$$L = I\omega, I = \frac{2}{5}MR^2,$$

где  $I$  — момент инерции шара. Таким образом, получаем

$$m = \frac{Q}{2Mc} \frac{2}{5}MR^2\omega = \frac{1}{5c}QR^2\omega.$$

Аналогично, тонкостенная сфера, равномерно заряженная по поверхности, имеет магнитный момент

$$m = \frac{1}{3c}QR^2\omega.$$

Учтено, что момент инерции полой сферы равен  $(2/3)MR^2\omega$ .

### 3.4.8. Магнитное поле системы токов на большом расстоянии

Магнитное поле, создаваемое системой движущихся зарядов, в силу принципа суперпозиции даётся формулой

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \sum_i \frac{q_i \mathbf{v}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}, \quad (3.4.8)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки наблюдения. Пусть заряды движутся в ограниченной области пространства размером порядка  $L$ . Найдём поле на расстояниях  $r \gg L$ . Учтём, что при этом для всех зарядов  $r_i \ll r$ . Следовательно, можно положить

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| = \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2} \approx \sqrt{r^2 - 2r\mathbf{r}_i} \approx r \left(1 - \frac{r\mathbf{r}_i}{r^2}\right). \quad (3.4.9)$$

Тогда для векторного потенциала находим выражение

$$\mathbf{A} \approx \frac{1}{cr^3} \sum_i q_i \mathbf{v}_i \left(r^2 + r\mathbf{r}_i\right) = \frac{1}{cr^3} \sum_i q_i \mathbf{v}_i (\mathbf{r} \mathbf{r}_i), \quad (3.4.10)$$

Содержимое суммы преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_i(\mathbf{r}\mathbf{r}_i) &= \frac{1}{2}[\mathbf{v}_i(\mathbf{rr}_i) - \mathbf{r}_i(\mathbf{rv}_i)] + \frac{1}{2}[\mathbf{v}_i(\mathbf{rr}_i) + \mathbf{r}_i(\mathbf{rv}_i)] = \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{r} \times (\mathbf{v}_i \times \mathbf{r}_i) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i(\mathbf{rr}_i)).\end{aligned}\quad (3.4.11)$$

Поскольку рассматривается стационарное движение зарядов и создаваемое ими стационарное магнитное поле, то величина  $\sum_i q_i \mathbf{r}_i(\mathbf{rr}_i)$  не может зависеть от времени, определяясь только средним во времени распределением зарядов. Поэтому последнее слагаемое в (3.4.11) не даёт вклада в векторный потенциал:

$$\frac{1}{2cr^3} \frac{d}{dt} \left( \sum_i q_i \mathbf{r}_i(\mathbf{rr}_i) \right) = 0.$$

Оставшееся же слагаемое даёт

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2cr^3} \sum_i q_i \mathbf{r} \times (\mathbf{v}_i \times \mathbf{r}_i) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (3.4.12)$$

где  $\mathbf{m}$  — магнитный момент, определённый формулой

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum_i q_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i.$$

Магнитное поле находится по формуле  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  и равно

$$\mathbf{B} = \frac{3(\mathbf{mr})\mathbf{r} - \mathbf{mr}^2}{r^5}. \quad (3.4.13)$$

Заметим, что полученная формула совпадает по виду с формулой для электрического поля точечного диполя. Это значит, что точечный магнитный момент можно рассматривать формально как точечный диполь, составленный из эффективных магнитных зарядов  $N$  и  $S$ , как показано на рис. 3.4.4.

Обозначая величину эффективного магнитного заряда  $q_m$  и плечо магнитного диполя  $l$ , запишем дипольный момент эффективного магнитного диполя как

$$\mathbf{m} = q_m \mathbf{l}.$$

Если не рассматривать поле внутри такого магнитного диполя, то оно всюду будет таким же, как и поле системы токов с магнитным моментом  $\mathbf{m}$ . Для иллюстрации на рис. 3.4.4 показана картина силовых линий эффективного диполя и витка с током.

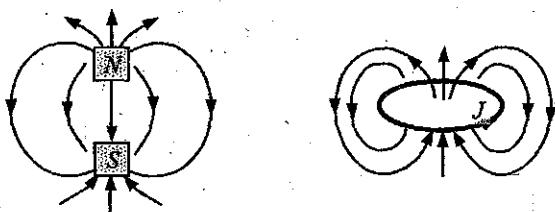


Рис. 3.4.4. Силовые линии поля эффективного магнитного диполя (слева) и витка с током (справа)

По этой причине выражение для магнитного поля, создаваемого точечным магнитным моментом, в точности аналогично выражению для поля точечного электрического диполя.

## Глава 4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

### 4.1. Магнитное поле в веществе

#### 4.1.1. Микрополе и среднее поле

В веществе магнитное поле формируется как внешним полем, так и циркулирующими в этом веществе токами. На микроуровне (т.е. на расстояниях порядка размера атомов и менее) поле резко меняется во времени и пространстве. Это поле называется *микрополем*  $\mathbf{B}_{\text{микро}}$ . Однако если произвести усреднение по малому объёму, в котором имеется много частиц-зарядов (т.е. по физически бесконечно малому объёму), то получим *среднее поле*:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \mathbf{B}_{\text{микро}} dV.$$

Среднее поле меняется существенно медленнее вследствие статистического усреднения при случайном движении частиц.

В соответствии со сказанным токи, создаваемые движущимися зарядами, можно разделить на две группы: токи проводимости и молекулярные токи.

#### 4.1.2. Токи проводимости и молекулярные токи

*Токи проводимости* связаны с перемещением свободных зарядов и являются сторонними по отношению к веществу.

*Молекулярные токи* обусловлены орбитальным движением и спином (собственным моментом импульса) электронов в атомах (молекулах) и ядер вещества.

Частицы, формирующие молекулярные токи, мало смещаются от своего положения равновесия, в среднем оставаясь на своих местах. Эти токи можно усреднить по физически бесконечно малому объёму. Усреднённые же токи меняются медленно в пространстве.

### 4.1.3. Вектор намагничивания

Вектором намагничивания (или намагнченностью) называется магнитный момент единицы объёма вещества:

$$\mathbf{I} = d\mathbf{m}/dV. \quad (4.1.1)$$

Намагнченность называется однородной, если вектор  $\mathbf{I}$  не зависит от выбора точки в веществе, т.е. при  $\mathbf{I} = \text{const}$ . Если же  $\mathbf{I} \neq \text{const}$ , то намагнченность называется неоднородной.

### 4.1.4. Связь намагнченности с молекулярными токами

Выделим в веществе достаточно малый цилиндр, так что поле в нём можно считать практически однородным. В его объёме молекулярные токи компенсируют друг друга. На рис. 4.1.1 показан этот цилиндр (слева) и вид его торца (справа). Кольцевые токи, циркулирующие в объёме, компенсируют друг друга всюду, кроме точек боковой поверхности. В результате остаётся только поверхностный ток, текущий по боковой поверхности цилиндра.

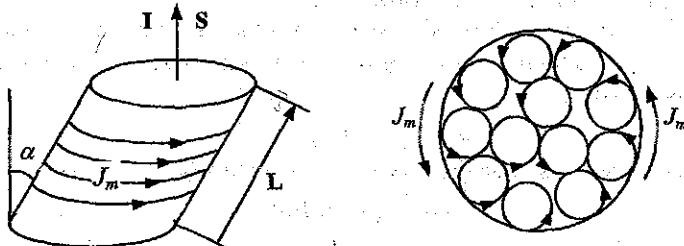


Рис. 4.1.1. Слева — малый косой цилиндр, по боковой поверхности которого циркулируют поверхностные токи, создающие его магнитный момент. Справа — кольцевые токи, циркулирующие в сечении цилиндра и компенсирующие друг друга всюду, за исключением боковой поверхности цилиндра.

По определению вектора намагничивания магнитный момент цилиндра равен

$$\mathbf{m} = I\mathbf{l}.$$

С другой стороны, магнитный момент цилиндра направлен вдоль вектора площади  $\mathbf{S}$  и связан с кольцевым поверхностным током  $J_m$  соотношением

$$\mathbf{m} = \frac{J_m}{c} \mathbf{S}.$$

Поскольку объём цилиндра равен  $V = LS \cos \alpha = LS$ , то, приравнивая два выражения для  $m$ , получаем

$$LS \cos \alpha I = \frac{J_m}{c} S.$$

Отсюда следует

$$I \cos \alpha = \frac{J_m}{cL}.$$

Вводя линейную плотность тока, т.е. поверхностный ток, приходящийся на единицу длины образующей цилиндра,  $i_m = J_m / L$ , получим

$$i_m = cI_L, \quad (4.1.2)$$

где введено обозначение

$$I_L = I \cos \alpha$$

для проекции вектора намагничивания на образующую цилиндра.

Выберем теперь в веществе произвольный замкнутый контур  $L$  и возьмём вокруг него тонкую трубку (т.е. возьмём тонкий тор, ось которого совпадает с контуром  $L$ ) (рис. 4.1.2).

На единицу длины контура приходится ток намагничивания  $i_m = cI_L$ , так что по боковой поверхности элементарного цилиндра течёт поверхностный ток

$$dJ_m = i_m dl = cI_L dl = cIdl.$$

Полный ток намагничивания, пересекающий контур  $L$ , равен

$$\oint_L J_m dl = c \oint_L idl. \quad (4.1.3)$$

Это соотношение представляет собой связь молекулярного тока с вектором намагничивания в интегральной форме.

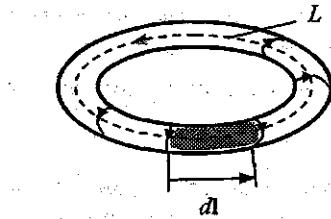


Рис. 4.1.2. Замкнутый контур  $L$  и торoidalный цилиндр вокруг него. Указан также элементарный цилиндр, образующей которого является вектор  $dl$

Полученное выражение на основании теоремы Стокса преобразуется к виду

$$J_m = c \int_S \text{rot } IdS,$$

где  $S$  — поверхность, опирающаяся на контур  $L$ . Поскольку, с другой стороны, ток, текущий через поверхность  $S$ , можно выразить через плотность тока формулой

$$J_m = \int_S j_m dS,$$

то ввиду произвольности выбранного контура  $L$  и поверхности  $S$  заключаем, что плотность молекулярных токов связана с вектором намагничивания формулой

$$j_m = c \operatorname{rot} \mathbf{I}. \quad (4.1.4)$$

Это соотношение даёт связь молекулярного тока с вектором намагничивания в дифференциальной форме.

#### 4.1.5. Теорема о циркуляции магнитного поля. Вектор $\mathbf{H}$

Как показано выше, молекулярный ток, пересекающий контур  $L$ , связан с намагниченностью соотношением

$$J_m = c \oint_L Idl.$$

Применим теорему о циркуляции для магнитного поля, сформулированную для поля в вакууме:

$$\oint_L \mathbf{B} dl = \frac{4\pi}{c} (J + J_m).$$

Здесь  $J$  и  $J_m$  — соответственно ток проводимости и молекулярный ток, пронизывающие контур  $L$ . Отсюда следует

$$\oint_L \mathbf{B} dl = \frac{4\pi}{c} \left( J + c \oint_L Idl \right).$$

Вводя обозначение

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{I}, \quad (4.1.5)$$

перепишем последнее равенство в следующем виде:

$$\oint_L \mathbf{H} dl = \frac{4\pi}{c} J. \quad (4.1.6)$$

Полученное соотношение представляет собой *теорему о циркуляции для магнитного поля в веществе в интегральной форме*.

Введённый в (4.1.5) вектор  $\mathbf{H}$  называется *напряжённостью магнитного поля*. Этот вектор является вспомогательным и служит для упрощения вида уравнений. Существенно, что его циркуляция определяется только токами проводимости, что позволяет в ряде задач упростить расчёт магнитного поля в среде.

Используем теперь теорему о циркуляции в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_m),$$

где все токи разделены на токи проводимости ( $\mathbf{j}$ ) и молекулярные ( $\mathbf{j}_m$ ). Имея в виду связь плотности молекулярного тока с вектором намагничивания:  $\mathbf{j}_m = c \operatorname{rot} \mathbf{I}$ , получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + c \operatorname{rot} \mathbf{I}).$$

Наконец, вводя вектор напряжённости магнитного поля  $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{I}$ , получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (4.1.7)$$

Это соотношение называется *теоремой о циркуляции в дифференциальной форме*.

#### 4.1.6. Границные условия для векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$

1) Применяя теорему Гаусса к бесконечно малому прямоугольному параллелепипеду, охватывающему часть границы раздела двух сред (см. рис. 4.1.3), имеем

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \Rightarrow \mathbf{B}_1 d\mathbf{S}_1 + \mathbf{B}_2 d\mathbf{S}_2 = 0.$$

Поскольку  $d\mathbf{S}_1 = -d\mathbf{S}_2 = n d\mathbf{S}$ , то  $(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)n = 0$ . Окончательно находим

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (4.1.8)$$

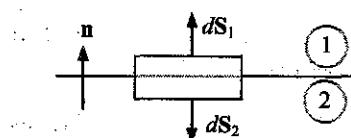


Рис. 4.1.3. К выводу граничного условия для  $B_n$ . Бесконечно малый объём, охватывающий часть поверхности раздела сред

2) Применяя теорему о циркуляции к бесконечно малому контуру, проходящему над и под поверхностью раздела сред (рис. 4.1.4), получаем:

$$\oint_L \mathbf{H} dl = \frac{4\pi}{c} J \Rightarrow \mathbf{H}_1 dl_1 + \mathbf{H}_2 dl_2 = \frac{4\pi}{c} i_N dl.$$

Здесь вектор  $\mathbf{N}$  задаёт нормаль к плоскости контура, так что величина  $i_N$  есть линейная плотность тока, пересекающего контур по нормали к нему.

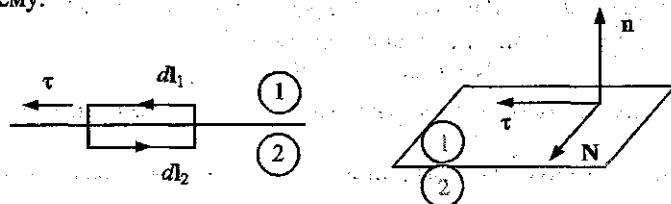


Рис. 4.1.4. К выводу граничного условия для  $\mathbf{H}$ . Слева — контур, проходящий ниже и выше границы раздела сред, справа — тройка векторов: вектор  $\tau$  направлен по касательной к контуру, а вектор  $\mathbf{N}$  — по нормали к плоскости контура, а вектор  $\mathbf{n}$  — по нормали к границе раздела сред

Поскольку  $d\mathbf{l}_2 = -d\mathbf{l}_1$ ,  $d\mathbf{l}_1 = \tau dl$ , то  $(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)\tau = i_N \frac{4\pi}{c}$ . Отсюда находим

$$\mathbf{H}_{1\tau} - \mathbf{H}_{2\tau} = \frac{4\pi}{c} i_N. \quad (4.1.9)$$

Последнему условию можно придать иной вид, не связанный с конкретным выбором векторов  $\mathbf{N}$  и  $\tau$ . Именно, положим (рис. 4.1.4)  $\tau = \mathbf{N} \times \mathbf{n}$ . Тогда

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)\tau = \frac{4\pi}{c} i_N, \text{ или } (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)(\mathbf{N} \times \mathbf{n}) = \frac{4\pi}{c} i_N.$$

Произведя циклический сдвиг сомножителей в смешанном произведении векторов, получим

$$[\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)]\mathbf{N} = \frac{4\pi}{c} i_N.$$

Отсюда ввиду произвольности выбора вектора  $\mathbf{N}$  заключаем

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}. \quad (4.1.10)$$

Это есть граничное условие (4.1.9), записанное в векторной форме.

## 4.2. Магнитные среды

### 4.2.1. Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость

Если магнитное поле слабое и в среде нет изначальной намагниченности, то можно положить

$$\mathbf{I} = \kappa \mathbf{H}$$

Коэффициент  $\kappa$  называется *магнитной восприимчивостью*.

Подставим это соотношение в формулу  $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{I}$ , определяющую напряжённость магнитного поля. Это даёт

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mu = 1 + 4\pi\kappa.$$

Введённая здесь величина  $\mu$  называется *магнитной проницаемостью среды*.

Среды, у которых  $\mu = \text{const}$ , называются *линейными магнитными средами*. Однако во многих случаях  $\mu = \mu(H) \neq \text{const}$ .

#### 4.2.2. Парамагнетики, диамагнетики, ферромагнетики

В зависимости от значения магнитной проницаемости выделяют следующие два основных класса сред.

1) Если  $\kappa > 0, \mu > 1$ , то вещество называется *парамагнетиком*.

2) Если  $\kappa < 0, \mu < 1$ , то вещество называется *диамагнетиком*.

Деление веществ на парамагнетики и диамагнетики предложил М. Фарадей в 1845 г.

Парамагнитными свойствами обладают, например, Al, Pt, FeCl<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, щёлочные и щёлочноземельные металлы.

Диамагнетиком является Bi, Sb, Si, H<sub>2</sub>O, H<sub>2</sub>, N<sub>2</sub> и другие.

Некоторые вещества могут сохранять намагниченность  $I \neq 0$  в отсутствие внешнего магнитного поля. Такие вещества называются *ферромагнетиками*. К их числу относятся, например, Fe, Co, Ni.

Типичные значения магнитной восприимчивости для диа- и парамагнетиков составляют  $|\kappa| \sim 10^{-7} - 10^{-5}$ . Вместе с тем вещества в парамагнитном состоянии могут иметь и большую магнитную проницаемость  $\mu \gg 1$ . Как правило, эти же вещества могут при определённых условиях переходить в ферромагнитное состояние.

Парамагнетизм и ферромагнетизм связаны с ориентацией магнитных моментов молекул (точнее: с выстраиванием, переориентацией магнитных моментов электронных оболочек и ядер).

Диамагнетизм связан с возникновением магнитного момента у атомов (молекул) под действием внешнего магнитного поля, которые в отсутствие поля собственным магнитным моментом не обладают.

Если между векторами  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  имеется связь  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , то теорему о циркуляции можно записать в виде

$$\oint \mathbf{B} dl = \frac{4\pi\mu}{c} J, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{j}.$$

Эти равенства показывают, что при  $\mu > 1$  (в парамагнетиках) поле в среде усиливается по сравнению с полем в вакууме, а при  $\mu < 1$  (в диамагнетиках) — ослабляется.

Из характерных свойств магнетиков отметим следующие.

1) Во внешнем неоднородном магнитном поле парамагнетики втягиваются в область сильного поля, а диамагнетики выталкиваются из области сильного поля.

2) Если рассматривать поведение вытянутых образцов в магнитном поле, то окажется, что парамагнетики и ферромагнетики ориентируются *вдоль силовых линий поля*<sup>1</sup>, а диамагнетики — *перпендикулярно* силовым линиям.

#### 4.2.3. Преломление силовых линий

Рассмотрим поведение силовых линий магнитного поля на границе раздела двух магнетиков — рис. 4.2.1. Как следует из граничных условий, силовые линии преломляются:

$$H_1 \sin \alpha_1 = H_2 \sin \alpha_2,$$

$$B_1 \cos \alpha_1 = B_2 \cos \alpha_2.$$

Полагая  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , находим

$$\begin{cases} H_1 \sin \alpha_1 = H_2 \sin \alpha_2, \\ \mu_1 H_1 \cos \alpha_1 = \mu_2 H_2 \cos \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Отсюда следует, что при  $\mu_2 > \mu_1$  силовые линии магнитного поля сильнее отклоняются от нормали к границе раздела сред:  $\alpha_2 > \alpha_1$ . Это приводит к сгущению силовых линий в среде с большей магнитной проницаемостью, как показано на рис. 4.2.2.

На явлении преломления силовых линий основана *магнитная защита*. Если в металлическом теле (имеющем большую магнитную проницаемость) имеется полость, то силовые линии внешнего магнитного поля сгущаются в металлической оболочке и идут по ней как по каналу, огибая полость (рис. 4.2.3). В результате поле в полости оказывается меньше внешнего поля. Разумеется, магнитная защита оказывается

<sup>1</sup> На этом свойстве основано использование магнитных стрелок в компасах: ферромагнитные стрелки ориентируются *вдоль* силовых линий в направлении *одного* полюса магнита к другому.

лишь частичной, и её эффективность ниже, чем эффективность защиты от электростатических полей.

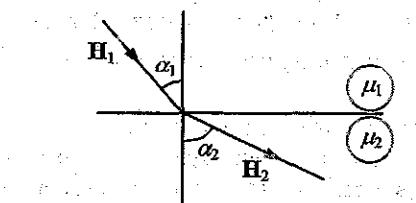


Рис. 4.2.1. Преломление силовых линий магнитного поля

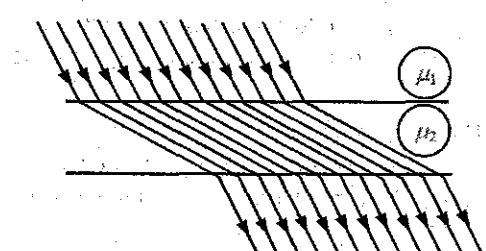


Рис. 4.2.2. Сгущение силовых линий магнитного поля в области с большим значением  $\mu$ ;  $\mu_2 > \mu_1$

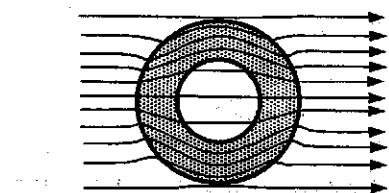


Рис. 4.2.3. Ослабление магнитного поля в полости, окружённой оболочкой с большой магнитной проницаемостью

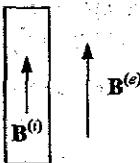
#### 4.2.4. Намагничивание стержня во внешнем однородном поле

Внесём стержень, изготовленный из магнетика с магнитной проницаемостью  $\mu$ , во внешнее однородное магнитное поле  $B^{(e)}$ . Пусть стержень ориентирован параллельно силовым линиям магнитного поля (рис. 4.2.4). Найдём магнитное поле  $B^{(i)}$  внутри стержня и приобретённый этим стержнём магнитный момент  $I$ .

Внешнее поле и поле в стержне в рассматриваемых условиях параллельны и направлены вдоль оси стержня. Считая, что токи проводимости отсутствуют, имеем следующие условия на границе раздела сред:

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1x} = H_{2x}.$$

Рис. 4.2.4. Стержень из магнетика в однородном магнитном поле



В рассматриваемой задаче непрерывность касательной составляющей напряженности магнитного поля означает, что  $H^{(i)} = H^{(e)}$ . Поскольку среда вне стержня имеет  $\mu = 1$ , то  $H^{(e)} = B^{(e)}$ , так что

$$\mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{B}^{(e)}.$$

В стержне имеем  $H^{(i)} = B^{(i)} / \mu$ . Таким образом, получаем

$$\mathbf{B}^{(i)} = \mu \mathbf{B}^{(e)}.$$

В соответствии с определением напряженности магнитного поля имеем:

$$\mathbf{B}^{(i)} = \mathbf{H}^{(i)} + 4\pi \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{I} = \frac{\mathbf{B}^{(i)} - \mathbf{H}^{(i)}}{4\pi} = \frac{\mu - 1}{4\pi} \mathbf{H}^{(i)}.$$

Здесь учтено, что  $\mathbf{B}^{(i)} = \mu \mathbf{H}^{(i)}$ . Поскольку в соответствии с граничным условием  $H^{(i)} = B^{(e)}$ , то получаем окончательно

$$\mathbf{I} = \frac{\mu - 1}{4\pi} \mathbf{B}^{(e)}.$$

#### 4.2.5. Магнитное поле однородно намагниченного шара

Пусть имеется однородно намагниченный шар. Для нахождения создаваемого им магнитного поля воспользуемся формальной аналогией. Сопоставим задачу электростатики (для однородно поляризованного шара) и задачу магнитостатики (для однородно намагниченного шара):

$$\left[ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}) = 0, \quad D_{1n} = D_{2n}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad E_{1t} = E_{2t}, \end{array} \right] \leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\mathbf{H} + 4\pi \mathbf{I}) = 0, \quad B_{1n} = B_{2n}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad H_{1t} = H_{2t}. \end{array} \right]$$

Первая задача справедлива для случая, когда нет свободных зарядов, а вторая — когда нет токов проводимости. Сравнение показывает, что имеется *формальное соответствие*:

$$\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} \leftrightarrow \mathbf{B}, \quad \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{I}.$$

Заметим, что *физическое соответствие* обратное:  $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{B}, \quad \mathbf{D} \leftrightarrow \mathbf{H}$ ). Используя это соответствие, можно перенести результаты решения од-

ной задачи на другую. Именно, поскольку поле однородно поляризованного шара радиуса  $R$  даётся формулами

$$\text{внутри шара: } \mathbf{E} = -\frac{4\pi}{3} \mathbf{P}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} = \frac{8\pi}{3} \mathbf{P},$$

$$\text{вне шара: } \mathbf{E} = \mathbf{D} = \frac{3(pr)\mathbf{r} - pr^2}{r^5},$$

где  $p = \frac{4\pi}{3} R^3 P$  — дипольный момент шара, то для однородно намагниченного шара по аналогии получаем

$$\text{внутри шара: } \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{3} \mathbf{I}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{I} = \frac{8\pi}{3} \mathbf{I},$$

$$\text{вне шара: } \mathbf{H} = \mathbf{B} = \frac{3(mr)\mathbf{r} - mr^2}{r^5},$$

где  $m = \frac{4\pi}{3} R^3 I$  — магнитный момент шара. Вне шара магнитное поле совпадает с полем точечного магнитного диполя с магнитным моментом  $m$ .

#### 4.2.6. Намагничивание шара во внешнем однородном поле

Пусть в однородное магнитное поле внесён магнетик в форме шара, имеющий магнитную проницаемость  $\mu$ . Найдём магнитное поле внутри магнетика и приобретённый им магнитный момент.

Под действием магнитного поля шар намагничивается и приобретает намагниченность  $I$ . В силу принципа суперпозиции поле внутри шара складывается из внешнего поля ( $\mathbf{B}^{(e)}$ ) и поля  $\Delta \mathbf{B}$ , вызванного намагниченностью:

$$\mathbf{B}^{(i)} = \mathbf{B}^{(e)} + \Delta \mathbf{B}, \quad \Delta \mathbf{B} = \frac{8\pi}{3} \mathbf{I}.$$

Поскольку

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{B}^{(i)} - \mathbf{H}^{(i)}}{4\pi} = \frac{\mu - 1}{4\pi} \mathbf{H}^{(i)} = \frac{\mu - 1}{4\pi} \frac{\mathbf{B}^{(i)}}{\mu},$$

то получаем

$$\mathbf{B}^{(i)} = \mathbf{B}^{(e)} + \frac{8\pi}{3} \frac{\mu - 1}{4\pi\mu} \mathbf{B}^{(i)},$$

откуда находим поле внутри шара:

$$\mathbf{B}^{(i)} = \frac{3\mu}{\mu+2} \mathbf{B}^{(e)}$$

Намагниченность шара при этом оказывается равной

$$I = \frac{\mu-1}{4\pi} \frac{\mathbf{B}^{(i)}}{\mu} = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu-1}{\mu+2} \mathbf{B}^{(e)}$$

#### 4.2.7. Постоянный магнит

**Постоянный магнит** — это ферромагнитное вещество с постоянной (ненулевой) намагниченностью.

Поскольку силовые линии индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$  всегда замкнуты, то они ведут себя так же, как у витка с током (токового диполя) или соленоида (рис. 4.2.5 слева).

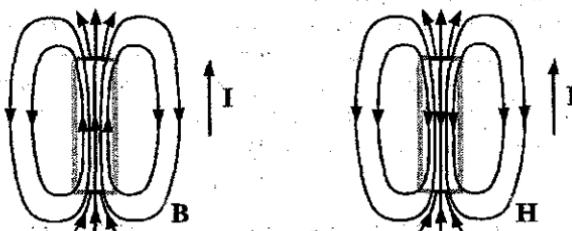


Рис. 4.2.5. Силовые линии индукций  $\mathbf{B}$  (слева) и напряжённости  $\mathbf{H}$  (справа) магнитного поля внутри и вне магнита с намагниченностью  $I$ .

Величину магнитного поля внутри постоянного магнита можно найти следующим образом. Пусть магнит представляет собой длинный стержень с постоянной намагниченностью (рис. 4.2.5). Этот магнит эквивалентен соленоиду, по боковой поверхности которого текут молекулярные токи. Если соленоид имеет длину  $l$ , площадь поперечного сечения  $S$  и  $N$  витков, а по его обмотке течёт ток  $J$ , то его магнитный момент равен  $m = N(JS/c)$ . Следовательно, намагниченность эквивалентного магнита равна

$$I = \frac{m}{V} = \frac{1}{c} \frac{NJS}{lS} = \frac{1}{c} Jn \Rightarrow J = \frac{cI}{n}$$

( $V = lS$  — объём магнита). Как было показано в разделе 3.2.5, в объёме длинного соленоида вдали от торцов  $B = 4\pi nJ/c$ . Поэтому в объёме длинного намагниченного стержня

$$B_i = 4\pi I.$$

В векторной форме имеем  $\mathbf{B}_i = 4\pi I$ . На торцах длинного соленоида поле вдвое меньше. Поэтому на торцах магнита

$$B_s = 2\pi I.$$

Напряжённость магнитного поля  $\mathbf{H}$  во внешнем по отношению к магниту пространстве, где  $\mu = 1$ , совпадает с индукцией,  $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ . Поэтому там совпадают и силовые линии  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$ .

Покажем, что в объёме магнита силовые линии  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  направлены противоположно (рис. 4.2.5). Действительно, поскольку в отсутствие токов проводимости по теореме о циркуляции  $\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0$ , то, взяв в качестве контура  $L$  участки силовой линии, мы заключаем, что существуют участки, где слагаемые  $\mathbf{H} d\mathbf{l}$  имеют противоположные знаки, т.е. на любом замкнутом контуре, составленном из силовых линий, есть точки, в которых вектор  $\mathbf{H}$  меняет направление. Применимально к однородно намагниченному телу это означает следующее. Силовые линии  $\mathbf{H}$  начинаются и кончаются в точках поверхности, где испытывает скачок намагниченность  $I$ . Действительно, из теоремы о циркуляции в дифференциальной форме:  $\operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div}(\mathbf{H} + 4\pi \mathbf{I}) = 0$  следует, что

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = -4\pi \operatorname{div} \mathbf{I} = 4\pi \rho_m.$$

Величина  $\rho_m = -\operatorname{div} \mathbf{I}$  играет роль плотности «магнитных зарядов» — источников и стоков силовых линий (подобно электрическим зарядам, являющимся источниками и стоками силовых линий электрического поля). Пусть ось  $z$  направлена вдоль оси магнита, причём магнит находится в области  $z < 0$ . Тогда в непосредственной близости от торца

магнита имеем  $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = -4\pi \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial z}$ , откуда следует, что

$$H_e(0) - H_i(0) = 4\pi I$$

(индексы  $i$  и  $e$  обозначают соответственно внутреннюю и внешнюю стороны торца). Последняя формула показывает, что величина  $I$  играет роль поверхностной плотности эффективных магнитных зарядов ( $\sigma_m$ ).

Величину напряжённости магнитного поля внутри магнита можно найти, рассматривая поле эквивалентного соленоида. Если магнит длинный, то вдали от торцов  $\mathbf{B}_i = 4\pi I$ , так что  $\mathbf{H}_i = \mathbf{B}_i - 4\pi \mathbf{I} = 0$ . На торце соленоида

$$H_i(0) = B_i(0) - 4\pi I = -2\pi I,$$

$$H_e(0) = B_e(0) = 2\pi I.$$

В магните большой, но конечной длины напряжённость поля в центре не обращается в нуль. Действительно, согласно (3.2.8) в магните длины  $L$  и радиуса  $R$

$$B = B_\infty \left(1 - \frac{R^2}{2L^2}\right) = 4\pi I - \frac{2\pi IR^2}{L^2} \Rightarrow H = B - 4\pi I = -\frac{2\pi IR^2}{L^2}.$$

Здесь  $B_\infty = 4\pi I$  — индукция поля в магните бесконечной длины. Обозначая  $q_m = \pi R^2 I$ , получаем  $H = -2q_m/L^2$ . В этой формуле знак « $-$ » указывает на то, что вектор напряжённости магнитного поля направлен противоположно вектору индукции. Кроме того, величину  $q_m = \pi R^2 I$  можно *формально* рассматривать как эффективный магнитный заряд, сосредоточенный на торцах магнита и создающий *напряжённость* магнитного поля по закону Кулона.

*Тороидальный магнит* — это постоянный магнит, замкнутый в тор (рис. 4.2.6). В этом случае нет границ раздела сред, нет источников и стоков напряжённости магнитного поля  $H$ . Поэтому из теоремы о циркуляции  $\oint_L H dI = 0$  следует, что в объёме однопородного тороидального магнита  $H = 0$ . Соответственно оказывается  $B = 4\pi I \neq 0$ .

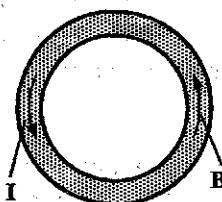


Рис. 4.2.6. Намагниченный тор:  $H = 0$ ,  $B \neq 0$

### 4.3. Магнитные цепи

#### 4.3.1. Захват магнитного потока сердечником

Рассмотрим цилиндр, изготовленный из вещества с большой постоянной магнитной проницаемостью ( $\mu \gg 1$ ). Пусть этот цилиндр находится во внешнем магнитном поле  $H^{(e)}$ , параллельном образующей цилиндра (рис. 4.3.1). Считаем, что вне цилиндра среда немагнитная, т.е. имеет магнитную проницаемость  $\mu = 1$ .

В силу граничных условий на боковой поверхности цилиндра имеем

$$H_\tau^{(i)} = H_\tau^{(e)}.$$

Следовательно, в рассматриваемых условиях поля внутри и вне цилиндра связаны соотношением

$$B^{(e)} = H^{(e)} = H^{(i)} = B^{(i)} / \mu.$$

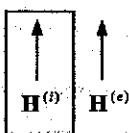


Рис. 4.3.1. Магнитное поле внутри и вне цилиндра

Таким образом, при  $\mu \gg 1$  поле в объёме цилиндра оказывается значительно больше поля вне цилиндра:  $B^{(e)} \ll B^{(i)}$ . Соответственно магнитный поток практически полностью сосредоточен в цилиндре. Это значит, что цилиндр является магнитопроводом, позволяющим переносить магнитный поток от источника к приёмнику почти без потерь. Поэтому вещества с большим значением магнитной проницаемости используют в качестве сердечников с целью уменьшить потери (рассеяние) магнитного поля.

### 4.3.2. Простейшая магнитная цепь. Закон Ома для магнитной цепи

Пусть из вещества с  $\mu \gg 1$  изготовлен сердечник, на который навито  $N$  витков, а по виткам пропущен ток  $J$  (рис. 4.3.2).

Так как поле вне сердечника мало, то почти весь магнитный поток

$$\Phi = \int_S B dS$$

захватывается сердечником ( $S$  — сечение сердечника). Иными словами, имеется приближённый закон сохранения:

$$\Phi = \text{const}$$

вдоль контура, проходящего по неразветвлённому сердечнику.

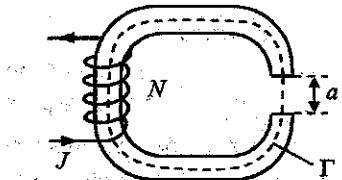


Рис. 4.3.2. Магнитная цепь, состоящая из сердечника, на который навита катушка с  $N$  витками. Сердечник имеет разрез ширины  $a$ .

Пусть  $S$  — площадь сечения сердечника,  $l$  — длина сердечника;  $a$  — ширина зазора. Положим

1)  $S^{1/2} \gg a$ . Величина  $S^{1/2}$  — есть характерный поперечный размер сердечника (поперёк потока). Данное неравенство означает, что поле в

зазоре можно считать практически однородным, пренебрегая краевыми эффектами.

2)  $l \gg S^{1/2}$ . В этом случае можно пренебречь неоднородностью поля по сечению сердечника, что позволяет положить

$$\Phi = BS.$$

Применим теорему о циркуляции для магнитного поля к замкнутому контуру  $\Gamma$ , проходящему по сердечнику, как показано на рис. 4.3.2:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} NJ.$$

С учётом принятых допущений отсюда следует

$$H_c l + H_3 a = \frac{4\pi}{c} NJ.$$

Здесь  $H_c$  — напряжённость поля в сердечнике, а  $H_3$  — напряжённость поля в зазоре. Исключим поле в зазоре, воспользовавшись граничным условием  $B_c = B_3$  (выполняющимся потому, что поле в зазоре перпендикулярно граничным поверхностям зазора):

$$H_3 = B_3 = B_c$$

(первое равенство справедливо, поскольку в зазоре среда имеет  $\mu = 1$ ).

Кроме того, учтём, что в сердечнике  $H_c = B_c / \mu$ . Тогда имеем

$$\frac{B_c}{\mu} l + B_c a = \frac{4\pi}{c} NJ.$$

Перейдём от напряжённости к магнитному потоку:  $\Phi = B_c S$ . В итоге получаем

$$\Phi \left( \frac{l}{\mu S} + \frac{a}{S} \right) = F,$$

где введено обозначение  $F = \frac{4\pi}{c} NJ$ . Величина  $F$  называется *магнитом- движущей силой*. Вводя обозначение

$$R_m = \frac{l}{\mu S} + \frac{a}{S},$$

перепишем полученное равенство в виде

$$\Phi R_m = F.$$

Величина  $R_m$  называется *магнитным сопротивлением*, а полученное равенство есть аналог закона Ома для магнитной цепи. В роли тока

здесь выступает магнитный поток, а в роли ЭДС — магнитодвижущая сила (МДС).

### 4.3.3. Правила Кирхгофа для магнитных цепей

Подобно правилам Кирхгофа для электрических цепей, существуют аналогичные правила для разветвлённых магнитных цепей.

**Правило 1.** Алгебраическая сумма магнитных потоков, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_i \Phi_i = 0.$$

Это равенство выражает закон сохранения магнитного потока (аналог закона сохранения заряда для электрических цепей) и прямо следует из теоремы Гаусса

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0,$$

применённой к узлу (рис. 4.3.3) с учётом того, что все магнитные потоки сосредоточены в сердечнике.

**Правило 2.** Для любого замкнутого контура

$$\sum_i \Phi_i R_{m_i} = \sum_k F_k.$$

В правой части равенства стоит сумма всех МДС, действующих в рассматриваемом контуре. Это равенство прямо следует из теоремы о циркуляции для магнитного поля.

В качестве примера на рис. 4.3.4 приведён простейший пример разветвлённой магнитной цепи. Для этой цепи составим уравнения Кирхгофа.

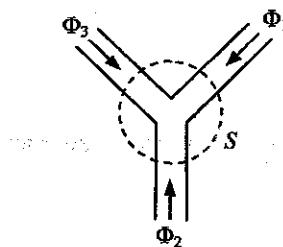


Рис. 4.3.3. Узел, в котором сходятся магнитные потоки.  $S$  — замкнутая поверхность, охватывающая узел

Во-первых, для узла  $Y_1$  имеем

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0.$$

Далее, для контура, включающего сердечники 1 и 2, имеем

$$\Phi_1 R_{m1} - \Phi_2 R_{m2} = F_1 + F_2,$$

а для контура, включающего сердечники 1 и 3, имеем

$$\Phi_1 R_{m1} - \Phi_3 R_{m3} = F_1.$$

Здесь  $R_{mi} = \frac{L_i}{\mu S_i}$  — магнитное сопротивление  $i$ -го сердечника,  $L_i$  и  $S_i$  — длина (от узла до узла) и площадь поперечного сечения этого сердечника ( $i=1, 2, 3$ ). Знаки магнитных потоков (в узле  $Y_1$ ) условно выбраны так, как если бы все потоки были направлены к этому узлу.

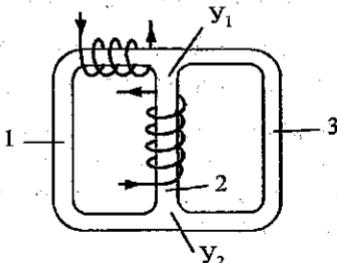


Рис. 4.3.4. Разветвлённая магнитная цепь, имеющая два узла ( $Y_1$  и  $Y_2$ ), два источника МДС и три неразветвлённых участка 1, 2 и 3 (между узлами)

Система трёх уравнений для трёх потоков  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  полностью определяет магнитные потоки во всех участках сердечника и, следовательно, магнитные поля всюду в цепи.

## Глава 5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

### 5.1. Работа сил Ампера при перемещении витка с током в магнитном поле

Возьмём рамку, по которой может свободно скользить перемычка, замыкающая верхний и нижний провода (рис. 5.1.1). Поместим эту систему в магнитное поле. Будем считать вначале, что поле перпендикулярно плоскости рамки.

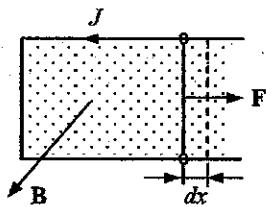


Рис. 5.1.1. Рамка с током в магнитном поле. Перемычка может свободно скользить, непрерывно замыкая верхний и нижний провода рамки

Если по рамке через перемычку течёт ток  $J$  (как показано на рис. 5.1.1), то на перемычку действует сила Лоренца:

$$F = \frac{J}{c} l B,$$

где  $l$  — длина перемычки. При указанных на рис. 5.1.1 направлениях тока  $J$  и внешнего магнитного поля  $B$  сила  $F$  направлена вправо и при смещении перемычки на  $dx$  совершает работу

$$dA = F dx = \frac{J}{c} B l dx = \frac{J}{c} d\Phi, \quad (5.1.1)$$

Площадь контура с током меняется на  $dS = l dx$ . Величина  $d\Phi = d(BS)$  представляет собой изменение магнитного потока через контур. При смещении перемычки на конечное расстояние

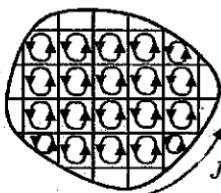
$$A_{12} = \frac{J}{c} (\Phi_2 - \Phi_1).$$

Пусть поле направлено под произвольным углом к плоскости контура (рамки). Положим  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp + \mathbf{B}_{\parallel}$ , где  $\mathbf{B}_\perp$  — составляющая, направленная по нормали к площиади, а  $\mathbf{B}_{\parallel}$  — лежащая в плоскости контура. Составляющая  $\mathbf{B}_{\parallel}$  создаёт силу, перпендикулярную плоскости и, следовательно, перпендикулярную смещению перемычки и поэтому не производящую работу. С учётом этого магнитный поток, приводящий к производству работы, определяется только компонентой поля  $\mathbf{B}_\perp$ :

$$\Phi = B_\perp S = BS.$$

В случае произвольно деформируемого витка и поля, меняющегося от точки к точке, весь замкнутый контур нужно мысленно разбить на бесконечно малые замкнутые элементы тока (рис. 5.1.2). Поскольку токи в общих участках соседних витков равны по величине и противоположны по направлению, то токи по всей площиади исходного контура компенсируют друг друга, и остаётся только ток  $J$  в исходном контуре.

Рис. 5.1.2. Контур с током мысленно разбит на элементарные витки, в которых циркулируют одни и те же по величине и направлению токи



Считая поле в пределах одного элемента однородным, получаем

$$dA = \frac{J}{c} d\Phi,$$

где магнитный поток теперь определяется формулой

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}, \quad (5.1.2)$$

в которой интегрирование ведётся по площиади, ограничивающей контуром с током.

Заметим, что в этом процессе совершается работа, тогда как само магнитное поле работу не может производить (сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости движения зарядов). Для разрешения этого противоречия учём, что заряды в перемычке движутся не только в направлении проводника ( $\mathbf{u}_{\parallel}$ ), но и в направлении скорости перемычки ( $\mathbf{u}_\perp$ ):  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\perp + \mathbf{u}_{\parallel}$ . Эта вторая составляющая скорости приводит к появлению силы Лоренца:  $\Delta F = e\mathbf{u}_\perp \times \mathbf{B}/c$ , действующей против направле-

ния тока  $J$ . Поэтому для поддержания неизменного тока в цепь должны быть включены сторонние ЭДС. Именно благодаря внешним источникам энергии совершается работа по перемещению перемычки.

## 5.2. Электромагнитная индукция в движущихся и неподвижных проводниках

### 5.2.1. ЭДС индукции

Рассмотрим проводящую рамку, замкнутую подвижной перемычкой (рис. 5.2.1). Пусть рамка помещена в магнитное поле с индукцией  $B$ , направленной перпендикулярно плоскости. Если перемычка движется со скоростью  $v$ , то на заряды в перемычке действует сила Лоренца:

$F = \frac{q}{c} v \times B$ . Как видно из рис. 5.2.1, эта сила приводит заряды в движение, вызывая индукционный ток в отрицательном направлении обхода контура. Она эквивалентна силе, создаваемой сторонним электрическим полем

$$E_{\text{стор}} = \frac{F}{q} = \frac{1}{c} v \times B$$

и вызывает в перемычке длиной  $l$  ЭДС индукции, равную

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \oint E_{\text{стор}} dL = -E_{\text{стор}} l = -\frac{1}{c} Blv.$$

Знак « $-$ » здесь связан с тем, что  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$  создаёт ток в отрицательном направлении (положительное направление задаётся вектором  $B$ ).

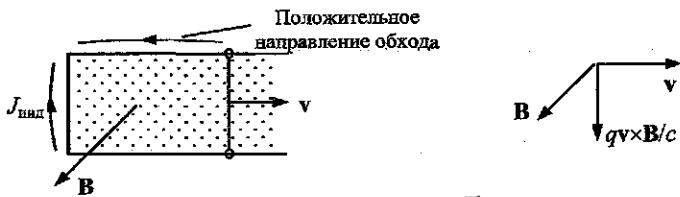


Рис. 5.2.1. Слева — рамка с током в магнитном поле. Перемычка может свободно скользить, непрерывно замыкая верхний и нижний провода рамки; справа — направление силы Лоренца, действующей на движущиеся положительные заряды

Поскольку  $lv = dS/dt$ , где  $S$  — площадь контура, то

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (5.2.1)$$

где  $\Phi = BS$  — магнитный поток через контур.

Если имеется составляющая магнитного поля  $B_{\parallel}$ , параллельная плоскости контура, то она не приводит к появлению индукционного тока вдоль контура, поскольку соответствующая составляющая силы Лоренца  $F^{(1)} = \frac{1}{c} v \times B_{\parallel}$  перпендикулярна плоскости контура, т.е. направлена перпендикулярно проводнику. Это значит, что в выражении для потока  $\Phi$  нужно учесть только составляющую  $B_{\perp}$ , т.е. положить  $\Phi = B_{\perp}S = BS$ .

Если магнитное поле неоднородно в границах контура, то нужно разбить контур на бесконечно малые замкнутые элементы тока и рассмотреть движение этих элементов, считая поле однородным в пределах отдельного элемента. Следовательно, магнитный поток определяется интегралом по площади, ограниченной контуром:

$$\Phi = \int_S B dS.$$

### 5.2.2. Правило Ленца

Пусть магнитный поток растёт со временем. Тогда возникает ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ , создающая ток  $J_{\text{инд}}$  в отрицательном направлении. Этот ток создаёт дополнительное магнитное поле  $\Delta B$ , ориентированное против исходного поля  $B$ . Таким образом, приходим к *правилу Ленца*:

*индуцированный ток имеет такое направление, чтобы с помощью созданного им магнитного поля препятствовать изменению магнитного потока, т.е. чтобы ослабить действие причины, возбуждающей этот ток.*

Индукционные токи, возбуждаемые в массивных проводниках, называются *токами Фуко*.

### 5.2.3. Возникновение индукционных токов

а) Если постоянный магнит неподвижен, а двигается провод (замкнутый виток), то в проводе возникнет индукционный ток, обусловленный ЭДС индукции:  $\mathcal{E}_{\text{инд}} = -(1/c)(d\Phi/dt)$ .

б) Если перейти в систему отсчёта, связанную с проводником, то ток остаётся, но двигается уже магнит.

в) Магнитный поток  $\Phi$  в случаях «а» и «б» меняется за счёт изменения относительного расположения магнита и провода. Но такое же изменение  $\Phi$  можно получить, используя переменное магнитное поле,

точно совпадающее с полем движущегося магнита в месте нахождения провода.

Отсюда следует, что при всяком изменении магнитного потока, пронизывающего контур движущегося или неподвижного проводника, возникает индукционный ток, причём ЭДС индукции во всех случаях равна  $\mathcal{E}_{\text{инд}} = -(1/c)(d\Phi/dt)$ .

#### 5.2.4. Закон сохранения магнитного потока

Пусть замкнутый виток с сопротивлением  $R$  находится во внешнем магнитном поле (рис. 5.2.2 слева). При всяком изменении магнитного поля в витке возбуждается ЭДС индукции и ток, стремящийся (по правилу Ленца) ослабить изменение магнитного потока через контур витка:

$$J = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R} = \frac{1}{RC} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (5.2.2)$$

Полный магнитный поток складывается из потока внешнего поля ( $\Phi_e$ ) и потока, создаваемого индукционным током ( $\Phi_i$ ). Если сопротивление контура мало,  $R \rightarrow 0$ , то из приведенной формулы следует

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0, \quad \Phi = \Phi_e + \Phi_i = \text{const} \quad (5.2.3)$$

(иначе даже малые изменения  $\Phi$  вызывали бы бесконечные токи).

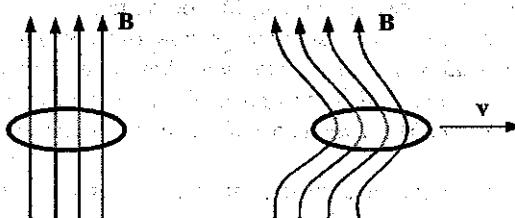


Рис. 5.2.2. Движущийся проводящий контур увлекает силовые линии неоднородного магнитного поля, пересекающие контур (эффект «вмороженного» поля)

Таким образом, магнитный поток через контур с малым сопротивлением сохраняется. Это, в частности, означает, что в неоднородном поле число силовых линий, пронизывающих виток, неизменно. Говорят, что силовые «вморожены» в проводящий контур. Описанный эффект проиллюстрирован на рис. 5.2.2.

### **5.2.5. Фарадеевская и максвелловская трактовка электромагнитной индукции**

Согласно Фарадею электромагнитная индукция состоит в возникновении индукционного электрического тока. Для её наблюдения требуется замкнутый проводник.

Согласно Максвеллу явление электромагнитной индукции состоит в том, что всякое переменное магнитное поле возбуждает в пространстве электрическое поле; проводники для этого не требуются. Индукционные же токи возбуждаются в проводниках индуцированным электрическим полем.

### **5.2.6. Вихревое электрическое поле**

Поскольку магнитный поток равен  $\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$ , а ЭДС индукции

есть  $\mathcal{E}_{\text{инд}} = \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l}$ , то из закона индукции:  $\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$  следует

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}.$$

Воспользуемся теоремой Стокса:  $\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{E} d\mathbf{S}$ . Ввиду произвольности контура получаем:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (5.2.4)$$

Последнее равенство представляет собой *дифференциальную форму закона электромагнитной индукции*. В отличие от электростатики здесь  $\operatorname{rot} \mathbf{E} \neq 0$ . Это значит, что индуцируемое электрическое поле является не потенциальным, а вихревым.

### **5.2.6. Выражение электрического поля через потенциалы**

Воспользуемся полученным выше уравнением (5.2.4). Подставим сюда выражение для магнитного поля через векторный потенциал  $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ :

$$\operatorname{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Равенство нулю ротора некоторого векторного поля означает, что это поле потенциальное и может быть представлено как градиент скалярной функции. Таким образом, получаем

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

В частном случае постоянных во времени полей приходим к известному равенству:  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ , откуда видно, что введённая здесь функция  $\varphi$  совпадает со скалярным потенциалом.

## Глава 6. ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ

### 6.1. Нерелятивистские законы преобразования полей

#### 6.1.1. Преобразование электрического поля

Пусть заряженная частица в системе отсчёта  $S$  движется со скоростью  $v$  в полях  $E$  и  $B$ . Тогда на неё действует сила

$$\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right).$$

Перейдём в систему отсчёта  $S'$ , движущуюся со скоростью  $v$ , в которой частица поконится. В этой системе на частицу действует только сила со стороны электрического поля (магнитное поле на покоящуюся частицу не действует):

$$\mathbf{F}' = q\mathbf{E}'.$$

В нерелятивистском пределе сила есть инвариант, т.е.  $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$ . Отсюда следует первый закон преобразования:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (6.1.1)$$

Переход от системы отсчёта  $S'$ , к системе  $S$  получается изменением знака скорости:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}'. \quad (6.1.2)$$

#### 6.1.2. Преобразование магнитного поля

Из закона Био-Савара следует, что магнитное поле заряда, движущегося со скоростью  $v$ , равно

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}', \quad \mathbf{E}' = \frac{q\mathbf{r}}{r^3}.$$

Рассмотрим систему покоящихся (в системе отсчёта  $S'$ ) заряженных частиц. Они создают электростатическое поле

$$\mathbf{E}' = \sum_k \frac{q_k}{r_k^3} \mathbf{r}_k = \sum_k \mathbf{E}'_k .$$

Перейдём в систему отсчёта  $S$ , движущуюся со скоростью  $\mathbf{v}$ . Тогда каждый из зарядов системы создаёт магнитное поле  $\mathbf{B}_k = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}'_k$ , а все вместе они создают поле

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}' .$$

Таким образом, в системе отсчёта, в которой заряды движутся, возникает магнитное поле. Если в исходной системе присутствует магнитное поле  $\mathbf{B}'$  (создаваемое, например, собственным магнитным моментом частицы), то суммарное магнитное поле даётся формулой

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}' + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}' . \quad (6.1.3)$$

Обратный переход от системы  $S$  к системе  $S'$  получается изменением знака скорости:

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}' . \quad (6.1.4)$$

Пары формул (6.1.1), (6.1.4) и (6.1.2), (6.1.3) дают нерелятивистские законы преобразования полей при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой. Эти законы сведены в таблицу.

#### Нерелятивистские преобразования полей

Переход от $S$ к $S'$	Переход от $S'$ к $S$
$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$	$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}'$
$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}$	$\mathbf{B} = \mathbf{B}' + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}'$

## 6.2. Релятивистские законы преобразования полей

### 6.2.1. Инвариантность заряда

При выводе закона сохранения заряда:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

предполагалось, что величина заряда не зависит от его скорости. Данное утверждение есть фактически результат опыта. Допустим, что это не так, т.е. что заряд зависит от скорости,  $q = q(v)$ . Возьмём электронейтральное тело, в котором положительные и отрицательные заряды точно скомпенсированы. Будем нагревать это тело. Тогда лёгкие частицы начинают двигаться быстрее, чем тяжёлые (например, в газе  $v_T = \sqrt{3kT/m} \sim m^{-1/2}$ ). В результате заряд одного знака начнёт преобладать — тело приобретёт нескомпенсированный заряд.

Однако такой эффект не наблюдался ни в одном эксперименте. Это означает независимость заряда от скорости.

### 6.2.2. Преобразования полей

Обозначим индексом « $\parallel$ » компоненты полей, параллельные вектору скорости, а индексом « $\perp$ » — компоненты, перпендикулярные скорости. Тогда законы преобразования полей записываются следующим образом:

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}'_{\parallel}, \quad \mathbf{E}_{\perp} = \frac{\mathbf{E}'_{\perp} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}'_{\perp}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}},$$

$$\mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{B}'_{\parallel}, \quad \mathbf{B}_{\perp} = \frac{\mathbf{B}'_{\perp} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}'_{\perp}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Обратные преобразования получаются изменением знака скорости.

Нетрудно проверить, что приведённые выше нерелятивистские формулы следуют из точных формул в предельном случае  $v \ll c$ .

Имеются два инварианта электромагнитного поля:

$$I_1 \equiv \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 = \text{inv},$$

$$I_2 \equiv \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \text{inv}.$$

Эти инварианты, в частности, показывают, что если в какой-либо системе отсчёта  $I_2 \neq 0$ , то не существует системы отсчёта, в которой одно из полей обращалось бы в нуль. Другими словами, невозможно выбором системы отсчёта исключить хотя бы одно из полей.

Пусть в системе  $S'$  инвариант  $I_2 = 0$ , т.е.  $\mathbf{E}' \perp \mathbf{B}'$ .

Если при этом  $I_1 > 0$ , или  $|\mathbf{E}'| > |\mathbf{B}'|$ , то существует система отсчёта  $S$ , в которой присутствует только электрическое поле. Из формул пре-

образований полей следует, что эта система отсчёта должна двигаться с такой скоростью, что

$$\mathbf{B}' + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}' = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = c \frac{\mathbf{B}' \times \mathbf{E}'}{E'^2}.$$

Если же  $I_1 < 0$ , то подходящим выбором системы отсчёта можно исключить электрическое поле, так что остаётся только магнитное поле. Скорость соответствующей системы отсчёта такова, что

$$\mathbf{E}' - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}' = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = c \frac{\mathbf{B}' \times \mathbf{E}'}{B'^2}.$$

Взаимное расположение векторов  $\{\mathbf{E}', \mathbf{B}', \mathbf{v}\}$  показано на рис. 6.2.1.

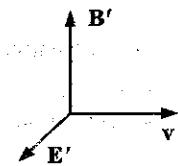


Рис. 6.2.1. Относительное расположение векторов полей и скорости системы отсчёта, в которой одно из полей обнуляется (в исходной системе  $\mathbf{E}' \perp \mathbf{B}'$ )

### 6.2.3. Преобразование потенциалов

Электромагнитное поле характеризуется скалярным  $\varphi$  и векторным  $\mathbf{A}$  потенциалами, причём

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Эта пара потенциалов полностью определяет электромагнитное поле и, оказывается, образует 4-вектор

$$A = (\varphi, A_x, A_y, A_z),$$

компоненты которого преобразуются при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой в соответствии с преобразованиями Лоренца:

$$\varphi = \frac{\varphi' + (v/c) A'_x}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad A'_x = \frac{A'_x + (v/c)\varphi'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad A'_y = A'_y, \quad A'_z = A'_z;$$

$$\varphi' = \frac{\varphi - (v/c) A_x}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad A'_x = \frac{A_x - (v/c)\varphi}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad A'_y = A_y, \quad A'_z = A_z.$$

Предполагается, что ось  $x$  направлена по вектору скорости  $v$ .

В качестве примера применения этих формул рассмотрим следующую задачу. Пусть тонкий плоский лист диэлектрика равномерно заря-

жен с поверхностной плотностью  $\sigma'$  (рис. 6.2.2). Найдём магнитное поле, создаваемое этим листом в том случае, когда лист движется (в своей плоскости) со скоростью  $v$ .

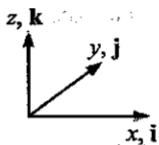
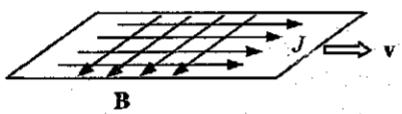


Рис. 6.2.2. Широкий длинный лист диэлектрика, равномерно заряженный по поверхности, движется равномерно и прямолинейно со скоростью  $v$

Будем считать, что ось  $x$  направлена по вектору скорости листа, а ось  $z$  — перпендикулярно листу. Величины, относящиеся к собственной системе отсчёта листа, помечаем штрихом.

В собственной системе отсчёта заряженного листа имеется только электрическое поле:

$$\mathbf{E}' = 2\pi\sigma' \mathbf{k},$$

где  $\mathbf{k}$  — единичный вектор, направленный вдоль оси  $z$  (мы рассматриваем только область  $z > 0$ ). Потенциал электрического поля в этой системе отсчёта

$$\phi' = -2\pi\sigma' z'.$$

Векторный потенциал  $\mathbf{A}' = 0$ . В системе отсчёта, в которой лист движется, имеем

$$\phi = -\frac{2\pi\sigma' z}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad A_x = -\frac{2\pi\sigma' z}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \frac{v}{c}.$$

Учтено, что при данном переходе координата  $z$  не меняется:  $z' = z$ . Вычисление электрического поля даёт:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi = -\mathbf{k} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{2\pi\sigma'}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \mathbf{k}.$$

Имея в виду, что векторный потенциал имеет единственную ненулевую компоненту и зависит только от координаты  $z$ , находим магнитное поле:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ A_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{j} \frac{\partial A_x}{\partial z} = \mathbf{j} \frac{2\pi\sigma'}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \frac{v}{c}.$$

Таким образом, магнитное поле является однородным и направлено параллельно плоскости листа и перпендикулярно скорости движения, как показано на рис. 6.2.2.

Полученные формулы для полей  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$  можно переписать в ином виде, если учесть, что

- 1) линейные масштабы сокращаются, а соответствующая плотность заряда возрастает:

$$\sigma' = \frac{\sigma'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

- 2) Величина  $i = \sigma v$  есть линейная плотность тока, создаваемая движущимися зарядами.

В результате находим магнитное поле:

$$B_y = -\frac{2\pi}{c} \sigma v = -\frac{2\pi}{c} i.$$

Электрическое же поле движущегося листа даётся, как и в электростатике, формулой

$$E = 2\pi\sigma,$$

но с преобразованной поверхностью плотностью заряда  $\sigma$ .

### 6.3. Магнитный момент в электрическом поле

Пусть частица с магнитным моментом  $\mathbf{m}$  находится в однородном электрическом поле  $\mathbf{E}$  (рис. 6.3.1).

Если частица покоятся, то сила со стороны поля на неё не действует, поскольку она в целом электронейтральна. Пусть теперь частица приведена в движение со скоростью  $v$  (рис. 6.3.1). Оказывается, в этом случае появляется момент сил, вызывающий поворот магнитного момента. Найдём его. Будем считать, что  $v \ll c$ .

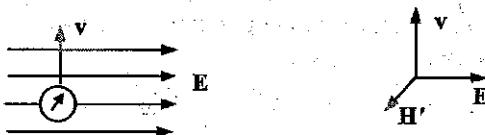


Рис. 6.3.1. Частица с магнитным моментом (изображена кружком со стрелкой) движется перпендикулярно силовым линиям однородного электрического поля

Для нахождения вращающегося момента сил перейдём в систему отсчёта, движущуюся вместе с моментом  $\mathbf{m}$ . В этой системе появляется магнитное поле

$$\mathbf{H}' = -\frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}.$$

Соответственно вращающийся момент оказывается равным

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{H}' = -\frac{1}{c} \mathbf{m} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E}).$$

Таким образом, магнитный момент стремится ориентироваться по направлению вектора  $(-\mathbf{v} \times \mathbf{E})$ , т.е. так, чтобы оказалось

$$\mathbf{m} \perp \mathbf{v}, \quad \mathbf{m} \perp \mathbf{E}.$$

Если  $\mathbf{m} \perp \mathbf{E}$ , то выражение для момента сил упрощается:

$$\mathbf{M} = -\frac{1}{c} [(\mathbf{m}\mathbf{E})\mathbf{v} - (\mathbf{m}\mathbf{v})\mathbf{E}] = \frac{1}{c} (\mathbf{m}\mathbf{v})\mathbf{E}.$$

Очевидно, что, если окажется  $\mathbf{m} \perp \mathbf{v}$ , то момент сил обратится в нуль.

Таким образом, электрическое поле оказывает ориентирующее действие на движущийся магнитный момент.

## Глава 7. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

### 7.1. Движение частиц в однородных полях

#### 7.1.1. Движение в однородном электрическом поле

Если напряжённость поля  $E = \text{const}$ , то из уравнения движения

$$m\ddot{\mathbf{v}} = q\mathbf{E}$$

следует

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{q\mathbf{E}}{m}t, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{q\mathbf{E}}{2m}t^2,$$

т.е. имеет место равноускоренное движение с ускорением, направленным вдоль вектора напряжённости поля.

#### 7.1.2. Движение в однородном магнитном поле

На частицу действует сила Лоренца, так что уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{v}} = \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Очевидно, что  $\dot{\mathbf{v}} \perp \mathbf{v}$ ,  $\dot{\mathbf{v}} \perp \mathbf{B}$ . Разложим вектор скорости на составляющие параллельную и перпендикулярную полю:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{||} + \mathbf{v}_{\perp}$ . Для этих составляющих имеем уравнения

$$m\ddot{\mathbf{v}}_{||} = 0,$$

$$m\ddot{\mathbf{v}}_{\perp} = \frac{q}{c}\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}.$$

Из первого уравнения следует  $\mathbf{v}_{||} = \text{const}$ .

Второе уравнение перепишем в виде

$$\dot{\mathbf{v}}_{\perp} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\perp}, \quad \boldsymbol{\omega} = -\frac{q\mathbf{B}}{mc}.$$

Оно описывает вращение вокруг направления магнитного поля с угловой скоростью  $\omega = qB/mc$ , называемой *циклотронной частотой* — рис. 7.1.1.

Если в момент попадания в область действия поля составляющая скорости частицы  $v_{\perp}$  равнялась (по величине)  $v_{\perp}$ , то радиус окружности оказывается равным

$$R = \frac{v_{\perp}}{\omega} = \frac{mcv_{\perp}}{qB}.$$

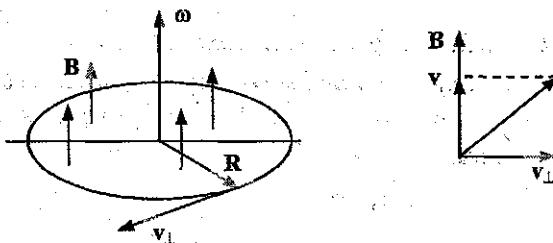


Рис. 7.1.1. Вращательное движение частицы с зарядом  $q > 0$  вокруг направления магнитного поля (слева); разложение вектора скорости на параллельную и перпендикулярную полю составляющие (справа)

### 7.1.3. Движение в однородных параллельных электрическом и магнитном полях $E \parallel B$

В уравнении движения

$$m\ddot{v} = qE + \frac{q}{c}v \times B$$

полагаем  $v = v_{\parallel} + v_{\perp}$ , где компоненты скорости соответственно  $v_{\parallel} \parallel B$  и  $v_{\perp} \perp B$ . Для этих компонент получаем уравнения

$$m\ddot{v}_{\parallel} = qE,$$

$$m\ddot{v}_{\perp} = \frac{q}{c}v_{\perp} \times B.$$

Первое из них описывает равноускоренное движение вдоль направления электрического поля, а второе уравнение — вращательное движение вокруг направления магнитного поля с циклотронной частотой  $\omega = qB/mc$ . Траектория частицы представляет собой спираль с возрас-

тающим шагом и с осью, параллельной силовой линии магнитного поля (рис. 7.1.2).

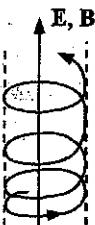


Рис. 7.1.2. Траектория частицы в параллельных электрическом и магнитном полях

#### 7.1.4. Движение в скрещенных полях $E \perp B$

Как и выше, выделяем компоненты скорости, параллельную и перпендикулярную вектору магнитного поля:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$  (рис. 7.1.3). Для этих компонент имеем уравнения

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{v}}_{\parallel} &= 0, \\ m\dot{\mathbf{v}}_{\perp} &= q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}\right). \end{aligned} \quad (7.1.1)$$

Первое уравнение даёт  $\mathbf{v}_{\parallel} = \text{const}$ , что означает движение с постоянной скоростью вдоль вектора  $\mathbf{B}$ , определяемой начальными условиями.

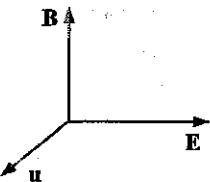


Рис. 7.1.3. Взаимно перпендикулярные поля  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$  и скорость дрейфового движения

Для нахождения компоненты  $\mathbf{v}_{\perp}$  положим  $\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{u} + \mathbf{v}'$  и подберём вектор  $\mathbf{u}$  так, чтобы исключить электрическое поле:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0.$$

В этом уравнении можно считать  $\mathbf{u} \perp \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{uB} = 0$ . Для нахождения вектора  $\mathbf{u}$  умножим почленно это уравнение векторно слева на  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{B} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = 0.$$

Преобразуем двойное векторное произведение с учётом взаимной ортогональности векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{B} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = uB^2 - \mathbf{B}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) = uB^2.$$

В итоге получаем

$$\mathbf{u} = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}.$$

Это движение представляет собой дрейф (с постоянной скоростью) в направлении, перпендикулярном обоим полям ( $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ ) (рис. 7.1.3). Соответственно для компоненты  $v'$  получаем уравнение

$$m\dot{v}' = \frac{q}{c} \mathbf{v}' \times \mathbf{B},$$

которое описывает вращательное движение с угловой скоростью  $\omega = -qB/mc$  вокруг направления магнитного поля.

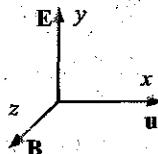
Суммарное движение представляет наложение

- 1) равномерного движения вдоль вектора  $\mathbf{B}$  со скоростью  $(v_{||})_0$ , равной компоненте скорости  $v_{||}$  в начальный момент,
- 2) дрейфового движения со скоростью  $u$ ,
- 3) вращения вокруг направления  $\mathbf{B}$ .

Изложенный подход с выделением дрейфового движения со скоростью  $u$  справедлив только в случае слабых электрических полей  $E \ll B$ , когда выполняется условие нерелятивистского движения  $u = cE/B \ll c$ . Если же условие  $E \ll B$  не выполняется, следует решать релятивистские уравнения движения.

Найдём траекторию путём прямого решения уравнений (7.1.1). Для этого запишем эти уравнения в системе координат, показанной на рис. 7.1.4.

Рис. 7.1.4: Взаимная ориентация полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  и скорости дрейфа  $u$ , а также выбор системы координат



Введём орты  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  соответственно вдоль координатных осей  $\{x, y, z\}$ . Поскольку в рассматриваемом случае  $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = iB_z v_y - jB_z v_x$ , то, обозначая для краткости  $E_y = E$ ,  $B_z = B$ , имеем:

$$(a) \dot{v}_z = 0, \quad (b) \dot{v}_x = \frac{qB}{mc} v_y, \quad (b) \dot{v}_y = \frac{q}{m} E - \frac{qB}{mc} v_x. \quad (7.1.2)$$

Уравнение (7.1.2а) описывает равномерное движение вдоль вектора магнитного поля:

$$v_z = v_{||} = \text{const}, \quad z = z_0 + v_{||}t.$$

Далее считаем  $v_{||} = 0$ . Для решения уравнений (7.1.2б) и (7.1.2в) положим

$$V_x = v_x - u, \quad u = cE/B. \quad (7.1.3)$$

После этого уравнения (7.1.2б, в) принимают вид

$$\ddot{V}_x = \omega v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega V_x, \quad (7.1.4)$$

где введена циклотронная частота  $\omega = \sqrt{qB/mc}$ . Исключая отсюда переменную  $V_x$ , приведём эту систему к уравнению гармонического осциллятора:

$$\ddot{v}_y = -\omega^2 v_y, \quad (7.1.5)$$

откуда находим:

$$v_y = v_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad y = y_0 + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (7.1.6)$$

С помощью второго уравнения в (7.1.4) и (7.1.3) находим  $v_x(t)$  и  $x(t)$ :

$$\begin{aligned} v_x &= u - \frac{1}{\omega} \dot{v}_y = u + v_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \\ x &= x_0 + ut - \frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

Формулы (7.1.6), (7.1.7) определяют траекторию частицы при любых начальных условиях. Выберем начало координат так, что  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$ . Тогда

$$\begin{cases} x = ut + \frac{v_0}{\omega} [\cos \varphi_0 - \cos(\omega t + \varphi_0)], \\ y = \frac{v_0}{\omega} [\sin(\omega t + \varphi_0) - \sin \varphi_0], \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = u + v_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \\ v_y = v_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \end{cases} \quad (7.1.8)$$

Кривая, задаваемая уравнениями (7.1.8), называется *треоидой*. Её конкретный вид зависит от величины  $v_0$ , определяемой из начальных условий. Рассмотрим частный случай, когда начальная скорость частицы равна нулю:

$$v_x(0) = v_y(0) = 0.$$

Тогда  $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $v_0 = -u$ , и из (7.1.8) находим:

$$v_x = u(1 - \cos \omega t), \quad v_y = u \sin \omega t;$$

$$x(t) = ut - \frac{u}{\omega} \sin \omega t, \quad y(t) = \frac{u}{\omega}(1 - \cos \omega t). \quad (7.1.9)$$

Эта траектория представляет собой циклониду (рис. 7.1.5). Такую траекторию описывает точка на ободе колеса, катящегося без проскальзывания по плоскости. В соответствии со сказанным траектория представляется собой суперпозицию дрейфа вдоль оси  $x$  и вращения вокруг оси  $z$  с циклотронной частотой  $\omega = qB/mc$ .

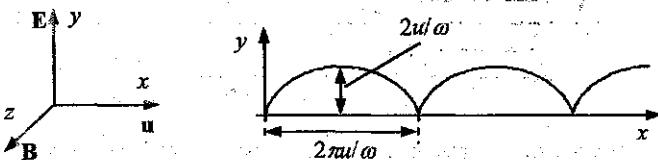


Рис. 7.1.5. Траектория частицы во взаимно перпендикулярных полях  $E$  и  $B$  при условии, что начальная скорость равна нулю.

### 7.1.5. Общий случай скрещенных полей

В общем случае имеется составляющая вектора электрического поля, параллельная магнитному полю:  $E_{||} \neq 0$ . Тогда для компоненты скорости  $v_{||}$  имеет место уравнение  $mv_{||} = qE_{||}$ . Это значит, что на движение, описанное в предыдущем пункте, накладывается ускоренное движение в направлении  $E_{||} \parallel B$ . Дрейф со скоростью  $u = cE \times B/B^2$  сохраняется, так же как и вращение с циклотронной частотой  $\omega = -qB/mc$ .

## 7.2. Методы измерения удельного заряда электрона

Удельным зарядом называется отношение  $q/m$ , где  $m$  — масса частицы.

Движение частицы при наличии только электрических и магнитных полей описывается уравнением

$$m \frac{dv}{dt} = q \left( E + \frac{1}{c} v \times B \right).$$

Отсюда видно, что оно полностью определяется удельным зарядом  $q/m$ , а не зарядом и массой порознь.

### 7.2.1. Измерение $q/m$ по отклонению траектории в электрическом поле

В этом методе пучок частиц пропускается между обкладками заряженного конденсатора, и по измеренному отклонению траектории определяют отношение  $q/m$ . Схема опыта показана на рис. 7.2.1.

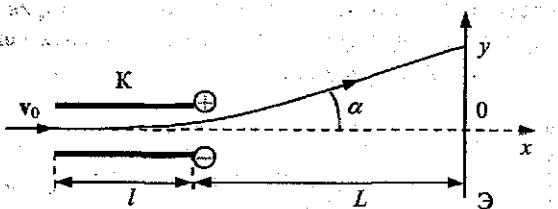


Рис. 7.2.1. Отклонение заряженной частицы электрическим полем конденсатора. К — конденсатор, Э — экран

В конденсаторе имеется однородное электрическое поле с напряжённостью  $E$ , направленное перпендикулярно начальной скорости частицы  $v_0$ . Это поле вызывает движение с ускорением

$$a = \frac{q}{m} E, \quad a \perp v_0.$$

Если бы поле отсутствовало, то частицы попадали бы в точку «0» экрана Э (рис. 1). Под действием поля отклонение частицы в конденсаторе в вертикальном направлении составляет

$$y_1 = \frac{at^2}{2} = \frac{qE}{2m} t^2 = \frac{q}{2m} E \frac{l^2}{v_0^2},$$

где  $t = l/v_0$  — время пролёта конденсатора. Здесь учтено, что поскольку поле  $E$  направлено вдоль оси  $y$ , то компонента скорости  $v_x = \text{const} = v_0$ .

На выходе из конденсатора скорость  $v_y$  составит

$$v_y = at = \frac{qE}{m} \frac{l}{v_0}.$$

Далее частица летит прямолинейно, причём траектория образует угол  $\alpha$  с осью  $x$  такой, что

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{qE}{m} \frac{l}{v_0^2}; \quad y_1 = \frac{l}{2} \tan \alpha.$$

Долетая до экрана, она приобретает дополнительное отклонение

$$y_2 = L \operatorname{tg} \alpha.$$

Полное смещение частицы в итоге составит

$$y = y_1 + y_2 = \left( \frac{1}{2} l + L \right) \operatorname{tg} \alpha = \frac{qE}{mv_0} l \left( \frac{1}{2} l + L \right).$$

Таким образом, по измеренному отклонению частицы  $y$  с помощью последней формулы определяется удельный заряд частицы  $q/m$ .

### 7.2.2. Измерение $q/m$ по отклонению траектории в магнитном поле

Для измерения удельного заряда можно вместо электрического поля использовать магнитное, также направленное перпендикулярно траектории частицы (рис. 7.2.2). На частицу действует сила Лоренца

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \text{ создавая ускорение } \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{q}{mc} \mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

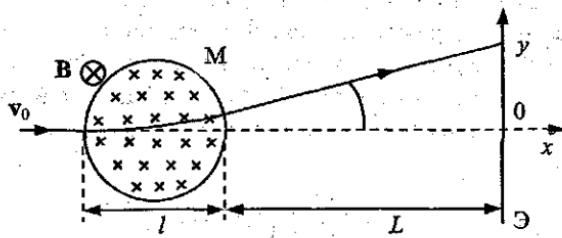


Рис. 7.2.2. Отклонение заряженной частицы магнитным полем. М — магнит, Э — экран. Направление магнитного поля перпендикулярно плоскости листа и направлено «за лист»

Пусть скорость частицы велика, и отклонение за время пролёта поля мало. Тогда можно принять

$$v_x \approx v_0, \quad \mathbf{a} \approx \frac{q}{mc} \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}, \quad a = |\mathbf{a}| \approx \frac{q}{mc} v_0 B.$$

Отклонение частицы за время пролёта поля  $t = l/v_0$  составит

$$y_1 = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{q}{2m} B \frac{l^2}{v_0^2}.$$

Скорость  $v_y$  частицы на выходе из области действия поля равна

$$v_y = at = \frac{qI}{mc} B,$$

а угол, который образует вектор скорости с осью  $x$ , определяется равенством

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_y}{v_x} \approx \frac{v_y}{v_0} = \frac{qIB}{mv_0c}, \quad y_1 = \frac{l}{2} \operatorname{tg} \beta.$$

Долетая до экрана, частица получает дополнительное смещение

$$y_2 = L \operatorname{tg} \beta.$$

Полное смещение частицы составит

$$y = y_1 + y_2 = \left( \frac{1}{2} l + L \right) \operatorname{tg} \beta = \frac{qB}{mv_0c} l \left( \frac{1}{2} l + L \right).$$

Измеряя это смещение, можно найти удельный заряд  $q/m$  частицы.

### 7.2.3. Метод Томсона

Дж. Дж. Томсон использовал компенсационную схему, в которой движение частицы управлялось как электрическим, так и магнитным полем. Эта схема позволяла не измерять предварительно скорость частиц  $v_0$ . Суть метода в следующем. Сначала Томсон включал только магнитное поле (как описано выше) и измерял отклонение пучка заряженных частиц:

$$y = \frac{qB}{mv_0c} l \left( \frac{1}{2} l + L \right).$$

Затем он дополнительно включал электрическое поле, перпендикулярное магнитному ( $E \perp B$ ), и подбирал его величину таким образом, чтобы полностью компенсировать отклонение пучка, вернув его в точку

$y = 0$ . Условием компенсации являлось равенство  $qE = \frac{q}{c} v_0 B$ , или

$v_0 = c \frac{E}{B}$ . Поэтому приведённое выше выражение для смещения пучка в магнитном поле переписывается в виде

$$y = \frac{q}{m} \frac{B^2}{c^2 E} l \left( \frac{1}{2} l + L \right).$$

Отсюда по известным значениям смещения  $y$  и полей  $B$  и  $E$  определяется удельный заряд  $q/m$ .

Описанным методом Дж. Дж. Томсон в 1897 г. при изучении катодных лучей впервые измерили удельный заряд электрона. Измерения показали, что удельный заряд электрона составляет

$$e/m = -5,273 \cdot 10^{17} \text{ ед. СГСЭ} \cdot \text{г}^{-1} = -1,795 \cdot 10^{11} \text{ Кл} \cdot \text{кг}^{-1}.$$

### 7.3. Опыты Милликена

В предыдущих опытах измерялся удельный заряд частиц. Р. Милликен в 1909 г. предложил способ непосредственного измерения заряда. Схема его установки показана на рис. 7.3.1.

В пространство между пластинами конденсатора Милликен вводил с помощью пульверизатора мельчайшие капельки масла. Капли ионизовались, и их движением можно было управлять, меняя величину и знак заряда на конденсаторе.

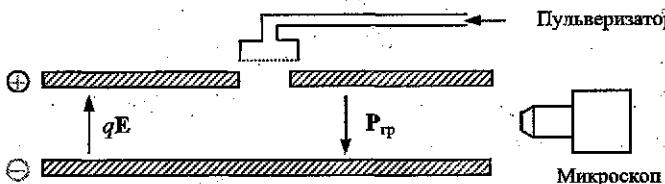


Рис. 7.3.1. Схема установки Милликена по измерению заряда электрона (сила  $qE$  указана для случая  $q < 0$ )

Рассмотрим метод подробнее. Будем для определённости считать, что заряд капли отрицательный,  $q < 0$ .

На каплю действуют следующие силы:

- 1) сила со стороны электрического поля  $qE$ ;
- 2) результирующая сила тяжести и архимедовой силы

$$P_{\text{тр}} = \frac{4\pi}{3} r^3 (\rho - \rho_0) g, \quad (7.3.1)$$

где  $r$  — радиус капли,  $\rho$  и  $\rho_0$  — плотности капли и воздуха соответственно;

- 3) сила вязкого трения

$$F_{\text{тр}} = -6\pi r \eta v. \quad (7.3.2)$$

В отсутствие электрического поля капля падает с постоянной скоростью  $v_0$ , определяемой из условия  $P_{\text{тр}} = F_{\text{тр}}$ , или

$$\frac{4\pi}{3} r^3 (\rho - \rho_0) g = 6\pi r \eta v_0. \quad (7.3.3)$$

Включив электрическое поле, заставляют каплю подниматься с небольшой скоростью  $v_E$ , которую можно найти из уравнения

$$\frac{4\pi}{3}r^3(\rho - \rho_0)g + 6\pi r\eta v_E = qE. \quad (7.3.4)$$

С учётом равенства (7.3.3) перепишем это соотношение в виде

$$6\pi r\eta(v_0 + v_E) = qE, \quad (7.3.5)$$

откуда можно найти заряд капли:

$$q = 6\pi r\eta \frac{v_0 + v_E}{E}. \quad (7.3.6)$$

Практически измерение осуществлялось следующим способом. В отсутствие электрического поля измерялась скорость свободного падения капли  $v_0$ . Затем из соотношения (7.3.3) определялся радиус капли:

$$r = \sqrt{\frac{9\eta v_0}{2g(\rho - \rho_0)}}. \quad (7.3.7)$$

Включив электрическое поле и измерив скорость подъёма капли  $v_E$ , по формулам (7.3.6) – (7.3.7) или

$$q = 6\pi r\eta \sqrt{\frac{9\eta v_0}{2g(\rho - \rho_0)}} \frac{v_0 + v_E}{E} = 9\pi \sqrt{\frac{2\eta^3 v_0}{g(\rho - \rho_0)}} \frac{v_0 + v_E}{E}$$

можно найти заряд  $q$ .

Милликен вызывал ионизацию воздуха, облучая пространство между пластинами конденсатора рентгеновскими лучами. Ионы, прилипая к капле, меняли её заряд, в результате чего менялась и скорость  $v_E$ .

Анализируя результаты экспериментов, Милликен установил, что изменения заряда капель  $\Delta q$  и сам заряд  $q$  были всегда целыми кратными одной и той же минимальной величины:

$$e \approx 4,80 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГСЭ} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

По известным значениям удельного заряда  $e/m$  и заряда  $e$  электрона можно найти массу:

$$\frac{e}{e/m} = m \approx 9,11 \cdot 10^{-28} \text{ г.}$$

Значение опыта Милликена состоит в том, что была экспериментально доказана дискретность электрического заряда.

## Глава 8. ИНДУКТИВНОСТЬ, ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

### 8.1. Индуктивность

#### 8.1.1. Коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции

Если имеется замкнутый контур  $L$  и опирающаяся на него поверхность  $S$ , то магнитный поток через этот контур равен

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}.$$

Пусть по витку течёт ток  $J$ . Он создаёт магнитное поле  $\mathbf{B}$ , величина которого пропорциональна величине тока:  $B \sim J$ . Соответственно магнитный поток также пропорционален току:  $\Phi \sim J$ . Полагают (в гауссовой системе единиц)

$$\Phi = \frac{1}{c} L J$$

( $c$  — скорость света). В этой формуле коэффициент  $L$  называется *индуктивностью* провода или *коэффициентом самоиндукции*.

Пусть теперь имеются два витка, по одному из которых течёт ток  $J_1$ . Тогда магнитное поле, создаваемое этим током,  $B \sim J_1$ , а магнитный поток через второй виток  $\Phi_{21} \sim J_1$ . В гауссовой системе единиц записывают

$$\Phi_{21} = \frac{1}{c} L_{21} J_1.$$

Величина  $L_{21}$  называется *коэффициентом взаимной индукции*.

Аналогично, если в витке 2 течёт ток  $J_2$ , то он создаёт магнитный поток через виток 1, равный

$$\Phi_{12} = \frac{1}{c} L_{12} J_2.$$

### 8.1.2. Индуктивность идеального соленоида

Рассмотрим идеальный соленоид, т.е. соленоид, витки которого плотно расположены, а их плоскости можно считать параллельными основанию соленоида. Пусть  $S$  и  $l$  — соответственно площадь основания и длина соленоида, а  $N$  — число витков. Магнитное поле внутри соленоида равно

$$B = \mu H = \frac{4\pi}{c} \mu i = \frac{4\pi\mu N}{c l} J.$$

Магнитный поток через каждый виток

$$\Phi_1 = BS = \frac{4\pi\mu N}{cl} SJ,$$

а через все  $N$  витков

$$\Phi = N\Phi_1 = \frac{4\pi\mu N^2}{cl} SJ = \frac{1}{c} LJ.$$

Таким образом, находим индуктивность соленоида:

$$L = \frac{4\pi\mu N^2 S}{l}.$$

### 8.1.3. Индуктивность тороидальной катушки

Найдём индуктивность идеальной тороидальной катушки прямоугольного сечения с числом витков  $N$  (рис. 8.1.1а). Будем считать, что среда в объёме катушки имеет магнитную проницаемость  $\mu$ . Пусть через катушку течёт ток  $J$ . Магнитное поле локализовано в объёме катушки и может быть найдено с помощью теоремы о циркуляции. Выберем круговой контур  $L$  радиуса  $r$  с центром на оси катушки (рис. 8.1.1б). Поскольку силовые линии магнитного поля являются окружностями с центрами на оси катушки, то

$$\oint_L H dr = \frac{4\pi}{c} NJ \Rightarrow H \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} NJ \Rightarrow H = \frac{2NJ}{cr} \Rightarrow B = \frac{2\mu NJ}{cr}.$$

Для нахождения магнитного потока, пронизывающего отдельный виток,  $\Phi_1 = \int_S BdS$ , учтём, что  $dS = bdr$  (рис. 8.1.1в). Это даёт:

$$\Phi_1 = \int_R^{R+a} \frac{2\mu NJ}{cr} b dr = \frac{2\mu NJ}{c} b \ln \left( 1 + \frac{a}{R} \right).$$

Магнитный поток через все витки катушки равен  $\Phi = N\Phi_1$ . Полагая

$$\Phi = \frac{1}{c} L I, \text{ находим индуктивность:}$$

$$L = 2\mu N^2 b \ln \left( 1 + \frac{a}{R} \right).$$

В частном случае  $a \ll R$  получаем

$$L = \frac{2\mu N^2 S}{R},$$

где  $S = ab$  — площадь сечения катушки. Последняя формула справедлива в случае произвольного поперечного сечения, если только размер сечения ( $\sim a$ ) мал по сравнению с радиусом катушки ( $\sim R$ ).

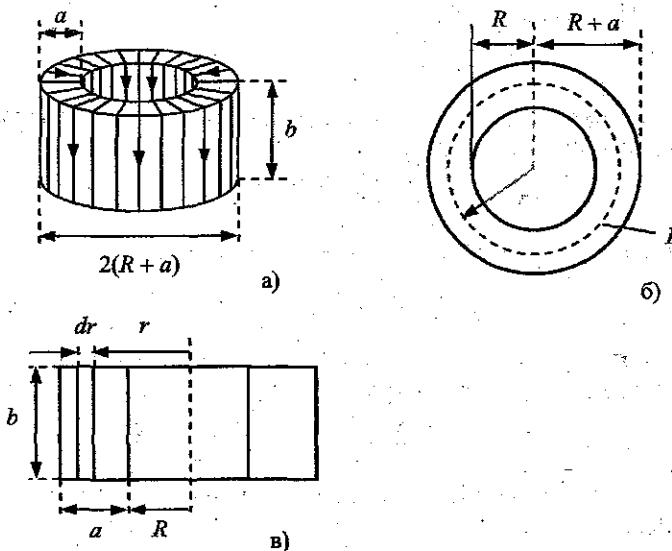


Рис. 8.1.1: а — тороидальная катушка с прямоугольным поперечным сечением; б — вид катушки сверху. Указан круговой контур, циркуляция по которому рассматривается при вычислении магнитного поля в катушке; в — сечение катушки вертикальной плоскостью, проходящей через ось

#### 8.1.4. Взаимная индукция двух индуктивно связанных катушек

Пусть на один сердечник наложены две катушки с числом витков соответственно  $N_1$  и  $N_2$  (рис. 8.1.2). Считаем, что сердечник имеет длину

$l$  и постоянное сечение площадью  $S$ . Роль сердечника сводится к тому, что он полностью передаёт магнитный поток от одной катушки к другой. Катушки считаем идеальными соленоидами.

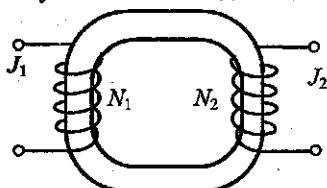


Рис. 8.1.2. Две катушки на общем сердечнике

Пусть по катушке 1 ток  $J_1$ . Тогда в ней создаётся магнитное поле

$$B_1 = \frac{4\pi\mu}{c} \frac{N_1 J_1}{l}$$

и соответствующий магнитный поток

$$\Phi_1 = \frac{4\pi\mu}{c} \frac{N_1 J_1}{l} S.$$

Этот поток пронизывает все  $N_2$  витков второй катушки, что даёт полный магнитный поток через вторую катушку:

$$\Phi_{21} = N_2 \Phi_1 = \frac{4\pi\mu}{c} \frac{N_1 N_2 J_1}{l} S = \frac{1}{c} L_{21} J_1.$$

Таким образом, получаем коэффициент взаимной индукции:

$$L_{21} = \frac{4\pi\mu N_1 N_2}{l} S.$$

Аналогично, пуская ток  $J_2$  через вторую катушку и вычисляя магнитный поток, пронизывающий первую катушку, находим

$$L_{12} = \frac{4\pi\mu N_1 N_2}{l} S.$$

В рассмотренном примере коэффициенты индуктивности удовлетворяют соотношениям

$$L_{12} = L_{21} = \sqrt{L_1 L_2}.$$

Их справедливость связана, во-первых, с тем, что мы пренебрели расщеплением магнитного потока, а во-вторых, с тем, что магнитная проницаемость сердечника не зависит от величины магнитного поля. Соотношение  $L_{12} = L_{21}$  не будет выполняться, если окажется  $\mu = \mu(H)$  и  $N_1 \neq N_2$ . Тогда обмотки при одинаковых токах создают в сердечнике различные магнитные поля, так что в выражения для  $L_{12}$  и  $L_{21}$  будут

входить различные коэффициенты  $\mu$ , что и приводит к неравенству  $L_{12} \neq L_{21}$ .

### 8.1.5. Установление тока в LR-контуре, содержащем источник ЭДС

При изменении магнитного потока через проводящий контур (или, в общем случае, катушку индуктивности), возникает ЭДС индукции<sup>1</sup>:  $\mathcal{E}_{\text{инд}} = -d\Phi/dt$ . Имея в виду связь потока  $\Phi$  с током в катушке  $J$ ,  $\Phi = LJ$ , получаем

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -L \frac{dJ}{dt}.$$

Пусть в электрической цепи присутствует сопротивление  $R$  и сторонняя ЭДС (рис. 8.1.3 слева). Тогда в соответствии с законом Ома ток в цепи окажется равным

$$J = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_{\text{инд}}}{R}.$$

С учётом выражения для ЭДС индукции получаем

$$L \frac{dJ}{dt} + JR = \mathcal{E}.$$

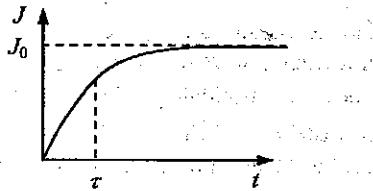
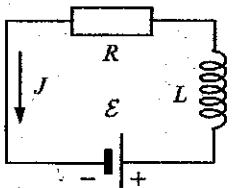


Рис. 8.1.3. Слева -- LR-контур, содержащий источник ЭДС, сопротивление и индуктивность, справа -- установление тока в контуре

Пусть  $\mathcal{E} = \text{const}$ . Считая, что в начальный момент  $t = 0$  ток в цепи отсутствует:  $J(0) = 0$ , из полученного уравнения находим

$$J(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - \exp \left( -\frac{R}{L} t \right) \right).$$

<sup>1</sup> В этом и следующем разделах мы используем систему СИ, в которой  $\Phi = LJ$ ,  $\mathcal{E}_{\text{инд}} = -d\Phi/dt$ .

Отсюда видно, что при  $t \rightarrow \infty$  в цепи устанавливается постоянный ток:  $J \rightarrow J_0 = \mathcal{E}/R$ , такой же, как в отсутствие индуктивности. Эта зависимость показана на рис. 8.1.3 справа. Характерное время установления тока составляет  $\tau = L/R$ . На малых временах  $t \ll \tau$  имеем  $J(t) = \mathcal{E}t/L$ .

### 8.1.6. Экстрапол и экстрапонажение размыкания

Рассмотрим электрическую цепь, показанную на рис. 8.1.4. На этом рисунке сопротивление катушки индуктивности, равное  $r$ , изображены отдельно.

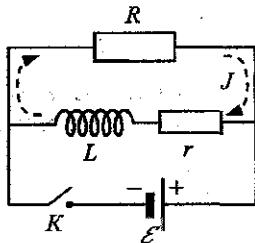


Рис. 8.1.4. После размыкания ключа  $K$  в  $LR$ -контуре начинает циркулировать ток  $J$ , показанный штриховыми стрелками

Вначале ключ  $K$  замкнут. Тогда через сопротивление  $R$  и через катушку индуктивности  $L$  текут токи

$$J_R = \frac{\mathcal{E}}{R}, \quad J_{L,0} = \frac{\mathcal{E}}{r}.$$

После размыкания ключа (отключения ЭДС) начальный ток через сопротивление  $R$  очень быстро затухает. Это происходит за характерные времена свободного пробега электронов в веществе  $\tau_T$ . Однако ток через катушку индуктивности столь же быстро затухнуть не может вследствие возникновения ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}} = -L dJ/dt$ . Поэтому ток  $J_{L,0}$ , существовавший в катушке, начнёт циркулировать в  $LR$ -контуре.

Дальнейшее изменение тока в  $LR$ -контуре описывается уравнением

$$(R+r)J = \mathcal{E}_{\text{инд}}, \quad \text{или} \quad (R+r)J = -L \frac{dJ}{dt}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$J = J_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad \tau = \frac{L}{R+r}.$$

Используем начальное условие

$$J(0) \equiv J_0 = J_{L,0} = \mathcal{E}/r.$$

Следовательно,

$$J = \frac{\mathcal{E}}{r} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Найдём ЭДС индукции, возникающую в катушке:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -L \frac{dJ}{dt} = \frac{L \mathcal{E}}{\tau r} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \mathcal{E} \frac{R+r}{r} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Отсюда видно, что сразу после отключения внешней ЭДС  $\mathcal{E}$  возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \mathcal{E} \frac{R+r}{r}.$$

Если сопротивление катушки  $r$  мало по сравнению с внешним сопротивлением  $R$ ,  $r \ll R$ , то окажется

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} \approx \frac{R}{r} \mathcal{E} \gg \mathcal{E}.$$

Начальный ток через сопротивление  $R$ , возникающий сразу после размыкания ключа,  $J_{L,0} = \mathcal{E}/r$ , называется *экстратоком размыкания*, а начальное напряжение, равное  $\mathcal{E}_{\text{инд}} \approx \mathcal{E}R/r$ , — *экстрапонапряжением размыкания*. Время затухания этого напряжения  $\tau \approx L/(r+R)$  велико по сравнению со временем свободного затухания тока в цепи (без индуктивности):  $\tau \gg \tau_T$ . Возможность возникновения значительного экстрапонапряжения должна учитываться при расчёте электрических цепей, чтобы избежать перегрузки.

## 8.2. Магнитная энергия тока

### 8.2.1. Магнитная энергия

Рассмотрим проводящую рамку с перемычкой, которая может свободно скользить вдоль проводов (рис. 8.2.1). Пусть по цепи течёт ток в отрицательном направлении (как показано на рис. 8.2.1). Тогда на перемычку со стороны магнитного поля будет действовать сила Ампера, направленная влево:  $F_A = \frac{J}{c} lB$ . Сместим перемычку вправо на  $dx$ . Для этого нужно совершить работу

$$\delta A = F_A dx = \left( \frac{1}{c} lB \right) dx = \frac{1}{c} J d\Phi, \quad d\Phi = BdS, \quad dS = ldx.$$

Эта работа совершается внешней силой против сил поля, т.е. против ЭДС индукции. Поэтому она идёт на увеличение магнитной энергии.

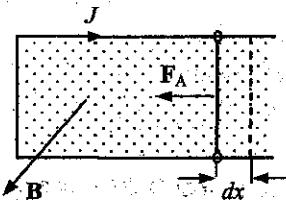


Рис. 8.2.1. Рамка с током в магнитном поле. Перемычка может свободно скользить, непрерывно замыкая верхний и нижний провода рамки

В общем случае работа против ЭДС индукции в соответствии с законом Джоуля–Ленца равна

$$\delta A = J(-\mathcal{E}_{инд}) dt = J \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} dt = \frac{1}{c} J d\Phi.$$

Здесь учтено, что мощность энерговыделения  $Q = J\mathcal{E}$ , где следует положить  $\mathcal{E} = -\mathcal{E}_{инд}$ .

Положим  $\Phi = LJ/c$ . Тогда  $\delta A = LJ \cdot dJ/c^2$ . При возрастании тока от нуля до некоторого конечного значения  $J$  магнитная энергия тока достигает значения

$$U = \int_0^J \delta A = \frac{LJ^2}{2c^2} = \frac{J\Phi}{2c} = \frac{\Phi^2}{2L}$$

(выражение для энергии записано в трёх различных формах с учётом соотношения  $\Phi = LJ/c$ ).

### 8.2.2. Энергия магнитного поля в соленоиде

Рассмотрим идеальный соленоид, по которому течёт ток  $J$ . Длина соленоида  $l$ , число витков  $N$ , площадь поперечного сечения  $S$ . В этом соленоиде имеется однородное магнитное поле с напряжённостью

$$H = \frac{4\pi}{c} i = \frac{4\pi N J}{c l}.$$

Перепишем это соотношение в виде  $NJ = cIH/4\pi$ . Заметим, что величина  $NJ$  есть полный ток, текущий по боковой поверхности соленоида.

Если магнитный поток через соленоид меняется на  $d\Phi = SdB$ , то связанное с этим изменение магнитной энергии составит

$$dU = \frac{1}{c} J \cdot d\Phi = \frac{1}{c} \frac{cl}{4\pi} H \cdot SdB = \frac{HdB}{4\pi} V.$$

Здесь  $V = lS$  — объём соленоида.

Полученная формула даёт изменение магнитной энергии при всяком изменении магнитного поля, независимо от того, связано это изме-

нение с токами проводимости или нет. В частном случае  $B = \mu H$  находим:

$$U = \frac{\mu H^2}{8\pi} V = \frac{BH}{8\pi} V = \frac{B^2}{8\pi\mu} V.$$

В вакууме ( $\mu = 1$ ) плотность энергии магнитного поля составляет

$$u = \frac{U}{V} = \frac{B^2}{8\pi}.$$

Рассмотренный пример показывает, что магнитная энергия сосредоточена в объёме соленоида, т.е. в той области пространства, где существует магнитное поле.

### 8.2.3. Энергия магнитного поля (общий случай)

Приведём теперь общий вывод выражения для энергии, не ограниченный каким-либо конкретным классом систем.

Вывод формулы для энергии магнитного поля отличается от такого для энергии электрического поля. Дело в том, что само магнитное поле работы над зарядами не производит, а производит её вихревое электрическое поле, возникающее (по закону индукции) на стадии «включения» магнитного поля.

По закону Джоуля–Ленца работа электрического поля  $\mathbf{E}$  над токами  $\mathbf{j}$  в единичном объёме в единицу времени равна  $\mathbf{j}\mathbf{E}$ . Соответственно за время  $dt$  в объёме  $V$  работа сил поля равна

$$\delta A_{\text{поле}} = dt \int_V \mathbf{j} \mathbf{E} dV.$$

Из теоремы о циркуляции (в дифференциальной форме) следует

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H},$$

так что

$$\delta A_{\text{поле}} = \frac{dt}{4\pi} \int_V \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} dV.$$

Заметим, что в качестве области интегрирования здесь берётся всё пространство.

Далее с учётом тождества

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}$$

перепишем выражение для работы:

$$\delta A_{\text{поле}} = \frac{dt}{4\pi} \int_V [\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})] dV.$$

Второй интеграл обращается в нуль. Действительно, преобразуя объёмный интеграл по формуле Остроградского-Гаусса в поверхностный и учитывая, что на бесконечно удалённой поверхности поля обращаются в нуль ( $E, H \rightarrow 0$ ), получим

$$\int_V \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = \oint_{S(V)} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\mathbf{S} = 0.$$

Следовательно,

$$\delta A_{\text{поле}} = \frac{dt}{4\pi} \int_V \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} dV.$$

Учтём теперь закон электромагнитной индукции

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Это даёт

$$\delta A_{\text{поле}} = -\frac{dt}{4\pi} \int_V \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV.$$

Обозначим

$$d\mathbf{B} = dt \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

и учтём, что работа электромагнитного поля равна *убыли* энергии:

$$dU_m = -\delta A_{\text{поле}}.$$

В результате находим изменение магнитной энергии:

$$dU_m = \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{H} d\mathbf{B} dV = \int_V (du_m) dV,$$

где  $du_m$  — приращение плотности энергии:

$$du_m = \frac{\mathbf{H} d\mathbf{B}}{4\pi}.$$

Если между полями имеется линейная связь  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , то можно перейти от приращения к конечному значению плотности энергии:

$$u_m = \frac{\mu \mathbf{H}^2}{8\pi} = \frac{\mathbf{B} \mathbf{H}}{8\pi} = \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi\mu}.$$

### 8.2.4. Теорема взаимности

Пусть имеется набор  $n$  витков, по которым циркулируют токи  $J_i$ . Энергия этой системы есть функция только токов:

$$U = U(J_1, J_2, \dots, J_n) \quad (8.2.1)$$

и не зависит от того, как эти токи возникли.

Магнитный поток через  $i$ -й виток равен

$$\Phi_i = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^n L_{ik} J_k. \quad (8.2.2)$$

Напомним, что  $L_{ii} \equiv L_{ik}|_{i=k}$  — коэффициент самоиндукции  $i$ -го витка, а  $L_{ik}|_{i \neq k}$  — коэффициент взаимной индукции  $i$ -го и  $k$ -го витков. Будем предполагать  $L_{ik} = \text{const}$ . При изменении токов магнитные потоки меняются:

$$d\Phi_i = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^n L_{ik} dJ_k. \quad (8.2.3)$$

Соответственно изменение энергии системы токов можно записать в виде

$$dU = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^n J_i d\Phi_i, \quad (8.2.4)$$

или, с учётом (8.2.3),

$$dU = \frac{1}{c^2} \sum_{i, k=1}^n L_{ik} J_i dJ_k.$$

Отсюда находим:

$$\frac{\partial U}{\partial J_k} = \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^n L_{ik} J_i \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial J_i \partial J_k} = \frac{1}{c^2} L_{ik}.$$

Выполнив дифференцирование в обратном порядке, получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial J_k \partial J_i} = \frac{1}{c^2} L_{ki}.$$

Вследствие независимости смешанных производных от порядка дифференцирования:  $\frac{\partial^2 U}{\partial J_i \partial J_k} = \frac{\partial^2 U}{\partial J_k \partial J_i}$ , получаем теорему взаимности:

$$L_{ik} = L_{ki}. \quad (8.2.5)$$

### 8.2.5. Энергия системы токов

Получим выражение для энергии системы токов  $U = U(J_1, J_2, \dots, J_n)$ . Для этого запишем выражение для приращения энергии системы токов в следующем виде:

$$dU = dU_c + dU_b, \quad dU_c = \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^n L_{ii} J_i dJ_i, \quad dU_b = \frac{1}{c^2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^n L_{ik} J_i dJ_k.$$

Здесь  $dU_c$  — приращение энергии самоиндукции, а  $dU_b$  — приращение энергии взаимной индукции: первая определяется только самоиндукцией контуров, а вторая — только взаимной индукцией контуров. Преобразуем эти выражения, перейдя от приращений энергии к конечным значениям.

Энергию самоиндукции легко найти, выполнив интегрирование:

$$U_c = \frac{1}{2c^2} \sum_{i=1}^n L_{ii} J_i^2. \quad (8.2.6)$$

Для выполнения интегрирования в энергии взаимной индукции перепишем выражение для  $dU_b$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} dU_b &= \frac{1}{c^2} [(L_{12} J_1 dJ_2 + L_{21} J_2 dJ_1) + \\ &+ (L_{13} J_1 dJ_3 + L_{31} J_3 dJ_1) + (L_{23} J_2 dJ_3 + L_{32} J_3 dJ_2) + \dots], \end{aligned}$$

разбив все слагаемые на симметричные пары. Имея в виду утверждение теоремы взаимности, получим

$$\begin{aligned} dU_b &= \frac{1}{c^2} [L_{12}(J_1 dJ_2 + J_2 dJ_1) + L_{13}(J_1 dJ_3 + J_3 dJ_1) + \\ &+ L_{23}(J_2 dJ_3 + J_3 dJ_2) + \dots] = \\ &= \frac{1}{c^2} [L_{12}d(J_1 J_2) + L_{13}d(J_1 J_3) + L_{23}d(J_2 J_3) + \dots]. \end{aligned}$$

Последнее выражение можно переписать в симметричной форме, ещё раз используя теорему взаимности:

$$\begin{aligned} dU_b &= \frac{1}{2c^2} \{ [L_{12}d(J_1 J_2) + L_{21}d(J_2 J_1)] + \\ &+ [L_{13}d(J_1 J_3) + L_{31}d(J_3 J_1)] + \dots \} = \frac{1}{2c^2} \sum_{i,k; i \neq k}^n L_{ik} d(J_i J_k). \end{aligned}$$

Выполнив теперь интегрирование, получим выражение для взаимной энергии системы контуров:

$$U_{\text{в}} = \frac{1}{2c^2} \sum_{i,k; i \neq k}^n L_{ik} J_i J_k. \quad (8.2.7)$$

Наконец, объединяя выражения для энергии самоиндукции и взаимной индукции, получим выражение для полной энергии системы контуров:

$$U = U_{\text{с}} + U_{\text{в}} = \frac{1}{2c^2} \sum_{i,k}^n L_{ik} J_i J_k. \quad (8.2.8)$$

Последнее выражение можно переписать в другой форме, не содержащей явно коэффициентов индуктивности:

$$U = \frac{1}{2c} \sum_i^n J_i \Phi_i, \quad \Phi_i = \frac{1}{c} \sum_k^n L_{ik} J_k. \quad (8.2.9)$$

В частном случае системы из двух контуров имеем

$$U = U_{\text{с}} + U_{\text{в}} = \frac{1}{2c^2} (L_{11} J_1^2 + L_{22} J_2^2 + 2L_{12} J_1 J_2). \quad (8.2.10)$$

Поскольку состояние с током имеет большую энергию, чем состояние без тока, т.е.  $U \geq 0$ , то условие положительной определённости квадратичной формы  $U(J_1, J_2)$  в (8.2.10) даёт неравенство

$$L_{12}^2 \leq L_{11} L_{22}.$$

### 8.2.6. Пример применения теоремы взаимности.

Пусть внутри длинного идеального соленоида с плотностью намотки  $n$  вдаль от концов расположен параллельно его оси намагнченный стержень с магнитным моментом  $m$ . Требуется найти магнитный поток  $\Phi_{12}$ , пронизывающий соленоид. Будем считать среду в соленоиде немагнитной, имеющей  $\mu = 1$ .

Для решения поставленной задачи заменим магнит витком с током, имеющим магнитный момент  $m$ . Для этого требуется, чтобы ток в витке был таким, что  $m = JS/c$ , где  $S$  — площадь витка, т.е.

$$J = cm/S.$$

Такой виток создаёт в соленоиде магнитный поток  $\Phi_{12} = L_{12} J/c$ .

Пусть теперь ток  $J_1$  течёт по соленоиду. Тогда в соленоиде возникнет магнитное поле  $B = 4\pi n J_1/c$ , создающее магнитный поток

$$\Phi_{21} = BS = 4\pi n J_1 S/c$$

через виток. Этот же поток можно записать в виде  $\Phi_{21} = L_{21}J_1/c$ . По теореме взаимности  $L_{12} = L_{21}$ . Поэтому при условии  $J_1 = J$  потоки  $\Phi_{12}$  и  $\Phi_{21}$  совпадают. Учитывая выражение для тока  $J = cm/S$ , получаем искомый поток  $\Phi_{12}$  через соленоид:

$$\Phi_{12} = \Phi_{21} = \frac{4\pi}{c} nJS = 4\pi ntm.$$

### 8.3. Энергетический метод вычисления сил в магнитном поле

#### 8.3.1. Два подхода к вычислению сил

Энергетический метод вычисления сил основан на методе виртуальных (бесконечно малых) смещений, стартующем от определения работы искомой силы поля  $f$  на бесконечно малом перемещении:

$$\delta A_{\text{поле}} = f \delta r.$$

В частном случае, когда достаточно рассматривать перемещения только вдоль одного направления, например, вдоль оси  $x$ , записываем

$$\delta A_{\text{поле}} = f \delta x.$$

Выделяют два основных подхода к нахождению работы  $\delta A_{\text{поле}}$ , когда при виртуальных смещениях

- 1) неизменны магнитные потоки,
- 2) неизменны токи.

Поскольку в состоянии равновесия силы определяются только мгновенными значениями токов, но не их изменениями, то в обоих подходах должны получаться одинаковые значения сил.

Учтём, что силы зависят от токов, но не от сопротивлений в контурах. Это позволяет считать проводники идеальными, пренебрегая джоулевыми потерями.

Мы рассматриваем системы, находящиеся в тепловом равновесии с окружающей средой, чтобы не учитывать изменений свойств вещества, обусловленных иными (кроме электромагнитных) факторами. Поэтому ограничимся процессами, протекающими при постоянной температуре:  $T = \text{const}$ . В соответствии с выражением  $dF = -SdT - PdV$  заключаем, что при работе сил поля меняется *свободная энергия*.

Имея в виду сказанное, рассмотрим оба упомянутых подхода.

1) Рассмотрим замкнутую систему контуров с токами и произведём малое смещение. Тогда работа сил поля выполняется за счёт убыли свободной энергии поля. Если считать, что сопротивления контуров пре-

небрежимо малы, то магнитные потоки не меняются (по теореме о сохранении магнитного потока):  $\Phi_i = \text{const}$ . Таким образом, при виртуальном смещении

$$\delta A_{\text{поле}} = f \delta x = -(dF)_{\Phi, T}.$$

Поскольку

$$F = \frac{1}{2c} \sum_i^n J_i \Phi_i,$$

то в рассматриваемом подходе

$$(dF)_{\Phi, T} = \frac{1}{2c} \sum_i^n \Phi_i dJ_i.$$

2) Пусть теперь в контуры включены внешние источники энергии — батареи ЭДС  $\{\mathcal{E}_i^{(\text{бат})}, i=1, 2, \dots\}$ , поддерживающие неизменными точки в контурах. Роль этих ЭДС состоит в том, чтобы уравновесить ЭДС индукции, возникающие при всяких изменениях магнитных потоков:

$$\mathcal{E}_i^{(\text{бат})} = -\mathcal{E}_i^{(\text{инд.})} = \frac{1}{c} \frac{d\Phi_i}{dt}.$$

Соответственно работа батарей ЭДС за время виртуального перемещения  $dt$  будет равна

$$\delta A_{\text{бат.}} = \sum_i^n J_i \mathcal{E}_i^{(\text{бат.})} dt = \frac{1}{c} \sum_i^n J_i d\Phi_i.$$

Эта работа идёт на работу сил поля и на изменение свободной энергии поля:

$$\delta A_{\text{бат.}} = \delta A_{\text{поле}} + (dF)_{J, T}, \text{ или } \delta A_{\text{поле}} = \delta A_{\text{бат.}} - (dF)_{J, T}.$$

Поскольку  $F = \frac{1}{2c} \sum_i^n J_i \Phi_i$ , то

$$(dF)_{J, T} = \frac{1}{2c} \sum_i^n J_i d\Phi_i,$$

так что с учётом выражения для работы сторонних батарей ЭДС получаем

$$\begin{aligned} \delta A_{\text{поле}} &= \delta A_{\text{бат.}} - (dF)_{J, T} = \frac{1}{c} \sum_i^n J_i d\Phi_i - \frac{1}{2c} \sum_i^n J_i d\Phi_i = \\ &= \frac{1}{2c} \sum_i^n J_i d\Phi_i = +(dF)_{J, T}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\delta A_{\text{поле}} = f \delta x = -(dF)_{\Phi, T} = +(dF)_{J, T}.$$

### 8.3.2. Втягивание стержня из магнетика в соленоид

В качестве примера применения метода найдём силу, с которой втягивается в вакуумный соленоид длинный цилиндрический стержень с магнитной проницаемостью  $\mu$  и площадью поперечного сечения  $S$  (рис. 8.3.1). По соленоиду, имеющему плотность намотки  $n = N/l$ , циркулирует ток  $J$ .

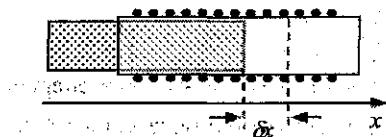


Рис. 8.3.1. Стержень из магнетика, введённый в соленоид, смещается вправо на малое расстояние  $\delta x$

Будем предполагать, что ток в соленоиде неизменный, так что для расчёта сил нужно использовать формулу

$$\delta A_{\text{поле}} = f \delta x = (dF)_{J, T}.$$

При смещении стержня на  $\delta x$  изменяется магнитный поток, поскольку часть объёма соленоида заполняется веществом с магнитной проницаемостью  $\mu$ , и в этой части меняется индукция магнитного поля  $B$ . Согласно формуле  $F = J\Phi/2c$  имеем  $(dF)_{J, T} = Jd\Phi/2c$ .

Перепишем это выражение, перейдя от тока к напряжённости магнитного поля. Вдали от границы раздела стержень–вакуум и от концов соленоида напряжённость поля равна, как в идеальном однородном соленоиде,  $H = 4\pi i/c = 4\pi nJ/c$ . Отсюда находим ток:  $J = cH/4\pi n$ . Следовательно,

$$(dF)_{J, T} = \frac{1}{8\pi n} Hd\Phi.$$

Найдём теперь изменение магнитного потока при смещении стержня на  $\delta x$ .

Магнитный поток  $\Phi = BS$  меняется за счёт уменьшения длины области соленоида, в которой  $\mu = 1$ . При смещении стержня на  $\delta x$  число витков соленоида, создающих поле в вакуумной части, уменьшается на  $n\delta x$ . На столько же увеличивается число витков в части соленоида, заполненной средой с магнитной проницаемостью  $\mu$ . Поэтому

$$d\Phi = n \delta x (BS)_{\text{стержень}} - n \delta x (BS)_{\text{вакуум}},$$

где  $BS$  — поток через один виток. Если исключить из рассмотрения области неоднородного поля вблизи границы раздела сред и концов соленоида, объём которых практически не меняется, то

$$(B)_{\text{стержень}} = \mu H, \quad (B)_{\text{вакуум}} = H.$$

Поэтому

$$d\Phi = n \delta x (\mu - 1) HS.$$

Подставляя это выражение в формулу  $(dF)_{J,T} = \frac{1}{8\pi n} H d\Phi$ , получим

$$(dF)_{J,T} = \frac{\mu - 1}{8\pi} H^2 S \delta x.$$

Отсюда находим выражение для силы, действующей на стержень:

$$f = \frac{(dF)_{J,T}}{\delta x} = \frac{\mu - 1}{8\pi} H^2 S.$$

Отсюда, в частности, следует, что при  $\mu > 1$  сила положительна — стержень втягивается в соленоид, а при  $\mu < 1$  сила отрицательна — стержень выталкивается из соленоида. Первый случай описывает поведение парамагнетиков, а второй — диамагнетиков.

### 8.3.3. Подъёмная сила электромагнита

Пусть на общем подковообразном сердечнике насыжены две катушки с суммарным числом витков  $N$ . По катушкам пустим ток  $J$ . Эта конструкция представляет собой электромагнит (рис. 8.3.2). Найдём силу, с которой он притягивает перемычку, расположенную вблизи ножек. Воспользуемся теоремой о циркуляции для магнитного поля, выбрав замкнутый контур так, как показано на рис. 8.3.2.

Введём следующие обозначения:

$S$  — площадь основания ножки подковы,

$l$  — длина контура внутри металла,

$N$  — число витков обмотки электромагнита,

$J$  — ток в обмотке,

$\mu$  — магнитная проницаемость материала (типично  $\mu \sim 10^2$ ),

$x$  — расстояние от ножки подковы до перемычки.

Как и при расчёте магнитных цепей, считаем  $x \ll \sqrt{S}$ ,  $l \gg \sqrt{S}$ .

Поскольку ток в обмотке пронизывает выбранный контур  $N$  раз, то по теореме о циркуляции

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} NJ$$

находим

$$H_m l + 2H_3 x = \frac{4\pi}{c} NJ.$$

Здесь  $H_m$  — поле в металле сердечника,  $H_3$  — поле в зазоре.

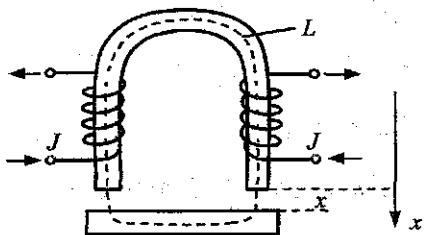


Рис. 8.3.2. Электромагнит (катушки на общем сердечнике) и перемычка, замыкающая магнитный поток между ножками подковообразного электромагнита. Штриховой линией показан контур интегрирования в теореме о циркуляции

Используем далее условие на границе раздела сердечник–зазор:

$$B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow H_3 = \mu H_m.$$

Это даёт:

$$H_m(l+2\mu x) = \frac{4\pi}{c} NJ \Rightarrow B_m = \mu H_m = \frac{4\pi\mu}{c} \frac{NJ}{l+2\mu x}.$$

Магнитный поток через всю обмотку электромагнита равен

$$\Phi = NB_m S = \frac{4\pi\mu}{c} \frac{N^2 J}{l+2\mu x} S.$$

Поскольку энергия магнитного поля  $U = J\Phi/2c$ , то при условии  $J = \text{const}$  полагаем

$$dU = \frac{Jd\Phi}{2c} = f \cdot dx.$$

Отсюда находим силу, действующую на перемычку:

$$f = \frac{J}{2c} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_J = -\frac{4\pi\mu^2}{c^2} \frac{N^2 J^2}{(l+2\mu x)^2} S.$$

Поскольку  $f < 0$ , то перемычка притягивается к электромагниту. Максимального значения сила достигает при  $x = 0$  и составляет

$$f = -4\pi S \left( \frac{\mu NJ}{cl} \right)^2.$$

## Глава 9. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

### 9.1. Парамагнетизм

#### 9.1.1. Теория Ланжевена

В 1905 г. П. Ланжевен предложил теорию, объясняющую явление парамагнетизма и основанную на принципах классической статистической физики. Согласно его теории частицы вещества изначально обладают магнитными моментами. Тогда внешнее поле стремится ориентировать элементарные магниты в направлении поля, а тепловое движение стремится разориентировать эти магниты.

Учтём, что потенциальная энергия отдельного магнитного момента в поле  $\mathbf{B}$  равна

$$U = -m\mathbf{B} = -mB \cos \theta.$$

Будем также пренебречь взаимным влиянием частиц. Тогда распределение моментов по направлениям даётся распределением Больцмана:

$$dn = A \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) d\Omega, \quad (9.1.1)$$

где  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$  — телесный угол (угол  $\theta$  отсчитывается от направления магнитного поля). Вводя обозначение

$$a = mB/kT,$$

перепишем распределение (9.1.1) в виде

$$dn = 2\pi A \exp\left(\frac{mB}{kT} \cos \theta\right) \sin \theta d\theta.$$

Нормировочный множитель  $A$  определяется из условия

$$\int_{\theta=0}^{\pi} dn = n_0,$$

где  $n_0$  — полная концентрация частиц ( $\text{см}^{-3}$ ). Выполняя интегрирование, найдём значение нормировочного множителя:

$$A = \frac{n_0 a}{4\pi \sinh a}$$

Будем считать, что магнитное поле направлено вдоль оси  $z$ . Тогда намагниченность вещества можно записать как

$$I = n\bar{m}_z = \int m_z dn.$$

Усреднить достаточно только компоненту  $m_z$  магнитного момента, поскольку вследствие осевой симметрии окажется  $\bar{m}_x = \bar{m}_y = 0$ . Поскольку  $m_z = m \cos \theta$ , то

$$I = 2\pi m A \int_0^\pi e^{a \cos \theta} \cos \theta \sin \theta d\theta = n_0 m \left( \coth a - \frac{1}{a} \right), \quad a = \frac{mB}{kT}. \quad (9.1.2)$$

Рассмотрим частные случаи. Заметим предварительно, что величина  $I_{\text{нас}} = n_0 m$  представляет собой предельную намагниченность, или **намагниченность насыщения**, поскольку отвечает состоянию, в котором по направлению поля ориентированы магнитные моменты всех частиц.

1) *Низкие температуры,  $a = mB/kT \gg 1$ .*

Поскольку в этом пределе  $\coth a - \frac{1}{a} \rightarrow 1$ , то получаем

$$I \rightarrow I_{\text{нас}} = n_0 m.$$

2) *Высокие температуры,  $a = mB/kT \ll 1$ .*

В этом пределе  $\coth a - \frac{1}{a} \approx \frac{a}{3}$ . Соответственно находим

$$I \approx I_{\text{нас}} \frac{mB}{3kT} = \frac{n_0 m^2}{3kT} B \approx \frac{n_0 m^2}{3kT} H.$$

Здесь учтено, что коэффициент  $n_0 m^2 / 3kT$ , как правило, много меньше единицы и отличие  $B$  и  $H$  мало. Это позволило в последнем равенстве заменить  $B$  на  $H$ . Таким образом, получаем следующие выражения для магнитной восприимчивости (коэффициента  $\kappa$  в формуле  $I = \kappa H$ ) и магнитной проницаемости:

$$\kappa = n_0 m^2 / 3kT, \quad \mu = 1 + 4\pi\kappa. \quad (9.1.3)$$

График зависимости  $I(B)$  показан на рис. 9.1.1. Видно, что если внешнее поле велико (или температура мала), то связь намагниченности и поля становится нелинейной.

### 9.1.2. Теория Бриллюэна

Теория Ланжевена даёт следующую зависимость магнитной восприимчивости от температуры:  $\kappa = n_0 m^2 / 3kT$ . Вместе с тем, опыт говорит, что наблюдаемое значение  $\kappa$  в 3 раза больше. Причина этого несоответствия состоит в том, что поведение магнитных моментов частиц описывается законами квантовой, а не классической, механики. Объяснение явления парамагнетизма, основанное на применении квантовой механики, предложил Л. Бриллюэн в 1926 г.

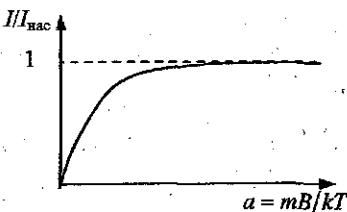


Рис. 9.1.1. Зависимость намагниченности парамагнетика от температуры и внешнего поля

Согласно законам квантовой механики электрон имеет собственный момент импульса — спин  $s$ , проекция которого на выделенное направление ( $s_z$ ) может принимать только два значения:

$$s_z = -\hbar/2, s_z = +\hbar/2.$$

Магнитный момент электрона  $m$ , будучи направленным антипараллельно спину:  $m = g_s \gamma s$ , также может ориентироваться только двумя способами:

$$m_z = -\mu_B, m_z = +\mu_B,$$

где

$$\mu_B = \frac{|e|\hbar}{2mc} = 9,27 \cdot 10^{-21} \text{ эрг/Гс}$$

постоянна, называемая *магнетоном Бора*. Заметим, что в формулу  $m = g_s \gamma s$  для магнитного момента электрона входит, помимо гиромагнитного отношения  $\gamma = e/2mc < 0$ , дополнительный множитель  $g_s = 2$ , называемый *спиновым g-фактором*<sup>1</sup>. Соответственно потенциальная энергия магнитного момента  $m$  в магнитном поле  $B$ ,  $U = -mB$ , может принимать два значения:

$$U_1 = -\mu_B B, U_2 = +\mu_B B,$$

<sup>1</sup> Появление этого дополнительного множителя объясняется в релятивистской квантовой теории.

отвечающие ориентации момента по полю и против поля.

Будем считать, что магнитные моменты частиц, образующих магнетик, определяются магнитным моментом электрона. Кроме того, пренебрегаем взаимодействием частиц друг с другом. Согласно распределению Больцмана концентрация частиц в состоянии с энергией  $U_i$  равна

$$n_i = A \exp\left(-\frac{U_i}{kT}\right) = A \exp\left(\pm \frac{\mu_B \hbar}{kT}\right), \quad (9.1.4)$$

где  $A$  — нормировочная постоянная. Введём обозначение  $a = \mu_B \hbar / kT$ ,  
Тогда получаем

$n_1 = Ae^a$  — для ориентации  $\vec{m}$  по направлению поля  $\vec{B}$ ,

$n_2 = Ae^{-a}$  — для ориентации  $\vec{m}$  против направления поля  $\vec{B}$ .

Из условия нормировки  $n_1 + n_2 = n_0$  находим

$$A = \frac{n_0}{2 \sinh a}$$

( $n_0$  — концентрация атомов в веществе).

Намагниченность вещества равна

$$I = n_1 m + n_2 (-m) = m \cdot 2A \sinh a = n_0 m \tanh a.$$

Таким образом, в отличие от теории Ланжевена, подход Бриллюэна на основе квантовой механики даёт следующее выражение для намагниченности парамагнетика:

$$I = n_0 m \tanh\left(\frac{mB}{kT}\right). \quad (9.1.5)$$

Как и раньше, величина  $I_{\text{нас}} = n_0 m$  есть намагниченность насыщения, отвечающая состоянию, в котором магнитные моменты всех частиц ориентированы по направлению поля.

Рассмотрим частные случаи.

1) *Низкие температуры*:  $a = mB/kT \gg 1$ .

Поскольку в этом пределе  $\tanh a \rightarrow 1$ , то получаем

$$I \rightarrow I_{\text{нас}} = n_0 m.$$

2) *Высокие температуры*:  $a = mB/kT \ll 1$ .

В этом пределе  $\tanh a \approx a$ . Соответственно находим

$$I \approx I_{\text{нас}} \frac{mB}{kT} = \frac{n_0 m^2}{kT} B \approx \frac{n_0 m^2}{kT} H = \kappa H$$

(учтено, что, как правило, величина  $\kappa = n_0 m^2 / kT \ll 1$ ). Таким образом, квантово-механический подход даёт выражение для магнитной восприимчивости

$$\kappa = n_0 m^2 / kT, \quad (9.1.6)$$

которое согласуется с экспериментальными данными.

## 9.2. Диамагнетизм

### 9.2.1. Ларморова прецессия

Рассмотрим систему частиц, имеющих одинаковые массы ( $m_e$ ) и заряды ( $e$ ). Магнитный момент этой системы связан с её моментом импульса соотношением

$$\mathbf{m} = \gamma \mathbf{L}, \quad (9.2.1)$$

где  $\gamma = e/2m_e c$  — гиromагнитное отношение.

Пусть эта система находится в однородном магнитном поле  $\mathbf{B}$ . Тогда на неё действует момент сил

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}.$$

Запишем уравнение динамики вращательного движения:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$$

или, после подстановки сюда выражения для  $\mathbf{M}$ ,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}.$$

Учитывая связь (9.2.1) магнитного момента с моментом импульса, получаем

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \gamma \mathbf{m} \times \mathbf{B}, \quad \text{или} \quad \frac{d\mathbf{m}}{dt} = \Omega \times \mathbf{m}.$$

Отсюда видно, что магнитный момент совершает прецессию (вращается относительно направления магнитного поля  $\mathbf{B}$ ) с угловой скоростью

$$\Omega = -\gamma \mathbf{B} = -\frac{e}{2m_e c} \mathbf{B}, \quad (9.2.2)$$

как показано на рис. 9.2.1. Это вращение называется *прецессией Лармора*, или *ларморовой прецессией*, а частота  $\Omega = eB/2m_e c$  — *ларморовой частотой*.

Если заряд частицы  $e < 0$  (как у электрона), то прецессия осуществляется в положительном направлении ( $\Omega \uparrow \uparrow \mathbf{B}$ ). Если же заряд час-

тиц положительный, то прецессия осуществляется в противоположном направлении ( $\Omega \uparrow \downarrow B$ ).

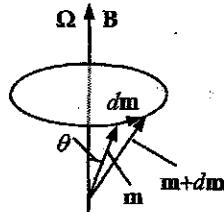


Рис. 9.2.1. Ларморова прецессия в случае частицы с зарядом  $e < 0$

### 9.2.2. Диамагнитная восприимчивость

Под действием внешнего магнитного поля  $B$  возникает ларморова прецессия магнитных моментов, причём электрон в атоме приобретает дополнительную угловую скорость  $\Omega = -\frac{e}{2m_e c} B$ , как показано на рис. 9.2.2. Обозначим радиус соответствующей окружности как  $r$ .

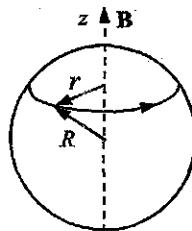


Рис. 9.2.2. Электрон в атоме под действием внешнего магнитного поля  $B$  приобретает дополнительное вращение вокруг направления  $B$

Вращение заряда с периодом  $T$  и частотой  $\Omega$  означает наличие дополнительного кругового тока:

$$\Delta J = \frac{e}{T} = \frac{e\Omega}{2\pi}, \quad \Omega = -\frac{eB}{2m_e c}$$

Ему соответствует магнитный момент

$$m = \frac{\Delta J}{c} \pi r^2 = \frac{e\Omega}{2\pi} \pi r^2 = -\frac{e^2 r^2}{4m_e c^2} B$$

Если радиус атома есть  $R$ , то

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow R^2 = \overline{x^2} + \overline{y^2} + \overline{z^2}$$

Здесь усреднение выполнено по всем атомам, где электрон захватывается в дополнительное вращение в различных исходных положениях ( $x, y$ ,

2). Ввиду равной вероятности различных начальных положений электрона можно положить

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = \frac{1}{3}R^2, \quad \overline{r^2} = \overline{x^2} + \overline{y^2} = \frac{2}{3}R^2.$$

Таким образом, получаем дополнительный магнитный момент, приобретаемый атомом, содержащим  $Z$  электронов:

$$\overline{\mathbf{m}}_Z = Z\overline{\mathbf{m}} = -\frac{Ze^2\overline{r^2}}{4m_e c^2} \mathbf{B} = -\frac{Ze^2 R^2}{6m_e c^2} \mathbf{B}.$$

В слабом поле намагниченность среды мала, так что в последней формуле можно приближённо заменить  $\mathbf{B} \approx \mathbf{H}$ . Поэтому получаем выражение для намагниченности среды с концентрацией атомов  $n$  ( $\text{см}^{-3}$ )  $\mathbf{I} = n\overline{\mathbf{m}}_Z$ :

$$\mathbf{I} = \kappa \mathbf{H}, \quad \kappa = -\frac{nZe^2 R^2}{6m_e c^2}. \quad (9.2.3)$$

Таким образом, в случае диамагнетиков магнитная восприимчивость отрицательна, а магнитная проницаемость  $\mu = 1 + 4\pi\kappa < 1$ .

Иногда приводят значения *удельной* магнитной восприимчивости (т.е. восприимчивости в расчёте на единицу массы):

$$\kappa_{\text{уд}} = \kappa / \rho, \quad [\kappa_{\text{уд}}] = \text{см}^3/\text{г},$$

где  $\rho$  — плотность вещества. Эта величина не зависит от плотности вещества и потому более удобна для практических расчётов. Например, при комнатной температуре

$$\text{для серебра } \kappa_{\text{уд}} = -0,18 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3/\text{г},$$

$$\text{для висмута } \kappa_{\text{уд}} = -1,34 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3/\text{г}.$$

Используют также восприимчивости в расчёте на моль вещества. Для этого в полученной формуле для  $\kappa$  следует заменить концентрацию  $n$  на число Авогадро  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ :

$$\kappa_A = -\frac{N_A Ze^2 R^2}{6m_e c^2}.$$

Имеет место очевидное соотношение  $\kappa_A = M \kappa_{\text{уд}}$ , где  $M$  — относительная молярная масса вещества. В качестве примера укажем следующие значения  $\kappa_A$ :

${}^4_2\text{He}$ :  $\kappa_A = -2,2 \cdot 10^{-6}$ ,

${}^{40}_{18}\text{Ar}$ :  $\kappa_A = -2,5 \cdot 10^{-4}$ .

### 9.2.3. Диамагнетизм и электромагнитная индукция

С лармовой прецессией связана дополнительная энергия. Однако магнитное поле работы не совершает, поскольку сила Лоренца перпендикулярна скорости частицы:  $F = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \perp \mathbf{v}$ . Механизм, с помощью которого электронам сообщается энергия, связан с явлением электромагнитной индукции. Этот механизм работает во время «включения» магнитного поля: когда магнитное поле возрастает, по закону электромагнитной индукции возникает вихревое электрическое поле по закону

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Применим это соотношение для контура  $\Gamma$  радиуса  $r$  с центром на оси атома, как показано на рис. 9.2.3:

$$2\pi r E = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{c} \pi r^2 B \right) \Rightarrow E = -\frac{r}{2c} \frac{dB}{dt}.$$

Индуктированное электрическое поле действует на электрон и создаёт момент сил относительно оси атома:

$$M = r \cdot e E = -\frac{r^2 e}{2c} \frac{dB}{dt}.$$

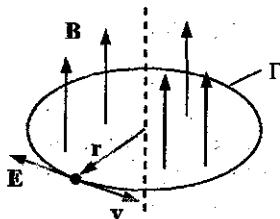


Рис. 9.2.3. Индуцированное электрическое поле и направление движения электрона ( $e < 0$ ) для случая «включения» магнитного поля,  $d\Phi/dt > 0$

Изменение момента импульса электрона определяется уравнением  $dL/dt = M$  или

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{er^2}{2c} \frac{dB}{dt} \Rightarrow L = -\frac{er^2}{2c} B.$$

(в начальный момент было  $L = 0, B = 0$ ). С моментом импульса связан магнитный момент:

$$m = \gamma L = -\frac{e^2 r^2}{4mc^2} B.$$

Это совпадает с выражением, полученным в предыдущем разделе.

## 9.3. Ферромагнетизм

### 9.3.1. Гистерезисные явления

Ферромагнетики — это вещества, которые могут обладать отличной от нуля намагниченностью в отсутствие внешнего поля. Примерами являются железо, никель и кобальт.

Если образец из ферромагнетика поместить во внешнее магнитное поле и плавно периодически менять направление этого поля, то периодически будет меняться и намагниченность образца, а также поле в образце, как показано на рис. 9.3.1 и 9.3.2. Как видно, кривая намагничивания неоднозначна. Это явление называется *гистерезисом*.

На рис. 9.3.1 и 9.3.2 показаны следующие характеристики ферромагнетика:

$B_r$  — остаточная намагниченность,

$H_s, B_s$  — поле насыщения,

$I_s$  — намагниченность насыщения,

$H_c$  — коэрцитивная сила.

Постоянные магниты существуют вследствие наличия *остаточной намагниченности*  $B = B_r \neq 0$ , т.е. намагниченности, сохраняющейся при уменьшении до нуля внешнего поля ( $H = 0$ ).

Существование *намагниченности насыщения* связано с тем, что, как и в случае парамагнетиков, в одном и том же направлении ориентируется максимально возможное число магнитных моментов атомов, так что рост намагниченности при увеличении внешнего поля  $H > H_s$  прекращается.

Размеры гистерезисной петли ограничиваются полем насыщения. Когда  $|H| > H_s$ , зависимость  $B(H)$  однозначная и практически линейная.

*Коэрцитивная сила* — это то значение внешнего магнитного поля, которое требуется приложить к образцу, чтобы в его объёме обратить в нуль магнитное поле. Более точно: коэрцитивная сила определяется в процессе перемагничивания образца, намагниченность которого в цикле

достигала насыщения (т.е. в условиях, когда внешнее поле в какие-то моменты превышало значение  $H_s$ ). У разных ферромагнетиков коэрцитивная сила может принимать значения от  $10^{-3}$  до  $10^4$  эрстед.

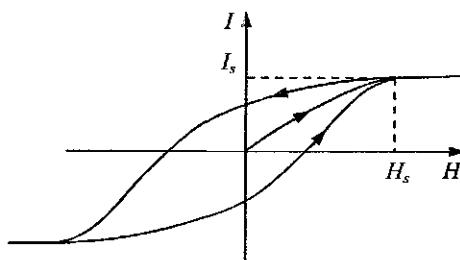


Рис. 9.3.1. Зависимость намагниченности  $I$  ферромагнетика от внешнего магнитного поля ( $H$ ). Стрелки на кривых показывают направление изменения внешнего магнитного поля

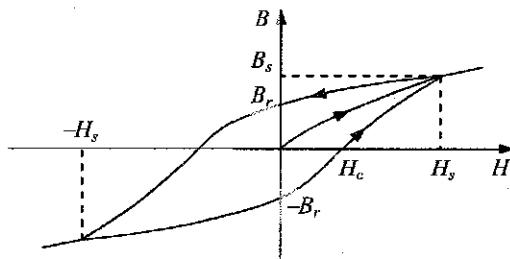


Рис. 9.3.2. Кривая намагничивания ферромагнетика — зависимость магнитного поля в веществе ( $B$ ) от внешнего магнитного поля ( $H$ ). Стрелки на кривых показывают направление изменения внешнего магнитного поля

Вещества называются *магнитомягкими*, если гистерезисная петля узкая, значения коэрцитивной силы и поля насыщения малы. Это значит, что магнитомягкие материалы относительно легко перемагнитить, изменить направление намагниченности на противоположное.

Если значение коэрцитивной силы велико и гистерезисная петля широкая, то материал называется *магнитожёстким*. Именно из таких материалов делаются хорошие магниты, поскольку их труднее перемагнитить.

Заметим, наконец, что при перемагничивании образца совершается работа, которую можно записать в виде

$$A = \frac{1}{4\pi} \oint \mathbf{H} d\mathbf{B},$$

где интегрирование выполняется по полному циклу перемагничивания (рис. 9.3.2). Эта работа пропорциональна площади, ограниченной гистерезисной петлёй. Она идёт, в частности, на нагрев образца.

### 9.3.2. Закон Кюри–Вейсса

Явление ферромагнетизма наблюдается, если температура вещества не превышает критического значения  $T = T_K$ , называемого *точкой Кюри*. Если  $T < T_K$ , то образец обладает ферромагнитными свойствами и может сохранять намагниченность. Если же  $T > T_K$ , то образец ведёт себя как парамагнетик, для которого связь  $B$  и  $H$  однозначная:  $I \propto H$ ,  $B = \mu H$ . На рис. 9.3.3 показана зависимость магнитной восприимчивости от температуры.

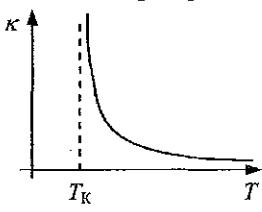


Рис. 9.3.3. Зависимость магнитной восприимчивости ферромагнетика от температуры

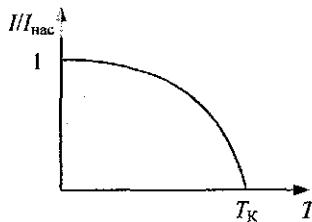


Рис. 9.3.4. Намагниченность ферромагнетика как функция температуры ниже точки Кюри

Зависимость  $\kappa(T)$  в окрестности точки Кюри при  $T > T_K$  описывается формулой

$$\kappa \sim \frac{\text{const}}{T - T_K}.$$

Это соотношение называется *законом Кюри–Вейсса*. При  $T < T_K$  величина  $\kappa$  не определена однозначно, а вещество может спонтанно (самоизвольно) приобретать намагниченность.

Зависимость намагниченности от температуры ниже точки Кюри показана на рис. 9.3.4. При  $T \rightarrow T_K$  намагниченность пропадает, и вещество переходит в парамагнитное состояние.

Приведём некоторые значения температуры Кюри:

Ni:  $T_K = 627,4$  K; Fe:  $T_K = 1044$  K; Co:  $T_K = 1388$  K.

### **9.3.3. О природе ферромагнетизма**

Возникновение намагниченности образца при  $T < T_K$  происходит в результате фазового перехода второго рода и связано с тем, что это состояние энергетически выгоднее, чем состояние с нулевой намагниченностью.

Как и в случае парамагнетиков, вещества с ферромагнитными свойствами состоят из частиц (атомов), имеющих собственный магнитный момент. При рассмотрении намагничивания обычных парамагнетиков (как в теории Ланжевена, так и в теории Бриллюэна) пренебрегалось взаимодействием магнитных моментов частиц между собой. Вместе с тем в некоторых случаях это взаимодействие может быть существенным. Действительно, если возникает некоторая намагниченность, то в результате поле в среде усиливается. А это в свою очередь стимулирует ориентацию, поворачивание магнитных моментов в том же направлении. Если ориентирующее действие такого взаимодействия преодолеет разориентирующее действие тепловых колебаний, то вещество переходит в ферромагнитное состояние.

Одна из первых теорий ферромагнетизма была предложена П. Вейссом в 1907 г., предположившим, что существует сильное молекулярное поле, осуществляющее ориентацию моментов (так называемое *молекулярное поле Вейсса*). Однако природа этого поля установлена не была. В 1926 г. В. Гейзенберг предложил теорию ферромагнетизма, основанную на квантово-механическом рассмотрении взаимодействия спиновых магнитных моментов атомов в среде. Это взаимодействие называется *обменным* и представляет собой электромагнитное взаимодействие, видоизменённое благодаря квантово-механическим закономерностям.

### **9.3.4. Доменная структура ферромагнетиков**

*Доменом* называется область, имеющая только одно направление намагниченности. В ферромагнитном состоянии (при температуре ниже точки Кюри) домены имеют намагниченность насыщения.

Если весь образец намагнчен в одну сторону, то возникает сильное магнитное поле, несущее большую энергию. Но это состояние невыгодно: выгодно разбить образец на намагниченные участки (домены). При этом намагниченность разных доменов направлена так, чтобы минимизировать полную магнитную энергию.

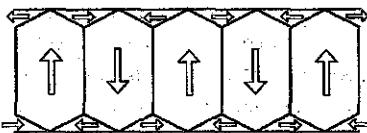
Домены — макроскопические (хотя и малые) области. Их типичные размеры составляют несколько микрон.

В простейшем случае доменную структуру тонкого образца можно представить, как на рис. 9.3.5. Домены с противоположной намагниченностью чередуются. Кроме того, могут появляться так называемые замыкающие домены — треугольные домены сверху и снизу образца (рис. 9.3.5), передающие магнитный поток от одного домена к другому и уменьшающие магнитное поле вне вещества.

Размер домена не может быть произвольным, поскольку в его формировании участвуют несколько конкурирующих факторов:

- 1) выигрыши в энергии за счёт формирования намагниченности в домене благодаря обменному взаимодействию (ориентационная энергия),
- 2) проигрыши в энергии за счёт возникновения сильных магнитных полей,
- 3) проигрыши в энергии за счёт формирования доменных стенок — границ соседних доменов с противоположно направленными намагниченностями. В этих стенках происходит переход от одной ориентации намагниченности к другой. В результате теряется выигрыш в ориентационной энергии, что приводит к увеличению поверхностной энергии системы.

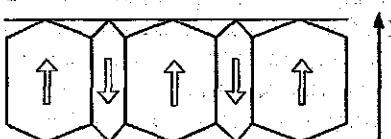
Рис. 9.3.5. Чередование доменов с противоположной намагниченностью. Стрелки указывают направление намагниченности домена



Процесс перемагничивания для случая доменной структуры на рис. 9.3.5 состоит в том, что доменные стенки начинают смещаться, приводя к «поглощению» доменов с «неправильной» намагниченностью и росту доменов с «правильной» намагниченностью, как показано на рис. 9.3.6. Разумеется, движение стенок не сопровождается макроскопическими движениями вещества — этот процесс состоит только в изменении направления магнитных моментов атомов.

В общем случае ферромагнетик представляет собой набор хаотически ориентированных доменов, в каждом из которых намагниченность имеет определённое направление (рис. 9.3.7).

Рис. 9.3.6. Перемагничивание ферромагнетика путём движения доменных стенок



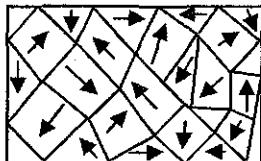


Рис. 9.3.7. Доменная структура ферромагнетика — множество доменов со случайным направлением намагниченности

Гистерезисный характер перемагничивания связан с наличием необратимых стадий. Дело в том, что при не слишком высоких полях перемагничивание происходит путём смещения доменной стенки. Но это — обратимая стадия. Вместе с тем вследствие наличия дефектов структуры движение доменных стенок может происходить неравномерно, скачкообразно. Такие скачки сопровождаются потерями энергии и приводят к тому, что процесс намагничивания становится необратимым, т.е. к гистерезисным явлениям при перемагничивании.

Другой механизм появления необратимости состоит в следующем. В кристаллах существует ось лёгкого намагничивания, вдоль которой ориентируется намагниченность. Однако эта ось может не совпадать с направлением внешнего магнитного поля. Такая ситуация обязательно встречается в поликристаллических образцах со случайными ориентациями осей в отдельных кристаллах. И тогда в случае достаточно сильных внешних полей начинается «доворот» магнитного момента всего домена к направлению внешнего поля. Эта стадия сопровождается затратами энергии и приводит к гистерезису.

Возможны и другие механизмы, вызывающие потери энергии и гистерезис при перемагничивании. Таковыми являются процессы, когда доменные стенки при своём движении «застревают» на дефектах структуры. В результате возникают скачкообразные движения стенок, сопровождающиеся возникновением индукционных токов и соответствующими потерями энергии.

## 9.4. Сверхпроводники в магнитном поле

### 9.4.1. Сверхпроводимость

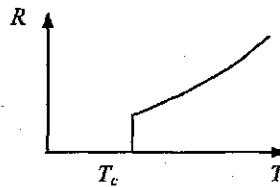
Явление сверхпроводимости открыл в 1911 г. Гейке Камерлинг-Оннес. Он обнаружил, что при охлаждении ртути до температуры ниже 4,2 К её сопротивление падает до нуля.

Сверхпроводимость — это свойство проводников, состоящее в скачкообразном уменьшении до нуля их сопротивления при понижении температуры ниже некоторого значения (рис. 9.4.1). Температура  $T_c$ , ни-

жс которой вещество находится в сверхпроводящем состоянии, называемая *критической температурой*.

Переход вещества в сверхпроводящее состояние есть фазовый переход первого рода, связанный с перестройкой электронной подсистемы (и не кристаллической структуры).

Рис. 9.4.1. Зависимость сопротивления образца от температуры при его переходе из нормального состояния в сверхпроводящее



#### 9.4.2. Разрушение сверхпроводимости магнитным полем

Сверхпроводимость разрушается как при повышении температуры, так и при помещении сверхпроводника в достаточно сильное магнитное поле (рис. 9.4.2).

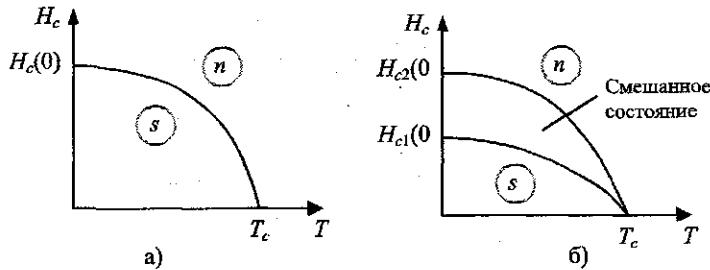


Рис. 9.4.2. Зависимость критического магнитного поля от температуры для сверхпроводников I рода (а) и II рода (б). Символы *n* и *s* обозначают соответственно нормальную и сверхпроводящую фазы. В случае сверхпроводников II рода (справа) имеется смешанное состояние, в котором существуют обе фазы, благодаря чему поле частично проникает в объём вещества

Зависимость величины критического магнитного поля от температуры удовлетворительно передается формулой

$$H_c(T) = H_c(0) \left[ 1 - (T/T_c)^2 \right].$$

Различают сверхпроводники I и II рода — в зависимости от того, проникает магнитное поле в объём или нет при температуре ниже критической. В случае сверхпроводников I рода магнитное поле при  $T < T_c$  полностью выталкивается из объёма вещества. В случае же сверхпро-

водников II рода в некотором диапазоне значений параметров (в области смешанного состояния, показанной на рис. 9.4.2) магнитное поле может частично проникать в объём вещества через так называемые вихревые трубы (вихри Абрикосова).

### 9.4.3. Диамagnetизм сверхпроводников

Введём формально вектор напряжённости магнитного поля в объеме сверхпроводника:  $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{I}$ , где  $\mathbf{I}$  — вектор намагниченности. Поскольку в объеме сверхпроводника  $\mathbf{B} = 0$ , то  $\mathbf{I} = -(1/4\pi)\mathbf{H}$ . Это значит, что магнитная восприимчивость  $\kappa = -1/4\pi < 0$ . Поэтому сверхпроводник является диамагнетиком, к тому же идеальным — поле в нём ослабляется до нуля.

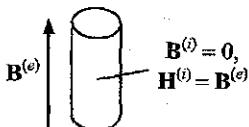


Рис. 9.4.3. Сверхпроводящий цилиндр в магнитном поле. Ось цилиндра параллельна полю

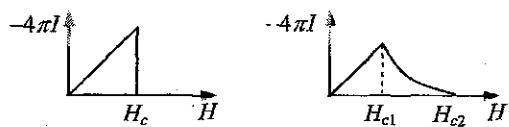


Рис. 9.4.4. Зависимость намагниченности образца от внешнего магнитного поля для сверхпроводников I рода (слева) и сверхпроводников II рода (справа)

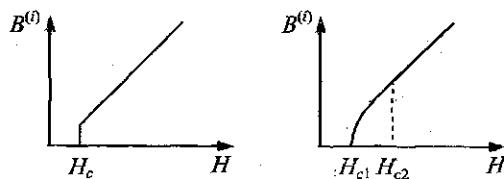


Рис. 9.4.5. Зависимость среднего магнитного поля в объеме образца от внешнего магнитного поля для сверхпроводников I рода (слева) и сверхпроводников II рода (справа)

Найдём магнитный момент, который приобретает сверхпроводник во внешнем магнитном поле  $\mathbf{B}^{(e)}$ . Пусть образец представляет собой длинный тонкий цилиндр, ориентированный вдоль силовых линий магнитного поля (рис. 9.4.3). В рассматриваемой геометрии напряжённость поля в цилиндре  $\mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{B}^{(e)}$ . Поэтому

$$\mathbf{I} = -(1/4\pi)\mathbf{H}^{(i)} = -(1/4\pi)\mathbf{B}^{(e)} \Rightarrow \mathbf{m} = \mathbf{I}\mathbf{l} = -(V/4\pi)\mathbf{B}^{(e)}.$$

На рис. 9.4.4 и 9.4.5 показаны зависимости намагниченности об разца  $I$  и магнитного поля в его объеме  $B^{(i)}$  при изменении внешнего магнитного поля  $H$ .

#### 9.4.4. Эффект Мейсснера

Эффект Мейсснера состоит в том, что при температуре ниже критической магнитное поле полностью выталкивается из объема сверхпроводника (рис. 9.4.6) независимо от момента перевода вещества в сверхпроводящее состояние: до или после наложения магнитного поля.

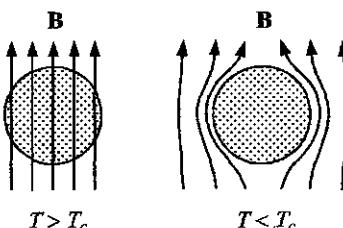


Рис. 9.4.6. Эффект Мейсснера — выталкивание внешнего магнитного поля из сверхпроводника. Слева — проводник в нормальном состоянии, справа — сверхпроводник

Заметим, что полный эффект Мейсснера имеет место в случае сверхпроводников первого рода при  $T < T_c$ . В случае же сверхпроводников второго рода полное вытеснение магнитного поля из объема вещества происходит только при  $T < T_{c1}$ , тогда как в интервале  $T_{c1} < T < T_{c2}$  выталкивание поля лишь частичное.

#### 9.4.5. Границные условия на поверхности сверхпроводника

Поскольку в объеме сверхпроводника  $\mathbf{B} = 0$ , то из граничного условия  $B_{1n} = B_{2n}$  следует, что на внешней поверхности сверхпроводника  $B_n = 0$ . Это значит, что магнитное поле может иметь только касательную к поверхности компоненту.

#### 9.4.6. Сверхпроводящий шар в магнитном поле

Пусть сверхпроводящий шар находится в однородном магнитном поле. Найдём магнитный момент, приобретаемый шаром, а также распределение токов по его поверхности (рис. 9.4.7 и 9.4.8).



Рис. 9.4.7. Поверхностные токи на сверхпроводящем шаре, находящемся во внешнем магнитном поле  $\mathbf{B}$

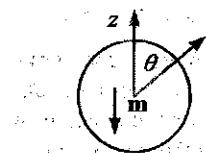


Рис. 9.4.8. Индуцированный магнитный момент  $\mathbf{m}$  при наличии внешнего поля  $\mathbf{B}$

Поле вне шара складывается из внешнего поля  $\mathbf{B}_0$  и поля индуцированных поверхностных токов. Последнее равно полю точечного магнитного диполя  $\mathbf{m}$ , расположенного в центре шара:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 + \frac{3(m\mathbf{r})\mathbf{r} - m\mathbf{r}^2}{r^5}. \quad (9.4.1)$$

Так как на поверхности шара (т.е. при  $r = R$ ) будет  $B_n \equiv B_r = 0$ , то  $\mathbf{r}\mathbf{B}(\mathbf{r})|_{r=R} = 0$ , или

$$0 = \left( \mathbf{r}\mathbf{B}_0 + \frac{3(m\mathbf{r})\mathbf{r}^2 - (m\mathbf{r})\mathbf{r}^2}{r^5} \right)_{r=R} \Rightarrow B_0 \cos \theta + \frac{2m}{R^3} \cos \theta = 0.$$

Отсюда находим магнитный момент шара:  $m = -R^3 B_0 / 2$ . В векторном виде это соотношение записывается следующим образом:

$$\mathbf{m} = -\frac{R^3}{2} \mathbf{B}_0. \quad (9.4.2)$$

Этот же результат можно получить из приведённых в разделе 4.2.6 формул, определяющих магнитное поле в веществе и намагниченность в зависимости от величины внешнего магнитного поля:

$$\mathbf{B}^{(0)} = \frac{3\mu}{\mu+2} \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{I} = \frac{3(\mu-1)}{4\pi(\mu+2)} \mathbf{B}_0.$$

Сверхпроводящему состоянию отвечает отсутствие поля в объёме вещества,  $\mathbf{B}^{(i)} = 0$ , или, что в данном случае эквивалентно,  $\mu \rightarrow 0$ . Отсюда получаем:

$$\mathbf{I} = -\frac{3}{8\pi} \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{m} = \frac{4\pi}{3} R^3 \mathbf{I} = -\frac{R^3}{2} \mathbf{B}_0.$$

Найдём теперь величину поверхностных токов. Эти токи текут вдоль параллелей  $\theta = \text{const}$ , а силовые линии магнитного поля на поверхности шара направлены по меридианам вверх. По теореме о циркуляции  $B_t = 4\pi i/c$  (поскольку поле в объёме сверхпроводника равно нулю). С другой стороны, проектируя  $\mathbf{B}$  в (9.4.1) на меридиан, находим

$$B_t = \left( B_0 - \frac{m}{R^3} \right) \sin \theta = \frac{3}{2} B_0 \sin \theta.$$

Отсюда сразу получаем

$$i = \frac{3c}{8\pi} B_0 \sin \theta. \quad (9.4.3)$$

Направление циркуляции тока показано на рис. 9.4.7.

## Глава 10. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

### 10.1. Ток смещения

#### 10.1.1. Ток смещения и закон сохранения заряда

Теорема о циркуляции для постоянного магнитного поля

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} J \quad \text{или} \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

оказывается неверной в случае переменного электрического поля. Действительно, применяя почленно операцию  $\operatorname{div}$  ко второму уравнению и учитывая тождество  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ , получаем  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ . С другой стороны, если плотность заряда меняется со временем,  $\partial\rho/\partial t \neq 0$ , то в силу уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

получаем  $\operatorname{div} \mathbf{j} \neq 0$ . Это противоречие показывает, что необходимо видоизменить теорему о циркуляции. Для решения этой задачи Дж. Максвелл ввёл *ток смещения*  $\mathbf{j}_{cm}$  соотношением

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{cm})$$

и потребовал, чтобы уравнение непрерывности выполнялось. Применяя почленно, как и выше, операцию  $\operatorname{div}$  к записанному уравнению, получаем

$$\operatorname{div}(\mathbf{j} + \mathbf{j}_{cm}) = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{j}_{cm} = -\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Согласно теореме Гаусса для электрического поля  $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$  имеем  $\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{D}$ . Подставляя это выражение для плотности заряда в полученное выше выражение для  $\operatorname{div} \mathbf{j}_{cm}$ , находим

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{D} \right).$$

Это равенство удовлетворяется тождественно, если положить

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Таким образом, теорема о циркуляции для магнитного поля, согласующаяся с законом сохранения заряда, должна записываться в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

В интегральной форме теорема о циркуляции имеет вид

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} (J + J_{\text{см}}).$$

Полный ток смещения, пронизывающий контур  $L$ , равен

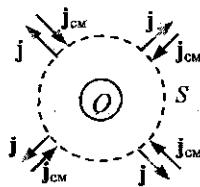
$$J_{\text{см}} = \iint_S \mathbf{j}_{\text{см}} dS = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dS.$$

Таким образом, переменное электрическое поле приводит к возникновению токов смещения, которые в свою очередь участвуют в создании магнитного поля.

### 10.1.2. Стекание заряда с шара во внешнюю среду

Пусть шар несёт заряд  $Q$ , который может стекать во внешнюю среду (рис. 10.1.1). Вследствие стекания заряда возникают токи, которые в общем случае могут индуцировать магнитное поле. Найдём магнитное поле в рассматриваемой задаче.

Рис. 10.1.1. Заряд, стекающий с шара во внешнюю среду, создаёт обычный ток  $\mathbf{j}$  и ток смещения  $\mathbf{j}_{\text{см}}$



Выберем произвольную сферическую поверхность  $S$ , окружающую заряд  $Q$  (рис. 10.1.1). Прежде всего, поле не может быть направлено по радиусу (по нормали к поверхности), поскольку, допустив такое, получим неравенство  $\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} \neq 0$ , противоречащее теореме Гаусса  $\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$ .

Поле  $\mathbf{B}$  не может быть направлено и по касательной к поверхности, поскольку вследствие сферической симметрии тока нет выделенных направлений, перпендикулярных радиусу, все направления эквивалентны. Следовательно, нужно положить  $\mathbf{B} = \mathbf{H} = 0$ . Согласно уравнению

$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{cm}})$  получаем  $\mathbf{j}_{\text{cm}} = -\mathbf{j}$ . Имея в виду, что ток проводимости  $J = -dQ/dt$  (знак « $-$ » связан с тем, что положительный ток возникает при уменьшении заряда на шаре), получаем:  $J_{\text{cm}} = dQ/dt$ . По закону Кулона  $D = Q/r^2$ , или  $Q = r^2 D$ . Поэтому

$$J_{\text{cm}} = r^2 \frac{\partial D}{\partial t}, \quad j_{\text{cm}} = \frac{J_{\text{cm}}}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t}.$$

Мы пришли к тому же выражению для тока смещения, что и раньше.

### 10.1.3. Ток смещения в конденсаторе

Пусть пластины конденсатора заряжены и замкнуты с помощью проводника — рис. 10.1.2. Тогда по этому проводнику потечёт ток  $J$ . Выберем условно направление тока в проводнике так, как если бы он увеличивал заряд нижней пластины конденсатора (рис. 10.1.2). Тогда  $J = dQ/dt$ .

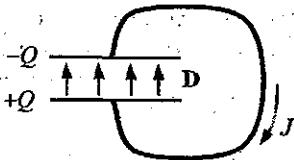


Рис. 10.1.2. Заряженный конденсатор с пластинами, замкнутыми с помощью проводника

Магнитное поле однозначно определяется всюду величиной тока и не зависит от способа его вычисления.

Выберем некоторый контур  $L$ , охватывающий проводник (рис. 10.1.3) и запишем теорему о циркуляции в следующем виде:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} (J_{\text{пер}} + J_{\text{cm}}) = \frac{4\pi}{c} \int_S (\mathbf{j}_{\text{пер}} + \mathbf{j}_{\text{cm}}) d\mathbf{S}.$$

Здесь  $J_{\text{пер}}$  — ток, пересекающий поверхность  $S$ , опирающуюся на контур  $L$ . С формальной точки зрения интеграл, входящий в правую часть,  $\int_S (\mathbf{j}_{\text{пер}} + \mathbf{j}_{\text{cm}}) d\mathbf{S}$ , зависит от выбора поверхности  $S$ :

1) в случае поверхности  $S_1$  (рис. 10.1.3 слева) следует положить  $J_{\text{пер}} = J$ , поскольку ток  $J$  пересекает поверхность  $S_1$ ;

2) в случае поверхности  $S_2$  (рис. 10.1.3 справа) следует положить  $J_{\text{пер}} = 0$ , поскольку поверхность  $S_2$  проходит между обкладками конденсатора, где ток проводимости отсутствует.

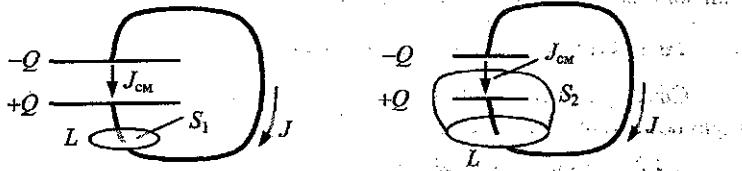


Рис. 10.1.3. Контур  $L$ , охватывающий проводник, и два варианта поверхности, опирающейся на этот контур: поверхность  $S_1$ , пересекающая проводник (слева), и поверхность  $S_2$ , проходящая между пластинами конденсатора и не пересекающая проводник (справа)

Чтобы интеграл не зависел от выбора поверхности, достаточно выбрать ток смещения следующим образом:

в случае поверхности  $S_1$  (рис. 10.1.3 слева)  $J_{\text{cm}} = 0$ ,

в случае поверхности  $S_2$  (рис. 10.1.3 справа)  $J_{\text{cm}} = J$ .

В обоих случаях имеем:  $J_{\text{пер}} + J_{\text{cm}} = J$ .

В соответствии со сказанным оказывается, что в конденсаторе

$$J_{\text{cm}} = J = \frac{dQ}{dt}.$$

Поскольку поверхностная плотность заряда на нижней пластине равна  $\sigma = Q/S$ , то получаем индукцию:

$$D = 4\pi\sigma = 4\pi \frac{Q}{S} \Rightarrow Q = \frac{D}{4\pi} S.$$

Таким образом, приходим к следующему выражению для тока смещения в конденсаторе:

$$J_{\text{cm}} = J = \frac{1}{4\pi} \frac{dD}{dt} S, \quad j_{\text{cm}} = \frac{J_{\text{cm}}}{S} = \frac{1}{4\pi} \frac{dD}{dt}.$$

Точно такое же выражение для тока смещения было получено выше. В проводнике ток смещения равен нулю.

В обоих примерах выражение для тока смещения определяется естественными физическими требованиями непротиворечивости уравнений, описывающих те или иные явления.

Как видно из теоремы о циркуляции, токи смещения замыкают обычные токи и создают магнитное поле точно так же, как и обычные токи. Они, однако, не производят прямого теплового эффекта, к ним не применимы закон Ома и закон Джоуля–Ленца.

## 10.2. Система уравнений Максвелла

Сформулируем полную систему уравнений Максвелла, описывающую возникновение и распространение электромагнитного поля.

### 10.2.1. Уравнения Максвелла в интегральной форме

1) Теорема Гаусса для электрического поля (утверждение, что силовые линии электрического поля могут начинаться и кончаться только на зарядах):

$$\oint_{S(V)} \mathbf{D} d\mathbf{S} = 4\pi Q, \quad Q = \int_V \rho dV.$$

2) Теорема о циркуляции для электрического поля (следствие закона индукции Фарадея):

$$\oint_{L(S)} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}.$$

3) Теорема Гаусса для магнитного поля (утверждение, что нет свободных магнитных зарядов):

$$\oint_{S(V)} \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0.$$

4) Теорема о циркуляции для магнитного поля (следствие закона Био–Савара и представления о токах смещения):

$$\oint_{L(S)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} (J + J_{cm}) = \frac{4\pi}{c} J + \frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S}.$$

### 10.2.2. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

1) Теорема Гаусса для электрического поля:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho.$$

2) Теорема о циркуляции для электрического поля:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

3) Теорема Гаусса для магнитного поля:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

4) Теорема о циркуляции для магнитного поля:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{см}}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

### 10.2.3. Материальные уравнения

Уравнения Максвелла должны быть дополнены соотношениями, связывающими векторы полей.

1) Определение вектора электрической индукции:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P},$$

где  $\mathbf{P}$  — вектор поляризации.

Если  $\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}$ , то

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \varepsilon = 1 + 4\pi\alpha.$$

Величина  $\alpha$  — поляризуемость среды, а величина  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость.

2) Определение вектора напряжённости магнитного поля:

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{I},$$

где  $\mathbf{I}$  — вектор намагничивания.

Если  $\mathbf{I} = \alpha \mathbf{H}$ , то

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mu = 1 + 4\pi\kappa.$$

Величина  $\kappa$  — магнитная восприимчивость среды, а величина  $\mu$  — магнитная проницаемость.

3) В случае тока, вызываемого электрическим полем в проводящей среде, имеет место закон Ома:

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}.$$

### 10.2.4. Границные условия

При наличии чётко выраженной границы раздела сред (1 и 2) должны выполняться следующие граничные условия:

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma,$$

$$E_{2t} = E_{1t},$$

$$B_{2n} = B_{1n},$$

$$H_{2r} - H_{1r} = \frac{4\pi}{c} i_N.$$

Последнее условие в векторной форме имеет следующий вид:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}$$

Три вектора ( $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\tau$ ), встречающиеся в записи последнего граничного условия, показаны на рис. 10.2.1.

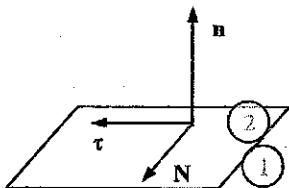


Рис. 10.2.1. Тройка векторов, входящая в формулировку граничного условия для напряжённости магнитного поля

Строго говоря, вывод граничных условий для касательных компонент векторов напряжённости электрического и магнитного полей немного отличается от вывода, приведенного для случая стационарных полей. Покажем соответствующий вывод для случая электрического поля.

Применяя теорему о циркуляции к бесконечно малому контуру, проходящему над и под поверхностью раздела сред (рис. 10.2.2), получаем:

$$\oint_{L(S)} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{E}_1 d\mathbf{l}_1 + \mathbf{E}_2 d\mathbf{l}_2 = -\frac{1}{c} \left( \frac{\partial B_n}{\partial t} \right)_0 S.$$

В правую часть равенства входит величина  $(\partial B_n / \partial t)_0$ , представляющая собой производную по времени от магнитного поля в некоторой внутренней точке поверхности, ограниченной контуром  $L(S)$ . Взята компонента магнитного поля  $B_n$ , нормальная к поверхности  $S$ , ограниченная контуром ( $\int_B d\mathbf{S} = \int B_n d\mathbf{S}$ ).

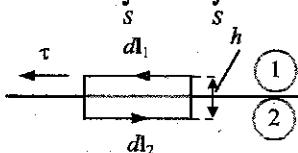


Рис. 10.2.2. К выводу граничных условий для  $E_t$  и  $H_t$ . Площадь, ограниченная контуром, равна  $S = hdl$

С учётом того, что  $S = hdl$ , получаем

$$(E_1 - E_2)dl = -\frac{1}{c} \left( \frac{\partial B_n}{\partial t} \right)_0 hdl.$$

Переходя теперь к пределу  $h \rightarrow 0$ , приходим к граничному условию  $E_{2t} = E_{1t}$ , приведённому выше.

Аналогично устанавливается и граничное условие для напряжённости магнитного поля (рис. 10.2.1, 10.2.2):

$$\begin{aligned}\oint_{L(S)} \mathbf{H} d\mathbf{l} &= \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} + \frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{H}_1 d\mathbf{l}_1 + \mathbf{H}_2 d\mathbf{l}_2 &= \frac{4\pi}{c} i_N d\mathbf{l} + \frac{1}{c} \left( \frac{\partial D_n}{\partial t} \right)_0 S \Rightarrow \\ \Rightarrow (H_{1t} - H_{2t}) d\mathbf{l} &= \frac{4\pi}{c} i_N d\mathbf{l} + \frac{1}{c} \left( \frac{\partial D_n}{\partial t} \right)_0 h d\mathbf{l} \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} H_{1t} - H_{2t} = \frac{4\pi}{c} i_N.\end{aligned}$$

## 10.3. Закон сохранения энергии для электромагнитного поля

### 10.3.1. Теорема Пойнтинга

Пусть в некоторой области пространства присутствуют переменные во времени электрическое и магнитное поля. Получим закон сохранения энергии.

Используем уравнения Maxwell'a:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (10.3.1)$$

Запишем выражение для изменения плотности энергии электромагнитного поля:

$$dw = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} d\mathbf{D} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} d\mathbf{B}. \quad (10.3.2)$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (10.3.3)$$

Подставим сюда выражения для производных  $\partial \mathbf{D}/\partial t$  и  $\partial \mathbf{B}/\partial t$  из уравнений (10.3.1):

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{c}{4\pi} \left\{ \mathbf{E} \left( \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \right) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} \right\} = \\ &= \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E}] - \mathbf{j} \mathbf{E}.\end{aligned} \quad (10.3.4)$$

Далее воспользуемся тождеством

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} + \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E}. \quad (10.3.5)$$

С учётом этого перепишем (10.3.4) в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\mathbf{j}\mathbf{E} - \operatorname{div} \mathbf{S}. \quad (10.3.6)$$

Здесь введён вектор

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (10.3.7)$$

Этот вектор определяет количество энергии поля, протекающее через единичную площадку в единицу времени, и называется *вектором плотности потока энергии*, или *вектором Пойнтинга*.

Равенство (10.3.6) называется *теоремой Пойнтинга в дифференциальной (или локальной) форме*.

Проинтегрируем почленно соотношение (10.3.7) по некоторому объёму  $V$ :

$$\int_V \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} \right) dV = - \int_V \mathbf{j} \mathbf{E} dV.$$

Обозначим энергию в объёме  $V$  как

$$W = \int_V w dV.$$

Преобразуя объёмный интеграл от  $\operatorname{div} \mathbf{S}$  в поверхностный с помощью теоремы Остроградского–Гаусса, получим

$$\frac{dW}{dt} = - \oint_{\Pi(V)} \mathbf{S} d\Pi - Q, \quad Q = \int_V \mathbf{j} \mathbf{E} dV. \quad (10.3.8)$$

Здесь  $\Pi(V)$  — поверхность, ограничивающая рассматриваемый объём  $V$ , а  $Q$  — полная мощность джоулевых потерь в том же объёме. Соотношение (10.3.8) представляет собой *теорему Пойнтинга в интегральной форме*.

Пусть токи проводимости отсутствуют. Тогда закон сохранения принимает более простой вид:

$$\frac{dW}{dt} = - \oint_{\Pi(V)} \mathbf{S} d\Pi.$$

Это значит, что в данном случае энергия поля в объёме  $V$  меняется только за счёт её переноса через границы объёма.

Рассмотрим частный случай, когда поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  взаимно перпендикулярны, направлены соответственно вдоль осей  $x$  и  $y$  и зависят только от времени  $t$  и от координаты  $z$  (рис. 10.3.1 слева):

$$E_x = E_x(z, t), H_y = H_y(z, t). \quad (10.3.9)$$

В этом случае вектор Пойнтинга (10.3.7) направлен вдоль оси  $z$ , как показано на рис. 10.3.1 слева, причём

$$S_z = \frac{c}{4\pi} E_x H_y.$$

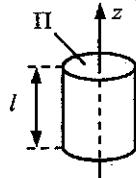
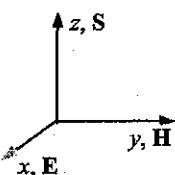


Рис. 10.3.1. Взаимно перпендикулярные поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , зависящие от координаты  $z$  в перпендикулярном им обоим направлении (слева); цилиндр, вдоль оси которого идёт распространение энергии поля (справа)

С учётом этого закон сохранения энергии (10.3.6) может быть переписан в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial S_z}{\partial z} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (10.3.10)$$

Проинтегрируем это соотношение по объёму  $V = \Pi l$  цилиндра (рис. 10.3.1 справа). Это даёт

$$\frac{dW}{dt} = [S_z(z) - S_z(z+l)]\Pi - Q, \quad Q = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV, \quad (10.3.11)$$

где  $W = \int_V w dV$  — энергия поля в объёме  $V$ ,  $\Pi$  — площадь поперечного сечения цилиндра,  $l$  — длина цилиндра. Величина  $Q$  есть мощность джоулевых потерь (работа электрического поля над токами в единицу времени) в том же объёме.

Таким образом, количество энергии в объёме  $V$  меняется за счёт поступления и ухода энергии через торцы цилиндра:  $[S_z(z) - S_z(z+l)]\Pi$ , а также за счёт джоулевых потерь  $Q$ .

### 10.3.2. Примеры

#### 1) Зарядка конденсатора

Пусть плоский конденсатор с пластинами радиуса  $R$  заряжается током  $J$  от внешнего источника энергии (рис. 10.3.2). Если в некоторый момент заряд на нижней пластине равен  $q$ , то индукция поля внутри конденсатора равна  $D = 4\pi\sigma = 4\pi q/\Pi$ , где  $\Pi = \pi R^2$  — площадь пластины. Электрическое поле равно  $E = D/\epsilon$  и направлено от нижней пластины к верхней.

Плотность тока смещения в конденсаторе  $j_{cm} = \dot{D}/4\pi = \dot{q}/(\pi R^2)$ .

Этот ток порождает в конденсаторе магнитное поле, которое можно найти с помощью теоремы о циркуляции:

$$\oint_{\Gamma} H dr = \frac{4\pi}{c} J_{cm}(r) \Rightarrow 2\pi r H(r) = \frac{4\pi}{c} \pi r^2 j_{cm}(r) \Rightarrow H(r) = \frac{2r}{cR^2} \dot{q}.$$

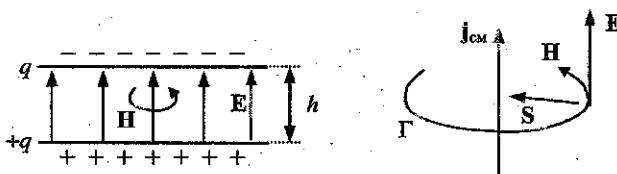


Рис. 10.3.2. Зарядка плоского конденсатора. Справа — направления тока смещения, векторов  $E$  и  $H$  в конденсаторе и вектора Пойнтинга

Здесь в качестве контура  $\Gamma$  взята окружность радиуса  $r$  с центром на оси конденсатора. Имея в виду, что конденсатор заряжается,  $\dot{q} > 0$ , заключаем, что ток смещения направлен от нижней пластины к верхней. Это значит, что силовые линии магнитного поля направлены, как показано на рис. 10.3.2.

Вектор Пойнтинга  $S = E \times H / 4\pi$  направлен к оси конденсатора и на границе ( $r = R$ ) равен по величине

$$S = \frac{c}{4\pi} EH = \frac{c}{4\pi} \left( \frac{1}{\epsilon} \frac{4\pi q}{\pi R^2} \right) \left( \frac{2\dot{q}}{cR} \right) = \frac{1}{\epsilon} \frac{2q\dot{q}}{\pi R^2}.$$

Если расстояние между пластинами равно  $h$ , то энергия, втекающая в конденсатор в единицу времени, равна  $dW/dt = S \cdot 2\pi Rh$  или

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{\epsilon} \frac{q\dot{q}}{\pi R^2} \cdot 2\pi Rh = \frac{q\dot{q}}{C},$$

где  $C = \epsilon \cdot \pi R^2 / 4\pi h$  — ёмкость конденсатора. За конечное время, при достижении заряда  $q$  на пластине, энергия составит  $W = q^2 / 2C$ . Мы пришли к известной формуле для энергии, запасаемой в конденсаторе.

### 2) Длинный провод

Рассмотрим длинный прямой провод радиуса  $R$  и длины  $l$ , по которому течёт ток  $J$  — рис. 10.3.3. На внешней поверхности провода существует магнитное поле  $H = 2J/cR$ . Ток в проводе возникает благодаря напряжению  $U$  на его концах и созданной этим напряжённости электрического поля  $E = U/l$ . Направления полей  $E$  и  $B$  показаны на рис. 10.3.3. Соответственно вектор Пойнтинга оказывается направленным к оси провода и равным по величине

$$S = \frac{c}{4\pi} EH = \frac{c}{4\pi l cR} \frac{U 2J}{cR} = \frac{1}{2\pi l R} UJ.$$

Поскольку площадь боковой поверхности провода равна  $\Pi = 2\pi Rl$ , то полный поток энергии, втекающий в провод, составляет  $Q = S\Pi = UJ$ . Это в точности та же энергия, что идёт на джоулевы потери в проводе:  $\int jEdV = UJ$ .

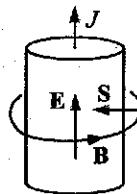


Рис. 10.3.3. Ток, текущий по проводу, создаёт поток энергии (вектор Пойнтинга), направленный внутрь провода

### 3) Пробой в плоском конденсаторе

Рассмотрим плоский конденсатор, обкладками которого являются пластины радиуса  $R$ . Пространство между обкладками заполнено веществом с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 1$ .

Пусть верхняя и нижняя пластины несут заряды соответственно  $+q$  и  $-q$  (рис. 10.3.4). Считаем, что конденсатор отключён от внешних источников зарядов (батареи).

Пусть в центре конденсатора (на его оси) происходит пробой и возникает узкий токовый канал, в результате чего конденсатор начинает разряжаться. Считая разряд квазистационарным (достаточно медленным), найдём поток электромагнитной энергии.

В приближении квазистационарности электрическое поле в конденсаторе можно записать как

$$E = 4\pi\sigma = 4\pi q/\Pi. \quad (10.3.12)$$

где  $\Pi = \pi R^2$  — площадь одной из пластин. Поскольку конденсатор отключён от батареи, то ток в нём определяется скоростью уменьшения заряда на пластинах:

$$J = -dq/dt. \quad (10.3.13)$$

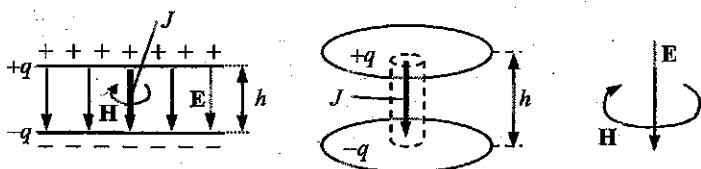


Рис. 10.3.4. Плоский конденсатор, на оси которого происходит пробой — возникает ток разряда  $J$ .

Магнитное поле в конденсаторе можно найти с помощью теоремы о циркуляции, учитывающей как обычный ток, так и ток смещения:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} (J + J_{cm}). \quad (10.3.14)$$

Контур интегрирования здесь — это окружность радиуса  $r$  вокруг оси конденсатора, совпадающая с силовой линией магнитного поля.

Ток смещения обусловлен изменением электрического поля в конденсаторе. Поскольку  $\epsilon = 1$ , то  $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ , и согласно (10.3.12), (11.3.13) полный ток смещения  $J_{cm} = \pi r^2 (\dot{D}/4\pi)$ , протекающий через круг радиуса  $r$ , с центром на оси конденсатора, равен

$$J_{cm} = \pi r^2 j_{cm} = \pi r^2 \frac{1}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t} = \pi r^2 \frac{1}{\pi R^2} \frac{dq}{dt} = -\frac{r^2}{R^2} J.$$

С учётом этого теорема о циркуляции (10.3.14) принимает вид

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = 2\pi r H = \frac{4\pi}{c} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) J \Rightarrow H = \frac{2J}{cr} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (10.3.15)$$

Силовые линии электрического и магнитного полей идут, как показано на рис. 10.3.4. Поэтому вектор Пойнтинга  $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  направлен по радиусу к оси конденсатора. Длина вектора  $\mathbf{S}$  равна

$$S = \frac{c}{4\pi} EH = \frac{c}{4\pi} E \frac{2J}{cr} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (10.3.16)$$

Полный поток энергии через боковую поверхность цилиндра радиуса  $r$  равен

$$Q = S \cdot 2\pi rh = EJh \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (10.3.17)$$

Произведение  $U = Eh$  есть напряжение на конденсаторе (разность потенциалов между его обкладками). Обозначая  $Q_0 = UJ$ , получим

$$Q = Q_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (10.3.18)$$

Величина  $Q_0$  имеет смысл мощности тока разряда в конденсаторе.

Из (10.3.18) видно, что поток энергии при  $r = 0$  равен  $Q = UJ$ , а поток энергии на границе конденсатора отсутствует:  $S \cdot 2\pi Rh = 0$ . Это значит, что вся энергия поля в конденсаторе собирается в искровом канале и за пределы конденсатора не выходит. Величина поступающей в канал энергии равна  $Q = UJ$ , т.е. переходит в энергию тока в соответствии с законом Джоуля–Ленца.

Пусть теперь в цепь конденсатора включена батарея, которая поддерживает неизменными заряды на пластинах. Тогда электрическое поле в конденсаторе постоянно, и ток смещения обращается в нуль ( $j_{cm} = D/4\pi = \dot{\sigma} = 0$ ). Поток энергии направлен, как и раньше, к оси конденсатора (к искровому каналу), и всюду в конденсаторе он оказывается неизменным и равным  $Q = UJ$ . Поскольку на границе конденсатора  $Q|_{r=R} = UJ \neq 0$ , то в конденсатор втекает энергия из внешнего пространства.

В рассмотренном примере энергия электромагнитного поля течёт от источника к нагрузке (активному сопротивлению), где она превращается в другие виды энергии (в частности, в тепловую).

## Глава 11. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

### 11.1. Волновое уравнение

#### 11.1.1. Бегущие и стоячие волны

Волна — это процесс, разворачивающийся во времени и в пространстве. Поэтому для его описания необходимо для каждого момента времени указать состояния всех элементов, отличающихся положением в пространстве.

Будем характеризовать волну некоторой величиной  $u$ . Например, в случае волны на поверхности жидкости это — отклонение точек поверхности жидкости от их положения в состоянии равновесия. Пусть в некоторый момент времени профиль поверхности имеет вид, показанный на рис. 11.1.1. Предположим, что с течением времени профиль волны не меняется, а меняется только его положение в пространстве. Такой процесс называется *бегущей волной*.

Если  $x'$  — координата в собственной системе отсчета волны, то

$$u = u(x'). \quad (11.1.1)$$

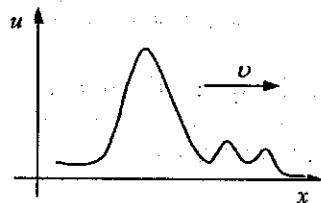


Рис. 11.1.1. Бегущая волна с неизменным профилем

Пусть волна движется с постоянной скоростью  $v$  вдоль оси  $x$ . Тогда координаты в неподвижной ( $x$ ) и в движущейся ( $x'$ ) системах отсчета связаны между собой соотношением  $x' = x - vt$ . Поэтому бегущая волна может быть представлена функцией

$$u(x, t) = f(x - vt). \quad (11.1.2)$$

В частном случае, когда  $u(x') = a \cos kx'$ , мы получаем гармоническую волну (рис. 11.1.2)

$$u(x, t) = a \cos[k(x - vt)]. \quad (11.1.3)$$

Обозначая

$$kv = \omega, \quad (11.1.4)$$

перепишем (11.1.3) в виде

$$u(x, t) = a \cos(kx - \omega t). \quad (11.1.5)$$

Фиксируя точку наблюдения  $x$ , мы получаем в этой точке гармоническое колебание с частотой  $\omega$ . Величина  $a$  называется амплитудой, а функция

$$\varphi(x, t) = kx - \omega t \quad (11.1.6)$$

называется фазой волны.

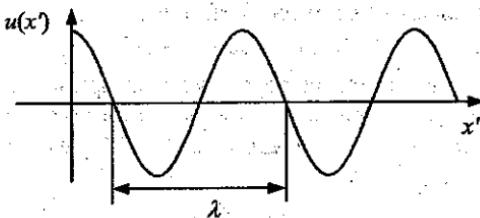


Рис. 11.1.2. Гармоническая волна

Согласно (11.1.5), любые две точки, отстоящие друг от друга на расстояние

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad (11.1.7)$$

колеблются одинаково, синхронно:  $u(x, t) = u(x + \lambda, t)$ . Величина  $\lambda$  называется длиной волны, а число  $k$  — волновым числом.

Если наблюдатель движется вдоль оси  $x$  со скоростью  $v$ , то он видит один и тот же профиль волны, т.е. регистрирует одну и ту же фазу волны:  $\varphi = kx - \omega t = \text{const}$ . Положение точки, в которой фаза волны имеет фиксированное значение  $\varphi = \varphi_0$ , даётся уравнением

$$kx = \varphi_0 + \omega t.$$

С течением времени эта точка смещается:

$$kdx = \omega dt \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v.$$

Скорость  $v$  называется фазовой скоростью и представляет собой скорость движения точек, отвечающих фиксированному значению фазы.

Фазовая скорость связана с частотой, волновым числом и длиной волны соотношениями

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda\omega}{2\pi}. \quad (11.1.8)$$

Получим выражение для бегущей волны, распространяющейся в произвольном направлении (а не только вдоль оси  $x$ ). Пусть  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении оси  $x$ . Поскольку  $x = \mathbf{nr}$ , то фаза будет записываться в виде  $\varphi(x, t) = k\mathbf{nr} - \omega t$ . Обозначим  $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ . Тогда оказывается

$$\varphi = \mathbf{kr} - \omega t, \quad (11.1.9)$$

и выражение для самой волны принимает вид

$$u(\mathbf{r}, t) = a \cos(\mathbf{kr} - \omega t). \quad (11.1.10)$$

В такой форме выражение для волны уже не привязано к конкретной системе координат и описывает волну, распространяющуюся в направлении, задаваемом *волновым вектором*  $\mathbf{k}$ . Из (11.1.9) находим связь фазы и волнового вектора:

$$\mathbf{kr} = \text{grad } \varphi.$$

Множество точек в пространстве, отвечающих одному и тому же значению фазы  $\varphi = \varphi_0$  в момент времени  $t$ , называется *волновым фронтом*. Из формулы (11.1.9) находим

$$\mathbf{kr} = \varphi_0 + \omega t.$$

Это уравнение описывает плоскость, перпендикулярную волновому вектору  $\mathbf{k}$ . Таким образом, волновой фронт волны (11.1.10) есть плоскость. Поэтому эта волна называется *плоской*.

В ряде ситуаций наряду с волной, распространяющейся в положительном направлении (т.е. имеющей скорость  $v > 0$ ), может возникать волна, двигающаяся в противоположном направлении, — со скоростью  $(-v)$ . Так получается, например, при отражении волны от препятствия. При этом в каждой точке системы происходит сложение колебаний, вызванных прямой и обратной волнами: если  $u_1 = u_1(x - vt)$  и  $u_2 = u_2(x + vt)$  — прямая и обратная волны соответственно, то результирующий процесс представляет собой *суперпозицию волн*:

$$u = u_1(x - vt) + u_2(x + vt). \quad (11.1.11)$$

Пусть сталкивающиеся волны одинаковы и даются функциями

$$u_1(x') = u_2(x') = a \cos(kx').$$

Тогда из (11.1.11) находим

$$u(x, t) = a \cos(kx - \omega t) + a \cos(kx + \omega t) = 2a \cos kx \cos \omega t. \quad (11.1.12)$$

Профиль этой волны для некоторых моментов времени (1, 2, 3, 4) показан на рис. 11.1.3. Легко видеть, что точки

$$x_n = \frac{\pi}{2k} (2n+1) = \frac{\lambda}{4} (2n+1), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (11.1.13)$$

в которых  $u(x_n, t) = 0$ , в любой момент времени неподвижны. Такая волна неподвижна и называется *стоячей*. Покоящиеся точки называются *узлами*, а точки, совершающие колебания с максимально возможной амплитудой, — *пучностями*. Понятия длины волны и частоты для стоячей волны имеют тот же смысл, что и для волны бегущей. При этом расстояние между двумя соседними узлами (или пучностями) равно половине длины волны.

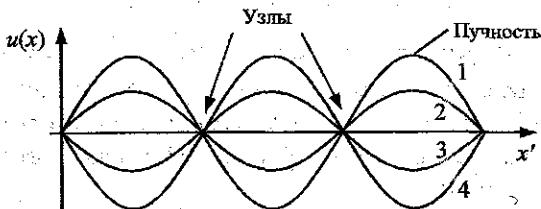


Рис. 11.1.3. Стоячая волна в различные моменты времени 1, 2, 3, 4

Пусть изучаемая система (например, струна) имеет конечную длину  $L$ , причем ее концы ( $x_{\text{н}} \text{ и } x_{\text{к}}, x_{\text{к}} - x_{\text{н}} = L$ ) закреплены — смещения концевых точек в любой момент времени равны нулю,  $u(x_{\text{н}}, t) = u(x_{\text{к}}, t) = 0$ . Тогда, поместив начало струны в точку  $x_1$ , конец — в точку  $x_n$ , и полагая  $x_n - x_1 = L$ , найдём с учётом (11.1.13) связь длины волны с длиной системы:

$$L = \frac{n\lambda}{2}, \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11.1.14)$$

Это значит, что в системе с закрепленными концами стоячие волны та-ковы, что на длине системы  $L$  умещается целое число полуволн.

### 11.1.2. Волновое уравнение

Получим дифференциальное уравнение, описывающее бегущие волны. Рассмотрим волну

$$u(x, t) = f(x - vt),$$

где  $f(\xi)$  — произвольная дважды дифференцируемая функция. Найдем частные производные от  $u(x, t)$ . Обозначая  $\xi = x - vt$  и пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \frac{df}{d\xi}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( -v \frac{df}{d\xi} \right) = v^2 \frac{d^2 f}{d\xi^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{df}{d\xi}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{df}{d\xi} \right) = \frac{d^2 f}{d\xi^2}.$$

Сравнивая вторые производные от  $u$  по  $t$  и по  $x$ , мы замечаем, что они отличаются постоянным множителем  $v^2$ , так что

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (11.1.15)$$

Полученное равенство называется *волновым уравнением*. В это уравнение скорость входит как  $v^2$ . Поэтому оно описывает волны, распространяющиеся как в прямом направлении (со скоростью  $+v$ ), так и в обратном (со скоростью  $-v$ ). Общее решение можно представить в виде суперпозиции этих волн:

$$u(x, t) = u_1(x - vt) + u_2(x + vt), \quad (11.1.16)$$

где  $u_1(z)$  и  $u_2(z)$  — произвольные функции.

В трёхмерном случае для волны, бегущей в направлении, задаваемом вектором скорости  $\mathbf{v}$ , имеем

$$u = f(\mathbf{r} - vt) = F(x - v_x t, y - v_y t, z - v_z t).$$

Рассуждения, аналогичные приведённым выше, позволяют получить обобщение волнового уравнения на 3-мерный случай:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \quad (11.1.17)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа.

### 11.1.3. Уравнение Гельмгольца

Пусть функция  $u(\mathbf{r}, t)$ , удовлетворяющая волновому уравнению (11.1.17), зависит от времени по гармоническому закону:

$$u = a(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \phi(\mathbf{r})). \quad (11.1.18)$$

Поскольку

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 u,$$

то подстановка этого выражения в уравнение (11.1.17) даёт

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{c^2} u = 0. \quad (11.1.19)$$

Полученное равенство называется *уравнением Гельмгольца*.

#### 11.1.4. Волновое уравнение для электромагнитного поля (частный случай)

Получим уравнение, описывающее распространение электромагнитного поля в области пространства, в которой отсутствуют свободные волны и токи проводимости. Рассмотрим сначала частный случай, когда электрическое и магнитное поля направлены соответственно по оси  $x$  и  $y$ , как показано на рис. 11.1.4. Будем считать также, что они зависят только от координаты  $z$ .

Применим уравнения Максвелла:

$$\oint_{\Gamma_1} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}, \quad (11.1.20)$$

$$\oint_{\Gamma_2} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S}, \quad (11.1.21)$$

в которых интегрирование осуществляется по контурам  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , показанным на рис. 11.1.4. Преобразуем эти уравнения, имея в виду, что контуры бесконечно малые.

##### 1) Уравнение (11.1.20)

Вычисляем циркуляцию вектора напряженности электрического поля в уравнении (11.1.20):

$$\oint_{\Gamma_1} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -E_x(z)dx + E_x(z+dz)dx = \frac{\partial E_x}{\partial z} dx dz.$$

Правая часть уравнения (11.1.20) равна

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} dx dz$$

Учтено, что здесь вектор  $d\mathbf{S}$  направлен вдоль оси  $z$  и равен  $dx dz$ . Таким образом, уравнение (11.1.20) принимает вид

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t}. \quad (11.1.22)$$

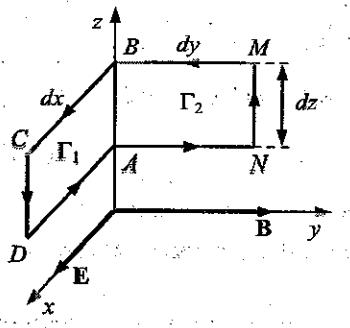


Рис. 11.1.4. К выводу волновых уравнений для электрического и магнитного полей. Начало координат находится в точке  $\{x, y\}$

## 2) Уравнение (11.1.21)

Вычисляем циркуляцию вектора напряженности магнитного поля в уравнении (11.1.20):

$$\oint_{\Gamma_2} \mathbf{H} d\mathbf{l} = H_y(z)dy - H_y(z+dz)dy = -\frac{\partial H_y}{\partial z} dy dz.$$

Правая часть уравнения (11.1.21) равна

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \frac{1}{c} \frac{\partial D_x}{\partial t} dy dz$$

(учтено, что здесь вектор  $d\mathbf{S}$  направлен вдоль оси  $x$  и равен  $dy dz$ ). В результате уравнение (11.1.21) принимает вид

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial D_x}{\partial t}. \quad (11.1.23)$$

Таким образом, ограничиваясь случаем линейных сред:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

приходим к следующей системе уравнений (11.1.22), (11.1.23):

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial z} &= -\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}. \end{aligned} \quad (11.1.24)$$

Исключим отсюда поле  $H_y$ :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} \right) = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}.$$

Обозначим

$$v = \frac{c}{n}, \quad n = \sqrt{\epsilon\mu}. \quad (11.1.25)$$

С учётом этого приходим к уравнению

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}. \quad (11.1.26)$$

Полученное уравнение совпадает по виду с волновым уравнением, описывающим волны, распространяющиеся со скоростью  $v$ .

Введённая в (11.1.25) величина  $n$  называется *показателем преломления* среды.

Аналогично, исключая из системы уравнений (11.1.24) поле  $E_x$ , получим волновое уравнение для магнитного поля:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2}. \quad (11.1.27)$$

### 11.1.5. Волновое уравнение для поля в линейной среде

Приведём более общий вывод волнового уравнения. Электромагнитное поле в однородной области пространства, где нет свободных зарядов и токов проводимости, удовлетворяет уравнениям Максвелла:

$$(a) \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad (b) \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$(c) \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (d) \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$
(11.1.28)

Учтём также материальные уравнения  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ .

Получим уравнение, содержащее только одно поле — электрическое. Для этого применим оператор  $\operatorname{rot}$  к уравнению (11.1.28б):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (11.1.29)$$

Преобразуем левую часть этого равенства:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E},$$

где учтено уравнение (11.1.27а):  $\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} (\mathbf{D}/\epsilon) = (\operatorname{div} \mathbf{D})/\epsilon = 0$ .

Правая часть уравнения (11.1.29) преобразуется с помощью уравнения (11.1.28г):

$$-\frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \mu \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \mathbf{H}) = -\frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = -\frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Таким образом, приходим к уравнению

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \Delta \mathbf{E}, \quad (11.1.30)$$

где введено обозначение

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (11.1.31)$$

Аналогичным способом получается и уравнение для магнитного поля:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \Delta \mathbf{H}. \quad (11.1.32)$$

## 11.2. Плоские электромагнитные волны

### 11.2.1. Соотношение между амплитудами полей в бегущей электромагнитной волне

Рассмотрим бегущую электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль оси  $z$ . Поля этой волны можно записать в виде

$$E_x = f(z - vt), \quad H_y = g(z - vt). \quad (11.2.1)$$

Между электрическим и магнитным полями в этом случае имеют место соотношения (11.1.23):

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}.$$

Подстановка сюда выражений (11.2.1) даёт

$$f'(\xi) = \frac{\mu}{c} v g'(\xi), \quad g'(\xi) = \frac{\epsilon}{c} v f'(\xi).$$

Здесь введено обозначение  $\xi = z - vt$ , а пятрих обозначает дифференцирование по  $\xi$ . Выполнив интегрирование по  $\xi$ , получим

$$f(\xi) = \frac{\mu}{c} v g(\xi), \quad g(\xi) = \frac{\epsilon}{c} v f(\xi). \quad (11.2.2)$$

Перемножив почленно полученные уравнения, находим известное соотношение  $v = c / \sqrt{\epsilon\mu}$  для скорости распространения электромагнитной волны. Если же эти уравнения разделить почленно, то получим

$$\frac{f}{g} = \frac{\mu}{\epsilon} \frac{g}{f} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\epsilon} f = \sqrt{\mu} g, & v > 0, \\ \sqrt{\epsilon} f = -\sqrt{\mu} g, & v < 0. \end{cases}$$

Таким образом, в бегущей волне напряжённости электрического и магнитного полей связаны соотношением

$$\sqrt{\epsilon}E = \pm\sqrt{\mu}H. \quad (11.2.3)$$

### 11.2.2. Поперечность электромагнитных волн

Рассмотрим гармонические электромагнитные волны, которые мы представим в комплексной форме:

$$E(r, t) = E_0 e^{i(kr - \omega t)}, \quad H(r, t) = H_0 e^{i(kr - \omega t)}. \quad (11.2.4)$$

Напряжённости электрического и магнитного полей удовлетворяют уравнения Максвелла. Рассмотрим сначала следствия теорем Гаусса:  $\operatorname{div} E = 0$ ,  $\operatorname{div} H = 0$

(это справедливо для волн в однородных средах, где  $D = \epsilon E$ ,  $B = \mu H$  с постоянными диэлектрической и магнитной проницаемостями). Найдём сначала  $\operatorname{div} E$  для поля (11.2.4). Обозначая аргумент напряжённости поля  $E$  как  $\xi = kr - \omega t$ , имеем:

$$\begin{aligned} 0 = \operatorname{div} E &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{dE_x}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{dE_y}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{dE_z}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} = \\ &= i(E_{0x}k_x + E_{0y}k_y + E_{0z}k_z)e^{i(kr - \omega t)} = ikE. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем  $kE = 0$ . Аналогично, из уравнения  $\operatorname{div} H = 0$  устанавливается, что  $kH = 0$ . Следовательно, векторы  $E$  и  $H$  перпендикулярны направлению распространения, задаваемому волновым вектором  $k$ :

$$E \perp k, \quad H \perp k.$$

Это свойство называется *поперечностью электромагнитных волн*.

Рассмотрим теперь следствие двух оставшихся уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}.$$

Подстановка сюда гармонических плоских волн (11.2.4) даёт равенства

$$ik \times E = \frac{i\omega}{c} \mu H, \quad ik \times H = -\frac{i\omega}{c} \epsilon E,$$

или

$$H = \frac{c}{\mu\omega} k \times E, \quad E = -\frac{c}{\epsilon\omega} k \times H. \quad (11.2.5)$$

Из свойства векторного произведения следует, что векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{k}$  образуют правую тройку взаимно ортогональных векторов (рис. 11.2.1).

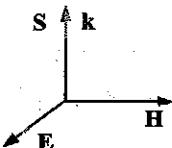


Рис. 11.2.1. Правая тройка взаимно ортогональных векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{k}$  — свойство поперечности электромагнитных волн

Найдём соотношение между амплитудами векторов напряжённости электрического и магнитного полей в плоской волне. Имея в виду, что все векторы, входящие в (11.2.5), взаимно ортогональны, можно записать соотношение между длинами этих векторов:

$$kE = \frac{\omega}{c} \mu H, \quad kH = \frac{\omega}{c} \epsilon E.$$

Перемножив почленно эти равенства, найдём

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu} = \frac{\omega}{c} n. \quad (11.2.6)$$

Если же равенства разделить почленно, то придём к установленному ранее соотношению

$$\sqrt{\epsilon} E = \sqrt{\mu} H. \quad (11.2.7)$$

### 11.2.3. Вектор Пойнтинга для плоской электромагнитной волны

Рассмотрим частный случай — плоскую электромагнитную волну в однородной изотропной среде. Эта волна поперечная, и в ней выполняется соотношение (11.2.7) между амплитудами напряжённостей электрического и магнитного полей. Поэтому вектор Пойнтинга направлен по волновому вектору  $\mathbf{k}$  (рис. 11.2.1).

С учётом сказанного величину вектора  $\mathbf{S}$  можно записать как

$$S = \frac{c}{4\pi} EH = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} \frac{\epsilon E^2}{4\pi}. \quad (11.2.8)$$

Для плоской волны плотность энергии поля равна

$$w = w_E + w_H = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} + \frac{\mu H^2}{8\pi}. \quad (11.2.9)$$

Кроме того, в соответствии с (11.2.7) плотности электрической ( $w_E$ ) и магнитной ( $w_H$ ) энергий равны, так что

$$w = 2 \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{\varepsilon E^2}{4\pi}$$

Поэтому для величины вектора Пойнтинга получаем выражение

$$\vec{S} = \nu \vec{w}, \quad (11.2.10)$$

где  $\nu = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$  — скорость света в среде.

### 11.2.4. Интенсивность излучения

Электромагнитная волна — это электромагнитное поле с периодически меняющимися полями  $E$  и  $B$ . В случае высокочастотных полей удобно рассматривать не мгновенные значения таких величин, как плотность энергии, а значения, усреднённые за период колебаний. Усреднённое таким способом значение вектора Пойнтинга называется *интенсивностью излучения*:

$$\bar{S} = \bar{I}. \quad (11.2.11)$$

## 11.3. Импульс электромагнитного поля

### 11.3.1. Импульс электромагнитного поля

Пусть плоская электромагнитная волна распространяется в вакууме ( $\varepsilon = 1, \mu = 1$ ). Плотность энергии поля в ней равна

$$w = w_E + w_H = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} = \frac{E^2}{4\pi}.$$

Как известно из теории относительности, если некоторое тело движется со скоростью  $v$ , то его полная энергия  $W$  и импульс  $p$  связаны соотношением

$$p = \frac{Wv}{c^2},$$

непосредственно вытекающим из формул

$$W = mc^2 / \sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad p = mv / \sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

В частности, если частица движется со скоростью света,  $v = c$ , то связь её импульса и энергии принимает вид

$$p = W/c.$$

В случае электромагнитного поля удобно рассматривать плотности энергии и импульса, т.е. величины, приходящиеся на единицу объёма. Поскольку поле в вакууме распространяется со скоростью света, то для

него связь плотности импульса  $g$  и плотности энергии  $w$  может быть записана в виде

$$g = w/c. \quad (11.3.1)$$

Для электромагнитной волны величина вектора Пойнтинга есть  $S = cw$ , откуда следует  $w = S/c$ . Соответственно плотность импульса оказывается равной  $g = S/c^2$ . Поскольку направление распространения энергии поля совпадает с направлением вектора Пойнтинга, то в векторной форме получаем следующее выражение для плотности импульса поля:

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (11.3.2)$$

### 11.3.2. Другой вывод формулы для импульса поля

Рассмотрим следующий процесс: электромагнитная волна поглощается телом и передаёт ему свой импульс (рис. 11.3.1).

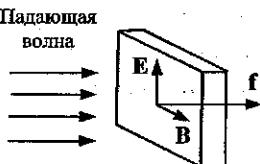


Рис. 11.3.1. Плоская электромагнитная волна падает на слой вещества и поглощается в нём

Пусть плоская волна падает на среду с  $\epsilon = \mu = 1$  и проводимостью  $\lambda$ . Тогда по закону Ома электрическое поле волны возбуждает в этой среде ток  $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$ , а магнитное поле действует на возникший ток с силой Ампера (на единицу объёма среды)

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{\lambda}{c} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{4\pi\lambda}{c^2} \mathbf{S}.$$

Эта сила за время  $dt$  меняет импульс единицы объёма тела на

$$dg = f dt = \frac{4\pi\lambda}{c^2} S dt.$$

За то же самое время в единице объёма среды поглощается (передаётся от поля веществу) энергия

$$dw = \mathbf{j} \mathbf{E} dt = \lambda \mathbf{E}^2 dt = 4\pi\lambda \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi} dt.$$

Поскольку для плоской электромагнитной волны  $S = \frac{E^2}{4\pi} \sin$ , где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении распространения волны, то

$$\frac{dg}{dw} = \frac{1}{c} \mathbf{n} \text{ или } g = \frac{w}{c} \mathbf{n} = \frac{1}{c^2} S = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

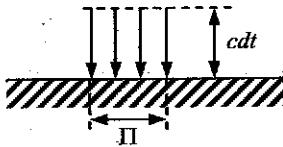
Мы пришли к тому же выражению для импульса поля, что и выше.

Полученное выражение справедливо не только для случая электромагнитной волны, но и для произвольного электромагнитного поля. Из него, в частности, следует, что если одно из полей равно нулю ( $\mathbf{E} = 0$  или  $\mathbf{H} = 0$ ), то импульс равен нулю. Кроме того, поле не имеет импульса и тогда, когда  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{H}$ .

### 11.3.3. Давление света

Пусть свет падает на вещество по нормали к его поверхности (рис. 11.3.2).

Рис. 11.3.2. Электромагнитная волна падает по нормали на поверхность вещества. Выделена площадка  $\Pi$ , на которую излучение падает в течение времени  $dt$



Предположим сначала, что весь свет, падающий на вещество, поглощается. Выделим на поверхности элементарную площадку площадью  $\Pi$ . На ней за время  $dt$  поглотится всё излучение, находившееся в объёме  $dV = cdt \cdot \Pi$ . В этом объёме излучение имело импульс

$$dp = \bar{g} dV = \bar{g} cdt \cdot \Pi.$$

Отсюда находим производимое светом давление:

$$\text{Давление} = \frac{\text{сила}}{\text{площадь}} = \frac{dp/dt}{\Pi} = c\bar{g}.$$

(Поскольку свет представляет собой высокочастотные колебания электромагнитного поля, то мы рассматриваем силу не мгновенную, а усреднённую по периоду колебаний волны.)

Таким образом, получаем, что при полном поглощении излучения давление  $P$  равно

$$P = c\bar{g} = \bar{w} = \frac{\overline{E^2}}{4\pi}.$$

Пусть теперь свет частично отражается. Введём коэффициент отражения как отношение интенсивностей отражённой и падающей волн:

$$R = I_{\text{отр}} / I_{\text{пад}}.$$

Тогда давление сложится из частей, производимых падающим и отражённым светом:

$$P = P_{\text{пад}} + P_{\text{отр}} = \bar{w} + R\bar{w} = (1 + R)\bar{w}.$$

Перепишем полученное выражение через интенсивность излучения  $I = \bar{S}$ . Поскольку  $I = \bar{S} = cw$ , то

$$P = (1 + R) \frac{I}{c}.$$

Последняя формула позволяет найти производимое светом давление, если известны оптические характеристики вещества и интенсивность излучения.

Интенсивность солнечного света на поверхности Земли (*солнечная постоянная*) равна

$$I = 2 \text{ кал} / (\text{см}^2 \cdot \text{мин}) = 0,14 \text{ Вт} / \text{см}^2.$$

Поэтому производимое солнечным светом давление при полном поглощении ( $R = 0$ ) составляет

$$P = 4,7 \cdot 10^{-5} \text{ дин} / \text{см}^2 = 4,7 \cdot 10^{-6} \text{ Н} / \text{м}^2.$$

Экспериментально давление света обнаружил П.Н. Лебедев. В 1900 г. он измерил давление на твёрдые тела, а в 1910 г. — на газы.

Заметим, что для того чтобы создать силу  $F = 1 \text{ Н}$  (при полном поглощении), нужно иметь источник, генерирующий излучение мощностью  $Q = 0,3 \text{ ГВт}$ <sup>1</sup>.

#### 11.4. Момент импульса поля

Рассмотрим цилиндрический конденсатор, помещённый во внешнее однородное магнитное поле, параллельное оси конденсатора (рис. 11.4.1). Если зарядить обкладки конденсатора, как показано на этом рисунке, то между обкладками возникают два взаимно перпендикулярных

поля:  $E \perp H$ . Соответственно вектор Пойнтинга  $S = \frac{c}{4\pi} E \times H$  направлен по касательным к окружностям с центрами на оси конденсатора, т.е. циркулирует вокруг оси.

<sup>1</sup> Для сравнения: мощность Красноярской ГЭС составляет около 6 ГВт.

Полный импульс поля равен нулю вследствие цилиндрической симметрии системы, но момент импульса отличен от нуля. Запишем выражение для момента импульса поля:

$$\mathbf{L} = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{g} dV. \quad (11.4.1)$$

Здесь

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (11.4.2)$$

— удельный импульс поля, а интегрирование в (11.4.1) должно выполняться по объёму конденсатора между обкладками. Как следует из рис. 11.4.1, вектор  $\mathbf{L}$  направлен вдоль оси конденсатора против вектора магнитного поля.

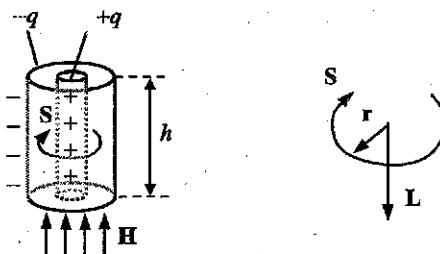


Рис. 11.4.1. Цилиндрический конденсатор, вдоль оси которого действует однородное магнитное поле. Радиус внешнего цилиндра  $R$ , внутренний цилиндр (нить) имеет пренебрежимо малый радиус. Вектор Пойнтинга  $\mathbf{S}$  циркулирует вокруг оси конденсатора. Справа — направление вектора момента импульса  $\mathbf{L}$

Имея в виду, что в (11.4.1), (11.4.2)  $\mathbf{E} \perp \mathbf{H} \perp \mathbf{r}$ , для величины момента импульса находим:

$$L = \int_V r g dV = \frac{1}{4\pi c} \int_V r E H dV.$$

В пространстве между обкладками конденсатора

$$H = \text{const}; \quad E = \frac{2\tau}{r}, \quad \tau = \frac{q}{h}.$$

Поэтому

$$L = \frac{2qH}{4\pi ch} \int_V dV = \frac{qH}{2\pi ch} V = \frac{qH}{2c} R^2. \quad (11.4.3)$$

Здесь учтено, что объём конденсатора  $V = \pi R^2 h$  (поскольку объём, занимаемый нитью, пренебрежимо мал). В векторном виде соотношение (11.4.3) записывается как

$$\mathbf{L} = -\frac{qR^2}{2c} \mathbf{H}. \quad (11.4.4)$$

Если в начальный момент цилиндр покоился, то формула (11.4.4) даёт выражение для суммарного момента импульса системы поле + цилиндр. Отсюда следует, что при «выключении» внешнего поля  $\mathbf{H}$  цилиндр начинает раскручиваться, и в соответствии с законом сохранения момента импульса в конце, когда окажется  $\mathbf{H} = 0$ , приобретёт момент импульса (11.4.4) и соответствующую этому моменту угловую скорость  $\Omega = \mathbf{L}/I$ , где  $I$  — момент инерции цилиндра.

## Глава 12. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

### 12.1. Излучение

*Излучение* — это процесс, в котором электромагнитное поле отрывается от источника и уносит некоторую энергию.

Пусть заряд движется равномерно и прямолинейно,  $\mathbf{v} = \text{const}$ . Его электрическое и магнитное поля (в нерелятивистском случае) равны

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^3} \mathbf{r}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}$$

и убывают с расстоянием как  $r^{-2}$ , так что плотность энергии поля  $w \sim r^{-4}$ .

Этот заряд не теряет энергию, его поле движется вместе с ним. Поэтому для появления излучения, уносящего энергию от источника, необходимо неравномерное движение, т.е. наличие ускорения:  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} \neq 0$ .

Возможность отрыва поля от излучателя (источника) связана с конечностью скорости распространения электромагнитного поля, т.е. невозможностью синхронного во всём пространстве изменения напряжённости поля. Это проявляется в запаздывании: сигнал, испущенный излучателем в момент времени  $t_0$ , доходит до приёмника в момент

$$t = t_0 + \frac{R(t_0)}{c},$$

где  $R(t_0)$  — расстояние между источником и приёмником в момент времени  $t_0$ . Таким образом, в течение времени  $\sim R/c$  энергия, отданная излучателем, существует в виде энергии распространяющегося электромагнитного поля, не зависящего от состояния излучателя после испускания сигнала.

Простейшей системой, излучающей электромагнитное поле, является электрический диполь, дипольный момент которого меняется во времени:  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ .

В ближней зоне поле излучения носит сложный характер. Здесь частично проявляется структура статического поля диполя

$$\mathbf{E} = \frac{3(pr)\mathbf{r} - pr^2}{r^5}$$

Данная часть поля, однако, быстро убывает по мере удаления от источника ( $\sim r^{-3}$ ). Поэтому в дальней зоне картина упрощается. Это — *волновая зона*. Здесь в малых участках пространства поле можно рассматривать как плоскую волну.

## 12.2. Излучение точечного диполя

### 12.2.1. Сферические волны

Пусть источник волн точечный. Тогда при излучении возникает волна, расходящаяся от центра. Рассмотрим сначала случай скалярных волн, т.е. волн, характеризуемых скалярной функцией  $u(r, t)$ . Простейший тип волн, излучаемых точечным источником, — это сферически симметричные волны:

$$u = u(r, t).$$

Волновое уравнение для этой функции имеет вид

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u.$$

В сферически симметричном случае лапласиан записывается в виде

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}.$$

Поэтому, введя функцию

$$g(r, t) = r \cdot u(r, t),$$

получаем уравнение для функции  $g(r, t)$ :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}.$$

Решением этого уравнения является суперпозиция волн, бегущих в положительном и отрицательном направлениях:

$$g(r, t) = w_1(r - ct) + w_2(r + ct),$$

где  $w_1$  и  $w_2$  — произвольные функции. Соответственно решение исходного уравнения принимает вид

$$u(r, t) = \frac{w_1(r - ct)}{r} + \frac{w_2(r + ct)}{r}.$$

Первое слагаемое описывает волну, расходящуюся от центра  $r = 0$ , а второе — сходящуюся к центру  $r = 0$ . Если рассматривается излучение, производимое точечным источником, находящимся в центре, то можно ограничиться только первым слагаемым. Запишем соответствующее решение в виде

$$u(r, t) = \frac{Q(t - r/c)}{r}. \quad (12.2.1)$$

Отсюда видно, что в центре ( $r = 0$ ) действует источник  $Q(t)$ . Сигнал от этого источника доходит до приёмника в точке, находящейся на расстоянии  $r$ , за время  $\tau = r/c$ .

До сих пор мы говорили о скалярных волнах. Пусть в центре действует векторный источник  $p(t)$ , причём создаваемое им поле  $u(r, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u.$$

Тогда сферические волны  $u(r, t)$ , исходящие от источника, можно записать в виде

$$u(r, t) = \frac{p(t - r/c)}{r}. \quad (12.2.2)$$

Таким образом, в волновой зоне амплитуда сферических волн убывает с расстоянием как  $\sim r^{-1}$ .

### 12.2.2. Излучение колеблющегося диполя

Рассмотрим электромагнитную волну, созданную точечным диполем с переменным дипольным моментом в среде с  $\epsilon = \mu = 1$ . В волновой зоне волновой фронт излучения — сферический. Это значит, что напряжённости и потенциалы полей зависят от времени по закону

$$\sim f(r - ct).$$

В небольшой области волнового фронта волну можно рассматривать как плоскую, распространяющуюся от центра, в котором находится излучающий диполь. Поэтому локально волну можно считать поперечной, так что напряжённости электрического и магнитного полей связаны соотношением

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{n},$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении распространения волны (в направлении радиус-вектора точки наблюдения относительно диполя). Картина полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  проиллюстрирована на рис. 12.2.1.

Если дипольный момент совершает гармонические колебания с частотой  $\omega$ ,  $\mathbf{p} = p_0 \cos \omega t$ , то векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  совершают колебания с той же частотой, и с учётом запаздывания сигнала можно записать

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_m(\mathbf{r}) \cos(kr - \omega t), \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{H}_m(\mathbf{r}) \cos(kr - \omega t).\end{aligned}\quad (12.2.3)$$

Расчёт показывает, что амплитуды полей  $\mathbf{E}_m$  и  $\mathbf{H}_m$  зависят от расстояния  $r$  и угла  $\theta$  между осью диполя и направлением на точку наблюдения по закону

$$E_m, H_m \sim \frac{1}{r} \sin \theta. \quad (12.2.4)$$

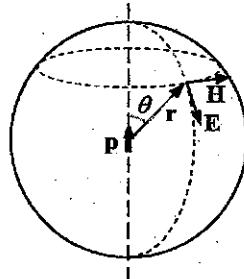


Рис. 12.2.1. Направление силовых линий электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей излучения диполя  $\mathbf{p}$  в волновой зоне

Зависимость от расстояния  $r$  можно объяснить следующим образом. Если диполь непрерывно излучает, то он теряет энергию. Значит, для восстановления его состояния нужно непрерывно сообщать ему энергию, которая непрерывно излучается в виде энергии электромагнитного поля. В стационарных условиях через любую сферу, окружающую диполь, в единицу времени будет в среднем проходить одна и та же энергия  $Q$ . Поток энергии характеризуется вектором Пойнтинга:

$$\mathcal{Q} = \bar{S} \cdot 4\pi r^2 = \text{const.} \quad (12.2.5)$$

В волновой зоне  $E_m = H_m$ . Поскольку величина вектора Пойнтинга равна

$$\bar{S} = \frac{c}{4\pi} |\overline{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}| = \frac{cE_m^2}{8\pi},$$

то согласно (12.2.5) имеем  $E_m^2 \cdot 4\pi r^2 = \text{const}$ , откуда и следует зависимость  $E_m, H_m \sim r^{-1}$ .

С учётом угловой зависимости векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в (12.2.4) получаем следующее выражение для величины вектора Пойнтинга:

$$S \sim \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta. \quad (12.2.6)$$

Эта зависимость определяет *угловое распределение*, или *диаграмму направленности* излучения (рис. 12.2.2). Видно, что максимум излучения идёт в направлении, перпендикулярном дипольному моменту.

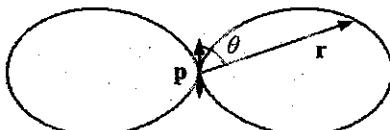


Рис. 12.2.2. Диаграмма направленности излучения точечного диполя в волновой зоне

Как было сказано, излучение возможно только при неравномерном движении зарядов. Поэтому амплитуды полей пропорциональны ускорению зарядов. В случае дипольного излучения поля пропорциональны  $\ddot{\mathbf{p}}$ , причём

$$\mathbf{E} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}}{c^2 r} \sin \theta, \quad \mathbf{H} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}}{c^2 r} \sin \theta, \quad \mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}. \quad (12.2.7)$$

Приведём выражения для полей в векторной форме:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2 r} (\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{c^2 r} \ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}; \quad \mathbf{S} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3 r^2} \mathbf{n}.$$

Полная энергия, излучаемая диполем в единицу времени (мощность излучения), равна

$$Q = \oint_{\Pi} \mathbf{S} d\Pi = \frac{\ddot{\mathbf{p}}^2}{4\pi c^3} \int_0^\pi \sin^2 \theta \cdot 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{2\ddot{\mathbf{p}}^2}{3c^3}, \quad (12.2.8)$$

где  $\Pi$  — замкнутая поверхность, окружающая колеблющийся диполь,  $d\Pi = \mathbf{n} d\Pi$  — вектор элементарной площадки. При интегрировании учтено, что  $d\Pi = r^2 d\Omega = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta$ .

Напомним, что значение дипольного момента  $\mathbf{p}$  берётся с учетом запаздывания в момент времени  $t - r/c$ .

Пусть дипольный момент меняется по гармоническому закону

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \cos \omega t.$$

Тогда для средней (по периоду колебаний) мощности излучения получаем выражение

$$\bar{Q} = \frac{p_0^2}{3c^3} \omega^4. \quad (12.2.9)$$

Следовательно, излучаемая мощность возрастает с ростом частоты как  $\sim \omega^4$ . Эта зависимость называется законом Рэлея.

В частности, при равных амплитудах  $p_0$  и

$$\nu_1 = 50 \text{ Гц} (\lambda_1 = 6 \cdot 10^7 \text{ км}), \nu_2 = 5 \text{ МГц} (\lambda_2 = 6 \cdot 10^2 \text{ км})$$

находим

$$\frac{Q(\nu_2)}{Q(\nu_1)} = \left( \frac{\nu_2}{\nu_1} \right)^4 = 10^{20}.$$

Отметим, что уединённый заряд, движущийся с ускорением  $\mathbf{a}$ , тоже излучает, причём его мощность излучения можно записать в виде

$$Q = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{a}^2.$$

### 12.3. Дипольное излучение (теория)

#### 12.3.1. Волновые уравнения для потенциалов

В этом разделе мы приведём вывод формул теории дипольного излучения. Будем рассматривать только поля в вакууме:

$$\varepsilon = 1, \mu = 1, \mathbf{D} = \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mathbf{H}. \quad (12.3.1)$$

Прежде всего получим обобщение волнового уравнения, явно учитывающее источники поля — заряды и токи. Запишем уравнения Максвелла:

$$(a) \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (b) \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$(b) \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (g) \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (12.3.2)$$

Исключим отсюда магнитное поле. Для этого применим операцию  $\operatorname{rot}$  к уравнению (12.3.2б). С учётом тождества  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$  и уравнения (12.3.2г) получаем

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{E} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - 4\pi \operatorname{grad} \rho. \quad (12.3.3)$$

Уравнение для магнитного поля получается применением операции  $\text{rot}$  к уравнению (12.3.2г) и последующим применением уравнения (12.3.26):

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \text{rot} \mathbf{j}. \quad (12.3.4)$$

Перепишем теперь уравнения (12.3.3), (12.3.4), выразив поля через потенциалы по формулам

$$(a) \mathbf{E} = -\text{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (12.3.5)$$

$$(b) \mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A}$$

(первая из них получена в разделе 5.2.6, а вторая — в 3.3.1). Подстановка этих выражений в (12.3.3), (12.3.4) даёт

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \left( -\text{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - 4\pi \text{grad} \rho, \\ \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \text{rot} \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \text{rot} \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (12.3.6)$$

Последнее уравнение удовлетворится тождественно, если положить

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (12.3.7)$$

С учётом (12.3.7) первое уравнение в (12.3.6) примет вид

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \text{grad} \varphi = 4\pi \text{grad} \rho.$$

Данное равенство удовлетворится, если скалярный потенциал подчинить уравнению

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi = 4\pi \rho. \quad (12.3.8)$$

Как известно, закон сохранения заряда (уравнение непрерывности) имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j} = 0. \quad (12.3.9)$$

Это уравнение накладывает ограничения на допустимые значения потенциалов. Действительно, применяя операцию  $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$  к уравнению

(12.3.8) и операцию  $\operatorname{div}$  — к уравнению (12.3.7), а затем почленно складывая уравнения с учётом соотношения (12.3.9), получим

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} \right) = 0. \quad (12.3.10)$$

Последнее равенство означает, что в принятых допущениях между потенциалами имеется связь

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (12.3.11)$$

Данное соотношение называется *калибровкой потенциалов*. Более точно: равенство (12.3.11) задаёт *лоренцеву калибровку*.

### 12.3.2. О калибровке потенциалов

Иногда, кроме лоренцевой, используют другие калибровки. Возможность выбора разных калибровок связана с неоднозначностью задания потенциалов. Так, кроме сдвига на произвольную постоянную при выборе начала отсчёта скалярного потенциала  $\phi$  и на произвольный постоянный вектор — в выборе начала отсчёта векторного потенциала  $\mathbf{A}$ , возможны различные иные преобразования потенциалов, не меняющие значений электрического и магнитного полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ .

Поля выражаются через потенциалы формулами

$$(a) \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (b) \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Из последнего равенства видно, что в силу тождества  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi = 0$  замена

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \psi$$

не меняет магнитного поля:

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{A}' = \mathbf{H}'.$$

Здесь  $\psi$  — произвольная функция координат и времени. Имея в виду это равенство, запишем выражение для  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A}' - \operatorname{grad} \psi) = -\operatorname{grad} \phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = \mathbf{E}'.$$

Здесь введено обозначение

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Из приведённых уравнений следует, что переход от потенциалов  $\{\phi, \mathbf{A}\}$  к потенциалам  $\{\phi', \mathbf{A}'\}$  по формулам

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \psi,$$

$$\boldsymbol{\varphi}' = \boldsymbol{\varphi} - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

не меняет электрического и магнитного полей. В то же время этот произвол позволяет иногда упростить вид уравнений.

### 12.3.3. Запаздывающие потенциалы

Рассмотрим уравнение для скалярного потенциала

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi = 4\pi\rho, \quad (12.3.12)$$

в котором плотность заряда — некоторая функция координат и времени,  $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ . Пусть заряды находятся в ограниченной области пространства с размерами порядка  $a$ . Нас будет интересовать решение уравнения (12.3.12) на расстояниях, значительно превышающих размер этой области:  $r \gg a$ .

Необходимо учесть, что электромагнитная волна достигнет наблюдателя с запаздыванием, т.е. о состоянии зарядов, какое они имели в такой момент времени  $t_0$ , неподвижный наблюдатель «узнает» только в момент времени

$$t_1 = t_0 + \frac{r(t_0)}{c}, \quad (12.3.13)$$

где  $r(t_0)$  — расстояние от заряда до наблюдателя в момент  $t_0$ .

Если бы не было запаздывания, то решение уравнения (12.3.12) имело бы вид

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}_1, t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} dV_1. \quad (12.3.14)$$

Для учёта запаздывания мы должны в этом выражении брать плотность заряда в более ранние моменты:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}_1, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} dV_1. \quad (12.3.15)$$

Аналогичным образом можно записать и решение волнового уравнения для векторного потенциала:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} dV_1. \quad (12.3.16)$$

Интегрирование в (12.3.15), (12.3.16) должно проводиться по всей области пространства, где находятся заряды и токи.

На больших расстояниях, когда источник выглядит как точечный, это уравнение имеет решение в виде сферических волн

### 12.3.4. Потенциалы колеблющегося точечного диполя

Переходя к случаю точечного диполя, запишем решение (12.3.16) следующим образом:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \sum_i \frac{q_i \mathbf{v}_i (t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|},$$

где суммирование производится по зарядам диполя. Поскольку рассматривается точечный диполь, то можно пренебречь разницей расстояний и времён запаздывания от различных зарядов диполя, положив

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \sum_i \frac{q_i \mathbf{v}_i (t - r/c)}{r}.$$

Учтём, что

$$\sum_i q_i \mathbf{v}_i (t - r/c) = \sum_i q_i \dot{\mathbf{r}}_i (t - r/c) = \dot{\mathbf{p}}(t - r/c).$$

Таким образом, векторный потенциал оказывается равным

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{cr}. \quad (12.3.17)$$

Для нахождения скалярного потенциала можно воспользоваться условием калибровки (12.3.11). Подставляя в него выражение (12.3.17), получаем

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\operatorname{div} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{r} \text{ или } \phi = -\operatorname{div} \frac{\mathbf{p}(t - r/c)}{r}. \quad (12.3.18)$$

Дифференцирование подобных выражений осуществляется по следующему образу:

$$\frac{\partial}{\partial r} f(t - r/c) = f'(t - r/c) \cdot \frac{\partial}{\partial r} (t - r/c) = -\frac{1}{c} f'(t - r/c),$$

где штрих обозначает производную по всему аргументу  $\xi = t - r/c$  функции  $f$ , что эквивалентно дифференцированию по времени:  $f' = \dot{f}$ .

Имея в виду сказанное, вычисляем правую часть равенства (12.3.18):

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{p}(t-r/c)}{r} = \frac{1}{r} \operatorname{div}(\mathbf{p}(t-r/c)) + \mathbf{p}(t-r/c) \nabla \left( \frac{1}{r} \right) = \\ = \frac{1}{r} \dot{\mathbf{p}} \left( -\frac{1}{c} \nabla r \right) - \frac{\mathbf{p} \mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\dot{\mathbf{p}} \mathbf{r}}{cr^2} - \frac{\mathbf{p} \mathbf{r}}{r^3}.$$

Следовательно, из (12.3.18) находим

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{p} \mathbf{r}}{cr^2} + \frac{\mathbf{p} \mathbf{r}}{r^3}.$$

Второе слагаемое совпадает с потенциалом статического поля диполя, убывающим с расстоянием как  $\varphi_{\text{ст}} \sim r^{-2}$ . Первое слагаемое отлично от нуля, только если дипольный момент меняется со временем и убывает с расстоянием медленнее:  $\dot{\mathbf{p}}_{\text{изл}} \sim r^{-1}$ . Оно описывает электромагнитное излучение диполя. Оставляя только это слагаемое, получаем

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{p}} \mathbf{r}}{cr^2}. \quad (12.3.19)$$

Напомним, что значение дипольного момента  $\mathbf{p}$  в формуле (12.3.19) следует брать в момент  $t-r/c$ .

### 12.3.5. Излучение точечного диполя

Зная потенциалы (12.3.17), (12.3.19), можно найти электрическое и магнитное поля по формулам

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (12.3.20)$$

Для магнитного поля находим следующее выражение:

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{cr} = \frac{1}{c} \left( \frac{1}{r} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{p}} \times \nabla \frac{1}{r} \right) = \\ = \frac{1}{c} \left( \frac{1}{r} \ddot{\mathbf{p}} \times \nabla \left( \frac{r}{c} \right) - \dot{\mathbf{p}} \times \nabla \frac{1}{r} \right) = \frac{\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{r}}{cr^3} + \frac{\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{r}}{c^2 r^2}.$$

Первое слагаемое убывает как  $\sim r^{-2}$ , тогда как второе слагаемое убывает медленнее, как  $r^{-1}$ . Именно это второе слагаемое описывает электромагнитное излучение в волновой зоне. Вводя единичный вектор в направлении от источника к наблюдателю,  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ , перепишем полученное выражение для магнитного поля электромагнитной волны:

$$\mathbf{H} = \frac{\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}}{c^2 r}. \quad (12.3.21)$$

Аналогично, с помощью формул (12.3.17), (12.3.19), (12.3.20) вычисляется электрическое поле волны:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \left( \frac{\mathbf{p} \mathbf{r}}{cr^2} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{p}}{cr} \right) = \frac{(\ddot{\mathbf{p}} \mathbf{r}) \mathbf{r} - \ddot{\mathbf{p}} r^2}{c^2 r^3}.$$

Здесь мы сразу удержали только слагаемые, убывающие с расстоянием как  $r^{-1}$ , поскольку только они определяют поле излучения в волновой зоне. Вводя вектор единичный вектор в направлении от источника к наблюдателю:  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ , перепишем полученную формулу в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{p}})}{c^2 r}. \quad (12.3.22)$$

Заметим, что из (12.3.21), (12.3.22) следует связь между электрическим и магнитным полями в волне:

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}. \quad (12.3.23)$$

Соотношения (12.3.21), (12.3.22), (12.3.23) были приведены в разделе 12.2 (без вывода).

## Глава 13. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

### 13.1. Электромагнитные волны в двухпроводной линии

#### 13.1.1. Двухпроводная линия

Линиями передачи называются системы, предназначенные для передачи по ним электромагнитной энергии.

Двухпроводная линия — это система для передачи электромагнитной энергии из одного места в другое, состоящая из двух проводников. Поперечные размеры линии должны быть много меньше её длины.

Впервые такие линии стали применять в 30-х годах XIX века в телеграфии, а с конца XIX века — и для передачи энергии.

Различают

- 1) *экранированные линии* (например, коаксиальный кабель) (рис. 13.1.1 сверху),
- 2) *открытые линии* (например, в виде системы двух параллельных проводов) (рис. 13.1.1 внизу).

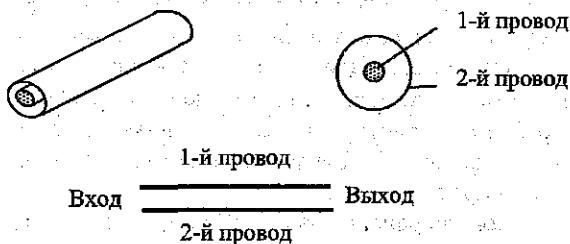


Рис. 13.1.1. Коаксиальный кабель (сверху) и открытая двухпроводная линия (внизу)

Экранированные линии могут оказаться предпочтительнее открытых, поскольку в ходе распространения сигнала теряется (рассеивается в пространстве) меньше энергии.

Двухпроводные линии подключаются к генератору либо с помощью индуктивной связи, либо с помощью ёмкостной связи (рис. 13.1.2).

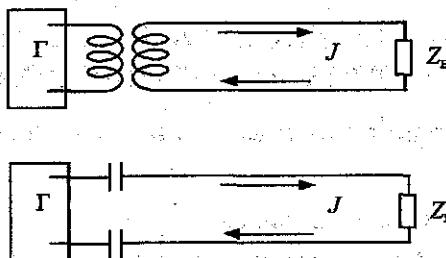


Рис. 13.1.2. Двухпроводная линия, связанная с генератором индуктивной (сверху) и ёмкостной (внизу) связью. На правом конце линия замкнута на нагрузку  $Z_L$ .

Два одинаковых параллельных провода, в которых с помощью генератора могут возбуждаться токи высокой частоты, называются *системой Лéхера*.

В достаточно протяжённой двухпроводной линии условие квазистационарности нарушается: на характерных длинах цепи умещается несколько длин волн, так что мгновенные значения тока на разных участках оказываются различными. При этом в поперечном направлении (от одного провода к другому) условие квазистационарности должно выполняться.

### 13.1.2. Телеграфные уравнения. Волновое уравнение

Получим уравнения, описывающие изменение тока и напряжения в различных точках цепи. Для этого рассмотрим фрагмент цепи (рис. 13.1.3). Пусть  $x$  — координата вдоль цепи. Учтём, что ток в проводах распространяется в противоположных направлениях, и рассмотрим изменения тока в проводе 1. Для упрощения расчётов будем пренебрегать омическим сопротивлением.

Запишем закон сохранения заряда (для провода 1). Пусть  $q_1$  — заряд, приходящий на единицу длины провода. Тогда на участке  $dx$  находится заряд  $q_1 dx$ . Изменение этого заряда за время  $dt$  равно

$$q_1(x, t + dt)dx - q_1(x, t)dx = [J(x, t) - J(x + dx, t)]dt,$$

или

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x}. \quad (13.1.1)$$

Двухпроводная линия эквивалентна электрической цепи, содержащей многократно повторяемый элемент длиной  $dx$ , включающий ёмкость ( $C_1 dx$ ) и индуктивность ( $L_1 dx$ ) (рис. 13.1.4).

Рис. 13.1.3. Фрагмент двухпроводной линии

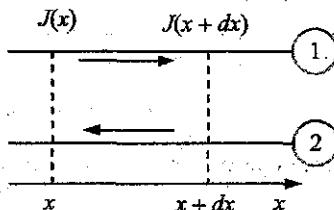
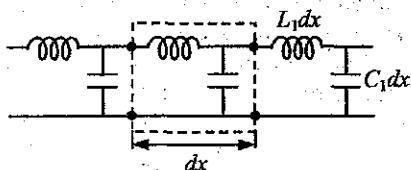


Рис. 13.1.4. Система, эквивалентная двухпроводной линии. Она содержит многократно повторяемый элемент, обведённый штриховой линией



Введём ёмкость системы, приходящуюся на единицу длины линии, соотношением

$$dq = q_1 dx = V dC \Rightarrow q_1 = C_1 V,$$

где  $V$  — разность потенциалов между проводами 1 и 2. Это значит, что ёмкость рассматриваемого участка длиной  $dx$  равна  $dC = C_1 dx$ . Тогда уравнение (13.1.1) примет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{C_1} \frac{\partial J}{\partial x}. \quad (13.1.2)$$

Получим второе уравнение, связывающее ток и напряжение. Пусть индуктивность, приходящаяся на единицу длины линии, равна  $L_1$ . Тогда индуктивность рассматриваемого участка цепи  $dx$  равна  $dL = L_1 dx$ . Применим закон индукции к этому участку:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

Магнитный поток можно записать следующим образом:

$$\Phi = \frac{1}{c} L_1 dx \cdot J.$$

Тогда изменение тока  $\partial J / \partial t$  приводит к возникновению ЭДС индукции:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{L_1 dx}{c^2} \frac{\partial J}{\partial t}.$$

В свою очередь эта ЭДС вызовет изменение напряжения на рассматриваемом участке цепи

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = V(x+dx, t) - V(x, t) = \frac{\partial V}{\partial x} dx.$$

Таким образом, приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{L_1}{c^2} \frac{\partial J}{\partial t}. \quad (13.1.3)$$

Последнее соотношение представляет собой дифференциальную формулу закона индукции для рассматриваемой цепи.

Мы пришли к системе двух уравнений в частных производных для тока и напряжения в цепи:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{C_1} \frac{\partial J}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{L_1}{c^2} \frac{\partial J}{\partial t}. \quad (13.1.4)$$

Эту систему называют «телефрафными уравнениями», поскольку именно с телеграфом были исторически связаны двухпроводные линии.

Для решения системы (13.1.4) исключим из неё ток. Для этого применим операцию  $\partial / \partial t$  к первому уравнению и  $\partial / \partial x$  — ко второму уравнению. В результате в обоих уравнениях в правой части будет стоять одна и та же величина  $\partial^2 J / \partial x \partial t$ , исключая которую, получаем уравнение только для напряжения в цепи:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}. \quad (13.1.5)$$

Здесь введена величина

$$v = 1 / \sqrt{L_1 C_1}. \quad (13.1.6)$$

Уравнение (13.1.5) есть волновое уравнение, описывающее распространение сигнала в одномерной системе, причём фазовая скорость сигнала даётся формулой (13.1.6).

Уравнения (13.1.4), как и уравнение (13.1.5), должны быть дополнены граничными условиями. Пусть длина линии равна  $L$ . Тогда:

если провода не соединены (свободны), то на конце

$$J = 0 \text{ при } x = L;$$

если провода соединены (замкнуты), то

$$V = 0 \text{ при } x = L.$$

### 13.1.3. Стоячие и бегущие волны в линии передач

В неограниченной однородной линии могут распространяться бегущие волны

$$V = V_0 \sin(kx - \omega t), \quad J = J_0 \sin(kx - \omega t). \quad (13.1.7)$$

Соотношение между амплитудами тока ( $J_0$ ) и напряжения ( $V_0$ ) можно получить подставив эти равенства в уравнения (13.1.4):

$$\omega V_0 = \frac{1}{C_1} k J_0, \quad k V_0 = \frac{L_1}{c^2} \omega J_0.$$

Перемножив почленно эти равенства, найдём

$$V_0 = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} J_0. \quad (13.1.8)$$

Если длина линии конечна, могут появляться отражённые волны. Складываясь с волнами, бегущими в прямом направлении, они могут приводить к появлению стоячих волн.

Если в линии нет потерь, то в случае полного отражения прямой волны формируется встречная волна той же амплитуды. В результате на линии устанавливается стоячая волна. Её выражение в соответствии с уравнениями (13.1.4) имеет вид

$$V = V_0 \sin kx \cos \omega t, \quad J = J_0 \cos kx \sin \omega t. \quad (13.1.9)$$

Соотношение между амплитудами колебаний тока и напряжения даётся по-прежнему формулой (13.1.8).

Согласно (13.1.9) в пучностях волны тока, т.е. в тех точках, в которых ток максимальен ( $\cos kx = 1$ ), напряжение обращается в нуль ( $\sin kx = 0$ ). В этих точках амплитуда колебаний тока максимальна. Поэтому пучности волны можно регистрировать с помощью индукционных пробников (например, лампочкой с витком провода).

В узлах волны тока ( $\cos kx = 0$ ) максимальна амплитуда колебаний напряжения ( $\sin kx = 1$ ). Поэтому эти точки можно регистрировать с помощью ёмкостных пробников, регистрирующих напряжение.

### 13.1.4. Скорость распространения волны в коаксиальной двухпроводной линии

Найдём скорость распространения волны в коаксиальной линии передач. Рассмотрим фрагмент кабеля (рис. 13.1.5).

**1) Расчёт ёмкости.** Кабель можно рассматривать как цилиндрический конденсатор. Пусть на внутреннем проводе (проводе 1) распределён заряд с плотностью  $(+r)$  на единицу длины, а на внешнем цилиндре — с линейной плотностью  $(-r)$ . Тогда электрическое поле в пространстве между обкладками конденсатора равно  $E = 2r/\varepsilon r$ , а разность потенциалов между обкладками

$$\Delta\varphi \equiv \varphi_+ - \varphi_- = \int_a^d E(r) dr = \frac{2r}{\varepsilon} \ln\left(\frac{d}{a}\right).$$

Соответственно погонная ёмкость конденсатора

$$C_1 = \frac{\tau}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon}{2 \ln(d/a)}. \quad (13.1.10)$$

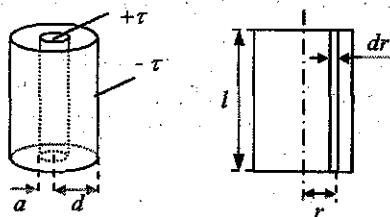


Рис. 13.1.5. Фрагмент коаксиального кабеля — к расчёту погонных ёмкости (слева) и индуктивности (справа)

**2) Расчёт индуктивности.** Пусть по внутреннему проводу течёт ток  $J$ . Тогда между этим проводом и внешним цилиндром образуется магнитное поле  $B = 2\mu J/cr$ . Если длина линии равна  $l$ , то магнитный поток, пронизывающий плоскость между проводниками  $a \leq r \leq d$ , равен

$$\Phi = \frac{1}{c} \int B dS = \frac{2\mu J}{c} l \int_a^d \frac{dr}{r} = \frac{2\mu J}{c} l \ln\left(\frac{d}{a}\right)$$

( $dS = l \cdot dr$  — элемент площади). По определению индуктивности  $\Phi = (L_1 l)J/c$ , откуда находим величину  $L_1$ :

$$L_1 = 2\mu \ln(d/a). \quad (13.1.11)$$

Таким образом, по формуле (13.1.6) находим скорость сигнала в двухпроводной линии:

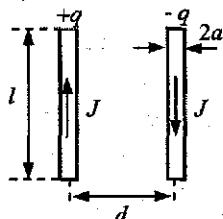
$$v = \frac{c}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (13.1.12)$$

Эта величина совпадает со скоростью света в среде, заполняющей пространство между проводниками системы.

### 13.1.5. Скорость распространения волны в открытой двухпроводной линии

Рассмотрим линию, состоящую из двух тонких параллельных проводов радиуса  $a$  каждый, находящихся на расстоянии  $d \gg a$  друг от друга (рис. 13.1.6). Приведём расчёт для этого случая.

Рис. 13.1.6. Открытая двухпроводная линия — к расчёту погонных ёмкости и индуктивности



1) *Расчёт ёмкости.* Электрическое поле между «обкладками» конденсатора равно сумме полей, создаваемых каждым проводом:

$$E = \frac{2\tau}{\epsilon r} + \frac{2\tau}{\epsilon(d-r)}, \quad \tau = \frac{q}{l}$$

(начало координат выбрано на оси левого провода). Разность потенциалов проводов равна

$$\Delta\phi = \int_a^{d-a} E dr = \frac{4\pi}{\epsilon} \ln\left(\frac{d}{a}\right)$$

(учтено, что каждый проводник является эквипотенциальным, поэтому интеграл вычисляется только от поверхности одного проводника до поверхности второго проводника). Отсюда

$$C_1 = \frac{\tau}{\Delta\phi} = \frac{\epsilon}{4 \ln(d/a)}. \quad (13.1.13)$$

2) *Расчёт индуктивности.* Магнитное поле между проводами

$$B = \frac{2\mu J}{cr} + \frac{2\mu J}{c(d-r)}.$$

Магнитный поток

$$\Phi = \int BdS = \frac{2\mu J}{c} l \left( \int_a^d \frac{dr}{r} + \int_a^d \frac{dr}{d-r} \right) = \frac{4\mu J}{c} l \ln \left( \frac{d-a}{a} \right).$$

Поскольку  $\Phi = \frac{1}{c} (L_1 l) J$ , то

$$L_1 = 4\mu \ln \left( \frac{d}{a} \right). \quad (13.1.14)$$

В последнем равенстве учтено, что  $a \ll d$ .

Таким образом, в рассматриваемом случае находим

$$v = \frac{c}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (13.1.15)$$

Это значит, что скорость волны в двухпроводной линии такая же, как в кабеле (формула (13.1.12)).

### 13.1.6. Волновое сопротивление

Волновое сопротивление определяется, как и обычное сопротивление, формулой

$$Z = V/J. \quad (13.1.16)$$

Его иногда называют *волновым, или характеристическим, импедансом* длинной линии.

Рассмотрим бегущую волну в двухпроводной линии:

$$V = V_0 e^{i(kx-\omega t)}, \quad J = J_0 e^{i(kx-\omega t)}. \quad (13.1.17)$$

Подставим эти выражения в уравнения (13.1.4):

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{C_1} \frac{\partial J}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{J_0}{c^2} \frac{\partial J}{\partial t}.$$

Это даёт

$$-i\omega V = -\frac{ik}{C_1} J, \quad ikV = \frac{i\omega J_0}{c^2} J. \quad (13.1.18)$$

Из первого уравнения находим

$$Z = \frac{V}{J} = \frac{k}{\omega C_1}. \quad (13.1.19)$$

Поделив почленно первое уравнение на второе в (13.1.18), получим

$$\left( \frac{\omega}{k} \right)^2 = \frac{c^2}{L_1 C_1}.$$

Используя это соотношение, исключим величину  $\omega/k$  из уравнения (13.1.19):

$$Z = \frac{V}{J} = -\sqrt{\frac{L_1}{L_1'}}$$
 (13.1.20)

В частном случае коаксиальной линии  $C_1$  одам

$$Z = \frac{1}{c} 2 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln\left(\frac{d}{a}\right)$$
 (13.1.21)

Заметим, что величина  $Z$  не зависит явно от частоты, волнового числа и направления распространения волны (если только  $\epsilon$  и  $\mu$  можно считать постоянными). Поэтому соотношение  $V = JZ$  применимо для сигнала любой формы.

### 13.1.7. Коэффициент стоячей волны

Появление стоячих волн ухудшает работу линии передачи, поскольку к передатчику возвращается энергия отражённой волны, и он должен быть рассчитан на дополнительную нагрузку.

Мерой, характеризующей соотношение между прямой и отражённой волнами в линии, является коэффициент стоячей волны.

Коэффициентом стоячей волны (КСВ) называется отношение наибольшего значения амплитуды напряжения в линии передачи к наименьшему:

$$r = \frac{V_{\max} + V_{\min}}{V_{\max} - V_{\min}}$$
 (13.1.22)

Эта величина определяется значениями амплитуды волны в пучности ( $V_{\max}$ ) и в узле ( $V_{\min}$ ). Если  $r = 1$ , то волна чисто стоячая, если же  $r \rightarrow \infty$ , то волна чисто бегущая.

Вводят также коэффициент бегущей волны (КБВ):

$$d = \frac{1}{r} = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{V_{\max} + V_{\min}}$$
 (13.1.23)

Случаю  $d = 1$  отвечает стоячая волна, а  $d = 0$  — бегущая волна.

Пусть коэффициент отражения волны от нагрузки равен  $\rho$ . Тогда в линии будет присутствовать волна напряжения:

$$V = V_{\text{пад}} + V_{\text{отр}} = V_0 \cos(kx - \omega t) + \rho V_0 \cos(kx + \omega t)$$

(для волны, бегущей в обратном направлении, следует заменить  $k \rightarrow -k$ ). Эту волну можно представить как суперпозицию бегущей и стоячей волн:

$$V = (1 - \rho)V_0 \cos(kx - \omega t) + \rho V_0 [\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t)] = \\ = (1 - \rho)V_0 \cos(kx - \omega t) + 2\rho V_0 \cos kx \cos \omega t \equiv V_{\text{бер}} + V_{\text{ср}}.$$

Найдём максимальное и минимальное значения амплитуды волны. Воспользуемся комплексным представлением:

$$V = V_0 e^{i(kx - \omega t)} + \rho V_0 e^{-i(kx + \omega t)} = V_0 e^{-i\omega t} (e^{ikx} + \rho e^{-ikx}).$$

Отсюда находим

$$|V| = V_0 \sqrt{(e^{ikx} + \rho e^{-ikx})(e^{-ikx} + \rho e^{ikx})} = \sqrt{1 + \rho^2 + 2\rho \cos 2kx}.$$

Максимумы амплитуды достигаются в точках, где  $\cos 2kx = 1$ , а минимумы — в точках, где  $\cos 2kx = -1$ . При этом

$$V_{\max} = V_0(1 + \rho), \quad V_{\min} = V_0(1 - \rho).$$

Первые реализуются в пучностях, а вторые — в узлах стоячей волны. Соответственно КСВ и КБВ оказываются равными

$$r = \frac{V_{\max} + V_{\min}}{V_{\max} - V_{\min}} = \frac{1}{\rho}, \quad d = \rho. \quad (13.1.24)$$

### 13.1.8. Коэффициент отражения

Найдём коэффициент отражения. Пусть сопротивление нагрузки равно  $Z_h$ , а волновое сопротивление линии —  $Z$ . Обозначая ток и напряжение в падающей на нагрузку волне как  $J^{(+)}$  и  $V^{(+)}$ , а в отражённой волне — как  $J^{(-)}$  и  $V^{(-)}$ , имеем

$$J^{(+)} = V^{(+)} / Z, \quad J^{(-)} = V^{(-)} / Z. \quad (13.1.25)$$

По правилу Кирхгофа (закону сохранения заряда):

$$J^{(+)} - J^{(-)} = J_h,$$

где  $J_h$  — ток, уходящий в нагрузку. С учётом равенства (13.1.25) находим

$$\frac{V^{(+)}}{Z} - \frac{V^{(-)}}{Z} = \frac{J_h}{Z_h}.$$

С другой стороны, напряжение на нагрузке складывается из напряжений падающей и отражённой волн:

$$V_h = V^{(+)} + V^{(-)}.$$

Следовательно,

$$\frac{V^{(+)} - V^{(-)}}{Z} = \frac{V^{(+)} + V^{(-)}}{Z_{\text{H}}}$$

Отсюда находим коэффициент отражения:

$$\rho = \frac{V^{(-)}}{V^{(+)}} = \frac{Z_{\text{H}} - Z}{Z_{\text{H}} + Z}. \quad (13.1.26)$$

Введём коэффициент согласования сопротивлений подводящей линии и нагрузки:

$$k = Z_{\text{H}} / Z.$$

Тогда коэффициент отражения определяется формулой

$$\rho = \frac{k-1}{k+1}.$$

Случай  $k=1$  отвечает отсутствию неоднородности сопротивления линии, и отражённая волна отсутствует. Если же  $Z_{\text{H}} \rightarrow \infty$ , то  $\rho=1$ , и в линии возникает чисто стоячая волна.

## 13.2. Электромагнитные волны в волноводах

### 13.2.1. Волноводы

**Волновод** — это искусственный (или естественный) канал, способный поддерживать распространяющиеся в нём волны.

**Экранированный волновод** имеет стенки, которые хорошо отражают волны, в результате чего энергия поля направляется и передаётся от входа в волновод к выходу из него с минимальными потерями. Такие волноводы изготавливают из металлов с высокой проводимостью (рис. 13.2.1).

Волноводы относятся к линиям *передачи*, т.е. к системам, предназначенным для передачи по ним электромагнитной энергии.

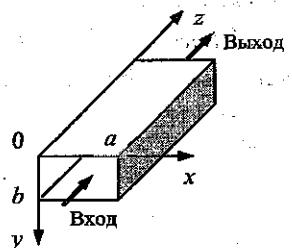


Рис. 13.2.1. Волновод  
прямоугольного сечения,  
открытый вдоль оси  $z$

Электромагнитная волна в волноводе отличается от волны в свободном пространстве, поскольку в формировании поля теперь участвует не только исходная волна, но также заряды и токи, индуцированные этой волной на стенах волновода. В результате суммарная волна уже не является поперечной.

Будем предполагать, что стени волновода сделаны из вещества с очень большой проводимостью  $\lambda$ . Это означает, что поле в стенах практически отсутствует. Действительно, согласно закону Ома  $E = j/\lambda$ . Поэтому только очень сильные токи могли бы создавать заметные поля.

Будем также считать, что волновод заполнен средой с  $\epsilon = 1$  и  $\mu = 1$ , в которой, кроме того, отсутствуют свободные заряды и токи проводимости.

При расчёте поля в волноводе нужно использовать граничные условия на стенах:

$$\text{a) } E_t = 0, \text{ б) } H_n = 0. \quad (13.2.1)$$

Эти условия следуют из того, что в металлических стенах электрическое и магнитное поля равны нулю, а на границе раздела сред выполняются условия  $E_{1n} = E_{2n}$ ,  $B_{1n} = B_{2n}$ . И кроме того, внутри волновода мы полагаем  $B = H$  (считая, что  $\mu = 1$ ).

Наличие переменных индуцированных токов и зарядов на стенах волновода приводит к тому, что волна не является поперечной. Пусть волновод передаёт сигнал вдоль оси  $z$ . Соответственно выделяют два основных типа волн:

1)  $E$ -волна, или  $TM$ -волна:  $H \perp z$ ,  $E_z \neq 0$ ,

2)  $H$ -волна, или  $TE$ -волна:  $E \perp z$ ,  $H_z \neq 0$ .

Символ « $T$ » в обозначении волны (от англ. *transverse* — поперечный) указывает, какой из векторов (электрический или магнитный) является поперечным по отношению к направлению распространения волны.

### 13.2.2. Уравнение Гельмгольца

В среде, в которой отсутствуют свободные заряды и токи проводимости, распространение электромагнитного поля описывается волновым уравнением:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}, \quad (13.2.2)$$

где  $v = c/\sqrt{\epsilon\mu}$  — фазовая скорость волны. В соответствии с принятыми допущениями  $v = c$ .

Если волна зависит от времени по гармоническому закону:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (13.2.3)$$

то уравнение (13.2.2) сводится к уравнению Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0. \quad (13.2.4)$$

### 13.2.3. TE<sub>z0</sub>-волна

Для установления основных закономерностей распространения волн в волноводе рассмотрим случай TE-волны, бегущей вдоль оси  $z$  (т.е. волны, у которой  $\mathbf{E} \perp z$ ,  $H_z \neq 0$ ):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(x, y) \exp(ik_z z - i\omega t). \quad (13.2.5)$$

Подстановка этого выражения в уравнение (13.2.4) даёт

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}_0}{\partial y^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \mathbf{E}_0 = 0. \quad (13.2.6)$$

Исследование решений полученного уравнения начнём со случая, когда вектор  $\mathbf{E}$  направлен параллельно оси  $y$ . Тогда поле не зависит от координаты  $y$ , т.е.  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, z, t)$ . Действительно, согласно теореме Гаусса ( $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ ) это означает, что в рассматриваемом случае  $\partial E_y / \partial y = 0$ . откуда и следует сделанное утверждение. Соответственно уравнение (13.2.6) упрощается:

$$\frac{d^2 E_{0y}}{dx^2} + \kappa^2 E_{0y} = 0, \quad (3.2.7)$$

где введено обозначение

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2. \quad (13.2.8)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$E_{0y} = A \sin \kappa x + B \cos \kappa x. \quad (13.2.9)$$

Учтём теперь граничные условия

$$E_y \Big|_{x=0} = 0, \quad E_y \Big|_{x=a} = 0, \quad (13.2.10)$$

выполнение которых связано с тем, что рассматриваемое поле параллельно стенкам волновода  $x = 0$  и  $x = a$ . Первое условие даёт  $B = 0$ , а второе может быть выполнено только если

$$k = \pi n/a, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13.2.11)$$

(значение  $n = 0$  исключается, т.к. в этом случае окажется  $E_y \equiv 0$ ).

Таким образом, поле описывается функцией

$$E_y = E_0 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \exp(ik_z z - i\omega t). \quad (13.2.12)$$

Такое поле обозначают символом  $TE_{n0}$ , явно указывая значение числа  $n$  в виде индекса.

Волна  $TE_{10}$  проиллюстрирована на рис. 13.2.2.

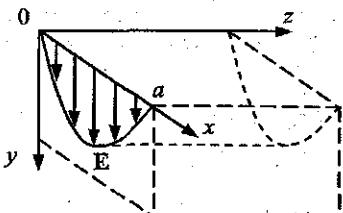


Рис. 13.2.2.  $TE_{10}$ -волна  
в прямоугольном волноводе  
(волна распространяется  
вдоль оси  $z$ )

#### 13.2.4. Критическая частота

Подстановка значения  $k_z$  из (13.2.11) в соотношение (13.2.7) даёт

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\pi^2 n^2}{a^2} + k_z^2. \quad (13.2.13)$$

Следовательно, *минимальная* частота волны, которая может распространяться в волноводе, равна

$$\omega_{kp} = \pi c / a. \quad (13.2.14)$$

Это значение реализуется при  $k_z = 0$ ,  $n = 1$  и называется *критической частотой*. Волны с меньшими частотами в волноводе распространяться не могут. Действительно, перепишем (13.2.14) в виде

$$k_z^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_{kp}^2).$$

Тогда при  $\omega < \omega_{kp}$  окажется  $k_z^2 < 0$ , или  $k_z = i\alpha$ . Соответственно из (13.2.12) получаем

$$E_y \sim \exp(-\alpha z), \quad \alpha = \frac{1}{c} \sqrt{\omega_{kp}^2 - \omega^2}, \quad (13.2.15)$$

что означает экспоненциальное затухание волны по мере её продвижения в волноводе.

### 13.2.5. Общий случай TE-волны (H-волны)

В общем случае в *TE*-волне вектор напряжённости электрического поля может иметь компоненты, направленные вдоль осей  $x$  и  $y$  (рис. 13.2.3). Эти компоненты, однако, не являются независимыми, а связаны соотношением

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0, \quad (13.2.16)$$

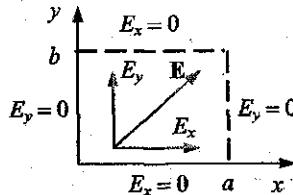
вытекающим из теоремы Гаусса. Если поперечные размеры волновода (рис. 13.2.1) таковы, что

$$0 < x < a, \quad 0 < y < b,$$

то граничные условия, которым должна удовлетворять напряжённость электрического поля, имеют вид

$$\begin{aligned} E_x|_{y=0} &= 0, \quad E_x|_{y=b} = 0, \\ E_y|_{x=0} &= 0, \quad E_y|_{x=a} = 0. \end{aligned} \quad (13.2.17)$$

Рис. 13.2.3. *TE<sub>nm</sub>*-волна. Указаны поверхности, на которых обращаются в нуль компоненты  $E_x$  и  $E_y$  вектора электрического поля



Рассмотрим, как и выше, волну, бегущую вдоль оси  $z$ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x, y) \exp(i k_z z - i \omega t).$$

Входящая сюда функция  $\mathbf{E}_0(x, y)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}_0}{\partial y^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \mathbf{E}_0 = 0. \quad (13.2.18)$$

Можно проверить, что это уравнение имеет решения вида

$$\begin{aligned} E_x &= A_x \cos(k_x x) \sin(k_y y), \\ E_y &= A_y \sin(k_x x) \cos(k_y y), \end{aligned} \quad (13.2.19)$$

удовлетворяющие условию (13.2.16). Заметим, что при  $k_y = 0$  мы имеем исследованную выше *TE<sub>n0</sub>*-волну (с вектором  $\mathbf{E}$ , направленным вдоль

оси  $y$ ). Если же положить  $k_x = 0$ , то получим волну с вектором  $\mathbf{E}$ , направленным вдоль оси  $x$ .

Чтобы решение (13.2.19) удовлетворяло граничным условиям (13.2.17), нужно положить

$$\begin{aligned} k_x &= \pi n/a, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ k_y &= \pi m/b, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (13.2.20)$$

Волна, задаваемая уравнениями (13.2.19) совместно с условиями (13.2.20), называется  $TE_{nm}$ -волной.

Между амплитудами  $A_x$  и  $A_y$  имеется связь, вытекающая из (13.2.16):

$$k_x A_x + k_y A_y = 0$$

или, с учётом (13.2.20),

$$nA_x + mA_y = 0.$$

Подстановка (13.2.19) в уравнение (13.2.18) даёт

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2,$$

откуда с учётом равенств (13.2.20) получаем

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\pi^2 n^2}{a^2} + \frac{\pi^2 m^2}{b^2} + k_z^2. \quad (13.2.21)$$

Здесь числа  $n$  и  $m$  могут пробегать весь диапазон значений 0, 1, 2, 3 и т.д. Однако они не могут быть равны нулю одновременно, так как в этом случае, как следует из (13.2.19), (13.2.20), окажется  $\mathbf{E} \equiv 0$ . Соответственно критическая частота волны зависит от поперечных размеров волновода:

$$\text{при } a > b \quad \omega_{kp} = \pi c/a,$$

$$\text{при } a < b \quad \omega_{kp} = \pi c/b.$$

### 13.2.6. Магнитное поле $TE$ -волны

До сих пор, обсуждая волны в волноводе, мы изучали только электрическое поле. Найдём магнитное поле  $TE$ -волны. Воспользуемся уравнением Максвелла (для  $\mu = 1$ ):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Будем, как и выше, предполагать, что

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x, y) \exp(ik_z z - i\omega t) = (E_x, E_y, 0),$$

где вектор направлен перпендикулярно оси волновода (оси  $z$ ). Тогда это уравнение принимает вид  $\mathbf{H} = \frac{c}{i\omega} \operatorname{rot} \mathbf{E}$  или, подробно,

$$\mathbf{H} = \frac{c}{i\omega} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{c}{i\omega} \left( -\frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right).$$

Заменяя здесь

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = ik_z E_y, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = ik_z E_x,$$

получим

$$\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z) = \frac{c}{i\omega} \left( -ik_z E_y, ik_z E_x, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right),$$

где выражения для  $E_x$  и  $E_y$  даются формулами (13.2.19), (13.2.20). Следовательно, вектор магнитного поля в  $TE$ -волне имеет в общем случае как продольную, так и поперечную компоненты. Нетрудно заметить, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  взаимно перпендикулярны:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0.$$

В частном случае  $TE_{10}$ -волны имеем

$$\begin{aligned} E_y &= E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp(ik_z z - i\omega t), \quad E_x = E_z = 0, \\ H_x &= -\frac{ck_z}{\omega} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp(ik_z z - i\omega t), \\ H_y &= 0, \\ H_z &= -i \frac{\pi c}{a\omega} E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp(ik_z z - i\omega t). \end{aligned} \tag{13.2.22}$$

Качественный вид силовых линий полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в  $TE_{10}$ -волне приведён на рис. 13.2.4.

### 13.2.7. Длина волны и фазовая скорость волн в волноводе

Рассмотрим  $TE_{10}$ -волну:

$$E_y = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp(ik_z z - i\omega t). \tag{13.2.23}$$

Для неё допустимые значения частот даются выражением

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\pi^2}{a^2} + k_z^2. \quad (13.2.24)$$

Отсюда находим

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}. \quad (13.2.25)$$

Введём длину волны  $\lambda$  вдоль оси волновода:

$$\lambda = 2\pi/k_z. \quad (13.2.26)$$

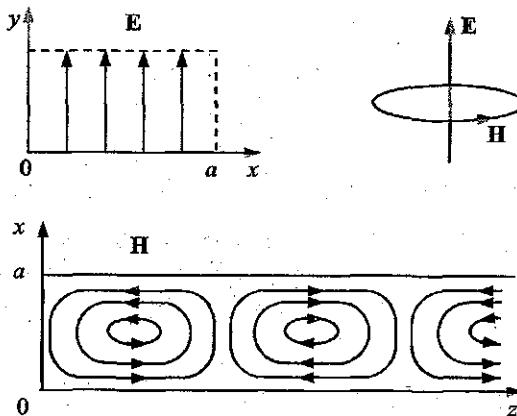


Рис. 13.2.4. Силовые линии электрического и магнитного полей в  $TE_{10}$ -волне в волноводе

Согласно (13.2.23) эта величина определяет пространственный период поля по оси  $z$ . В вакууме волна с частотой  $\omega$  имеет длину волны

$$\lambda_0 = 2\pi c/\omega. \quad (13.2.27)$$

Имея в виду равенство (13.2.25), можно выразить длину волны в волноводе  $\lambda$  через длину волны в вакууме  $\lambda_0$ :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{a\omega}\right)^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}}. \quad (13.2.28)$$

Нетрудно заметить, что  $\lambda > \lambda_0$ . В пределе, когда  $\lambda_0 \rightarrow 2a$ , или, что эквивалентно,  $\omega \rightarrow \omega_{kp} = \pi c/a$ , окажется  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Найдём фазовую скорость волны в волноводе. Записывая зависимость напряжённости поля (13.2.23) от координаты  $z$  и времени  $t$  в виде

$$\exp(ik_z z - i\omega t) = \exp[ik_z(z - v_{\Phi} t)], \quad (13.2.29)$$

мы видим, что профиль волны перемещается вдоль оси волновода со скоростью

$$v_{\Phi} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2 - \pi^2}{c^2 - a^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}}. \quad (13.2.30)$$

Таким образом, фазовая скорость волны превышает скорость света:  $v_{\Phi} > c$ . Следует, однако, иметь в виду, что скорость переноса энергии равна групповой скорости<sup>1</sup>:

$$v_{gp,z} = \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{ck_z}{\omega} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{a\omega}\right)^2} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}, \quad (13.2.31)$$

причём  $v_{gp,z} < c$ .

Исследуем механизм, по которому волна при  $\omega \rightarrow \omega_{kp}$  перестаёт распространяться вдоль волновода.  $TE_{10}$ -волну (13.2.23)

$$E_y = E_0 \sin(\pi x/a) \exp(ik_z z - i\omega t)$$

можно представить в комплексной форме как

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 \sin(k_x x) e^{ik_z z - i\omega t} = \\ &= \frac{1}{2i} \mathbf{E}_0 [e^{ik_x x + ik_z z} - e^{-ik_x x + ik_z z}] e^{-i\omega t} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2. \end{aligned} \quad (13.2.32)$$

Здесь для краткости введено обозначение  $k_x = \pi/a$ .

Из (13.2.32) видно, что волна в волноводе представляет собой суперпозицию двух бегущих плоских волн, распространяющихся под углом к оси волновода. Схематически эти волны показаны на рис. 13.2.5. Их волновые векторы равны

$$\mathbf{k}_1 = (k_x, 0, k_z), \quad \mathbf{k}_2 = (-k_x, 0, k_z); \quad k_x = \pi/a. \quad (13.2.33)$$

Они имеют равную длину

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k_z^2} = \frac{\omega}{c}, \quad (13.2.34)$$

совпадающую с длиной волнового вектора в свободном пространстве. Угол, составляемый ими с осью волновода, определяется формулой

<sup>1</sup> Смысл групповой скорости выясняется в главе 14.

$$\sin \alpha = \frac{k_x}{k} = \frac{\pi c}{a\omega} = \frac{\omega_{kp}}{\omega} = \frac{\lambda_0}{2a}. \quad (13.2.35)$$

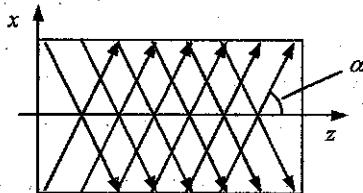


Рис. 13.2.5. Волна в волноводе есть суперпозиция двух встречных волн, распространяющихся под углом  $\alpha$  к оси волновода

Отсюда видно, что при  $\omega \rightarrow \omega_{kp}$  угол  $\alpha \rightarrow \pi/2$ , т.е. волны в этом пределе распространяются поперёк волновода — устанавливается стоячая волна

$$\mathbf{E} = E_0 \sin(\pi x/a) e^{-i\omega t} \quad (13.2.36)$$

с узлами на стенках волновода. Переноса же энергии вдоль оси волновода нет.

Наконец, отметим, что вектор Пойнтинга, определяющий перенос энергии, для  $TE_{10}$ -волны равен

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{c}{4\pi} (iE_y H_z - kE_y H_x). \quad (13.2.37)$$

Поскольку согласно (13.2.22), (13.2.25) для  $TE_{10}$ -волны

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}} = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_{kp}^2},$$

$$H_x = -ik_z \frac{cE_0}{i\omega} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp(ik_z z - i\omega t).$$

В пределе  $\omega \rightarrow \omega_{kp}$  оказывается

$$k_z \rightarrow 0, H_x \rightarrow 0, S_z = \frac{c}{4\pi} E_y H_x \rightarrow 0,$$

что и означает отсутствие переноса энергии вдоль волновода.

Найдём компоненту  $S_x$  вектора Пойнтинга. Перейдём в выражениях (13.2.22) для  $E_y$  и  $H_z$  к действительным величинам:

$$S_x = \frac{c}{4\pi} E_y H_z,$$

$$E_y = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(k_z z - \omega t),$$

$$H_z = \frac{\pi c E_0}{a \omega} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(k_z z - \omega t).$$

Отсюда следует, что

$$S_x = \frac{c}{16\pi} \cdot \frac{\pi c}{a \omega} \cdot E_0^2 \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin(2k_z z - 2\omega t).$$

Таким образом, энергия поля при  $k_z = 0$  циркулирует «туда и обратно» в направлении, перпендикулярном оси волновода и векторам  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Интенсивность же волны — среднее значение вектора Пойнтинга по периоду колебаний  $T = 2\pi/\omega$  — обращается в нуль.

### 13.3. Собственные колебания поля в объёмных резонаторах

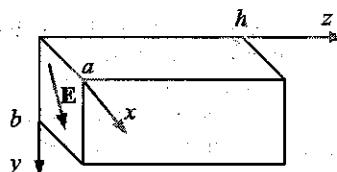
*Резонатор* — это устройство, в котором происходит накопление энергии колебаний, поставляемой из внешнего источника.

*Объёмный резонатор* — это замкнутая (или почти замкнутая) полость с хорошо проводящими стенками.

Резонатор можно рассматривать точно так же, как и волновод, имея только в виду, что вход и выход закрыты металлическими заглушками (рис. 13.3.1).

Рассмотрим волну, распространяющуюся в резонаторе вдоль оси  $z$ . Будем считать, что в объёме резонатора находится среда с  $\epsilon = \mu = 1$ . Ограничимся случаем  $TE$ -волны, когда вектор напряжённости перпендикулярен оси  $z$  (и параллелен плоскости  $(x, y)$ ).

Рис. 13.3.1. Объёмный резонатор с размерами  $a \times b \times h$



Из-за наличия стенок, ограничивающих распространение волны, результирующая волна есть суперпозиция прямой и отражённой бегущих волн. Это значит, что зависимость поля от координаты  $z$  передаётся формулой

$$f(z) = Ae^{ik_z z} + Be^{-ik_z z}. \quad (13.3.1)$$

При этом частоты волн, присутствующих в резонаторе, определяются формулой

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\pi^2 n^2}{a^2} + \frac{\pi^2 m^2}{b^2} + k_z^2. \quad (13.3.2)$$

Положим

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{F}(x, y) f(z) e^{-i\omega t}. \quad (13.3.3)$$

Поскольку вектор  $\mathbf{E}$  параллелен стенкам  $z=0$  и  $z=h$ , то согласно граничным условиям (обращение в нуль касательной составляющей поля  $\mathbf{E}$  в точках поверхности) имеем

$$f(0) = 0, \quad f(h) = 0. \quad (13.3.4)$$

Из этих условий находим

$$A+B=0, \quad A e^{ik_z h} + B e^{-ik_z h} = 0,$$

откуда следует

$$f(z) = A \sin(k_z z), \quad k_z = \frac{\pi p}{h}, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (13.3.5)$$

Подставляя найденное выражение для  $k_z$  в (13.3.2), получаем спектр волн в резонаторе:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\pi^2 n^2}{a^2} + \frac{\pi^2 m^2}{b^2} + \frac{\pi^2 p^2}{h^2}. \quad (13.3.6)$$

Таким образом, в резонаторе допустимые частоты волн образуют дискретный набор, который обозначают как  $\omega_{nmp}$  (с индексами, указывающими на число полуволн по соответствующей координате). Волну с такой частотой обозначают как  $TE_{nmp}$ . Заметим, что в случае резонатора выбор координатных осей является условным. Поэтому обычно принимают, что ось  $z$  направлена вдоль самой длинной стороны резонатора.

Как видно из (13.3.5), в резонаторе с идеально отражающими стенками результатирующая волна является суперпозицией прямой и отражённой волн, имеющих равные амплитуды, т.е. является стоячей волной. Следовательно, в идеальном резонаторе волны всегда являются стоячими.

Найдём минимальную частоту волн, которые могут находиться в резонаторе. Положим  $p=1$ , так как при  $p=0$  из (13.3.5) мы получили бы  $k_z = 0$  и, следовательно,  $\mathbf{E} = 0$ . Кроме того, нужно положить хотя бы один из оставшихся индексов ( $n$  или  $m$ ) равным единице (т.е. минимально возможным, но ненулевым), иначе получилось бы тривиальное состояние с полем  $\mathbf{E} = 0$ . Из (13.3.6) следует, что минимальная частота зависит от соотношения между размерами  $a$  и  $b$  резонатора:

при  $a > b$  нужно положить  $n = 1, m = 0, p = 1$ ,

при  $a < b$  нужно положить  $n = 0, m = 1, p = 1$ .

Следовательно, минимальная частота — это либо  $\omega_{101}$ , либо  $\omega_{011}$ . Напомним, что в обоих случаях  $p = 1$ , поскольку по предположению  $h > a$  и  $h > b$ .

В качестве примера рассмотрим  $TE_{n0p}$ -волну, у которой вектор  $\mathbf{E}$  параллелен оси  $y$ :

$$E_y = jE_{y0} \sin(k_x x) \sin(k_z z) e^{-i\omega t}, \quad k_x = \frac{n\pi}{a}, \quad k_z = \frac{p\pi}{h} \quad (13.3.7)$$

Напряжённость магнитного поля может быть найдена из уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Для волн с частотой  $\omega$  это уравнение принимает вид  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mathbf{H}/c$ . Отсюда находим:

$$\mathbf{H} = \frac{c}{i\omega} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{c}{i\omega} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{array} \right| = \frac{c}{i\omega} \left( -\mathbf{i} \frac{\partial E_y}{\partial z} + \mathbf{k} \frac{\partial E_y}{\partial x} \right).$$

( $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  — орты соответственно вдоль осей  $x, y, z$ ). Подстановка сюда выражения (13.3.7) для  $E_y$  даёт

$$\mathbf{H} = \frac{cE_{y0}}{i\omega} \left[ -ik_z \sin(k_x x) \cos(k_z z) + kk_x \cos(k_x x) \sin(k_z z) \right].$$

Качественный вид силовых линий магнитного поля в резонаторе показан на рис. 13.3.2.

Рассмотрение  $TM$ -волн проводится полностью аналогично рассмотрению  $TE$ -волн.

### 13.4. Отражение волн от металлов

Пусть плоская электромагнитная волна падает по нормали из вакуума (среда 1) на поверхность металла (среда 2) (рис. 13.4.1). Будем считать металл идеальным проводником.

В рассматриваемых условиях волновые векторы падающей и отражённой волн перпендикулярны поверхности металла. Вследствие попе-

речности волны векторы её электрического и магнитного полей параллельны поверхности.

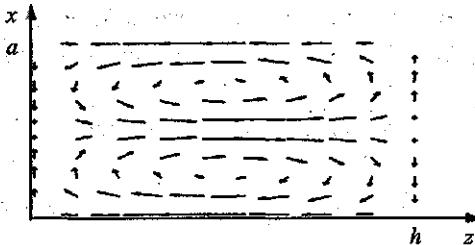


Рис. 13.3.2. Представление о силовых линиях магнитного поля в резонаторе в mode  $TE_{102}$

Выберем систему координат так, что  $E \parallel OX$ ,  $H \parallel OY$ . Рассматривая монохроматические волны, распространяющиеся вдоль оси  $z$ , запишем эти волны в комплексной форме:

$$E_x = E_0 e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad B_y = B_0 e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad (13.4.1)$$

$$E'_x = E'_0 e^{i(k'_z z - \omega t)}, \quad B'_y = B'_0 e^{i(k'_z z - \omega t)}.$$

Здесь штрихом обозначены величины, относящиеся к отражённой волне, а без штриха — к падающей волне. Поле в вакууме (над металлом) складывается из полей падающей и отражённой волн:

$$E_x^{(1)} = E_x + E'_x, \quad (13.4.2)$$

$$B_y^{(1)} = B_y + B'_y. \quad (13.4.3)$$

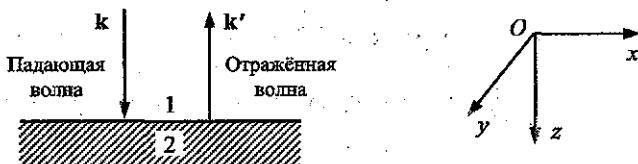


Рис. 13.4.1. Отражение волны от границы раздела вакуум (1) – металл (2)

На границе раздела сред выполняется условие

$$z = 0 : E_t^{(1)} = E_t^{(2)}. \quad (13.4.4)$$

Поскольку поле в идеальном проводнике отсутствует, то на внешней поверхности металла окажется

$$z = 0 : E_x^{(1)} = 0.$$

Тогда из (13.4.2) следует

$$z=0: E_x = -E'_x. \quad (13.4.5)$$

Отсюда согласно (13.4.1) находим соотношение между амплитудами электрического поля падающей и отражённой волн:

$$E_{0x} = -E'_{0x}. \quad (13.4.6)$$

Для нахождения соотношения между амплитудами магнитного поля этих волн воспользуемся уравнением Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Для плоской волны с волновым вектором  $\mathbf{k}$  и частотой  $\omega$  это уравнение принимает вид  $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}/c$ . Соответственно для падающей и отражённой волн (13.4.1) это равенство записывается следующим образом:

$$k_z E_x = \frac{\omega}{c} B_y, \quad k'_z E'_x = \frac{\omega}{c} B'_y. \quad (13.4.7)$$

В вакууме  $k = \omega/c$ . Поэтому для падающей волны  $k_z = k$ , а для отражённой волны  $k'_z = -k$ . Отсюда находим соотношение между амплитудами:

$$B_{0y} = E_{0x}, \quad B'_{0y} = -E'_{0x}. \quad (13.4.8)$$

Наконец, с учётом (13.4.6) получаем

$$B'_{0y} = B_{0y}. \quad (13.4.9)$$

Взаимная ориентация векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$  в падающей и отражённой волнах проиллюстрирована на рис. 13.4.2.

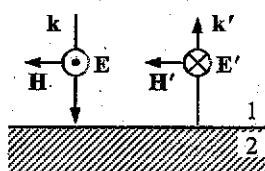


Рис. 13.4.2. Направление векторов электрического и магнитного полей в падающей и отражённой волнах (в некоторый момент времени); среда 1 — вакуум, среда 2 — металл.

На рис. 13.4.2 и далее используется символика для изображения векторов, направленных перпендикулярно к плоскости рисунка, показанная на рис. 13.4.3.



Вектор «смотрит на нас» — видно острый стрелы



Вектор «смотрит от нас» — видно оперение стрелы

Рис. 13.4.3. Изображение направления векторов

С учётом (13.4.6) и (13.4.9), получаем из (13.4.1) — (13.4.3) выражения для полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  волны в пространстве над металлом:

$$E_x^{(1)} = E_x + E'_x = E_0 \left( e^{i(k_z z - \omega t)} - e^{i(-k_z z - \omega t)} \right) = \\ = 2iE_0 e^{-i\omega t} \sin kz, \quad (13.4.10)$$

$$B_y^{(1)} = B_y + B'_y = B_0 \left( e^{i(k_z z - \omega t)} + e^{i(k'_z z - \omega t)} \right) = \\ = 2B_0 e^{-i\omega t} \cos kz. \quad (13.4.11)$$

Остальные компоненты полей равны нулю. При этом согласно (13.4.8), (13.4.9)  $E_0 = B_0$ .

Таким образом, в пространстве над металлом электромагнитная волна — стоячая, причём фазы колебаний электрического и магнитного полей отличаются на  $\pi/2$ . Формально этот сдвиг учитывается множителем  $i = e^{i\pi/2}$  в выражении (13.4.10).

## 13.5. Отражение и преломление электромагнитных волн на границе раздела диэлектриков

### 13.5.1. Отражение и преломление волн

Пусть на плоскую границу раздела двух диэлектриков падает плоская волна, волновой вектор которой образует угол  $\theta$  с нормалью к плоскости. Угол  $\theta$  называется углом падения волны.

Будем обозначать величины, относящиеся к отражённой волне одним штрихом, к прошедшей через границу раздела волне — двумя штрихами, а к падающей волне — без штрихов, (как показано на рис. 13.5.1 применительно к волновым векторам и соответствующим углам).

*Плоскостью падения* называется плоскость, образованная нормалью к поверхности раздела сред и волновым вектором падающей волны.

Предполагаем, что в диэлектриках нет свободных зарядов и токов проводимости. Поэтому на границе раздела сред выполняются условия непрерывности касательных к поверхности компонент электрического и магнитного полей:

$$(E_1)_t = (E_2)_t, \quad (H_1)_t = (H_2)_t.$$

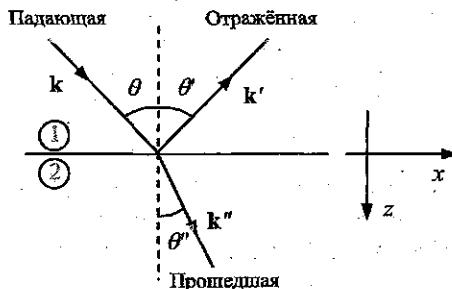


Рис. 13.5.1. Падающая, отражённая и пропущенная волны

Используем для полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  комплексное представление:

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i(kr - \omega t)}, \quad \mathbf{H} = H_0 e^{i(kr - \omega t)}.$$

Запишем условия на границе раздела  $z = 0$ :

$$(E_1)_t = (E_2)_t,$$

или

$$E_{0t} \exp[i(k_x x + k_y y - \omega t)] + E'_{0t} \exp[i(k'_x x + k'_y y - \omega' t)] = \\ = E''_{0t} \exp[i(k''_x x + k''_y y - \omega'' t)].$$

Аналогичное равенство выполняется и для вектора напряжённости магнитного поля.

Это равенство должно выполняться тождественно в любой момент времени и в любой точке  $\{x, y\}$  границы раздела. Следовательно,

$$\omega = \omega' = \omega'', \quad (13.5.1)$$

т.е. частота волны не меняется при отражении и преломлении;

$$k_x = k'_x = k''_x, \quad (13.5.2)$$

$$k_y = k'_y = k''_y. \quad (13.5.3)$$

Пусть плоскость падения волны есть  $\{x, z\}$ . Тогда

$$k_y = k'_y = k''_y = 0.$$

В среде с показателем преломления  $n$  волновое число связано с частотой соотношением  $k = \omega n/c$ . Поскольку

$$k_x = k \sin \theta, \quad k'_x = k' \sin \theta', \quad k''_x = k'' \sin \theta'',$$

то из равенства (13.5.2) следует

$$n_1 \sin \theta = n_2 \sin \theta' = n_2 \sin \theta''.$$

Первое равенство означает

$$\theta = \theta', \quad (13.5.4)$$

т.е. угол падения равен углу отражения.

Другое равенство

$$n_1 \sin \theta = n_2 \sin \theta'' \quad (13.5.5)$$

есть известный закон преломления света — закон Снеллиуса (1621 г.). Если ввести *относительный показатель преломления* среды 2 (по отношению к среде 1)  $n_{21} = n_2/n_1$ , то закон Снеллиуса переписывается в виде

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = n_{21}.$$

### 13.5.2. Эффект полного внутреннего отражения

Пусть среда 1 имеет показатель преломления  $n_1$ , а среда 2 — показатель преломления  $n_2$ , причём  $n_2 < n_1$ . Иными словами, волна, распространяясь в среде 1, попадает на границу раздела со средой 2, являющейся *оптически менее плотной* (рис. 13.5.2).

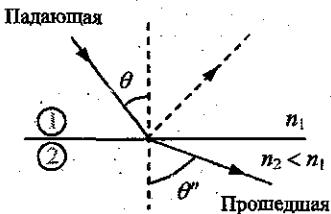


Рис. 13.5.2. Волна падает из оптически более плотной среды 1 на границу со средой 2, являющейся оптически менее плотной

Преломлённая волна направлена под таким углом  $\theta''$  к нормали, что  $n_1 \sin \theta = n_2 \sin \theta''$ . По мере роста угла падения  $\theta$  растёт и угол преломления  $\theta''$ , причём волна сильно отклоняется от нормали к границе раздела сред. Когда угол падения достигает такого значения, что  $n_1 \sin \theta = n_2$ , преломлённая волна «скользит» вдоль границы раздела:  $\theta'' = \pi/2$ . Это означает, что при

$$\theta \geq \theta_{\text{в.о.}} = \arcsin n_{21}, \quad n_{21} = n_2/n_1 < 1,$$

преломлённая волна в среде 2 отсутствует, т.е. падающая волна полностью отражается назад, в среду 1. Иными словами, при падении под углами  $\theta \geq \theta_{\text{в.о.}}$  волна полностью отражается от границы со средой оптически менее плотной.

Угол

$$\theta_{\text{в.о.}} = \arcsin n_{21} \quad (13.5.6)$$

называется углом полного внутреннего отражения.

### 13.5.3. Формулы Френеля

Электромагнитная волна, распространяющаяся в изотропном пространстве<sup>1</sup>, свободном от токов и зарядов, является поперечной:

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{k}, \quad \mathbf{H} \perp \mathbf{k}, \quad \mathbf{E} \perp \mathbf{H}.$$

При наличии границы раздела сред в зависимости от ориентации вектора  $\mathbf{E}$  по отношению к плоскости падения волны различают два типа поляризации (рис. 13.5.3):

1) *s*-поляризация, когда вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен плоскости падения,

2) *p*-поляризация, когда вектор  $\mathbf{E}$  лежит в плоскости падения.

В первом случае при всех углах падения вектор  $\mathbf{E}$  остаётся параллельным границе раздела сред, а во втором случае угол между вектором  $\mathbf{E}$  и границей раздела меняется.

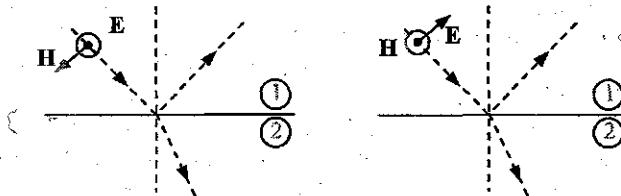


Рис. 13.5.3. Векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в падающей волне: слева - - *s*-поляризованная волна, справа - - *p*-поляризованная волна

*Формулы Френеля* устанавливают соотношения между амплитудами падающей, отражённой и преломлённой волн в зависимости от угла падения и поляризации падающей волны.

Введём амплитудные коэффициенты отражения ( $r$ ) и прохождения ( $d$ ) волны:

<sup>1</sup> Распространение волн в анизотропных средах рассмотрено в Приложении 1.

$$r = \frac{E'_0}{E_0}, \quad d = \frac{E''_0}{E_0}, \quad (13.5.7)$$

где  $E_0$ ,  $E'_0$  и  $E''_0$  — амплитуды соответственно падающей (исходной), отражённой и преломлённой (прошедшей через границу раздела) волн.

### *s*-поляризованная волна

Выберем условно направление вектора напряжённости электрического поля «нам навстречу» во всех трёх волнах — падающей, отражённой и прошедшей (рис. 13.5.4 слева). Вектор напряжённости магнитного поля  $\mathbf{H}$  лежит в плоскости рисунка, а его направление определяется правилом винта, показанным на рис. 13.5.4 справа.

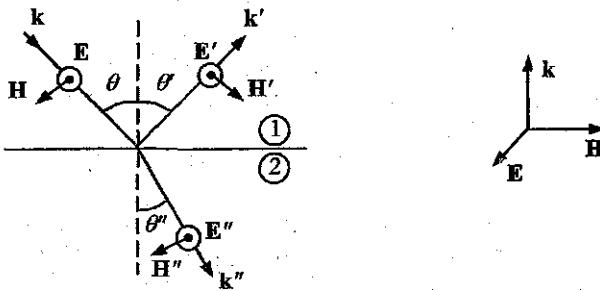


Рис. 13.5.4. Слева — отражение и преломление *s*-поляризованной волны на границе раздела двух диэлектриков: вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен плоскости рисунка, а вектор  $\mathbf{H}$  лежит в плоскости рисунка; справа — правая тройка векторов  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{k}\}$

На границе раздела диэлектриков 1 и 2 выполняются условия непрерывности касательных к границе компонент напряжённостей полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . С учётом направлений векторов, указанных на рис. 13.5.5, имеем

$$\begin{aligned} E_0 + E'_0 &= E''_0, \\ -H_0 \cos \theta + H'_0 \cos \theta' &= -H''_0 \cos \theta''. \end{aligned} \quad (13.5.8)$$

Ограничиваясь случаем немагнитных сред, т.е. сред с  $\mu = 1$ , используем связь амплитуд электрического и магнитного полей плоских волн:

$$n_1 E_0 = H_0, \quad n_1 E'_0 = H'_0, \quad n_2 E''_0 = H''_0. \quad (13.5.9)$$

Подставив эти соотношения в (13.5.8), получим систему двух линейных уравнений для амплитуд отражённой и прошедшей волн:

$$\begin{aligned} E_0 + E'_0 &= E''_0, \\ -n_1 E_0 \cos \theta + n_1 E'_0 \cos \theta' &= -n_2 E''_0 \cos \theta''. \end{aligned} \quad (13.5.10)$$

Разделив почленно уравнения (13.5.10) на  $E_0$  и воспользовавшись определениями амплитудных коэффициентов отражения и прохождения (13.5.7), получим следующую систему уравнений:

$$1+r=d,$$

$$-n_1 \cos \theta + n_1 r \cos \theta' = -n_2 d \cos \theta''.$$

Учитывая законы отражения-преломления

$$\theta = \theta', \quad \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \theta}{\sin \theta''}, \quad (13.5.11)$$

перепишем систему уравнений для  $r$  и  $d$  в виде

$$1+r=d,$$

$$1-r=d \frac{\sin \theta \cos \theta''}{\sin \theta'' \cos \theta}.$$

Эта система уравнений имеет следующее решение:

$$r_{\perp} = -\frac{\sin(\theta - \theta'')}{\sin(\theta + \theta'')}, \quad d_{\perp} = \frac{2 \sin \theta'' \cos \theta}{\sin(\theta + \theta'')}. \quad (13.5.12)$$

Здесь индекс « $\perp$ » указывает на  $s$ -поляризацию падающей волны, когда вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен плоскости падения.

Формулу (13.5.12) можно переписать в ином виде, если исключить угол преломления  $\theta''$  с помощью закона Снеллиуса  $n_1 \sin \theta = n_2 \sin \theta''$  и ввести относительный показатель преломления  $n_{21} = n_2 / n_1$ :

$$r_{\perp} = \frac{\cos \theta - \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta}}, \quad (13.5.13)$$

$$d_{\perp} = \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta}}.$$

### *p*-поляризованные волны

В этом случае плоскости падения перпендикулярен вектор напряжённости магнитного поля  $\mathbf{H}$ . Примем условно, что векторы напряжённости электрического поля во всех волнах лежат в плоскости рисунка и направлены вправо, как показано на рис. 13.5.5 слева. Направление же вектора  $\mathbf{H}$  определяется правилом буравчика (рис. 13.5.5 справа), так что в падающей и преломлённой волнах вектор  $\mathbf{H}$  направлен «на нас», а в отражённой волне — «от нас».

Условия непрерывности  $(E_1)_t = (E_2)_t$ ,  $(H_1)_t = (H_2)_t$  теперь записываются в виде

$$E_0 \cos \theta + E'_0 \cos \theta' = E''_0 \cos \theta'',$$

$$H_0 - H'_0 = H''_0.$$

Исключив отсюда магнитное поле с помощью соотношений (13.5.9), получим

$$E_0 \cos \theta + E'_0 \cos \theta' = E''_0 \cos \theta'',$$

$$n_1 E_0 - n_1 E'_0 = n_2 E''_0.$$

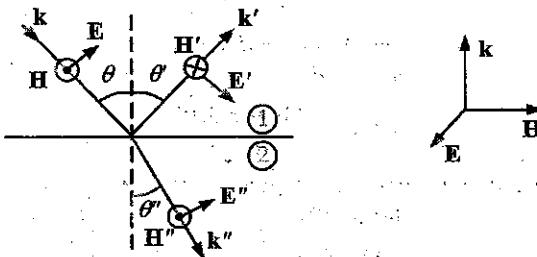


Рис. 13.5.5. Слева — отражение и преломление *p*-поляризованной волны на границе раздела двух диэлектриков: вектор **H** перпендикулярен плоскости рисунка, а вектор **E** лежит в плоскости рисунка; справа — правая тройка векторов  $\{E, H, k\}$

Вводя амплитудные коэффициенты отражения и прохождения (13.5.7), перепишем эту систему в виде

$$1+r = \frac{\cos \theta''}{\cos \theta} d, \quad 1-r = \frac{\sin \theta}{\sin \theta''} d.$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$r_{||} = -\frac{\operatorname{tg}(\theta - \theta'')}{\operatorname{tg}(\theta + \theta'')}, \quad d_{||} = \frac{4 \sin \theta'' \cos \theta}{\sin 2\theta + \sin 2\theta''}. \quad (13.5.14)$$

Здесь индекс «||» указывает на *p*-поляризацию, когда вектор **E** параллелен плоскости падения волны.

Исключив угол преломления  $\theta''$  с помощью закона Снеллиуса и введя относительный показатель преломления  $n_{21} = n_2/n_1$ , перепишем (13.5.14) в ином виде:

$$r_{||} = \frac{n_{21}^2 \cos \theta - \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta}}{n_{21}^2 \cos \theta + \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta}}, \quad d_{||} = \frac{2 n_{21} \cos \theta}{n_{21}^2 \cos \theta + \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta}}. \quad (13.5.15)$$

Соотношения (13.5.12) — (13.5.15) определяют амплитуды отражённой и преломлённой волн для двух случаев поляризации. В общем случае волну можно представить в виде суперпозиции *s*-поляризованной и *p*-поляризованной компонент и для каждой из компонент следует использовать соответствующие формулы Френеля.

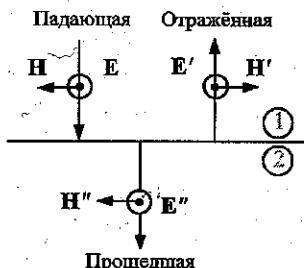
Заметим, что при скользящем падении волны, т.е. при  $\theta \rightarrow \pi/2$ , из формул Френеля следует, что независимо от поляризации  $d \rightarrow 0$ . Это значит, что волна практически полностью остаётся в первой среде. Кроме того, в этом пределе  $r_{\perp} \rightarrow -1$ ,  $r_{\parallel} \rightarrow 1$ .

### 13.5.4. Случай нормального падения волны на границу раздела сред

В этом частном случае исчезает различие между поляризациями волны, поскольку оба вектора —  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — параллельны границе раздела сред (рис. 13.5.6). Границные условия в соответствии с рис. 13.5.6 принимают вид

$$E_0 + E'_0 = E''_0, \quad -H_0 + H'_0 = -H''_0.$$

Рис. 13.5.6. Отражение и прохождение через границу раздела сред волны, падающей по нормали к границе



Полагая  $H_0 = n_1 E_0$ ,  $H'_0 = n_1 E'_0$ ,  $H''_0 = n_2 E''_0$  и вводя амплитудные коэффициенты отражения и прохождения, имеем

$$1+r=d, \quad n_1(1-r)=n_2d,$$

откуда следует

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1 - n_{21}}{1 + n_{21}}, \quad d = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = \frac{2}{1 + n_{21}}. \quad (13.5.16)$$

Эти же формулы можно получить и из общих формул Френеля, положив в них  $\theta = \theta'' = 0$ .

### 13.5.5. Коэффициенты отражения и прохождения по энергии

Выберем малый объём  $V$ , ограничивающий элемент границы раздела сред площадью  $d\Pi$  (рис. 13.5.7).

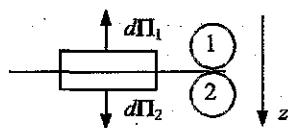


Рис. 13.5.7. Малый объём, ограничивающий элемент границы раздела сред площадью  $d\Pi = |d\Pi_1| = |d\Pi_2|$

Запишем для этого объёма закон сохранения энергии для электромагнитного поля (без учёта джоулевых потерь):

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} S = 0 \text{ или } \int \frac{\partial w}{\partial t} dV = - \oint_S S d\Pi,$$

где  $\Pi(V)$  — замкнутая поверхность, окружающая объём  $V$ ,  $w$  — плотность электромагнитной энергии,  $S$  — вектор Пойнтинга. Устремляя объём  $V$  к нулю, получаем условие непрерывности компоненты вектора  $S$ , нормальной к границе раздела сред  $S_1 d\Pi_1 + S_2 d\Pi_2 = 0$  или, ввиду равенства  $d\Pi_1 = -d\Pi_2$ ,

$$S_{1z} = S_{2z}.$$

Аналогичное равенство справедливо и для интенсивности излучения как усреднённого значения вектора Пойнтинга по периоду колебаний:

$$I_{1z} = I_{2z}$$

(на рисунке нормаль к границе совпадает с осью  $z$ ). Имея в виду это соотношение, можно ввести коэффициенты отражения и прохождения по энергии (по интенсивности):

$$R = \frac{(I_{\text{отр}})_z}{(I_{\text{пад}})_z}, \quad D = \frac{(I_{\text{проп}})_z}{(I_{\text{пад}})_z}, \quad (13.5.17)$$

где  $(I_{\text{пад}})_z$ ,  $(I_{\text{отр}})_z$  и  $(I_{\text{проп}})_z$  — соответственно компоненты интенсивности падающей, отражённой и прошедшей волн, нормальные к границе раздела.

Найдём связь введённых коэффициентов отражения и прохождения с соответствующими амплитудными коэффициентами. В соответствии с определением вектора Пойнтинга

$$I_z = \bar{S}_z = \frac{c}{4\pi} n E^2 \cos \theta, \quad (13.5.18)$$

где  $\theta$  — угол между вектором  $\bar{S}$  и осью  $z$ ,  $n$  — показатель преломления соответствующей среды. Следовательно, получаем

$$\begin{aligned} R &= \frac{n_1 E_0'^2 \cos \theta'}{n_1 E_0^2 \cos \theta} = r^2, \\ D &= \frac{n_2 E_0''^2 \cos \theta''}{n_1 E_0^2 \cos \theta} = \frac{n_2 \cos \theta''}{n_1 \cos \theta} d^2. \end{aligned} \quad (13.5.19)$$

Для этих коэффициентов выполняется соотношение

$$R + D = 1,$$

выражающее закон сохранения энергии

$$(I_{\text{пад}})_z = (I_{\text{отр}})_z + (I_{\text{проп}})_z.$$

Приведём выражения для коэффициентов  $R$  и  $D$  для случая нормального падения излучения. Поскольку в этих условиях соответствующие амплитудные коэффициенты равны (см. (13.5.16))

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad d = \frac{2n_1}{n_1 + n_2},$$

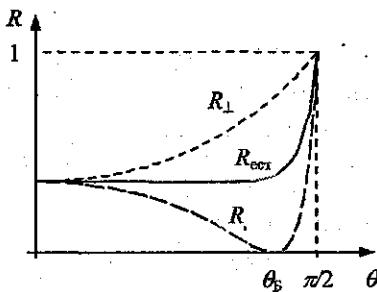
то

$$R = r^2 = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2, \quad D = \frac{n_2}{n_1} d^2 = \frac{2n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}. \quad (13.5.20)$$

Для этих коэффициентов очевидно свойство  $R + D = 1$ .

На рис. 13.5.8 показана угловая зависимость коэффициента отражения  $R(\theta)$  для  $s$ -поляризованного ( $R_s$ ) и  $p$ -поляризованного ( $R_p$ ) излучения.

Рис. 13.5.8. Угловые зависимости коэффициентов отражения для излучения с  $s$ - и  $p$ -поляризацией, а также для естественного (неполяризованного) излучения



Естественный свет является неполяризованным. Это значит, что *s*- и *p*-поляризованные компоненты присутствуют в нём с равным весом:  $I_s = I_p = I/2$ , где  $I$  — полная интенсивность. Интенсивность отражённого света можно записать в виде

$$I_{\text{отр}} = R_\perp I_\perp + R_\parallel I_\parallel = \frac{1}{2} (R_\perp + R_\parallel) I.$$

Обозначая  $I_{\text{отр}} = R_{\text{ест}} I$ , получаем коэффициент отражения для естественного света:

$$R_{\text{ест}} = \frac{1}{2} (R_\perp + R_\parallel). \quad (13.5.21)$$

Угловая зависимость  $R_{\text{ест}}(\theta)$  показана на рис. 13.5.8.

### 13.5.6. Угол Брюстера

Рассмотрим *p*-поляризованную волну. Как видно из графика на рис. 13.5.8, существует такой угол  $\theta = \theta_B$ , что волна, падающая под этим углом на поверхность, не отражается обратно. Величина  $\theta_B$  называется углом *Брюстера*. Поскольку для *s*-поляризованной волны  $R(\theta_B) \neq 0$ , то естественный свет, падающий под углом Брюстера, отражается уже полностью поляризованным (остаётся только *s*-поляризованная компонента). Поэтому угол Брюстера называют иногда углом *полной поляризации*.

Найдём угол Брюстера. Как следует из формулы (13.5.15), коэффициент отражения  $r_\parallel$  обращается в нуль, если  $\operatorname{tg}(\theta + \theta'') = \infty$ , т.е. если  $\theta + \theta'' = \pi/2$ . Воспользуемся законом Снеллиуса  $n_1 \sin \theta = n_2 \sin \theta''$ . Полагая здесь  $\theta'' = \pi/2 - \theta$ , получаем  $n_1 \sin \theta = n_2 \cos \theta$ , откуда находим

$$\operatorname{tg} \theta_B = n_2 / n_1. \quad (13.5.22)$$

В частном случае падения волны из вакуума  $n_1 = 1$  на среду с показателем преломления  $n_2 = n$  оказывается  $\operatorname{tg} \theta_B = n$ .

Наличие угла Брюстера может проявляться и в угловой зависимости коэффициента отражения естественного света: если коэффициент отражения света при нормальном падении достаточно велик, то в области углов, близких к  $\theta_B$ , наблюдается уменьшение суммарного коэффициента отражения  $R_{\text{ест}}$ .

### 13.5.7. Коэффициенты отражения и прохождения при углах, равных углу полного внутреннего отражения

Пусть излучение из среды 1 оптически более плотной падает на среду 2 оптически менее плотную,

$$n_1 > n_2.$$

В этом случае при углах падения  $\theta \geq \theta_{\text{в.о.}} = \arcsin(n_2/n_1)$  наблюдается полное внутреннее отражение.

Заметим, что эффект Брюстера наблюдается независимо от того, от какой среды происходит отражение — от оптически более плотной или менее плотной, поскольку

$$\theta_{\text{в.о.}} = \arcsin(n_2/n_1) > \theta_B = \arctg(n_2/n_1).$$

Когда угол падения достигает значения  $\theta = \theta_{\text{в.о.}}$ , то окажется  $\theta'' = \pi/2$ ,  $\cos \theta'' = 0$ . Поэтому вследствие наличия множителя  $\cos \theta''$  в формуле

$$D = \frac{n_2 \cos \theta''}{n_1 \cos \theta} d^2$$

коэффициенты прохождения для обоих типов поляризации обращаются в нуль:

$$D_{\perp}(\theta_{\text{в.о.}}) = 0, D_{\parallel}(\theta_{\text{в.о.}}) = 0.$$

При этом вследствие закона сохранения  $R + D = 1$  оказывается

$$R_{\perp}(\theta_{\text{в.о.}}) = 1, R_{\parallel}(\theta_{\text{в.о.}}) = 1.$$

Для углов падения  $\theta > \theta_{\text{в.о.}}$  следует полагать  $R = 1$ ,  $D = 0$ .

Заметим, что при  $\theta = \theta_{\text{в.о.}}$  амплитудные коэффициенты отражения и прохождения принимают значения

$$r_{\perp}(\theta_{\text{в.о.}}) = 1, d_{\perp}(\theta_{\text{в.о.}}) = 2,$$

$$r_{\parallel}(\theta_{\text{в.о.}}) = 1, d_{\parallel}(\theta_{\text{в.о.}}) = \frac{2n_1}{n_2}.$$

И хотя амплитудные коэффициенты прохождения отличны от нуля,  $d_{\parallel}(\theta_{\text{в.о.}}) \neq 0$ ,  $d_{\perp}(\theta_{\text{в.о.}}) \neq 0$ , потока энергии через границу раздела нет,  $D = 0$ .

Следует, однако, иметь в виду, что сказанное справедливо, только если среда 2 занимает полупространство  $z > 0$ . Если же толщина слоя, занимаемого средой 2, конечна, то коэффициент прохождения  $D$  может оказаться ненулевым и при  $\theta > \theta_{\text{в.о.}}$ .

### 13.5.8. Однородные и неоднородные волны

Если волна падает из среды 1 на границу раздела со средой 2 под углом, превышающим угол полного внутреннего отражения, то она полностью отражается назад. Вместе с тем излучение частично проникает в среду 2. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Как было сказано, на границе раздела сред (рис. 13.5.9) выполняются условия для волновых векторов падающей и прошедшей волн:

$$k_x = k''_x \Rightarrow k \sin \theta = k'' \sin \theta''.$$

Длина волнового вектора связана с частотой известным соотношением

$$k = k_0 n_1, \quad k'' = k_0 n_2, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}.$$

Это позволяет найти  $z$ -компоненту волнового вектора в среде 2:

$$k_z''^2 = k''^2 - k_x''^2 = k''^2 - k_x^2 = k_0^2 (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta). \quad (3.5.23)$$

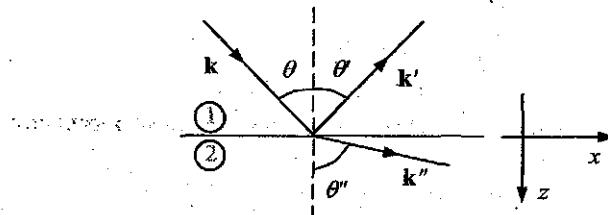


Рис. 13.5.9. Волна падает из среды 1 на среду 2 с меньшим показателем преломления ( $n_2 < n_1$ ). Показан случай, отвечающий углу падения  $\theta < \theta_{kp}$

Если  $\sin \theta < n_2/n_1$  или  $\theta < \theta_{bo}$ , то  $k_z''^2 > 0$ , что отвечает обычному распространению плоской волны в среде. При этом амплитуда волны остаётся неизменной (в пределах одной среды). Такие волны называются *однородными*.

Если же угол падения такой, что

$$\sin \theta \geq n_2/n_1 \text{ или } \theta \geq \theta_{bo},$$

то окажется  $k_z''^2 \leq 0$ . Положим  $k_z''^2 = -\alpha^2$  или

$$\alpha = \sqrt{-k_z''^2} = k_0 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta - n_2^2}. \quad (3.5.24)$$

Тогда волна в среде 2 принимает вид

$$E'' = E_0'' \exp(ik''_x x + ik''_z z - i\omega t) = E_0'' \exp(ik_x x - i\omega t) e^{-\alpha z}.$$

Амплитуда этой волны убывает экспоненциально по мере удаления от границы раздела сред. Такого типа волны называются *неоднородными*.

Как правило, их следует учитывать только на малых расстояниях от места их возникновения.

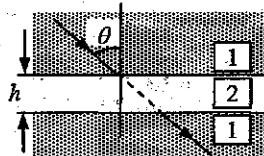
Вместе с тем неоднородные волны могут играть существенную роль. В качестве примера рассмотрим систему, состоящую из вещества 1 (с показателем преломления  $n_1$ ), разделённого слоем вещества 2 (с показателем преломления  $n_2$ ) толщины  $h$ , причём  $n_1 > n_2$  (рис. 13.5.10).

Пусть волна падает из среды 1 на границу раздела со средой 2. Если угол падения превышает критический,  $\theta > \theta_{\text{кр}}$ , то должен наблюдаться эффект полного внутреннего отражения. Однако, если толщина слоя среды 2 не очень велика, то благодаря неоднородным волнам излучение может частично проникнуть в нижний слой вещества, преодолев «запрещённую» полосу. Интенсивность излучения, преодолевшего слой 2, убывает с ростом толщины слоя как

$$I \sim \exp(-2\alpha h), \quad \alpha = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta - n_2^2}, \quad (13.5.25)$$

где  $\lambda_0 = 2\pi/k_0 = 2\pi c/\omega$  — длина волны излучения в вакууме.

Рис. 13.5.10. Излучение падает на границу раздела сред 1 и 2 под углом, превышающим угол полного внутреннего отражения, но проникает из верхнего слоя в нижний через «запрещённый» слой 2 толщины  $h$ .



Переход света через «запрещённый» слой вещества наблюдал ещё И. Ньютона. Непосредственно же проникновение излучения в среду с меньшим показателем преломления в условиях полного внутреннего отражения исследовано в опытах Л.И. Мандельштама в 1914 г. Для обнаружения излучения в «запрещённой» области в качестве среды 2 использовалось флуоресцентное вещество, реагирующее на излучение. Таким путём удалось измерить глубину проникновения света в «запрещённую» область.

## 13.6. Поверхностные волны

### 13.6.1. Поверхностные электромагнитные волны

Поверхностными электромагнитными волнами (ПЭВ) называются волны, распространяющиеся вдоль границы раздела двух сред. Это вол-

ны оптического диапазона, которые создаются на границе раздела металл–диэлектрик. Поля, переносимые этими волнами, локализованы вблизи поверхности, затухая в обе стороны от поверхности.

Интерес к поверхностным волнам возник в 1970-х годах после того как их научились эффективно возбуждать с помощью лазерного излучения. Оказалось, что благодаря их локализации вблизи поверхности возможно значительное усиление напряжённости поля. Поверхностные волны, возбуждаясь светом на поверхностях, могут существенно влиять на различные процессы: рассеяние и поглощение света, формирование неоднородных поверхностных структур (без изменения свойств вещества в объёме). Поверхностные волны могут применяться в спектроскопии, микроскопии сверхвысокого разрешения, для измерения малых коэффициентов поглощения материалов, в технологиях, литографии<sup>1</sup>.

Поверхностные волны создаются в каком-либо месте поверхности металла, а затем начинают свободно распространяться. Дальность распространения ПЭВ ограничивается только различными потерями энергии и может составлять несколько сантиметров.

Поверхностная волна, в отличие от обычной, не является чисто электромагнитной. В её формировании участвует механическое движение зарядов среды. Вследствие этого длина такой волны отличается от длины чисто электромагнитной в той же среде. Такого типа механоэлектромагнитные возбуждения среды называют *поверхностными поляритонами*. Если возбуждения связаны с коллективными (плазменными) колебаниями электронов, то они называются *поверхностными плазмон-поляритонами*.

Поверхностные волны могут возбуждаться на границе раздела металл–диэлектрик, играющей роль волновода. Пусть среда 1 — диэлектрик, а среда 2 — металл (рис. 13.6.1). Направим ось  $z$  перпендикулярно поверхности из среды 1 в среду 2, причём границе раздела отвечает координата  $z = 0$ . Кроме того, пусть ось  $x$  параллельна поверхности и ориентирована по направлению распространения волны. Тогда поле  $A(x, z, t)$ , характеризующее волну, можно записать в виде

$$\begin{aligned} A &= A_0 e^{-\kappa_1 z} \exp[i(k_s x - \omega t)], \quad z > 0, \\ A &= A_0 e^{\kappa_2 z} \exp[i(k_s x - \omega t)], \quad z < 0. \end{aligned} \tag{13.6.1}$$

<sup>1</sup> Литография — это способ печати, основанный на том, что в результате специальной обработки печатной формы краска к ней пристаёт только в требуемых местах. После этого краска (рисунок) переносится на бумагу просто прижатием бумаги к печатной форме.

Здесь под символом  $A$  надо понимать напряжённость электрического или магнитного полей.

Важным свойством поверхностных волн является то, что они не поперечные, причём в обозначениях рис. 13.6.1.

$$E_x \neq 0, H_x = 0, H_y \neq 0. \quad (13.6.2)$$

Иначе говоря, ПЭВ — это  $TM$ -волна, или  $E$ -волна (по терминологии, использовавшейся в задаче о волноводах). Можно показать, что поверхностных  $TE$ -волн не существует.

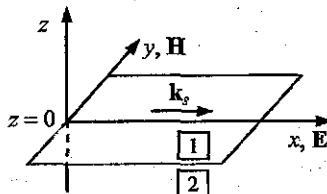


Рис. 13.6.1. Распространение поверхностной волны вдоль границы раздела сред 1 (диэлектрик) и 2 (металл). Указана ориентация полей  $E$  и  $H$  в ПЭВ по отношению к направлению распространения волны  $k_s$ .

Оказывается, необходимым условием существования поверхностных волн является требование

$$\epsilon_2 < 0. \quad (13.6.3)$$

Среда с такой диэлектрической проницаемостью называется *поверхностно-активной средой* (ПАС).

### 13.6.2. Распространение ПЭВ

Рассмотрим подробнее распространение ПЭВ. Эта волна описывается уравнениями Максвелла, дополненными условиями на границе раздела сред:

$$H_t^{(1)} = H_t^{(2)}, \quad E_t^{(1)} = E_t^{(2)} \quad (13.6.4)$$

(верхний индекс у поля обозначает номер среды). Будем считать, что поле  $H$  направлено вдоль оси  $y$ , а поле  $E$  — вдоль оси  $x$  (рис. 13.6.1).

Пусть частота временных колебаний волны равна  $\omega$ . Тогда в средах 1 и 2 поле описывается уравнениями Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_i \mathbf{H} = 0, \quad (13.6.5)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_i \mathbf{E} = 0.$$

Здесь  $\epsilon_i$  — диэлектрическая проницаемость среды  $i$  ( $i=1$  — диэлектрик,  $i=2$  — металл).

Запишем выражение для магнитного поля волны, бегущей вдоль оси  $x$  и затухающей вдоль оси  $z$ :

$$\begin{aligned} H_y^{(1)}(x, z, t) &= H_{10} e^{-\kappa_1 z} e^{ik_s x}, \quad z > 0, \\ H_y^{(2)}(x, z, t) &= H_{20} e^{\kappa_2 z} e^{ik_s x}, \quad z < 0. \end{aligned} \quad (13.6.6)$$

Подстановка этих выражений в первое уравнение (13.6.5) даёт

$$-k_s^2 + \kappa_1^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 = 0, \quad -k_s^2 + \kappa_2^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_2 = 0$$

или

$$\kappa_1 = \sqrt{k_s^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1}, \quad \kappa_2 = \sqrt{k_s^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_2}. \quad (13.6.7)$$

Первое граничное условие в (13.6.4) даёт

$$H_{10} = H_{20} \equiv H_0.$$

Чтобы воспользоваться вторым граничным условием в (13.6.4), заметим, что поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  связаны уравнениями Максвелла. Используем уравнение  $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  или, поскольку временная зависимость поля передаётся формулой  $\mathbf{E} \sim e^{-i\omega t}$ , уравнением

$$\text{rot } \mathbf{H} = -\frac{i\omega\epsilon}{c} \mathbf{E}. \quad (13.6.8)$$

В рассматриваемых условиях левая часть этого равенства имеет вид

$$\text{rot } \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} \frac{\partial H_y}{\partial z} + \mathbf{k} \frac{\partial H_y}{\partial x}.$$

Следовательно, уравнение (13.6.8) сводится к двум скалярным уравнениям:

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{i\omega\epsilon}{c} E_x, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = -\frac{i\omega\epsilon}{c} E_z. \quad (13.6.9)$$

Воспользуемся теперь вторым граничным условием в (13.6.4). Это даёт

$$E_x^{(1)} \Big|_{z=0} = E_x^{(2)} \Big|_{z=0},$$

или, с учётом (13.6.9),

$$\left. \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial H_y^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial H_y^{(2)}}{\partial z} \right|_{z=0}. \quad (13.6.10)$$

Подставляя сюда выражения (13.6.6), получаем

$$-\frac{\kappa_1}{\varepsilon_1} = \frac{\kappa_2}{\varepsilon_2}. \quad (13.6.11)$$

Для выполнимости этого равенства необходимо условие

$$\varepsilon_1/\varepsilon_2 < 0. \quad (13.6.12)$$

Мы предполагаем, что

$$\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 < 0. \quad (13.6.13)$$

Ещё одно условие вытекает из равенств (13.6.7), (13.6.11):

$$\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \sqrt{\frac{k_s^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1}{k_s^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2}} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_1^2} \left( k_s^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \right) = \frac{1}{\varepsilon_2^2} \left( k_s^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 \right).$$

Элементарные преобразования приводят к равенству

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_s^2 \left( \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right). \quad (13.6.14)$$

Это значит, что второе необходимое условие существования поверхностных волн состоит в том, что  $\omega^2 > 0$ , или

$$|\varepsilon_2| > \varepsilon_1. \quad (13.6.15)$$

Соотношение (13.6.14) связывает частоту и волновой вектор поверхности волны. Отсюда можно также найти фазовую скорость этой волны:

$$v_s = \frac{\omega}{k_s} = c \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}}. \quad (13.6.16)$$

Видно, что эта скорость меньше скорости обычной электромагнитной волны в среде 1, равной  $v_1 = c/\sqrt{\varepsilon_1}$ ; в среде 2 волна вообще не может распространяться, поскольку  $\varepsilon_2 < 0$ .

Заметим, что волновое число ПЭВ равно

$$k_s = k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}. \quad (13.6.17)$$

Соответственно длина поверхностной волны в направлении её распространения равна

$$\lambda_s = \frac{2\pi}{k_s} = \lambda_0 \sqrt{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2}}, \quad \lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega} \quad (13.6.18)$$

и, как видно, оказывается меньше длины электромагнитной волны в диэлектрике  $\lambda_l = \lambda_0 / \sqrt{\epsilon_1}$ .

Из формул (13.6.7) и (13.6.14) находим коэффициенты затухания полей по обе стороны от поверхности:

$$\kappa_1 = k_s \sqrt{-\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}, \quad \kappa_2 = k_s \sqrt{-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \quad (13.6.19)$$

### 13.6.3. Электрическое поле ПЭВ

Как видно из (13.6.9), электрическое поле поверхностной волны имеет составляющую, перпендикулярную границе раздела сред:

$$E_z = i \frac{c}{\omega \epsilon} \frac{\partial H_y}{\partial x} = \begin{cases} E_{z0}^{(1)} e^{-\kappa_1 z} e^{ik_s x}, & z > 0, \\ E_{z0}^{(2)} e^{\kappa_2 z} e^{ik_s x}, & z < 0. \end{cases}$$

Здесь

$$\begin{aligned} E_{z0}^{(1)} &= H_0 \frac{ck_s}{\omega \epsilon_1} = -H_0 \sqrt{\frac{|\epsilon_2|}{\epsilon_1(|\epsilon_2| - \epsilon_1)}}, \\ E_{z0}^{(2)} &= H_0 \frac{ck_s}{\omega \epsilon_2} = H_0 \sqrt{\frac{\epsilon_1}{|\epsilon_2|(|\epsilon_2| - \epsilon_1)}}. \end{aligned} \quad (13.6.20)$$

Поскольку  $|\epsilon_2| > \epsilon_1$ , то в диэлектрике амплитуда колебаний волны  $E_z$  больше, чем в металле.

Согласно (13.6.20) на границе раздела сред нормальная компонента электрического поля испытывает скачок

$$\Delta E_z = E_z^{(1)} - E_z^{(2)} = -H_0 \sqrt{\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\epsilon_1 \epsilon_2}} e^{i(k_s x - \omega t)} \quad (13.6.21)$$

(здесь явно выписаны координатная и временная зависимости поля). Это значит, что присутствуют поверхностные заряды с плотностью

$$\sigma = \Delta E_z / 4\pi, \quad (13.6.22)$$

причём формируется бегущая волна плотности. Возникающая картина силовых линий электрического поля показана на рис. 13.6.2.

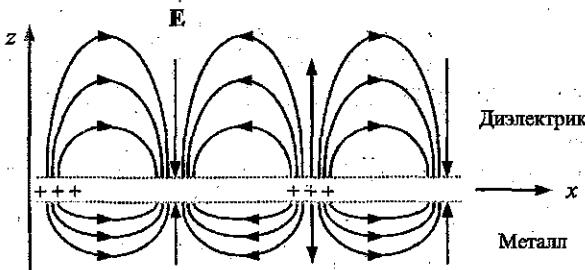


Рис. 13.6.2. Силовые линии электрического поля вблизи границы раздела диэлектрик — металл в некоторый момент времени

Диэлектрическая проницаемость металлов  $\epsilon_m$  формируется электронным газом. Если частота электронных столкновений не слишком велика, то имеет место формула<sup>1</sup>

$$\epsilon_m = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}}, \quad (13.6.23)$$

где  $n$  — концентрация электронов проводимости в металле,  $m$  — их эффективная масса. Типичные значения плазменной частоты в металлах составляют  $\omega_p \sim 10^{16} \text{ с}^{-1}$ . Поэтому для частот оптического диапазона ( $\omega \sim 10^{14} - 10^{15} \text{ с}^{-1}$ ) оказывается  $\epsilon_m < 0$ ,  $|\epsilon_m| \gg 1$ . Считая, что металл контактирует со средой с  $\epsilon_1 = \epsilon_b \approx 1$  (с воздухом), из приведенных формул находим

$$k_s \approx \omega/c \equiv k_0. \quad (13.6.24)$$

Это значит, что волновое число и длина волны ПЭВ мало отличаются по величине от таковых значений для обычной электромагнитной волны над металлом.

Согласно (13.6.19), (13.6.23) коэффициенты затухания ПЭВ по обе стороны от поверхности металла равны

$$\kappa_2 = k_0 \frac{\omega_p}{\omega} = \frac{\omega_p}{c}, \quad \kappa_1 \approx k_0 \frac{\omega}{\omega_p} = \kappa_2 \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^2.$$

Глубина, на которую проникает ПЭВ в металл, составляет

<sup>1</sup> Эта формула будет получена в разделе 14.2.2.

$$\Lambda_2 = \frac{1}{\kappa_2} = \frac{c}{\omega_p} = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi ne^2}}. \quad (13.6.25)$$

Для типичных хороших проводников эта величина составляет  $\Lambda_2 \sim 10^{-2}$  мкм.

Расстояние, на которое ПЭВ проникает в воздух, составляет

$$\Lambda_1 = \frac{1}{\kappa_1} = \Lambda_2 \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2. \quad (13.6.26)$$

Для типичных частот оптического диапазона волн эта величина оказывается порядка  $\Lambda_1 \sim 1-100$  мкм.

#### *13.6.4. Возбуждение поверхностных волн*

Остановимся кратко на методах возбуждения поверхностных электромагнитных волн. Проблема в том, что волновое число ПЭВ  $k_s$  больше волнового числа света  $k_0$  на той же частоте. Поэтому применяют специальные методы согласования.

Одним из них является *решёточный метод*, основанный на дифракционном возбуждении ПЭВ. В этом методе на поверхность металла наносится периодический рельеф, обладающий свойствами дифракционной решётки. Тогда при некоторых углах падения возбуждающего света возникает дифрагированная волна, направленная вдоль поверхности и возбуждающая поверхностную волну. Данный метод проиллюстрирован на рис. 13.6.3.

Другой метод проиллюстрирован на рис. 13.6.4. Это так называемый *призменный метод*. Таким способом возбуждают ПЭВ на гладкой поверхности, поскольку удается согласовать волновые векторы падающей и поверхностной волн.

Суть призменного метода (в одной из реализаций) состоит в следующем. Тонкая металлическая плёнка 1 наносится на основание диэлектрической призмы 2. *P*-поляризованное излучение (луч 3), пройдя через призму, падает на основание под углом  $\theta$ , превышающим угол полного внутреннего отражения системы призма (2) – воздух (4) (рис. 13.6.4):

$$\theta > \arcsin \left( \sqrt{\epsilon_4 / \epsilon_2} \right), \sqrt{\epsilon_4} < \sqrt{\epsilon_2}.$$

Этот выбор угла связан с нарушением эффекта полного внутреннего отражения за счёт возникновения неоднородных волн в металлической плёнке. В результате свет, пройдя систему призма–плёнка, уже не выходит в воздух, а преобразуется в поверхностную волну.

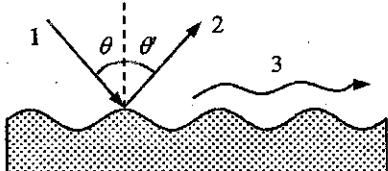


Рис. 13.6.3. Решёточный метод возбуждения ПЭВ. 1 — падающее излучение, 2 — зеркально отражённое излучение, 3 — поверхность волны

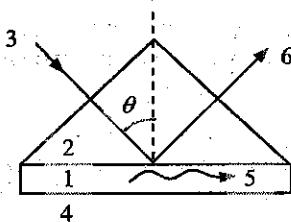


Рис. 13.6.4. Призменный метод возбуждения ПЭВ (схема Кречманна). 1 — поверхности-активная среда (металл), 2 — призма, 3 — падающее излучение, 4 — диэлектрик (воздух), 5 — поверхность волны, 6 — зеркально отражённое излучение

При прохождении излучения через призму волновой вектор волны увеличивается в  $\sqrt{\epsilon_2}$  раз ( $\epsilon_2$  — диэлектрическая проницаемость призмы). Составляющая волнового вектора, параллельная поверхности металла (и основанию призмы), равна

$$k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2} \sin \theta$$

и при определённых углах может оказаться  $k_x = k_s$ . При этом условии интенсивность отражённого излучения (луч 6 на рис. 13.6.4) резко убывает — происходит резонансная перекачка энергии падающего излучения в энергию поверхностной волны. Волна возбуждается на границе раздела металл–воздух (сред 1 и 4 на рис. 13.6.4). При увеличении толщины плёнки эффективность генерации падает вследствие экспоненциального затухания амплитуды поля вглубь металла.

Сейчас удается добиться эффективности преобразования падающего излучения в ПЭВ порядка 1.

## Глава 14. ДИСПЕРСИЯ ВОЛН

### 14.1. Фазовая и групповая скорость

#### 14.1.1. Дисперсия

До сих пор, изучая распространение волн, мы предполагали, что связь волнового числа (вектора) и частоты линейная:

$$\omega = kv, \quad (14.1.1)$$

где величина  $v$  имеет постоянное значение (не зависит от частоты волны  $\omega$ ) и определяется только свойствами среды, в которой распространяется волна. Эта величина, которую мы сейчас обозначим как

$$v_\phi = \omega/k, \quad (14.1.2)$$

называется *фазовой скоростью* волны. Как видно из формулы

$$u(x, t) = a \cos(kx - \omega t) = a \cos[k(x - v_\phi t)], \quad (14.1.3)$$

со скоростью  $v_\phi$  перемещается точка волны, в которой фаза имеет фиксированное значение  $\varphi(x, t) = \omega t - kx = \text{const.}$

В общем случае связь частоты и волнового числа, называемая *законом дисперсии*:

$$\omega = \omega(k), \quad (14.1.4)$$

может быть более сложной. Соответственно фазовая скорость  $v_\phi = \omega/k$  оказывается зависящей от частоты волны, или, что эквивалентно, от длины волны  $\lambda = 2\pi/k$ :  $v_\phi = v_\phi(\lambda)$ .

Зависимость фазовой скорости от длины волны называется *дисперсией*. Среды, в которых имеет место дисперсия, называются *диспергирующими*.

#### 14.1.2. Групповая скорость

Рассмотрим две волны, имеющие частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и соответствующие им волновые векторы  $k_1 = k_1(\omega_1)$  и  $k_2 = k_2(\omega_2)$ . Если фазовые скорости этих волн отличаются друг от друга, то результат сложения

волн в разные моменты времени будет различным. Пусть волны задаются уравнениями

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= a \sin(k_1 x - \omega_1 t), \\ u_2(x, t) &= a \sin(k_2 x - \omega_2 t). \end{aligned} \quad (14.1.5)$$

Суммарное колебание есть сумма

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_1(x, t) + u_2(x, t) = \\ &= 2a \cos\left[\frac{k_2 - k_1}{2}x - \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right] \sin\left[\frac{k_2 + k_1}{2}x - \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right]. \end{aligned} \quad (14.1.6)$$

Пусть волновые числа  $k_1$  и  $k_2$ ,  $k_2 > k_1$ , близки, т.е.  $k_2 - k_1 \ll k_1$ . Тогда, обозначая

$$\begin{aligned} \frac{k_1 + k_2}{2} &= k, & k_2 - k_1 &= \Delta k, \\ \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} &= \omega, & \omega_2 - \omega_1 &\approx \frac{d\omega}{dk} \Delta k, \end{aligned}$$

перепишем (14.1.6) в виде

$$u(x, t) = 2a \cos\left[\frac{\Delta k}{2}\left(x - \frac{d\omega}{dk}t\right)\right] \sin(kx - \omega t). \quad (14.1.7)$$

Полученное выражение аналогично уравнению биений: в каждой фиксированной точке наблюдения колебания имеют вид биений (рис. 14.1.1) с периодом

$$\tau = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|} \approx \frac{2\pi}{\Delta k |d\omega/dk|}. \quad (14.1.8)$$

С другой стороны, фиксируя момент наблюдения, мы видим модулированную волну, у которой амплитуда модуляции дается множителем

$$2a \cos\left[\frac{\Delta k}{2}\left(x - \frac{d\omega}{dk}t\right)\right]. \quad (14.1.9)$$

Рассматривая теперь эволюцию волны во времени, мы наблюдаем неизменный профиль, т.е. огибающую высокочастотных колебаний, если движемся вдоль волны со скоростью

$$v_{tp} = d\omega/dk. \quad (14.1.10)$$

При таком движении множитель (14.1.9) сохраняет постоянное значение. На рис. 14.1.1 показан профиль модулированной волны (14.1.7). Со скоростью  $v_{tp}$  движется огибающая высокочастотных колебаний. Ве-

личина, введенная соотношением (14.1.10), называется *групповой скоростью*.

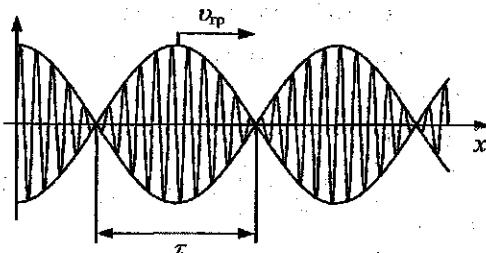


Рис. 14.1.1. Биения как результат сложения бегущих волн с разными частотами в диспергирующей среде

Покажем, что определение групповой скорости (14.1.10) остается справедливым и в том случае, когда складывается произвольное число волн. Для этого рассмотрим суперпозицию волн:

$$u(x, t) = \sum_{k=k_1}^{k_2} a(k) \exp[i(kx - \omega(k)t)], \quad (14.1.11)$$

в которой будем предполагать, что суммирование производится по узкому интервалу волновых чисел:  $k \in [k_1, k_2]$ ,  $k_2 - k_1 \ll k_1$ . Тогда можно разложить  $\omega(k)$  в окрестности среднего значения волнового числа:

$$\omega(k) \approx \omega_0 + (k - k_0) \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_0}, \quad (14.1.12)$$

$$k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad \omega_0 = \omega(k_0).$$

Подставляя (14.1.12) в (14.1.11) и переходя к суммированию по переменной  $q = k - k_1$ , получим

$$u(x, t) = \exp[i(k_0 x - \omega_0 t)] \sum_{q=q_1}^{q_2} a(k_0 + q) \exp[iq(x - v_{tp}t)] = \\ = \exp[i(k_0 x - \omega_0 t)] F(x - v_{tp}t). \quad (14.1.13)$$

Здесь введено обозначение

$$v_{tp} = \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_0}. \quad (14.1.14)$$

Суммирование в (14.1.13) производится по волновым числам  $q$  в диапазоне

$$q \in [q_1, q_2], \quad q_1 = -\Delta k/2, \quad q_2 = \Delta k/2, \quad \Delta k = k_2 - k_1.$$

В силу неравенства  $q \sim \Delta k \ll k_0$  функция  $F(y)$  меняется много медленнее, чем экспонента  $\exp[i(k_0 x - \omega_0 t)]$ . Поэтому суперпозицию волн  $u(x, t)$  можно рассматривать как модулированную волну со средними волновым числом  $k_0$  и частотой  $\omega_0$ , причем амплитуда модуляции дается функцией  $F(x - v_{\text{тр}} t)$ . Скорость движения огибающей есть групповая скорость *цуга волн или волнового пакета*.

В соответствии со сказанным говорят, что цуг волн движется с групповой скоростью, тогда как отдельные волны — с фазовой скоростью.

Волновой пакет может быть локализованным в пространстве. Рассмотрим для примера цуг, образованный группой волн, для которых в (14.1.11)

$$a(k) = (A_0 / \Delta k) dk, \quad k_1 < k < k_2,$$

$$k_1 = k_0 - \Delta k/2, \quad k_2 = k_0 + \Delta k/2.$$

Тогда, выполняя интегрирование, получим

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A_0 \int_{k_1}^{k_2} \exp[i k (x - v_{\text{тр}} t)] \frac{dk}{\Delta k} = \\ &= A_0 \exp[i(k_0 x - \omega t)] \frac{\sin \left[ \frac{\Delta k}{2} (x - v_{\text{тр}} t) \right]}{\frac{\Delta k}{2} (x - v_{\text{тр}} t)}. \end{aligned}$$

Видно, что характерная пространственная ширина волнового пакета определяется из условия  $\frac{\Delta k}{2} (x - v_{\text{тр}} t) \sim \pi$  и составляет

$$\Delta x \sim 2\pi/\Delta k.$$

### 14.1.3. Расплывание волнового пакета

Понятие групповой скорости имеет ограниченную область применимости, поскольку в среде с дисперсией волновой пакет с течением времени не только перемещается, но и, как правило, меняет форму.

Чтобы убедиться в этом, учтём в разложении (14.1.11) слагаемое более высокого порядка:

$$\omega(k) \approx \omega_0 + (k - k_0) \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_0} + \frac{1}{2} (k - k_0)^2 \frac{d^2\omega}{dk^2} \Big|_{k=k_0}. \quad (14.1.15)$$

Добавочный член приводит с течением времени к изменению относительных фаз волн, образующих волновой пакет, на величину  $(t/2)(k - k_0)^2 \left( d^2\omega/dk^2 \right) \Big|_{k=k_0}$ , так что

$$F = \sum_q \exp \left[ iq(x - v_{\text{тр}} t) - i \frac{q^2}{2} \left( \frac{d^2\omega}{dk^2} \right)_0 t \right] \equiv F(x - v_{\text{тр}} t, t)$$

(индекс «0» для краткости означает, что производная берётся при  $k = k_0$ ). К моменту, когда сдвиг фаз волн достигает  $\pi$ .

$$\frac{t_{\max}}{2} q^2 \frac{dv_{\text{тр}}}{dk} \Big|_{k=k_0} \sim \pi,$$

волновой пакет фактически прекращает существование, разваливается. Полагая для оценки  $q \sim \Delta k/2$ , получим характерное время существования волнового пакета:

$$t \ll t_{\max} \sim \frac{8\pi}{(\Delta k)^2 \left| d^2\omega/dk^2 \right|_0}. \quad (14.1.16)$$

Перепишем полученную формулу в другом виде. Для этого заметим, что

$$\frac{d^2\omega}{dk^2} = \frac{dv_{\text{тр}}}{dk}.$$

Кроме того, перейдём к дифференцированию по длине волн  $\lambda = 2\pi/k$ :

$$\frac{dv_{\text{тр}}}{dk} = \frac{dv_{\text{тр}}/d\lambda}{dk/d\lambda} = -\frac{\lambda^2}{2\pi} \frac{dv_{\text{тр}}}{d\lambda}.$$

Поскольку при малой ширине спектра рассматриваемого цуга волн  $\Delta k = -\left(2\pi/\lambda^2\right)\Delta\lambda$ , то в результате получаем следующую оценку времени существования волнового пакета:

$$t_{\max} \sim \frac{4\lambda^2}{(\Delta\lambda)^2 \left| dv_{\text{тр}}/d\lambda \right|_0}.$$

#### 14.1.4. Формула Рэлея

Найдем связь фазовой и групповой скоростей. Подставляя в (14) соотношение  $\omega = k\nu_\Phi$ , получим

$$\nu_{\text{тр}} = \nu_\Phi + k \frac{d\nu_\Phi}{dk}. \quad (14.1.17)$$

Переходя здесь от волнового числа к длине волны  $\lambda = 2\pi/k$ , перепишем найденную связь в виде

$$\nu_{\text{тр}} = \nu_\Phi - \lambda \frac{d\nu_\Phi}{d\lambda}. \quad (14.1.18)$$

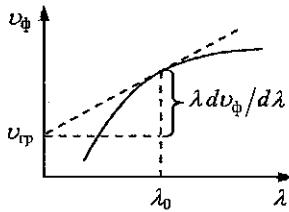
Это соотношение называется *формулой Рэлея*.

Как следует из (14.1.17), для сред без дисперсии ( $\nu_\Phi = \text{const}$ ) фазовая и групповая скорости совпадают:

$$\nu_{\text{тр}} = \nu_\Phi.$$

На рис. 14.1.2 показана интерпретация формулы (14.1.18), предложенная П. Эренфестом.

Рис. 14.1.2. Интерпретация формулы Рэлея согласно Эренфесту



На этом рисунке штриховой линией показана касательная к кривой  $\nu_\Phi = \nu_\Phi(\lambda)$ . Видно, что эта прямая отсекает на оси ординат отрезок, равный групповой скорости  $\nu_{\text{тр}}$ .

В случае электромагнитных волн фазовая скорость связана с показателем преломления среды формулой

$$\nu_\Phi = c/n. \quad (14.1.19)$$

Это следует из формулы  $k = \omega n/c$ , т.е.  $\nu_\Phi = \omega/k = c/n$ .

Дисперсия связана с тем, что показатель преломления зависит от длины волны излучения:  $n = n(\lambda)$ . Найдём групповую скорость волны в диспергирующей среде. Для этого подставим (14.1.19) в формулу Релея (14.1.18):

$$v_{tp} = v_{\Phi} - \lambda \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{c}{n} \right) = \frac{c}{n} + \frac{c\lambda}{n^2} \frac{dn}{d\lambda} = v_{\Phi} \left( 1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right).$$

В связи со сказанным в случае световых волн дисперсией называют зависимость показателя преломления среды от длины волны.

## 14.2. Классическая теория дисперсии

### 14.2.1. Зависимость диэлектрической проницаемости среды от частоты излучения

Классическая теория дисперсии, предложенная Х.А. Лоренцем, основана на предположении, что среда представляет собой газ, состоящий из невзаимодействующих между собой атомов. В атоме имеется один электрон, называемый *оптическим*, квазиупруго связанный с атомом. Возвращающая сила равна  $F_{\text{возвр}} = -\beta r$ , где  $r$  — радиус-вектор электрона относительно положения равновесия.

На рис. 14.2.1 показан качественный вид зависимости силы, действующей на электрон, от расстояния до центра. Положению равновесия отвечает расстояние  $R = R_0$  от центра. Видно, что линейная зависимость силы от смещения имеет место только при малых отклонениях электрона от положения равновесия. В сильных полях, когда отклонения электрона оказываются не слишком малыми, зависимость оказывается нелинейной.

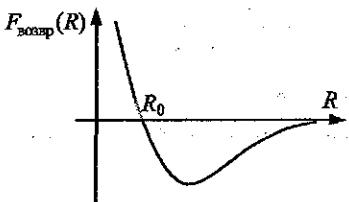


Рис. 14.2.1. Зависимость силы, действующей на электрон со стороны атома, от расстояния  $R$  до центра

Уравнение, описывающее поведение электрона под действием электромагнитной волны, имеет вид

$$m \frac{dv}{dt} = F_{\text{возвр}} + F_{\text{тр}} + eE; \quad (14.2.1)$$

$$F_{\text{возвр}} = -\beta r, \quad F_{\text{тр}} = -\eta v, \quad E = E_0 e^{-i\omega t}.$$

Здесь  $F_{\text{возвр}}$  — сила, возвращающая электрон в его положение равновесия,  $F_{\text{тр}}$  — сила трения, учитывающая потери энергии вследствие излучения (при ускоренном движении) и передачи энергии среде. Предпо-

ложив, что амплитуда колебаний электрона мала по сравнению с длиной электромагнитной волны, можно считать поле, действующее на отдельный электрон, однородным. Это позволяет считать коэффициент  $E_0$  постоянным, не зависящим от смесиения электрона.

Вводя собственную частоту осциллятора  $\omega_0 = \sqrt{\beta/m}$  и коэффициент затухания  $\gamma = \eta/2m$ , перепишем уравнение (14.2.1) в виде

$$\ddot{r} + 2\gamma\dot{r} + \omega_0^2 r = \frac{eE_0}{m} e^{-i\omega t}, \quad (14.2.2)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$r = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega} E. \quad (14.2.3)$$

Дипольный момент атома равен  $p = er$ . Если в единице объёма среды находится  $N$  атомов, то вектор поляризации среды  $P = Np$ . Имея в виду, что  $D = E + 4\pi P = \epsilon E$ , находим диэлектрическую проницаемость:

$$\epsilon = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m}. \quad (14.2.4)$$

Величина  $\omega_p$  называется *плазменной частотой*.

Таким образом, диэлектрическая проницаемость зависит от частоты колебаний электромагнитной волны. Она в общем случае является также комплексной величиной.

### 14.2.2. Нормальная и аномальная дисперсии

Обозначим

$$\sqrt{\epsilon} = n + ik. \quad (14.2.5)$$

Величина  $n = \text{Re } \sqrt{\epsilon}$  называется *показателем преломления*, а величина  $k = \text{Im } \sqrt{\epsilon}$  — *показателем затухания (поглощения)*. Введённый в (14.2.5) показатель преломления совпадает с обычным показателем преломления, только если  $\epsilon$  — действительная неотрицательная величина.

Поясним смысл показателя затухания. Запишем выражение для волнового числа:

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon} = \frac{\omega}{c} n + i \frac{\omega}{c} k = k_r + i \frac{\alpha}{2}. \quad (14.2.6)$$

Величину  $\alpha$  можно представить в виде

$$\alpha = \frac{4\pi}{\lambda_0} \kappa, \quad \lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}.$$

где  $\lambda_0$  — длина волны излучения в вакууме на частоте  $\omega$ . С учётом (14.2.6) для бегущей волны получается выражение

$$E \sim e^{ikx} = e^{ik_r x} e^{-\alpha x/2}. \quad (14.2.7)$$

Отсюда следует, что интенсивность излучения ( $I \sim \overline{E^2}$ ) меняется по закону

$$I = I_0 e^{-\alpha x}. \quad (14.2.8)$$

Это соотношение называется *законом Бугера*. Величина  $\alpha$  называется *коэффициентом затухания*.

Таким образом, показатель поглощения определяет скорость затухания волны. Характерная длина, на которой происходит затухание, есть  $l_a \sim 1/\alpha$ .

Строго говоря, наличие затухания ( $\kappa \neq 0$ ) не означает, что имеет место поглощение излучения. Например, если диэлектрическая проницаемость — действительная отрицательная величина:  $\epsilon < 0$ , то  $\kappa = \sqrt{-\epsilon} \neq 0$ . Затухание волны по мере распространения в среде означает, что происходит отражение этой волны. Поглощение же имеет место только в том случае, если происходит передача энергии от электронов к веществу. А такое происходит, если сила трения  $F_{tr} = -\eta v \neq 0$ , т.е. при  $\eta \neq 0$ . Но тогда  $\text{Im } \epsilon \neq 0$ . Именно это последнее условие указывает на наличие поглощения.

На рис. 14.2.2 показан вид зависимостей показателей преломления и поглощения от частоты,  $n = n(\omega)$ ,  $\kappa = \kappa(\omega)$ .

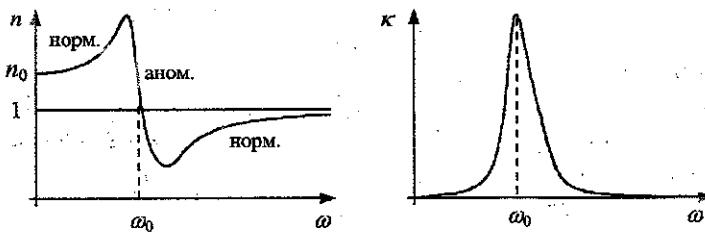


Рис. 14.2.2. Частотные зависимости показателей преломления  $n(\omega)$  и поглощения  $\kappa(\omega)$ . Указаны области нормальной (норм.) и аномальной (аном.) дисперсий

Асимптотические значения показателя преломления следующие:

$$n_0 = n(0) = \sqrt{1 + \omega_p^2 / \omega_0^2} > 1, \quad n \rightarrow 1 \text{ при } \omega \rightarrow \infty. \quad (14.2.9)$$

Из (14.2.4), (14.2.5) следует, что в случае слабого трения ( $\gamma \ll \omega_0$ ) показатель поглощения достигает максимального значения при  $\omega \approx \omega_0$  и составляет

$$\kappa_{\max} \approx \kappa(\omega_0) \approx \omega_p / 2\sqrt{\gamma\omega_0}. \quad (14.2.10)$$

Для случая, когда диэлектрическая проницаемость мало отличается от единицы, можно получить явные выражения для показателей преломления и поглощения:

$$n = 1 + \frac{\omega_p^2}{2} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}, \quad \kappa = \frac{\gamma\omega_p^2\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}. \quad (14.2.11)$$

Из этих формул нетрудно увидеть все основные особенности поведения  $n = n(\omega)$ ,  $\kappa = \kappa(\omega)$ , отражённые на рис. 14.2.2.

Область частот, где показатель преломления возрастает:

$$dn/d\omega > 0 \text{ или } dn/d\lambda < 0, \quad (14.2.12)$$

называется *областью нормальной дисперсии*, а область, где

$$dn/d\omega < 0 \text{ или } dn/d\lambda > 0, \quad (14.2.13)$$

— *областью аномальной дисперсии*. Аномальная дисперсия наблюдается, если частота электромагнитной волны попадает в окрестность резонансной частоты колебаний электрона. Как видно из сопоставления зависимостей  $n(\omega)$  и  $\kappa(\omega)$ , в области аномальной дисперсии имеет место резонансное возрастание показателя поглощения. Это проявляется в резком возрастании поглощения излучения с  $\omega \approx \omega_0$ , т.е. в появлении полос поглощения в спектрах.

Рассмотрим частный случай, когда можно пренебречь потерями энергии электрона,  $\gamma = 0$ . В этом случае энергия электрона не передаётся среде, и излучение не поглощается. Пусть также частота волны велика по сравнению с собственной частотой электрона:  $\omega \gg \omega_0$ . Тогда

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (14.2.14)$$

Запишем закон дисперсии:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \text{ или } \omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2. \quad (14.2.15)$$

Найдём фазовую и групповую скорости волн:

$$v_{\Phi} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\left(\frac{\omega_p}{k}\right)^2 + c^2}, \quad (14.2.16)$$

$$v_{rp} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{kc^2}{\sqrt{\omega_p^2 + k^2c^2}} = \frac{kc^2}{\omega}.$$

В рассматриваемом случае между фазовой и групповой скоростями имеет место соотношение

$$v_{\Phi} v_{rp} = c^2. \quad (14.2.17)$$

Как видно из (14.2.16),  $v_{\Phi} > c$ . Соответственно оказывается  $v_{rp} < c$ . Последнее согласуется с тем фактом, что перенос энергии происходит со скоростями, не превышающими скорость света.

### 14.3. О коэффициентах отражения и прохождения при наличии дисперсии

Пусть электромагнитная волна распространяется в среде с дисперсией, т.е. диэлектрическая проницаемость есть комплексная функция частоты:  $\epsilon = \epsilon(\omega)$ . Запишем плоскую волну как

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{E}}_0 \exp[i(kx - \omega t)],$$

$$\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{H}}_0 \exp[i(kx - \omega t)].$$

Здесь шляпка над буквой указывает на то, что рассматривается комплексное представление поля. Связь частоты и волнового вектора даётся формулой

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega).$$

Интенсивность волны определяется через действительные значения векторов напряжённостей полей:

$$\mathbf{I} = \bar{\mathbf{S}} = \frac{c}{4\pi} \overline{\mathbf{E} \times \mathbf{H}},$$

где усреднение производится по периоду колебаний полей.

Между комплексными амплитудами полей имеет место соотношение

$$\sqrt{\epsilon} \hat{\mathbf{E}} = \sqrt{\mu} \hat{\mathbf{H}}.$$

Будем далее считать  $\mu = 1$ . Тогда  $\hat{H} = \sqrt{\varepsilon} \hat{E}$ . Запишем интенсивность излучения  $I = \frac{c}{4\pi} \overline{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}$ , используя комплексное представление волн:

$$I = \frac{c}{4\pi} \left( \frac{\hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{E}}^*}{2} \right) \times \left( \frac{\hat{\mathbf{H}} + \hat{\mathbf{H}}^*}{2} \right).$$

Преобразуем это выражение:

$$\begin{aligned} I &= \frac{c}{16\pi} \overline{(\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}} + \hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^* + \hat{\mathbf{E}}^* \times \hat{\mathbf{H}} + \hat{\mathbf{E}}^* \times \hat{\mathbf{H}}^*)} = \\ &= \frac{c}{16\pi} \overline{(\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^* + \hat{\mathbf{E}}^* \times \hat{\mathbf{H}})} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*). \end{aligned}$$

Здесь учтено, что слагаемые  $\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}$  и  $\hat{\mathbf{E}}^* \times \hat{\mathbf{H}}^*$  содержат временнную зависимость  $\sim e^{\pm 2i\omega t}$  и при усреднении по времени обращаются в нуль, а в слагаемых  $\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*$  и  $\hat{\mathbf{E}}^* \times \hat{\mathbf{H}}$  быстро осциллирующих множителей нет. Поскольку в плоской волне  $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ , то

$$I = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(\hat{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{H}}^*) = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(\sqrt{\varepsilon} \hat{E} \hat{E}^*) = \frac{cn}{8\pi} |\hat{E}|^2 = \frac{cn}{8\pi} E_0^2.$$

Здесь введены показатель преломления  $n = \operatorname{Re} \sqrt{\varepsilon}$  и действительная амплитуда поля  $E_0 = \sqrt{|\hat{E}|^2}$ .

С учётом сказанного в полученных ранее формулах Френеля для амплитудных коэффициентов отражения и прохождения следует использовать величину  $\sqrt{\varepsilon}$  вместо показателя преломления. Например, формулы для случая нормального падения волны на границу раздела вакуума ( $n_1 = 1$ ) с веществом ( $n_2 = n = \sqrt{\varepsilon}$ ) имеют вид

$$r = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{1 + \sqrt{\varepsilon}}, \quad d = \frac{2}{1 + \sqrt{\varepsilon}}.$$

Имея в виду, что  $\sqrt{\varepsilon} = n + ik$ , получаем другое представление амплитудных коэффициентов отражения и прохождения:

$$r = \frac{1 - n - ik}{1 + n + ik}, \quad d = \frac{2}{1 + n + ik}.$$

Для интенсивностей падающей, отражённой и пропущенной волн имеем

$$I_{\text{пад}} = \frac{c}{8\pi} |E|^2, \quad I_{\text{отр}} = \frac{c}{8\pi} |E'|^2, \quad I_{\text{прош}} = \frac{cn}{8\pi} |E''|^2.$$

Соответственно коэффициенты отражения и прохождения (по интенсивности) принимают вид

$$R = \frac{I_{\text{отр}}}{I_{\text{пад}}} = |r|^2 = \left| \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{1 + \sqrt{\varepsilon}} \right|^2 = \frac{(n-1)^2 + \kappa^2}{(n+1)^2 + \kappa^2},$$

$$D = \frac{I_{\text{прош}}}{I_{\text{пад}}} = n |d|^2 = \frac{4n}{\left| 1 + \sqrt{\varepsilon} \right|^2} = \frac{4n}{(n+1)^2 + \kappa^2}.$$

Нетрудно проверить, что для этих коэффициентов выполняется закон сохранения энергии:

$$R + D = 1.$$

Таким образом, в общем случае вследствие дисперсии диэлектрическую проницаемость среды нельзя считать постоянной: она зависит от частоты колебаний поля. Кроме того, она является комплексной величиной, причём её мнимая часть учитывает поглощение энергии поля средой. Наконец, как показано в Приложении 1, диэлектрическая проницаемость анизотропных сред является тензорной величиной.

## Глава 15. СКИН-ЭФФЕКТ

### 15.1. Основное уравнение

Скин-эффект<sup>1</sup> — это протекание токов высокой частоты в тонком поверхностном слое проводника.

В проводнике плотность тока и напряжённость электрического поля связаны законом Ома:  $j = \lambda E$ . В общем случае при рассмотрении нестационарных процессов следует, наряду с обычными токами, учитывать и токи смещения:

$$j_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Если поле переменное:  $E = E_0 \cos \omega t$ , то

$$j_{\text{см}} = \frac{i\omega\epsilon}{4\pi} E_0 \sin \omega t = (j_{\text{см}})_0 \sin \omega t,$$

$$j = \lambda E = \lambda E_0 \cos \omega t = j_0 \cos \omega t.$$

Для типичных металлов проводимость  $\lambda \sim 10^{15} - 10^{17} \text{ с}^{-1}$ . Это означает, что вплоть до частот порядка  $10^{13}$  Гц выполняется неравенство  $\omega\epsilon/4\pi \ll \lambda$  (для металлов типичные значения диэлектрической проницаемости составляют 10–100). Следовательно, в широком диапазоне частот оказывается  $(j_{\text{см}})_0 \ll j_0$ , так что токи смещения не играют существенной роли и могут не учитываться в расчетах. Заметим, что частоты, отвечающие свету, составляют  $\omega/2\pi \sim 10^{14} - 10^{15}$  Гц.

Будем далее считать, что

$$D = \epsilon E, \quad B = \mu H, \quad \epsilon = \text{const}, \quad \mu = \text{const}.$$

В этих предположениях запишем уравнения Максвелла для электромагнитного поля в металле:

<sup>1</sup> Термин происходит от англ. слова *skin* — кожа.

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$
(15.1.1)

Здесь предполагается также, что в среде нет нескомпенсированных зарядов, вследствие чего в формуле для теоремы Гаусса  $\operatorname{div} \mathbf{D} = \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho = 0$  в правой части стоит нуль. Используя закон Ома, запишем два первых уравнения:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi\lambda}{c} \mathbf{E}.$$

Исключим отсюда магнитное поле. Для этого применим операцию  $\operatorname{rot}$  к обеим частям первого уравнения и учтём второе уравнение:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \mathbf{H}) = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{4\pi\lambda}{c} \mathbf{E} \right).$$

Левая часть равенства преобразуется с помощью тождества

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}.$$

Поскольку  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ , то мы приходим к следующему уравнению для поля  $\mathbf{E}$ :

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{4\pi\mu\lambda}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (15.1.2)$$

## 15.2. Вытеснение переменного тока из объёма проводника

Пусть по проводнику течёт переменный ток  $J = J_0 \cos \omega t$ . Этот ток поддерживается электрическим полем, которое в соответствии с законом Ома  $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$  имеет ту же частоту. Найдём распределение тока по объёму проводника. В общем случае решение зависит от формы проводника. Рассмотрим простейший случай, когда переменное электрическое поле действует вдоль границы раздела вакуум–металл (рис. 15.2.1). Будем также считать, что ток и напряжённость поля зависят только от расстояния до поверхности металла, т.е. от координаты  $z$ .

В указанных предположениях ( $E = E(z, t)$ ,  $j = j(z, t)$ ) уравнение (15.1.2) принимает вид

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{4\pi\mu\lambda}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (15.2.1)$$

Запишем в комплексной форме условие, что частота колебаний поля есть  $\omega$ :

$$E(z, t) = E_0(z)e^{-i\omega t}. \quad (15.2.2)$$

Рис. 15.2.1. Переменное электрическое поле поддерживает переменный ток в металле



Подстановка этого выражения в (15.2.1) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению для  $E_0(x)$ :

$$\frac{d^2 E_0}{dz^2} = k^2 E_0, \quad k = \sqrt{\frac{4\pi i \mu \lambda \omega}{c^2}}. \quad (15.2.3)$$

Введённая здесь величина  $k$  с учётом равенства  $\sqrt{-i} = (1-i)/\sqrt{2}$  может быть переписана в виде

$$k = \sqrt{\frac{4\pi \mu \lambda \omega}{c^2}} \sqrt{-i} = \frac{1-i}{\Lambda}, \quad \Lambda = \frac{c}{\sqrt{2\pi \mu \lambda \omega}}. \quad (15.2.4)$$

Решение уравнения (15.2.3), остающееся ограниченным при  $z \rightarrow \infty$ , имеет вид

$$E_0(z) = E_0(0) \exp(-kz) = E_0(0) \exp\left[-\frac{z}{\Lambda}(1-i)\right]. \quad (15.2.5)$$

Соответственно для плотности тока получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} j(z, t) &= \lambda E(z, t) = \lambda E_0(z) e^{-i\omega t} = \\ &= j_0(0) \exp\left(-\frac{z}{\Lambda}\right) \exp\left[i\left(\frac{z}{\Lambda} - \omega t\right)\right]. \end{aligned} \quad (15.2.6)$$

Таким образом, переменный ток (как и переменное поле) проникает в проводник на глубину порядка  $\Lambda$ , называемую *толщиной скин-слоя*.

Чем выше частота колебаний тока, тем на меньшую глубину он проникает в проводник. Аналогично, с ростом проводимости толщина скин-слоя убывает. В пределе идеального проводника переменный ток течёт в бесконечно узком слое вблизи поверхности.

Приведём характерные значения толщины скин-слоя. Для параметров, характерных для меди ( $\lambda = 5,4 \cdot 10^{17} \text{ с}^{-1}$ ,  $\mu = 1$ ), имеем:

$$\nu = 50 \text{ Гц} \Rightarrow \Lambda = 0,7 \text{ см},$$

$$\nu = 5 \cdot 10^7 \text{ Гц} \Rightarrow \Lambda = 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ см}.$$

Оценку глубины  $\Lambda$  проникновения поля в вещество можно получить следующим образом. Уравнение (15.1.2) совпадает по виду с уравнением диффузии

$$\frac{1}{D} \frac{\partial F}{\partial t} = \Delta F$$

с коэффициентом диффузии  $D = c^2 / 4\pi\mu\lambda$ . Но это означает, что можно воспользоваться выводами теории диффузии. Как известно, если на поверхности вещества действует источник, то за время  $\tau$  волна диффузии проникает в вещество на глубину  $l \sim \sqrt{D\tau}$ . Если источник действует периодически с периодом  $T$ , то в качестве времени  $\tau$  следует принять  $\tau \sim T/2$ , поскольку знак источника меняется каждые полпериода. Наконец, имея в виду, что  $T = 2\pi/\omega$ , получаем

$$l \sim \sqrt{D \frac{T}{2}} = \frac{c}{\sqrt{4\lambda\mu\omega}}.$$

Эта оценка совпадает (с точностью до числового множителя порядка единицы) с результатом (15.2.4).

### 15.3. Скин-эффект и явление электромагнитной индукции

Скин-эффект возникает благодаря электромагнитной индукции, действующей по правилу Ленца. Рассмотрим качественно это явление.

Пусть по длинному прямому проводнику течёт ток  $J$  (рис. 15.3.1а). Силовые линии магнитного поля представляют собой окружности с центром на оси проводника.

Предположим, что ток возрастает:  $dJ/dt > 0$ . Тогда растёт создаваемое им магнитное поле  $B$  и магнитный поток через сечение проводника — контур  $L(NN'M'M)$ . По закону электромагнитной индукции

$\oint E_{\text{инд}} dL = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$  возникает электрическое поле  $E_{\text{инд}}$ , создающее индукционный ток, препятствующий росту магнитного потока  $\Phi$ . Этот ток совпадает по направлению с током  $J$  на периферии и противоположен на оси проводника (рис. 15.3.1б). В результате полный ток на оси

проводника уменьшается, а на периферии (вблизи поверхности) усиливается.

Пусть теперь ток убывает:  $dJ/dt < 0$ . Тогда направление индукционного тока противоположно (рис. 15.3.1в). При этом ток на оси стремится ослабить убывание тока  $J$ , а на периферии — усилить убывание.

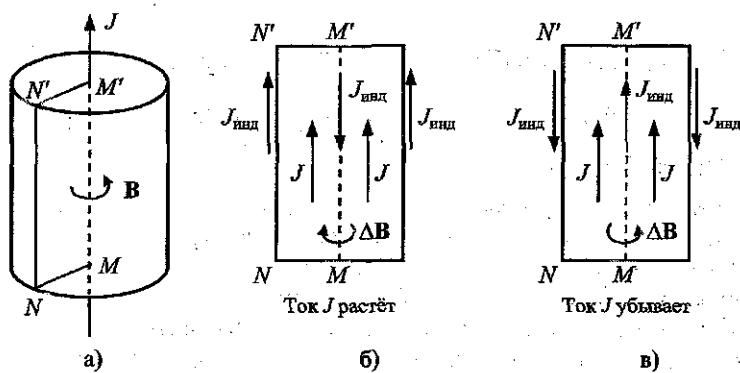


Рис. 15.3.1: а -- переменный ток  $J$  течёт по длинному прямому проводнику, б и в -- направление индукционного тока  $J_{\text{инд}}$  в случаях, когда ток  $J$  соответственно возрастает и убывает. Указано направление силовых линий магнитного поля  $\Delta B$ , создаваемого индукционными токами

Таким образом, амплитуда колебаний суммарной плотности тока  $j + j_{\text{инд}}$  у поверхности проводника возрастает, а вблизи оси (вдали от поверхности) убывает. Это и проявляется как эффект выталкивания переменного тока из объёма проводника.

## Глава 16. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ

### 16.1. Плазма. Основные понятия

#### 16.1.1. Плазма

Плазма (от греч. *plasma* — вылепленный, оформленный) — это частично или полностью ионизованный газ, в котором плотности положительных и отрицательных зарядов практически одинаковы. Термин «плазма» предложен в 1929 г. П. Ленгмюром.

Среди важнейших свойств плазмы нужно указать то, что её механические свойства в значительной степени диктуются электродинамикой. Плазма не только движется во внешнем электромагнитном поле, но и сама производит макроскопические электрические и магнитные поля.

На микроуровне плазма отличается от обычного нейтрального газа. Если в газе частицы почти свободны и взаимодействуют друг с другом в моменты столкновений, то в плазме частицы непрерывно взаимодействуют друг с другом благодаря дальнодействующим силам. При этом для плазмы характерны так называемые «коллективные взаимодействия», когда силы, действующие на отдельные частицы, формируются большой группой частиц (а не в результате прямых парных взаимодействий). В результате плазма в некоторых аспектах оказывается ближе к конденсированным средам, чем к газам.

Плазма называется *низкотемпературной*, если её температура  $T < 10^5$  К, и *высокотемпературной*, если  $T > 10^6 - 10^8$  К. Высокотемпературная плазма используется для осуществления реакций ядерного синтеза (*управляемого термоядерного синтеза*).

#### 16.1.2. Квазинейтральность плазмы

Если бы в среде присутствовало большое число нескомпенсированных зарядов, то невозможно было бы состояние равновесия, поскольку возникали бы сильные поля, приводящие заряды в движение. Поэтому в плазме плотности положительных и отрицательных зарядов должны практически совпадать по величине. Это свойство называется

квазинейтральностью плазмы. Отклонения от квазинейтральности приводят к возникновению сильных полей, которые быстро восстанавливают квазинейтральность.

Если концентрация ионов равна  $n_i$ , а электронов —  $n_e$ , причём каждый ион отдаёт в плазму  $Z$  электронов, то условие квазинейтральности записывается в виде  $Zn_i = n_e$ , или

$$en_e + (-Ze)n_i = 0. \quad (16.1.1)$$

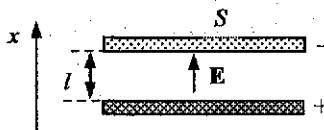
Здесь  $e < 0$  — заряд электрона.

### 16.1.3. Дебаевский радиус

Отклонение от нейтральности может происходить только на малых расстояниях и на протяжении малых промежутков времени. Оценим характерные пространственные масштабы, на которых может происходить сильное разделение зарядов.

Пусть в некотором слое толщиной  $l$  и объёмом  $V = Sl$  произошло разделение зарядов, причём все электроны собрались вблизи верхней плоскости, а ионы — вблизи нижней плоскости (рис. 16.1.1). Ограничимся случаем однократно ионизованной плазмы,  $Z = 1$ . При этом в состоянии равновесия  $n_i = n_e = n$ .

Рис. 16.1.1. Разделение зарядов в плазме приводит к возникновению полей, стремящихся восстановить нейтральность



В результате разделения на плоскостях возникают нескомпенсированные заряды с поверхностной плотностью  $\sigma = neV/S = nel$ . Электрическое поле в таком конденсаторе окажется равным  $E = 4\pi\sigma = 4\pi nel$ . Плотность энергии электрического поля  $w_E = E^2/8\pi$ . Эта энергия образуется за счёт кинетической энергии  $w_T$  теплового движения электронов и ионов. Имея в виду, что в приводимой оценке рассматривается разделение зарядов вдоль одного направления (оси  $x$  на рис. 16.1.1), на основании теоремы о равнораспределении энергии по степеням свободы имеем

$$w_T = w_T^{(e)} + w_T^{(i)} = n \frac{kT}{2} + n \frac{kT}{2} = nkT.$$

По закону сохранения  $w_E = w_T$ . Отсюда следует, что

$$E = \sqrt{8\pi nkT},$$

или

$$4\pi nel = \sqrt{8\pi nkT} \Rightarrow l = \sqrt{\frac{kT}{2\pi ne^2}}.$$

Величина  $r_D = l/2$  или

$$r_D = \sqrt{\frac{kT}{8\pi ne^2}}, \quad (16.1.2)$$

называется *дебаевским радиусом* и указывает характерный пространственный масштаб, на котором может происходить существенное отклонение от квазинейтральности.

#### 16.1.4. Дебаевское экранирование

Внесём в плазму малый точечный (пробный) заряд  $q$ . Благодаря кулоновскому взаимодействию произойдёт пространственное перераспределение частиц плазмы, в результате чего внесённый заряд будет окружён «шубой» из частиц другого знака заряда. Произойдёт экранирование, ослабление поля, создаваемого пробным зарядом. Однако полной нейтрализации наблюдаться не будет вследствие теплового движения частиц плазмы.

Если бы плазмы не было, то потенциал внесённого заряда был бы равен

$$\phi^{(0)} = q/r.$$

В плазме потенциал будет складываться из потенциала  $\phi^{(0)}$  и потенциалов, создаваемых частицами плазмы. Ограничимся случаем однократно ионизованной плазмы:  $Z = 1$ . Тогда согласно распределению Больцмана концентрации электронов ( $n_e$ ) и ионов ( $n_i$ ) будут даваться формулами

$$n_e = n \exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right), \quad n_i = n \exp\left(\frac{e\varphi}{kT}\right).$$

Здесь учтено, что вдали от заряда ( $r \rightarrow \infty$ ) потенциал поля пробного заряда обращается в нуль, а концентрации ионов и электронов сравниваются:

$$\varphi \rightarrow 0, \quad n_i \rightarrow n, \quad n_e \rightarrow n.$$

Распределение потенциала определяется уравнением Пуассона:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad (16.1.3)$$

где  $\rho$  — объёмная плотность заряда, равная

$$\rho = en_e + (-e)n_i = en \left[ \exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right) - \exp\left(\frac{e\varphi}{kT}\right) \right].$$

Для не слишком больших значений потенциала,  $|e\varphi/kT| \ll 1$ , имеем

$$\rho \approx -\frac{2ne^2}{kT} \varphi,$$

так что уравнение Пуассона (16.1.3) принимает вид

$$\Delta\varphi = \frac{8\pi ne^2}{kT} \varphi. \quad (16.1.4)$$

Поле, создаваемое пробным зарядом, сферически симметрично:

$\varphi = \varphi(r)$ . Поэтому  $\Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{d^2(r\varphi)}{dr^2}$ , и уравнение (16.1.4) упрощается:

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(r\varphi)}{dr^2} = \frac{8\pi ne^2}{kT} \varphi.$$

Обозначая

$$r_D = \sqrt{\frac{kT}{8\pi ne^2}}, \quad u = r\varphi,$$

получаем

$$\frac{d^2u}{dr^2} = \frac{u}{r_D^2} \Rightarrow u = u_0 \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right) \Rightarrow \varphi = \frac{u_0}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right).$$

Поскольку на малых расстояниях от пробного заряда решение должно переходить в  $\varphi^{(0)} = q/r$ , то получаем окончательно

$$\varphi = \frac{q}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right). \quad (16.1.5)$$

Таким образом, на расстояниях порядка дебаевского радиуса происходит сильное экранирование внесённого в плазму заряда. Поэтому величину  $r_D$  называют также *радиусом экранирования*.

### 16.1.5. Разреженная и плотная плазма

Дебаевской сферой называют область в плазме, ограниченную сферой с радиусом, равным дебаевскому радиусу  $r_D$ .

Если концентрация частиц в плазме есть  $n$ , то в дебаевской сфере окажется

$$N \sim \frac{4}{3} \pi r_D^3 n$$

частиц. В плазме с концентрацией частиц  $n$  среднее расстояние между ними составляет  $d \sim n^{-1/3}$ . Соответственно имеем

$$N \sim (r_D/d)^3.$$

Выделяют два предельных случая.

1)  $N \gg 1$ . Это значит, что  $r_D \gg d \sim n^{-1/3}$ . Иными словами, в дебаевской сфере находится много частиц. Поскольку экранирование на расстояниях, меньших  $r_D$ , относительно невелико, то доминируют колективные эффекты, обусловленные дальнодействующими кулоновскими силами.

Перепишем неравенство  $r_D \gg d$ , учитя определение  $r_D$ :

$$r_D \sim \sqrt{\frac{kT}{8\pi n e^2}} \gg n^{-1/3} \Rightarrow n \ll \left(\frac{kT}{e^2}\right)^3.$$

Таким образом, неравенство  $N \gg 1$  означает, что плотность плазмы достаточно мала. Плазма, удовлетворяющая сформулированному условию, называется *разреженной*.

Заметим, что условие разреженной плазмы можно переписать в виде

$$e^2/d \ll kT, \quad d \sim n^{-1/3}.$$

Смысл этого условия в том, что потенциальная энергия взаимодействия частиц мала по сравнению с их кинетической энергией. В данном случае плазма подобна идеальному газу. Поэтому такую плазму называют также *идеальной*.

2)  $N \ll 1$ . Соответственно  $r_D \ll d \sim n^{-1/3}$ . В этом случае плотность плазмы велика:

$$n \gg \left(kT/e^2\right)^3.$$

Такая плазма называется *плотной*. В ней пространственное разделение заряда возможно только на расстояния порядка среднего расстояния между частицами. Но на таких расстояниях квазинейтральность и так нарушается. Плотная плазма не может рассматриваться как идеальный газ.

### 16.1.6. Плазменные колебания и плазменная частота

Пусть в слое плазмы толщиной  $x$  произошло разделение зарядов: все электроны собрались вблизи верхней плоскости, а ионы — вблизи нижней плоскости (рис. 16.1.2). В сформировавшемся конденсаторе объёмом  $V = Sx$  возникло электрическое поле ( $e < 0$ ):

$$E = 4\pi\sigma, \sigma = -\frac{neV}{S} = -nex \Rightarrow E = -4\pi n ex.$$

Здесь  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда положительно заряжённой (нижней) пластины конденсатора. Это поле сообщает каждому электрону ускорение  $a = eE/m$ . Для случая, когда электроны находятся в верхнем слое (как показано на рис. 16.1.2), их ускорение направлено вниз:  $E > 0, a < 0$ .

Рис. 16.1.2. К расчёту частоты плазменных колебаний



Запишем уравнение движения электронов:

$$m\ddot{x} = eE \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -4\pi ne^2 x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_p^2 x. \quad (16.1.6)$$

Здесь введено обозначение

$$\omega_p = \sqrt{4\pi ne^2/m}. \quad (16.1.7)$$

Эта величина называется *плазменной* (или *ленгмюровской*) *частотой*.

Как видно из полученного уравнения, электроны совершают гармонические колебания относительно ионов с плазменной частотой. Эти колебания называют *плазменными*. Их амплитуда порядка дебаевского радиуса. Последнее связано с тем, что величина  $r_D$  есть характерный масштаб пространственного разделения зарядов в плазме (см. (16.1.2)).

## 16.2. Диэлектрическая проницаемость плазмы

### 16.2.1. Диэлектрическая проницаемость плазмы

Пусть на плазму падает излучение — электромагнитная волна. Плазма представляет собой квазинейтральную смесь электронов и ионов, причём масса иона примерно в  $10^4$  раз большие массы электрона.

<sup>1</sup> Название происходит от имени И. Ленгмюра, исследовавшего газовый разряд и предложившего термин «плазма».

Поэтому в поле внешней электромагнитной волны двигаются главным образом электроны. Ионы же можно считать покоящимися (производимый ими ток оказывается малым по сравнению с током, производимым электронами). В типичных условиях скорость движения электронов мала ( $v \ll c$ ), так что можно пренебречь силой Лоренца, возникающей со стороны магнитного поля волны. Наконец, считая амплитуду колебаний электрона малой по сравнению с длиной волны излучения, можно рассматривать движение электрона как движение в однородном электрическом поле волны, периодически меняющемся со временем:

$$E = E_0 \cos \omega t.$$

Выберем систему координат так, чтобы ось  $x$  была направлена вдоль вектора электрического поля. В этих условиях движение отдельного электрона описывается уравнением

$$m\ddot{x} = eE = eE_0 \cos \omega t,$$

решение которого имеет вид

$$x = -\frac{eE_0}{m\omega^2} \cos \omega t = -\frac{eE}{m\omega^2}.$$

В рассматриваемой ситуации электроны плазмы можно уподобить связанным зарядам в диэлектрике, поскольку они не перемещаются на большие расстояния, а лишь совершают колебания относительно своего исходного положения. Поэтому смещение, индуцированное электромагнитной волной, приводит к появлению эффективного дипольного момента электрона

$$p = ex = -e^2 E / m\omega^2,$$

или, в векторном виде,

$$\mathbf{p} = -e^2 \mathbf{E} / m\omega^2.$$

Если в единице объёма плазмы имеется  $N$  электронов, то вектор поляризации (дипольный момент единицы объёма) окажется равным

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p} = -\frac{Ne^2}{m\omega^2} \mathbf{E} \equiv \alpha \mathbf{E}.$$

Имея в виду, что  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E}$ , заключаем, что диэлектрическая проницаемость плазмы равна

$$\epsilon = 1 + 4\pi\alpha = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m\omega^2}.$$

Поскольку  $\sqrt{4\pi Ne^2/m} = \omega_p$  — плазменная частота, то окончательно получаем

$$\epsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2. \quad (16.2.1)$$

Таким образом, в отличие от случая диэлектриков в электростатическом поле диэлектрическая проницаемость плазмы оказывается меньше единицы:  $\epsilon < 1$ . Более того, она отрицательна при частотах  $\omega < \omega_p$ .

### 16.2.2. Отражение электромагнитных волн от плазмы

Как следует из уравнений Максвелла, для плоских волн

$$E = E_0 \exp(i kx - i \omega t) \quad (16.2.2)$$

частота  $\omega$  и волновое число  $k$  связаны соотношением

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega).$$

Подставляя сюда выражение (16.2.1) для диэлектрической проницаемости, получаем

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right).$$

Последнее соотношение можно переписать в виде

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2. \quad (16.2.3)$$

Этот закон дисперсии показан на рис. 16.2.1.

Из полученного соотношения следует, в частности, что длина волны равна

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}.$$

Пусть на слой плазмы падает волна с частотой  $\omega < \omega_p$  (рис. 16.2.2).

В этом случае

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} < 0.$$

Положим  $k = i\beta$ . Тогда выражение для волны (16.2.2) примет вид

$$E = E_0 \exp(-\beta x - i \omega t).$$

Это значит, что амплитуда волны экспоненциально убывает — волна затухает по мере углубления в плазму.

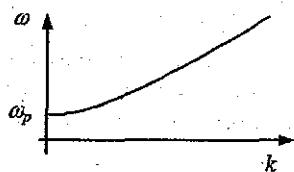


Рис. 16.2.1. Закон дисперсии волн в плазме

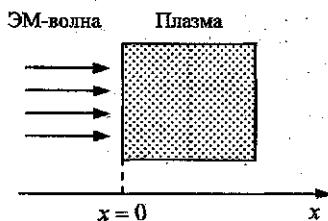


Рис. 16.2.2. Электромагнитная волна, падающая из вакуума на слой плазмы, занимающей область  $x > 0$

Таким образом, в плазме могут распространяться только волны с частотой  $\omega > \omega_p$ . Для волн же с частотой  $\omega < \omega_p$  плазма играет роль зеркала.

Если в плазме энергия волны поглощается слабо, то почти вся волна отразится назад. Действительно, параметры отражённой волны (амплитуду и фазу) можно найти с помощью формул Френеля. Для случая нормального падения амплитудный коэффициент отражения от слоя плазмы бесконечной толщины равен

$$r = \frac{1 - \sqrt{\epsilon}}{1 + \sqrt{\epsilon}}, \quad \epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

При  $\omega < \omega_p$  нужно положить  $\sqrt{\epsilon} = ik$ . Тогда коэффициент отражения по интенсивности даётся выражением

$$R = |r|^2 = \left| \frac{1 - ik}{1 + ik} \right|^2 = 1.$$

Если же в плазме существенную роль начинают играть джоулевы потери, то коэффициент отражения окажется меньше единицы.

Если электромагнитная волна падает на слой плазмы под некоторым углом к нормали  $\theta$ , то отражение может произойти и при частотах

больших, чем  $\omega_p$ . Действительно, при  $\omega > \omega_p$  плазма представляет собой среду с действительным показателем предомления  $n = \sqrt{\epsilon} < 1$ . Тогда условие полного отражения есть

$$\theta \geq \theta_{\text{в.о.}}, \sin \theta_{\text{в.о.}} = n.$$

Это — эффект полного внутреннего отражения, поскольку вакуум является средой оптически более плотной, чем плазма:

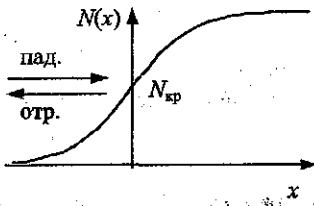
$$n_{\text{вак}} = 1 > n_{\text{плазма}} = \sqrt{\epsilon}.$$

В пределе  $\omega \rightarrow \omega_p$ , когда ещё  $\omega < \omega_p$ , угол полного внутреннего отражения обращается в нуль, и плазма отражает волны при любых углах падения.

Пусть концентрация электронов медленно растёт в направлении оси  $x$ , как показано на рис. 16.2.3. Как правило, концентрация меняется незначительно на расстояниях порядка длины волны излучения. Поэтому можно приближённо определить локальное значение волнового числа формулой

$$k^2(x) = \frac{1}{c^2} \left[ \omega^2 - \frac{4\pi e^2}{m} N(x) \right].$$

Рис. 16.2.3. Электромагнитная волна падает на плазму с увеличивающейся концентрацией электронов



Для заданной частоты волны волновое число обращается в нуль в точке, где концентрация электронов достигает критического значения

$$N_{\text{кр}} = m\omega^2 / 4\pi e^2.$$

Это соотношение определяет эффективное положение «плазменного зеркала».

Эффект отражения волн от плазмы используется в дальней радиосвязи. Ионосфера (слой атмосферы, начинающийся на высоте примерно 50 км от поверхности Земли) представляет собой слой плазмы, формирующийся благодаря ионизирующему действию ультрафиолетовой и рентгеновской солнечной радиации, а также космического излучения. Хотя степень ионизации газа в ионосфере невысокая, концентрация электронов (до  $10^3$ – $10^5$  электронов в  $1 \text{ см}^3$ ) достаточно велика, чтобы

оказалось возможным отражение длинных ( $\lambda \sim$  несколько км) радиоволн. Это позволяет передавать радиосигналы на приёмники, находящиеся вне зоны прямой видимости, как проиллюстрировано качественно на рис. 16.2.4.

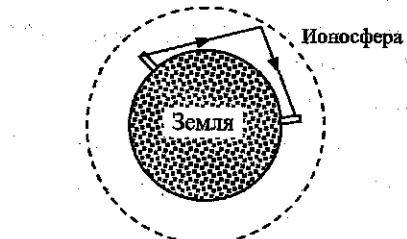


Рис. 16.2.4. Дальняя радиосвязь благодаря отражению радиоволн от ионосферы

## 16.3. Магнитное удержание плазмы

### 16.3.1. Диамагнетизм плазмы

При наложении магнитного поля на плазму электроны начинают совершать вращательное движение вокруг направления силовых линий поля с циклотронной частотой

$$\omega_0 = -\frac{e}{m_e c} \mathbf{B}$$

(см. рис. 16.3.1).

Это движение приводит к возникновению токов

$$J = \frac{e\omega_0}{2\pi}.$$

Если радиус орбиты равен  $r$ , то возникает магнитный момент орбитального движения

$$m = \frac{J}{c} S = \frac{e\omega_0}{2\pi c} \pi r^2.$$

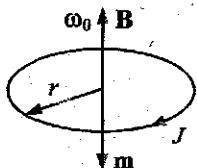


Рис. 16.3.1. При наложении магнитного поля заряженные частицы начинают вращаться вокруг направления силовых линий магнитного поля, что приводит к появлению магнитного момента

Пусть компонента скорости частицы, перпендикулярная магнитному полю, есть  $v_{\perp}$ . Тогда радиус орбиты  $r = v_{\perp}/\omega_0$ . Соответственно магнитный момент оказывается равным

$$m = \frac{e\omega_0}{2\pi c} \pi \left( \frac{v_{\perp}}{\omega_0} \right)^2 = \frac{e}{2c} \frac{v_{\perp}^2}{\omega_0}.$$

Подставляя сюда выражение для циклотронной частоты, находим

$$m = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}.$$

Перепишем это выражение в векторном виде, имея в виду, что индуцированный магнитный момент направлен против магнитного поля:

$$\mathbf{m} = -\frac{mv_{\perp}^2}{2B} \mathbf{B}.$$

Если концентрация зарядов в плазме есть  $n$ , то намагниченность окажется равной

$$\mathbf{I} = nm \uparrow \downarrow \mathbf{B}.$$

Таким образом, магнитная восприимчивость плазмы, определяемая соотношением  $\mathbf{I} = \kappa \mathbf{H}$ , отрицательна:  $\kappa < 0$ . Это означает, что плазма обладает диамагнитными свойствами. В частности, она должна выталкиваться из области сильного поля. На этом свойстве основана идея магнитного удержания плазмы: необходимо создать магнитные «плюшки», от которых плазма будет отталкиваться, в результате чего она будет удерживаться в ограниченной области пространства, не касаясь стенок камеры. Сформулированная идея предложена А.Д. Сахаровым и И.Е. Таммом в 1950 г.

### 16.3.2. Основное уравнение магнитной гидродинамики плазмы

Выделим в плазме элемент объема  $dV = dx dy dz$  (рис. 16.3.2).

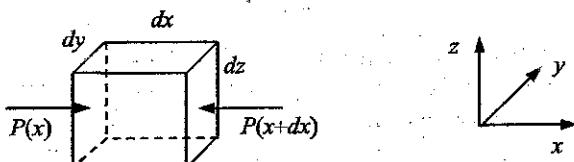


Рис. 16.3.2. Элемент объема в плазме, на который действуют силы газокинетического давления

Обозначим газокинетическое давление, действующее в плазме как  $P(x, y, z)$ . Тогда вдоль оси  $x$  на элемент объёма будет действовать сила

$$df_x = [P(x, y, z) - P(x+dx, y, z)] dy dz = -\frac{\partial P}{\partial x} dV.$$

Аналогично вдоль осей  $y$  и  $z$  будут действовать силы

$$df_y = -\frac{\partial P}{\partial y} dV, \quad df_z = -\frac{\partial P}{\partial z} dV.$$

В векторном виде сила записывается в виде  $d\mathbf{f} = -\operatorname{grad} P \cdot dV$ .

Запишем уравнение движения рассматриваемого элемента объёма. Пусть  $\rho_m$  — массовая плотность плазмы, так что масса элемента объёма равна  $dm = \rho_m dV$ . Тогда согласно второму закону Ньютона имеем

$$dm \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} P \cdot dV, \quad \text{или} \quad \rho_m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} P.$$

Полученное уравнение определяет поведение плазмы в отсутствии каких-либо иных сил, кроме газокинетического давления.

Поскольку в плазме движутся заряды, то они создают токи, которые приводят к появлению магнитных полей. Эти поля в свою очередь создают силы Ампера, действующие на токи.

Сила Ампера, действующая на элемент объёма  $dV$ , в котором существует ток с плотностью  $\mathbf{j}$ , равна

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} dV.$$

С учётом этого уравнение движения принимает вид

$$\rho_m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} P + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$

Придадим полученному уравнению другой вид. В соответствии с уравнением Максвелла ток связан с магнитным полем соотношением

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{B}$$

(мы пренебрели токами смещения, т.е. считая скорости изменения полей малыми). Подстановка этого выражения в уравнение движения приводит к следующему уравнению:

$$\rho_m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} P + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}.$$

Данное уравнение позволяет описать основные особенности поведения плазмы в магнитном поле.

### 16.3.3. Пинч-эффект

Плазму можно создать с помощью электрического разряда. Далее возникает задача удержать образовавшийся плазменный шнур от распыления, обусловленного существующим в нём газокинетическим давлением. Этой цели можно добиться, используя различные приёмы, к числу которых относится *пинч-эффект*.

Пинч-эффектом (от англ. *pinch* — сужение, сжатие) называется свойство электрического токового канала уменьшать своё сечение под действием магнитного поля, порождаемого самим током.

Другими словами, токовый плазменный шнур может удерживаться от распыления, и даже сжиматься, благодаря собственному магнитному полю.

Впервые пинч-эффект описал в 1934 г. У. Беннет применительно к потокам быстрых заряженных частиц в газоразрядной плазме. Термин «пинч-эффект» предложил Л. Тонкс в 1937 г., изучавший дуговой разряд.

Различают два типа пинч-эффекта:

- 1)  $z$ -пинч, когда ток течёт вдоль плазменного шнура и взаимодействует с собственным магнитным полем,
- 2)  $\theta$ -пинч, когда на плазменный шнур накладывается продольное магнитное поле, создающее кольцевые токи, в результате взаимодействия которых с полем происходит сжатие шнура.

На рис. 16.3.3 проиллюстрированы эти случаи. Рассмотрим подробнее  $z$ -пинч.

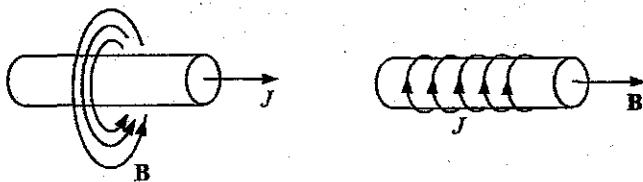


Рис. 16.3.3: слева —  $z$ -пинч, справа —  $\theta$ -пинч

### 16.3.4. Равновесие $z$ -пинча

Будем считать, что

- 1) плотность тока постоянна по сечению плазменного шнура:  
 $j(r) = \text{const}$ , так что полный ток  $J = \pi R^2 j$ ;
- 2) концентрация частиц постоянна:  $n(r) = \text{const}$ .

Магнитное поле внутри шнура находится с помощью теоремы о циркуляции магнитного поля:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{l} = 2\pi r H = \frac{4\pi}{c} J(r).$$

Здесь в качестве контура  $\Gamma$  выбрана окружность радиуса  $r$ , а  $J(r) = j \cdot \pi r^2$  — полный ток, пронизывающий контур  $\Gamma$  (рис. 16.3.4). Отсюда находим

$$B = \frac{2\pi}{c} jr.$$

Перепишем это выражение в виде

$$j = \frac{c}{2\pi r} B.$$

Согласно основному уравнению магнитной гидродинамики условие равновесия можно записать в виде

$$\operatorname{grad} P = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$

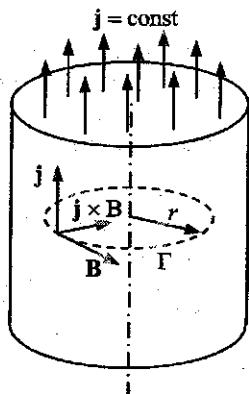


Рис. 16.3.4. К выводу условия равновесия  $z$ -пинча. Контур  $\Gamma$  показан штриховой линией

Поскольку  $\mathbf{j} \perp \mathbf{B}$ , то, как видно из рис. 16.3.4, вектор  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  направлен к оси шнура, причём

$$(\mathbf{j} \times \mathbf{B})_r = -jB = -\frac{2\pi}{c} j^2 r.$$

Соответственно условие равновесия принимает вид

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{2\pi}{c^2} j^2 r \Rightarrow P + \frac{\pi}{c^2} j^2 r^2 = \text{const.}$$

Заменяя в этом равенстве

$$P = nkT, \quad j = \frac{c}{2\pi r} B,$$

перепишем условие равновесия следующим образом:

$$nkT(r) + \frac{B^2(r)}{4\pi} = \text{const.}$$

Полученное равенство можно интерпретировать таким образом, что сумма газокинетического ( $nkT$ ) и магнитного ( $B^2/4\pi$ ) давлений должна быть постоянной в объёме плазмы.

Полагая на внешней границе плазменного шнуря  $T(R) = 0$ , получаем отсюда

$$T(r) = \frac{1}{4\pi kn} [B^2(R) - B^2(r)].$$

Этому соотношению можно придать другой вид, воспользовавшись формулой

$$B = \frac{2\pi}{c} jr = \frac{2J}{cR^2} r.$$

Это даёт

$$T(r) = \frac{\pi}{knc^2} \left( \frac{J}{\pi R^2} \right)^2 (R^2 - r^2).$$

В частности, отсюда следует

$$N_1 kT(0) = J^2 / c^2,$$

где введена погонная плотность частиц плазменного шнуря на его оси  $N_1 = \pi R^2 n$ .

Полученное равенство называется *условием равновесия Беннета* (частный случай).

### 16.3.5. Неустойчивость $z$ -pinча

Плазма — это объект, в котором наблюдаются различные неустойчивости, приводящие к нарушению её однородности, формы. Неустойчивости в свою очередь ограничивают время жизни плазмы. Данное обстоятельство оказывается особенно критичным в задачах термоядерного синтеза, когда плазму требуется удерживать длительное время, чтобы активировать реакцию.

К числу неустойчивостей пинча относится возникновение и развитие перетяжек, как это проиллюстрировано на рис. 16.3.5. Рассмотрим данное явление на примере z-пинча.

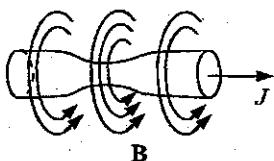


Рис. 16.3.5. Неустойчивость z-пинча — возникновение перетяжек плазменного шнуря

Механизм возникновения перетяжек можно пояснить следующим образом. Пусть в каком-то месте шнуря случайным образом возникло сужение. Поскольку ток, текущий по шнуре, постоянный, то плотность тока возрастает по закону  $j = J/\pi R^2$ . На поверхности шнуря действует магнитное поле  $B(R) = 2J/cR$ . В результате возрастает амперова сила, сжимающая шнур:

$$F_A = \frac{1}{c} jB(R) = \frac{1}{c} \frac{J}{\pi R^2} \frac{2J}{cR} = \frac{2J^2}{c^2 \pi R^3}.$$

Отсюда следует, что сжимающее действие магнитного поля не уравновешивается газокинетическим давлением  $P$ , практически не меняющимся в этом месте. В итоге происходит дальнейшее сужение перетяжки — развивается неустойчивость.

Для борьбы с данной неустойчивостью было предложено «вморозить» в плазму продольное магнитное поле  $B_z^{(e)}$ . Поскольку магнитный поток в проводящей среде сохраняется:

$$\Phi = \pi R^2 B_z^{(e)} = \text{const},$$

то при сужении шнуря поле возрастает:

$$B_z^{(e)} \sim 1/R^2.$$

Вклад этого поля в плотность энергии  $\Delta U \sim B_z^{(e)2} \sim 1/R^4$ . Считаем систему замкнутой, так что работа поля осуществляется за его счёт энергии:

$$\delta A_{\text{поле}} = f \delta R = -\delta U \sim \delta R/R^5.$$

Следовательно,  $f \sim 1/R^5 > 0$ , т.е. возникающая сила противодействует сжимающей шнучок амперовой силе. Кроме того, при уменьшении радиуса пучка эта сила по величине растёт быстрее, чем амперова сила ( $F_A \sim 1/R^3$ ). Таким способом можно стабилизировать z-пинч.

## Глава 17. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

### 17.1. Свободные колебания в колебательном контуре

#### 17.1.1. Квазистационарные процессы

Процесс считается *квазистационарным*, если мгновенные значения тока во всех участках проводника (неразветвлённой цепи) одинаковы, а электрические поля в конденсаторах такие же, как в электростатике.

Сформулируем условие квазистационарности. По электрической цепи распространяется электромагнитный сигнал, скорость которого порядка скорости света. Если частота сигнала  $\omega$ , то соответствующая длина волны порядка  $\lambda = 2\pi c/\omega = cT$ , где  $T = 2\pi/\omega$  — характерный период колебаний или изменений сигнала. Если длина цепи  $l$  такова, что

$$l \ll \lambda, \text{ или } l \ll cT,$$

то во всех участках токи и напряжения меняются синхронно, в одной и той же фазе. Поскольку время прохождения сигналом всей цепи  $\tau \sim l/c$ , то условие квазистационарности можно записать в виде

$$\tau \ll T.$$

#### 17.1.2. Уравнение колебательного контура

Пусть имеется электрическая цепь, включающая ёмкость (конденсатор)  $C$ , индуктивность  $L$ , сопротивление  $R$  и сторонний источник  $\mathcal{E}$  электродвижущей силы (ЭДС) (рис. 17.1.1). Составим уравнение, определяющее изменение тока в цепи<sup>1</sup>. Применим теорему о циркуляции электрического поля к замкнутому контуру  $\Gamma = \{12341\}$ :

$$\oint_{(12341)} E_l dl = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

<sup>1</sup> В этой главе всюду мы используем систему единиц СИ, в которой  $\Phi = LJ$ ,  $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$ .

В правую часть этого равенства входит ЭДС индукции, возникающая в катушке индуктивности при изменении магнитного потока. Дополнительный учёт этого элемента цепи в левой части равенства уже не требуется. Будем считать также, что все сопротивление цепи объединено в один элемент  $R$ . Выберем за положительное направление обхода контура, указанное на рис. 17.1.1 для тока  $J$ .

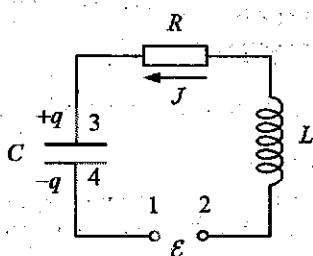


Рис. 17.1.1. Контур, включающий конденсатор, индуктивность, сопротивление и стороннюю ЭДС  $\mathcal{E}$

Выделим теперь в циркуляции отдельные участки, содержащие по одному существенному элементу цепи:

$$\oint_{(12341)} E_i dl = \int_{(12)} E_i dl + \int_{(23)} E_i dl + \int_{(34)} E_i dl + \int_{(41)} E_i dl.$$

Слагаемое  $\int_{(41)} E_i dl = 0$ , поскольку на этом участке нет элементов, меняющих потенциал. Слагаемое

$$\int_{(12)} E_i dl = \varphi_1 - \varphi_2$$

определяет изменение потенциала на участке 12 и учитывает сторонний источник (сток) энергии — электродвижущую силу. ЭДС вводится равенством

$$\mathcal{E} = \varphi_2 - \varphi_1$$

и даёт *приращение* потенциала при переходе этого элемента.

Рассмотрим участок контура 23. На данном участке из не учтённых ранее элементов присутствуют только проводники с проводимостью  $\lambda$ . Пусть площадь поперечного сечения проводника есть  $S$ . Тогда, имея в виду закон Ома  $j = \lambda E$ , и учитывая, что полный ток  $J = jS$  одинаков во всех участках цепи, получаем

$$\int_{(23)} E_i dl = \int_{(23)} \frac{j}{\lambda} dl = \int_{(23)} \frac{J}{\lambda S} dl = J \int_{(23)} \frac{dl}{\lambda S} = JR,$$

где введено сопротивление цепи

$$R = \int_{(23)} \frac{dl}{\lambda S}.$$

Участок контура 34 содержит конденсатор. Считаем, что на верхней пластине имеется заряд  $(+q)$ , а на нижней  $(-q)$ . Тогда ток в положительном направлении связан с зарядом  $q$  соотношением  $J = dq/dt$  и отвечает зарядке верхней пластины конденсатора. По определению напряжение на конденсаторе есть  $V = \varphi_3 - \varphi_4$ . С учётом этого имеем

$$\int_{(34)} E_l dl = \varphi_3 - \varphi_4 = V = \frac{q}{C},$$

где введена ёмкость конденсатора  $C = q/V$ .

С учётом сказанного получаем

$$-\mathcal{E} + JR + \frac{q}{C} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Перепишем это уравнение, имея в виду связь магнитного потока и тока  $\Phi = LJ$ :

$$L \frac{dJ}{dt} + JR + \frac{q}{C} = \mathcal{E}. \quad (17.1.1)$$

### 17.1.3. Уравнение свободных колебаний

Пусть в замкнутой цепи, показанной на рис. 17.1.1, отсутствует источник ЭДС. Тогда уравнение (17.1.1) принимает вид

$$L \frac{dJ}{dt} + JR + \frac{q}{C} = 0.$$

Введём обозначения

$$2\gamma = \frac{R}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

и учтём, что  $J = dq/dt$ . Тогда получаем следующее уравнение:

$$\ddot{q} + 2\gamma \dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (17.1.2)$$

Это уравнение описывает поведение заряда на конденсаторе в отсутствие сторонних источников энергии и называется *уравнением свободных колебаний*.

### 17.1.4. Гармонические колебания

Пусть сопротивление цепи равно нулю:  $R = 0$ . Тогда  $\gamma = 0$ , и мы приходим к уравнению гармонического осциллятора:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Значения амплитуды  $q_0$  и начальной фазы  $\varphi_0$  колебаний определяются из начальных условий. Частота колебаний есть

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Соответственно период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Это соотношение называется *формулой Томсона*.

Система, совершающая колебания, называется *осциллятором*. Осциллятор называется *гармоническим*, если совершаемые им колебания являются гармоническими, т.е. описываются формулой

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Величина  $q_0$  в этом соотношении называется *амплитудой*, а аргумент косинуса  $\varphi = \omega t + \varphi_0$  — *фазой колебаний*.

### 17.1.5. Затухающие колебания

Рассмотрим общий случай уравнения свободных колебаний

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

Введём комплекснозначную функцию  $\hat{q}(t)$ , такую, что  $\operatorname{Re} \hat{q}(t) = q(t)$ , и подчиняющуюся тому же уравнению, что и  $q(t)$ :

$$\frac{d^2 \hat{q}}{dt^2} + 2\gamma \frac{d\hat{q}}{dt} + \omega_0^2 \hat{q} = 0. \quad (17.1.3)$$

Будем искать решение в форме

$$\hat{q}(t) = q_0 e^{i\Omega t}.$$

Подстановка данного выражения в (17.1.3) даёт

$$[-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2] \hat{q} = 0,$$

что приводит к квадратному уравнению для  $\Omega$ :

$$\Omega^2 - 2i\gamma\Omega - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \Omega_{1,2} = i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$

Соответственно общее решение дифференциального уравнения (17.1.3) есть линейная комбинация частных решений, отвечающих двум корням этого квадратного уравнения:

$$\hat{q}(t) = q_{10}e^{i\Omega_1 t} + q_{20}e^{i\Omega_2 t}$$

Коэффициенты  $q_{10}$  и  $q_{20}$  определяются из начальных условий.

Решение исходного уравнения (17.1.2) есть  $q(t) = \operatorname{Re} \hat{q}(t)$ .

Приведём частные случаи.

1) Слабое затухание:  $\omega_0 > \gamma$ .

Обозначим  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ . Тогда  $\Omega_{1,2} = i\gamma \pm \omega$ , и решение можно переписать в виде

$$\hat{q}(t) = e^{-\gamma t} [q_{10}e^{i\omega t} + q_{20}e^{-i\omega t}]$$

Имея в виду формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

и отделяя действительную часть  $q(t) = \operatorname{Re} \hat{q}(t)$ , получим

$$q(t) = e^{-\gamma t} (a \cos \omega t + b \sin \omega t) = q_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Решение содержит две произвольные постоянные  $(a, b)$  или  $(q_0, \varphi_0)$ .

Эти пары констант связаны соотношениями

$$q_0 = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{b}{a}.$$

2) Сильное затухание:  $\omega_0 < \gamma$ .

Обозначим  $\Gamma = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ . Тогда  $\Omega = i(\gamma \pm \Gamma)$ , и решение принимает вид

$$q(t) = e^{-\gamma t} [q_{10}e^{\Gamma t} + q_{20}e^{-\Gamma t}]$$

3) Если  $\omega_0 = \gamma$ , то  $\Omega_1 = \Omega_2$ , и решение вырождается:

$$q(t) = e^{-\gamma t} (C_1 + C_2 t)$$

( $C_1$  и  $C_2$  — произвольные константы).

На рис. 17.1.2 показан график затухающих колебаний. Такие колебания можно представлять как периодические (гармонические) колебания с убывающей амплитудой:

$$q(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi_0), \quad A(t) = q_0 e^{-\gamma t}. \quad (17.1.4)$$

На этом рисунке временная зависимость амплитуды затухающих колебаний показана штриховой линией.

Величина  $\gamma$  показывает, с какой скоростью убывает амплитуда колебаний  $A(t) = q_0 e^{-\gamma t}$ , и называется коэффициентом затухания. Для  $LCR$ -конттура коэффициент затухания равен  $\gamma = R/2L$ . Обратная вели-

чины  $\tau = 1/\gamma$  называется *временем затухания*, и показывает, за какое время амплитуда колебаний убывает в  $e$  раз.

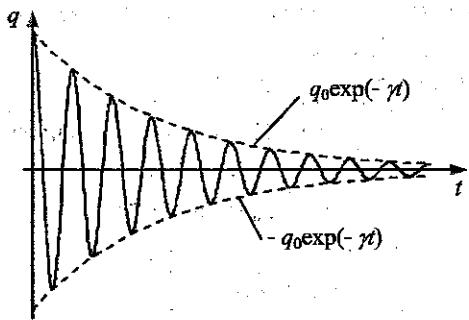


Рис. 17.1.2. Свободные затухающие колебания в колебательном *LCR*-контуре

Введём *фазовую плоскость* как плоскость, по осям координат которой откладываются значения  $q$  и  $\dot{q}$ . Точка  $\{q, \dot{q}\}$  на этой плоскости представляет состояние системы и называется *фазовой точкой*. С течением времени данная точка перемещается, описывая некоторую кривую, называемую *фазовой траекторией*.

На рис. 17.1.3а показан фазовый портрет незатухающих колебаний ( $\gamma = 0$ ). Различным начальным условиям отвечают различные фазовые траектории. На рис. 17.1.3б показана одна из фазовых траекторий  $\{q(t), \dot{q}(t)\}$  для затухающих колебаний ( $\omega_0 > \gamma > 0$ ). Положению равновесия  $\{q = 0, \dot{q} = 0\}$  отвечает начало координат.

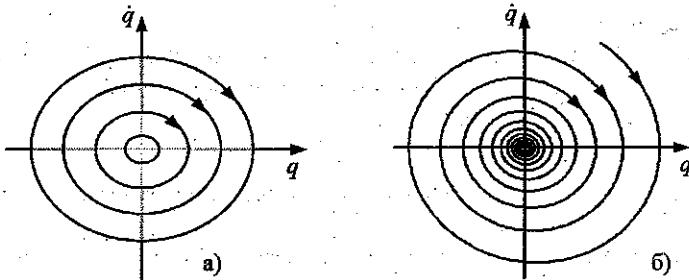


Рис. 17.1.3: а — фазовый портрет незатухающих гармонических колебаний; б — фазовая траектория затухающих колебаний

Остановимся на случае колебаний без затухания. Все фазовые траектории в рассматриваемом случае представляют собой эллизы, уравнения которых можно установить следующим образом. Решение уравнения колебаний в отсутствие омических потерь ( $R = 0$ ,  $\gamma = 0$ ) имеет вид

$$q = q_0 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Для тока  $J = \dot{q}$  отсюда находим

$$\dot{q} = -\omega q_0 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Из последних двух равенств получаем

$$\left( \frac{\dot{q}}{\omega q_0} \right)^2 + \left( \frac{q}{q_0} \right)^2 = 1.$$

Это есть уравнение эллипса с полуосами  $q_0$  и  $\omega q_0$ .

### 17.1.6. Закон сохранения энергии

Запишем дифференциальное уравнение затухающих колебаний в следующей форме:

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = -R\dot{q}.$$

Умножим почленно это уравнение на  $\dot{q}$  и учтём тождества

$$\dot{q}\ddot{q} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{q}^2 \right), \quad \dot{q}q = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} q^2 \right).$$

Поскольку  $\dot{q} = J$ , то получаем равенство

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{LJ^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = -RJ^2. \quad (17.1.5)$$

Величина в скобках

$$W = W_L + W_C, \quad W_L = \frac{LJ^2}{2}, \quad W_C = \frac{q^2}{2C} \quad (17.1.6)$$

есть полная энергия контура, запасённая в катушке индуктивности ( $W_L$ ) и в конденсаторе ( $W_C$ ). Слагаемое в правой части равенства ( $-N = -RJ^2$ ) описывает, согласно закону Джоуля–Ленца, потери энергии. Таким образом, получаем

$$\frac{dW}{dt} = -N.$$

### 17.1.7. Превращения энергии в контуре без потерь

Если сопротивление контура равно нулю, то потери отсутствуют,  $N = 0$ , и энергия сохраняется. При этом заряд на конденсаторе и ток в цепи меняются по закону

$$q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t), \quad J(t) = \dot{q}(t) = -J_0 \sin(\omega_0 t) = J_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right),$$

где введена амплитуда тока  $J_0 = \omega_0 q_0$ . Отсюда видно, что фазы  $q(t)$  и  $J(t)$  сдвинуты на  $\pi/2$ . Соответственно для слагаемых в энергии находим:

$$W_L = \frac{LJ^2}{2} = \frac{LJ_0^2}{2} \cos^2\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{LJ_0^2}{2} \frac{1 - \cos(2\omega_0 t)}{2},$$

$$W_C = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t) = \frac{q_0^2}{2C} \frac{1 + \cos(2\omega_0 t)}{2}.$$

Очевидно, что

$$W_L + W_C = \frac{LJ^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = \frac{LJ_0^2}{2} + \frac{q_0^2}{2C} = \text{const.}$$

Кроме того, в силу соотношений  $J_0 = \omega_0 q_0$ ,  $\omega_0^2 = 1/LC$  получаем

$$W_L^{(0)} = \frac{LJ_0^2}{2} = \frac{L\omega_0^2}{2} q_0^2 = \frac{q_0^2}{2C} = W_C^{(0)}.$$

Таким образом, запасы энергии в катушке индуктивности и в конденсаторе совершают колебания с одинаковой амплитудой, но в противофазе, причём периодически происходит полная перекачка энергии из индуктивности в ёмкость и обратно.

Если контур неидеальный ( $R \neq 0$ ), то энергия теряется. Максимальная скорость потерь достигается в те моменты, когда ток в цепи максимальен, поскольку в эти моменты максимальны джоулевы потери ( $N = RJ^2$ ).

### 17.1.8. Логарифмический декремент

Рассмотрим затухающие колебания (рис. 17.1.4):

$$q(t) = A(t) \cos(\omega t + \phi_0), \quad A(t) = q_0 e^{-\eta t}. \quad (17.1.7)$$

Выберем два последовательных максимума:  $q_n, q_{n+1}$ . Величина

$$\delta = \ln\left(q_n/q_{n+1}\right)$$

называется логарифмическим декрементом. Найдём явное выражение для  $\delta$ .

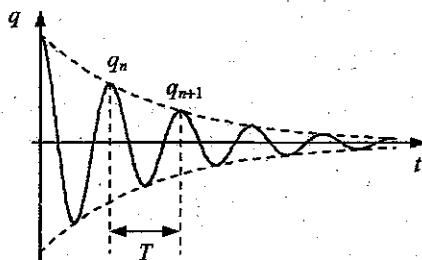


Рис. 17.1.4. Затухающие колебания. К определению логарифмического декремента

Максимумы функции  $q(t)$  определяются из условия  $\dot{q} = 0$ . Из выражения (17.1.7) находим

$$\begin{aligned}\dot{q} &= q_0 e^{-\gamma t} [-\gamma \cos(\omega t + \varphi_0) - \omega \sin(\omega t + \varphi_0)] = \\ &= -q_0 \omega_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0 + \varphi_1).\end{aligned}\quad (17.1.8)$$

Дополнительное слагаемое  $\varphi_1$  в фазе таково, что

$$\cos \varphi_1 = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \omega^2}} = \frac{\gamma}{\omega_0},$$

$$\sin \varphi_1 = -\frac{\omega}{\sqrt{\gamma^2 + \omega^2}} = -\frac{\omega}{\omega_0}.$$

Учтено также, что в соответствии с определением величины  $\omega$  оказывается  $\sqrt{\gamma^2 + \omega^2} = \omega_0$ .

Положим  $\dot{q} = 0$ . Как видно из (17.1.8), промежуток времени между двумя соседними максимумами составляет

$$T = 2\pi/\omega$$

и равен периоду колебаний множителя  $\cos(\omega t + \varphi_0)$  в выражении для  $q(t)$ . Это значит, что согласно (17.1.7)

$$\frac{q_n}{q_{n+1}} = \frac{A(t_n)}{A(t_{n+1})} = e^{\gamma T},$$

откуда следует выражение для логарифмического декремента:

$$\delta = \gamma T = 2\pi\gamma/\omega. \quad (17.1.9)$$

В случае слабого затухания ( $\gamma \ll \omega_0$ ) для  $LCR$ -контура находим:

$$\omega \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \gamma = \frac{R}{2L} \Rightarrow \delta = \frac{2\pi\gamma}{\omega} = \pi R \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (17.1.10)$$

Смысл логарифмического декремента следующий. За характерное время затухания колебаний  $\tau = 1/\gamma$  осциллятор совершил

$$n = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\gamma T} = \frac{1}{\delta}$$

колебаний. Следовательно,  $\delta = 1/n$ .

### 17.1.9. Добротность колебательной системы

Как было сказано, за характерное время затухания осциллятор совершает

$$n = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\gamma T} = \frac{\omega}{2\pi\gamma}$$

колебаний. Величина  $Q = \pi n$ , или

$$Q = \omega/2\gamma \quad (17.1.13)$$

называется *добротностью* колебательной системы. Очевидна связь добротности и логарифмического декремента:  $Q = \pi/\delta$ . Для  $LCR$ -контура со слабым затуханием имеем

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (17.1.12)$$

### 17.1.10. Энергетический смысл добротности

За период колебаний амплитуда колебаний заряда и тока убывает в  $e^{2\gamma T}$  раз. При этом согласно (17.1.6) энергия системы убывает как квадрат амплитуды, т.е. в  $e^{2\gamma T}$  раз. Это значит, что если в начале какого-либо периода колебаний в контуре запасена энергия  $W(t)$ , то к началу следующего цикла в системе остаётся энергия  $W(t+T) = e^{-2\gamma T} W(t)$ . Потери энергии за цикл составляют

$$\Delta W = W(t) - W(t+T) = \left(1 - e^{-2\gamma T}\right) W(t).$$

Считая затухание слабым:  $2\gamma T \ll 1$ , получаем  $\Delta W = 2\gamma T \cdot W(t)$ . Отсюда следует

$$\frac{W}{\Delta W} = \frac{1}{2\gamma T} = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega}{2\gamma} = \frac{1}{2\pi} Q,$$

что и определяет энергетический смысл добротности  $Q$ . Последнюю формулу обычно записывают в виде

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}. \quad (17.1.13)$$

Эту формулу иногда принимают в качестве определения добротности.

## 17.2. Вынужденные колебания под действием гармонической ЭДС

### 17.2.1. Резонанс

Запишем уравнение (17.1.1) для  $LCR$ -контура при наличии ЭДС  $\mathcal{E}$ , изменяющейся по гармоническому закону:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = \mathcal{E}(t), \quad \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t.$$

Переходя от заряда на конденсаторе к напряжению ( $V = q/C$ ) и вводя обозначения

$$\gamma = R/2L, \quad \omega_0^2 = 1/LC, \quad (17.2.1)$$

перепишем это уравнение в виде

$$\ddot{V} + 2\gamma\dot{V} + \omega_0^2 V = \omega_0^2 \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (17.2.2)$$

Для решения полученного уравнения перейдём к комплексному представлению колебаний, положив

$$V(t) \rightarrow \hat{V}(t) = \operatorname{Re} \hat{V}(t) + i \operatorname{Im} \hat{V}(t), \quad V(t) = \operatorname{Re} \hat{V}(t);$$

$$\mathcal{E}(t) \rightarrow \hat{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}, \quad \mathcal{E}(t) = \operatorname{Re} \hat{\mathcal{E}}(t).$$

Тогда вместо (17.2.2) будем иметь дело с уравнением

$$\ddot{\hat{V}} + 2\gamma\dot{\hat{V}} + \omega_0^2 \hat{V} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (17.2.3)$$

Решение последнего уравнения будем искать в виде

$$\hat{V}(t) = \hat{V}_s(t) + \hat{V}_f(t),$$

где слагаемое  $\hat{V}_s(t)$  описывает свободные колебания ( $\langle s \rangle = self$ ), а слагаемое  $\hat{V}_f(t)$  — вынужденные колебания ( $\langle f \rangle = forced$ ):

$$\begin{aligned} \ddot{\hat{V}}_s + 2\gamma\dot{\hat{V}}_s + \omega_0^2 \hat{V}_s &= 0, \\ \ddot{\hat{V}}_f + 2\gamma\dot{\hat{V}}_f + \omega_0^2 \hat{V}_f &= \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (17.2.4)$$

Если коэффициент затухания ненулевой ( $\gamma \neq 0$ ), то свободные колебания со временем затухнут:  $V_s(t) \rightarrow 0$ , и останутся только вынужденные колебания. Найдём решение  $\hat{V}_f(t)$ , отвечающее вынужденным колебаниям.

Будем искать решение в виде

$$\hat{V}_f(t) = \hat{V}_0 e^{i\Omega t}. \quad (17.2.5)$$

Подстановка данного выражения во второе уравнение в (17.2.4) даёт

$$(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega)\hat{V}_0 e^{i\Omega t} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Поскольку такое равенство должно выполняться в любой момент времени, то отсюда следует  $\Omega = \omega$  и

$$\hat{V}_0 = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} \mathcal{E}_0. \quad (17.2.6)$$

Полученная зависимость называется *частотной характеристикой контура*.

Положим

$$\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega = \rho e^{-i\varphi_0}. \quad (17.2.7)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi_0 &= \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \end{aligned} \quad (17.2.8)$$

С учётом этого решения, описывающее вынужденные колебания напряжения, принимает вид

$$V_f = V_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad V_0 = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \mathcal{E}_0. \quad (17.2.9)$$

На рис. 17.2.1 показана зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты  $\omega$  внешней ЭДС, называемая *амплитудно-частотной* (или *амплитудной*) *характеристикой*.

Как видно из рис. 17.2.1, при не слишком большом затухании наблюдается сильное возрастание амплитуды при приближении частоты внешней силы (ЭДС) к некоторой характерной частоте. Это явление называется *резонансом*, а частота  $\omega_n$ , при которой амплитуда достигает максимума, — *резонансной частотой*.

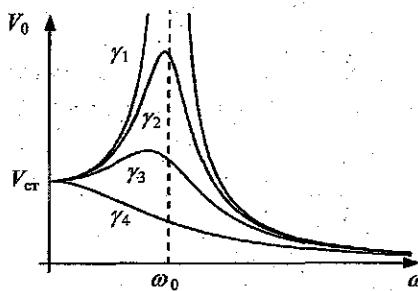


Рис. 17.2.1. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты внешней ЭДС для нескольких значений коэффициента затухания:  $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \gamma_4$ , где  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_4 > \omega_0/\sqrt{2}$

Если затухание отсутствует:  $\gamma = 0$ , то резонансная частота совпадает с собственной частотой осциллятора:  $\omega_m = \omega_0$ . При этом

$$V_0 = \frac{\omega_0^2}{|\omega_0^2 - \omega^2|} \mathcal{E}_0.$$

Если же  $\gamma \neq 0$ , то резонансную частоту можно найти из (17.2.9), полагая  $dV_0/d\omega = 0$ :

$$\omega_m = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}.$$

Если  $\gamma \geq \omega_0/\sqrt{2}$ , то с ростом частоты ЭДС амплитуда колебаний монотонно убывает при всех частотах.

Как видно из (17.2.8), (17.2.9), колебания напряжения  $V_f(t)$  сдвинуты по фазе относительно колебаний ЭДС  $\mathcal{E}(t)$ . На рис. 17.2.2 показана зависимость фазового сдвига  $\varphi_0$  от частоты ЭДС, называемая *фазово-частотной* (или *фазовой*) *характеристикой*.

Во многих практических случаях затухание в колебательных системах мало,  $\gamma \ll \omega_0$ . Найдём для этого случая характеристики резонансной кривой (рис. 17.2.3).

Согласно (17.2.9) резонансная частота  $\omega_m \approx \omega_0$ . Максимум амплитуды достигается при  $\omega \approx \omega_0$  и составляет

$$V_{\max} \approx \frac{\omega_0}{2\gamma} \mathcal{E}_0. \quad (17.2.10)$$

При  $\omega \rightarrow 0$  амплитуда  $V_0$  стремится к пределу

$$V_{\text{cr}} = \mathcal{E}_0. \quad (17.2.11)$$

Этот результат отражает отклик на статическое воздействие  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 = \text{const}$  и при  $\dot{V} = 0, \ddot{V} = 0$  прямо следует из (17.2.2).

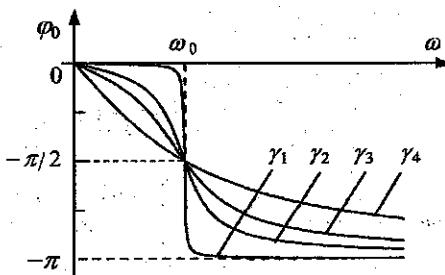


Рис. 17.2.2. Зависимость сдвига фазы колебаний заряда на конденсаторе от частоты колебаний ЭДС для значений коэффициента затухания:  $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \gamma_4$

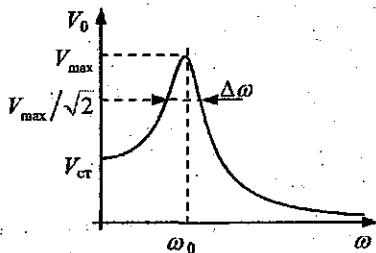


Рис. 17.2.3. Характеристики резонансной кривой

Найдём отношение  $V_{\text{max}}/V_{\text{cr}}$ . Согласно (17.2.10), (17.2.11) имеем

$$\frac{V_{\text{max}}}{V_{\text{cr}}} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = Q. \quad (17.2.12)$$

Это отношение совпадает с добродетью  $Q$  рассматриваемой системы. Таким образом, в резонансе амплитуда колебаний в  $Q$  раз больше, чем статическое отклонение:  $V_{\text{max}} = QV_{\text{cr}}$ .

Амплитуда вынужденных колебаний убывает по мере удаления от резонансной частоты. Найдём ширину резонанса  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ , где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — частоты ниже и выше резонансной, при которых она убывает в  $\sqrt{2}$  раз:

$$V_0(\omega) = V_{\text{max}}/\sqrt{2}.$$

Будем считать затухание слабым. Поскольку при этом  $\omega_m \approx \omega_0$ ,  $V_{\max} = (\omega_0/2\gamma)\mathcal{E}_0$ , то согласно (17.2.9) для нахождения требуемых частот имеем уравнение

$$\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mathcal{E}_0}{2\gamma\omega_0},$$

или

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2 &= 8\gamma^2\omega_0^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (\omega_0^2 - \omega^2)^2 &= 4\gamma^2(2\omega_0^2 - \omega^2) \approx 4\gamma^2\omega_0^2. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что в правой части этого равенства при малых  $\gamma$  можно положить  $\omega \approx \omega_0$ . Таким образом, получаем

$$\omega_0^2 - \omega^2 \approx \pm 2\gamma\omega_0 \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 \left(1 \mp \frac{2\gamma}{\omega_0}\right),$$

откуда следует:

$$\omega_1 = \omega_0 - \gamma, \quad \omega_2 = \omega_0 + \gamma.$$

Следовательно, погранична резонансной кривой по уровню  $1/\sqrt{2}$  составляет

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\gamma.$$

Этот результат можно переписать в другом виде, используя понятие добротности:

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}.$$

Следовательно, чем выше добротность системы, тем уже резонансная кривая.

### 17.2.2. Процесс установления вынужденных колебаний

Рассмотрим  $LC$ -контур (с малым затуханием), подключённый к источнику периодической ЭДС (рис. 17.2.4). Пусть при  $t < 0$  ток в контуре отсутствовал. После замыкания ключа в момент времени  $t = 0$  в контуре благодаря ЭДС появляется ток. Уравнение для напряжения на конденсаторе имеет вид

$$\ddot{V} + \omega_0^2 V = \omega_0^2 \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (17.2.13)$$

Решение этого уравнения запишем, как и выше, в виде суммы двух слагаемых

$$V(t) = V_s(t) + V_f(t),$$

отвечающих соответственно свободным и вынужденным колебаниям. В явном виде имеем

$$V(t) = \underbrace{a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t}_{V_s(t)} + \underbrace{\frac{\omega_0^2 \mathcal{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t}_{V_f(t)}. \quad (17.2.14)$$

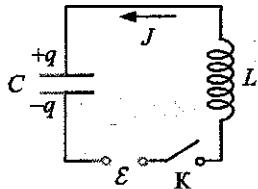


Рис. 17.2.4. Контур, содержащий конденсатор, индуктивность и стороннюю ЭДС. Контур замыкается ключом К

Подберём константы интегрирования  $a$  и  $b$  так, чтобы удовлетворить начальным условиям

$$V(0) = 0, \dot{V}(0) = 0. \quad (17.2.15)$$

Второе условие связано с тем, что наличие индуктивности в цепи не позволяет мгновенно создать ток конечной величины вследствие возникновения ЭДС индукции, препятствующей изменениям тока в катушке индуктивности. Полагая  $t = 0$ , из (17.2.14) находим

$$V(0) = 0 \Rightarrow a + \mathcal{E}_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = 0 \Rightarrow a = -\mathcal{E}_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

$$\dot{V}(0) = 0 \Rightarrow b\omega = 0 \Rightarrow b = 0.$$

С учётом этого находим

$$V(t) = \mathcal{E}_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t). \quad (17.2.16)$$

Преобразуем данное выражение. Положим

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0, \bar{\omega} = \frac{\omega + \omega_0}{2};$$

$$\omega = \bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 = \bar{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2}.$$

Тогда решение (17.2.16) можно переписать в виде

$$V(t) = \mathcal{E}_0 \frac{2\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \sin(\bar{\omega}t). \quad (17.2.17)$$

Если  $|\Delta\omega| \ll \bar{\omega}$ , то найденное решение представляет собой быстро меняющийся гармонический сигнал  $\sin(\bar{\omega}t)$ , амплитуда которого

$$A(t) = \mathcal{E}_0 \frac{2\omega_0^2}{\bar{\omega}^2 - \omega_0^2} \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \quad (17.2.18)$$

медленно меняется по гармоническому закону. Такие колебания называются *биениями*. График биений показан на рис. 17.2.6.

Период высокочастотных колебаний определяется периодом функции  $\sin(\bar{\omega}t)$  и равен

$$T_0 = \frac{2\pi}{\bar{\omega}} = \frac{4\pi}{\omega + \omega_0}$$

В качестве периода огибающей (периода биений) следует взять, как видно из рис. 17.2.6, промежуток времени

$$T_A = \frac{\pi}{\Delta\omega/2} = \frac{2\pi}{\Delta\omega},$$

соответствующий половине периода колебаний амплитуды  $A(t)$ .

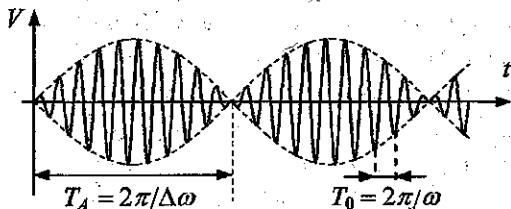


Рис.17.2.6. Биения при установлении колебаний в контуре без потерь

Если коэффициент затухания неизменен, то свободные колебания со временем затухнут:  $V_s(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ , и в контуре установятся гармонические вынужденные колебания  $V_f(t)$ . График, иллюстрирующий установление колебаний, показан на рис. 17.2.7.

### 17.3. Метод комплексных амплитуд. Импеданс

#### 17.3.1. Комплексная амплитуда

Во многих случаях исследование колебательных процессов удобно проводить, используя комплексное представление. Пусть, например, действительная величина  $x(t)$  совершает гармонические колебания:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \phi_0).$$

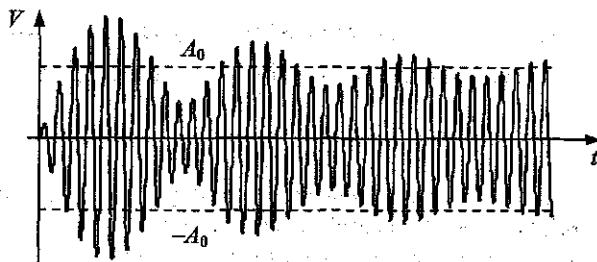


Рис. 17.2.7. Установление вынужденных колебаний при наличии затухания. Горизонтальные штриховые линии показывают амплитуду вынужденных колебаний, устанавливающихся при  $t \rightarrow \infty$ .

Можно ввести такую комплексную функцию

$$z(t) = z_0 e^{i\omega t},$$

что  $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$ . Коэффициент  $z_0$  в этой формуле называется *комплексной амплитудой* величины  $x$ . В рассматриваемом примере

$$z_0 = x_0 e^{i\phi_0}.$$

Таким образом, комплексная амплитуда несёт информацию как об амплитуде  $x_0$ , так и о начальной фазе  $\phi_0$  колебания  $x(t)$ .

### 17.3.2. Закон Ома в комплексной форме. Импеданс

Рассмотрим последовательный *LCR*-колебательный контур, содержащий периодическую ЭДС (рис. 17.3.1). Рассматривая комплексное представление колебаний, запишем уравнение (17.1.1):

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}(t), \quad \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (17.3.1)$$

Мы будем рассматривать только вынужденные колебания. Тогда

$$q = q_0 e^{i\omega t}. \quad (17.3.2)$$

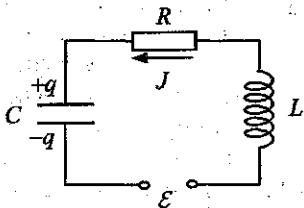
Соответственно для тока в цепи имеем

$$J = \dot{q} = i\omega q_0 e^{i\omega t} = J_0 e^{i\omega t}. \quad (17.3.3)$$

Составим дифференциальное уравнение непосредственно для тока. Для этого продифференцируем почленно уравнение (17.3.1) и учтём, что  $\dot{\mathcal{E}}(t) = i\omega \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} = i\omega \mathcal{E}(t)$ :

$$L\ddot{J} + R\dot{J} + \frac{J}{C} = i\omega \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (17.3.4)$$

Рис. 17.3.1. Контур, включающий конденсатор, индуктивность, сопротивление и стороннюю ЭДС. Стрелка рядом с током указывает положительное направление обхода контура



Полагая, как в (17.3.3),  $J = J_0 e^{i\omega t}$ , перепишем это уравнение в виде

$$\left( L(i\omega)^2 + R \cdot i\omega + \frac{1}{C} \right) J = i\omega \mathcal{E}.$$

Поделив обе стороны последнего равенства на  $i\omega$ , получим

$$\left( i\omega L + R + \frac{1}{i\omega C} \right) J = \mathcal{E}.$$

Наконец, введя обозначение для величины в скобках

$$Z = R + i\omega + \frac{1}{i\omega C} = R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right), \quad (17.3.5)$$

получим окончательно

$$JZ = \mathcal{E}. \quad (17.3.6)$$

Введенная в (17.3.5) величина  $Z$  называется *импедансом*<sup>1</sup>, или *комплексным сопротивлением*, электрической цепи. Величину

$$\operatorname{Re} Z = R$$

называют *активным* (или *омическим*) *сопротивлением*, а величину

$$\operatorname{Im} Z = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

— *реактивным сопротивлением*. Активное сопротивление приводит к потерям энергии в контуре, тогда как реактивное не меняет энергию, но может менять динамику изменения тока. Сказанное следует из закона сохранения энергии для контура, показанного на рис. 17.3.1:

$$\frac{dW}{dt} = -RJ^2 + J\mathcal{E}, \quad W = \frac{LJ^2}{2} + \frac{q^2}{2C}. \quad (17.3.7)$$

Здесь в правой части уравнения учтены поступления энергии от внешней ЭДС ( $J\mathcal{E}$ ), производящей работу над токами по закону Джоуля—Ленца, а также потери энергии в активном сопротивлении ( $-RJ^2$ ).

<sup>1</sup> Импеданс — от англ. *impede* — мешать, препятствовать.

Импеданс единообразно учитывает все элементы цепи: индуктивность, ёмкость и активное сопротивление.

Если конденсатор в цепи отсутствует, то реактивное сопротивление определяется только индуктивностью:  $\text{Im } Z = \omega L$ . Если требуется в каких-либо формулах перейти к случаю, когда ёмкостные элементы отсутствуют, то это можно сделать, формально перейдя к пределу  $1/C \rightarrow 0$  или  $C \rightarrow \infty$ . Оправданность такого предельного перехода связана с тем, что каждый из элементов цепи определяет некоторое изменение потенциала. И поэтому, чтобы конденсатор не менял разность потенциалов на участке, где он находится, т.е. чтобы напряжение на его обкладках

$$\int_{\text{(по конден-}} E_l dl = V = q/C \text{атору)}$$

всегда равнялось нулю, достаточно положить  $C = \infty$ .

### 17.3.3. Векторные диаграммы

Запишем закон Ома для контура, показанного на рис. 17.3.1:

$$RJ + i\omega LJ - i\frac{1}{\omega C}J = \mathcal{E}. \quad (17.3.8)$$

Представим это соотношение на комплексной плоскости, рассматривая комплексные амплитуды входящих сюда величин. Нас будет интересовать относительное расположение векторов, представляющих слагаемые в (17.3.8). Поэтому условно выберем направление вектора  $J$  вдоль действительной оси. Тогда слагаемое  $RJ$  представляется вектором, направленным вдоль той же оси, а слагаемые  $(i\omega L)J$  и  $(-i/\omega C)J$  — векторами вдоль мнимой оси (рис. 17.3.2 справа).

Сумма трёх векторов в левой части уравнения (17.3.8) даёт вектор  $\mathcal{E}$ . Из диаграммы видно, что длина этого вектора (амплитуда колебаний ЭДС) связана с длиной вектора тока (амплитудой колебаний тока) соотношением

$$\mathcal{E}_0^2 = R^2 J_0^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 J_0^2, \quad (17.3.9)$$

или

$$J_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}. \quad (17.3.10)$$

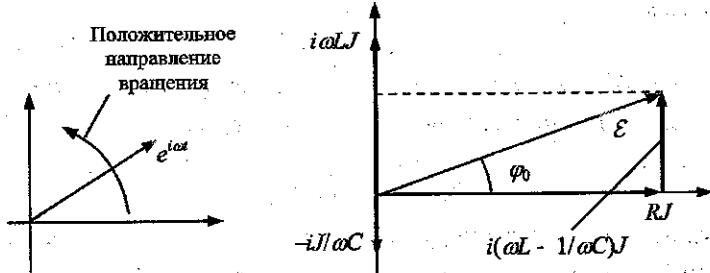


Рис. 17.3.2. Слева — положительное направление вращения вектора, представляющего общий фазовый множитель  $\exp(i\omega t)$  слагаемых в (17.3.8); справа — векторная диаграмма для  $LCR$ -контура, показанного на рис. 17.3.1, для случая  $\omega L > 1/\omega C$

Кроме того, сдвиг фаз  $\varphi_0$  между током и ЭДС определяется из формулы

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \frac{\omega L}{R} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right). \quad (17.3.11)$$

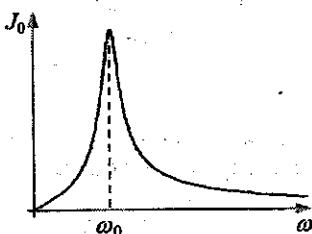
Для случая  $\omega L > 1/\omega C$ , или  $\omega^2 > \omega_0^2$ , отражённого на рис. 17.3.2, колебания тока отстают по фазе от колебаний ЭДС.

С учётом сказанного решение уравнения (17.3.4), описывающее вынужденные колебания, имеет вид

$$J = E_0 \cos(\omega t - \varphi_0). \quad (17.3.12)$$

Зависимость амплитуды колебаний тока в последовательном  $LCR$ -контуре от частоты колебаний ЭДС показана на рис. 17.3.3.

Рис. 17.3.3. Зависимость амплитуды колебаний тока от частоты колебаний ЭДС — резонанс напряжения на конденсаторе и ЭДС в  $LCR$ -контуре (рис. 17.3.1)



Как следует из (17.3.10), максимум амплитуды тока  $J_0(\omega)$  всегда достигается на частоте

$$\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC} \quad (17.3.13)$$

и составляет

$$J_{0, \max} = \mathcal{E}_0 / R. \quad (17.3.14)$$

Этот результат следует из того, что на частоте  $\omega_0$  индуктивный и ёмкостный импедансы точно компенсируют друг друга:

$$Z_L + Z_C = \left( i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \right)_{\omega=\sqrt{LC}} = 0. \quad (17.3.15)$$

В результате импеданс контура сводится к активному сопротивлению  $R$ .

#### 17.3.4. Резонанс напряжений и токов

*Резонансом напряжений* называют резонанс в последовательном *LCR*-контуре (рис. 17.3.1) при изменении частоты колебаний ЭДС. В частности, резонансным образом ведёт себя амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе  $V_0$ . Эта зависимость показана на рис. 17.3.3.

Рассмотрим контур, в котором элементы  $L$ ,  $C$ ,  $R$  соединены параллельно и подключены к источнику переменного тока (рис. 17.3.4). Предполагается, что амплитуда колебаний тока, создаваемого источником, неизменна, т.е. не зависит от значений индуктивности, ёмкости и сопротивления элементов контура. Резонанс в таком параллельном контуре (рис. 17.3.4) называют *резонансом токов*. Рассмотрим это явление подробнее.

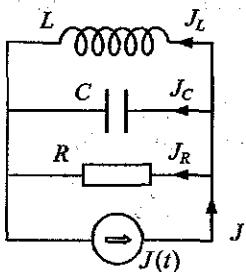


Рис. 17.3.4. Параллельный *LCR*-контур, включающий источник заданного переменного тока  $J(t) = J_0 \cos \omega t$ . Направления токов в отдельных элементах выбраны условно

Поскольку элементы контура соединены параллельно, то импеданс цепи  $Z$  определяется из равенств

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C}, \quad Z_R = R, \quad Z_L = i\omega L, \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}. \quad (17.3.16)$$

Ток во внешней части цепи равен сумме токов через отдельные элементы:

$$J = J_R + J_L + J_C. \quad (17.3.17)$$

Обозначим напряжение, создаваемое источником тока как  $U$ . Тогда

$$U = JZ. \quad (17.3.18)$$

Поскольку напряжение на всех параллельно соединённых элементах одинаково, то

$$J_R = \frac{U}{Z_R} = \frac{U}{R}, \quad J_L = \frac{U}{Z_L} = \frac{U}{i\omega L}, \quad J_C = \frac{U}{Z_C} = i\omega C U. \quad (17.3.19)$$

С учётом (17.3.18) перепишем это выражения в виде

$$J_R = J \frac{Z}{R}, \quad J_L = J \frac{Z}{Z_L}, \quad J_C = J \frac{Z}{Z_C}. \quad (17.3.20)$$

В более подробной записи имеем

$$J_R = \frac{J}{1 + \frac{R}{i\omega L} + i\omega CR}, \quad J_L = \frac{J}{1 - \omega^2 LC + \frac{i\omega L}{R}}, \quad J_C = \frac{J}{1 - \frac{1}{\omega^2 LC} + \frac{1}{i\omega CR}}.$$

Отсюда, в частности, следует, что амплитуда тока, текущего через активное сопротивление, равна

$$J_{R0} = \frac{J_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L} - \omega CR\right)^2}} = \frac{J_0}{\sqrt{1 + \frac{4\gamma^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}}. \quad (17.3.21)$$

Здесь учтены соотношения

$$R/L = 2\gamma, \quad 1/LC = \omega_0^2. \quad (17.3.22)$$

Из (17.3.21) видно, что имеет место резонансное поведение тока  $J_R$ , причём максимум амплитуды достигается при  $\omega = \omega_0$  и составляет  $(J_{R0})_{\max} = J_0$ . Это значит, что весь ток от источника течёт только через активное сопротивление. Дело в том, что на резонансной частоте сопротивление блока, состоящего из параллельно соединённых конденсатора и катушки индуктивности, обращается в бесконечность, и ток через этот блок не течёт.

Запишем также выражения для амплитуд токов через катушку индуктивности и конденсатор. Поскольку согласно (17.3.20)

$$J_{L0} = J_{R0} \frac{R}{|Z_L|} = J_{R0} \frac{R}{\omega L}, \quad J_{C0} = J_{R0} \frac{R}{|Z_C|} = J_{R0} \omega RC,$$

то с учётом (17.3.21) и (17.3.22) получим следующие выражения:

$$J_{L0} = \frac{J_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{4\gamma^2}}}, \quad J_{C0} = \frac{J_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0^2}{2\gamma\omega}\right)^2}}.$$

Когда частота колебаний тока совпадает с  $\omega_0$ , находим

$$J_{L0} = \frac{2\gamma}{\omega_0} J_0, \quad J_{C0} = \frac{2\gamma}{\omega_0} J_0,$$

или, введя добротность  $Q = \omega/2\gamma$ ,

$$J_{L0} = J_{C0} = J_0/Q.$$

Таким образом, на резонансной частоте по замкнутому  $LC$ -конттуру циркулирует ненулевой ток. Этот ток возникает на начальной стадии при включении внешнего источника и оказывается тем меньше, чем выше добротность цепи (меньше сопротивление  $R$ ).

Отметим, что если бы вместо источника тока использовался источник ЭДС, то во внешней цепи присутствовал бы ток

$$J_0 = \mathcal{E}_0/|Z|.$$

Согласно (17.3.16) модуль импеданса цепи равен

$$|Z| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{1 + \frac{4\gamma^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}}.$$

На частоте  $\omega = \omega_0$  эта величина достигает максимума  $|Z| = R$ . Следовательно, при наличии источника ЭДС мы имели бы во внешней цепи на данной частоте **минимум тока**, а не максимум, как в последовательном контуре. Такое явление называют **антирезонансом**.

### 17.3.5. Правила Кирхгофа для переменных токов

Расчёт произвольных квазистационарных цепей (как неразветвлённых, так и разветвлённых) при наличии переменных ЭДС может осуществляться по правилам Кирхгофа, аналогичных тем, что имеют место в случае постоянных токов и напряжений. Разница состоит лишь в замене сопротивлений  $R$  на импедансы  $Z$ .

Правила такие.

1) Сумма токов, входящих в узел (с учётом знаков), равна нулю (рис. 17.3.5):

$$\sum_k J_k = 0.$$

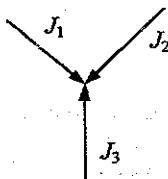
Данное правило есть следствие закона сохранения заряда и утверждает, что в узле заряды не могут накапливаться.

2) Для любого замкнутого контура в квазистационарной электрической цепи выполняется равенство

$$\sum_k J_k Z_k = \sum_i \mathcal{E}_i,$$

где  $\mathcal{E}_i$  — ЭДС, входящие в выбранный контур,  $J_k$  — токи через элементы контура, имеющие импедансы  $Z_k$ .

Рис. 17.3.5. Первое правило Кирхгофа: сумма токов, входящих в узел, равна нулю



Это правило непосредственно вытекает из закона индукции (теоремы о циркуляции для электрического поля в интегральной форме):

$$\oint_{\Gamma} E_t dl = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad \Phi = LJ.$$

### 17.3.6. Сложение импедансов

Правила Кирхгофа позволяют установить правила сложения импедансов.

1) *Параллельно соединённые импедансы* (рис. 17.3.6).

По первому правилу Кирхгофа имеем

$$J = J_1 + J_2. \quad (17.3.23)$$

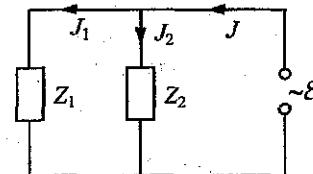


Рис. 17.3.6. Два параллельно соединённых импеданса подключены к источнику ЭДС

Для применения второго правила выберем два контура, в которых присутствуют ЭДС и один из импедансов. Это даёт два равенства:

$$\begin{aligned} J_1 Z_1 &= \mathcal{E} \quad \text{— для контура } (Z_1, \mathcal{E}), \\ J_2 Z_2 &= \mathcal{E} \quad \text{— для контура } (Z_2, \mathcal{E}). \end{aligned} \quad (17.3.24)$$

Полный импеданс цепи  $Z$  определяется из соотношения

$$J = \mathcal{E}/Z. \quad (17.3.25)$$

Используя равенства (17.3.23) и (17.3.24), перепишем равенство (17.3.25) в виде

$$J = J_1 + J_2, \text{ или } \frac{E}{Z} = \frac{E}{Z_1} + \frac{E}{Z_2}.$$

Отсюда получаем правило сложения параллельно соединённых импедансов:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}. \quad (17.3.26)$$

## 2) Последовательно соединённые импедансы (рис. 17.3.7).

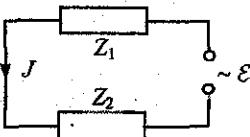


Рис. 17.3.7. Контур, включающий ЭДС и два последовательно соединённых импеданса. Направление тока  $J$  указано условно

Для всей цепи с полным импедансом  $Z$  имеем

$$E = JZ.$$

С другой стороны, поскольку во всех участках неразветвлённой цепи ток один и тот же, то по второму правилу Кирхгофа находим

$$E = JZ_1 + JZ_2.$$

Сравнивая два равенства, получаем

$$Z = Z_1 + Z_2. \quad (17.3.27)$$

Правила сложения импедансов единообразно описывают сложение ёмкостей, индуктивностей и активных сопротивлений. Пусть, например, два импеданса включают только ёмкости:

$$Z_1 = \frac{1}{i\omega C_1}, \quad Z_2 = \frac{1}{i\omega C_2}.$$

Тогда ёмкость системы двух параллельно соединённых конденсаторов вычисляется с помощью правила (17.3.26):

$$\frac{1}{Z} = i\omega C, \quad \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = i\omega C_1 + i\omega C_2 \Rightarrow C = C_1 + C_2. \quad (17.3.28)$$

Подобным же образом в случае последовательно соединённых конденсаторов, используя правило (17.3.27), находим:

$$Z = \frac{1}{i\omega C}, \quad Z_1 + Z_2 = \frac{1}{i\omega C_1} + \frac{1}{i\omega C_2} \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (17.3.29)$$

В обоих случаях мы пришли к известным из электростатики правилам сложения ёмкостей.

### 17.3.7. Мощность переменного тока

В соответствии с законом Джоуля–Ленца (в интегральной форме) мощность, рассеиваемая током в проводящей среде, равна  $\bar{Q} = \bar{\mathcal{E}}\bar{J}$ . В случае переменных периодически меняющихся токов и напряжений интерес представляет среднее значение мощности за период колебаний:

$$\bar{Q} = \bar{\mathcal{E}}\bar{J} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \mathcal{E}(t_1)J(t_1)dt_1. \quad (17.3.30)$$

В эту формулу входят действительные величины. Поэтому пользоваться комплексным представлением следует более осторожно. Положим

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}(\hat{\mathcal{E}}(t) + \hat{\mathcal{E}}^*(t)), \quad J(t) = \frac{1}{2}(\hat{J}(t) + \hat{J}^*(t)).$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t)J(t) &= \frac{1}{4}(\hat{\mathcal{E}}(t) + \hat{\mathcal{E}}^*(t))(\hat{J}(t) + \hat{J}^*(t)) = \\ &= \frac{1}{4}[\hat{\mathcal{E}}(t)\hat{J}(t) + \hat{\mathcal{E}}^*(t)\hat{J}^*(t) + \hat{\mathcal{E}}(t)\hat{J}^*(t) + \hat{\mathcal{E}}^*(t)\hat{J}(t)] = \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Re}[\hat{\mathcal{E}}(t)\hat{J}(t) + \hat{\mathcal{E}}(t)\hat{J}^*(t)]. \end{aligned}$$

Для нахождения среднего учтём, что

$$\hat{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}, \quad \hat{J}(t) = J_0 e^{i\omega t} e^{i\phi_0} \quad (17.3.31)$$

(амплитуды  $\mathcal{E}_0$  и  $J_0$  здесь считаются действительными величинами). Это значит, что слагаемое  $\hat{\mathcal{E}}(t)\hat{J}(t)$  осциллирует с частотой  $2\omega$  и его среднее значение по периоду  $T = 2\pi/\omega$  равно нулю:

$$\overline{\hat{\mathcal{E}}(t)\hat{J}(t)} = \mathcal{E}_0 J_0 e^{i\phi_0} \overline{\exp[2i\omega t]} = \mathcal{E}_0 J_0 e^{i\phi_0} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \exp[2i\omega t_1] dt_1 = 0.$$

Аналогично устанавливается, что

$$\overline{\hat{\mathcal{E}}^*(t)\hat{J}^*(t)} = 0.$$

В результате из (17.3.30) получаем

$$\bar{Q} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}[\hat{\mathcal{E}}(t)\hat{J}^*(t)]. \quad (17.3.32)$$

С учётом сдвига фаз между током и ЭДС отсюда находим

$$\bar{Q} = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0 J_0 \operatorname{Re}[e^{-i\phi_0}] = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0 J_0 \cos\phi_0. \quad (17.3.33)$$

Введём эффективные значения амплитуд напряжения и тока:

$$J_{\text{eff}} = \sqrt{\bar{J}^2(t)} = \frac{1}{\sqrt{2}} J_0, \quad \mathcal{E}_{\text{eff}} = \sqrt{\bar{\mathcal{E}}^2(t)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{E}_0.$$

Тогда соотношение (10) принимает вид

$$\bar{Q} = \mathcal{E}_{\text{eff}} J_{\text{eff}} \cos \varphi_0. \quad (17.3.34)$$

Эта формула показывает, что чем больше сдвиг фаз между током и напряжением, тем меньшее рассеиваемая в сопротивлении мощность. В случае резонанса, когда  $\operatorname{tg} \varphi_0 = 0$ , потребляемая мощность максимальна:  $\bar{Q} = \mathcal{E}_{\text{eff}} J_{\text{eff}}$ .

Перепишем соотношение (17.3.32), учитывая закон Ома:  $\mathcal{E} = JZ$ , а также равенства  $\operatorname{Re} Z = R$ ,  $|\hat{J}|^2 = J_0^2$ :

$$\bar{Q} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\hat{\mathcal{E}}(t) \hat{J}^*(t)) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (Z |\hat{J}|^2) = \frac{1}{2} R J_0^2 = R J_{\text{eff}}^2. \quad (17.3.35)$$

Последняя формула показывает, что в отсутствие активного сопротивления переменный ток работы не совершает.

## 17.4. Ряд и интеграл Фурье

### 17.4.1. Теорема Фурье. Ряд Фурье

Пусть функция  $f(t)$  — непрерывная и периодическая с периодом  $T$ , т.е.  $f(t+T) = f(t)$ , то эта функция может быть представлена в виде ряда

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{i\omega_k t}, \quad (17.4.1)$$

где

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T} = k\omega, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Сумма (17.4.1) называется *рядом Фурье* функции  $f(t)$  (точнее — комплексной формой ряда Фурье). В отдельных случаях в этой сумме может содержаться конечное число слагаемых.

Величина  $\omega = 2\pi/T$  есть основная частота, определяющая период функции.

Коэффициенты  $C_k$  в сумме (17.4.1) могут быть найдены по формуле

$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_k t} dt, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{T}. \quad (17.4.2)$$

Эти величины называются *коэффициентами Фурье* функции  $f(t)$ . Вследствие периодичности функции  $f(t)$  и множителей

$$\exp(i\omega_k t) = \exp\left(2\pi i \frac{t}{T} k\right)$$

подынтегральное выражение в (17.4.2) периодично с периодом  $T$ , так что пределы интегрирования можно одновременно сдвинуть на произвольное число, т.е. записать (17.4.2) в эквивалентной форме:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-i\omega_k t} dt.$$

Во многих случаях удобно положить  $t_0 = -T/2$ , так что интеграл оказывается в симметричных пределах:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_k t} dt. \quad (17.4.3)$$

Пусть функция  $f(t)$  — действительная:  $f^*(t) = f(t)$ . Поскольку  $\omega_k = k\omega$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  и  $\omega_k = -\omega_{-k}$ , то из (17.4.3) следует

$$C_k^* = C_{-k}. \quad (17.4.4)$$

#### 17.4.2. Векторная интерпретация теоремы Фурье

Теорему Фурье можно интерпретировать следующим образом. Введём векторное функциональное пространство с базисом

$$\{e_k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad e_k = e^{ik\omega t} \quad (17.4.5)$$

и скалярное произведение в этом пространстве:

$$(u, v) = \frac{1}{T} \int_0^T u^*(t)v(t) dt.$$

Тогда векторы базиса взаимно ортогональны. Действительно, при  $k \neq n$

$$\begin{aligned} (e_k, e_n) &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{-ik\omega t} e^{in\omega t} dt = \frac{1}{i(n-k)\omega T} (e^{i(n-k)\omega T} - 1) = \\ &= \frac{1}{2\pi i(n-k)} (e^{2\pi i(n-k)} - 1). \end{aligned}$$

Отсюда вследствие тождества  $e^{2\pi i} = 1$  получаем  $(e_k, e_n) = 0$ .

Базисные векторы являются также нормированными, т.е.  $(e_k, e_k) = 1$  для всех  $k$ . Действительно,

$$(e_k, e_k) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-ik\omega t} e^{ik\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T dt = 1.$$

Свойство ортого нормированности базиса кратко записывается в виде  
 $(e_k, e_n) = \delta_{kn}$ , где

$$\delta_{kn} = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n \end{cases} \quad (17.4.6)$$

— единичный символ Кронекера.

С учётом сказанного ряд Фурье функции  $f(t)$  может быть записан в виде разложения вектора  $f(t)$  по базису  $\{e_k\}$ :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e_k(t). \quad (17.4.7)$$

Коэффициенты Фурье  $C_k$  представляют собой проекции вектора  $f$  на направления, задаваемые векторами базиса  $e_k$ , и могут быть найдены как скалярные произведения вектора  $f$  и базисных векторов  $e_k$ :

$$C_k = (e_k, f) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-ik\omega t} f(t) dt.$$

### 17.4.3. Примеры разложения в ряд Фурье

1) Построим разложение в ряд Фурье для функции  $f(t) = f_0 \cos \omega_0 t$ . В данном случае задача прямо решается применением формулы Эйлера  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ :

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{f_0}{2} e^{-i\omega_0 t} + \frac{f_0}{2} e^{i\omega_0 t}.$$

Аналогично, ряд Фурье функции  $f(t) = f_0 \sin(\omega_0 t)$  содержит всего два члена:

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{if_0}{2} e^{-i\omega_0 t} - \frac{if_0}{2} e^{i\omega_0 t}.$$

2) Найдём ряд Фурье для периодической функции, показанной на рис. 17.4.1 и представляющей собой последовательность прямоугольных импульсов длительностью  $\tau$  каждый, следующих с периодом  $T$ .

Коэффициенты Фурье для этой функции определяются по формуле (17.4.3):

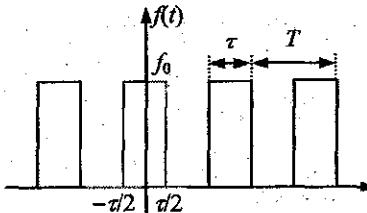
$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ik\omega_k t} dt = \frac{f_0}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-ik\omega_k t} dt,$$

или, после вычисления интеграла,

$$C_k = \frac{f_0}{i\omega_k T} [e^{i\omega_k \tau/2} - e^{-i\omega_k \tau/2}] = f_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(\omega_k \tau/2)}{\omega_k \tau/2} = \frac{f_0}{\pi k} \sin\left(\frac{\tau}{T} \pi k\right).$$

В последней формуле учтено, что  $\omega_k = 2\pi k/T$ .

Рис. 17.4.1. Функция  $f(t)$ , описывающая периодическую последовательность прямоугольных импульсов длительностью  $\tau$  каждый



На рис. 17.4.2 приведён график зависимости фурье-компонент  $C_k$  от частоты  $\omega_k$ . Штриховой линией показана огибающая спектра.

$$a(\omega) = f_0 \frac{\tau \sin(\omega\tau/2)}{T \frac{\omega\tau/2}{\pi}}. \quad (17.4.8)$$

Стрелками показаны фурье-компоненты для случая  $T = 4\tau$  — они образуют дискретный набор.

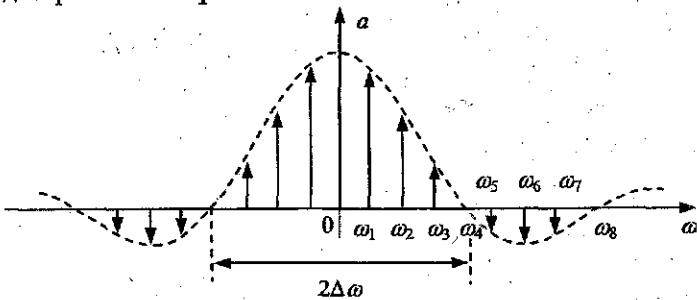


Рис. 17.4.2. Фурье-спектр (коэффициенты ряда Фурье) функции на рис. 17.4.1 для случая  $T = 4\tau$ . Штриховая линия — огибающая спектра (17.4.8)

Как видно из рис. 17.4.2 и формулы (17.4.8), гармоники с наибольшей амплитудой сосредоточены в главном лепестке, т.е. на интервале  $-\pi \leq \omega\tau/2 \leq \pi$  или

$$-2\pi/\tau \leq \omega \leq 2\pi/\tau.$$

Иными словами, полуширина главного максимума составляет  $\Delta\omega = 2\pi/\tau$  (взята полуширина, поскольку вследствие (17.4.4) отрица-

тельные частоты не вносят новых гармоник — новых периодов — в спектр Фурье). Это означает, что длительность отдельного импульса и характерная ширина спектра связаны соотношением  $\tau \cdot \Delta\omega \sim 2\pi$ .

#### 17.4.4. Действительная форма ряда Фурье

Наряду с комплексной формой ряда Фурье используется действительная форма, которая строится следующим образом. Запишем ряд Фурье:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\omega_k t}, \quad C_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_k t} dt, \quad \omega_k = k\omega = \frac{2\pi}{T} k.$$

Считаем функцию  $f(t)$  действительной. Тогда коэффициенты  $C_k$  удовлетворяют условию

$$C_{-k} = C_k^*,$$

непосредственно вытекающему из выражения для них. С учётом этого перепишем ряд Фурье:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\omega_k t} = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k e^{i\omega_k t} + C_{-k} e^{-i\omega_k t}) = \\ &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k e^{i\omega_k t} + C_k^* e^{-i\omega_k t}) = \\ &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(C_k + C_k^*) \cos \omega_k t + i(C_k - C_k^*) \sin \omega_k t]. \end{aligned}$$

Введём обозначения

$$a_0 = C_0,$$

$$a_k = C_k + C_k^* = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) (e^{-i\omega_k t} + e^{i\omega_k t}) dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_k t) dt,$$

$$b_k = i(C_k - C_k^*) = i \frac{1}{T} \int_0^T f(t) (e^{-i\omega_k t} - e^{i\omega_k t}) dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega_k t) dt.$$

Это — действительные числа. Таким образом, приходим к действительной форме ряда Фурье, применяемой для разложения действительных функций:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t).$$

Коэффициенты  $a_k, b_k$  находятся по формулам

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_k t) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega_k t) dt.$$

### 17.4.5. Интеграл Фурье

Обобщение разложения Фурье на случай непериодических функций, определённых на бесконечном временном интервале, производится следующим образом. Пусть вначале функция имеет большой период  $T$ , который впоследствии будет устремлён к бесконечности:  $T \rightarrow \infty$ . Обозначим основную частоту как  $\Delta\omega = 2\pi/T$ . Тогда  $T = 2\pi/\Delta\omega$ . Обозначим также  $\omega_k = k\Delta\omega$ . Подставим эти выражения в формулу (17.4.3) для коэффициентов ряда Фурье:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\omega_k t}, \quad C_k = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_k t} dt. \quad (17.4.9)$$

Введём вместо коэффициентов  $C_k$  коэффициенты  $a_k$  по формуле

$$C_k = \frac{\Delta\omega}{2\pi} a_k, \text{ так что}$$

$$a_k = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_k t} dt.$$

Переходя к пределу  $T \rightarrow \infty$ , мы можем рассматривать уже не дискретный набор чисел  $\{\omega_k = 2\pi k/T, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ , а непрерывную переменную  $\omega$  и, следовательно, функцию

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (17.4.10)$$

При этом из (17.4.9) следует

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{i\omega_k t} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \Rightarrow f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Это соотношение совместно с (17.4.10) даёт разложение произвольной интегрируемой функции в интеграл Фурье:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad a(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (17.4.11)$$

Функция  $a(\omega)$  называется фурье-спектром функции  $f(t)$ .

Заметим, что фурье-спектр действительных функций удовлетворяет соотношению

$$a^*(\omega) = a(-\omega), \quad (17.4.12)$$

аналогичному соотношению (17.4.4) для коэффициентов ряда Фурье периодических функций.

#### 17.4.6. Пример спектрального разложения

Получим разложение Фурье для функции, принимающей постоянное значение  $f_0$  на отрезке  $-\tau/2 \leq t \leq \tau/2$ , а всюду вне этого отрезка обращающейся в нуль (рис. 17.4.3).

Функция непериодическая, и она разлагается в интеграл Фурье.

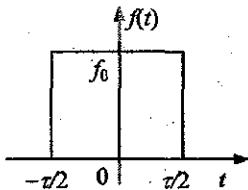


Рис. 17.4.3. Функция, описывающая импульс длительностью  $\tau$ . Площадь, ограниченная кривой, равна  $f_0\tau$ .

Аналитически функция задаётся следующими соотношениями:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < -\tau/2, \\ f_0, & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2, \\ 0, & t > \tau/2. \end{cases} \quad (17.4.13)$$

Фурье-спектр этой функции определяется по формуле (17.4.11):

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = f_0 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{f_0}{i\omega} \left( e^{i\omega\tau/2} - e^{-i\omega\tau/2} \right) = f_0 \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}. \end{aligned} \quad (17.4.14)$$

Далее можно представить функцию (17.4.13) в виде интеграла Фурье:

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} a(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{f_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega} d\omega = \\ &= \frac{f_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega} d\omega. \end{aligned}$$

В последнем преобразовании мы учли, что  $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ , а также то, что функция  $\sin \omega t$  — нечётная и даёт нулевой вклад в интеграл в симметричных пределах.

### 17.4.7. $\delta$ -функция

Рассмотрим функцию, задаваемую соотношениями (17.4.13) (рис. 17.4.3). Зафиксируем площадь под кривой, положив

$$f_0\tau = 1.$$

Будем теперь неограниченно уменьшать длительность импульса:  $\tau \rightarrow 0$  (рис. 17.4.4). В результате получаем последовательность функций  $\{f_n(t)\}$ , носитель<sup>1</sup> которых неограниченно сжимается, но площадь, ограниченная их графиками, всё время одинакова и равна единице. Предел этой последовательности есть импульсная функция

$$f_\infty(t) = \delta(t),$$

отличная от нуля фактически в единственной точке  $t = 0$ , но график которой ограничивает конечную (единичную) площадь:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (17.4.15)$$

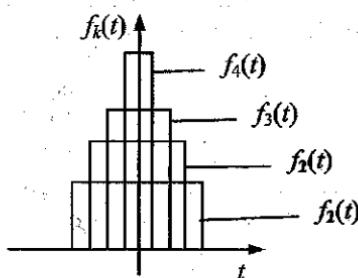


Рис. 17.4.4. Последовательность функций, графики которых ограничивают одинаковую площадь (равную единице), но отличных от нуля на всё более и более коротком отрезке

Сформулируем основное свойство  $\delta$ -функции. Для этого рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t_1) \delta(t - t_1) dt_1,$$

где  $g(t)$  — произвольная непрерывная функция. По определению  $\delta$ -функции область интегрирования бесконечно узкая (что можно ус-

<sup>1</sup> Носитель функции — это та часть области определения, где данная функция отлична от нуля:  $\text{supp } f(t) = \overline{\{t \mid f(t) \neq 0\}}$ . Чертка над фигурными скобками означает замыкание множества. В примере, показанном на рис. 17.4.3, носитель есть отрезок  $[-\tau/2, \tau/2]$ .

ловно записать как  $t_1 \in [t-\varepsilon, t+\varepsilon]$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ ), и в этой области можно положить  $g(t_1) = g(t)$ . Следовательно, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t_1) \delta(t-t_1) dt_1 = g(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_1) dt_1 = g(t), \quad (17.4.16)$$

где учтено равенство (17.4.15).

Найдём фурье-спектр  $\delta$ -функции. Согласно (17.4.14) фурье-спектр ступенчатой функции (рис. 17.4.3) имеет вид

$$a(\omega) = f_0 \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}. \quad (17.4.17)$$

Полагая здесь  $f_0\tau = 1$  и устремляя длительность импульса к нулю:  $\tau \rightarrow 0$ , получим для всех конечных частот

$$a(\omega) = 1, \quad (17.4.18)$$

что и определяет искомый спектр. В соответствии с этим  $\delta$ -функция может быть представлена в виде интеграла

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (17.4.19)$$

Соотношения (17.4.11) показывают, что любая функция  $f(t)$  может быть записана в виде двойного интеграла, объединяющего прямое и обратное преобразования Фурье:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1) e^{-i\omega t_1} dt_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-t_1)} f(t_1) dt_1.$$

Используя представление о  $\delta$ -функции, нетрудно увидеть, что это равенство есть тождество. Действительно, выполнив сначала интегрирование по переменной  $\omega$ , получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-t_1)} f(t_1) dt_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_1) f(t) dt_1 = f(t).$$

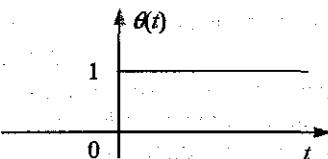
$\delta$ -функция — это представитель класса *обобщённых функций*. С ней непосредственно связана *единичная* (или *ступенчатая*) функция

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (17.4.20)$$

График  $\theta$ -функции показан на рис. 17.4.5.

Найдём производную единичной функции. Прежде всего, из (17.4.20) видно, что  $\theta'(t) = 0$  всюду при  $t < 0$  и при  $t > 0$ . Иначе говоря,  $\theta'(t) \neq 0$  только в точке  $t = 0$ .

Рис. 17.4.5. График единичной (ступенчатой) функции



Найдём интеграл  $\int_{-a}^t \theta'(t_1) dt_1$ , где  $a > 0$ . На основании формулы Ньютона–Лейбница имеем

$$\int_{-a}^t \theta'(t_1) dt_1 = \theta(t) - \theta(-a) = \theta(t),$$

где учтено, что  $\theta(-a) = 0$  при  $a > 0$ . Отсюда видно, что

$$\int_{-a}^t \theta'(t_1) dt_1 = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

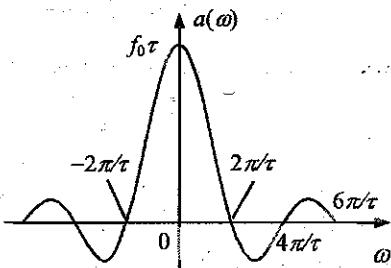
Следовательно, по своим свойствам  $\theta'(t)$  совпадает с  $\delta$ -функцией:

$$\theta'(t) = \delta(t).$$

#### 17.4.8. Соотношение неопределённостей

Рассмотрим функцию (17.4.13) (рис. 17.4.3). График её фурье-спектра  $a(\omega)$  даётся формулой (17.4.17) и показан на рис. 17.4.6. Оценим ширину фурье-спектра.

Рис. 17.4.6. Фурье-спектр функции, описывающей импульс длительностью  $2\tau$



Поскольку согласно (17.4.12) отрицательные частоты не дают новых компонент спектра, то достаточно учесть характерные масштабы

области локализации фурье-спектра при  $\omega > 0$ , т.е. взять полуширину главного лепестка:

$$\Delta\omega \sim 2\pi/\tau.$$

Поскольку длительность импульса  $\Delta t = \tau$ , то приходим к соотношению  $\Delta\omega \cdot \Delta t \sim 2\pi$ .

Полученное соотношение носит название *соотношения неопределённостей* и имеет общий характер. Его смысл в том, что произведение длительности процесса на ширину соответствующего фурье-спектра есть величина порядка  $2\pi$ .

## 17.5. Вынужденные колебания под действием негармонической внешней силы (спектральный подход)

### 17.5.1. Представление отклика на сложный сигнал в виде суммы откликов на простые сигналы

При исследовании отклика линейных систем на внешнее воздействие  $\mathcal{E}(t)$  нужно решать уравнения вида

$$\hat{A}(q) = \mathcal{E}(t), \quad (17.5.1)$$

где  $\hat{A}$  — линейный оператор, т.е. некоторый алгоритм, по которому функции  $q(t)$  ставится в соответствие другая функция:  $q(t) \rightarrow F(t)$ . Например, исследование вынужденных колебаний в *LCR*-контуре под действием внешней ЭДС  $\mathcal{E}(t)$  сводится к решению дифференциального уравнения

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}(t). \quad (17.5.2)$$

Это уравнение записывается в виде (17.5.1), если ввести оператор

$$\hat{A} = L \frac{d^2}{dt^2} + R \frac{d}{dt} + \frac{1}{C}.$$

Линейность оператора  $\hat{A}$  означает, что для любых функций  $q_1(t)$  и  $q_2(t)$  (из области его определения) и любых констант  $C_1$  и  $C_2$  (в общем случае комплексных) выполняется тождество

$$\hat{A}(C_1 q_1 + C_2 q_2) = C_1 \hat{A}(q_1) + C_2 \hat{A}(q_2). \quad (17.5.3)$$

В ряде задач относительно просто найти отклик системы на внешнее гармоническое воздействие:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{iat}. \quad (17.5.4)$$

Тогда вследствие линейности уравнения (17.5.1) можно найти отклик и на воздействие, представимое в виде суммы

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_k, \quad \mathcal{E}_k = \mathcal{E}_{0k} e^{i\omega_k t}. \quad (17.5.5)$$

Действительно, находя решения уравнений

$$\hat{A}(q_k) = \mathcal{E}_k(t)$$

и образуя сумму

$$q(t) = \sum_{k=1}^n q_k(t),$$

мы получим решение исходного уравнения (17.5.1): отклик на суммарное воздействие  $\mathcal{E}(t)$  равен сумме откликов  $q_k(t)$  на элементарные воздействия  $\mathcal{E}_k(t)$ .

В соответствии с теоремой Фурье произвольная интегрируемая функция может быть разложена в ряд Фурье:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{i\omega_k t}, \quad C_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_k t} dt, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{T} \quad (17.5.6a)$$

или интеграл Фурье:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad a(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (17.5.6b)$$

в которых функция представлена в виде суперпозиции гармонических функций. Это позволяет использовать результаты, описывающие отклик на гармоническое внешнее воздействие.

### 17.5.2. Функция отклика

Рассмотрим процессы в  $LCR$ -контуре, описываемые уравнением (17.5.2). Переходя от заряда  $q(t)$  на конденсаторе к напряжению  $V(t) = q(t)/C$ , получим

$$\ddot{V} + 2\gamma \dot{V} + \omega_0^2 V = \omega_0^2 \mathcal{E}(t). \quad (17.5.7)$$

В соответствии с теоремой Фурье положим

$$\mathcal{E}(t) = \int d\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_\omega e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (17.5.8)$$

и рассмотрим отклик на элементарный гармонический сигнал:

$$d\mathcal{E} = \mathcal{E}_\omega e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (17.5.9)$$

Поскольку в случае вынуждающей силы, зависящей от времени по гармоническому закону  $\sim e^{i\omega t}$ , отклик зависит от времени по тому же закону, то, полагая

$$V = \int dV, \quad dV = V_\omega e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi},$$

получаем равенство

$$\left( -\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2 \right) dV = \omega_0^2 \mathcal{E}_\omega e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Вводя функцию отклика:

$$\lambda(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}, \quad (17.5.10)$$

получим

$$dV = \lambda(\omega) \mathcal{E}_\omega e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Таким образом, получаем отклик на произвольное воздействие:

$$V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega) \mathcal{E}_\omega e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} V_\omega e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (17.5.11)$$

Соотношение

$$V_\omega = \lambda(\omega) \mathcal{E}_\omega \quad (17.5.12)$$

задаёт связь между фурье-компонентами сигнала  $\mathcal{E}_\omega$  и отклика  $V_\omega$ .

Рассмотрим частный случай импульсного источника

$$\mathcal{E}(t) = A\delta(t). \quad (17.5.13)$$

Поскольку для такого источника

$$\mathcal{E}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(t) e^{-i\omega t} dt = A,$$

то  $V_\omega = A\lambda(\omega)$ . Соответственно отклик системы даётся выражением

$$V(t) = A \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Таким образом, функция  $\lambda(\omega)$  есть фурье-спектр отклика на импульсный сигнал. Заметим, что эта функция совпадает с частотной характеристикой контура, введённой в (17.2.6).

В частном случае  $RC$ -контура (т.е. при  $L = 0$ ) функция отклика принимает вид

$$\lambda(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega RC} \equiv \frac{1}{1 + i\omega\tau}, \quad (17.5.14)$$

где  $\tau = RC$  — постоянная времени, определяющая характерное время релаксации колебаний в  $RC$ -контуре. Для этого случая, выполнив интегрирование по частотам, можно найти в явном виде отклик на импульсное воздействие:

$$V(t) = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + i\omega\tau} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{A}{\tau} e^{-t/\tau}. \quad (17.5.15)$$

Для времён  $t < 0$  следует полагать  $V(t) = 0$ .

Результат (17.5.15) можно получить, непосредственно решая уравнение (17.5.7) с источником (17.5.13) при условии  $L = 0$ . Действительно, при этом условии уравнение  $L\ddot{V} + R\dot{V} + V/C = \mathcal{E}(t)/C$  имеет вид

$$\dot{V} + \frac{1}{\tau} V = \frac{1}{\tau} A\delta(t). \quad (17.5.16)$$

Для времён  $t > 0$  вместо (17.5.16) получаем более простое уравнение:  $\dot{V} + V/\tau = 0$ , решение которого есть  $V = V_0 \exp(-t/\tau)$ . Коэффициент  $V_0$  можно найти следующим образом. Проинтегрируем почленно уравнение (17.5.16) по времени на отрезке  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ . Поскольку  $V(-\varepsilon) = 0$ , то

$$V(+\varepsilon) + \frac{1}{\tau} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} V(t) dt = \frac{1}{\tau} A.$$

Полагая  $\varepsilon \rightarrow 0$  и учитывая, что в этом пределе входящий сюда интеграл обращается в нуль, а  $V(+\varepsilon) \rightarrow V_0$ , находим:  $V_0 = A/\tau$ .

Если в контуре присутствует также индуктивность, то аналогичным приёмом можно показать, что при импульсном воздействии

$$V(t) = V_m e^{-\gamma t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t\right), \quad V_m = \frac{A\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}. \quad (17.5.17)$$

## 17.6. Модулированные колебания

Пусть имеется некоторый сигнал, который мы запишем в виде  $x(t) = A(t) \cos \phi(t)$ .

Это общий вид сигнала. Положим

$$\phi(t) = \omega_0 t + \psi(t).$$

Здесь функции  $A(t)$  и  $\psi(t)$  имеют смысл амплитуды и сдвига фазы. Если эти функции меняются медленно за характерные времена  $t \sim 2\pi/\omega_0$ , задаваемые основной частотой  $\omega_0$ , то колебания называются *модулированными*. Медленность изменения означает, что за времена, на которых существенно изменяются  $A(t)$  и  $\psi(t)$ , функция  $x(t)$  совершил большое число колебаний с почти постоянными амплитудой и частотой.

Выделяют три характерных типа модуляции: амплитудную, частотную и фазовую.

### 17.6.1. Амплитудная модуляция

Сигнал называется *амплитудно-модулированным*, если он задаётся функцией вида

$$x(t) = A(t) \cos \omega_0 t,$$

где амплитуда  $A(t)$  является медленно меняющейся функцией времени (по сравнению с  $\cos \omega_0 t$ ).

Пусть периодический сигнал  $\cos \omega_0 t$  модулирован так, что амплитуда модуляции меняется по гармоническому закону:

$$A(t) = A_0 (1 + m \cos \Omega t).$$

Используется следующая терминология:

$\omega_0$  — несущая частота,

$\Omega$  — частота модуляции,

$m$  — глубина модуляции.

Обычно предполагается, что  $m \ll 1$ .

Пример амплитудно-модулированного сигнала показан на рис. 17.6.1.

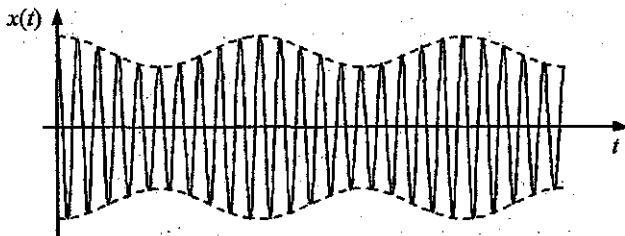


Рис. 17.6.1. Амплитудно-модулированный сигнал. Штриховой линией показана амплитуда модуляции

Найдём разложение Фурье для сигнала, гармонически модулированного по амплитуде. Запишем сигнал в комплексной форме:

$$S(t) = A_0 (1 + m \cos \Omega t) e^{i\omega_0 t}.$$

Используя формулу Эйлера:  $\cos \Omega t = \frac{1}{2}(e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t})$ , получаем

$$S(t) = A_0 e^{i\omega_0 t} + \frac{m A_0}{2} e^{i(\omega_0 - \Omega)t} + \frac{m A_0}{2} e^{i(\omega_0 + \Omega)t}. \quad (17.6.1)$$

Таким образом, спектр состоит из трёх гармоник: несущей частоты и двух смещённых (комбинационных) частот:

$$\omega_0, \omega_0 - \Omega, \omega_0 + \Omega.$$

Этот спектр показан на рис. 17.6.2.

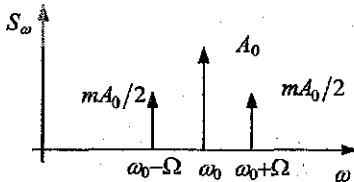


Рис. 17.6.2. Фурье-спектр сигнала, модулированного по амплитуде

### 17.6.2. Частотная и фазовая модуляция

Сигнал называется *модулированным по частоте*, или *частотно-модулированным* (ЧМ), если его можно представить в виде

$$x(t) = A_0 \cos \phi(t), \quad \phi(t) = \int_0^t \omega(t_1) dt_1,$$

в котором амплитуда сигнала  $A_0$  постоянна, а  $\omega(t)$  — медленно меняющаяся функция, называемая *мгновенной частотой*:

$$\omega(t) = d\phi(t)/dt = \omega_0 + \Delta\omega \cdot s(t), \quad |s(t)| \leq 1.$$

В случае гармонически модулированного сигнала полагаем

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t.$$

Таким образом, сигнал в рассматриваемом случае имеет вид

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \beta \sin \Omega t), \quad \Omega \ll \omega.$$

Используется следующая терминология:

$\omega_0$  — несущая частота,

$\Delta\omega$  — девиация частоты,

$\Omega$  — частота модуляции,

$\beta = \Delta\omega/\Omega$  — индекс модуляции или девиация фазы.

Обычно предполагается, что  $\Delta\omega \ll \omega_0$ .

Пример частотно-модулированного сигнала показан на рис. 17.6.3.

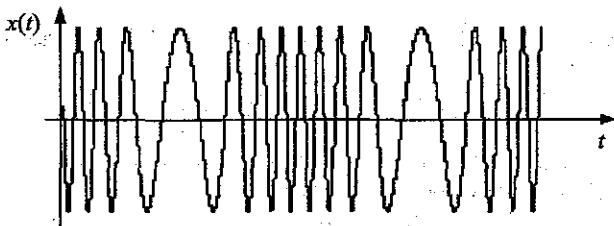


Рис. 17.6.3. Сигнал, модулированный по частоте

Если сигнал можно представить в виде

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + m \cdot \psi(t)), |\psi(t)| \leq 1,$$

где  $\psi(t)$  — медленно меняющаяся функция, то он называется *фазово-модулированным (ФМ)*. Коэффициент  $m$ , называемый *индексом фазовой модуляции*, как правило, мал:  $m \ll 1$ .

Отличие фазово- и частотно-модулированных сигналов состоит в следующем. В случае ФМ-сигнала мгновенная частота  $\omega(t) = d\phi/dt$  может принимать любые значения. При этом девиация фазы ограничена параметром  $m$ , показывающим максимальное фазовое отклонение модулированного сигнала относительно несущего колебания (с частотой  $\omega_0$ ). В случае ЧМ-сигнала колебания мгновенной частоты имеют место только в ограниченном диапазоне  $\omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega$ , тогда как полные отклонения фазы сигнала ( $\omega_0 t + m \cdot \psi(t)$ ) от фазы несущей ( $\omega_0 t$ ) не ограничены.

Далее мы рассматриваем только гармонически модулированные сигналы. При этом для определённости будем говорить о фазовой модуляции, хотя многие выводы переносятся и на случай частотной модуляции.

Найдём разложение Фурье фазово-модулированного сигнала. Переходя к комплексному представлению, записываем

$$S(t) = A_0 \exp[i(\omega_0 t + \beta \sin \Omega t)].$$

Учитывая неравенство  $\beta \ll 1$ , разлагаем  $x(t)$  по степеням этого малого параметра:

$$S(t) = A_0 e^{i\omega_0 t} (1 + i\beta \sin \Omega t).$$

Используя формулу Эйлера:  $\sin \Omega t = \frac{1}{2i} (e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t})$ , получаем окончательно

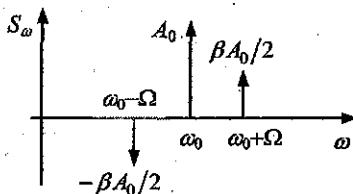
$$S(t) = A_0 e^{i\omega_0 t} + \frac{\beta A_0}{2} e^{i(\omega_0 - \Omega)t} + \frac{\beta A_0}{2} e^{i(\omega_0 + \Omega)t}. \quad (17.6.2)$$

Таким образом, при  $\beta \ll 1$  спектр состоит из трёх гармоник: несущей частоты и двух смещённых (комбинационных) частот:

$$\omega_0, \omega_0 - \Omega, \omega_0 + \Omega.$$

Этот спектр показан на рис. 17.6.4.

Рис. 17.6.4. Фурье-спектр сигнала, модулированного по фазе



### 17.6.3. Векторные диаграммы модулированных сигналов

#### Амплитудно-модулированный сигнал

Амплитудно-модулированный сигнал в комплексной форме даётся формулой (17.6.1). Пусть вектор  $A_0$ , описывающий комплексную амплитуду сигнала на несущей частоте, направлен вдоль оси абсцисс. Тогда векторы, описывающие модуляцию:

$$\frac{mA_0}{2} e^{-i\Omega t} \text{ и } \frac{mA_0}{2} e^{i\Omega t},$$

совершают относительно него вращение с угловой скоростью  $\Omega$  в противоположных направлениях. Результирующее колебание описывается вектором амплитуды, направленным вдоль исходного (немодулированного) сигнала  $A_0$ . Это значит, что меняется лишь длина (амплитуда) сигнала, но не его направление. Соответствующая диаграмма показана на рис. 17.6.5.

#### Фазово-модулированный сигнал

Фазово-модулированный сигнал даётся формулой (17.6.2). Пусть вектор  $A_0$ , описывающий комплексную амплитуду сигнала на несущей частоте, направлен вдоль оси абсцисс. Тогда относительно него векторы, описывающие модуляцию:

$$-\frac{\beta A_0}{2} e^{-i\Omega t} \text{ и } \frac{\beta A_0}{2} e^{i\Omega t},$$

совершают вращение с угловыми скоростями  $\Omega$  в противоположных направлениях. Знак «» указывает на то, что в начальный момент ( $t = 0$ ) эти векторы повёрнуты друг относительно друга на угол  $\pi$  (и направлены вдоль оси абсцисс). Однако их сумма постоянно направлена перпендикулярно вектору несущего сигнала  $A_0$ .

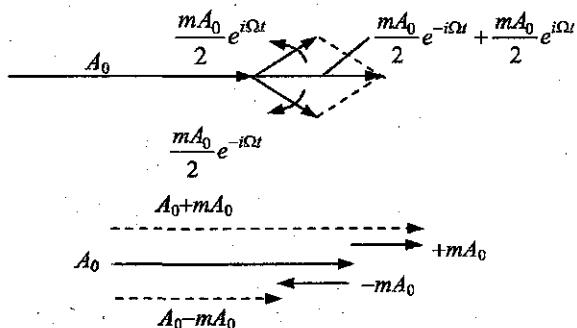


Рис. 17.6.5. Векторная диаграмма амплитудно-модулированного сигнала. Сверху — сложение колебаний, снизу — диапазон изменений вектора амплитуды модулированного сигнала

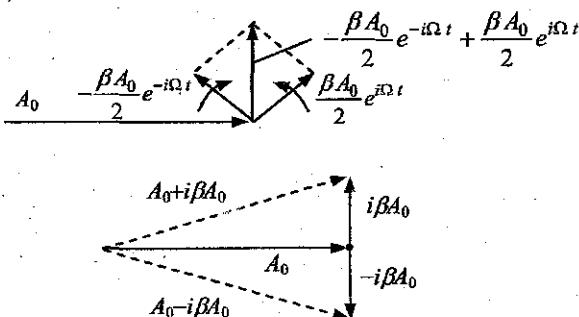


Рис. 17.6.6. Векторная диаграмма фазово-модулированного сигнала. Сверху — сложение колебаний, снизу — колебания вектора комплексной амплитуды модулированного сигнала

Результирующее колебание описывается вектором, совершающим колебания перпендикулярно вектору несущего (немодулированного) сигнала  $A_0$ . Это значит, что меняется лишь длина (амплитуда) сигнала,

но не его направление. Соответствующая диаграмма показана на рис. 17.6.6.

Строго говоря, в использованном приближении, в котором учтены лишь слагаемые  $\sim \beta$ , длина вектора амплитуды (17.6.2) меняется на величину  $\sim \beta^2 A_0$ . Однако при учёте поправок в  $S(t)$  более высокого порядка по  $\beta$  длина окажется неизменной, что прямо следует из исходного выражения для сигнала:

$$S(t) = A_0 \exp[i(\omega_0 t + \beta \sin \Omega t)], |S(t)| = A_0 = \text{const.}$$

## 17.7. Детектирование сигнала

*Детектированием* называется преобразование электрических колебаний, в результате которого получаются колебания другой частоты. Наиболее важным случаем детектирования, используемого в радиоприемных устройствах, является *демодуляция* — выделение модулирующего низкочастотного сигнала из модулированных высокочастотных колебаний.

В устройствах, осуществляющих детектирование, используются линейные и нелинейные преобразователи.

### 17.7.1. Фильтрация сигнала

*Фильтром* называют устройство, предназначенное для выделения из исходного сложного сигнала колебаний определённых частот (полос спектра) или подавления нежелательных частот.

В более общей трактовке фильтром называют систему  $L$ , преобразующую по определённым правилам входной сигнал  $f(t)$  в выходной  $g(t)$ , как схематически показано на рис. 17.7.1. Действие фильтра формально записывают в виде

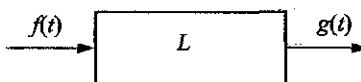
$$g(t) = L[f(t)].$$

*Линейным* называется такой фильтр, что для любой пары входных сигналов  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  и произвольных констант  $c_1$  и  $c_2$  имеет место равенство

$$L[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 L[f_1(t)] + c_2 L[f_2(t)].$$

Для *нелинейных* фильтров такое равенство не выполняется.

Рис. 17.7.1. Фильтр, преобразующий входной сигнал  $f(t)$  в выходной сигнал  $g(t)$



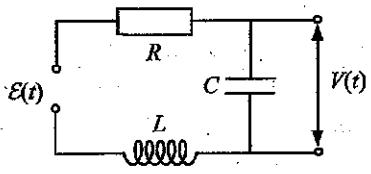


Рис. 17.7.2. Линейный фильтр, преобразующий входной сигнал  $f(t) = E$  (ЭДС) в выходной сигнал  $g(t) = V$  (напряжение на конденсаторе)

В качестве примера линейного фильтра можно указать колебательный  $LCR$ -контур, преобразующий сигнал ЭДС в напряжение на конденсаторе:

$$L[E(t)] = V(t).$$

Данная связь устанавливается из решения дифференциального уравнения

$$\ddot{V} + 2\gamma\dot{V} + \omega_0^2 V = \omega_0^2 E(t).$$

Схема этого фильтра показана на рис. 17.7.2. Если контур обладает высокой добротностью, то в выходном сигнале остаются только частоты, близкие к резонансной:  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

Примером нелинейного фильтра является квадратичный преобразователь

$$g(t) = f^2(t).$$

### 17.7.2. Выпрямляющие преобразователи

Наряду с линейными фильтрами используют нелинейные преобразователи сигналов. В частности, применяют выпрямляющее преобразование, схема которого показана на рис. 17.7.3. В схеме присутствует диод — устройство, обладающее малым сопротивлением для тока в одном (прямом) направлении и большим сопротивлением для тока в противоположном (обратном) направлении. Наличие диода  $D$  в схеме приводит к тому, что «отсекается» половина сигнала (рис. 17.7.4).

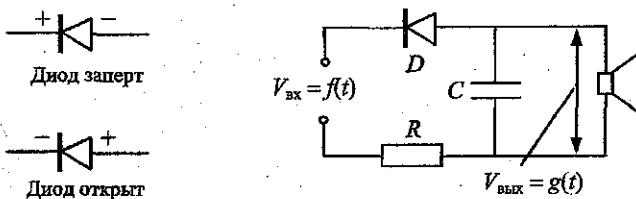


Рис. 17.7.3. Слева — диод и его пропускание; справа — нелинейный преобразователь сигнала, содержащий диод. Выходной сигнал  $V_{\text{вых}}$  подаётся на динамик

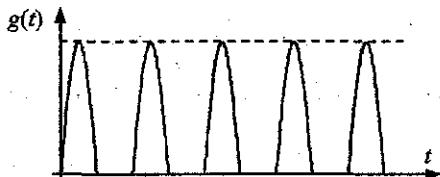


Рис. 17.7.4. «Половина» синусоиды, оставшаяся после выпрямления с помощью диода

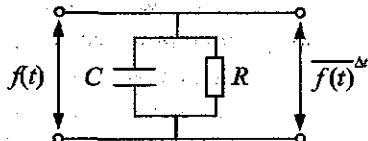
Конденсатор  $C$  в схеме на рис. 17.7.3 отсеивает высокочастотный сигнал, поскольку на таких частотах его сопротивление мало ( $Z_C = 1/i\omega C$ ). Динамик же реагирует на звуковые (низкие) частоты.

После «отсечения» половины сигнала возникает преимущественное направление тока в цепи. Однако высокочастотные колебания сигнала сохраняются. Высокочастотные примеси возникают и в других ситуациях. Для их устранения применяют специальные схемы сглаживания, осуществляющие преобразование усреднения:

$$\overline{f(t)}^{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} f(t_1) dt_1. \quad (17.7.1)$$

Для удаления высокочастотных колебаний с частотами  $\sim \omega$  усреднение должно проводиться за времена  $\Delta t \gg 2\pi/\omega$ . Пример электрической схемы, осуществляющей сглаживание сигнала, показан на рис. 17.7.5.

Рис. 17.7.5. Линейный преобразователь, осуществляющий сглаживание на временах  $\Delta t \sim \tau = RC$



Выделение модулирующего сигнала с помощью последовательного применения выпрямляющего и сглаживающего преобразований проиллюстрировано на рис. 17.7.6.

### 17.7.3. Квадратичное детектирование

Кроме схем с использованием выпрямителей для детектирования можно использовать различные нелинейные преобразователи. К их числу относятся *квадратичные детекторы*. Таковыми являются, например, преобразователи, осуществляющие квадратичное сглаживание:

$$\overline{f^2(t)}^{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} f^2(t_1) dt_1. \quad (17.7.2)$$

Блок-схема квадратичного детектора изображена на рис. 17.7.7.

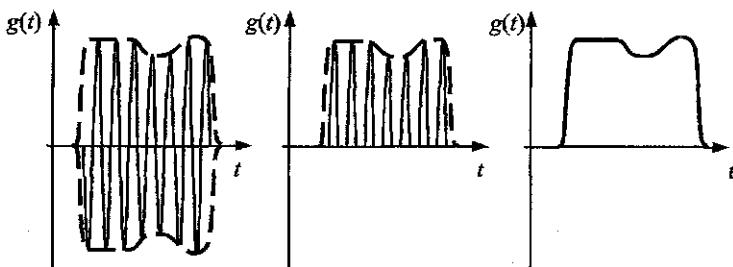


Рис. 17.7.6. Выделение модулирующего сигнала с помощью выпрямления и последующего сглаживания. Последовательно: исходный (модулированный высокочастотный), выпрямленный и сглаженный сигналы. На первом и втором графиках модулирующая функция показана штриховой линией

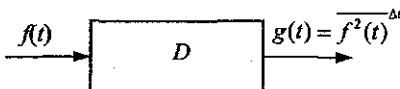


Рис. 17.7.7. Квадратичный детектор, осуществляющий сглаживание выпрямленного сигнала с временем усреднения  $\Delta t$

#### 17.7.4. Квадратичное детектирование амплитудно-модулированного сигнала

Пусть входной сигнал даётся формулой

$$f(t) = A(t) \cos \omega_0 t, \quad A(t) = A_0(1 + m \cos \Omega t), \quad \Omega \ll \omega, \quad (17.7.3)$$

а усреднение производится по времени  $\Delta t$  такому, что

$$\frac{2\pi}{\omega_0} \ll \Delta t \ll \frac{2\pi}{\Omega}. \quad (17.7.4)$$

Найдём действие квадратичного детектора (17.7.2) на сигнал (17.7.3):

$$\begin{aligned} \overline{f^2(t)}^{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} A^2(t_1) \cos^2(\omega_0 t_1) dt_1 \approx A^2(t) \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \cos^2(\omega_0 t_1) dt_1 = \\ &= \frac{1}{2} A^2(t). \end{aligned}$$

Здесь учтено, что на интервале интегрирования функция  $A^2(t)$  меняется незначительно вследствие второго неравенства в (17.7.4). Использовано равенство  $\cos^2 \omega_0 t = 1/2$ . Таким образом, получаем

$$\overline{f^2(t)}^{\Delta t} = \frac{1}{2} A^2(t) = \frac{1}{2} A_0^2 (1 + 2m \cos \Omega t), \quad (17.7.5)$$

где предполагается малость глубины модуляции ( $m \ll 1$ ).

Результат (17.7.5) означает, что после квадратичного детектирования возникает сигнал на частоте модуляции  $A_0^2 m \cos \Omega t$  на фоне постоянного сигнала  $A_0^2/2$ .

Сформулируем алгоритм детектирования в комплексной форме. Введём комплексный амплитудно-модулированный сигнал:

$$S(t) = A(t)e^{i\omega_0 t}, \quad A(t) = A_0(1 + m \cos \Omega t). \quad (17.7.6)$$

Тогда результат (17.7.5) можно представить через функцию  $S(t)$  следующим образом:

$$g(t) = \overline{f^2(t)}^{\Delta t} = \frac{1}{2} A^2(t) = \frac{1}{2} S^* S = \frac{1}{2} |S|^2. \quad (17.7.7)$$

Полученное правило

$$g(t) = \frac{1}{2} S^* S \quad (17.7.8)$$

является общим для расчёта квадратичного детектирования произвольных слабомодулированных сигналов — как амплитудно-, так и фазово-модулированных.

### 17.7.5. Квадратичное детектирование фазово-модулированного сигнала

Запишем фазово-модулированный сигнал:

$$f(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \beta \sin \Omega t). \quad (17.7.9)$$

Его комплексная форма имеет вид

$$S(t) = A_0 e^{i(\omega_0 t + \beta \sin \Omega t)}. \quad (17.7.10)$$

Тогда по формуле (17.7.8) находим результат квадратичного детектирования:

$$g(t) = \frac{1}{2} S^* S = \frac{1}{2} A_0^2 = \text{const}. \quad (17.7.11)$$

Следовательно, после преобразования остаётся постоянный сигнал; практически все следы модуляции уничтожены детектором.

### 17.7.6. Прием без несущей

Пусть имеется фазово-модулированный сигнал. Для того чтобы воспользоваться квадратичным детектором для обнаружения модуляции, можно использовать предварительную фильтрацию сигнала. Одна из возможностей состоит в удалении сигнала на несущей частоте  $\omega_0$ . Действительно, пусть комплексный фазово-модулированный сигнал до фильтрации имеет вид (17.6.2):

$$S(t) = A_0 e^{i(\omega_0 t + \beta \sin \Omega t)} \approx A_0 e^{i\omega_0 t} + \frac{\beta A_0}{2} e^{i(\omega_0 + \Omega)t} - \frac{\beta A_0}{2} e^{i(\omega_0 - \Omega)t}. \quad (17.7.12)$$

Первое слагаемое в правой части ( $e^{i\omega_0 t}$ ) есть сигнал на несущей частоте.

Удалим этот сигнал с помощью линейного фильтра:

$$\begin{aligned} \tilde{S}(t) &= L[S(t)] = \frac{\beta A_0}{2} e^{i(\omega_0 + \Omega)t} - \frac{\beta A_0}{2} e^{i(\omega_0 - \Omega)t} = \\ &= i\beta A_0 e^{i\omega_0 t} \sin \Omega t. \end{aligned} \quad (17.7.13)$$

Теперь квадратичное детектирование (17.7.2) даёт:

$$g(t) = \frac{1}{2} \tilde{S}^* \tilde{S} = \frac{1}{2} (\beta A_0)^2 \sin^2 \Omega t = \frac{1}{4} (\beta A_0)^2 (1 - \cos 2\Omega t). \quad (17.7.14)$$

Таким образом, мы выявили наличие модуляции в исходном фазово-модулированном сигнале:  $g(t) \neq \text{const}$ . Однако выходной сигнал  $g(t)$  искажён по сравнению с исходным законом фазовой модуляции ( $\sim \beta \sin \Omega t$ ): колебания совершаются на удвоенной частоте модулирующего сигнала ( $2\Omega$ ).

Пример электрической схемы, осуществляющей удаление несущей, показан на рис. 17.7.7. Параметры  $LC$ -цепочки подбираются таким образом, чтобы её сопротивление на несущей частоте было минимальным, а полоса пропускания  $\Delta\omega = \omega_0/Q$  была достаточно узкой.

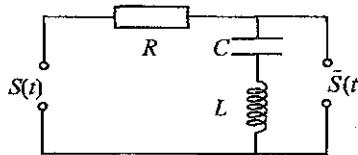


Рис. 17.7.7. Линейный фильтр, удаляющий несущую частоту из исходного (принимаемого) сигнала

### 17.7.7. Приём с изменением фазы несущей

Качество детектирования можно повысить, если применить другой метод — изменить фазу несущего сигнала на  $\pi/2$ . Такое преобразование даёт

$$A_0 e^{i\omega_0 t + \pi/2} = i A_0 e^{i\omega_0 t},$$

так что вместо сигнала (17.7.12) получаем

$$\begin{aligned}\tilde{S}(t) &= i A_0 e^{i\omega_0 t} + \frac{\beta A_0}{2} e^{i(\omega_0 + \Omega)t} - \frac{\beta A_0}{2} e^{i(\omega_0 - \Omega)t} = \\ &= i A_0 e^{i\omega_0 t} (1 + \beta \sin \Omega t).\end{aligned}\quad (17.7.15)$$

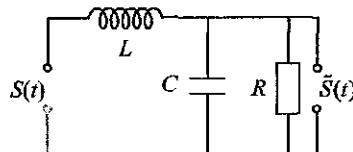
Отсюда следует

$$g(t) = \frac{1}{2} \tilde{S}^* \tilde{S} = \frac{1}{2} A_0^2 (1 + \beta \sin \Omega t)^2 \approx \frac{1}{2} A_0^2 (1 + 2\beta \sin \Omega t) \quad (17.7.16)$$

(при  $\beta \ll 1$ ). Таким образом, квадратичное детектирование преобразует фазово-модулированный сигнал, выделяя явно закон фазовой модуляции.

Пример электрической схемы, осуществляющей изменение фазы несущей на  $\pi/2$ , показан на рис. 17.7.8. Рассмотрим подробнее действие этого фильтра.

Рис. 17.7.8. Линейный фильтр, изменяющий фазу несущего сигнала на  $\pi/2$ . В этой схеме необходимо, чтобы сопротивление  $R$  было достаточно большим



Найдём сначала импеданс  $RC$ -контура:

$$\frac{1}{Z_{RC}} = \frac{1}{R} + i\omega C \Rightarrow Z_{RC} = \frac{R}{1 + i\omega RC}.$$

Полный импеданс цепи (включая индуктивность) равен

$$Z = i\omega L + Z_{RC} = i\omega L + \frac{R}{1 + i\omega RC}.$$

При заданном входном сигнале (внешнем напряжении)  $S(t) = V(t)$  ток во внешней цепи  $J$  делится на токи через сопротивление  $J_R$  и конденсатор  $J_C$ :

$$J = V/Z = J_R + J_C.$$

Поскольку напряжение на конденсаторе и на сопротивлении одинаково, то

$$J_R R = J_C Z_C \Rightarrow J_C = J_R R / Z_C = i\omega R C J_R.$$

Отсюда находим ток через сопротивление:

$$\frac{V}{Z} = J_R + J_C = J_R(1+i\omega RC) \Rightarrow J_R = \frac{V}{Z(1+i\omega RC)}.$$

Напряжение же на сопротивлении оказывается равным

$$V_R = J_R R = V \frac{R}{Z(1+i\omega RC)} = V \frac{1}{1-\omega^2 LC + \frac{i\omega L}{R}}.$$

При настройке на резонанс ( $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ) имеем

$$V_R = V(R/i\omega_0 L) = -i(R/\omega_0 L)V, V_R = \tilde{S}.$$

Видно, что фаза несущей меняется на  $\pi/2$ . Поскольку сопротивление  $R$  велико, то даже при малом отходе от резонансной частоты на

$\Delta\omega \sim \omega_0 \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  фазы прочих гармоник практически не меняются.

В заключение этого раздела упомянем о методе *гетеродинирования* для обнаружения фазовой модуляции принимаемого сигнала. Суть метода в том, что на вход квадратичного детектора подаётся, наряду с принимаемым  $A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$ , также сигнал на несущей частоте (*сигнал гетеродина*)  $A_g \cos(\omega_g t)$ . Тогда суммарный сигнал равен

$$S(t) = A_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi(t))} + A_g e^{i\omega_g t} = e^{\omega_0 t} (A_0 e^{i\varphi(t)} + A_g),$$

$$g(t) = \frac{1}{2} S^* S = \frac{1}{2} [A_0^2 + A_g^2 + 2A_0 A_g \cos(\varphi(t))].$$

Квадратичное детектирование и в этом методе позволяет обнаружить сигнал фазовой модуляции.

## 17.8. Параметрические колебания

*Параметрические колебательные системы* — это системы с изменившимися во времени параметрами, изменение которых связано с совершением работы.

Если параметры меняются периодически с периодом, находящимся в определённом соотношении с периодом собственных колебаний, то может происходить раскачка колебаний из-за накопления энергии в такт с колебаниями.

В электрических цепях раскачку колебаний можно осуществить, меняя периодически индуктивность (режим «вариометра») или ёмкость (режим «вариконда»).

Рассмотрим колебательный  $LCR$ -контур, содержащий переменную индуктивность (рис. 17.8.1). Если индуктивность не меняется со временем, то в контуре реализуются затухающие колебания. В частности, заряд на конденсаторе меняется по закону

$$q(t) = q_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi_0). \quad (17.8.1)$$

Фазовый портрет этих колебаний показан на рис. 17.8.2. Будем считать, что затухание мало:  $\gamma \ll \omega_0$ . При этом частота  $\omega$  близка к  $\omega_0$ :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \approx \omega_0.$$

Период собственных колебаний контура равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \approx \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (17.8.2)$$

Пусть теперь индуктивность в контуре меняется периодически, как показано на рис. 17.8.3, причём период изменений индуктивности  $T_L$  составляет половину периода собственных колебаний колебательного контура:

$$T_L = 2\tau = T/2. \quad (17.8.3)$$

Рис. 17.8.1. Колебательный  $LCR$ -контур с переменной индуктивностью  $L$

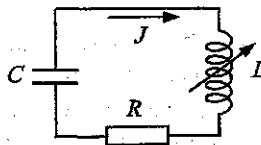
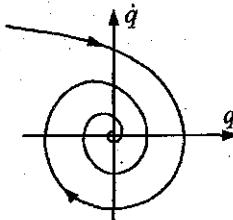


Рис. 17.8.2. Фазовый портрет колебательного контура (рис. 17.8.1) для случая постоянной индуктивности — затухающие колебания



Уравнение колебаний имеет вид

$$\frac{d\Phi}{dt} + RJ + \frac{q}{C} = 0, \quad \Phi = LJ, \quad (17.8.4)$$

причём теперь индуктивность  $L$  уже нельзя вынести из-под знака производной (поскольку она переменная). По предположению индуктивность меняется быстро в определённые моменты времени. Тогда магнитный

поток и заряд на конденсаторе в эти моменты не меняются. В частности, для момента  $t = \tau$  (рис. 17.8.3) имеем:

$$\begin{aligned}\Phi|_{\tau=0} &= \Phi|_{\tau+\tau}, \\ q|_{\tau=0} &= q|_{\tau+\tau}.\end{aligned}\quad (17.8.5)$$

Эти соотношения непрерывности называются условиями сшивки.

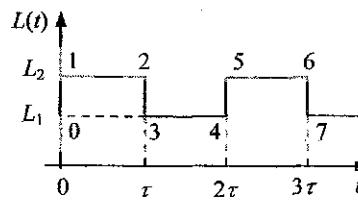


Рис. 17.8.3. Периодическая зависимость индуктивности катушки от времени. Период изменения ( $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ ) равен  $2\tau$  и составляет половину периода собственных колебаний контура

Рассмотрим сначала случай, когда омическое сопротивление в контуре пренебрежимо мало:  $R \approx 0$ .

Пусть в момент, когда ток в катушке индуктивности максимален, энергия, запасённая в контуре, равна

$$W = \Phi^2 / 2L, \quad (17.8.6)$$

где  $\Phi = LJ$  — магнитный поток. Если в этот момент уменьшить индуктивность (за счёт работы внешних сил), то энергия контура увеличится. Если же изменение индуктивности производить в моменты, когда ток в катушке отсутствует, то работа не совершается и энергия контура не меняется.

На рис. 17.8.4 изображён фазовый портрет системы при колебаниях индуктивности, показанных на рис. 17.8.3.

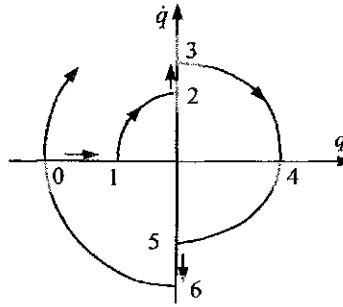


Рис. 17.8.4. Фазовый портрет параметрических колебаний при наличии неустойчивости

За период колебания индуктивности система проходит участок траектории (рис. 17.8.4):

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4. \quad (17.8.7)$$

В момент 0 (рис. 17.8.3 и рис. 17.8.4), когда ток в контуре отсутствует ( $J_0 = 0$ ), индуктивность на участке траектории  $0 \rightarrow 1$  доводится от минимального значения  $L_1$  до максимального  $L_2$  без совершения работы; энергия контура при этом не меняется:  $W = W_0$ .

Далее, на участке  $1 \rightarrow 2$  сохраняется это же значение индуктивности до момента достижения максимального значения тока  $J = J_2$ . Энергия вследствие отсутствия потерь также не меняется:

$$W_0 = W_2 = \Phi_2^2 / 2L_2. \quad (17.8.8)$$

В момент 2 ( $t = \tau$ ) индуктивность скачком уменьшается, и согласно (17.8.6) энергия возрастает:

$$\Phi_3 = \Phi_2 \equiv \Phi \Rightarrow W_3 = \frac{\Phi^2}{2L_1} = \frac{L_2}{L_1} \frac{\Phi^2}{2L_2} = \frac{L_2}{L_1} W_2 = \frac{L_2}{L_1} W_0, \quad (17.8.9)$$

так что изменение энергии на участке  $2 \rightarrow 3$  составляет

$$\Delta W = W_3 - W_2 = \left( \frac{L_2}{L_1} - 1 \right) W_2 = \left( \frac{L_2}{L_1} - 1 \right) W_0. \quad (17.8.10)$$

На последнем участке цикла ( $3 \rightarrow 4$ ) энергия не меняется:

$$W_4 = W_3.$$

Итого, за период колебания индуктивности  $T_L = 2\tau$  энергия контура возрастает в  $\Delta L/L_1$  раз, где  $\Delta L = L_2 - L_1$ . Следующий цикл повторяет предыдущий, но с новым начальным значением энергии. После  $n$  периодов колебаний индуктивности (т.е. к началу  $(n+1)$ -го периода) энергия контура составит

$$W_n = \left( \frac{L_2}{L_1} \right)^n W_0. \quad (17.8.11)$$

Преобразуем эту формулу. Учтём, что  $n$  периодов колебаний индуктивности занимают время  $t = n \cdot 2\tau = nT_L$ , так что последняя формула принимает вид

$$W(t) = W_0 e^{2\lambda t}, \quad (17.8.12)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{2T_L} \ln \left( \frac{L_2}{L_1} \right) = \frac{1}{2T_L} \ln \left( 1 + \frac{\Delta L}{L_1} \right). \quad (17.8.13)$$

Величина  $\lambda$  называется *инкрементом неустойчивости*. Считая  $\Delta L \ll L_1$ , получим более простую формулу:

$$\lambda = \frac{1}{2T_L} \frac{\Delta L}{L_1}. \quad (17.8.14)$$

Таким образом, при параметрическом возбуждении колебаний наблюдается экспоненциальный рост энергии системы.

Найдём также закон изменения тока. Для одного цикла имеем:

$$W_4 = \frac{L_2}{L_1} W_0, \quad W_0 = \frac{L_1 J_n^2}{2}, \quad W_4 = \frac{L_1 J_k^2}{2} \Rightarrow J_k = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} J_n. \quad (17.8.15)$$

Здесь  $J_n$  и  $J_k$  — значения тока соответственно в начале и в конце цикла. После  $n$  циклов оказывается

$$J_n = \left( \frac{L_2}{L_1} \right)^{n/2} J_0. \quad (17.8.16)$$

До сих пор мы не учитывали омических (джоулевых) потерь. Их наличие уменьшает возможности параметрической раскачки колебаний. Найдём условие возникновения параметрической неустойчивости в этом случае. Будем предполагать, что затухание, обусловленное данным фактором, мало. Кроме того, будем считать, что амплитуда колебаний индуктивности мала:  $L_2 - L_1 \ll L_1$ . Тогда потери энергии за время  $T_L$  составят

$$\Delta W_{\text{пот}} = \overline{J^2} R \cdot T_L = \frac{1}{2} R J_{\max}^2 T_L, \quad (17.8.17)$$

где  $\overline{J^2} = J_{\max}^2 / 2$  — среднеквадратичное значение тока за рассматриваемое время. Поступление энергии за то же время составит

$$\Delta W = \frac{\Delta L}{L} W_0 \approx \frac{\Delta L}{L} \frac{L J_{\max}^2}{2} = \frac{\Delta L J_{\max}^2}{2}. \quad (17.8.18)$$

Раскачка колебаний возможна, если потери энергии окажутся меньше поступления:

$$\Delta W > \Delta W_{\text{пот}} \Rightarrow \frac{\Delta L J_{\max}^2}{2} > \frac{1}{2} R J_{\max}^2 T_L \Rightarrow \Delta L > R T_L. \quad (17.8.19)$$

Полученному условию можно придать иной вид, если использовать обозначения

$$\Delta L = 2\lambda T_L L, \quad R = 2\gamma L$$

(первое — следствие формулы (17.8.14), второе — определение коэффициента затухания  $\gamma$ ). Тогда из (17.8.19) находим

$$\lambda > \gamma. \quad (17.8.20)$$

Установим теперь закон, по которому меняется энергия, содержащаяся в колебательном контуре. Изменение энергии за время  $T_L$  определяется поступлением ( $\Delta W$ ) и потерями ( $\Delta W_{\text{пот}}$ ):

$$W_n = W_n + \Delta W - \Delta W_{\text{пот}} = W_n \left[ 1 + \frac{\Delta W}{W_n} - \frac{\Delta W_{\text{пот}}}{W_n} \right] = \\ = W_n \left[ 1 + \frac{\Delta L}{L} - \frac{RJ_{\max}^2 T_L / 2}{LJ_{\max}^2 / 2} \right] = W_n [1 + 2\lambda T_L - 2\gamma T_L].$$

Здесь введён коэффициент затухания  $\gamma = R/2L$  и учтено равенство  $\Delta L/L_1 = 2\lambda T_L$ , следующее из (17.8.14).

После  $n$  периодов колебаний индуктивности получим

$$W_n = W_0 [1 + 2\lambda T_L - 2\gamma T_L]^n = W_0 \exp[n \ln(1 + 2\lambda T_L - 2\gamma T_L)].$$

По предположению затухание слабое, так же как малы колебания индуктивности. Поэтому

$$n \ln[1 + 2(\lambda - \gamma)T_L] \approx 2(\lambda - \gamma)nT_L.$$

Наконец, вводя время процесса  $t = n \cdot 2\tau = nT_L$ , окончательно находим

$$W(t) = W_0 e^{2(\lambda - \gamma)t}. \quad (17.8.21)$$

Легко видеть, что раскачка колебаний возможна, если  $\lambda > \gamma$ , что совпадает с полученным выше условием (17.8.20).

Укажем основные отличия параметрического резонанса от обычного.

1) Как видно из (17.8.12) или (17.8.21), система всегда имеет равновесное состояние, в котором колебания не совершаются, т.е. состояние с  $W = 0$ . Однако это состояние неустойчиво: при малейшем отклонении от него начинается раскачка колебаний (при условии (17.8.20)). При обычном же резонансе состояние покоя невозможно при наличии возбуждающей силы.

2) При параметрической раскачке колебаний их амплитуда неограниченно возрастает (пока не «выключатся» иные факторы, останавливающие рост амплитуды колебаний). В случае же обычного резонанса устанавливаются стационарные колебания с амплитудой, зависящей от частоты внешней силы.

3) Обычный резонанс (максимальная амплитуда колебаний) наблюдается на одной частоте. Параметрический же резонанс (раскачка колебаний) может наблюдаться на целом наборе частот внешней силы.

В рассмотренном примере период внешней силы (период колебаний индуктивности)  $T_L$  составлял половину периода собственных колебаний осциллятора  $T_0$ , так что

$$\omega_L = 2\omega_0; \quad \omega_L = \frac{2\pi}{T_L}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}.$$

Однако если период колебаний индуктивности окажется вдвое больше, то резонанс также будет наблюдаться, хотя раскачка будет идти медленнее, поскольку в этом случае за один период  $T_L$  в поступает меньшая энергия.

Точно так же раскачка наблюдается и тогда, когда период  $T_L$  будет составлять целое число полупериодов  $T_0$ :  $T_L = nT_0/2$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Для частоты колебаний индуктивности при этом имеем

$$\omega_{L,n} = \frac{2\omega_0}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.8.22)$$

При этом инкремент  $\lambda_n$  убывает с ростом номера резонанса.

4) Ещё одной особенностью параметрического резонанса является тот факт, что неограниченная раскачка колебаний наблюдается не только на дискретном наборе частот, но и в некоторой полосе в окрестности каждой из частот (17.8.22):

$$\omega_{L,n} - \Delta\omega_a^{(1)} < \omega < \omega_{L,n} + \Delta\omega_a^{(2)}.$$

При этом ширина полос уменьшается по мере роста номера  $n$ . При наличии затухания ( $\gamma > 0$ ) число резонансных полос конечно. Их число  $n_{\max}$  ограничено условием  $\lambda_{n_{\max}} \leq \gamma$ .

## 17.9. Автоколебания

### 17.9.1. Обратная связь

*Автоколебания* — это незатухающие колебания в диссипативной нелинейной системе, параметры которых (амплитуда и период) определяются свойствами только самой системы и в широких пределах не зависят от начального состояния системы.

Автоколебания возникают при наличии положительной обратной связи, приводящей к неустойчивости состояния равновесия.

*Обратная связь* — это воздействие результата какого-либо процесса на его протекание.

Примером системы с обратной связью является усилитель с громкоговорителем (рис. 17.9.1). Если сигнал с громкоговорителя подать на

микрофон, то может возникать самовозбуждение системы — появление и усиление случайных звуковых сигналов.

Схему системы с обратной связью можно качественно представить, как на рис. 17.9.2.

Обратная связь называется *положительной*, если она вызывает неустойчивость состояния равновесия, и *отрицательной*, если она ведёт к стабилизации, возвращению к равновесию.

### 17.9.2. Генератор Ван-дер-Поля

Примером системы, где реализуется положительная обратная связь и возникают автоколебания, является генератор Ван-дер-Поля, собранный на лампе-триоде (рис. 17.9.3).

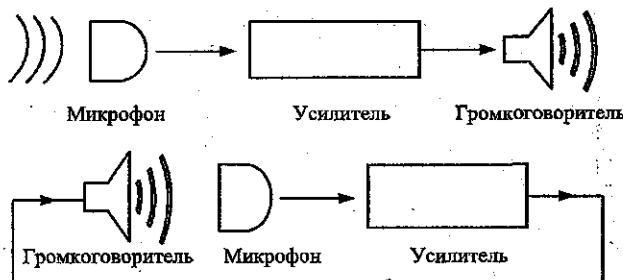
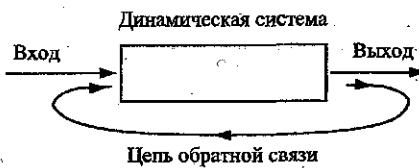


Рис. 17.9.1. Сверху — исходная система приёма, усиления и воспроизведения звука; снизу — включение обратной связи

Рис. 17.9.2. Система с обратной связью



В схеме генератора присутствуют два контура: анодная цепь и цепь сетки. Между ними имеется индуктивная связь: изменения тока  $J_a$  в анодной цепи создают в цепи сетки ЭДС индукции:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = M \frac{dJ_a}{dt}. \quad (17.9.1)$$

Здесь  $M$  — коэффициент взаимной индукции.

С учётом этого уравнение, определяющее закон изменения тока в цепи сетки, принимает вид

$$L \frac{dJ}{dt} + RJ + U_c = M \frac{dJ_a}{dt}. \quad (17.9.2)$$

Мы считаем, что ток положителен:  $J > 0$ , когда он приводит к зарядке конденсатора, т.е. полагаем  $J = dQ/dt$ . Поскольку напряжение на конденсаторе  $U_c = Q/C$ , то  $J = C dU_c/dt$ . Тогда уравнение (17.9.2) принимает вид

$$LC \frac{d^2U_c}{dt^2} + RC \frac{dU_c}{dt} + U_c = M \frac{dJ_a}{dt}. \quad (17.9.3)$$

Ток в анодной цепи зависит от напряжения на сетке:  $J_a = J_a(U_c)$ . Эта функция называется *сеточной характеристикой*, её график качественно показан на рис. 17.9.4. В рабочей области лампы по мере увеличения напряжения на сетке растёт анодный ток.

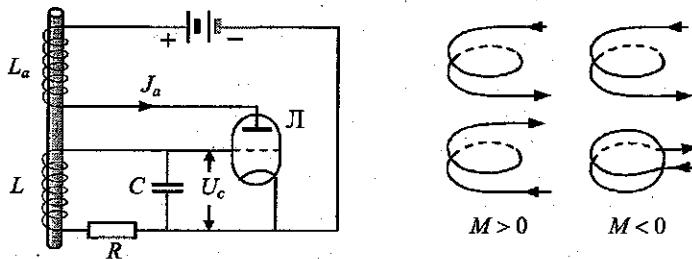


Рис. 17.9.3. Слева — схема генератора Ван-дер-Поля на электронной лампе-триоде  $\text{Л}$ ; справа — относительное расположение витков и выводов катушек, реализующих различные знаки взаимной индукции  $M$  (в соответствии с правилом Ленца).

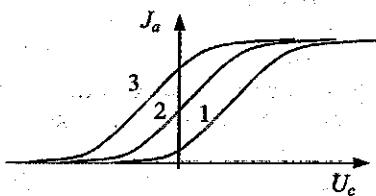


Рис. 17.9.4. Сеточная характеристика триода для трёх значений анодного напряжения:  $U_{a1} < U_{a2} < U_{a3}$  (кривые 1, 2 и 3 соответственно)

Анодный ток  $J_a$  зависит также от анодного напряжения  $U_a$ : с ростом  $U_a$  ток  $J_a$  растёт, т.е. сеточная характеристика смещается влево. Это значит, что можно так подобрать анодное напряжение  $U_a = U_{a,0}$ , чтобы

при  $U_c = 0$  наклон кривой  $J_a = J_a(U_c)$  был максимальным. Соответственно окажется, что крутизна сеточной характеристики, т.е. функция

$$S(U_c) = dJ_a/dU_c, \quad (17.9.4)$$

имеет максимум при  $U_c = 0$ . График  $S(U_c)$  для такого случая показан на рис. 17.9.5. Анодное напряжение  $U_{a,0}$  называют рабочим, оно обеспечивает максимум усиления. Этот случай будем подразумеваться в дальнейшем.

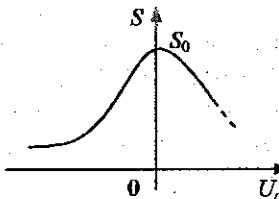


Рис. 17.9.5. Крутизна сеточной характеристики

Вблизи максимума крутизна  $S(U_c)$  может быть аппроксимирована следующим выражением:

$$S = S_0 - S_2 U_c^2. \quad (17.9.5)$$

Заменяя в (17.9.3) правую часть с учётом (17.9.4), (17.9.5):

$$M \frac{dJ_a}{dt} = M \frac{dJ_a}{dU_c} \frac{dU_c}{dt} = MS(U_c) \frac{dU_c}{dt},$$

приходим к уравнению для напряжения на сетке:

$$\frac{d^2U_c}{dt^2} + \frac{RC - MS_0}{LC} \frac{dU_c}{dt} + \frac{1}{LC} U_c = 0. \quad (17.9.6)$$

Мы получили *уравнение Ван-дер-Поля*.

Перепишем это уравнение, используя обозначения

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2\gamma = \frac{RC - MS_0}{LC}, \quad 2\beta = \frac{MS_2}{LC}. \quad (17.9.7)$$

Тогда уравнение (17.9.6) примет вид

$$\frac{d^2U_c}{dt^2} + 2(\gamma + \beta U_c^2) \frac{dU_c}{dt} + \omega_0^2 U_c = 0. \quad (17.9.8)$$

### 17.9.3. Условие самовозбуждения

Система имеет положение равновесия  $U_c = 0$ , когда все токи равны нулю. Исследуем устойчивость этого состояния. На начальной стадии, когда  $U_c \approx 0$ , уравнение (17.9.8) упрощается:

$$\frac{d^2U_c}{dt^2} + 2\gamma \frac{dU_c}{dt} + \omega_0^2 U_c = 0. \quad (17.9.9)$$

Данное уравнение выглядит точно так же, как уравнение колебаний осциллятора с трением.

Пусть индуктивная связь анодной и сеточной цепей мала, т.е.  $MS_0 < RC$  (или если  $M < 0$ ). Тогда  $\gamma > 0$ , и из (17.9.9) следует, что

$$U_c(t) = U_{c0} e^{-\gamma t} \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (17.9.10)$$

Таким образом, в рассматриваемых условиях случайные флюктуации напряжения на конденсаторе со временем затухают.

Пусть теперь связь контуров достаточно велика:  $MS_0 > RC$ , т.е.  $\gamma < 0$ . При этом, как видно из (17.9.10), амплитуда колебаний начинает нарастать:

$$U_c(t) \sim U_{c0} e^{|\gamma|t} \sin \omega t. \quad (17.9.11)$$

Следовательно, в системе развивается неустойчивость.

Поясним качественно поведение системы в случаях  $MS_0 < RC$  и  $MS_0 > RC$ .

1) Пусть  $MS_0 < RC$ , т.е.  $\gamma > 0$ . Это реализуется, в частности, при  $M < 0$ . Тогда случайное увеличение сеточного напряжения  $U_c$  приводит к увеличению анодного тока (в соответствии с сеточной характеристической  $J_a = J_a(U_c)$ ). В результате в сеточном контуре возникает ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{инд}$ , которая *отрицательна* и создаёт в контуре ток, ведущий к разряду конденсатора (уменьшению  $U_c$ ). Таким образом, при случайном отклонении от равновесия система возвращается назад — состояние равновесия устойчиво.

2) Пусть теперь  $MS_0 > RC$ , т.е.  $\gamma < 0$ . Для этого необходимо  $M > 0$ . Тогда случайное увеличение  $U_c$  приводит к росту анодного тока. При этом возникает ЭДС  $\mathcal{E}_{инд}$ , которая создаёт ток в *положительном* направлении, увеличивая наряжение на конденсаторе  $U_c$ . В свою очередь, это вызывает дальнейший рост анодного тока  $J_a$  и последующий рост  $U_c$ . В результате начинается раскачка колебаний, т.е. развивается неустойчивость. Ограничение раскачки связано с тем, что при больших значениях  $U_c$  анодный ток перестаёт расти, и устанавливаются равновесные колебания.

#### 17.9.4. Энергетический смысл условия неустойчивости

Как следует из сказанного, условием возникновения неустойчивости является неравенство

$$MS_0 > RC. \quad (17.9.12)$$

Это условие можно получить, рассматривая баланс энергии в системе (при  $U_c \rightarrow 0$ ). За период колебаний  $T$  в сеточный контур из анодной цепи поступает энергия

$$\overline{J\mathcal{E}_{\text{инд}}T} = JM \frac{dJ_a}{dt} T = MTJS_0 \frac{dU_c}{dt} = MTS_0 \frac{1}{C} \overline{J^2}.$$

Здесь учтено, что

$$Q = CU_c, \quad J = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_c}{dt}; \quad \frac{dJ_a}{dt} = S_0 \frac{dU_c}{dt} = \frac{1}{C} S_0 J.$$

За это же время джоулевы потери в контуре составят  $\overline{RJ^2T}$ . Если поступление энергии превышает потери:

$$MTS_0 \frac{1}{C} \overline{J^2} > \overline{RJ^2T}, \quad \text{или} \quad MS_0 > RC,$$

то начинается раскачка колебаний. Это условие совпадает с неравенством (17.9.12), полученным формально из уравнения Ван-дер-Поля.

#### 17.9.5. Амплитуда автоколебаний вблизи порога неустойчивости

Как результат развития неустойчивости, устанавливаются периодические колебания с конечной (ненулевой) амплитудой, причём поступление энергии в систему за период равно потерям за то же время.

Рассмотрим баланс энергии в генераторе Ван-дер-Поля. Энергия складывается из энергии, запасённой в катушке индуктивности, и энергии, запасённой в конденсаторе:

$$W = \frac{LJ^2}{2} + \frac{CU_c^2}{2}.$$

Продифференцируем это выражение по времени, имея в виду соотношение  $J = dq/dt = C dU_c/dt$ :

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= LJ \frac{dJ}{dt} + CU_c \frac{dU_c}{dt} = LC \frac{dU_c}{dt} C \frac{d^2U_c}{dt^2} + CU_c \frac{dU_c}{dt} = \\ &= LC^2 \frac{dU_c}{dt} \left( \frac{d^2U_c}{dt^2} + \frac{1}{LC} U_c \right). \end{aligned}$$

Используя определение  $\omega_0^2 = 1/LC$  и уравнение (17.9.6)

$$\frac{d^2U_c}{dt^2} + 2(\gamma + \beta U_c^2) \frac{dU_c}{dt} + \omega_0^2 U_c = 0,$$

перепишем содержимое скобок в следующем виде:

$$-2(\gamma + \beta U_c^2) \frac{dU_c}{dt},$$

так что для скорости изменения энергии  $W$  получается выражение

$$\frac{dW}{dt} = -2LC^2 \left( \frac{dU_c}{dt} \right)^2 (\gamma + \beta U_c^2). \quad (17.9.13)$$

Отсюда следует, что при  $\gamma > 0$  энергия не возрастает:  $dW/dt \leq 0$ . Производная  $dW/dt$  обращается в нуль при  $dU_c/dt = 0$ . Но разность потенциалов  $U_c \neq 0$  на конденсаторе вызовет ток в цепи и изменение заряда ( $CU_c$ ) на конденсаторе. Поэтому состояние с  $U_c = \text{const} \neq 0$  не является состоянием равновесия, и из (17.9.13) следует, что система будет стремиться к состоянию равновесия:  $U_c \rightarrow 0$ ,  $W \rightarrow 0$ , которое является единственным и устойчивым.

Если  $\gamma < 0$ , то вблизи положения равновесия ( $U_c = 0$ ), как видно из (17.9.13),  $dW/dt \geq 0$ . Следовательно, энергия, запасённая в контуре, монотонно растёт. Однако при достаточно больших значениях напряжения ( $U_c > \sqrt{-\gamma/\beta}$ ) знак производной меняется. Поскольку  $U_c = \sqrt{-\gamma/\beta} \neq 0$  не является состоянием равновесия, то в системе устанавливаются колебания, в ходе которых энергия системы периодически меняется:

$$W(t+T) = W(t), \quad (17.9.14)$$

где  $T$  — период колебаний.

Для нахождения амплитуды колебаний напряжения  $U_c$  проинтегрируем почлененно уравнение (17.9.13) по периоду колебаний:

$$W(t+T) - W(t) = 0 = -2LC^2 \int_t^{t+T} \left( \frac{dU_c}{dt} \right)^2 (\gamma + \beta U_c^2) dt. \quad (17.9.15)$$

При  $\gamma < 0$  вблизи порога неустойчивости (т.е. при малых значениях  $|\gamma|$ ) колебания можно приближённо представить как гармонические:

$$U_c(t) = U_{c0} \cos \omega t.$$

Подстановка этого выражения в (17.9.15) с учётом равенств

$$\int\limits_t^{t+T} \sin^2 \omega t dt = \frac{T}{2}, \quad \int\limits_t^{t+T} \sin^2 \omega t \cos^2 \omega t dt = \frac{T}{8}$$

даёт

$$\gamma U_{c0}^2 \frac{T}{2} + \beta U_{c0}^4 \frac{T}{8} = 0.$$

Отсюда находим амплитуду установившихся автоколебаний:

$$U_{c0} = 2 \sqrt{-\frac{\gamma}{\beta}} = 2 \sqrt{\frac{MS_0 - RC}{MS_2}}. \quad (17.9.16)$$

Здесь во втором равенстве учтены обозначения (17.9.7).

Таким образом, амплитуда колебаний монотонно растёт по мере удаления от порога возникновения неустойчивости.

Заметим, что в отсутствии омического сопротивления ( $R = 0$ ), окажется  $U_c = 2\sqrt{S_0/S_2}$ . Это значит, что при  $M > 0$  автоколебания возникают независимо от величины индуктивной связи анодной и сеточной цепей. Данный эффект связан с отсутствием потерь энергии и наличием только авторегулировки ввода и вывода энергии батареи ЭДС (находящейся в анодной цепи).

## Глава 18. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФЛУКТУАЦИИ

В электрических цепях существуют флуктуации тока и напряжения, которые проявляются в различных измерениях. Флуктуации создают ложные сигналы на выходе усилителей электрических сигналов, ограничивают чувствительность и помехоустойчивость электронных приборов, снижают стабильность их работы. Наличие флуктуаций определяет предел чувствительности измерительных приборов: если показания прибора, обусловленные измеряемым эффектом, окажутся того же порядка, что и флуктуации, то установить происхождение показаний прибора — измеряемый сигнал или флуктуация — не представляется возможным (по крайней мере, в однократном измерении).

Возникновение флуктуаций связано с дискретностью зарядов, осуществляющих перенос тока, и со случайным характером движения этих зарядов.

Рассмотрим два наиболее типичных примера электрических флуктуаций — дробовой и тепловой шумы.

### 18.1. Дробовой шум

#### 18.1.1. Дробовой шум

*Дробовым шумом* называются электрические флуктуации, обусловленные дискретностью зарядов, образующих токи, а также случайнм характером вылета и прибытия этих зарядов.

Сам термин «дробовой шум» происходит из аналогии с шумом, производимым падающими дробинками. Впервые явление дробового шума было теоретически предсказано В. Шоттки (W. Schottky) в 1918 г. Детально данное явление экспериментально исследовали Хелл, Уильямс и др. в 1924—1926 годах. Схема их установки показана на рис. 18.1.1.

Возникновение дробового шума можно объяснить следующим образом. Ток образуется зарядами (электронами), покидающими катод К. Импульсы тока, производимые отдельными зарядами, достигающими анода А, можно считать одинаковыми. Однако эти импульсы следуют случайнм образом, т.е. моменты вылета зарядов есть случайные вели-

чины, которые можно считать статистически независимыми. Тогда наблюдаемый ток выглядит примерно так, как показано на рис. 18.1.2.

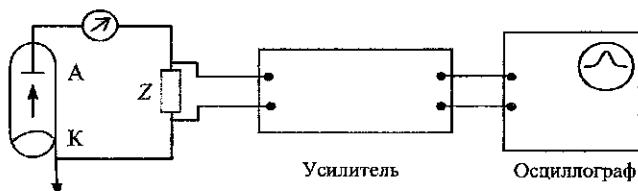


Рис. 18.1.1. Схема установки по наблюдению дробового шума. Поток электронов, испускаемых катодом лампы, попадает на анод и производит ток во внешней цепи

Аналитически выражение для тока можно записать следующим образом. Пусть  $i(t)$  — форма импульса, производимого отдельным зарядом. Обозначая момент прибытия  $j$ -го электрона на анод как  $t_j$ , получаем

$$J(t) = \sum_j i(t - t_j). \quad (18.1.1)$$

В этом выражении моменты  $t_j$  есть независимые случайные величины, так что ток  $J(t)$  есть случайная величина.

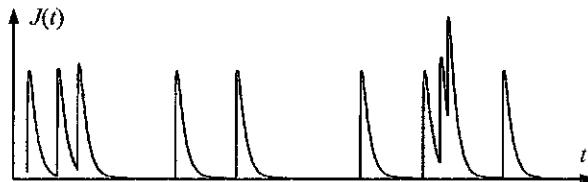


Рис. 18.1.2. Зависимость тока от времени в одной случайной реализации

### 18.1.2. Дисперсия тока

Прежде всего, найдем такие статистические характеристики случайного тока (18.1.1), как среднее и дисперсия. Мы рассмотрим простейшую модель явления, когда эффекты, связанные с конечностью времени пролета заряда от катода до анода, несущественны. Кроме того, мы будем пренебрегать возникновением объемного заряда вблизи катода, существенно влияющего на величину тока, приходящего на анод (даный фактор приводит, частности, к тому, что импульсы тока от отдельных зарядов перестают быть статистически независимыми).

Пусть ток изучается в течение времени  $T$ . Разобъём этот промежуток на  $N$  интервалов длительностью  $\tau$  каждый:  $T = N\tau$ . Пусть событие  $A$  есть приход электрона<sup>1</sup> на анод на некотором шаге, а событие  $\bar{A}$  — отсутствие электрона. Если промежуток времени  $\tau$  достаточно мал, то на любом шаге иные исходы (кроме  $A$  и  $\bar{A}$ ) оказываются маловероятными. В частности, можно пренебречь вероятностью прихода на анод за малое время  $\tau$  двух или более электронов. В указанных обозначениях одну из реализаций случайного тока можно представить в виде

$$\underbrace{A \bar{A} A \bar{A} \dots}_{N} \dots A \bar{A} \dots A. \quad (18.1.2)$$

Если в этой последовательности событие  $A$  встречается  $n$  раз, то средний ток за время  $T$  составит

$$J_T(n) = ne/T. \quad (18.1.3)$$

Пусть вероятность исхода  $A$  равна  $p$ , а исхода  $\bar{A}$  —  $q = 1 - p$ . Тогда вероятность одной из реализаций тока оказывается равной  $p^n q^{N-n}$ . Имея в виду, что число различных реализаций тока, в которых на анод за время  $T$  приходит ровно  $n$  электронов, равно  $C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$ , заключаем, что вероятность тока (18.1.3) равна

$$W_N(n) = C_N^n p^n q^{N-n}. \quad (18.1.4)$$

Таким образом, мы пришли к биномиальному распределению. Для этого распределения среднее значение и дисперсия величины  $n$  даются формулами

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^N W_N(n)n = Np, \quad \sigma_n^2 = (\bar{n} - \bar{n})^2 = Npq. \quad (18.1.5a)$$

Нас интересует случай, когда промежуток времени  $\tau$  мал. Это означает, что вероятность  $p$  тоже мала. В этом пределе

$$\bar{n} = Np, \quad \sigma_n^2 = \bar{n}. \quad (18.1.56)$$

Имея в виду выражение для тока (18.1.3), получаем значения среднего тока:

$$\bar{J}_T = \sum_{n=0}^N W_N(n)J_T(n) = \frac{e\bar{n}}{T} \quad (18.1.6)$$

---

<sup>1</sup> Момент прихода электрона на анод (событие  $A$ ) будем отождествлять с максимумом тока, производимым отдельным зарядом.

и дисперсии:

$$\sigma_J^2 = \frac{e^2}{T^2} \sigma_n^2 = \frac{e \bar{J}_T}{T}. \quad (18.1.7)$$

Приведем также выражение для относительной флуктуации тока

$$\delta_J = \frac{\sqrt{\sigma_J^2}}{\bar{J}_T} = \sqrt{\frac{e}{T \bar{J}_T}}. \quad (18.1.8)$$

Из формул (18.1.7) и (18.1.8) следует:

- 1) с ростом величины тока дисперсия растет (имеет место абсолютное усиление флуктуаций), а относительная флуктуация убывает,
- 2) с ростом времени наблюдения абсолютная и относительная флуктуации уменьшаются.
- 3) Дисперсия тока прямо пропорциональна величине элементарного заряда  $e$ . Поэтому, измеряя флуктуации тока, можно измерить и величину заряда.

### 18.1.3. Спектральный состав дробового шума

Как всякая функция времени, ток  $J(t)$  на интервале времени  $0 \leq t \leq T$  может быть разложен в ряд Фурье:

$$J(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)], \quad (18.1.9)$$

где  $\omega = 2\pi/T$ , а коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  вычисляются по формулам

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T J(t) \cos(k\omega t) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (18.1.10)$$
$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T J(t) \sin(k\omega t) dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для упрощения расчетов предположим, что отдельный импульс тока дается выражением

$$i_j(t) = e\delta(t - t_j), \quad (18.1.11)$$

где  $\delta(t)$  — дельта-функция. Другими словами, считаем, что импульсы тока, производимые отдельными электронами, достаточно короткие, быстро затухающие, что позволяет пренебречь эффектами последействия, в частности, объемным зарядом, возникающим между электродами. Тогда по формулам (18.1.10) находим коэффициенты ряда Фурье для отдельного ( $j$ -го) импульса:

$$a_k^{(j)} = \frac{2e}{T} \cos(k\omega t_j), \quad b_k^{(j)} = \frac{2e}{T} \sin(k\omega t_j). \quad (18.1.12)$$

Ввиду произвольности моментов  $t_j$  найденные коэффициенты являются случайными величинами, причем для их средних значений нетрудно найти

$$\begin{aligned}\overline{a_k^{(j)}} &= \overline{b_k^{(j)}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots \\ \overline{a_0^{(j)}} &= \frac{2e}{T}.\end{aligned}\quad (18.1.13)$$

Соответственно для полного тока, производимого всеми прибывшими на анод электронами за время  $T$ , находим:

$$\bar{J}_T = \bar{n} \frac{1}{2} \overline{a_0^{(j)}} = \frac{\bar{n}e}{T}. \quad (18.1.14)$$

Найдем теперь дисперсию тока. Прежде всего, согласно (18.1.9), (18.1.12) вклад  $k$ -й фурье-компоненты в ток от  $j$ -го импульса дается формулой

$$\begin{aligned}i_k^{(j)}(t) &= a_k^{(j)} \cos(k\omega t) + b_k^{(j)} \sin(k\omega t) = \\ &= \frac{2e}{T} [\cos(k\omega t_j) \cos(k\omega t) + \sin(k\omega t_j) \sin(k\omega t)] = \frac{2e}{T} \cos(k\omega(t - t_j)).\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\overline{[i_k^{(j)}(t)]^2} = \frac{4e^2}{T^2} \overline{\cos^2(k\omega(t - t_j))} = \frac{2e^2}{T^2}. \quad (18.1.15)$$

Здесь учтено, что вследствие случайности моментов  $t_j$  имеет место равенство  $\overline{\cos^2[k\omega(t - t_j)]} = 1/2$ .

Ввиду статистической независимости времени следования отдельных импульсов оказывается

$$\overline{i_k^{(j)}(t) i_l^{(l)}(t)} = 0 \text{ при } j \neq l. \quad (18.1.16)$$

Поэтому для  $k$ -й фурье-компоненты полного тока имеем

$$\overline{j_k^2} = \bar{n} \overline{(i_k^{(j)})^2} = \frac{2e^2 \bar{n}}{T^2} = \frac{2e \bar{J}_T}{T}. \quad (18.1.17)$$

Здесь использовано выражение для среднего тока  $\bar{J}_T = \bar{n}e/T$ .

В рассматриваемом сейчас случае конечного промежутка времени наблюдения  $T$  фурье-спектр состоит из дискретного набора частот, как показано на рис. 18.1.3. Здесь мы перешли от круговых частот  $\omega$  к цик-

лическим и:  $\nu = \omega/2\pi$ . Если интервал времени  $T$  достаточно велик, т.е. шаг  $\Delta\nu = 1/T$  мал, то спектр можно считать почти непрерывным. Пусть  $d\nu$  — полоса частот, в которой измеряются шумы. На этом интервале спектра помещается  $\frac{d\nu}{\Delta\nu} = Td\nu$  фурье-компонент. Тогда частотный спектр дробового шума можно записать в виде

$$d(\overline{J^2}) = \overline{J_k^2} \cdot Td\nu = 2e\bar{J}_T d\nu.$$

Обозначая средний ток как  $\bar{J}_T = J_0$ , находим окончательно флуктуацию тока в спектральном интервале  $d\nu$ :

$$d(\overline{J^2}) = 2eJ_0 d\nu. \quad (18.1.18)$$

Полученное соотношение называется *формулой Шоттки*. Отметим, что величина интервала  $T$  сюда явно не входит. Поэтому данное равенство справедливо (в рамках использованных допущений) для произвольных промежутков времени наблюдения.

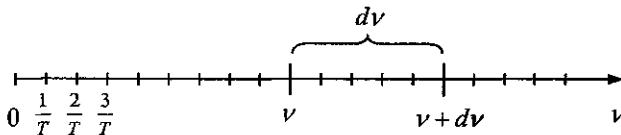


Рис. 18.1.3. Частоты фурье-спектра тока

Согласно (18.1.18) спектральная плотность флуктуаций тока  $d(\overline{J^2})/d\nu = 2eJ_0$  не зависит от частоты. Соответствующий шум называется *белым*: его мощность равномерно распределена по всему спектру.

Заметим, что последовательная теория дробового шума, учитывая конечность времени пролета лампы электронами, приводит к следующему выражению для спектра дробового шума:

$$d(\overline{J^2}) = 2eJ_0 F_\tau d\nu, \quad (18.1.19)$$

где множитель  $F_\tau$  зависит от частоты и времени пролета заряда. Типичный вид этой функции показан на рис. 18.1.4.

Существенное убывание спектральной мощности наблюдается при частотах  $\nu \sim \tau^{-1}$ . Например, в электронной лампе  $\tau \sim 10^{-8}$  с, так что спектр дробового шума обрывается при  $\nu \sim 10^8$  Гц.

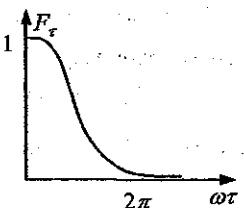


Рис. 18.1.4. Множитель  $F_t$ , учитывающий пролетные эффекты в формировании дробового шума.  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $t$  — время пролета от катода до анода

## 18.2. Термовые шумы в электрических цепях

### 18.2.1. Термовой шум

В 1927 г. Дж.Б. Джонсон (J.B. Johnson) обнаружил, что на выходе усилителя, к входу которого вместо ЭДС подключено активное сопротивление  $R$ , наблюдается шум, хаотическое напряжение (рис. 18.2.1). Интенсивность этого напряжения  $\bar{E}^2$  растет с увеличением входного сопротивления и с повышением температуры  $T$ . Теория явления была создана в том же 1927 г. Х. Найквистом (H. Nyquist).

Обнаруженное явление носит общий характер и состоит в том, что в цепи, включающей активное сопротивление, всегда возникают случайные ЭДС и обусловленные ими случайные токи, причем

$$\bar{E}(t) = 0, \quad \bar{J}(t) = 0. \quad (18.2.20)$$

Наблюдающийся в подобных ситуациях шум называют *джонсоновским*, или *найквистовым*.

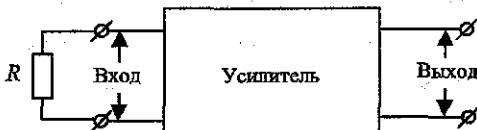


Рис. 18.2.1. Усилитель, к входу которого подсоединенено активное сопротивление  $R$

Природа найквистовского шума состоит в следующем. Случайное движение электронов приводит к флуктуациям электрического поля, которые вызывают ток. Этот ток в свою очередь приводит к выделению тепла в активном сопротивлении (в соответствии с законом Джоуля-Ленца). Выделенное тепло точно соответствует энергии, взятой из флуктуаций. Другими словами, идет непрерывная перекачка энергии флуктуаций в тепловую энергию и обратно. В соответствии с этим рассматриваемый шум часто называют *термовым шумом*. Поскольку поте-

ри (диссипация) энергии связаны с активным сопротивлением ( $dW/dt = -RJ^2$ ), то системы, не содержащие активного сопротивления, не производят теплового шума.

В металлах вследствие большой концентрации электронов проводимости и малой длины свободного пробега тепловые скорости во много раз превосходят скорость упорядоченного движения (дрейфа) в электрическом поле. Поэтому флуктуации зависят от температуры, но практически не зависят от приложенного напряжения.

### 18.2.2. Оценка теплового шума

Рассмотрим подробнее происхождение шума. Пусть имеется активное сопротивление — проводник, содержащий электроны с концентрацией  $n$  ( $\text{см}^{-3}$ ). Электронный газ является равновесным и имеет температуру  $T$ , равную температуре проводника. Выделим в проводнике некоторый малый объем  $V$ . Плотность тока, создаваемого электронами в этом объеме, равна

$$\mathbf{j} = ne\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{N} \sum_i \mathbf{v}_i, \quad (18.2.21)$$

где  $e$  — заряд электрона,  $\mathbf{v}_i$  — скорость  $i$ -го электрона,  $N$  — число электронов в выбранном объеме  $V$ :  $N = nV$ ,  $\mathbf{u}$  — средняя (дрейфовая) скорость рассматриваемой группы электронов. Ввиду случайнога характера движений электронов  $\mathbf{j} = 0$ . Однако среднеквадратичная флуктуация тока отлична от нуля. Найдем её.

Усредняя квадрат плотности тока, получим

$$\overline{\mathbf{j}^2} = e^2 \overline{n^2 \mathbf{u}^2} = e^2 \overline{n^2} \overline{\mathbf{u}^2}. \quad (18.2.22)$$

Здесь учтено, что скорости электронов и их концентрация — это статистически независимые случайные величины.

Для среднего значения квадрата концентрации имеем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \overline{n^2} &= \frac{1}{V^2} \overline{N^2} = \frac{1}{V^2} \overline{(N - \bar{N} + \bar{N})^2} = \frac{1}{V^2} \left[ \overline{(N - \bar{N})^2} + (\bar{N})^2 \right] = \\ &= \frac{1}{V^2} \left[ \bar{N} + (\bar{N})^2 \right] = \frac{\bar{n}}{V} + (\bar{n})^2. \end{aligned}$$

Поскольку число электронов в проводнике велико:  $\bar{N} \gg 1$ , то  $\bar{N}^2 \gg \bar{N}$ , и с достаточной точностью можно полагать

$$\overline{n^2} = \left( \frac{\bar{N}}{V} \right)^2 = \bar{n}^2 = n^2.$$

Для среднеквадратичной скорости потока находим:

$$\overline{\mathbf{u}^2} = \frac{1}{N^2} \left( \sum_i \mathbf{v}_i \right)^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i,k} \overline{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_k}. \quad (18.2.23)$$

Скорости частиц есть случайные величины с одинаковыми статистическими свойствами:

$$\overline{\mathbf{v}_i} = 0, \quad \overline{\mathbf{v}_i^2} = \frac{3kT}{m}.$$

Кроме того, для любой пары частиц эти величины статистически независимы, т.е.

$$\overline{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_k} = \overline{\mathbf{v}_i} \overline{\mathbf{v}_k} = 0 \text{ при } i \neq k.$$

Поэтому получаем

$$\overline{\mathbf{u}^2} = \frac{1}{N^2} \sum_i \overline{\mathbf{v}_i^2} = \frac{1}{N} \frac{3kT}{m}. \quad (18.2.24)$$

Таким образом, находим

$$\overline{\mathbf{j}^2} = e^2 \overline{n^2} \overline{\mathbf{u}^2} = \frac{e^2 n^2}{N} \frac{3kT}{m} \sim \frac{1}{V} \frac{e^2 n}{m} kT. \quad (18.2.25)$$

Здесь учтено, что  $N = nV$ . Имея в виду оценочный характер расчета, здесь и далее мы отбрасываем несущественные числовые множители. Для флюктуации полного тока отсюда можно получить выражение

$$\overline{J^2} = S^2 \overline{\mathbf{j}^2} \sim \frac{S^2}{V} \frac{e^2 n}{m} kT = \frac{S}{l} \frac{e^2 n}{m} kT. \quad (18.2.26)$$

Здесь  $l$  и  $S$  — длина и площадь поперечного сечения проводника,  $V = Sl$  — объём проводника. Согласно теории Друде проводимость металла определяется формулой

$$\lambda = ne^2 \tau / 2m, \quad (18.2.27)$$

где  $\tau$  — среднее время свободного пробега электронов,  $m$  — масса электрона. Это позволяет переписать выражение для флюктуации тока в виде

$$\overline{J^2} \sim \frac{1}{\tau} \frac{S \lambda}{l} kT. \quad (18.2.28)$$

Сопротивление проводника связано с его проводимостью соотношением

$$R = l/S\lambda, \quad (18.2.29)$$

В результате приходим к следующей оценке дисперсии тока:

$$\overline{J^2} \sim \frac{1}{\tau} \frac{kT}{R}. \quad (18.2.30)$$

Возникновение этого тока можно рассматривать как результат действия случайного электрического поля с напряженностью  $E = j/\lambda$ ,  $\bar{E} = 0$ . Флуктуации поля порождают случайные ЭДС  $\mathcal{E}(t)$ :  $\bar{\mathcal{E}} = 0$ ,  $\bar{\mathcal{E}^2} \neq 0$ . Оценка среднеквадратичной флуктуации ЭДС согласно закону Джоуля–Ленца имеет вид

$$\overline{\mathcal{E}^2} = R^2 \overline{J^2} \sim kT/\tau. \quad (18.2.31)$$

Наконец, для мощности омических потерь получаем оценку:

$$\bar{P} = \bar{J}\bar{\mathcal{E}} = R\overline{J^2} \sim kT/\tau. \quad (18.2.32)$$

Таким образом, среднеквадратичные флуктуации ЭДС и тока, а также мощность теплового шума пропорциональны температуре. Обратим также внимание на то, что мощность омических потерь обратно пропорциональна времени свободного пробега электронов, поскольку скорость рассеяния энергии флуктуаций определяется частотой столкновений электронов с атомами.

### 18.2.3. Спектр теплового шума

Для определения спектрального состава мощности, а также флуктуаций ЭДС и тока рассмотрим высокодобротный резонансный *LCR*-контур (рис. 18.2.2). Этот контур содержит активное сопротивление  $R$ , поставляющее случайную ЭДС в цепь (на рисунке данная ЭДС показана отдельно).

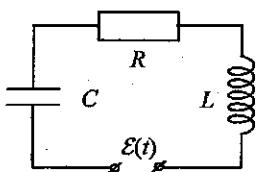


Рис. 18.2.2. Резонансный *LCR*-контур, содержащий источник случайных ЭДС, возникающих в активном сопротивлении

Вследствие резонансных свойств контура в нём будут существовать только колебания с частотами, близкими к резонансной  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , в диапазоне  $\omega_0 \pm \gamma$ , где  $\gamma = R/2L$  — коэффициент затухания. Резонансная кривая — зависимость амплитуды тока в цепи от частоты ЭДС — показана на рис. 18.2.3. Меняя резонансную частоту контура (например, используя переменную индуктивность или ём-

кость), мы можем найти значения рассеиваемой мощности, а также флюктуаций тока и ЭДС в разных диапазонах спектра.

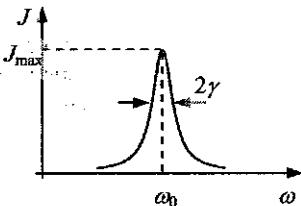


Рис. 18.2.3. Резонансная кривая для  $LCR$ -контура. Указана ширина резонанса по уровню  $J_{1/\sqrt{2}} = J_{\max}/\sqrt{2}$ .

$\omega_0$  — резонансная частота контура,  $\gamma$  — коэффициент затухания. Для контура с высокой добротностью  $\gamma \ll \omega_0$

Вследствие высокой добротности контура ( $\gamma \ll \omega_0$ ) энергия убывает медленно — за характерное время  $\tau \sim 1/\gamma$ , значительно превышающее период колебаний  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . Поэтому случайные ЭДС вызовут долгоживущие колебания в контуре. Энергия, запасённая в контуре, складывается из электрической энергии (в конденсаторе) и магнитной энергии (в катушке индуктивности):

$$W = \frac{Lq^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = \frac{LJ^2}{2} + \frac{CU^2}{2}, \quad (18.2.33)$$

где  $U$  — напряжение на конденсаторе. Если система имеет температуру  $T$ , то по теореме о равнораспределении энергии по степеням свободы на каждую из частей (магнитную и электрическую) приходится в среднем энергия, равная  $kT/2$ :

$$\overline{W}_L = \frac{\overline{LJ^2}}{2} = \frac{1}{2}kT, \quad \overline{W}_C = \frac{\overline{CU^2}}{2} = \frac{1}{2}kT, \quad (18.2.34)$$

$$\overline{W} = \overline{W}_L + \overline{W}_C = kT.$$

Добротность колебательной системы в случае малых потерь ( $\gamma \ll \omega_0$ ) может быть записана в виде

$$Q = 2\pi W/\Delta W, \quad (18.2.35)$$

где  $W$  — энергия системы в начале какого-то цикла колебаний, а  $\Delta W$  — энергия, теряемая за этот цикл. Следовательно, потери энергии в контуре за один период колебаний оказываются равными

$$\Delta W = 2\pi W/Q. \quad (18.2.36)$$

Имея в виду, что величина  $W$  совпадает со средней тепловой энергией системы, получаем

$$\Delta W = 2\pi kT/Q. \quad (18.2.37)$$

Эта энергия теряется в активном сопротивлении. В соответствии с определением добротности

$$Q = \omega_0 / \Delta\omega, \quad (18.2.38)$$

где  $\omega_0$  — резонансная частота, а  $\Delta\omega$  — ширина резонанса ( $\Delta\omega \approx 2\gamma$ ).

Именно в полосе частот  $\Delta\omega$  существуют основные колебания в контуре, на остальных же частотах колебания сильно подавлены и несут малую долю всей энергии системы. С учетом (18.2.37), (18.2.38) получаем выражение для энергии, рассеиваемой за период колебаний:

$$\Delta W = 2\pi \frac{kT}{\omega_0} \Delta\omega. \quad (18.2.39)$$

Наконец, поскольку период колебаний равен  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , находим выражение для рассеиваемой мощности:

$$P_\omega \sim \Delta W / T_0 = kT \Delta\omega. \quad (18.2.40)$$

Полученная формула дает оценку мощности, рассеиваемой в активном сопротивлении в диапазоне частот  $\omega \div \omega + d\omega$ . Но, с другой стороны, в условиях равновесия точно такая же мощность затрачивается на создание флюктуаций ЭДС. Следовательно, полученная формула дает выражение для спектра тепловых шумов.

Переходя от мощности к ЭДС и токам:

$$P = J^2 R, \quad P = \mathcal{E}^2 / R,$$

можно получить следующие спектральные распределения:

$$(J^2)_\omega d\omega \sim \frac{kT}{R} d\omega, \quad (\mathcal{E}^2)_\omega \sim kTR d\omega. \quad (18.2.41)$$

Как следует из соотношений (18.2.40), (18.2.41), спектральные плотности рассматриваемых величин не зависят от частоты, т.е. на всех частотах амплитуда флюктуаций одинакова. Это означает, что тепловые флюктуации производят белый шум.

Соотношения (18.2.40), (18.2.41) называют *формулами Найквиста*.

### 18.3. Статистическая теория теплового шума

В данном разделе излагается последовательная классическая теория тепловых шумов, получены формулы Найквиста.

#### 18.3.1. Корреляционная функция

Введем корреляционную функцию случайной ЭДС:

$$K_{\mathcal{E}}(\tau) = \overline{\mathcal{E}(t)\mathcal{E}(t+\tau)}. \quad (18.3.1)$$

Индекс « $\mathcal{E}$ » в обозначении  $K_{\mathcal{E}}(\tau)$  указывает на то, что мы имеем дело с корреляционной функцией для ЭДС. Для стационарного процесса функция  $K_{\mathcal{E}}(\tau)$  не зависит от времени  $t$  вследствие произвольности выбора начала отсчета и однородности времени.

Фурье-преобразование  $S_{\mathcal{E}}(\omega)$  определяется равенствами

$$K_{\mathcal{E}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathcal{E}}(\omega) e^{i\omega\tau} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad S_{\mathcal{E}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\mathcal{E}}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (18.3.2)$$

Отсюда, в частности, следует

$$K_{\mathcal{E}}(0) = \overline{\mathcal{E}^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathcal{E}}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (18.3.3)$$

Функция  $S_{\mathcal{E}}(\omega)$  называется *спектральной функцией шума*.

Рассмотрим квазистационарную цепь, включающую индуктивность  $L$  и сопротивление  $R$ . В активном сопротивлении, как было показано выше, генерируется случайная ЭДС. Относительно свойств этой ЭДС будем предполагать следующее. Её среднее значение равно нулю (поскольку отсутствуют внешние источники ЭДС),

$$\overline{\mathcal{E}(t)} = 0. \quad (18.3.4)$$

Примем также, что значения случайной ЭДС в различные моменты времени статистически независимы, некоррелированы:

$$\overline{\mathcal{E}(t)\mathcal{E}(t')} = G\delta(t-t'). \quad (18.3.5)$$

С учетом определения корреляционной функции (18.3.1) соотношение (5) можно переписать в виде

$$K_{\mathcal{E}}(\tau) = G\delta(\tau). \quad (18.3.6)$$

Найдем коэффициент  $G$ . Для этого рассмотрим  $LR$ -контур со случайной ЭДС. Ток  $J(t)$  в рассматриваемом контуре описывается уравнением Ланжевена:

$$L \frac{dJ}{dt} + RJ = \mathcal{E}(t), \quad (18.3.7)$$

содержащим случайную функцию  $\mathcal{E}(t)$ . Решение этого уравнения с начальным условием  $J(0) = 0$  имеет вид

$$J(t) = \frac{1}{L} \int_0^t \exp\left[-\frac{R}{L}(t-t_1)\right] \mathcal{E}(t_1) dt_1. \quad (18.3.8)$$

Найдем среднюю энергию, запасаемую в индуктивности:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{LJ^2}}{2} &= \frac{1}{2L} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \exp\left[-\frac{R}{L}(t-t_1)\right] \exp\left[-\frac{R}{L}(t-t_2)\right] \overline{\frac{\mathcal{E}(t_1)\mathcal{E}(t_2)}{G\delta(t_1-t_2)}} = \\ &= \frac{G}{2L} \int_0^t dt_1 \exp\left[-\frac{2R}{L}(t-t_1)\right] = \frac{G}{4R} \left[1 - \exp\left(-\frac{2R}{L}t\right)\right].\end{aligned}$$

При  $t \rightarrow \infty$  из последней формулы следует

$$W_L = \frac{\overline{LJ^2}}{2} = \frac{G}{4R}.$$

Учтём далее, что в состоянии термодинамического равновесия, устанавливающемся при  $t \rightarrow \infty$ , окажется  $W_L = kT/2$ . Поэтому для коэффициента  $G$  получаем выражение

$$G = 2kTR. \quad (18.3.9)$$

В итоге мы приходим к следующему выражению для корреляционной функции:

$$K_E(\tau) = 2kTR\delta(\tau). \quad (18.3.10)$$

Согласно (18.3.2) спектральная функция  $S_E(\omega)$  дается выражением

$$S_E(\omega) = 2kTR. \quad (18.3.11)$$

Обратим внимание на то, что для случая рассматриваемого сейчас белого шума полная мощность, диссилируемая на всех частотах в сопротивлении, согласно (18.3.2), (18.3.11) бесконечна:

$$P = \frac{1}{R} \overline{\mathcal{E}^2(t)} = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} 2kTR \frac{d\omega}{2\pi} = \infty. \quad (18.3.12)$$

Такой вывод есть следствие применения классической теоремы о равнораспределении энергии по степеням свободы ( $W_L = kT/2$ ). Однако данная теорема оказывается несправедливой при частотах, удовлетворяющих условию  $\hbar\omega > kT$ , когда начинают работать законы квантовой механики. Благодаря этому отклонения от закона  $S_E(\omega) = 2kTR = \text{const}$  наблюдаются при комнатной температуре при частотах, превышающих  $7 \cdot 10^{13}$  Гц, так что полная рассеиваемая мощность оказывается конечной. Соответствующие частоты относятся к оптическому диапазону и обычными радиоприемниками не регистрируются.

Ограничения полной величины рассеиваемой мощности возникают также благодаря резонансным свойствам электрической цепи, содержащей активное сопротивление.

Ещё одно ограничение применимости формулы (18.3.10) с тем, что при её выводе время корреляции  $\tau_c$  считалось бесконечно малым, что явно учитывалось  $\delta$ -функцией в (18.3.6). Если же время корреляции конечно, то корреляционная функция будет иметь вид такой, как показано на рис. 18.3.1а: функция  $K_E(\tau)$  убывает на характерных временах  $\sim \tau_c$ . Соответствующая спектральная функция  $S_E(\omega)$  также перестает быть константой (18.3.10) и в соответствии с соотношением неопределенностей убывает на характерных частотах  $\omega \sim \tau_c^{-1}$  (см. рис. 18.3.1б).

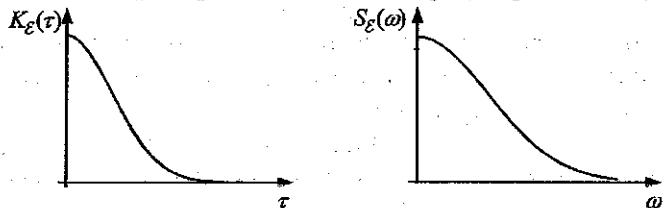


Рис. 18.3.1: а — корреляционная функция для случая конечного (ненулевого) времени корреляции, б — соответствующая спектральная функция

Пример спектральной функции, учитывающей конечность времени корреляции, дается функцией

$$S_E(\omega) = \frac{2kTR}{1 + \omega^2 \tau_c^2}. \quad (18.3.13)$$

При этом согласно (18.3.2) корреляционная функция оказывается следующей:

$$K_E(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_E(\omega) e^{i\omega\tau} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{kTR}{\tau_c} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_c}\right). \quad (18.3.14)$$

Соответственно полная диссилируемая мощность оказывается конечной:

$$P = \frac{1}{R} \overline{\mathcal{E}^2(t)} = \frac{1}{R} K_E(0) = \frac{1}{R} \frac{kTR}{\tau_c} = \frac{kT}{\tau_c}. \quad (18.3.15)$$

В частности, когда в разделе 18.2 мы строили оценку интенсивности теплового пульса, характерное время корреляции определялось временем свободного пробега  $\tau$  носителей.

Связем теперь спектральную функцию  $S_E(\omega)$  с компонентами Фурье  $\mathcal{E}_\omega$  случайной ЭДС. Для этого запишем разложение  $\mathcal{E}(t)$  в интеграл Фурье:

$$\mathcal{E}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_{\omega} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad \mathcal{E}_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (18.3.16)$$

Функция  $\mathcal{E}(t)$  действительная, так что ее фурье-компоненты удовлетворяют условию

$$\mathcal{E}_{-\omega} = \mathcal{E}_{\omega}^*. \quad (18.3.17)$$

Поэтому корреляционную функцию можно выразить через  $\mathcal{E}_{\omega}$  следующим образом. Перейдем в определении  $K_{\mathcal{E}}(\tau)$  в (18.3.1) к разложению  $\mathcal{E}(t)$  и  $\mathcal{E}(t+\tau)$  в интеграл Фурье:

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{E}}(\tau) &= \overline{\mathcal{E}(t)\mathcal{E}(t+\tau)} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{E}_{\omega_1} \mathcal{E}_{\omega_2}} \exp[i\omega_1 t + i\omega_2(t+\tau)] \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi}. \end{aligned} \quad (18.3.18)$$

Далее учтем, что вследствие однородности времени функция  $K_{\mathcal{E}}(\tau)$  не зависит от момента времени  $t$ . Это возможно, если подынтегральное выражение окажется отличным от нуля лишь при  $\omega_2 = -\omega_1$ . Следовательно, необходимо положить

$$\overline{\mathcal{E}_{\omega_1} \mathcal{E}_{\omega_2}} = 2\pi A(\omega_2) \delta(\omega_1 + \omega_2). \quad (18.3.19)$$

Перепишем эту формулу в ином виде, для чего проложим

$$\omega_1 = -\omega, \quad \omega_2 = \omega'.$$

Имея в виду, что

$$\mathcal{E}_{\omega_1} = \mathcal{E}_{-\omega} = \mathcal{E}_{\omega}^*, \quad \mathcal{E}_{\omega_2} = \mathcal{E}_{\omega'},$$

получим вместо (18.3.19) следующую запись:

$$\overline{\mathcal{E}_{\omega}^* \mathcal{E}_{\omega'}} = 2\pi A(\omega) \delta(\omega - \omega'). \quad (18.3.20)$$

Заметим, что часто используют обозначение

$$A(\omega) = (\mathcal{E}^2)_{\omega},$$

Подчеркнем, однако, что эту запись следует рассматривать только как определение величины  $(\mathcal{E}^2)_{\omega}$ , указывающее на ее связь с фурье-компонентами ЭДС, но не как фурье-компоненты функции  $\mathcal{E}^2$ .

С учетом (18.3.19) из (18.3.18) следует

$$K_{\mathcal{E}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{i\omega\tau} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (18.3.21)$$

Сравнение этого соотношения с (18.3.2) показывает, что

$$A(\omega) = S_E(\omega), \quad (18.3.22)$$

т.е. коэффициенты  $A(\omega)$  совпадают со спектральной плотностью функции корреляции, так что с учётом равенства  $S_E(\omega) = 2kT R$  вместо (18.3.20) получаем

$$\overline{E_\omega^* E_{\omega'}^*} = 4\pi k T R \delta(\omega - \omega'). \quad (18.3.23)$$

### 18.3.2. Формулы Найквиста

Помимо выражения для корреляционной функции для ЭДС представляют интерес аналогичные выражения для рассеиваемой мощности и флюктуаций тока в цепи в том случае, когда источник шумов — активное сопротивление — включено в цепь резонансного  $LCR$ -контура.

Прежде всего учтём тот факт, что собственно флюктуационная ЭДС только свойствами активного сопротивления и не зависит от того, в какую именно цепь включено это сопротивление. Поэтому полученное выше выражение для её корреляционной функции (18.3.11), (18.3.12) остаётся неизменным.

Далее учтём, что в  $LCR$ -контуре ток в цепи связан с ЭДС соотношением

$$J_\omega = E_\omega / Z(\omega), \quad (18.3.24)$$

где  $Z(\omega)$  — импеданс цепи, который в случае последовательно соединённых индуктивности, ёмкости и активного сопротивления равен

$$Z(\omega) = R + i\omega L + 1/i\omega C. \quad (18.3.25)$$

Введём корреляционную функцию для тока:

$$K_J(\tau) = \overline{J(t) J(t+\tau)}. \quad (18.3.26)$$

Её разложение в интеграл Фурье даёт спектральную функцию

$$S_J(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_J(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (18.3.27)$$

Имея в виду соотношение (18.3.23), найдем корреляционную функцию для тока. Для этого подставим в (18.3.26) разложение  $J(t)$  в интеграл Фурье:

$$K_J(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi} \exp[i\omega_1 t + i\omega_2 (t+\tau)] J_{\omega_1} J_{\omega_2}.$$

Выразим здесь фурье-компоненты тока  $J_\omega$  через фурье-компоненты ЭДС с помощью формулы (18.3.24):

$$K_J(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi} \exp[i(\omega_1 + \omega_2)t + i\omega_2\tau] \frac{\overline{\mathcal{E}_{\omega_1}^* \mathcal{E}_{\omega_2}}}{Z(\omega_1)Z(\omega_2)} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega'}{2\pi} \exp[i(-\omega + \omega')t + i\omega'\tau] \frac{\overline{\mathcal{E}_{\omega}^* \mathcal{E}_{\omega'}}}{Z^*(\omega)Z(\omega')}.$$

Здесь мы заменили переменные интегрирования  $\omega_1 \rightarrow -\omega$ ,  $\omega_2 \rightarrow \omega'$  и учли равенства  $\mathcal{E}_{-\omega}^* = \mathcal{E}_{\omega}$ ,  $Z(-\omega) = Z^*(\omega)$ . Выполнив интегрирование по переменной  $\omega'$  с учётом равенства (18.3.23), получаем выражение для корреляционной функции тока:

$$K_J(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega\tau} \frac{S_E(\omega)}{|Z(\omega)|^2}. \quad (18.3.28)$$

Соответствующая спектральная функция  $S_J(\omega)$  дается выражением

$$S_J(\omega) = S_E(\omega) / |Z(\omega)|^2. \quad (18.3.29)$$

На основании равенства  $S_E(\omega) = 2kTR$  заключаем

$$S_J(\omega) = 2kTR / |Z(\omega)|^2. \quad (18.3.30)$$

Найдем также корреляционную функцию фурье-компонент тока:

$$\overline{J_{\omega}^* J_{\omega'}} = \frac{\overline{\mathcal{E}_{\omega}^* \mathcal{E}_{\omega'}}}{Z^*(\omega)Z(\omega')} = 2\pi \frac{S_E(\omega)}{|Z(\omega)|^2} \delta(\omega - \omega'). \quad (18.3.31)$$

Поскольку  $S_E(\omega) = 2kTR$ , то получаем

$$\overline{J_{\omega}^* J_{\omega'}} = \frac{4\pi kTR}{|Z(\omega)|^2} \delta(\omega - \omega'). \quad (18.3.32)$$

Соотношения

$$S_E(\omega) = 2kTR, \quad S_J(\omega) = 2kT R / |Z(\omega)|^2 \quad (18.3.33)$$

называются *формулами Найквиста*. Они показывают, что флуктуации определяются в первую очередь наличием активного сопротивления  $R$  в электрической цепи. Поскольку импеданс последовательного *LCR*-контура

$$Z(\omega) = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\omega L \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \quad (18.3.34)$$

на резонансной частоте  $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  принимает значение  $Z(\omega_0) = R$ , то из (18.3.30) следует  $S_J(\omega) = 2kT/R$ .

### 18.3.3. Энергия и мощность

Получим выражение для средней мощности, диссилируемой в  $LCR$ -контуре. Согласно закону Джоуля–Ленца

$$\bar{P} = \overline{\mathcal{E}(t)J(t)}. \quad (18.3.35)$$

Переходя к фурье-компонентам тока и ЭДС и учитывая связь  $J_\omega = \mathcal{E}_\omega/Z(\omega)$ , получим

$$P = \overline{\mathcal{E}(t)J(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{E}_\omega^* \mathcal{E}_{\omega'}^-}{Z(\omega')} e^{i(-\omega+\omega')t} \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2}.$$

Поскольку  $\mathcal{E}_\omega^* \mathcal{E}_{\omega'}^- = 4\pi kTR\delta(\omega - \omega')$ , то после интегрирования по  $\omega'$  последнее равенство принимает вид

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2kTR}{Z(\omega)} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (18.3.36)$$

Это соотношение можно представить в дифференциальной форме:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} P_\omega \frac{d\omega}{2\pi}, \quad dP = P_\omega \frac{d\omega}{2\pi}, \quad P_\omega = 2kT \frac{R}{Z(\omega)}. \quad (18.3.37)$$

Найдем среднюю мощность, выделяемую в цепи последовательного  $LCR$ -контура, импеданс которого дается выражением

$$Z(\omega) = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}. \quad (18.3.38)$$

Подставим это выражение в (18.3.36) и учтем, что интегрирование производится по всем частотам в диапазоне  $(-\infty, +\infty)$ . Имея в виду равенство  $Z(-\omega) = Z^*(\omega)$ , получим

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{kTR}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{Z(\omega)} = \frac{kTR}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{Z(\omega)} + \frac{1}{Z^*(\omega)} \right) d\omega = \\ &= \frac{kTR}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R}{|Z(\omega)|^2} d\omega. \end{aligned}$$

При  $L \neq 0$  получившийся интеграл сходится абсолютно. Вычисляя его, получим

$$\bar{P} = \frac{kTR}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Rd\omega}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} = kT \frac{R}{L}. \quad (18.3.39)$$

Данный результат является вполне естественным. В самом деле, тепловой шум является белым — он равномерно распределен по всему спектру частот. Резонансный же контур выделяет полосу частот шириной порядка  $\Delta\omega = 2\gamma = R/L$ . При  $Z = R$  спектральная мощность собственно теплового шума согласно (18.3.37) равна  $\Delta P = P_\omega \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{kT}{\pi} \Delta\omega$ .

Полагая  $\Delta\omega \sim 2\gamma = R/L$ , получим, что рассеиваемая мощность в контуре составляет  $\Delta P \sim kT R/L$  — в согласии с результатом точного расчета (18.3.39).

Найдём, пользуясь формулами Найквиста, среднюю энергию, запасаемую в индуктивности и конденсаторе.

Рассмотрим сначала  $LR$ -контур (в котором ёмкость отсутствует).

Имея в виду, что магнитная энергия равна  $U_L = \frac{LJ^2}{2}$ , на основании определения (18.3.28) функции  $K_J(\tau)$  можно записать

$$\overline{U_L} = \frac{L}{2} K_J(0) = \frac{L}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_J(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (18.3.40)$$

Подставляя сюда выражение (18.3.30), получим

$$\overline{U_L} = \frac{L}{2} \int_{-\infty}^{\infty} 2kT \frac{R}{|R+i\omega L|^2} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{kTRL}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1}{2} kT.$$

Этот результат был известен заранее — на основании теоремы о равнораспределении энергии по степеням свободы, использованной при установлении вида корреляционной функции  $K_E(\tau)$ .

Точно так же легко найти среднюю энергию  $\overline{U_C}$ , запасаемую в конденсаторе, включенном в  $RC$ -контур. Действительно,  $\overline{U_C} = \overline{q^2/2C}$ . Корреляционную же функцию для заряда  $q$  можно найти, имея в виду очевидное соотношение между фурье-компонентами тока и заряда:

$$q_\omega = J_\omega / i\omega. \quad (18.3.41)$$

Поэтому в соответствии с (18.3.30) оказывается

$$S_q(\omega) = \frac{2kTR}{\omega^2 |Z(\omega)|^2} \quad (18.3.42)$$

Отсюда находим

$$\overline{U_C} = \frac{1}{2C} \int_{-\infty}^{\infty} S_q(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{1}{2C} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2kTR}{\omega^2 \left( R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} \right)} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{1}{2} kT.$$

Заметим, что результаты  $\overline{U_L} = \overline{U_C} = kT/2$  можно получить, рассматривая полный  $LCR$ -контур (а не только частные случаи  $LR$ - или  $RC$ -контура) и используя выражение (18.3.38) для импеданса.

# Приложение 1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

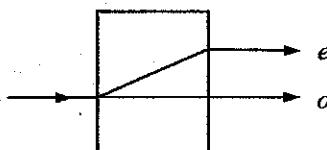
## П.1.1. Двойное лучепреломление

В данном приложении кратко рассмотрим особенности распространения электромагнитных волн в анизотропных средах — кристаллах, обладающих выделенными направлениями.

При падении света на некоторые кристаллы (такие, как слюда, гипс, исландский шпат) луч расщепляется на два луча. Один из них, следующий обычным законам преломления, называется *обыкновенным* (обозначается символом «*o*» = *ordinary*), а второй — *необыкновенным* (обозначается символом «*e*» = *extraordinary*) (рис. П.1.1).

Явление расщепления одного луча на два, различающихся по свойствам, называется *двойным лучепреломлением*.

Рис. П.1.1. Эффект двойного лучепреломления: расщепление луча на обыкновенный (*o*) и необыкновенный (*e*) лучи



В кристаллах существуют оси, вдоль которых обыкновенный и необыкновенный лучи распространяются вместе, не разделяясь и с одинаковой скоростью. В общем случае таких осей две. Соответствующие направления называются *оптическими осями кристалла*.

В некоторых кристаллах оптические оси совпадают, так что фактически кристалл обладает единственной оптической осью. В этом случае кристалл называется *одноосным*.

В кристаллах с несовпадающими оптическими осями обыкновенного луча нет, все лучи являются необыкновенными.

Для обыкновенного луча показатель преломления не зависит от направления распространения, а для необыкновенного — зависит.

Любая плоскость, проходящая через оптическую ось, называется *главной плоскостью* (или *главным сечением*) кристалла. Во многих случаях удобно выбирать главную плоскость так, чтобы она содержала не только оптическую ось, но и волновой вектор  $\mathbf{k}$  (т.е. нормаль к фронту волны).

На рис. П.1.2 показана диаграмма показателей преломления для обыкновенного (*o*) и необыкновенного (*e*) лучей в одноосном кристалле (соответствующие формулы будут получены в следующем разделе). На этой диаграмме направление луча задаётся вектором  $\mathbf{k}$ . Показатель пре-

ломления для обыкновенного луча равен радиусу окружности, а для необыкновенного луча — расстоянию от начала координат до точки пересечения луча с эллипсом. Эта диаграмма называется *оптической индикатрисой*, или *эллипсом индексов кристалла*.

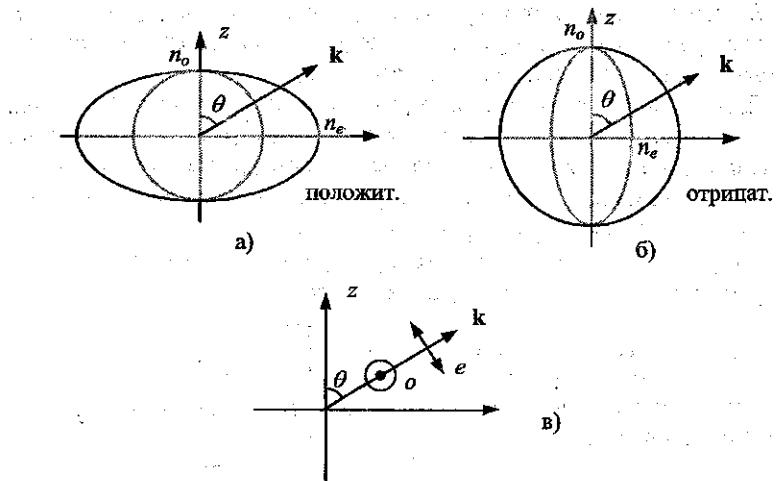


Рис. П.1.2. Диаграмма показателей преломления (оптическая индикатриса) для обыкновенного (*o*) и необыкновенного (*e*) лучей в случае положительного (а) и отрицательного (б) кристаллов; в — поляризация (ориентация вектора напряжённости электрического поля  $\mathbf{E}$  по отношению к оси кристалла  $z$ ) обыкновенного и необыкновенного лучей.

Обыкновенный и необыкновенный лучи отличаются поляризацией: в обыкновенном луче вектор напряжённости  $\mathbf{E}$  перпендикулярен главной плоскости, а в необыкновенном луче — лежит в главной плоскости (хотя и не перпендикулярно волновому вектору). Поэтому при изменении направления луча угол между оптической осью кристалла и вектором  $\mathbf{E}$  в случае *обыкновенного* луча остаётся неизменным, равным  $\pi/2$ , и меняется в случае *необыкновенного* луча (рис. П.1.2в). Соответственно меняются показатель преломления и скорость волны:

$$\text{для обыкновенного луча: } n = n_o = \text{const}, \quad v_o = \frac{c}{n_o},$$

$$\text{для необыкновенного луча: } n = n(\theta), \quad v_e = \frac{c}{n(\theta)}.$$

В частности, при  $\theta = 0$

$$n(0) = n_o, v_e = \frac{c}{n_o} = v_o$$

(т.е. обычновенный и необыкновенный лучи не разделяются и идут вместе с одинаковыми скоростями). Если же  $\theta = \pi/2$ , то

$$n(\pi/2) = n_e, v_e = \frac{c}{n_e} \neq v_o$$

(оба луча идут вместе, но с разными скоростями).

Значение показателя преломления для необыкновенного луча в зависимости от угла  $\theta$  можно найти по формуле

$$\frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} = \frac{1}{n^2(\theta)} \quad \text{или} \quad n(\theta) = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta}}.$$

Соответственно скорость необыкновенного луча в зависимости от направления распространения определяется соотношением

$$v^2(\theta) = \frac{c^2}{n^2(\theta)} = v_e^2 \sin^2 \theta + v_o^2 \cos^2 \theta.$$

Кристалл называется *положительным*, если

$$n_e > n_o, v_e < v_o.$$

В противоположном случае:

$$n_e < n_o, v_e > v_o$$

кристалл называется *отрицательным*.

Эффект двойного лучепреломления обусловлен тем, что скорость волны  $v = c/n$  тем меньше, чем больше показатель преломления. Поэтому, например, в положительном кристалле наибольшая скорость достигается в направлении, близком к направлению оси кристалла, куда и отклоняется необыкновенный луч. Обыкновенный же луч следует обычным законам преломления и при нормальном падении на поверхность кристалла распространяется без отклонения.

С формальной точки зрения пространственное разделение обычновенного и необыкновенного лучей связано с тем, что в случае необыкновенной волны (рис. П.1.3) направления волнового вектора  $\mathbf{k}$  (т.е.

нормали к волновому фронту) и вектора Пойнтинга  $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ , вообще говоря, не совпадают. Для обычновенной же волны эти два вектора параллельны.

### П.1.2. Дизэлектрическая проницаемость

В общем случае анизотропной среды вектор поляризации (дипольный момент единицы объёма) среды  $\mathbf{P}$  не параллелен приложенному полю. Соответственно векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$  не параллельны, так что можно записать:

$$D_x = \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z,$$

$$D_y = \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z,$$

$$D_z = \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z.$$

В более компактной тензорной записи эти равенства имеют вид

$$\mathbf{D} = \hat{\epsilon} \mathbf{E}, \text{ или } D_{ik} = \epsilon_{ik} E_k.$$

В последней формуле индексы  $i, k$  пробегают значения, причём предполагается суммирование по индексу  $k$ .

$$i, k = x, y, z.$$

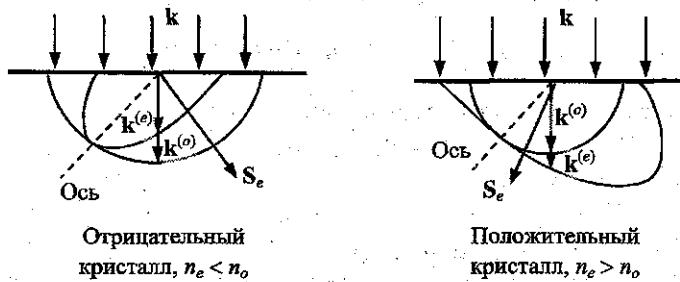


Рис. П.1.3. Отклонение необыкновенного луча при нормальном падении света на пластину, изготовленную из отрицательного (слева) и положительного (справа) кристаллов.

Набор девяти величин  $\epsilon_{ik}$  образует тензор дизэлектрической проницаемости, который является симметричным, т.е.  $\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}$ . Эти величины зависят от выбора системы координат, и существует выделенная система координат, в которой рассматриваемый тензор имеет диагональный вид:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} D_x = \epsilon_{xx} E_x, \\ D_y = \epsilon_{yy} E_y, \\ D_z = \epsilon_{zz} E_z. \end{cases}$$

Соответствующие координатные оси называются *главными*.

Если

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz},$$

то кристалл является одноосным, причём ось  $z$  оказывается осью кристалла. Если же все три величины  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$  различны, то кристалл — двуосный.

В случае изотропной среды (или среды с кубической симметрией) главные значения тензора  $\hat{\varepsilon}$  совпадают:

$$\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{\perp} \equiv \varepsilon, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}.$$

Рассмотрим далее случай одноосных кристаллов. Для таких кристаллов вектор индукции можно разложить на проекции вдоль (индекс « $\parallel$ ») и перпендикулярно (индекс « $\perp$ ») оси кристалла:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel} + \varepsilon_{\perp} \mathbf{E}, \text{ или } D_{\parallel} = \varepsilon_{\parallel} E_{\parallel}, \quad D_{\perp} = \varepsilon_{\perp} E_{\perp}.$$

Для обыкновенного луча вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен оси кристалла,  $\mathbf{E} \perp$  оси, так что

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{\perp}$$

независимо от направления распространения луча. Соответственно показатель преломления и скорость обыкновенного луча оказываются равными

$$n_0 = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}, \quad v_0 = c / \sqrt{\varepsilon_{\perp}}.$$

Если необыкновенный луч распространяется перпендикулярно оси кристалла, то его вектор  $\mathbf{E}$  параллелен оси,  $\mathbf{E} \parallel$  оси, так что

$$\varepsilon_e = \varepsilon_{\parallel}, \quad n_e = \sqrt{\varepsilon_{\parallel}}, \quad v_e = c / \sqrt{\varepsilon_{\parallel}}.$$

### *П.1.3. Уравнение Френеля для одноосных кристаллов*

Получим выражение для показателя преломления луча, распространяющегося под произвольным углом  $\theta$  к оси кристалла. Ограничимся случаем диэлектрического немагнитного кристалла:  $\mu = 1$ . Предполагаем, что свободные заряды и токи проводимости отсутствуют. Исходим из уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Рассмотрим бегущие волны. Тогда зависимость полей от координат и времени имеет вид

$$\sim \exp(ikr - i\omega t).$$

Соответственно уравнения Максвелла принимают вид

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{\omega}{c} \mathbf{H}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\frac{\omega}{c} \mathbf{D}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (\text{П.1.1})$$

Из этих уравнений видно, что векторы  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{k}$  взаимно ортогональны (рис. П.1.4а). Поскольку вектор Пойнтинга равен  $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ , то взаимно ортогональную тройку образуют также векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{S}$  (рис. П.1.4б).

Вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен вектору  $\mathbf{H}$  и, следовательно, лежит в плоскости, образуемой векторами  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{k}$ . Это значит, что в случае, когда  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  не параллельны, направления волнового вектора  $\mathbf{k}$  и вектора Пойнтинга  $\mathbf{S}$  не совпадают. При этом, как легко увидеть из рис. П.1.4в, угол между  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  равен углу между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{S}$ .

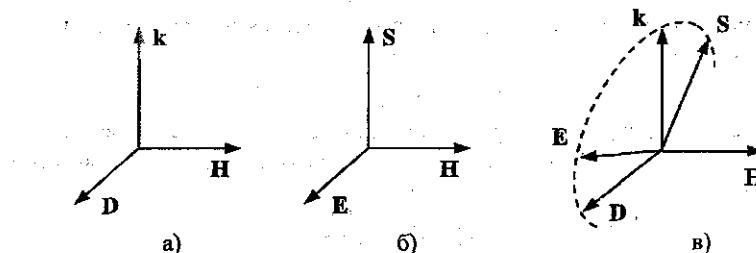


Рис. П.1.4. Взаимное расположение векторов  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{S}$  в одноосном кристалле: векторы  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{S}$  лежат в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{H}$ , причём угол между  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  такой же, как и между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{S}$

Введём вектор  $\mathbf{N}$  следующим образом:

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{N}. \quad (\text{П.1.2})$$

Этот вектор имеет тот смысл, что его длина  $|\mathbf{N}| = n$  равна показателю преломления для волны, распространяющейся в направлении, задаваемом волновым вектором  $\mathbf{k}$ . Если луч образует угол  $\theta$  с осью кристалла, то

$$N_{||} = n \cos \theta, \quad |\mathbf{N}_{\perp}| = n \sin \theta, \quad N^2 = N_{||}^2 + N_{\perp}^2 = n^2.$$

Соответственно первые два уравнения в (П.1.1) принимают вид  
 $\mathbf{N} \times \mathbf{E} = \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{N} \times \mathbf{H} = -\mathbf{D}$ .

Исключая отсюда вектор  $\mathbf{H}$ , получим одно уравнение, связывающее векторы напряжённости и индукции электрического поля:

$$\mathbf{D} = -[\mathbf{N}, [\mathbf{N}, \mathbf{E}]], \text{ или } \mathbf{D} = N^2 \mathbf{E} - \mathbf{N}(\mathbf{N}\mathbf{E}). \quad (\Pi.1.3)$$

Вводя тензор диэлектрической проницаемости  $\hat{\varepsilon} = (\varepsilon_{ik})$  соотношением

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k,$$

перепишем соотношение (П.1.3):

$$\varepsilon_{ik} E_k = N^2 \delta_{ik} E_k - N_i N_k E_k, \text{ или } (N^2 \delta_{ik} - N_i N_k - \varepsilon_{ik}) E_k = 0$$

(по индексу  $k$  проводится суммирование). Условие совместности этой системы уравнений состоит в равенстве нулю её определителя:

$$\det(N^2 \delta_{ik} - N_i N_k - \varepsilon_{ik}) = 0. \quad (\Pi.1.4)$$

Выберем систему координат так, чтобы ось  $z$  совпала с осью кристалла, а две другие оси ( $x, y$ ) были ей перпендикулярны. Тогда уравнение (П.1.4) принимает вид

$$\begin{vmatrix} N^2 - N_x^2 - \varepsilon_{\perp} & -N_x N_y & -N_x N_z \\ -N_y N_x & N^2 - N_y^2 - \varepsilon_{\perp} & -N_y N_z \\ -N_z N_x & N_z N_y & N^2 - N_z^2 - \varepsilon_{\parallel} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель в левой части равенства, можно привести это уравнение к следующему виду:

$$(N^2 - \varepsilon_{\perp}) [\varepsilon_{\parallel} N_z^2 + \varepsilon_{\perp} (N_x^2 + N_y^2) - \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}] = 0,$$

называемому *уравнением Френеля для одноосных кристаллов*. Видно, что оно распадается на два независимых уравнения:

$$N^2 = \varepsilon_{\perp}, \quad \frac{N_z^2}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{N_x^2 + N_y^2}{\varepsilon_{\parallel}} = 1. \quad (\Pi.1.5)$$

Поскольку

$$N_z = N_{\parallel} = n \cos \theta,$$

$$N_x^2 + N_y^2 = N_{\perp}^2 = n^2 \sin^2 \theta,$$

то уравнения (П.1.5) принимают вид

$$\begin{aligned} n^2 &= \varepsilon_{\perp}, \\ \frac{\cos^2 \theta}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{\sin^2 \theta}{\varepsilon_{\parallel}} &= \frac{1}{n^2}. \end{aligned} \quad (\Pi.1.6)$$

Здесь первая формула определяет показатель преломления для обычного луча, а вторая — для необыкновенного. Обозначая

$n_o = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$ ,  $n_e = \sqrt{\varepsilon_{\parallel}}$ , перепишем последнее равенство в (П.1.6):

$$\frac{1}{n^2(\theta)} = \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2}. \quad (\text{П.1.7})$$

Отсюда видно, что показатель преломления для необыкновенного луча заключен между значениями  $n_o$  и  $n_e$ .

Найдём угол  $\phi$ , образуемый вектором Пойнтинга и волновым вектором *необыкновенной* волны. Как было сказано выше, этот угол равен углу между векторами  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ .

Поскольку (рис. П.1.4а)  $\mathbf{D} \perp \mathbf{N}$ , то

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{N} = D_{\perp} N_{\perp} + D_{\parallel} N_{\parallel} = 0.$$

Имея в виду, что  $N_{\parallel} = N \cos \theta$ ,  $N_{\perp} = N \sin \theta$ , находим угол  $\theta_D$ , образуемый вектором  $\mathbf{D}$  с осью кристалла:

$$\operatorname{tg} \theta_D = \frac{D_{\perp}}{D_{\parallel}} = -\frac{N_{\parallel}}{N_{\perp}} = -\operatorname{ctg} \theta.$$

Искомый угол  $\phi$  определяется из равенств:

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \frac{\mathbf{ED}}{\sqrt{\mathbf{E}^2} \sqrt{\mathbf{D}^2}} = \frac{E_{\parallel} D_{\parallel} + E_{\perp} D_{\perp}}{\sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\perp}^2} \sqrt{D_{\parallel}^2 + D_{\perp}^2}} = \\ &= \frac{D_{\parallel}^2 / \varepsilon_{\parallel} + D_{\perp}^2 / \varepsilon_{\perp}}{\sqrt{(D_{\parallel} / \varepsilon_{\parallel})^2 + (D_{\perp} / \varepsilon_{\perp})^2} \sqrt{D_{\parallel}^2 + D_{\perp}^2}}. \end{aligned}$$

Поскольку  $D_{\parallel}/D_{\perp} = -\operatorname{ctg} \theta$ , то последнее равенство можно переписать в виде

$$\cos \phi = \frac{\varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}^2 \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel}^2 \cos^2 \theta}}.$$

Найдём также синус угла  $\phi$ :

$$\sin \phi = \sqrt{1 - \cos^2 \phi} = \frac{(\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}^2 \cos^2 \theta + \varepsilon_{\perp}^2 \sin^2 \theta}}.$$

Наконец, для тангенса угла  $\phi$  отсюда следует:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{(\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin 2\theta}{\varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_{\perp} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \cos 2\theta}. \quad (\text{П.1.8})$$

Легко видеть, что в частных случаях, когда луч распространяется

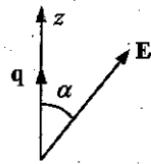
вдоль ( $\theta = 0$ ) и перпендикулярно ( $\theta = \pi/2$ ) оси кристалла, из последней формулы вытекает  $\phi = 0$ , т.е. луч не отклоняется от исходного направления: направления волнового вектора и вектора Пойнтинга совпадают.

Таким образом, мы нашли угол, на который отклоняется необыкновенный луч при нормальном падении света на поверхность кристалла в том случае, когда ось кристалла составляет угол  $\theta$  с нормалью к поверхности (рис. П.1.3).

#### П.1.4. Элементарная теория анизотропных диэлектриков

Рассмотрим простейшую модель, иллюстрирующую возникновение анизотропии диэлектрической проницаемости. Предположим, что среда состоит из длинных молекул, ориентированных вдоль определённого направления, называемого *директором* и являющимся осью кристалла. Электроны в молекулах могут совершать колебания только вдоль этого направления (рис. П.1.5).

Рис. П.1.5. Электрическое поле  $E$  волны направлено под углом  $\alpha$  к директору — оси кристалла  $z$



Считая, что выделенное направление есть ось  $z$ , запишем уравнение движения электрона:

$$m\ddot{z} = -\kappa z - \beta \dot{z} + eE_z.$$

Вводя стандартные обозначения:

$$\omega^2 = \kappa/m, \quad 2\gamma = \beta/m,$$

перепишем это уравнение в виде

$$\ddot{z} + 2\gamma \dot{z} + \omega^2 z = eE_z/m. \quad (\text{П.1.9})$$

Если единичный вектор вдоль оси кристалла обозначить как  $q$ , то

$$E_z = qE = E_0 \cos \alpha \cdot e^{-i\omega t} \quad (\text{П.1.10})$$

— составляющая электрического поля волны вдоль оси кристалла (директора). Решение уравнения (П.1.9) имеет вид

$$z = g(\omega) \frac{e}{m} q E, \quad g(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}. \quad (\text{П.1.11})$$

Отсюда находим вектор поляризации среды:

$$\mathbf{P} = (0, 0, P_z), \quad P_z = Nez = \frac{Ne^2}{m} g(\omega) E_z,$$

Здесь  $N$  — число электронов в единице объёма среды. В векторном виде полученное соотношение записывается в виде

$$\mathbf{P} = \mathbf{q} P_z = \frac{Ne^2}{m} g(\omega) (\mathbf{E} \mathbf{q}) \mathbf{q},$$

Поскольку  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$ , то

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \frac{4\pi Ne^2}{m} g(\omega) (\mathbf{E} \mathbf{q}) \mathbf{q},$$

или

$$D_i = E_i + \omega_p^2 g(\omega) q_i q_k E_k. \quad (\text{П.1.12})$$

В последнем равенстве предполагается суммирование по индексу  $k$ . Введено также обозначение для плазменной частоты:  $\omega_p^2 = 4\pi N e^2 / m$ .

Проекции единичного вектора  $\mathbf{q}$  таковы:  $q_x = q_y = 0$ ,  $q_z = 1$ . Полагая  $D_i = \varepsilon_{ik} E_k$ , получаем выражение для тензора диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_{ik} = \delta_{ik} + \omega_p^2 g(\omega) q_i q_k. \quad (\text{П.1.13})$$

В главных осях (считая, как и раньше, ось  $z$  осью кристалла) имеем

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{zz} = 1 + \omega_p^2 g(\omega). \quad (\text{П.1.14})$$

Таким образом, получаем среду, у которой

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 1, \quad \varepsilon_{zz} = 1 + \omega_p^2 g(\omega).$$

Соответственно для обыкновенного луча:  $\varepsilon_o = 1$ , а для необыкновенного луча:  $\varepsilon_e = 1 + \omega_p^2 g(\omega)$ .

Заметим, что изложенная модель описывает не только анизотропию среды, но и дисперсию.

## Приложение 2. ОСНОВНЫЕ ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ. О СИСТЕМЕ СИ

В книге всюду (за исключением раздела, посвящённого колебаниям в электрических цепях) использовалась гауссова система единиц. Переход от систем единиц СГСЭ, СГСМ и гауссовой к СИ связан с введением вспомогательных числовых констант:

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \approx 0,8854 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м},$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Г/м} \approx 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Г/м}.$$

Эти константы связаны между собой соотношением

$$\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2.$$

Здесь  $c = 2,99793 \cdot 10^8 \text{ м/с}$  — скорость света в СИ.

Система единиц СГСЭ строится на основе системы СГС, к которой добавляется единица заряда, исходя из закона Кулона:

$$F = \frac{Qq}{r^2} \Rightarrow 1 \text{ дин} = \frac{(1 \text{ ед. СГСЭ})^2}{(1 \text{ см})^2}$$

В этой системе заряд электрона равен по величине

$$e \approx 4,803 \cdot 10^{-10} \text{ ед. заряда СГСЭ}.$$

Если за основу взять систему СГС и закон магнитного взаимодействия токов, то приходим к системе единиц СГСМ. Оказывается,

$$1 \text{ ед. заряда СГСМ} = c \text{ ед. заряда СГСЭ} \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ ед. заряда СГСЭ}.$$

Здесь  $c \approx 2,998 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$  — скорость света в системе СГС.

Единица заряда *кулон* связана с единицей заряда в СГСМ соотношением

$$1 \text{ Кл} = 1/10 \text{ ед. заряда СГСМ} \approx 2,998 \cdot 10^9 \text{ ед. заряда СГСЭ}.$$

Два заряда по 1 Кл каждый на расстоянии 1 м действуют друг на друга с силой  $F \approx 9 \cdot 10^{11} \text{ Н}$ .

В системе СИ кулон определяется соотношением

$$1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot \text{с.}$$

Ток 1 *ампер* (А) по определению равен силе не изменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади поперечного сечения, на-

ходящихся в вакууме на расстоянии 1 м друг от друга, вызвал бы на участке длиной 1 м силу взаимодействия, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  Н. При этом  $1 \text{ A} = 1/10$  ед. тока СГСМ.

Поясним происхождение числа  $2 \cdot 10^{-7}$  Н. В системе СИ сила, действующая на участок провода длины  $l$ , по которому течёт ток  $J_1$ , со стороны параллельного ему бесконечного провода, по которому течёт ток  $J_2$ , по закону Ампера равна

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{J_1 J_2}{R} l.$$

Выражение для силы в гауссовой системе формально получается отсюда умножением на  $4\pi/(c^2 \mu_0)$ :

$$F = \frac{2J_1 J_2}{c^2 R} l.$$

Переход здесь к системе СГСМ состоит в замене  $J/c = J^{(m)}$ :

$$F = \frac{2J_1^{(m)} J_2^{(m)}}{R} l.$$

Имея в виду связь ампера и единицы тока в СГСМ и полагая здесь  $J_1^{(m)} = J_2^{(m)} = 1/10$  ед. СГСМ,  $R = 100$  см,  $l = 100$  см, получаем значение силы  $F = 2 \cdot 10^{-2}$  дин =  $2 \cdot 10^{-7}$  Н, о котором говорится в определении ампера.

В системе СИ закон Кулона записывается в виде

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2}.$$

Потенциал точечного заряда в системе СИ равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

Единица потенциала в системе СИ — вольт (В), причём

$$1 \text{ В} = 10^8 / \text{с ед. СГСЭ} \approx 1/300 \text{ ед. СГСЭ},$$

$$1 \text{ В} = 10^8 \text{ ед. СГСМ}.$$

Теорема Гаусса для электрического поля в системе СИ:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0, \quad \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = q/\epsilon_0.$$

Формула для ёмкости уединённого проводящего шара радиуса  $R$  в системе СИ:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \epsilon a.$$

Ёмкость плоского конденсатора с площадью пластин  $S$  и расстоянием между ними  $d$  в системе СИ:

$$E = \epsilon_0 \epsilon S/d.$$

Единицей ёмкости в системе СГСЭ является *сантиметр*, а в системе СИ — *фарад* ( $\Phi$ ), причём

$$1 \text{ см} = \frac{1 \text{ ед. заряда СГСЭ}}{1 \text{ ед. потенциала СГСЭ}},$$

$$1 \Phi = \frac{1 \text{ кулон}}{1 \text{ вольт}} = \frac{c^2}{10^9} \text{ см} \approx 8,99 \cdot 10^{11} \text{ см}.$$

Кроме того, имеет место соотношение

$$1 \Phi = 10^{-9} \text{ ед. СГСМ}.$$

Заметим, что фарад входит в определение величины  $\epsilon_0$ .

В системе СГСЭ единицей проводимости является *секунда<sup>-1</sup>*, а удельного сопротивления — *секунда*. В системе СИ единицей сопротивления является *ом*, причём

$$1 \text{ ом} = \frac{1 \text{ вольт}}{1 \text{ ампер}} = \frac{10^9}{c^2} \text{ ед. СГСЭ} \approx \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \text{ ед. СГСЭ}.$$

В системе СИ вектор электрической индукции определяется формулой

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

В случае линейной связи поляризации и напряжённости электрического поля имеем

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \alpha \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}, \quad \epsilon = 1 + \alpha.$$

Теорема Гаусса для поля в диэлектрике записывается в виде

$$\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = q, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

( $q$  и  $\rho$  — соответственно свободный заряд в объёме  $V$  и объёмная плотность свободных зарядов).

Плотность энергии электрического поля равна

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D}, \quad u = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon E^2 = \frac{D^2}{2\epsilon_0 \epsilon}$$

(последние две формулы справедливы в случае  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}$ ).

В системе СИ силы Лоренца и Ампера даются формулами

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad d\mathbf{F} = j\mathbf{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B}.$$

Система СГСМ строится исходя из формулы для силы Лоренца следующим образом. В системе СГСЭ сила Лоренца, действующая на заряд  $q$ , равна

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

В частности, когда  $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ , имеем

$$F = \frac{q}{c} v B.$$

Обозначая тот же заряд в системе СГСМ как  $q^{(m)} = q/c$ , получаем

$$F = q^{(m)} v B,$$

Соответственно получаем указанную выше связь единиц заряда в системах СГСЭ ( $q$ ) и СГСМ ( $q^{(m)}$ ):

$$1 \text{ ед. заряда СГСМ} = c \cdot 1 \text{ ед. заряда СГСЭ}$$

(скорость света  $c$  здесь берётся в системе СГС:  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/с).

Единицей индукции магнитного поля в системе СГСМ является *гаусс* (Гс), который определяется следующим образом:

магнитное поле с индукцией 1 гаусс действует на заряд  $q^{(m)} = 1$  ед. СГСМ, движущийся со скоростью  $v = 1$  см/с перпендикулярно силовым линиям магнитного поля, с силой  $F = 1$  дин.

Система единиц, в которой единицы заряда берутся из системы СГСЭ, а единицы магнитного поля — из системы СГСМ, называется *гауссовой системой*.

В системе СИ единицей индукции магнитного поля является *тесла* (Тл). 1 Тл равен индукции однородного магнитного поля, в котором на плоский контур с током, имеющий магнитный момент  $1 \text{ A} \cdot \text{м}^2$ , действует максимальный вращающий момент, равный 1 Н·м. Численно

$$1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ Гс.}$$

Магнитный момент витка с током в системе СИ даётся выражением

$$\mathbf{m} = J\mathbf{S}.$$

Момент силы, действующий на магнитный момент со стороны магнитного поля, записывается в виде

$$\mathbf{M} = \mu \times \mathbf{B}.$$

Закон Био-Савара в системе СИ имеет вид

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} dV, \quad d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J dI \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Здесь  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Г/м  $\approx 1,256 \cdot 10^{-6}$  Г/м.

Электрическое поле равномерно движущегося точечного заряда в системе СИ записывается следующим образом:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{v} \times \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E},$$

где учтено соотношение  $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ .

Нерелятивистские формулы преобразования полей при переходе от одной системы отсчёта к другой в СИ имеют вид

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{v} \times \mathbf{E} = \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}.$$

Теорема Гаусса и теорема о циркуляции для магнитного поля в вакууме в СИ имеют вид

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0;$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 J.$$

Напряжённость магнитного поля в системе СИ определяется формулами

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{I} \text{ или } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{I}).$$

Если связь напряжённости поля и намагниченности линейная, то

$$\mathbf{I} = \kappa \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad \mu = 1 + \kappa.$$

Единицей напряжённости магнитного поля в системах СГСМ и гауссовой является *эрстед* (Э), определяемый следующим образом:

1 Э равен напряжённости магнитного поля, индукция которого в вакууме равна 1 Гс.

В СИ единицей напряжённости является *ампер на метр* (А/м). Её связь с эрстедом следующая:

$$1 \text{ A/m} = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ Э} \approx 1,257 \cdot 10^{-2} \text{ Э}.$$

Магнитодвижущая сила в системе СИ даётся формулой

$$F = \oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{l} = NJ.$$

Теорема о циркуляции для магнитного поля в среде в СИ записывается следующим образом:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = J$$

( $J$  и  $\mathbf{j}$  — соответственно ток и плотность тока проводимости).

Единица магнитодвижущей силы (МДС) в системе СИ — *ампервиток* (или просто ампер, А), а в гауссовой системе — *гильберт* (Гб). Соотношение между этими единицами:

$$1 \text{ Гб} = 10/4\pi \text{ А.}$$

В СИ закон Ома для магнитной цепи (раздел 4.3.2) записывается в виде

$$\Phi \left( \frac{l}{\mu \mu_0 S} + \frac{a}{\mu_0 S} \right) = F, \quad F = NJ.$$

В системе СИ индуктивность вводится соотношением  $\Phi = LJ$ , а выражение ЭДС индукции имеет вид  $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$ .

В системе СГСМ единицей магнитного потока является *максвель* (Мкс<sup>1</sup>), а индуктивности — *сантиметр* (см).

Единицами магнитного потока и индуктивности в СИ являются *вебер* (Вб) и *генри* (Г), причём

$$1 \text{ Вб} = 10^8 \text{ Мкс}, \quad 1 \text{ Г} = 10^9 \text{ см.}$$

По определению

$$1 \text{ Мкс} = 1 \text{ см} \cdot 1 \text{ ед. тока СГСМ}, \quad 1 \text{ Вб} = 1 \text{ Г} \cdot 1 \text{ А.}$$

Соотношение  $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$  означает, что изменение магнитного потока со скоростью 1 Вб/с приводит к появлению ЭДС индукции в 1 В.

Формула для индуктивности соленоида в СИ имеет вид

$$L = \frac{\mu_0 \mu N^2}{l} S.$$

В СИ плотность тока смещения даётся формулой

$$\mathbf{j}_{cm} = \mathbf{D}.$$

Приведём уравнения Максвелла (в дифференциальной форме) в СИ:

<sup>1</sup> Обозначение Мкс для максвеля начинается со строчной буквы, чтобы отличать от обозначения мкс для микросекунды.

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

Заметим, что хотя в СИ эти уравнения имеют простейший вид — не содержат никаких нетривиальных коэффициентов, однако связь между векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ , а также  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  оказывается заметно сложнее.

Вектор Пойнтинга  $\mathbf{S}$  и плотность импульса  $\mathbf{g}$  электромагнитного поля в СИ записываются следующим образом:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{g} = \frac{1}{c} \mathbf{S} = \frac{1}{c} \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

## Приложение 3. НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

В векторном анализе рассматриваются различные операции с функциями, зависящими от пространственных координат  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Кроме того, эти функции могут зависеть от некоторых параметров (например, времени). Если функция скалярная, то говорят, что задано *скалярное поле*:  $f = f(\mathbf{r})$ . Если же функция векторная, то говорят, что задано *векторное поле*:  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$ .

Используя прямоугольные координаты, будем обозначать единичные векторы (орты) вдоль координатных осей  $x, y, z$  соответственно как  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ .

### П.3.1. Дифференциальные операции первого порядка

Векторный оператор «набла» вводится формальным равенством

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

*Градиент скалярной функции*  $\varphi(x, y, z)$  — это вектор, задаваемый в прямоугольных координатах формулой

$$\mathbf{A} = \text{grad } \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

То же равенство при использовании оператора набла записывается в виде

$$\mathbf{A} = \nabla \varphi.$$

*Дивергенция* — это дифференциальная операция, применяемая к векторным функциям (полям) и даваемая в прямоугольных координатах формулой

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Дивергенция может быть также определена следующим образом. Выберем в пространстве некоторый объём  $V$ , ограниченный поверхностью  $S(V)$ . Разобьём поверхность на элементарные площадки  $dS$ , направленные наружу от поверхности  $S$ . Элементарный поток вектора через площадку  $dS$  равен  $d\Phi = \mathbf{A} dS$ . Поток векторного поля  $\mathbf{A}$  через всю поверхность  $S$  получается суммированием элементарных потоков  $d\Phi$  и равен

$$\Phi = \oint_{S(V)} \mathbf{A} d\mathbf{S}.$$

В прямоугольных координатах поток даётся интегралом

$$\Phi = \oint_{S(V)} \mathbf{A} d\mathbf{S} = \oint_{S(V)} (A_x dy dz + A_y dx dz + A_z dx dy).$$

Дивергенцией векторного поля  $\mathbf{A}$  называется предел

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \left( \frac{1}{V} \oint_{S(V)} \mathbf{A} d\mathbf{S} \right),$$

когда объём стягивается в точку (инвариантное определение дивергенции, не связанное с конкретной системой координат).

Дивергенция может быть записана с использованием оператора на-бла как скалярное произведение наблы и вектора, в котором порядок сомножителей строго фиксирован:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}.$$

*Теорема Остроградского–Гаусса* связывает объёмный интеграл с поверхностным:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \oint_{S(V)} \mathbf{A} d\mathbf{S}.$$

*Ротор (вихрь)* векторного поля  $\mathbf{A}$  — это вектор, записываемый в прямоугольных координатах как

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Ротор может быть определён следующим образом. Выберем в пространстве некоторую малую поверхность  $S$ , границей которой является контур  $\Gamma$  (рис. П1.1). Её вектор площади равен  $\mathbf{S} = S\mathbf{n}$ , где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к рассматриваемой площадке. *Циркуляция векторного поля  $\mathbf{A}$  по контуру  $\Gamma$*  есть контурный интеграл

$$\oint_{\Gamma(S)} \mathbf{A} dr.$$

В прямоугольных координатах циркуляцию можно записать в виде

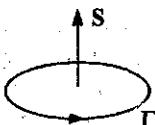
$$\oint_{\Gamma(S)} \mathbf{A} d\mathbf{r} = \oint_{\Gamma(S)} (A_x dx + A_y dy + A_z dz).$$

Проекция ротора на направление нормали  $\mathbf{n}$  есть предел отношения циркуляции к площади контура:

$$(\text{rot } \mathbf{A})_n = \lim_{S \rightarrow 0} \left( \frac{1}{S} \oint_{\Gamma} \mathbf{A} d\mathbf{r} \right),$$

когда контур  $\Gamma$  стягивается в точку (инвариантное определение ротора, не связанное с конкретной системой координат).

Рис. П1.1: Малая площадка  $S$ , опирающаяся на контур  $\Gamma$ . Указаны положительное направление обхода и соответствующий ему вектор площади



Ротор может быть записан с помощью оператора набла как векторное произведение

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

*Теорема Стокса* связывает поверхностный и контурный интегралы:

$$\int_S \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S} = \oint_{\Gamma(S)} \mathbf{A} d\mathbf{r}.$$

### П.3.2. Дифференциальные операции второго порядка

*Оператор Лапласа* — это дифференциальный оператор второго порядка:

$$\Delta = (\nabla \cdot \nabla) = \nabla^2.$$

В прямоугольных координатах имеем

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Имеет место тождество

$$\Delta \varphi = \text{div grad } \varphi.$$

Можно доказать следующие тождества:

$$\text{div rot } \mathbf{A} = 0,$$

$$\text{rot grad } \varphi = 0.$$

Для произвольного векторного поля имеет место тождество

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}.$$

*Потенциальным векторным полем*  $\mathbf{F}$  называется такое поле, которое может быть *всюду* представлено как градиент некоторого скалярного поля:

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} \varphi.$$

Признаком потенциальности поля  $\mathbf{F}$  является равенство

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0.$$

*Сolenoidальное (или вихревое) векторное поле*  $\mathbf{A}$  — это поле, которое может быть *всюду* представлено как ротор некоторого векторного поля:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Признаком соленоидальности поля  $\mathbf{B}$  является равенство

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

### *П.3.3. Некоторые тождества*

Приведём некоторые часто встречающиеся тождества.

Если поле  $\mathbf{F}$  потенциальное,  $\mathbf{F} = \operatorname{grad} \psi$ , а  $\mathbf{p}$  — постоянный вектор,

то

$$\operatorname{grad}(\mathbf{p}\mathbf{F}) = (\mathbf{p}\nabla)\mathbf{F}.$$

Для двух произвольных векторных полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  выполняется тождество

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} + \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E}.$$

В следующих примерах  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, а векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{p}$  считаются постоянными. Тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

Радиус-вектор является потенциальным вектором:

$$\operatorname{rot} \mathbf{r} = 0.$$

Следовательно, он может быть представлен как градиент скалярной функции. Легко проверить, что

$$\mathbf{r} = \operatorname{grad} \left( \frac{1}{2} r^2 \right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Имеют место следующие тождества:

$$\operatorname{grad} \mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

$$(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{r} = \mathbf{a},$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a},$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{a}\varphi(r)) = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{a}}{r} \varphi'(r).$$

Здесь штрих означает дифференцирование по аргументу  $r$ .

Следующие два тождества показывают, что в некоторых областях пространства вихревое и соленоидальное поля могут иметь одинаковое представление:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{3(\pi \mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{m}r^2}{r^5},$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \left( \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{3(p\mathbf{r})\mathbf{r} - p\mathbf{r}^2}{r^5}$$

(векторы  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{p}$  считаются постоянными). Эквивалентность двух представлений правой части — как в виде вихревого, так и в виде потенциального векторного поля — имеет место всюду, за исключением начало координат, где находится источник поля, определяющий его фактический тип.

## Приложение 4. ФИЗИЧЕСКИЕ КОНСТАНТЫ

Скорость света:

$$c = 2,998 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$$

Электронвольт

$$1 \text{ эВ} = 1,602 \cdot 10^{-12} \text{ эрг} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

Масса электрона

$$m_e = 9,1085 \cdot 10^{-28} \text{ г}$$

Энергия покоя электрона

$$m_e c^2 = 0,511 \text{ МэВ}$$

Масса протона

$$m_p = 1,6726 \cdot 10^{-24} \text{ г}$$

Энергия покоя протона

$$m_p c^2 = 938,3 \text{ МэВ}$$

Заряд электрона (численно)

$$|e| = 4,803 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГСЭ} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

Магнетон Бора

$$\mu_B = \frac{|e|\hbar}{2mc} = 9,27 \cdot 10^{-21} \text{ эрг/Гс}$$

Постоянная Планка

$$\hbar = 1,0546 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}$$

Число Авогадро

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ молекул}$$

Число Лошмидта

$$n_L = 2,687 \cdot 10^{19} \text{ молекул/см}^3$$

Универсальная газовая постоянная

$$R = 8,3145 \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$$

Постоянная Больцмана

$$k = 1,3807 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1} = 1,3807 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/К}$$