

# Курс общей физики. Механика

---

Кудлис Андрей

Конспект подготовлен студентами, не проходил проф. редактуру и может содержать ошибки.

Выражаем особую благодарность за подготовку конспекта и его рецензирование студентам Физического факультета ИТМО Бердичевскому Артему, Горбуновой Софии, Ермакову Сергею, Иванову Данилу, Муртазину Антону, Осипцову Матвею.

Благодарим за подготовку Юпитер-версии студентов Физического факультета ИТМО Муравьева Ярослава, Железнову Александру.

Версия: 1.050  
21.01.2023

BE in LOV   
with physics

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Математическое введение</b>	<b>7</b>
1.1	Анализ размерностей	7
1.2	Производная	8
1.3	Интеграл	9
1.4	Векторы	12
1.5	Система координат и система отсчёта	12
1.5.1	Декартова система координат	13
1.5.2	Цилиндрическая система координат	13
1.5.3	Сферическая система координат	15
<b>2</b>	<b>Кинематика материальной точки</b>	<b>17</b>
2.1	Основные определения	17
2.2	Скорость	18
2.3	Ускорение	18
2.4	Естественная параметризация	18
2.5	Некоторые частные случаи	20
2.5.1	Постоянное ускорение. Одномерное движение	20
2.5.2	Движение тел, брошенных под углом к горизонту	20
2.5.3	Пропорциональность скорости ускорению	21
2.5.4	Равномерное движение по окружности	22
2.6	Циклоида	22
2.7	Радиус кривизны	23
<b>3</b>	<b>Динамика материальной точки</b>	<b>26</b>
3.1	Лирика. Фундаментальные взаимодействия	26
3.1.1	Гравитационное взаимодействие	27
3.1.2	Электромагнитное взаимодействие	27
3.1.3	Сильное взаимодействие	28
3.1.4	Слабое взаимодействие	28
3.2	Основные понятия динамики	29
3.2.1	Инерция	29
3.2.2	Первый закон Ньютона (принцип инерции)	30
3.2.3	Второй закон Ньютона	30
3.2.4	Третий закон Ньютона	32
3.2.5	Закон сохранения импульса	33
3.2.6	Преобразования Галилея и принцип относительности Галилея и принцип относительности Эйнштейна	34
3.2.7	Понятие центра масс (центра инерции)	37
3.2.8	Движение пары материальных точек	38

<b>4</b>	<b>Динамика материальной точки. Интегрирование уравнений движения</b>	<b>39</b>
4.1	Вывод формулы Эйлера. Трение в блоках	39
4.2	Вязкое трение	40
4.3	Зависимость силы от координаты	43
4.4	Реактивное движение	45
<b>5</b>	<b>Механическая работа. Энергия</b>	<b>47</b>
5.1	Полная работа	48
5.2	Кинетическая энергия	50
5.3	Теорема Кёнига	52
5.4	Потенциальная энергия	52
5.5	Примеры	54
5.5.1	Работа силы тяжести	54
5.5.2	Работа центральной силы	54
5.6	Полная механическая энергия	55
<b>6</b>	<b>Потенциальная энергия. Приложение</b>	<b>57</b>
6.1	Интегрирование уравнение движения в случае потенциальных сил	58
6.2	Столкновение частиц	61
<b>7</b>	<b>Момент количества движения</b>	<b>67</b>
7.1	Момент силы	68
7.2	Момент импульса	69
7.3	Движение в центральном поле (Кулоновский и гравитационный потенциал)	71
7.3.1	Рассеяние в кулоновском поле	72
<b>8</b>	<b>Формула Резерфорда. Гравитационное взаимодействие</b>	<b>78</b>
<b>9</b>	<b>Гравитационное взаимодействие. Продолжение</b>	<b>80</b>
9.1	Законы Кеплера	82
<b>10</b>	<b>Законы Кеплера (часть 2)</b>	<b>84</b>
<b>11</b>	<b>Космические скорости</b>	<b>89</b>
11.1	Первая космическая скорость	89
11.2	Вторая космическая скорость	90
11.3	Третья космическая скорость	90
<b>12</b>	<b>Закон всемирного тяготения в случае земной тяжести</b>	<b>92</b>
12.1	Комментарий к третьему закону Кеплера	92
12.2	Теорема Гаусса	94
12.3	Поле однородного шара	94
12.4	Точки Лагранжа	95
12.5	Гравитационная задача N тел	97
<b>13</b>	<b>Неинерциальные системы отсчёта</b>	<b>99</b>
13.1	Поступательная сила инерции(сила Д'Аламбера)	100
13.1.1	Ускоряющийся автобус	100
13.1.2	Механические часы на математическом маятнике	101
13.1.3	Колебание веса из-за вращения планеты	103
13.1.4	Пуля и карусель	104

<b>14 Маятник Фуко. Сухое и вязкое трение. Пружинка</b>	<b>107</b>
14.1 Маятник Фуко . . . . .	107
14.2 Сила трения . . . . .	108
14.2.1 Сухое трение . . . . .	108
<b>15 Приливы и отливы. Принцип эквивалентности</b>	<b>110</b>
15.1 Приливы . . . . .	110
15.2 Оценка эффекта . . . . .	112
15.2.1 Гидростатика . . . . .	112
15.3 Гравитационная масса . . . . .	113
15.4 Принцип эквивалентности . . . . .	114
<b>16 Экспериментальная база специальной теории относительности.</b>	<b>116</b>
16.1 Эксперимент Майкельсона и Морли. . . . .	120
16.2 Изменение интервалов времени и длин . . . . .	121
16.3 Синхронизация часов . . . . .	123
<b>17 Преобразования Лоренца.</b>	<b>124</b>
17.1 Собственное время . . . . .	127
17.1.1 Регистрация мюонов на поверхности Земли . . . . .	128
17.2 Сокращение длины . . . . .	128
<b>18 СТО. Часть 2</b>	<b>130</b>
18.1 Фотография объемных (движущихся) тел . . . . .	130
18.2 Парадокс шеста и сарая . . . . .	132
18.3 Преобразование скорости . . . . .	134
<b>19 Кинематика СТО. Часть 3</b>	<b>135</b>
19.1 Аберрация света . . . . .	135
19.2 Эффект Доплера . . . . .	136
19.2.1 Классический . . . . .	136
19.2.2 СТО . . . . .	137
19.3 Пространство Минковского. . . . .	137
19.3.1 Одновременность и неподвижность . . . . .	139
19.3.2 Замедление времени . . . . .	140
19.3.3 Изменение длины . . . . .	141
19.3.4 Парадокс близнецов . . . . .	142
<b>20 Кинематика СТО. Часть 4</b>	<b>143</b>
20.1 Вектор 4-скорости . . . . .	143
20.2 Дефект массы . . . . .	146
20.3 Уравнение движения релятивистской частицы . . . . .	147
<b>21 Кинематика абсолютно твёрдого тела</b>	<b>148</b>
21.1 Релятивистское движение под действием постоянной силы . . . . .	148
21.2 Реактивное движение . . . . .	150
21.2.1 Формула Циолковского в СТО . . . . .	150
21.3 Столкновение релятивистских частиц. . . . .	152
21.4 Слияние и распад частиц . . . . .	153
21.5 Кинематика абсолютно твёрдого тела . . . . .	153
21.5.1 Инвариантность угловой скорости . . . . .	154

21.5.2	Плоское движение абсолютно твёрдого тела . . . . .	155
<b>22</b>	<b>Момент импульса и момент инерции абсолютно твёрдого тела</b>	<b>157</b>
22.1	Момент импульса . . . . .	157
22.2	Примеры вычислений . . . . .	160
22.2.1	Тонкий стержень. . . . .	160
22.2.2	Пластина со сторонами $a$ , $b$ . . . . .	160
22.2.3	Цилиндр. . . . .	161
22.2.4	Шар (относительно оси). . . . .	161
22.2.5	Сфера. . . . .	161
<b>23</b>	<b>Динамика абсолютно твёрдого тела</b>	<b>164</b>
23.1	Закон изменения количества движения. Тензор инерции . . . . .	164
23.1.1	Замечание про тензор инерции. . . . .	165
23.2	Кинетическая энергия вращательного движения . . . . .	166
23.3	Скатывание тел с наклонной плоскости без проскальзывания . . . . .	168
23.3.1	Решение 1, через неподвижную точку . . . . .	168
23.3.2	Решение 2, через центр масс . . . . .	168
23.3.3	Решение 3, через закон сохранения энергии . . . . .	169
23.4	Уравнения Эйлера . . . . .	169
23.5	Свободное вращение . . . . .	170
23.5.1	Шар . . . . .	170
23.5.2	Симметричный волчок . . . . .	171
<b>24</b>	<b>Гармонические колебания. Фазовое пространство</b>	<b>173</b>
24.1	Вынужденная прецессия . . . . .	174
24.2	Колебания материальной точки . . . . .	175
24.2.1	Математический маятник . . . . .	176
24.2.2	Пружинка . . . . .	176
24.3	Фазовое пространство, фазовая траектория . . . . .	178
<b>25</b>	<b>Затухающие колебания. Вынужденные колебания</b>	<b>179</b>
25.1	Метод комплексных амплитуд . . . . .	179
25.2	Затухающие колебания. . . . .	180
25.3	Характеристики затухающих колебаний ( $\omega_0 > \gamma$ ). . . . .	181
25.4	Вынужденные колебания . . . . .	181
25.4.1	Постоянная вынуждающая сила . . . . .	182
25.4.2	Гармоническая вынуждающая сила . . . . .	182
<b>26</b>	<b>Колебания. Продолжение</b>	<b>184</b>
26.1	Установление колебаний . . . . .	185
26.2	Мощность затухания . . . . .	186
26.3	Мощность внешней силы . . . . .	187
<b>27</b>	<b>Свободные колебания двух связанных осцилляторов</b>	<b>188</b>
27.1	Параметрическое возбуждение колебаний . . . . .	191
<b>28</b>	<b>Адиабатические инварианты. Колебания АТТ. Упругость</b>	<b>194</b>
28.1	Адиабатические инварианты. . . . .	194
28.2	Колебания твёрдого тела. . . . .	195
28.2.1	Бифилярный подвес. . . . .	195

28.2.2 Теорема Гюйгенса . . . . .	196
<b>29 Деформации. Волны</b>	<b>198</b>
29.1 Элементы теории упругости . . . . .	198
29.1.1 Основные определения . . . . .	198
29.1.2 Закон Гука . . . . .	199
29.1.3 Энергия и плотность энергии упругой деформации. . . . .	199
29.1.4 Коэффициент Пуассона . . . . .	199
29.1.5 Деформация параллелепипеда (всестороннее сжатие и растяжение) . . . . .	200
29.1.6 Сдвиг. . . . .	201
29.1.7 Кручение. . . . .	202
29.2 Элементы теории волн . . . . .	202
29.2.1 Волновое уравнение . . . . .	202
29.2.2 Плоская волна . . . . .	203
29.2.3 Поверхности постоянной фазы . . . . .	204
29.2.4 Пригоршня других решений волнового уравнения . . . . .	204
29.2.5 Принцип суперпозиции . . . . .	205
29.2.6 Стоячие волны . . . . .	205
<b>30 Послесловие</b>	<b>207</b>

# Лекция 1.

## Математическое введение

### 1.1 Анализ размерностей

Рассмотрим случай равноускоренного движения. Пусть начальная скорость равна нулю. Какова зависимость скорости от координаты?

Из точного решения мы узнаем:

$$v = \sqrt{2ax}, \quad \text{где } a - \text{ускорение, } x - \text{координата.} \quad (1.1)$$

Получим данное соотношение из размерного анализа: Самая простая зависимость:

$$v^l = a^k \cdot x^m \Rightarrow v = a^{\frac{k}{l}} \cdot x^{\frac{m}{l}} = a^{k'} \cdot x^{m'} \xRightarrow{\text{новые } k, m} v = a^k \cdot x^m. \quad (1.2)$$

$$[V] = \frac{L}{T}, \quad [a] = \frac{L}{T^2}, \quad [x] = L, \quad (1.3)$$

$$\Rightarrow L \cdot T^{-1} = L^k \cdot T^{-2k} \cdot L^m \Rightarrow \begin{cases} 1 = k + m, \\ -1 = -2k. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2}, \\ m = \frac{1}{2}. \end{cases} \Rightarrow v \approx \sqrt{ax}, \quad (1.4)$$

что достаточно близко к точному ответу  $\sqrt{2ax}$ . Повторим эти же рассуждения для вывода скорости звука. От чего может зависеть скорость?

$$c = f(\rho, P, T) = g(\rho, P) \quad (1.5)$$

Самая простая форма:

$$c = P^l \cdot \rho^k, \quad [\rho] = \frac{M}{L^3}; \quad [P] = \frac{M}{L \cdot T^2}; \quad (1.6)$$

$$\Rightarrow L \cdot T^{-1} = M^l \cdot L^{-l} \cdot T^{-2l} \cdot M^k \cdot L^{-3k} \quad (1.7)$$

$$\text{т.к. } [c] = \frac{M}{C}(\text{СИ}) \quad \text{либо; } [c] = \frac{L}{T}; \quad (1.8)$$

$$\Rightarrow M^l \cdot M^k = 1 \Rightarrow l = -k \quad (1.9)$$

$$\Rightarrow L \cdot T^{-1} = L^k \cdot T^{2k} \cdot L^{-3k} = L^{-2k} \cdot T^{2k} \Rightarrow 1 = -2k \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow l = \frac{1}{2} \quad (1.10)$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{\frac{P}{\rho}}, \text{ точное же решение } c = \sqrt{\gamma \cdot \frac{P}{\rho}}. \text{ Для воздуха: } \sqrt{\gamma} \approx 1.18. \quad (1.11)$$

## 1.2 Производная

**Виды обозначений:**

$$\dot{x}(t), x'(t), x'_t, \dot{x}, \frac{dx}{dt}, \text{ и т.д.} \quad (1.12)$$

**Определение.** Функция  $f(x)$  имеет производную в точке  $x_0$ , если существует следующий предел:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1.13)$$

**Пример:**

$$f(x) = x^2, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = 2x_0 \quad (1.14)$$

**Определение.** Дифференциал функции  $f$  в точке  $x_0$  может быть определен как линейная по аргументу часть приращения функции:

$$df = f'(x_0) \cdot dx \quad (1.15)$$

**Пример:**

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = 2x\Delta x + \Delta x^2, \quad (1.16)$$

$$df(x) = 2x dx, \text{ в физике часто заменяют } \Delta x \rightarrow dx. \quad (1.17)$$

Необходимо помнить, что само приращение ( $d$ ) является математической абстракцией (моделью бесконечно малой величины). Пользуйтесь дифференциалами, т.к. с ними можно работать как с дробями.

**Рассмотрим несколько свойств:**

1) Производная обратной функции:

$$\text{Если } f(x) = x^2, \quad x = \sqrt{f}, \quad f > 0, \quad (1.18)$$

$$\frac{dx}{df} = \frac{1}{\frac{df}{dx}} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{f}} = x'(f). \quad (1.19)$$

2) Производная сложной функции:

$$f'_x(y(x)) = f'_y(y) \Big|_{y=y(x)} \cdot y'_x(x) \quad (1.20)$$



Как это доказать? При помощи дифференциалов это очень просто:

$$\frac{df}{dx}(y(x)) = \frac{df}{dy} \Big|_{y=y(x)} \cdot \frac{dy}{dx}(x) \quad (1.21)$$

**Пример:**

$$f(x) = \sin^3 x^2, \quad (1.22)$$

$$f'(x) = 6 \cdot \sin^2 x^2 \cdot \sin x^2 \cdot 2x. \quad (1.23)$$

**Как получить?**

$$W(z(y(x))) = \sin^3 x^2, \quad (1.24)$$

$$W(z) = z^3; \quad z(y) = \sin y; \quad y(x) = x^2, \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{df}{dx} &= \frac{dW}{dx} = \frac{dW}{dz} \Big|_{z=z(y(x))} \frac{dz}{dy} \Big|_{y=y(x)} \frac{dy}{dx} = 3z^2 \Big|_{z=z(y(x))} \cdot \sin y \Big|_{y=y(x)} \cdot 2x = \\ &= 3 \sin^2 y \Big|_{y=y(x)} \cdot \sin x^2 \cdot 2x = 6 \sin^2 x^2 \cdot \sin x^2 \cdot x. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Что ещё?

**Полезное свойство:**

$$d(f \cdot g) = f dg + g df. \quad (1.27)$$

## 1.3 Интеграл

**Определение.** Неопределённым интегралом функции  $f(x)$  (первообразная) называется другая функция  $F(x) : F'(x) = f(x)$ . Обозначается как:

$$F(x) = \int f(x) dx + const. \quad (1.28)$$

**Определение.** Определённым интегралом от функции  $f(x)$  на промежутке  $[a, b] \exists \Leftrightarrow \exists \lim$  следующей суммы:  $\lim_{\mu(\Delta x_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(g_i) \Delta x$ . Обозначается как:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\mu(\Delta x_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(g_i) \Delta x_i. \quad (1.29)$$

**Геометрический смысл:** площадь  $S$  фигуры под графиком функции. Если такой предел существует и конечен, то говорят, что функция интегрируема по Риману.

Для расчетов удобно использовать **формулу Ньютона-Лейбница** :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{F(x_i + \Delta x) - F(x_i)}{\Delta x} \cdot \Delta x =$$

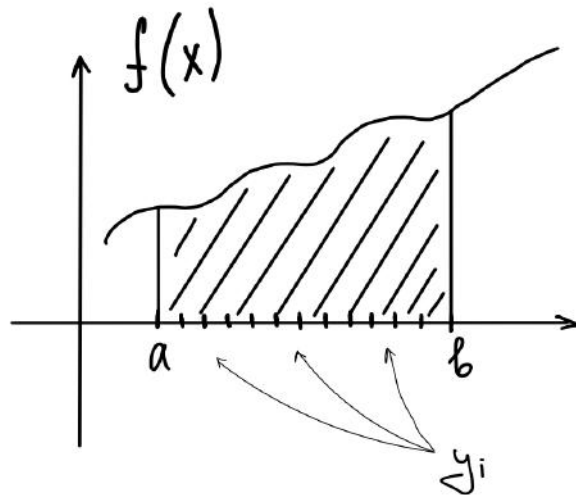


Рис. 1.1: Иллюстрация площади под графиком функции.

Пояснение: сделали всё равномерным.

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \quad (1.30)$$

$$(\text{т.е. } f(x_i) = \frac{F(x_i + \Delta x) - F(x_i)}{\Delta x}, \text{ при } \Delta x \rightarrow 0) \quad (1.31)$$

Конец пояснения.

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(F(a + \Delta x) - F(a)) + (F(a + 2\Delta x) - F(a + \Delta x)) + \dots + F(b) - F(b - \Delta x)] = \\ &= F(b) - F(a). \blacksquare \end{aligned} \quad (1.32)$$

Необходимо выучить таблицу основных первообразных.

$y = f(x)$	$y = F(x)$
0	1
0	$C$
1	$x$
$x$	$\frac{x^2}{2}$
$x^n (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$	$\ln  x $
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$e^x$	$e^x$
$a^x$	$\frac{a^x}{\ln a}$

Приближённые выражения (на основе формулы Тейлора):

$$\sin x \approx x, \quad x \rightarrow 0 \quad (1.33)$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}, \quad x \rightarrow 0 \quad (1.34)$$

$$(1+x)^p = 1 + px, \quad x \rightarrow 0 \quad (1.35)$$

$$e^x = 1 + x, \quad x \rightarrow 0 \quad (1.36)$$

Общая формула (формула Маклорена):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad (1.37)$$

## 1.4 Векторы

Рассмотрим самые базовые операции над векторами:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \\ \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} &= \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y = |a||b| \cdot \cos \alpha, \quad \alpha - \text{угол между векторами.} \quad (1.38)$$

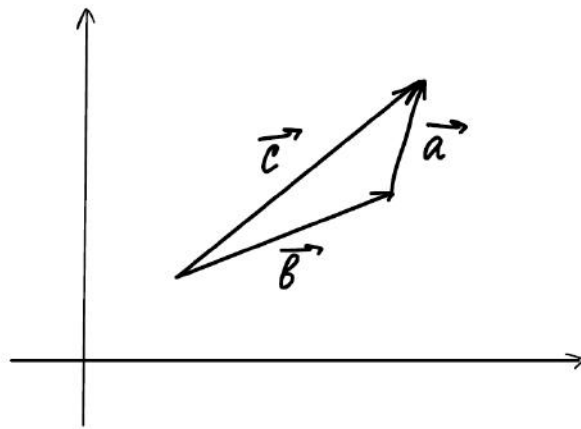


Рис. 1.2: Правило треугольника.

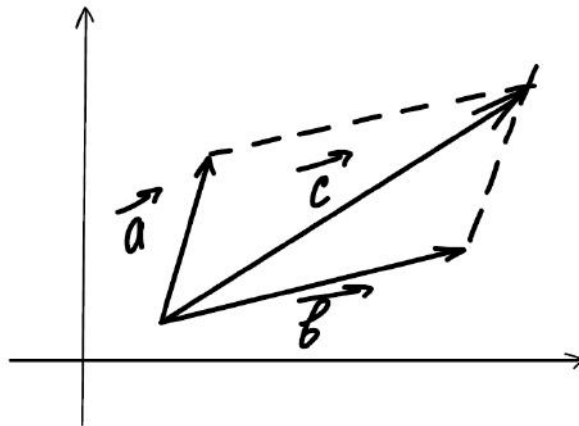


Рис. 1.3: Правило параллелограмма.

## 1.5 Система координат и система отсчёта

**Определение.** Система отсчёта – совокупность системы координат, начала отсчёта, привязанного к некоторому физическому объекту, и отсчитывающих время часов.

**Определение.** Система координат – способ определения положения и перемещения точки (тела) при помощи чисел (символов).

На курсе мы будем использовать три системы координат: *декартову*, *цилиндрическую* (полярную), *сферическую*.

### 1.5.1 Декартова система координат

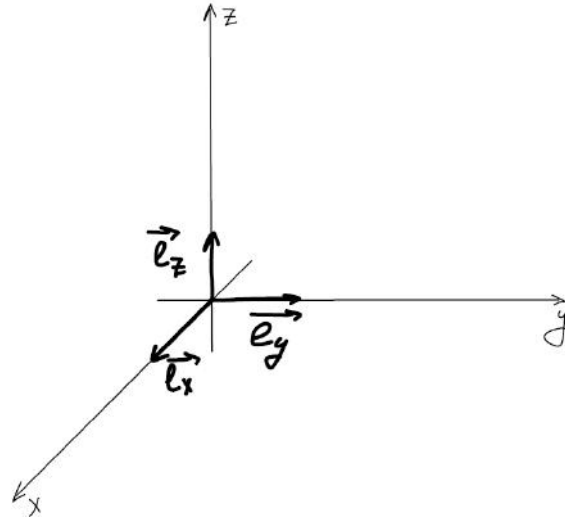


Рис. 1.4: Декартова система координат.

Прямоугольная система координат (рассмотрим случай 3-х измерений). Три координаты:  $x, y, z$  или  $x_1, x_2, x_3$  и три базисных вектора:

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

∀-ая точка в пространстве определяется:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z. \quad (1.40)$$

Длина вектора:  $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(\vec{r}, \vec{r})}$ .

Пусть есть вектор  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \Rightarrow \frac{d\vec{b}}{du} = \vec{e}_x \cdot \frac{db_x}{du} + \vec{e}_y \cdot \frac{db_y}{du} + \vec{e}_z \cdot \frac{db_z}{du}$ .

### 1.5.2 Цилиндрическая система координат

Главная разница: орты (не все) не имеют постоянного положения ( $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$ ).

Все орты:  $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ .

Положение точки определяется тремя числами  $(\rho, \varphi, z)$ .

Радиус-вектор:  $\vec{r} = \rho \cdot \vec{e}_\rho + z \cdot \vec{e}_z$ .

Связь с декартовыми координатами:

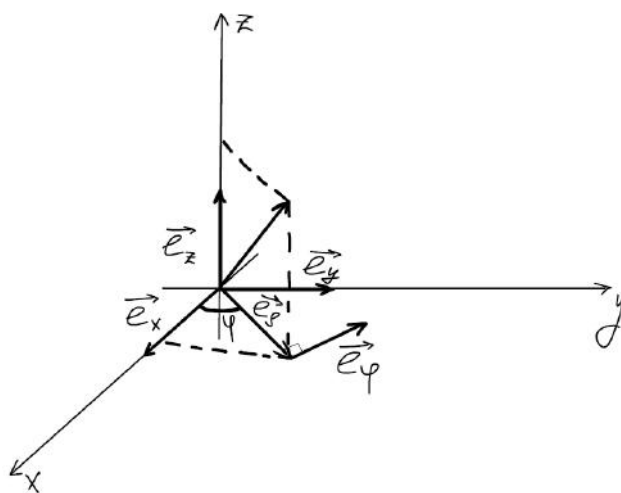


Рис. 1.5: Цилиндрическая система координат.

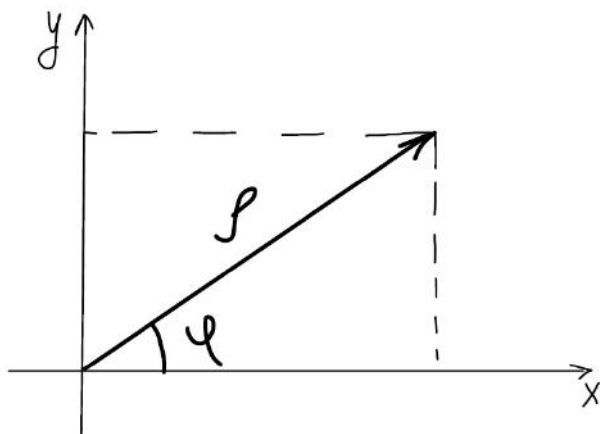


Рис. 1.6: Полярная система координат.

$$\begin{array}{l|l} x = \rho \cdot \cos \varphi & \text{В декартовой} \\ y = \rho \cdot \sin \varphi & \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ z = z & \vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

Обратно:  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ ;  $z = z$ .

Связь между ортами:

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \vec{e}_x \cdot \cos \varphi + \vec{e}_y \cdot \sin \varphi \\ \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_x \cdot \sin \varphi + \vec{e}_y \cdot \cos \varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_x = \vec{e}_\rho \cdot \cos \varphi - \vec{e}_\varphi \cdot \sin \varphi \\ \vec{e}_y = \vec{e}_\rho \cdot \sin \varphi + \vec{e}_\varphi \cdot \cos \varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

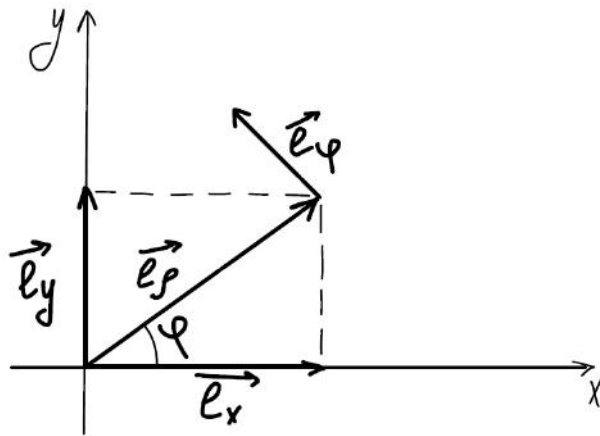


Рис. 1.7: Связь между ортами в цилиндрической системе координат.

### 1.5.3 Сферическая система координат

Положение точки определяется координатами  $(r, \theta, \varphi)$ .

$$\vec{r} = \vec{e}_r \cdot r, \quad \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi. \quad (1.41)$$

$$\text{Связь координат: } \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (1.42)$$

$$\text{В другую сторону: } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arcsin \left[ \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right] \\ \varphi = \operatorname{arctg} \left[ \frac{y}{x} \right] \end{cases} \quad (1.43)$$

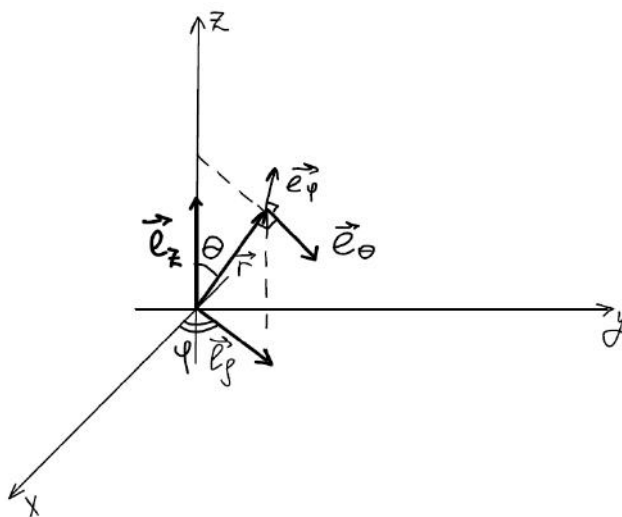


Рис. 1.8: Сферическая система координат.

Связь между ортами: 
$$\begin{cases} \vec{e}_r = (\vec{e}_x \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \varphi) \sin \theta + \vec{e}_z \cos \theta \\ \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi \\ \vec{e}_\theta = (\vec{e}_x \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \varphi) \cos \theta - \vec{e}_z \sin \theta \end{cases} \quad (1.44)$$

**Упражнения:** выразить  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$ ,  $\vec{e}_z$  через  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$ ,  $\vec{e}_\varphi$ .



## Лекция 2.

# Кинематика материальной точки

### 2.1 Основные определения

**Определение.** Материальная точка - модель обладающего массой тела, размерами и формой которого можно пренебречь в условиях данной задачи. В кинематике изучаются законы движения, без анализа причин возникновения самого движения. Для задания положения материальной точки нам нужна система отсчета и минимальный набор координат (они называются обобщенными координатами). Положение можно определять по-разному. Это может быть как радиус-вектор, так и значение пути, пройденного по фиксированной траектории.

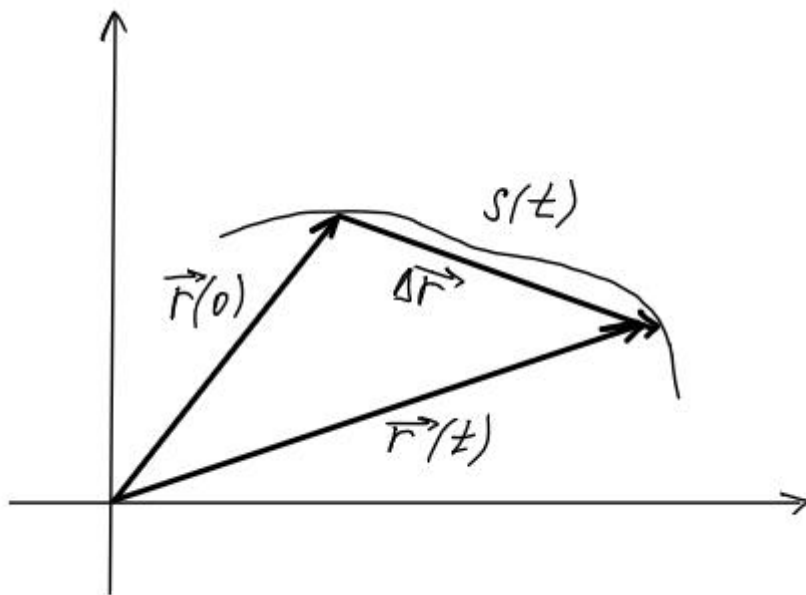


Рис. 2.1: Путь и перемещение.

Пусть положение задаётся радиус-вектором:  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ .

Вектор  $\Delta \vec{r}$  называется вектором перемещения.

Понятно, что  $|\Delta \vec{r}| \leq S$ .

## 2.2 Скорость

**Определение.** Скорость – производная по времени от радиус вектора.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{e}_x \cdot \frac{dx}{dt} + \vec{e}_y \cdot \frac{dy}{dt} + \vec{e}_z \cdot \frac{dz}{dt} = \vec{e}_x \cdot v_x + \vec{e}_y \cdot v_y + \vec{e}_z \cdot v_z. \quad (2.1)$$

Средняя скорость:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}. \quad (2.2)$$

Если же абсолютная величина:

$$\langle v \rangle = \frac{S_{all}}{t_2 - t_1}. \quad (2.3)$$

## 2.3 Ускорение

**Определение.** Ускорение - производная по времени от скорости, записывается следующим образом:

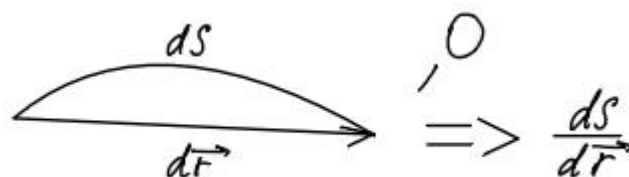
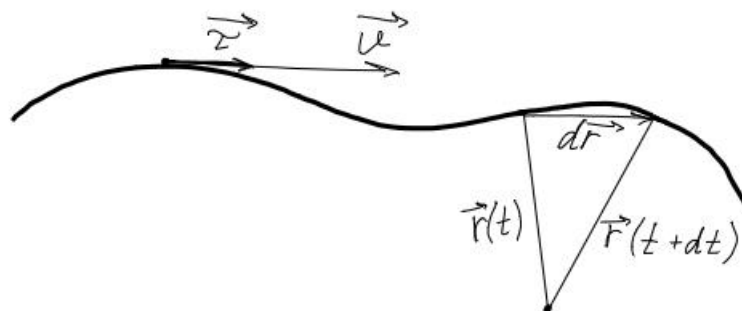
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{e}_x \cdot \frac{dv_x}{dt} + \vec{e}_y \cdot \frac{dv_y}{dt} + \vec{e}_z \cdot \frac{dv_z}{dt} = \vec{e}_x \cdot a_x + \vec{e}_y \cdot a_y + \vec{e}_z \cdot a_z. \quad (2.4)$$

Замечание.

Скорость всегда направлена по касательной к траектории, так как  $\vec{v} \sim d\vec{r}$ .

## 2.4 Естественная параметризация

Пусть  $\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}$ , где  $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dS}$ , где  $|d\vec{r}| = dS$ , а  $S$  – пройденный путь.

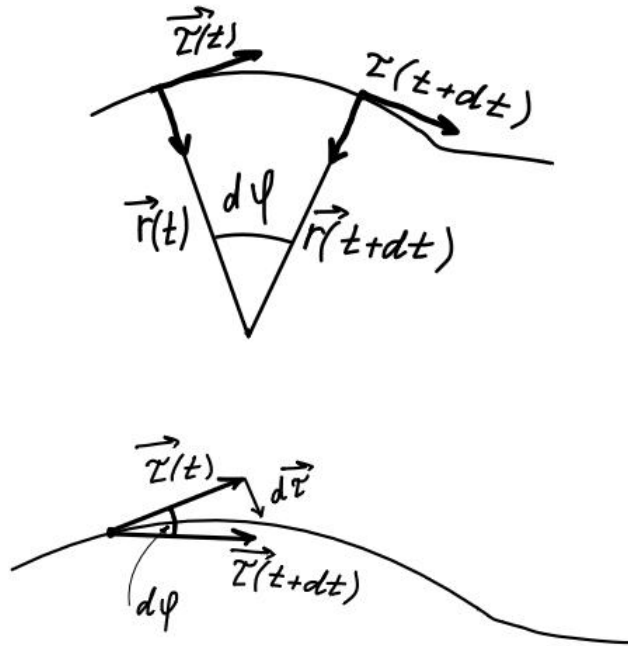


Получим ускорение в общем случае криволинейного движения:

$$\vec{W} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \vec{\tau} \cdot \frac{dv}{dt} + v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = a_{\tau} \vec{\tau} + v \cdot \vec{n} \cdot \frac{dS}{Rdt} = a_{\tau} \vec{\tau} + \vec{n} \cdot \frac{v^2}{R}. \quad (2.5)$$

Где  $\vec{n}$  - вектор нормали.  $a_{\tau}$  отвечает за изменение абсолютного значения скорости.

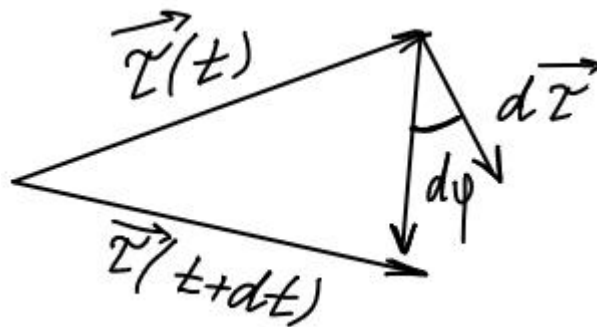
$$d\vec{\tau} = \vec{n} \cdot |\vec{\tau}| \cdot d\varphi = \vec{n} \cdot \frac{dS}{R}. \quad (2.6)$$



Любую гладкую траекторию можно представить как последовательность бесконечно малых участков окружностей:

$$d\varphi = \frac{dS}{R} \Rightarrow R = \frac{dS}{d\varphi}. \quad (2.7)$$

где  $R$  - радиус кривизны - радиус бесконечно малой дуги окружности, по которой движется тело в данный момент времени.



$$|d\vec{\tau}| \cdot |d\varphi| \sim d\varphi^2 \quad (2.8)$$

$a_n = \frac{v^2}{R}$  - нормальное ускорение.

## 2.5 Некоторые частные случаи

### 2.5.1 Постоянное ускорение. Одномерное движение

$$a = \text{const} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = a = \text{const}$$

$$\begin{aligned} dv = a dt &\Rightarrow \int_{v_0}^{v(t)} d\tilde{v} = a \int_{t_0}^t d\tilde{t} \Rightarrow v(t) - v_0 = a(t - t_0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow v(t) = v_0 + a(t - t_0) = \frac{dx}{dt}, \\ dx &= v_0 dt + a(t - t_0) dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} d\tilde{x} = v_0 \int_0^t d\hat{t} + a \int_0^t (t - t_0) d\hat{t} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x(t) - x_0 = v_0(t - t_0) + \frac{a(t - t_0)^2}{2}, \\ x(t) &= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a(t - t_0)^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Либо:

$$dv = a dt \Rightarrow \int dv = a \int dt + \text{const}_1 \Rightarrow v = a \cdot t + C_1, \quad C_1 \equiv \text{const}_1 \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= at + C_1 \Rightarrow \int dx = a \int t dt + C_1 \int dt + \text{const}_2, \quad \text{const}_2 = C_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = \frac{at^2}{2} + C_1 t + C_2, \\ x(t) &= \left( x_0 - v_0 t_0 + \frac{at_0^2}{2} \right) + (v_0 - at_0)t + \frac{at^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

### 2.5.2 Движение тел, брошенных под углом к горизонту

$\vec{a} = \vec{g} = (0; -g)$ , пусть  $t_0 = 0$

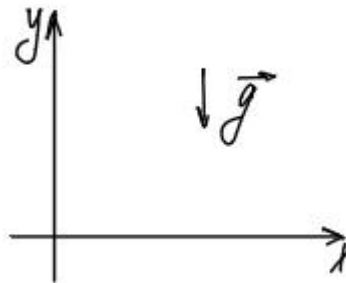


Рис. 2.2: Направление  $\vec{g}$ .

$$\Rightarrow a_x = 0 \Rightarrow v_x = \text{const} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_x \Rightarrow x = x_0 + v_x t. \quad (2.12)$$

$$\Rightarrow a_y = -g \Rightarrow \frac{dv_y}{dt} = -g \Rightarrow v_y = v_{y0} - gt \Rightarrow y = y_0 + v_{y0}t - \frac{gt^2}{2}. \quad (2.13)$$

$$L = x - x_0 = v_x t; \quad H = y - y_0 = v_{y0}t - \frac{gt^2}{2}; \quad v_{y0} = v \sin \varphi; \quad v_{x0} = v \cos \varphi.$$

$$\Rightarrow L = v \cos \varphi t; \quad H = v \sin \varphi t - \frac{gt^2}{2}. \quad (2.14)$$

$$H'_0 = 0 = v \sin \varphi - gt_{\uparrow} \Rightarrow t_{\uparrow} = \frac{v \sin \varphi}{g} \Rightarrow H_{\max} = \frac{v^2 \sin^2 \varphi}{2g}. \quad (2.15)$$

Отсюда можно сделать ряд выводов:

$$\begin{aligned} \Rightarrow t_{\text{полёта}} &= \frac{2v \sin \varphi}{g}. \\ \Rightarrow L_{\text{полёта}} &= \frac{2v^2 \sin \varphi \cos \varphi}{g} = \frac{v^2 \sin 2\varphi}{g}. \\ \Rightarrow \max_{\varphi}(H_{\max}) &= \frac{v^2}{2g}, \text{ где } \varphi = \frac{\pi}{2}. \\ \Rightarrow \max_{\varphi}(L_{\max}) &= \frac{v^2}{g}, \text{ где } \varphi = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

### 2.5.3 Пропорциональность скорости ускорению

Пусть начальная скорость  $v_0 \neq 0$  (начальный момент времени  $t = 0$ ) и  $v = \alpha a$ . Вспомнив, что ускорение это производная скорости по времени, запишем дифференциальное уравнение и решим его.

$$\alpha \frac{dv}{dt} = v \quad (2.16)$$

$$\alpha \int_{v_0}^{v(t)} \frac{d\tilde{v}}{\tilde{v}} = \int_0^t d\tilde{t} \quad (2.17)$$

$$\alpha \ln \frac{v(t)}{v_0} = t. \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 e^{\frac{t}{\alpha}} \\ x(t) &= \alpha v_0 e^{\frac{t}{\alpha}} \\ a(t) &= \frac{v_0}{\alpha} e^{\frac{t}{\alpha}} \end{aligned}$$

$$x = \int_0^t v_0 e^{t/\alpha} dt = \alpha v_0 e^{t/\alpha} \Big|_0^t = \alpha v_0 (e^{t/\alpha} - 1). \quad (2.19)$$

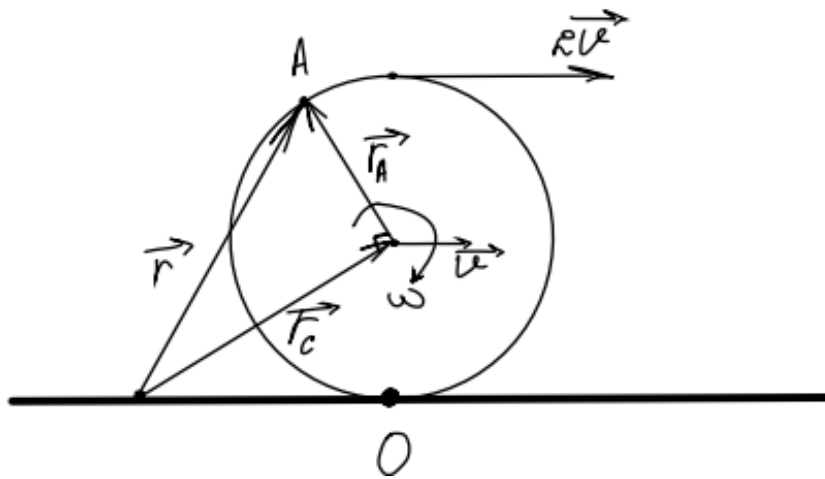
### 2.5.4 Равномерное движение по окружности

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \text{const} \Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \omega t.$$

$$dS = R d\varphi \quad \Bigg| \quad 1/dt \Rightarrow \frac{dS}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega = v.$$

## 2.6 Циклоида

При помощи циклоиды можно понять, какую траекторию описывает точка на ободу колеса относительно поверхности.



Рассматривая равномерное качение, скорость центра колеса

$$v_c = \omega R.$$

Введём радиус-вектор произвольной точки на ободе колеса:  $\vec{r}$

$$\vec{r} = \vec{r}_c + \vec{r}_A.$$

Для радиус-векторов различных точек и соответствующих скоростей мы можем записать ряд следующих соотношений:

$$\vec{r}_c = \begin{pmatrix} x_0 + v_c t \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega R t \\ R \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_c = \begin{pmatrix} \omega R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} R \sin(\omega t) \\ R \cos(\omega t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_A = \begin{pmatrix} R\omega \cos(\omega t) \\ -R\omega \sin(\omega t) \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} R(\omega t + \sin(\omega t)) \\ R(1 + \cos(\omega t)) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} \omega R(1 + \cos(\omega t)) \\ -\omega R \sin(\omega t) \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Помимо этого, мы можем выразить касательный вектор  $\vec{\tau}$ , описывающий направление скорости точки на ободе относительно центра колеса, соответствующую ему нормаль, а также ускорение материальной точки  $\vec{a}$ :

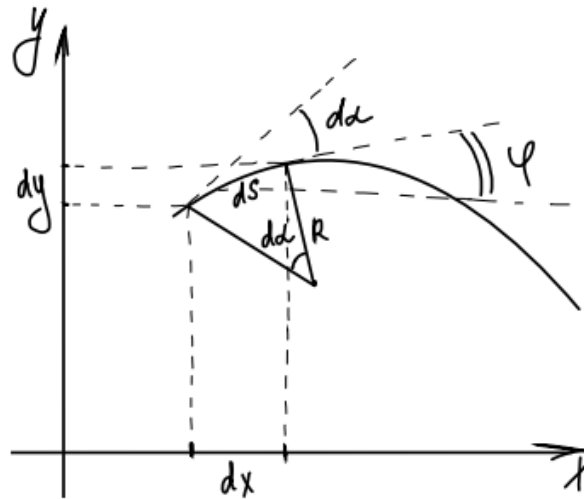
$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ -\cos(\omega t) \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = R\omega^2 \vec{n}. \quad (2.23)$$

Свойства:

1. Время соскальзывания без трения не зависит от начального положения.
2. Кривая скорейшего спуска (Брахистохрона).
3. Маятник Гюйгенса.

## 2.7 Радиус кривизны

Найдём кривизну известной траектории  $y(x)$  в каждый момент времени, предполагая, что она достаточно гладкая:



$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$dS = R d\alpha$$

$$y'_x = \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$$

$$d\varphi = d\alpha$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} \varphi) = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) \cdot \frac{d\varphi}{dx}$$

$$\frac{\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} \varphi)}{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)} dx = d\varphi$$

$$\frac{\frac{d}{dx} y'_x}{(1 + (y'_x)^2)} dx = d\varphi$$

$$dx \sqrt{1 + (y'_x)^2} = dS$$

$$\Rightarrow R = \frac{dS}{d\varphi} = \frac{dx \sqrt{1 + (y'_x)^2} (1 + (y'_x)^2)}{dx \left( \frac{d}{dx} y'_x \right)} = \frac{(1 + (y'_x)^2)^{\frac{3}{2}}}{y''_x}$$

$$R = \frac{(1 + (y'_x)^2)^{3/2}}{y''_x} \text{ — радиус кривизны траектории.} \quad (2.24)$$



**Пример.** Баллистическое движение. Воспользуемся полученными знаниями дифференциального исчисления и решений для полёта материальной точки.

Решение было:  $x = v_{0x}t = v_0 \cos \varphi t$

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = v_0 t \sin \varphi - \frac{gt^2}{2}$$

$$R = \frac{\left(\sqrt{1 + (y'_x)^2}\right)^3}{y''_x} \text{ — то есть, необходимо найти } y'_x, y''_x$$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{v_0 \sin \varphi - gt}{v_0 \cos \varphi}$$

$$y''_x = \frac{d}{dx} y'_x = \frac{dt}{dx} \cdot \frac{d}{dt} y'_x = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{v_0 \sin \varphi - gt}{v_0 \cos \varphi} \right) =$$

$$= \frac{1}{v_0 \cos \varphi} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{v_0 \sin \varphi - gt}{v_0 \cos \varphi} \right) = \frac{1}{v_0 \cos \varphi} \cdot \left( -\frac{g}{v_0 \cos \varphi} \right) = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \varphi}$$

$$\Rightarrow \left( (1 + (y'_x)^2) \right)^{\frac{3}{2}} = \left( 1 + \frac{(v_0 \sin \varphi - gt)^2}{v_0^2 \cos^2 \varphi} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{(v_0^2 - 2v_0 gt \sin \varphi + g^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}{v_0^3 \cos^3 \varphi}$$

$$y''_x = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \varphi}$$

$$\Rightarrow R = -\frac{(v_0^2 - 2v_0 gt \sin \varphi + g^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}{g \cancel{v_0 \cos \varphi}^{v_x}} = -\frac{v^3}{g v_x}$$

где  $v$  — полная скорость,  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} =$

$$= \sqrt{\cancel{v_0^2}^{v_0^2} + \cancel{v_0^2}^{v_0^2} - 2v_0 gt \sin \varphi + g^2 t^2}$$

$$\boxed{R = -\frac{v^3}{g v_x}}$$

## Лекция 3.

# Динамика материальной точки

### 3.1 Лирика. Фундаментальные взаимодействия

Пришло время выяснить, а что, собственно, является причиной возникновения движения? Данным вопросом занимается уже другой раздел механики – динамика.

Среди основных понятий динамики можно выделить такие как **сила**, **масса**, **импульс**, **энергия** и **момент импульса**. Первым же делом мы проанализируем следующий крайне важный факт: все тела вокруг нас как-то взаимодействуют друг с другом, что, как правило, приводит к изменению их состояния – возникновению движения, деформациям, и т.д.

В классической механике для количественного описания меры взаимодействия было предложено ввести понятие **силы**.

**Определение.** С точки зрения формального определения, под силой мы будем понимать векторную, т.е. имеющую направление, физическую величину, характеризующую меру воздействия на данное тело со стороны других тел или полей.

Если на тело действует сила  $\vec{F}$ , то с точки зрения математического аппарата классической механики мы должны провести от данного тела вектор в направлении действия силы. Что касается единиц измерения, то в международной системе СИ для силы были выбраны Ньютоны.

Далее, стоит сказать, что по современным представлениям любое взаимодействие между телами осуществляется за счет некоторых материальных посредников, называемых переносчиками взаимодействия, которые перемещаются с конечными скоростями. Данная концепция носит название близкодействия. Таким образом, для того чтобы тело 1 провзаимодействовало с телом 2, оно должно испустить частицу – переносчик взаимодействия, а тело 2 должно поглотить ее. Противоположным концепции близкодействия является устаревшее учение о дальнодействии, согласно которому тела действуют друг на друга с бесконечной скоростью без посредников – через «пустоту». Именно последней точки зрения придерживаются в рамках классической механики.

Ясно, что природа сил должна быть весьма разнообразной. Еще со школы мы знаем о силе упругости, возникающей при растяжении пружины, силе реакции опоры, о силе тяжести, обусловленной тяготением Земли, силе трения и др.

Однако, существуют лишь четыре типа так называемых фундаментальных взаимодействий: гравитационное, электромагнитное, слабое и сильное. Давайте немного поговорим о каждом из них. Как видно, сильное не просто так получило такое название,

однако радиус действия сил весьма ограничен. Слабое было названо так по причине его сравнения с сильным и электромагнитным. В таблице ниже приведены основные данные.

Тип взаимодействия	Отн. сила взаимод.	Переносчик	Радиус действия	Участвуют
Гравитационное	$10^{-38}$	Гравитон, G	$\infty$	всемирное тяготение
Электромагнитное	$10^{-2}$	Фотон, $\gamma$	$\infty$	кулоновские силы
Слабое	$10^{-15}$	$W^+$ , $W^-$ и $Z^0$ бозоны	$10^{-18}$ м	радиоактивный $\beta$ -распад
Сильное	1	Глюоны	$10^{-15}$ м	ядерные силы

### 3.1.1 Гравитационное взаимодействие

Является наименее изученным из всех типов. Такое взаимодействие испытывают все тела, обладающие массой. Считается, хотя точно не доказано, что переносчиком такого взаимодействия является гипотетическая частица – гравитон, предположительно движущаяся со скоростью света. К сожалению, до сих пор не удалось проквантовать гравитационное взаимодействие. На данный момент современной теорией гравитацией является общая теория относительности, предложенная Альбертом Эйнштейном в 1915 г. Поведение сил, связанных с данным типом взаимодействия, в рамках же классической физики описывается законом всемирного тяготения, о котором мы будем подробно говорить в одном из следующих занятий. Данный закон был сформулирован Исааком Ньютоном еще в 1666 году. Гравитационное взаимодействие является самым слабым из всех типов фундаментальных взаимодействий.

### 3.1.2 Электромагнитное взаимодействие

Данное взаимодействие существует между частицами, обладающими электрическим зарядом. Более того, открытие атомарной структуры вещества позволило ученым заключить, что такие силы как сила упругости, сила трения, сила реакции опоры и многие другие имеют именно электромагнитную природу. Это обусловлено тем фактом, что именно электромагнитное взаимодействие доминирует при взаимодействии атомов. Электромагнитное взаимодействие сильнее гравитационного в  $10^{36}$  раз. В классической физике для описания электромагнитного взаимодействия пользуются законом Кулона, который был предложен Шарлем Кулоном в 1785 году. Современной же теорией, описывающей электромагнитное взаимодействие является квантовая электродинамика, которая считается по праву одной из наиболее успешной теорий поля. У истоков которой стояли такие

великие ученые как Швингер, Фейнман, Томонага и др. А переносчиком же взаимодействия выступает фотон.

Данный тип взаимодействия вместе с гравитационным до проникновения человека в атомное ядро считались единственными типами фундаментальных взаимодействий. Важно подчеркнуть, что все силы, рассматриваемые в классической механике имеют либо электромагнитную, либо гравитационную природу.

Более того, в отличие от оставшихся двух типов взаимодействия – слабого и сильного, силы гравитационной и электромагнитной природы часто называют дальнодействующими, ибо они имеют бесконечный радиус действия, т.е. нельзя точно сказать, где такие силы можно считать равными нулю.

Для полноты изложения скажем буквально несколько слов об оставшихся типах фундаментальных взаимодействий, а именно о сильном и слабом типах фундаментальных взаимодействий. Для их открытия ученым пришлось заглянуть вовнутрь атомного ядра.

### 3.1.3 Сильное взаимодействие

Во-первых, установив, что ядро состоит из положительно заряженных и нейтральных нуклонов, исследователям пришлось допустить существование сил иной природы, которые бы удерживали ядро в стабильном состоянии, не давая ему распасться из-за кулоновских сил отталкивания. Оказалось, что существует взаимодействие другой природы, благодаря которому притяжение двух протонов в ядре за счёт сильного взаимодействия в 100 раз сильнее их электромагнитного отталкивания. Это и есть сильное взаимодействие. Раздел физики, который занимается его изучением, называется квантовой хромодинамикой. Протоны и нейтроны, согласно современным представлениям, не являются элементарными частицами – они состоят из трех кварков, которые обладают разными цветами. Цвет – это аналог электрического заряда в случае электромагнитного взаимодействия. Только в отличие от электрического заряда, хромодинамических зарядов целых три. Движение цветных зарядов является строго ограниченным (они не могут выходить за пределы нуклона), такое свойство является следствием конфайнмент-эффекта. Так вот, кварки взаимодействуют друг с другом посредством сильного взаимодействия, переносчиком которого является глюон. Данное взаимодействие имеет очень ограниченный радиус действия, около  $10^{-15}$  метра, что примерно совпадает с радиусом протона. Сами же нуклоны тоже взаимодействуют при помощи так называемого остаточного сильного взаимодействия, обмениваясь уже не глюоном, а составной частицей – пионом, которая состоит из кварка и антикварка. Такое взаимодействие, имея чуть больший радиус действия, позволяет удерживать нуклоны атомного ядра вместе.

### 3.1.4 Слабое взаимодействие

Что же насчет слабого взаимодействия? Анализируя некоторые физические явления, в частности радиоактивный бета-распад, при котором свободный нейтрон превращается в протон, пришлось допустить существование еще одного типа взаимодействия – слабого, переносчиками которого являются  $W^{\pm}$ ,  $Z^0$  – бозоны. Слабое взаимодействие меняет тип кварков внутри нуклонов, меняя значение еще одного квантового числа – аромата.

Вопрос о существовании других типов взаимодействий остается дискуссионным. Для изучения физики элементарных частиц необходимо пройти отдельный курс, здесь же мы не будем вдаваться в такие подробности, сфокусировавшись на чисто классических представлениях.

## 3.2 Основные понятия динамики

Итак, мы познакомились с понятием силы как меры воздействия на тело со стороны другого тела или поля, узнали, на какие типы так называемых фундаментальных взаимодействий можно разделить все существующие в природе силы. В классической механике характерные размеры, с которыми имеют дело, обсуждая ту или иную задачу, много больше размеров атомного ядра. В связи с чем все силы в классической механике, обладают либо гравитационной, либо электромагнитной природой. Перейдем же к следующим базовым понятиям и законам динамики.

### 3.2.1 Инерция

Под инерцией тела можно понимать его сопротивление к изменению характера его движения. Чтобы лучше понять смысл понятия, давайте проведем несколько мысленных экспериментов. Сперва, положим кусок какой-нибудь ткани на стол, а сверху установим тяжелый брусок. Если мы начнем медленно тянуть этот кусок ткани, то брусок начнет двигаться вместе с тканью. Сила трения со стороны ткани на брусок действует весьма долго, и тело успевает набрать необходимую скорость, чтобы двигаться вместе с тканью. Если же мы будем увеличивать скорость, с которой мы каждый раз начинаем тянуть кусок ткани, т.е. увеличивать ускорение (изменение скорости от нуля до какого-то значения, с которым мы тянем ткань), то в какой-то момент брусок перестает синхронно двигаться вместе с тканью и в конечном итоге из-за ограниченной длительности действия силы трения брусок вообще останется на столе. Как видно, брусок оказывает некоторое сопротивление изменению его скорости под воздействием силы трения. Данное свойство как раз и называется инерцией.

Другая ситуация. Вы пришли в супермаркет и взяли тележку. Тележка начинает набирать скорость. В какой-то момент вам необходимо сделать поворот, т.е. изменить характер движения этой тележки, сбросив ее скорость и изменив ее направление. Для этого необходимо оказать внешнее воздействие, в данном случае приложить мускульную силу рук. Пока тележка пустая вам это дается весьма просто, однако все знают, насколько трудно менять скорость тележки, когда она полностью заполнена. Таким образом во втором случае, когда тележка заполнена, она обладает большей инерцией, нежели чем пустая. Как же количественно описать данное свойство? Из опыта любой может сказать, чем больше у тела масса, тем тяжелее изменить характер его движения. Таким образом вводится понятие инертной массы, как меры инерции, единицами измерения которой в системе СИ являются килограммы.

Теперь попробуем разобраться в еще одном важном вопросе: а как будет себя вести тело, если на него не действуют вообще никакие силы? Первое, что приходит в голову – оно будет покоиться.

Данное утверждение, однако, лишь частично отвечает на сформулированный выше вопрос. Для полного же ответа представим следующий эксперимент. У вас есть длинная горизонтальная плоскость, вы кладете на нее брусок и толкаете его. Он начинает двигаться с какой-то скоростью. Как подсказывает опыт, в какой-то момент данный брусок остановится. Исходя из этого, можно сделать ошибочный вывод: нет внешней силы – нет движения. Именно так и рассуждал Аристотель при построении своей механики. Данное предубеждение просуществовало на протяжении почти 20 веков, и только Галилею и Ньютону удалось разглядеть истинную картинку мира.

### 3.2.2 Первый закон Ньютона (принцип инерции)

Для того чтобы разобраться, попробуем теперь сделать поверхность плоскости максимально гладкой (пример с аэрохоккеем). Тело будет двигаться намного дольше. Однако остановка будет связана лишь с тем, что мы все еще не смогли полностью исключить все силы трения и сопротивления. Опыт подсказывает, что чем меньше трение, тем больше будет пройденный путь. Если же мы мысленно перейдем к пределу, когда все силы трения отсутствуют, то нетрудно понять, что тело будет двигаться бесконечно долго и вдоль прямой линии, т.е. без изменения скорости. Говорят, что тело будет двигаться по инерции! Движение с постоянной скоростью так же естественно, как и состояние покоя. И лишь для изменения скорости необходимо приложить силу, это и было открытие, сделанное Галилеем и Ньютоном.

Мы приходим к следующему выводу: если на тело не действуют никакие силы или их действие скомпенсировано, то такое тело будет либо покоиться, либо двигаться прямолинейно и равномерно. Системы отсчета, относительно которых возможно такое движение, называются инерциальными! Таким образом, мы подошли к первому закону механики или же первому закону Ньютона, который постулирует существование инерциальных систем отсчета!

**Чёткая формулировка закона :** Существуют такие системы отсчёта, называемые инерциальными, относительно которых свободное тело, т. е. тело, на которое не действуют внешние силы или действие которых на него скомпенсировано, сохраняет свою скорость постоянной.

### 3.2.3 Второй закон Ньютона

Выяснив возможные типы движения в том случае, когда силы отсутствуют, теперь необходимо понять, как же будет меняться движение, когда прикладываемая сила не равна нулю.

Представим ситуацию, когда к нам навстречу катится тележка. Вы стоите, и ваша задача – остановить тележку. Представим, что сперва тележка пустая и катится к вам с не очень большой скоростью. Сила, которую вам надо будет приложить для остановки тележки, будет небольшой, как и длительность времени, с которой вам надо будет тормозить эту тележку до полной остановки. Теперь представим, что мы увеличили массу тележки и пустили ее с той же скоростью. В этот раз нам уже понадобится прикладывать большую силу или же выполнять торможение тележки дольше по времени. Представим теперь последнюю ситуацию, когда скорость тележки будет еще больше. В этом случае, когда она подъедет к нам, она будет иметь большую скорость. Очевидно, что для изменения этой скорости до нулевого значения, т.е. полного торможения, нам придется приложить еще большую силу или же действовать этой силой еще дольше, а может прибегнуть к обоим из этих вариантов.

Таким образом, мы можем записать следующее соотношение: сила будет пропорциональна массе тележки, а также, очевидно, величине изменению скорости. Однако, как мы уже замечали, того же эффекта – торможения тележки – можно добиться за счет более длительного действия силы. По этой причине мы должны домножить силу на промежуток времени, в течение которого мы будем действовать силой для достижения нужного эффекта – торможения тележки.

$$\Delta v_1 \rightarrow F_1 \Delta t_1 m_1$$

Меняем:  $m$

$$m_2 > m_1 \rightarrow F_2 > F_1$$

или

$$m_2 > m_1 \rightarrow \Delta t_2 > \Delta t_1$$

т.е.

$$\Delta v_1 \rightarrow F_2(\uparrow) \quad \Delta t_1 \quad m_2(\uparrow)$$

или

$$\Delta v_1 \rightarrow F_1 \quad \Delta t_2(\uparrow) \quad m_2(\uparrow)$$

Меняем:  $\Delta v$

$$\Delta v_3 > \Delta v_1 \rightarrow F_3 > F_2$$

или

$$\Delta v_3 > \Delta v_1 \rightarrow \Delta t_3 > \Delta t_2$$

$$\Delta v_2(\uparrow) \rightarrow F_3(\uparrow) \quad \Delta t_1 \quad m_2$$

или

$$\Delta v_2(\uparrow) \rightarrow F_1 \quad \Delta t_3(\uparrow) \quad m_2.$$

Выбором единиц измерения данных величин, мы можем записать равенство вместо знака пропорциональности. Далее стоит сделать ряд замечаний. Во-первых, мы понимаем, что проекция силы должна быть отрицательной, т.к. изменение скорости является отрицательным. С этим все хорошо – знак минус будет показывать направление действия силы, которая направлена против движения тела. Во-вторых, данное уравнение описывает одномерную задачу, нетрудно сделать обобщение, записав для двух других координат такие же соотношения. Короткая запись может быть выполнена при помощи векторов. В-третьих, точно таким же уравнением будет описываться разгон тележки, нет никакой разницы. Только там сила будет направлена в сторону разгона тела, что, однако, будет автоматически учтено самим уравнением. Еще одним замечанием будет то, что сил действовать может сразу несколько. Как их складывать? Очевидно, что если вторая сила смотрит также, то абсолютное значение результирующей силы будет совпадать с суммой первой и второй сил. Если же она – вторая – сила будет направлена против первой, то тогда силы придется вычесть друг из друга. Все это приводит к тому, что в правой части на самом деле должна стоять векторная сумма всех сил, действующих на тело. Последним и крайне важным замечанием является то, что вместо конечных разностей, для перехода к точному выражению необходимо перейти к бесконечно малым приращениям – дифференциалам. Это связано с тем фактом, что сама сила может быть переменной величиной, например зависеть от времени, т.е. изменяться с изменением  $t$ . Тогда такое выражение будет справедливо лишь на бесконечно малом промежутке времени, за который происходит бесконечно малое изменение скорости. Соответствующий ряд соотношений:

$$\Delta v \sim \frac{F \cdot \Delta t}{m}$$

$$\Delta \vec{v} \sim \frac{\vec{F} \cdot \Delta t}{m}$$

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$dt(F(t + dt) - F(t)) \sim dt^2$$



$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

Величина справа носит название импульс силы. Комбинация слева равна изменению другой величины – импульса. Сам же импульс равен произведению массы на скорость  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Если же мы поделим данное равенство на  $dt$ , то мы получим уравнение, которое является математической формулировкой второго закона Ньютона (векторная сумма всех сил, действующих на тело, равна скорости изменения импульса этого тела ):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i, \quad (3.1)$$

В такой записи второй закон Ньютона справедлив и в случае специальной теории относительности. Запись же, к которой мы привыкли со школы, имеет вид:  $\vec{a} = \vec{F}/m$ , что в словесной форме звучит так: ускорение тела прямо пропорционально векторной сумме всех прикладываемых к телу сил и обратно пропорционально его массе. Отсюда, кстати, можно сразу сделать вывод: если на тело не действуют внешние силы, то импульс данного тела должен сохраняться.

Второй закон Ньютона является основным законом классической механики, да и классической физики в целом. Фундаментальную роль дифференциальной формы соответствующего уравнения трудно переоценить.

### 3.2.4 Третий закон Ньютона

Итак, существуют три фундаментальных закона движения, которые были представлены одним из величайших мыслителей всех времен — Исааком Ньютоном — в своей работе «начала натуральной философии». Мы познакомились с двумя из них.

Третий же закон звучит следующим образом.

Тела действуют друг на друга с силами, равными по модулю и противоположными по направлению, причём эти силы имеют одинаковую природу.

Здесь надо сделать некоторый комментарий. В отличие от модели тела, с которой мы будем работать, будь то материальная точка или абсолютно твердое тело, формулировка будет немного отличаться. Для материальной точки здесь все просто: линия, вдоль которой действуют силы, просто соединяет данные точки. В случае же пространственно распределенной массы, например АТТ, здесь необходимо смотреть на каждый из случаев отдельно.

В этот раз мы начали с формального определения. Однако, давайте же разберемся в этом поподробней. Для этого, как обычно, обратимся к эксперименту. Представим брусок, который лежит на столе. На данный брусок действует сила тяжести. Однако, как мы уже знаем, если есть сила, то должно быть и ускорение, но брусок покоится. В этом нет ничего страшного, ибо на брусок действует сила реакции опоры со стороны стола. Эта сила по абсолютной величине совпадает с силой тяжести, поэтому суммарная сила, действующая на брусок равна нулю. Однако, как нетрудно догадаться, сам брусок также действует на стол с силой, которая называется весом. Данная сила будет полностью совпадать с силой реакции опоры по абсолютной величине, приложена к той же точке, но только иметь противоположное направление. Рассмотрим еще один эксперимент. Давайте начнем толкать брусок вдоль стола так, чтобы его скорость была постоянной. Это весьма легко представить. Сразу будет понятно, если есть сила, то опять же, должно быть и ускорение. Однако брусок движется с постоянной скоростью, в чем же дело? Все дело



в силе трения между бруском и поверхностью, которое уравнивает силу, с которой мы толкаем брусок. Представим же однако, что поверхность стола крайне шершавая, например, мы могли положить наждачную бумагу, а вот ножки стола очень хорошо могут скользить по полу. Что произойдет? Интуиция подсказывает, что стол начнет двигаться вместе с бруском, может даже и без проскальзывания. Это вызвано тем, что стол действует на брусок с силой трения, однако и сам брусок действует на стол с точно такой же силой трения, однако направление ее уже будет противоположное. Попробуем рассмотреть еще один эксперимент. Представьте лодку, которая стоит у причала. Вы подбегаете с большой скоростью к данной лодке и прыгаете в нее. После вашего приземления лодка начнет двигаться. Почему? За счет сил трения между дном лодки и подошвой вашей обуви. Вы действовали очень короткий промежуток времени, однако с большой силой, и лодка пришла в движение. А ваша скорость как-то изменилась? Конечно, она уменьшилась, что вызвано тем же явлением – трением. Только в этом случае лодка действовала на вас с той же силой, но противоположная по направлению. Это привело к тому, что скорость уменьшилась. Можно привести еще массу примеров, в каждом из которых будет проявляться третий закон Ньютона.

### 3.2.5 Закон сохранения импульса

Познакомившись со всеми законами Ньютона, мы можем перейти к их различным следствиям. Следующий закон, который мы рассмотрим, на самом деле хоть и выводится из законов Ньютона в рамках классической механики, сам по себе является более фундаментальным и действует тогда, когда ньютоновская механика перестает быть применима. Мы говорим про закон сохранения импульса. Однако, прежде чем мы приступим к его обсуждению, нам стоит ввести новое понятие – замкнутая система.

Представим, что у нас есть две материальные точки, которые могут взаимодействовать друг с другом. Других сил нет. Такая система будет называться замкнутой. Силы, которые действуют со стороны других – внешних – тел, называются внешними. Они как раз и отсутствуют в нашей замкнутой системе. Силы же, которые действуют внутри системы, между первым и вторым телом, называются внутренними. Только такие силы у нас и присутствуют. Согласно третьему закону Ньютона сила, с которой первая материальная точка действует на вторую, равна силе, с которой вторая материальная точка действует на первую в противоположном направлении. По второму закону Ньютона эти силы равны изменению импульса каждой из материальных точек. Получается, что сумма изменений или, что то же самое, изменение векторной суммы импульсов материальных точек равно нулю. Мы приходим к выводу, что суммарный импульс замкнутой системы должен сохраняться. Давай те же обобщим это на систему, состоящую из произвольного числа материальных точек. Введем понятие суммарного импульса системы. Его производная будет равна сумме всех внешних сил, действующих на материальные точки системы, такое слагаемое ноль по условию, а также из всевозможных пар слагаемых вида  $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}$ , которые дают ноль. Получается, что производная от суммы импульсов равна нулю, т.е. сам суммарный импульс сохраняется. Соответствующие выкладки для двух частиц:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \quad (3.2)$$

$$\frac{dm_1 \vec{V}_1}{dt} + \frac{dm_2 \vec{V}_2}{dt} = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{p}_1 + \vec{p}_2] = 0, \quad (3.4)$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const.} \quad (3.5)$$

Выкладки на случай обобщения:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (3.6)$$

$$\vec{p} = \sum_{n=1}^N \vec{p}_n, \quad (3.7)$$

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^{ext} + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1, m \neq n}^N \vec{F}_{n,m}, \quad (3.8)$$

$$\vec{F}_{n,m} = -\vec{F}_{m,n}, \quad (3.9)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^{ext}, \quad (3.10)$$

$$\sum_{k=1}^N \vec{F}_k^{ext} = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N \vec{p}_n = 0, \quad (3.12)$$

$$\vec{p}_{\text{системы}} = \text{const.} \quad (3.13)$$

т.е. в отсутствие внешних сил суммарный импульс системы сохраняется.

Посмотрим же на то, как проявляется закон сохранения импульса. Как и прежде, мы обратимся к житейскому опыту. Представим, что мы сидим на лодке, которая покоится относительно воды. Любой хорошо знает, что будет если попробовать подальше спрыгнуть с лодки. Ответ будет очевиден: лодка откатится в противоположном направлении. С хорошей точностью систему лодка-человек можно считать замкнутой. Начальный импульс относительно системы отсчета, которая связана с Землей, равен нулю. После прыжка ваш импульс уже будет отличен от нуля. Чему же будет равен импульс лодки? Верно, согласно ЗСИ он будет таким же по величине и противоположным по направлению. Также, исходя из выражения для импульса, можно заключить, чем более массивная лодка, тем меньше будет ее скорость.

Итак, в этой лекции мы познакомились с еще одним фундаментальным законом механики. Познакомились с понятием замкнутой системы, а также с тем, как можно разделять силы на внешние и внутренние.

Стоит подчеркнуть, что закон сохранения импульса является более фундаментальным, чем законы механики Ньютона. Он является следствием одной из фундаментальных симметрий в физике – однородности пространства. Об этом, а также и о других типах симметрий и законах, которые ими порождаются, мы поговорим в одной из следующих лекций.

### 3.2.6 Преобразования Галилея и принцип относительности Галилея и принцип относительности Эйнштейна

Получив представление о кинематических характеристиках материальной точки, среди которых радиус-вектор, скорость и ускорение, вторая производная (ускорение), сразу же может возникнуть вопрос: а каким образом данные величины будут преобразовываться при переходе от одной системы отсчета к другой?

Дать ответ на этот вопрос в рамках классической механики позволяют преобразования Галилея. Данные преобразования отражают сугубо классические представления о пространстве и времени.

В частности, время является абсолютным, т.е. величиной, значение которой не зависит от выбора системы отсчета:  $t = t'$ .

Житейский опыт подсказывает нам, что такое представление о времени позволяет весьма хорошо описывать встречающиеся в повседневной жизни явления.

Как будет показано в дальнейшем, все это связано лишь с тем фактом, что скорости, с которыми мы имеем дело, обычно много меньше скорости света, которая является ключевым параметром в специальной теории относительности. При приближении значений наблюдаемых в системе скоростей к световым начинают сказываться различные релятивистские эффекты. Подробно об этом и об аналоге преобразований Галилея в релятивистском случае мы будем говорить в одной из дальнейших лекций, здесь же мы будем считать, что все относительные скорости много меньше световой.

Фраза: Время является абсолютной величиной.  $t' = t$ . Картинка с человеком на скамейке и самолетом.

Итак, рассмотрим две системы отсчета, одна из которых покоится, такую систему мы будем по традиции называть системой  $K$  (можно обвести на картинке букву  $K$  в круг для привлечения внимания зрителя, ибо все остальное уже должно быть нарисовано), тогда как систему, движущуюся с постоянной скоростью  $\mathbf{V}$  относительно первой ( $V \ll c$ , где  $V$  – абсолютное значение вектора  $\mathbf{V}$ ), мы будем обозначать  $K'$ . Соответствующие кинематические характеристики в случае системы  $K'$  также будут снабжены штрихом. (Можно написать два столбика: со штрихованными и нештрихованными величинами). Без ограничения общности можно считать, что в нулевой момент времени две системы совмещены друг с другом. Как будут обстоять дела через промежуток времени  $t$ ? Очевидно, что движущаяся система отсчета сместится относительно покоящейся на пространственный вектор  $\mathbf{V} \cdot t$  (указать на этот вектор на заготовке на картинке). Рассмотрим все подробно. Положение точки  $O$  в системе  $K$ , очевидно, будет описываться нулевым вектором. Положение же точки  $O$  в системе  $K'$  будет равно вектору  $\mathbf{V} \cdot t$ .

Пусть теперь положение какой-либо материальной точки в штрихованной системе отсчета описывается вектором  $\mathbf{r}'$ . Тогда, исходя из правил сложения векторов, мы видим, что радиус-вектор  $\mathbf{r}$  данной материальной точки, проведенный из начала координат уже покоящейся системы отсчета, будет связан с  $\mathbf{r}'$  следующим образом: (на доске пишем формулу, связывающую эти два вектора, даем комментарий, что в преобразованиях Галилея вместо  $t'$  можно писать просто  $t$  (т.к. они просто равны друг другу)):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V} \cdot t. \quad (3.14)$$

А как будут связаны скорости данной материальной точки в разных системах отсчета? Для этого достаточно взять производную по времени: (берем производную, записываем соотношения для скоростей)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}. \quad (3.15)$$

Аналогично, взяв еще одну производную, можно получить связь ускорений в этих двух системах:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}'. \quad (3.16)$$

Нетрудно заметить, что ускорения в разных системах отсчета просто совпадают друг с другом. Ускорение же является центральной величиной в классической механике, величина которого позволяет получить закон движения для материальной точки (можно дать ссылку на интегрирование уравнений движения, либо на доске написать самому). Таким образом, если две системы перемещаются с постоянной скоростью относительно друг друга, нет никакой разницы относительно какой из систем нам стоит искать закон движения – они будут одинаковыми, отличия будут лишь в начальных условиях.

Появляются выражения для скорости, ускорения и т.д. Пишем, что время в штрихованной системе совпадает с временем в нештрихованной. Записываем два момента времени, рисуем два состояния: где системы совмещены и нет.

В этом месте стоит сделать одно замечание. Если бы рассматриваемые системы были бы инерциальными, то домножив соответствующее равенство на массу материальной точки, мы пришли бы ко второму закону Ньютона:  $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ , где под  $\mathbf{F}$  подразумевают суперпозицию сил. Эти рассуждения стали основой для классического принципа относительности или принципа относительности Галилея, который формулируется следующим образом: все законы классической механики инвариантны относительно выбора инерциальной системы отсчета.

Пишем, что  $K$  и  $K'$  – ИСО, умножаем на массу и получаем второй закон Ньютона.

Таким образом, нет никакой разницы в какой из инерциальных систем отсчет записывать второй закон Ньютона. Конечно же, законы движения, т.е. решение уравнений движения, в разных системах будут разными, однако связь между ними будет тривиальной. Благодаря этому свойству при решении конкретных задач нам не надо искать какую-то особую инерциальную систему отсчета, ибо они все эквиваленты друг другу. В следующих лекциях мы приступим к интегрированию уравнений движения, активно пользуясь принципом относительности Галилея. Открыть принцип относительности Галилею помог мысленный эксперимент, в котором он рассуждал про корабль. Так что Галилей не только открыл принцип относительности, но и подарил науке мощный, а иногда и единственно возможный инструмент решения задач – мысленный эксперимент.

Однако, перед тем как закончить лекцию, стоит сказать, что классический принцип относительности справедлив только для механических явлений. Его применение для электромагнитных процессов терпит неудачу и приводит к противоречивым следствиям. Как уже было сказано, все дело в ограниченной применимости классического принципа относительности на процессы, в которых величина характерных скоростей много меньше световой, чего, конечно же, нельзя сказать об электромагнитных явлениях. В этом случае справедлив более общий, эйнштейновский принцип относительности, согласно которому все законы природы имеют одинаковый вид в любой инерциальной системе отсчета, но только не по отношению к преобразованиям Галилея, а уже относительно преобразований Лоренца, которые учитывают неабсолютный характер времени.

Теперь можно вернуться к преобразованиям Галилея. Пусть система  $K$  – инерциальная. Пусть система  $K'$  – инерциальная, она движется со скоростью  $\vec{V} = \text{const}$  относительно  $K$ . Запишем ряд соотношений на радиус-векторы, скорости и ускорения материальной

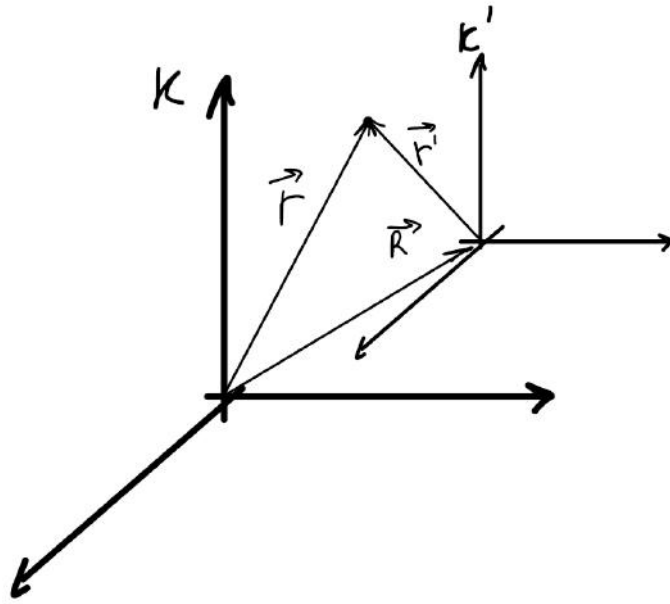


Рис. 3.1: Преобразования Галилея.

точки в разных системах координат:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R} = \vec{r}' + \vec{V} \cdot t \quad (3.17)$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{U} = \vec{U}' + \vec{V} \quad (3.18)$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{U}} = \dot{\vec{U}}' = \vec{a}' = \ddot{\vec{r}}' \quad (3.19)$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}'} \quad (3.20)$$

Если мы справа и слева домножим на массу  $m$ :

$$\boxed{m\vec{a} = m\vec{a}' = \vec{F}} \quad (3.21)$$

$\Rightarrow$  Все законы механики инвариантны относительно выбора инерциальной системы отсчёта. Это классический принцип относительности.

**Инварианты:** промежуток времени ( $\Delta t' = \Delta t$ ), длина ( $l' = l$ ), и др.

### 3.2.7 Понятие центра масс (центра инерции)

Важным понятием в динамике является центр масс.

**Определение** Центр масс системы – это такая точка в пространстве, радиус-вектор которой определяется как:

$$\vec{R}_{c.m.} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \cdot m_i}{M} = \frac{\int \rho(\vec{r}) dV \cdot \vec{r}}{\int \rho dV} = \int \frac{\vec{r} \rho(r) dV}{M}. \quad (3.22)$$

#### Следствия

Умножим всё на массу системы и возьмём производную:

$$M \cdot \dot{\vec{R}}_{c.m.} = M \cdot \dot{\vec{V}}_{c.m.} = \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot m_i = \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}. \quad (3.23)$$

$$\frac{d}{dt} \cdot M \cdot \dot{\vec{R}}_{c.m.} = \frac{d}{dt} M V_{c.m.} = \vec{F}_{ext}. \quad (3.24)$$

Следовательно центр масс системы движется как материальная точка, в которой сидит вся масса системы, на которую действуют только внешние силы.

### 3.2.8 Движение пары материальных точек

Задача двух тел имеет в физике особое значение. Рассмотрим две точки с радиус-векторами  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ , которые действуют друг на друга с некими (равными величиной и противоположными направлением — по третьему закону Ньютона) силами  $\vec{F}_{12}$  и  $\vec{F}_{21}$  и запишем для них второй закон Ньютона.

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12} \quad (3.25)$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{21} \quad (3.26)$$

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}. \quad (3.27)$$

Вычтем из одного уравнения другое:

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{-\vec{F}_{12}}{m_2} = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{12}, \quad (3.28)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \vec{F}_{12}. \quad (3.29)$$

Обозначим вектор расстояния от второго тела до первого как  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ , а «приведённую массу»  $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  как  $\mu$ , получая

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{\mu} \vec{F}_{12}. \quad (3.30)$$

Стоит заметить, что ускорение центра масс в данном случае нулевое, а значит он движется равномерно (его координата  $\vec{R}(t) = \vec{v}t + \vec{R}_0$ ).

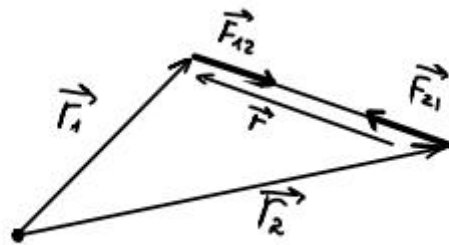


Рис. 3.2: Векторы, фигурирующие в задаче двух тел

## Лекция 4.

# Динамика материальной точки. Интегрирование уравнений движения

### 4.1 Вывод формулы Эйлера. Трение в блоках

Пусть у нас есть блок с перекинутой через него невесомой нерастяжимой веревкой. Зададимся вопросом: как будут отличаться силы натяжения нити с двух сторон  $|\vec{T}_1|, |\vec{T}_2|$ ? Рассмотрим элемент дуги:  $dS = R \cdot d\alpha$ . Запишем второй закон Ньютона в проекциях на

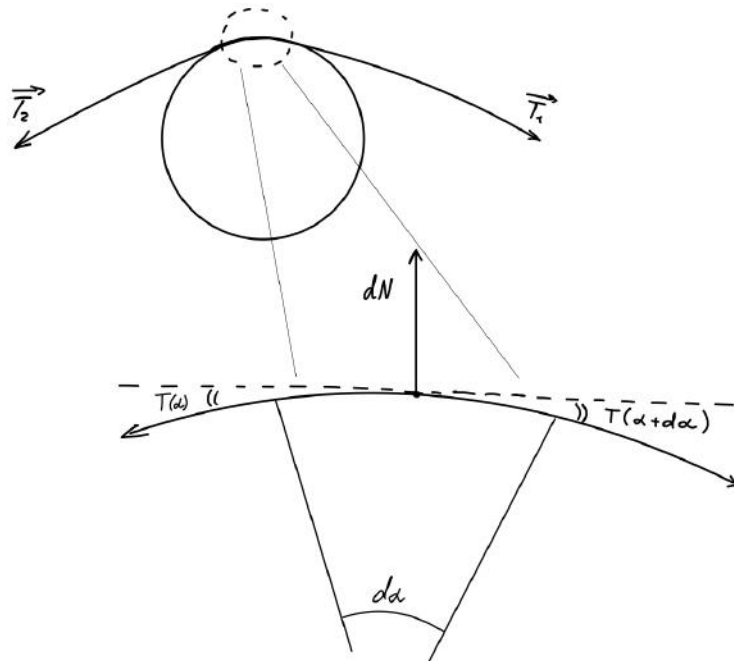


Рис. 4.1: Рисунок к выводу формулы Эйлера.

оси:

$$1. 0 = dN - T(\alpha) \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} - T(\alpha + d\alpha) \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} \quad (4.1)$$

$$\Rightarrow dN = 2T(\alpha) \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} = T(\alpha) \cdot d\alpha. \quad (4.2)$$

$$2. 0 = -T(\alpha) \cdot \cos \frac{d\alpha}{2} - dF_{\text{тр}} + T(\alpha + d\alpha) \cdot \cos \frac{d\alpha}{2}$$

$$0 = T(\alpha + d\alpha) - T(\alpha) - \mu \cdot dN \quad (4.3)$$

$$\Rightarrow T(\alpha + d\alpha) - T(\alpha) = \mu \cdot T(\alpha) d\alpha \quad (4.4)$$

$$\frac{dT}{d\alpha} \cdot d\alpha = \mu \cdot T(\alpha) d\alpha \Rightarrow \frac{dT}{T(\alpha)} = \mu \cdot d\alpha \quad (4.5)$$

$$\ln \frac{T_1}{T_2} = \mu \cdot \alpha \Rightarrow T_1 = T_2 \cdot e^{\mu\alpha}.$$

Например: тонкий стальной трос обвязываем дважды вокруг стальной трубы:  $\mu = 0.15$ ;  $\alpha = 4\pi \Rightarrow \mu\alpha$ .

## 4.2 Вязкое трение

При движении в среде механические объекты испытывают трение.

При высоких скоростях  $F_c \sim v^2$ .

При низких скоростях  $F_c \sim v$ .

Изменение закона зависимости силы сопротивления от скорости при увеличении скорости вызвано тем, что при увеличении скорости движения тела в вязкой среде возникают различные завихрения, на образование которых тратится часть кинетической энергии тела

Рассмотрим баллистическое движение в присутствии сил сопротивления среды.

Пусть  $\vec{F}_{\text{сопр}} = -k\vec{v}$ , известен угол броска (запуска) -  $\alpha$  и начальная скорость -  $v_0$

1. Найдём связь динамических параметров с  $v_\infty$ :

Пусть из эксперимента известна скорость снаряда в установившемся режиме при свободном падении с большой высоты:  $v_\infty$

Тогда:

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad (4.6)$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{сопр}}. \quad (4.7)$$

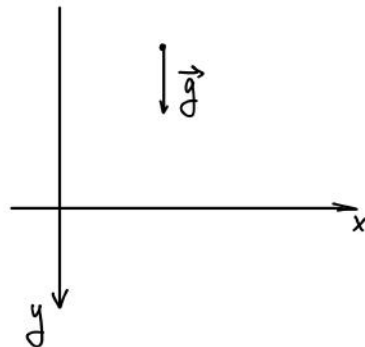


Рис. 4.2: Оси XY

$$1) m a_x = 0 \Rightarrow v_x = \text{const} = v_{0x}, \text{ пусть } v_{0x} = 0$$

$$2) m a_y = mg - kv_y$$



$$m \frac{dv_y}{dt} = mg - kv_y. \quad (4.8)$$

### Вариант 1. Способ решения дифференциального уравнения

$$m \int_{v_0}^{v_y(t)} \frac{d\tilde{v}_y}{mg - k\tilde{v}_y} = \int_0^t d\tilde{t} \quad (4.9)$$

$$\left(-\frac{1}{k}\right) m \cdot \ln |mg - k\tilde{v}_y| \Big|_{v_0}^{v_y(t)} = t \quad (4.10)$$

$$\ln \left| \frac{mg - kv_y(t)}{mg - kv_0} \right| = -\frac{kt}{m} \quad (4.11)$$

$$mg - kv_y(t) = (mg - kv_0)e^{-\frac{kt}{m}} \quad (4.12)$$

$$v_y(t) = \frac{mg - (mg - kv_0)e^{-\frac{kt}{m}}}{k} = \frac{mg(1 - e^{-\frac{kt}{m}}) + kv_0e^{-\frac{kt}{m}}}{k} \quad (4.13)$$

Если  $v_0 = 0$ , то:

$$\ln \left| \frac{mg - kv_y(t)}{mg} \right| = -\frac{kt}{m} \quad (4.14)$$

$$\left(1 - \frac{k}{mg}v_y(t)\right) = e^{-\frac{kt}{m}} \quad (4.15)$$

$$v_y = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right) = v_\infty \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right) \quad (4.16)$$

$$\frac{mg}{k} = v_\infty \quad (4.17)$$

$$\frac{g}{v_\infty} = \frac{k}{m} \quad (4.18)$$

$$\boxed{v_y(t) = v_\infty(1 - e^{-\frac{gt}{v_\infty}})} \quad (4.19)$$

### Вариант 2. Способ решения дифференциального уравнения

$$mv'_y + kv_y = mg \quad (4.20)$$

1. Решение однородного:

$$mv'_y + kv_y = 0 \quad (4.21)$$

$$v'_y + \frac{k}{m}v_y = 0 \quad (4.22)$$

$$v_y = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda e^{\lambda t} + \frac{k}{m}e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{k}{m} \Rightarrow v_y = \text{const} \cdot e^{-\frac{kt}{m}} \quad (4.23)$$

2. Частное решение неоднородного:

$$mv'_y + kv_y = mg \quad (4.24)$$

$$\text{Решение: } v_y = +\frac{mg}{k}$$

3. Общее решение неоднородного есть **сумма 1 и 2**:

$$v_y = \left[ \text{const} \cdot e^{-\frac{kt}{m}} \right] \left[ +\frac{mg}{k} \right], \quad (4.25)$$

где const из начальной установки, например:

$$v_y(0) = 0 \Rightarrow \text{const} = -\frac{mg}{k} \quad (4.26)$$

Теперь рассмотрим первоначальную задачу – движение снаряда под углом к горизонту.

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{сопр}} \quad (4.27)$$

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = 0 - kv_x \\ m \frac{dv_y}{dt} = -mg - kv_y \end{cases} \quad (4.28)$$

$$\Rightarrow m \frac{dv_x}{v_x} = -k dt \Rightarrow \quad (4.29)$$

$$\Rightarrow \ln \frac{v_x(t)}{v_0 \cos \alpha} = -\frac{kt}{m} \Rightarrow \quad (4.30)$$

$$\Rightarrow v_x(t) = v_0 \cos \alpha e^{-\frac{kt}{m}} \quad (4.31)$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha e^{-\frac{kt}{m}} \quad (4.32)$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} d\tilde{x} = \int_0^t v_0 \cos \alpha e^{-\frac{k\tilde{t}}{m}} d\tilde{t} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \left( -\frac{m}{k} \right) v_0 \cos \alpha e^{-\frac{k\tilde{t}}{m}} \Big|_0^t = \\ &= -\frac{mv_0}{k} \cos \alpha (e^{-\frac{kt}{m}} - 1) = \\ &= \frac{mv_0}{k} \cos \alpha (1 - e^{-\frac{kt}{m}}) \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$x = x_0 + \frac{mv_0}{k} \cos \alpha (1 - e^{-\frac{kt}{m}}) \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} k \rightarrow 0 \Rightarrow x &= x_0 + \frac{mv_0 \cos \alpha}{k} \left( 1 - 1 + \frac{kt}{m} \right) = \\ &= x_0 + v_0 \cos \alpha t \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$m \frac{dV_y}{dt} = -(mg + kV_y) \quad (4.37)$$

$$m \int_{V_y(0)}^{V_y(t)} \frac{dV_y}{mg + kV_y} = - \int_0^t d\tilde{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( \frac{m}{k} \right) \ln \left| mg + k\tilde{V}_y \right| \Big|_{V_0 \sin \alpha}^{v_y(t)} = -t \quad (4.38)$$

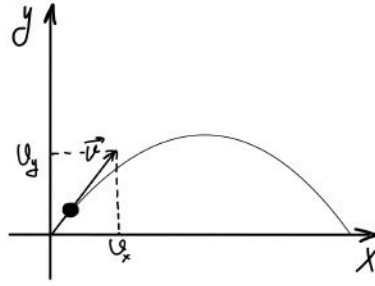


Рис. 4.3: снаряд, брошенный под углом к горизонту

$$\frac{mg + kV_y(t)}{mg + kV_0 \sin \alpha} = e^{-\frac{kt}{m}} \quad (4.39)$$

$$mg + kV_y(t) = (mg + kV_0 \sin \alpha) e^{-\frac{kt}{m}} \quad (4.40)$$

$$V_y = \left(\frac{mg}{k} + V_0 \sin \alpha\right) e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mg}{k} \quad (4.41)$$

$$V_y(t) = (V_\infty + V_0 \sin \alpha) e^{-\frac{kt}{m}} - V_\infty \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} k \rightarrow 0 \quad V_y(t) &= (V_\infty + V_0 \sin \alpha) e^{-\frac{gt}{V_\infty}} - V_\infty = \\ &= (V_\infty + V_0 \sin \alpha) \left(1 - \frac{gt}{V_\infty}\right) - V_\infty = \\ &= V_\infty - gt + V_0 \sin \alpha - \frac{V_0 \sin \alpha gt}{V_\infty} - V_\infty = \\ &= V_0 \sin \alpha - gt - \frac{V_0 \sin \alpha}{m} kt \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$y(t) - y(0) = (V_\infty + V_0 \sin \alpha) \left(e^{-\frac{gt}{V_\infty}} - 1\right) \left(-\frac{V_\infty}{g}\right) - V_\infty t \quad (4.44)$$

$$y(t) = y(0) + \frac{V_\infty}{g} (V_\infty + V_0 \sin \alpha) \left(1 - e^{-\frac{gt}{V_\infty}}\right) - V_\infty t. \quad (4.45)$$

### 4.3 Зависимость силы от координаты

Рассмотрим силу как функцию от координаты  $F(x)$ ; тогда второй закон Ньютона выглядит как

$$ma = F(x). \quad (4.46)$$

$$m \frac{dv}{dt} = F(x), \quad (4.47)$$

$$\text{Учитывая, что } \frac{dx}{dt} = v \implies \frac{dx}{v} = dt \quad (4.48)$$

$$m \frac{dv}{dx} v = F(x) \quad (4.49)$$

$$m v dv = F(x) dx. \quad (4.50)$$

Интегрируя обе части от значений скорости и координаты в начале движения до таковых в конце, получаем

$$m \int_{v_0}^v \tilde{v} d\tilde{v} = \int_{x_0}^x F(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad (4.51)$$

$$m \frac{\tilde{v}^2}{2} \Big|_{v_0}^v = \int_{x_0}^x F(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad (4.52)$$

$$v^2 - v_0^2 = \frac{2}{m} \int_{x_0}^x F(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad (4.53)$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} \int_{x_0}^x F(\tilde{x}) d\tilde{x}} \quad (4.54)$$

$$\text{где } v = \frac{dx}{dt} \quad (4.55)$$

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} \int_{x_0}^x F(\tilde{x}) d\tilde{x}}}. \quad (4.56)$$

$$(4.57)$$

Найдём время движения: для упрощения вычислений примем начальную скорость  $v_0$  и время начала движения нулевыми, оставив начальную координату  $x_0$  произвольной. Будем рассматривать конкретный случай, когда сила прямо пропорциональна координате ( $F(x) = \gamma x$ , где  $\gamma > 0$ ).

$$\int_0^t d\tilde{t} = \int_{x_0}^x \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m} \int_{x_0}^{\tilde{x}} \gamma \tilde{x} d\tilde{x}}} \quad (4.58)$$

$$t = \int_{x_0}^x \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m} \gamma \frac{\tilde{x}^2 - x_0^2}{2}}} \quad (4.59)$$

$$t = \int_{x_0}^x \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{\gamma}{m} \sqrt{\tilde{x}^2 - x_0^2}}} \quad (4.60)$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{\gamma}} \int_{x_0}^x \frac{d\tilde{x}}{x_0 \sqrt{\frac{\tilde{x}^2}{x_0^2} - 1}} \quad (4.61)$$

Обозначим  $y = \frac{\tilde{x}}{x_0}$

$$t = \sqrt{\frac{m}{\gamma}} \int_1^{\frac{x}{x_0}} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} \quad (4.62)$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{\gamma}} \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - x_0^2}}{x_0} \right|. \quad (4.63)$$

## 4.4 Реактивное движение

Рассмотрим систему, части которой изменяют массу. На систему может действовать внешняя сила.

Пусть  $p(t)$  - импульс системы в начальный момент времени.

$$\vec{p}(t) = \vec{P} = M\vec{V} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} \vec{p}(t + dt) &= \vec{P} + d\vec{P} + \vec{V}_m \cdot dm = \\ &= M\vec{V} + Md\vec{V} + \vec{V}dM + \vec{V}_mdm, \end{aligned} \quad (4.65)$$

$d\vec{P}$  находим по правилу дифференцирования сложной функции :  $d(M\vec{V}) = Md\vec{V} + \vec{V}dM$

Где  $(\vec{P} + d\vec{P})$  - изменение импульса ракеты,  $\vec{V}_m$  - скорость относительно лабораторной системы отчёта.

$$\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = \vec{F}(t)dt \quad (4.66)$$

$$Md\vec{V} + \vec{V}dM + \vec{V}_mdm = \vec{F}(t)dt \quad (4.67)$$

Понятно, что  $dm = -dM$ , т.е.  $m + M = const$

$$Md\vec{V} + (\vec{V} - \vec{V}_m)dM = \vec{F}(t)dt \quad (4.68)$$

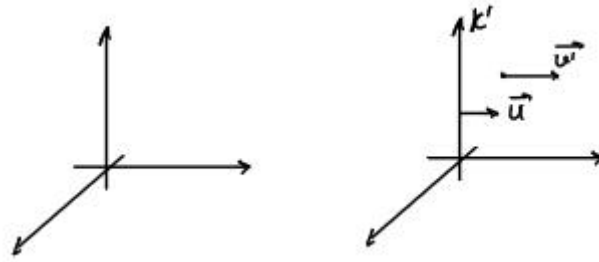
$\vec{V} \sim u$ ,  $\vec{V}_m \sim v$

$$Md\vec{V} - \vec{V}_{отн}dM = \vec{F}(t)dt \quad (4.69)$$

$$\boxed{M(t) \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}(t) + \vec{V}_{отн} \frac{dM}{dt}} - \text{Уравнение Мещерского.} \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}' + \vec{u} \\ \Rightarrow \vec{v}' &= \vec{v} - \vec{u}. \end{aligned}$$

Рассмотрим решения данного уравнения.

Рис. 4.4: Направления  $\vec{u}$   $\vec{v}'$ 

1. Внешние силы отсутствуют и движение одномерно.

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = 0 + \vec{V}_{\text{отн}} \frac{dM}{dt} \quad (4.71)$$

$$M \frac{dV}{dt} = -V_{\text{отн}} \frac{dM}{dt} \quad (4.72)$$

$$dV = -V_{\text{отн}} \frac{dM}{M}. \quad (4.73)$$

Интегрируя обе части от начального до конечного момента, получаем

$$V_{\text{отн}} \ln \frac{M_{\text{кон}}}{M_{\text{нач}}} = -(V - V_0). \quad (4.74)$$

$$\boxed{V = V_0 - V_{\text{отн}} \ln \frac{M_{\text{кон}}}{M_{\text{нач}}}} \text{ — формула Циолковского.} \quad (4.75)$$

2. Движение происходит в поле силы тяжести, масса изменяется линейно:  $M = M_0(1 - \alpha t)$ . Найдём производную массы по времени и запишем уравнение Мещерского для этой ситуации:

$$\frac{dM}{dt} = -M_0\alpha \quad (4.76)$$

$$M_0(1 - \alpha t) \frac{dV}{dt} = -M_0(1 - \alpha t)g + V_{\text{отн}} M_0\alpha \quad (4.77)$$

$$dV = \left( -g + \frac{V_{\text{отн}}\alpha}{1 - \alpha t} \right) dt. \quad (4.78)$$

Интегрируя обе части от начального до конечного момента времени, получаем

$$V - V_0 = -gt + V_{\text{отн}}\alpha \cdot \frac{1}{-\alpha} \ln \frac{1 - \alpha t}{1} \quad (4.79)$$

$$V = V_0 - gt + V_{\text{отн}} \ln \frac{1}{1 - \alpha t}. \quad (4.80)$$

## Лекция 5.

# Механическая работа. Энергия

Работа (интуитивная версия): что-то, что определяется прикладываемой силой объемом "результатов которых мы достигли, прикладывая данную силу.

**Определение.** Механическая работа - скалярная количественная мера действия силы (равнодействующей сил) на тело или сил на систему тел. Зависит от численной величины и направления силы (сил) и от перемещения тела (системы тел). Элементарная работа равна скалярному произведению силы, действующей на тело, на вектор бесконечно малого перемещения:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (\vec{F}, d\vec{r}) = |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos(\angle(\vec{F}, d\vec{r})). \quad (5.1)$$

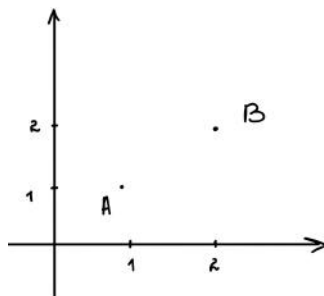


Рис. 5.1: Выполнение работы из точки A в точку B.

**Пример.** Пусть  $B(x,y) = 3xy + 8y$ , тогда  $dB$ :

$$dB = 3ydx + 3xdy + 8dy = (3y, 3x + 8) \cdot (dx, dy) = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B dB = 12 + 16 - (3 + 8) = 17.$$

Или  $\Rightarrow$

$$\int_A^B = \int_{1,1}^{2,1} + \int_{2,1}^{2,2} = 3 \cdot \int_1^2 dx + 14 \cdot \int_1^2 dy = 17.$$

$$\int_A^B = \int_{1,1}^{1,2} + \int_{1,2}^{2,2} = 11 \cdot \int_1^2 dy + 6 \cdot \int_1^2 dx = 17.$$

А если:

$$\vec{F} = (3y^2, 4x + 8), \text{ т.е. нельзя найти такое } u: dU = (\vec{P}, d\vec{r})$$

$$\int_A^B = \int_{1,1}^{2,2} + \int_{2,1}^{2,2} = 3 \cdot \int_1^2 dx + 16 \cdot \int_1^2 dy = 19.$$

$$\int_A^B = \int_{1,1}^{1,2} + \int_{1,2}^{2,2} = 12 \cdot \int_1^2 dy + 12 \cdot \int_1^2 dx = 24.$$

$19 \neq 24$ , т.е.  $3y^2 dx + (4x + 8)dy$  - не полный дифференциал, а  $3ydx + (3x + 8)dy$  - полный дифференциал.

Выведем условие (в двумерии) того, что сила является потенциальной, тогда

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial F_x}{\partial y} &= \frac{\partial F_y}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} &= [\nabla \times \vec{F}]_z = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

В трёхмерном случае условие потенциальности силы будет выглядеть аналогично, только за счёт того, что у нас не 2 координаты, а 3, надо будет приравнять к 0 разности частных производных проекций силы  $\vec{F}$  для всех пар координат (их всего 3):  $[\nabla \times \vec{F}] = 0$

Про дифференциальный оператор набла немножко написано [здесь](#) и [здесь](#)

## 5.1 Полная работа

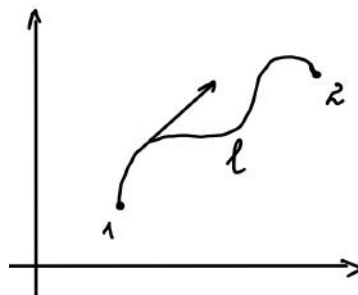


Рис. 5.2: Выполнение работы из точки 1 в точку 2.

$$A = \int_l (\vec{F}, d\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \int_l (\vec{F}_i, d\vec{r}) = \sum_{i=1}^N A_i. \quad (5.3)$$



Под суммой здесь подразумевается:  $\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$ .

Размерность работы:  $[A] = \text{Дж}$ .

Важной характеристикой того, как совершается работа, является **мощность** - скалярная физическая величина, равная скорости совершения работы:  $P = \frac{dA}{dt}$ .

Мощность измеряется в Ваттах.

Обозначение:  $[P] = \text{Вт}$ .

Поговорим еще о способах вычисления работы.

С точки зрения математики  $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$  - криволинейный интеграл второго рода.

Как видно, все зависит от вектора  $\vec{F}$ . Если силы консервативны (потенциальные), то работа не зависит от траектории, зависит лишь от начального и конечного положения материальной точки.

Есть еще диссипативные силы (сила трения) и гироскопические.

Рассмотрим стандартный случай: найти минимальную работу силы  $\vec{F}$ :

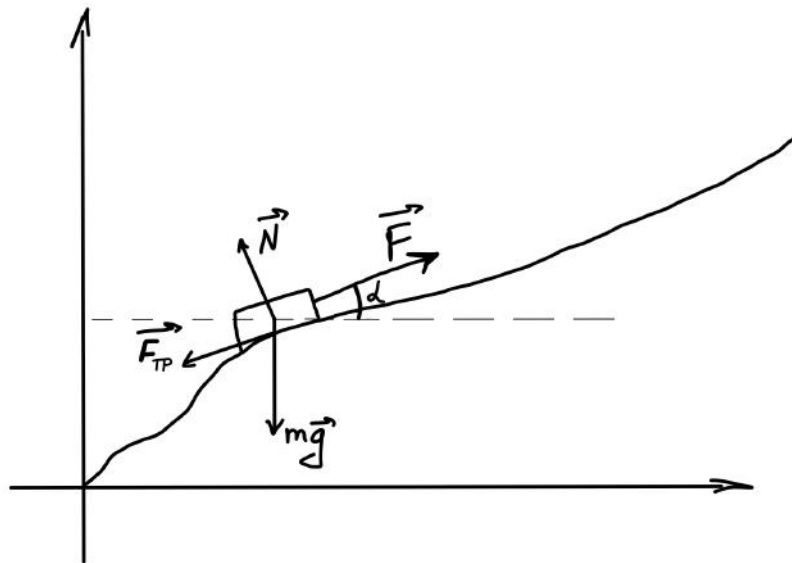


Рис. 5.3: Движение тела по наклонной плоскости.

Первый взгляд: т.к.  $\vec{F} \sim d\vec{r}$ , то есть сонаправлена перемещению  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos(\angle(\vec{F}, d\vec{r})) = F \cdot dS \quad (5.4)$$

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (5.5)$$

Если  $\alpha$  - угол наклона касательной к траектории, то  $dx = dS \cdot \cos \alpha$ ,  $dy = dS \cdot \sin \alpha$ . Запоминаем 2-ой закон Ньютона в мгновенных осях (вдоль касательной и перпендикуляр-

но ей)

$$\begin{cases} ma_\tau = F - F_{\text{тр}} - mg \cdot \sin \alpha \\ ma_n = -mg \cdot \cos \alpha + N \end{cases} \quad (5.6)$$

$$F_{\text{тр}} = \mu(mg \cdot \cos \alpha + ma_n) \quad (5.7)$$

$$F = ma_\tau + mg \cdot \sin \alpha + \mu(mg \cos \alpha + ma_n) \quad (5.8)$$

$$F = mg \sin(\alpha) + \mu mg \cos(\alpha) + \mu m \frac{v^2}{R_{(x,y)}} (\text{знак}), \quad (5.9)$$

(Знак) = -, если дуга выпукла вверх

(Знак) = +, если дуга выпукла вниз

т.е.

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 F dS = \int_1^2 ((mg \sin(\alpha) + \mu mg \cos(\alpha)) + F_{\text{тр. Alt}}) dS = \\ &= \int_1^2 mg \sin(\alpha)(S) dS + \int_1^2 \mu mg \cos(\alpha)(S) dS + \int_1^2 F_{\text{тр. Alt}} dS = \\ &= mg \int_1^2 dy_{=H} + \mu mg \int_1^2 dx_{=L} + \int_1^2 F_{\text{тр. alt}} dS. \end{aligned} \quad (5.10)$$

⇒ Зависит от способа проведения эксперимента.

Если же мы делаем это очень медленно ⇒

$$\boxed{A = mgH + \mu mgL.} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} d\vec{r}\vec{F} &= \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \mu N \cos^2(\alpha) dS + N \cos(\alpha) \sin(\alpha) dS + mg dS \sin(\alpha) + \\ &+ N \mu \sin^2(\alpha) dS - N \cos(\alpha) \sin(\alpha) dS = \\ &= mg dy + \mu N dS = mg dy + \mu mg \cos(\alpha) dS, \end{aligned} \quad (5.12)$$

где  $N = mg \cos(\alpha)$ .

$$\begin{cases} ma_x = F_x - F_{\text{тр}} \cos(\alpha) - N \sin(\alpha) \\ ma_y = F_y + N \cos(\alpha) - F_{\text{тр}} \sin(\alpha) - mg \end{cases}$$

Без ускорения ⇒

$$\begin{cases} F_x = \mu N \cos(\alpha) + N \sin(\alpha), \\ F_y = mg + \mu N \sin(\alpha) - N \cos(\alpha). \end{cases}$$

## 5.2 Кинетическая энергия

Введём величину:  $E_k = K = T = \frac{mv^2}{2}$  – кинетическая энергия материальной точки – скалярная физическая величина, равная половине произведения массы материальной

точки на квадрат скорости её движения.

Зачем вводить такую величину?

Рассмотрим работу суперпозиции произвольных сил по перемещению материальной точки:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 \vec{F} \vec{v} dt = \\
 &= \int_1^2 m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} dt = m \int_1^2 \vec{v} d\vec{v} = \\
 &= m \int_1^2 v dv = m \int_1^2 \frac{dv^2}{2} = \int_1^2 d\frac{mv^2}{2} = \\
 &= \frac{mv^2}{2} \Big|_1^2 = T_2 - T_1.
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Таким образом, суммарная работа сил по перемещению материальной точки равна разности её кинетических энергий.

$$\begin{aligned}
 \vec{V} \cdot \vec{V} &= V^2 \Rightarrow d(\vec{V}, \vec{V}) = \vec{V} d\vec{V} + d\vec{V} \vec{V} = \\
 &= 2(\vec{V}, d\vec{V}) = 2V dV \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \vec{V} \cdot d\vec{V} = V dV.
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

**Кинетическая энергия системы материальных точек** есть сумма кинетических энергий всех материальных точек.

Кинетическая энергия **зависит** от выбора системы отсчёта!

$$T_{\text{системы}} = \sum_{i=1}^N T_i = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2}. \tag{5.15}$$

Напишем закон преобразования кинетической энергии при переходе к другой системе отсчёта:

$K$  и  $K'$ , пусть  $K'$  движется со скоростью  $\vec{V}$  относительно  $K$ ,  $\vec{v}_i$  – скорость  $i$ -ой мат. точки в системе  $K$ ,  $\vec{v}_i'$  – скорость  $i$ -ой мат. точки в системе  $K'$ , тогда  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \vec{v}_i &= \vec{v}_i' + \vec{V} \\
 \Rightarrow \vec{v}_i^2 &= v_i^2 = (\vec{v}_i' + \vec{V})^2 = \\
 &= \vec{v}_i'^2 + 2\vec{v}_i' \vec{V} + \vec{V}^2 = \\
 &= v_i'^2 + V^2 + 2\vec{v}_i' \vec{V}.
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow T_K &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (v_i'^2 + V^2 + 2\vec{v}_i' \vec{V}) = \\
 &= T_{K'} + \frac{MV^2}{2} + \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i' \vec{V} = \\
 &= T_{K'} + \frac{MV^2}{2} + (\vec{P}_{K'}, \vec{V}).
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

### 5.3 Теорема Кёнига

Вспоминаем:

$$\dot{\vec{r}}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}, \quad \vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}, \quad (5.18)$$

Импульс в системе центра масс равен:

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i' = \sum_{i=1}^N m_i [\vec{v}_i - \vec{v}] = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i - M \cdot \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = 0. \quad (5.19)$$

Получаем теорему Кёнига : Полная кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии системы в системе отсчёта центра масс этой системы и кинетической энергии поступательного движения центра масс.

$$T_k = T_{k'} + \frac{MV^2}{2}. \quad (5.20)$$

где  $T_k \geq 0$  - полная кинетическая энергия системы  $k$ ,  $T_{k'}$  - полная кинетическая энергия системы  $k'$ ,  $MV^2/2 \geq 0$  - кинетическая энергия центра масс. Таким образом, кинетическая энергия будет минимальна в системе центра масс.

### 5.4 Потенциальная энергия

В том случае, когда работа выполняется консервативными (потенциальными) силами, она будет равна изменению некоторой функции. Рассмотрим консервативную силу  $\vec{F}$ :

$$\begin{aligned} \delta A &= \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \oint \delta A = 0 \Rightarrow \delta A = dB, \\ \oint dB &= 0 = \int_1^2 dB + \int_2^1 dB = B(2) - B(1) + B(1) - B(2) = 0, \\ \text{т. е. } dB &= \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = (\nabla B, d\vec{r}) = -dU = -(\nabla U, d\vec{r}). \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\boxed{\vec{F} = -\nabla U} \quad (5.22)$$

**Определение :** Потенциальная энергия  $U(\vec{r})$  — скалярная физическая величина, представляющая собой часть полной механической энергии системы ( $E = E_{\text{п}} + E_{\text{к}}$ ), находящейся в поле консервативных сил. Потенциальная энергия зависит от положения материальных точек, составляющих систему, и характеризует работу, совершаемую полем при их перемещении.

Небольшое математическое отступление :  $\nabla$  - векторный дифференциальный оператор набла, над ним обычно вектор не ставят

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

$\vec{F}$  - Потенциальная сила, то есть выражается через  $\nabla$  скалярной функции  $U$  - потенциальной энергии.

Как еще это пояснить:

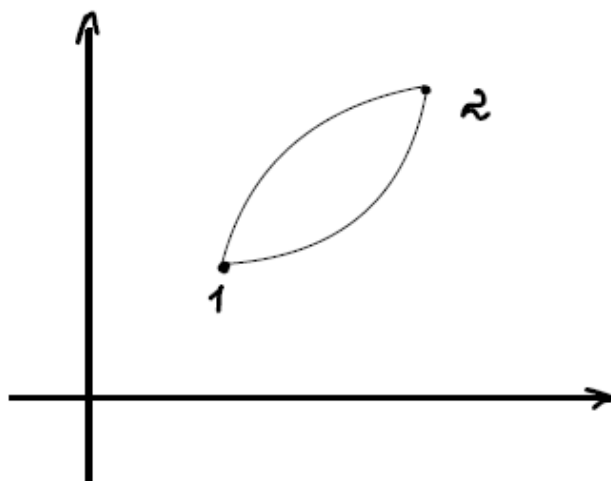


Рис. 5.4: Работа в зависимости от траектории.

$$\begin{aligned}
 A_{12}^{\uparrow} &= A_{12}^{\downarrow}, \\
 A_{12}^{\downarrow} + A_{21}^{\uparrow} &= A_{12}^{\downarrow} + A_{21}^{\downarrow} = A_{12}^{\downarrow} - A_{12}^{\downarrow} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.23}$$

## 5.5 Примеры

### 5.5.1 Работа силы тяжести

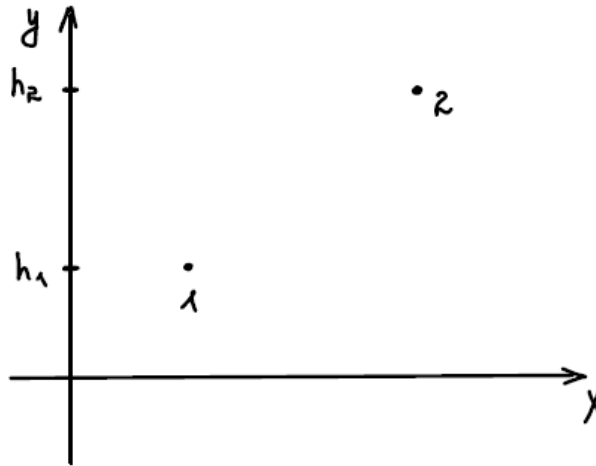


Рис. 5.5: Работа силы тяжести.

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 \delta A &= \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \\
 &= -mg \int_1^2 dy = -mg(h_2 - h_1) = - \int_1^2 dU = -(U_2 - U_1), \\
 U &= mgy + const.
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

### 5.5.2 Работа центральной силы

Центральная сила — такая сила, линия действия которой всегда проходит через какую-то заданную точку (силовой центр). Если обозначить радиус-вектор тела относительно силового центра как  $\vec{r}$ , то центральную силу можно выразить как

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \tag{5.25}$$

Рассмотрим работу такой силы на примере Ньютоновой силы всемирного тяготения между объектами массами  $m$  и  $M$ :

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \tag{5.26}$$

$$\int_1^2 \delta A = \int_1^2 \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\gamma mM \int_1^2 \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r^3}, \tag{5.27}$$

где, при независимости работы от траектории, траекторию можно разложить на часть,

сонаправленную силе ( $\vec{r} \cdot d\vec{r} = r dr$ ), и перпендикулярную ей ( $\vec{r} \cdot d\vec{r} = 0$ ), то есть

$$= -\gamma m M \int_1^2 \frac{r dr}{r^3} = -\gamma m M \int_1^2 \frac{dr}{r^2} \quad (5.28)$$

$$= -\gamma m M \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_1^2 = -\gamma m M \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (5.29)$$

$$U = -\gamma \frac{mM}{r} + \text{const.} \quad (5.30)$$

Для удобства потенциальную энергию бесконечно удалённого от силового центра объекта примем нулевой, что приводит нас к

$$U = -\gamma \frac{mM}{r}. \quad (5.31)$$

## 5.6 Полная механическая энергия

Рассмотрим векторную сумму всех  $N$  сил, действующих на некое тело. Разложим получившуюся равнодействующую силу на консервативную и неконсервативную компоненты  $\vec{F}_\kappa$  и  $\vec{F}_{\text{нк}}$ .

$$\sum_{k=1}^N \vec{F}_k = \vec{F}_\kappa + \vec{F}_{\text{нк}}. \quad (5.32)$$

Тогда работа этих сил при перемещении из некоего положения 1 в положение 2

$$A_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (5.33)$$

$$= \int_1^2 \vec{F}_\kappa \cdot d\vec{r} + \int_1^2 \vec{F}_{\text{нк}} \cdot d\vec{r} \quad (5.34)$$

$$= -(U_2 - U_1) + \int_1^2 \vec{F}_{\text{нк}} \cdot d\vec{r}. \quad (5.35)$$

При этом совершённая работа будет затрачена на изменение кинетической энергии тела,

$$A_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1. \quad (5.36)$$

$$T_2 - T_1 = -(U_2 - U_1) + \int_1^2 \vec{F}_{\text{нк}} \cdot d\vec{r} \quad (5.37)$$

$$(T_2 - T_1) + (U_2 - U_1) = \int_1^2 \vec{F}_{\text{нк}} \cdot d\vec{r} \quad (5.38)$$

$$(T_2 + U_2) - (T_1 + U_1) = \int_1^2 \vec{F}_{\text{нк}} \cdot d\vec{r}. \quad (5.39)$$

$$(5.40)$$

Величину  $T + U$  называют полной механической энергией и обозначают  $E$ , что приводит нас к

$$E_2 - E_1 = \int_1^2 \vec{F}_{\text{нк}} \cdot d\vec{r}. \quad (5.41)$$

**Определение :** Полная механическая энергия - скалярная физическая величина, равная сумме потенциальной и кинетической энергий :  $E = T + U$ .

Стоит заметить, что если в системе действуют лишь консервативные силы, то полная механическая энергия  $E$  сохраняется! Этот так называемый «интеграл движения» очень удобен при рассмотрении конкретных ситуаций.



## Лекция 6.

### Потенциальная энергия. Приложение

Итак, если силы консервативны (т.е. работа не зависит от траектории), то работа таких сил может быть выражена через изменение некой функции - потенциальной энергии.

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz = -dU(x, y, z). \quad (6.1)$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \text{ - частные производные.}$$

$$\text{Короткое обозначение: } \vec{F} = -\nabla U$$

Оператор "набла" или "градиент" показывает направление роста (наискорейшего) у функции. На самом деле, градиент и набла - не одно и то же. Градиент - произведение вектора набла на какое-то скалярное поле, например  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\nabla \varphi$ . Набла - более общее понятие, чем градиент, наблу можно скалярно умножать на векторное поле, тогда получается дифференциальный оператор дивергенция, например  $\text{div } \vec{E} = \nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$  - теорема Гаусса в СИ в вакууме в дифференциальной форме. Более того, наблу можно векторно умножать на какое-то векторное поле, тогда получается дифференциальный оператор ротор, например  $\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  - закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме в СИ

#### Пример.

Сферически симметрический потенциал:  $u = \alpha \cdot r^k$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\nabla u = -\alpha \cdot k \cdot r^{k-2} (x \cdot \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z).$$

$$\begin{aligned} -F_x &= \frac{\partial}{\partial x}(\alpha r^k) = \frac{\partial}{\partial x} \alpha (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2}} = \alpha \cdot k \cdot r^{k-1} \frac{\partial r}{\partial x} = \alpha k \cdot r^{k-1} \cdot \frac{x}{r} = \\ &= \alpha k \cdot x r^{k-2}. \end{aligned}$$

$$\vec{F} = -\nabla u = -\alpha k r^{k-2} \vec{r} = -\alpha k r^{k-1} \frac{\vec{r}}{r} = -\alpha k r^{k-1} \vec{e}_r.$$

## 6.1 Интегрирование уравнение движения в случае потенциальных сил

В некоторых случаях можно извлечь полезную информацию из уравнения движения без его полного решения.

Пусть  $U(\vec{r})$  – достаточно гладкая.

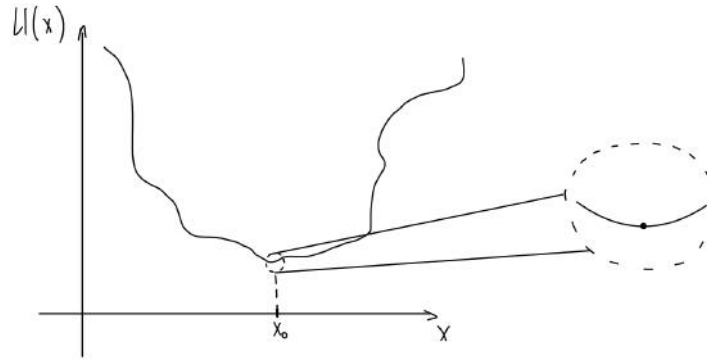


Рис. 6.1: Детализация минимума графика гладкой функции.

$$U(\vec{r}) \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = -\nabla U \Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}. \quad (6.2)$$

(Мы решили упростить себе задачу и вместо того, чтобы рассматривать трёхмерный случай, рассматриваем только одномерный, поэтому можем заменить наблу на частную производную потенциальной энергии по  $x$ )

В окрестности  $(\cdot) x_0$ :

$$U(x) = U(x_0) + \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3). \quad (6.3)$$

(Используется разложение функции в ряд Тейлора в окрестности  $x_0$ )

Если мы рассмотрим систему в окрестности минимума, то:  $\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=x_0} = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{1}{2!} \cdot \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^2 \Rightarrow \\ U(x) &\approx \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 \Rightarrow m\ddot{x} = -k(x - x_0). \end{aligned} \quad (6.4)$$

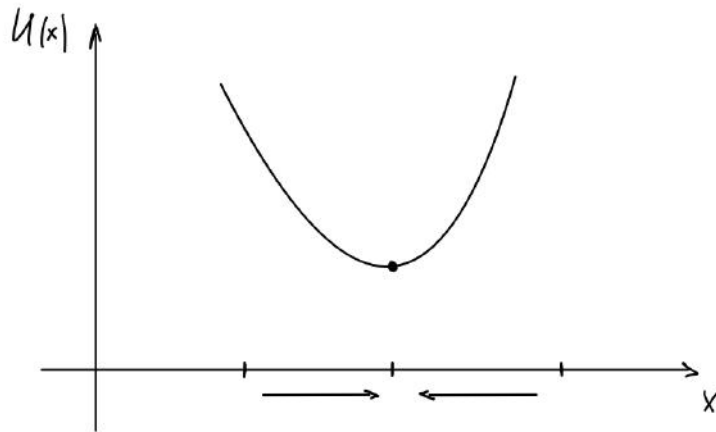
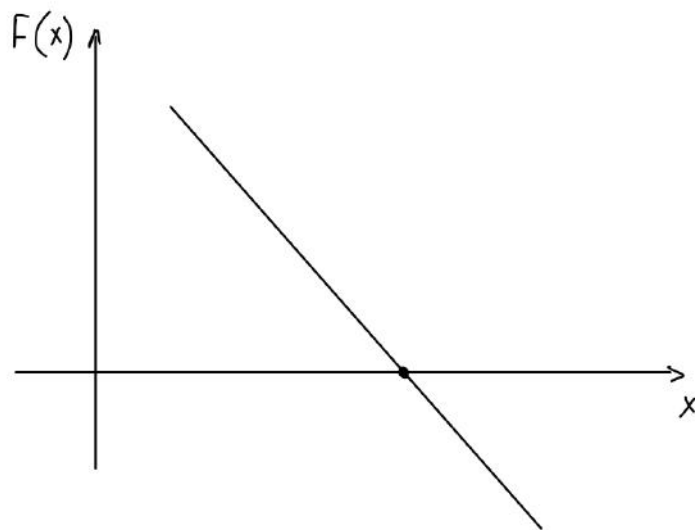


Рис. 6.2: График зависимости потенциальной энергии от координаты

$$-U'(x) = F(x) \quad (6.5)$$

Рис. 6.3: График зависимости  $F(x)$  от  $x$ 

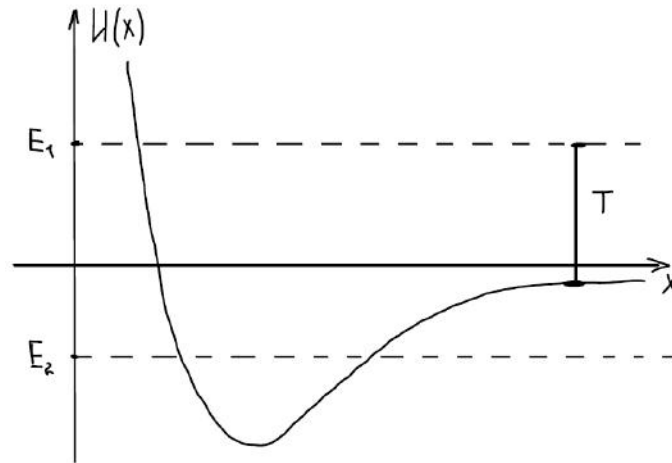
В системе задана полная механическая энергия. Пусть у материальной точки будет энергия  $E$ , а в системе действуют только консервативные силы, то есть  $E = T + U(x)$ . Так как  $T \geq 0 \Rightarrow E \geq U(x)$  - получаем неравенство на  $x$ .

Если  $U(x) \leq E$  для любого  $x$ , то движение будет инфинитным;  
Если же есть какой-то  $[a, b]$ , то движение будет финитным.

$E_1$  – инфинитное,  $E_2$  – финитное.

Рассмотрим уравнение движения:

$$m \frac{d}{dt} v_x = - \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (6.6)$$

Рис. 6.4: Финитное (при  $E_2$ ) и инфинитное (при  $E_1$ ) движения.

однако, можем использовать интеграл движения:

$$E = U(x) + T. \quad (6.7)$$

$$m \frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = E, \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 &= E - U(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dx}{dt} &= \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))}} &= \int_0^{T/2} dt, \end{aligned} \quad (6.9)$$

$x_2, x_1$  – точки поворота  $U(x_{1,2}) = E$ .

Либо для произвольного пр-ка:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))}} = t_2 - t_1. \quad (6.10)$$

Таким образом, период финитного движения:

$$T = 2 \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \quad (6.11)$$

Самый простой пример:

$$\begin{aligned} E &= \frac{kx_{\max}^2}{2}, \quad E - U(x) = \frac{k}{2}(x_{\max}^2 - x^2), \\ \Rightarrow T &= 2 \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{x_{\max}^2 - x^2}} \sqrt{\frac{2}{k}} \end{aligned} \quad (6.12)$$

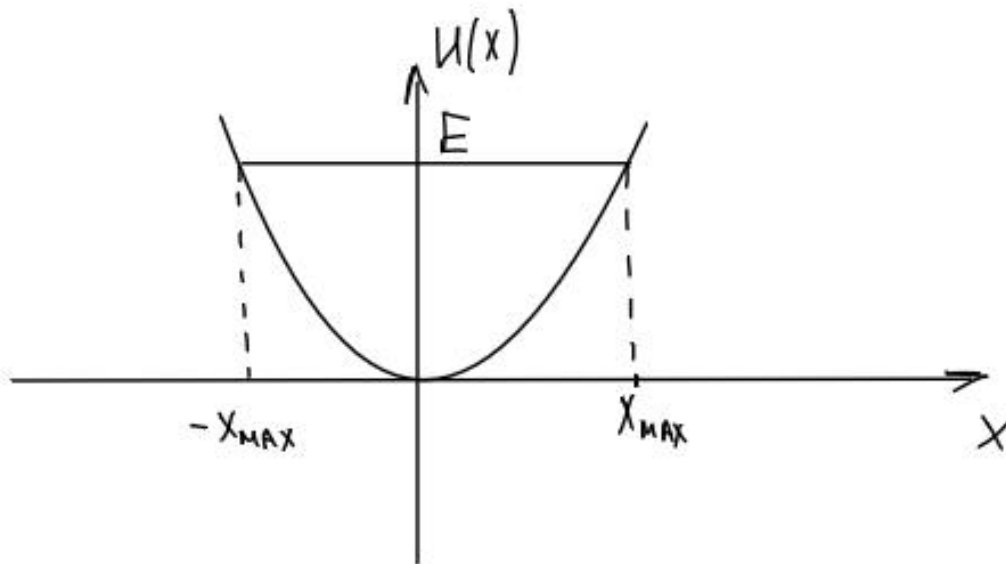


Рис. 6.5: Зависимость энергии от координаты.

Пусть  $x = x_{\max} \cos \alpha \Rightarrow dx = -x_{\max} \sin \alpha d\alpha$ :

$$2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{x_{\max}^2 - x^2}} \sqrt{\frac{2}{k}} = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \left( - \int_{\pi}^0 \frac{x_{\max} \sin \alpha d\alpha}{x_{\max} \sin \alpha} \right) = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (6.13)$$

## 6.2 Столкновение частиц

Бывают упругие и неупругие столкновения. При упругом столкновении сохраняется механическая энергия. При неупругих - не сохраняется, переходя в другие виды энергии, например, в тепловую (внутреннюю). В процессе столкновения не рассматривают изменение потенциальной энергии внешних полей, более того, если мы не сталкиваемся с аномальными поведением силы, то можно считать, что импульс системы сохраняется.

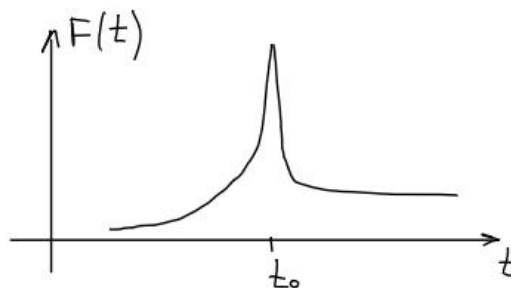


Рис. 6.6: Аномальное поведение силы.

$t_0$  - момент столкновения,  $F(t) \sim \delta(t)$

## Упругое столкновение двух материальных точек

Пусть скорости  $v_{11}, v_{21}$  - скорости до столкновения, а скорости  $v_{12}, v_{22}$  - скорости после столкновения. Запишем закон сохранения импульса и закон сохранения энергии:

$$\begin{cases} m_1 v_{11} + m_2 v_{21} = m_1 v_{12} + m_2 v_{22}, \\ m_1 v_{11}^2 + m_2 v_{21}^2 = m_1 v_{12}^2 + m_2 v_{22}^2. \end{cases}$$

Постановка задачи: пусть нам известны  $v_{11}, v_{21}$ , следовательно должны быть две пары решений, одно из которых тривиальное:  $v_{12} = v_{11}$  и  $v_{22} = v_{21}$ . Теперь находим другое (физическое):

$$\begin{aligned} \begin{cases} m_1(v_{11} - v_{12}) = m_2(v_{22} - v_{21}) \\ m_1(v_{11}^2 - v_{12}^2) = m_2(v_{22}^2 - v_{21}^2) \end{cases} &\Rightarrow \\ \Rightarrow m_1(v_{11} - v_{12})(v_{11} + v_{12}) = m_2(v_{22} - v_{21})(v_{22} + v_{21}) &\Rightarrow \\ \Rightarrow v_{11} + v_{12} = v_{22} + v_{21}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Отсюда:

$$v_{21} = v_{11} + v_{12} - v_{22} \text{ или } v_{22} = (v_{11} - v_{21}) + v_{12}. \quad (6.15)$$

Подставим  $v_{22}$  в закон сохранения импульса:

$$\begin{aligned} m_1 v_{11} + m_2 v_{21} &= m_1 v_{12} + m_2 [(v_{11} - v_{21}) + v_{12}] \\ v_{12} &= \frac{m_1 v_{11} + 2m_2 v_{21} - m_2 v_{11}}{m_1 + m_2} = 2V_{c.m.} - v_{11}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$v_{12} = 2V_{c.m} - v_{11} \quad (6.17)$$

$$v_{22} = 2V_{c.m} - v_{21}. \quad (6.18)$$

$$(6.19)$$

Если бы всё это время мы работали в системе отсчёта, связанной с центром масс, то, очевидно, выполнялось бы

$$\begin{aligned} v'_{12} &= -v'_{11} \\ v'_{22} &= -v'_{21}. \end{aligned}$$

Возьмём наше решение для общего случая

$$v_{12} = 2 \frac{m_1 v_{11} + m_2 v_{21}}{m_1 + m_2} - v_{11} \quad (6.20)$$

$$v_{22} = 2 \frac{m_1 v_{11} + m_2 v_{21}}{m_1 + m_2} - v_{21}, \quad (6.21)$$

После чего рассмотрим некоторые частные ситуации:

1. Рассмотрим столкновение тела с неподвижной стенкой очень большой массы.

$$\begin{aligned} v_{21} &= 0 \\ m_2 &\rightarrow \infty. \\ V_{c.m} &\approx 0 \\ v_{12} &= -v_{11} \\ v_{22} &= 0. \end{aligned}$$

И правда — после столкновения сама стенка не сдвинулась, а вот небольшое тело отразилось с той же по величине скоростью.

2. Рассмотрим столкновение одинаковых частиц.

$$\begin{aligned}
 m_1 &= m_2 \\
 v_{11} &= -v_{21} \\
 V_{c.m} &= 0 \\
 v_{21} &= -v_{11} \\
 v_{22} &= -v_{21}
 \end{aligned}
 \tag{6.22}$$

### Упругое рассеяние

Если речь идёт о рассеянии двух частиц, то задачу достаточно рассмотреть на плоскости. Для лучшего понимания физического смысла воспользуемся системой отсчёта, связанной с центром масс системы. Её общий импульс в такой системе будет нулевой, следовательно

$$\begin{aligned}
 \vec{p}_{1c} + \vec{p}_{2c} &= 0 \\
 \vec{p}_{11c} &= -\vec{p}_{21c} \\
 \vec{p}_{12c} &= -\vec{p}_{22c}
 \end{aligned}$$

В отсутствии внешних сил общая кинетическая энергия системы сохранится.

$$T_{11c} + T_{21c} = T_{12c} + T_{22c} \tag{6.23}$$

$$\frac{\vec{p}_{11c}^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_{21c}^2}{2m_2} = \frac{\vec{p}_{12c}^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_{22c}^2}{2m_2} \tag{6.24}$$

$$\frac{\vec{p}_{11c}^2}{2m_1} + \frac{(-\vec{p}_{11c})^2}{2m_2} = \frac{\vec{p}_{12c}^2}{2m_1} + \frac{(-\vec{p}_{12c})^2}{2m_2} \tag{6.25}$$

$$\vec{p}_{11c}^2 \left( \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right) = \vec{p}_{12c}^2 \left( \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right) \tag{6.26}$$

$$\vec{p}_{11c}^2 = \vec{p}_{12c}^2 \tag{6.27}$$

Из чего, довольно очевидно,

$$\begin{aligned}
 |\vec{p}_{11c}| &= |\vec{p}_{12c}| \\
 |\vec{p}_{21c}| &= |\vec{p}_{22c}| \\
 |\vec{v}_{11c}| &= |\vec{v}_{12c}| \\
 |\vec{v}_{21c}| &= |\vec{v}_{22c}|
 \end{aligned}$$

Рассмотрим  $m_1 < m_2$ :

Чтобы воспользоваться нашими предыдущими выводами, разложим скорость налетающей частицы на скорость центра масс и скорость в системе центра масс.

$$\begin{aligned}
 \vec{v}_c &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{11} \\
 \vec{v}_{11} &= \vec{v}_c + \vec{v}_{11c}
 \end{aligned}
 \tag{6.28}$$

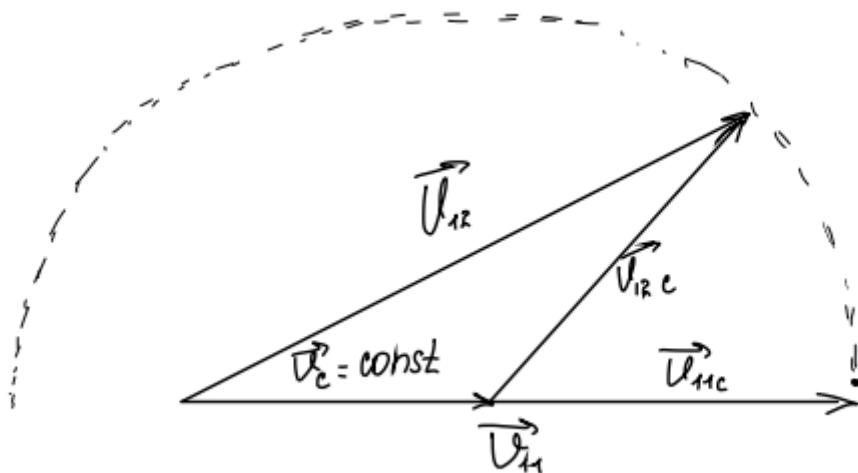


Рис. 6.7: Проекции скоростей в лабораторной системе отсчёта и системе центра масс.

Отсюда выводим, что

$$\vec{v}_{11c} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_{11}$$

$$\vec{v}_{21c} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{11}$$

При этом рассеяние может происходить на любой угол! Чтобы рассмотреть различные ситуации, достаточно «мысленно повернуть» вектор и убедиться, что все такие случаи удовлетворяют записанным уравнениям.

Рассмотрим  $m_1 > m_2$ :

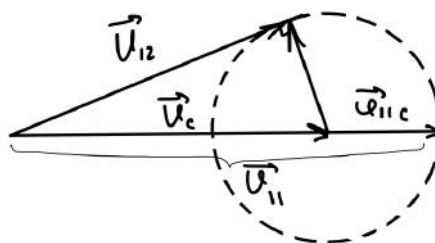


Рис. 6.8: Проекции скоростей.

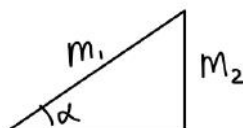


Рис. 6.9: Прямоугольный треугольник.

$$\sin \alpha = \frac{m_2}{m_1}, \text{ где } \alpha - \text{максимальный угол}$$



Рассмотрим случай, когда  $m_1 = m_2$

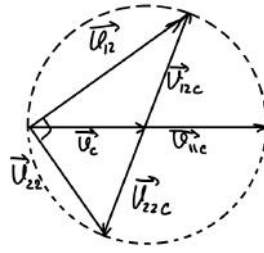


Рис. 6.10: Проекции скоростей.

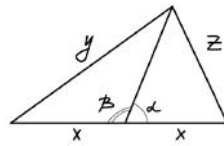


Рис. 6.11: Треугольник с медианой.

$$\begin{cases} y^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos \beta \\ z^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 2x^2(1 - \cos \beta) \\ z^2 = 2x^2(1 - \cos \alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 2x^2(1 + \cos \alpha) \\ z^2 = 2x^2(1 - \cos \alpha) \end{cases}$$

Проверка (должно быть  $y^2 + z^2 = (2x)^2$ , т.к. треугольник - прямоугольный):  
 $y^2 + z^2 = 2 \cdot 2x^2 \Rightarrow$  т.е. ✓

### Неупругие столкновения.

Рассмотрим пример слипания:

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{u} \Rightarrow \vec{u} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

т.к.  $T = T_{c.m.} + \frac{MV^2}{2}$ , где  $V = u$ .

т.е. будет двигаться со скоростью центра масс.

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{m_1 \cdot V_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot V_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) \cdot u^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{m_1 m_2 v_1^2 + m_1 m_2 v_2^2 - 2m_1 m_2 \vec{v}_1 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2. \end{aligned}$$

А чему равна эта величина? С чем она совпадает?

До удара:  $T_0 = T_{c.m.0} + \frac{Mu^2}{2}$  (неравные нулю)

После:  $T = T_{c.m.} + \frac{Mu^2}{2}$ , где  $T_{c.m.} = 0$ .

Отсюда видна энергия, которая может перейти в тепло.

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u},$$

$$\begin{aligned} T_{c.m} &= \frac{m_1 \vec{v}_1'^2}{2} + \frac{m_2 \vec{v}_2'^2}{2} = \frac{m_1}{2} (\vec{v}_1 - \vec{u})^2 + \frac{m_2}{2} (\vec{v}_2 - \vec{u})^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left[ m_1 \left( \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_1 - m_1 \vec{v}_1 - m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \right)^2 + m_2 \left( \frac{m_1 \vec{v}_2 + m_2 \vec{v}_2 - m_1 \vec{v}_1 - m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ m_1 \left( \frac{m_2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2} \right)^2 + m_2 \left( \frac{m_1 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot (m_2 + m_1) (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 = \frac{1}{2} \mu (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

То же самое.

Таким образом, отдаётся вся кинетическая энергия в системе центра масс.

## Лекция 7.

### Момент количества движения

Возникновение момента импульса обычно происходит, когда речь заходит о вращательном движении. Наивное определение. Рассмотрим материальную точку, которая вращается по окружности с постоянной по модулю скоростью ( $|\vec{v}| = \text{const}$ ):

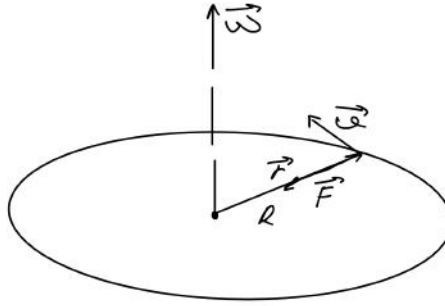


Рис. 7.1: Вращение материальной точки.

$$\begin{aligned} F_n &= ma_n & F_\tau &= F \\ a_n &= \frac{v^2}{R} = \omega^2 R & mR^2 \frac{d\omega}{dt} &= F \cdot R \end{aligned}$$

$$L = m\omega R^2 = mvR. \quad (7.1)$$

Прежде, чем дать полное определение нам надо разобраться с векторным произведением  $\vec{c} : \vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{c} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x(a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) + (-1)\vec{e}_y(a_x \cdot b_z - a_z \cdot b_x) + \vec{e}_z(a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x). \quad (7.2)$$

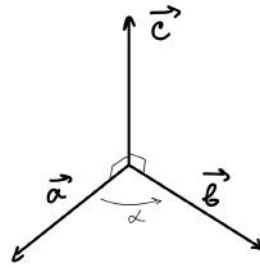


Рис. 7.2: Иллюстрация векторного умножения угловой скорости и радиуса кривизны.

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin \alpha. \quad (7.3)$$

**Важное замечание :** вектор  $\vec{c}$  перпендикулярен векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , однако это всё ещё не определяет направление вектора  $\vec{c}$  - он может смотреть как вверх, так и вниз. Направление вектора  $\vec{c}$  определяется по правилу правого винта : если правый винт вращать по направлению от вектора  $\vec{a}$  к вектору  $\vec{b}$ , то его поступательное движение укажет на направление результирующего вектора (правый винт для себя легко представить с помощью правой руки)

Например, при помощи  $[\vec{\omega} \times \vec{r}]$  можно записать скорость через  $\vec{\omega}$  и  $\vec{R}$  (радиус кривизны):  
 $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$ .

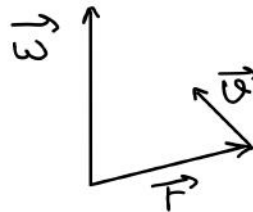


Рис. 7.3: Результат векторного умножения.

## 7.1 Момент силы

**Определение :** Момент силы - векторная физическая величина, равная векторно-му произведению вектора, проведённого от оси вращения к точке, к которой приложена сила, на вектор этой силы :

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}].$$

Посмотрим на него сверху:

$$|\vec{M}| = M = |\vec{F}||\vec{r}| \cdot \sin \alpha; \quad (7.4)$$

$$|\vec{r}| = r; |\vec{r}| \cdot \sin \alpha = l - \text{плечо}. \quad (7.5)$$

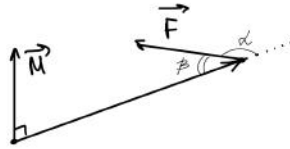


Рис. 7.4: Вид сбоку.

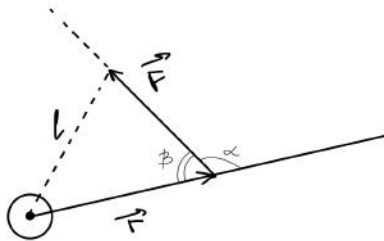


Рис. 7.5: Вид сверху.

Момент силы является аддитивной величиной:

Момент сил системы материальных точек равен сумме моментов сил для каждой материальной точки:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (7.6)$$

Запишем правило преобразования момента силы при переходе из одной системы отсчёта в другую:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{R}. \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \sum_i \left( \vec{r}_i' + \vec{R} \right) \times \vec{F}_i = \\ &= \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i + \vec{R} \times \sum_i \vec{F}_i = \\ &= \vec{M}' + \vec{R} \times \vec{F}, \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (7.8)$$

$\vec{F}$  – равнодействующая всех сил.

**Небольшое замечание :** в векторном произведении можно раскрывать скобки, однако нельзя менять порядок множителей, так как это приведёт к изменению знака векторного произведения

## 7.2 Момент импульса

**Момент импульса материальной точки** - векторная физическая величина, равная векторному произведению радиус вектора точки, проведённого от оси вращения, на вектор импульса этой точки :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (7.9)$$

Для системы материальных точек:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i. \quad (7.10)$$

Как преобразуется момент импульса (если  $\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{R}$ ):

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i (\vec{r}_i' + \vec{R}) \times m_i (\vec{v}_i' + \vec{V}) = \\ &= \sum_i m_i \vec{r}_i' \times \vec{v}_i' + \sum_i m_i \vec{r}_i' \times \vec{V} + \sum_i m_i \vec{R} \times \vec{v}_i' + \sum_i m_i \vec{R} \times \vec{V} = \\ &= \vec{L}' + (-\vec{V}) \times \sum_i m_i \vec{r}_i' + \vec{R} \times \sum_i m_i \vec{v}_i' + M \vec{R} \times \vec{V} = \\ &= \vec{L}' + M[\vec{R}'_{c.m.} \times \vec{V}] + \vec{R} \times \vec{p}' + M \vec{R} \times \vec{V}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$\vec{R}'_{c.m.} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i'}{M} - \text{по определению радиус-вектора центра масс}$$

Выражение упрощается для системы центра масс (с.м.):

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_{c.m.} + M \vec{R}_{c.m.} \times \vec{V}_{c.m.},} \quad (7.12)$$

$$\vec{p}' = 0, \quad \vec{R}'_{c.m.} = 0.$$

Получим связь между  $\vec{L}$  и  $\vec{M}$ :

1. Для одной материальной точки:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} \vec{r} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \\ &= \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

$\vec{v} \parallel m\vec{v}$ , поэтому  $\vec{v} \times m\vec{v} = 0$  (синус угла между сонаправленными векторами = 0)

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$  - второй закон Ньютона в импульсной форме

2. Для системы материальных точек:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \left[ \frac{d}{dt} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i + \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right] = \\ &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{M}_i. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (7.15)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{r}_i = \vec{v}_i \parallel m\vec{v}_i \Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = 0$$

**Закон сохранения момента импульса (ЗСМИ):** момент импульса системы материальных точек сохраняется, если на систему не действуют внешние силы, либо суммарный

момент внешних сил равен нулю.

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \left( \vec{F}_i^{ext} + \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ki} \right) = \\
 &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} + \sum_{i, k \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ki} = \\
 &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} + \sum_{i, k > i} (\vec{r}_i - \vec{r}_k) \times \vec{F}_{ki} = \\
 &= \sum_i \vec{M}_i^{ext}. \quad \blacksquare
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

Как мы можем заметить, суммарный момент импульса системы меняется только при наличии момента внешних сил  $\vec{M}_i^{ext}$ .

Пример: посчитаем предыдущее выражение для случая трёх сил ( $N = 3$ ), тогда:

$$\sum_{i, k \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ki} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{31} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{32} + \vec{r}_3 \times \vec{F}_{13} + \vec{r}_3 \times \vec{F}_{23} =$$

т.к.  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$  и т.д., то

$$= (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_{12} + (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_{13} + (\vec{r}_3 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{23} = 0. \tag{7.17}$$

Данный закон сохранения связан с особенностью пространства, называемой **изотропностью**.

Интересен случай:  $\vec{F} \sim \vec{r} \Rightarrow \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$ .

Рассмотрим случай движения вокруг фиксированной оси: найдём проекцию момента импульса вдоль оси  $OZ$ :

$$L_z = (\vec{r} \times \vec{p})_z = ((\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}) \times (\vec{p}_{\parallel} + \vec{p}_{\perp}))_z = (\vec{r}_{\perp} \times \vec{p}_{\perp})_z = L_z. \tag{7.18}$$

Если же точка вращается вокруг оси  $OZ$ :

$$\begin{aligned}
 L_z &= R \cdot mv = \omega R^2 \cdot m \\
 \frac{dL_z}{dt} &= mR^2 \cdot \frac{d\omega}{dt} = F \cdot R \cdot \sin(\alpha).
 \end{aligned} \tag{7.19}$$

момент инерции:  $I = mR^2$ .

## 7.3 Движение в центральном поле (Кулоновский и гравитационный потенциал)

Рассмотрим рассеяние  $\alpha$  - частиц (ядра гелия) на ядрах золота. (Эрнест Резерфорд 1911 год, опыт по определению структуры атома.)

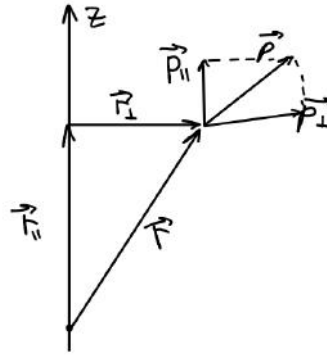


Рис. 7.6: Движение вокруг фиксированной оси.

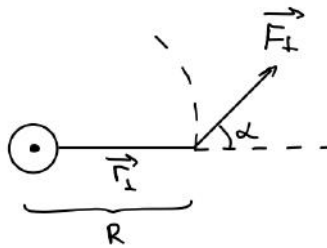


Рис. 7.7: Вид сверху.

### 7.3.1 Рассеяние в кулоновском поле

Анализ такой задачи позволяет объяснить проведенный эксперимент Резерфорда в 1911 г. На неподвижные мишени (ядра атомов золота) налетают положительные частицы (более лёгкие) ядра атомов гелия ( $\alpha$  - частицы). В силу симметрии достаточно рассмотреть данную задачу в плоскости (переходим в полярную систему координат).

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{\vec{r}}, \vec{r} = \rho \vec{e}_\rho, \\ \vec{v} &= \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi\end{aligned}\quad (7.20)$$

Мы уже знаем, что

$$\begin{aligned}\vec{M} &= [\vec{r} \times \vec{F}] = 0 \Rightarrow \vec{L} = const, \\ \vec{L} &= L_z \cdot \vec{e}_z,\end{aligned}$$

$$\vec{L} = [\vec{r} \times m\vec{v}] = [\rho \vec{e}_\rho \times m(\dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi)] = \rho^2 m \dot{\varphi} [\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\varphi] = \rho^2 m \dot{\varphi} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 m \dot{\varphi} \vec{e}_z, \quad (7.21)$$

$$\text{Где } \rho^2 \dot{\varphi} m = L_z.$$

$$L_z = m \rho^2 \dot{\varphi} = const = L_z(0). \quad (7.22)$$



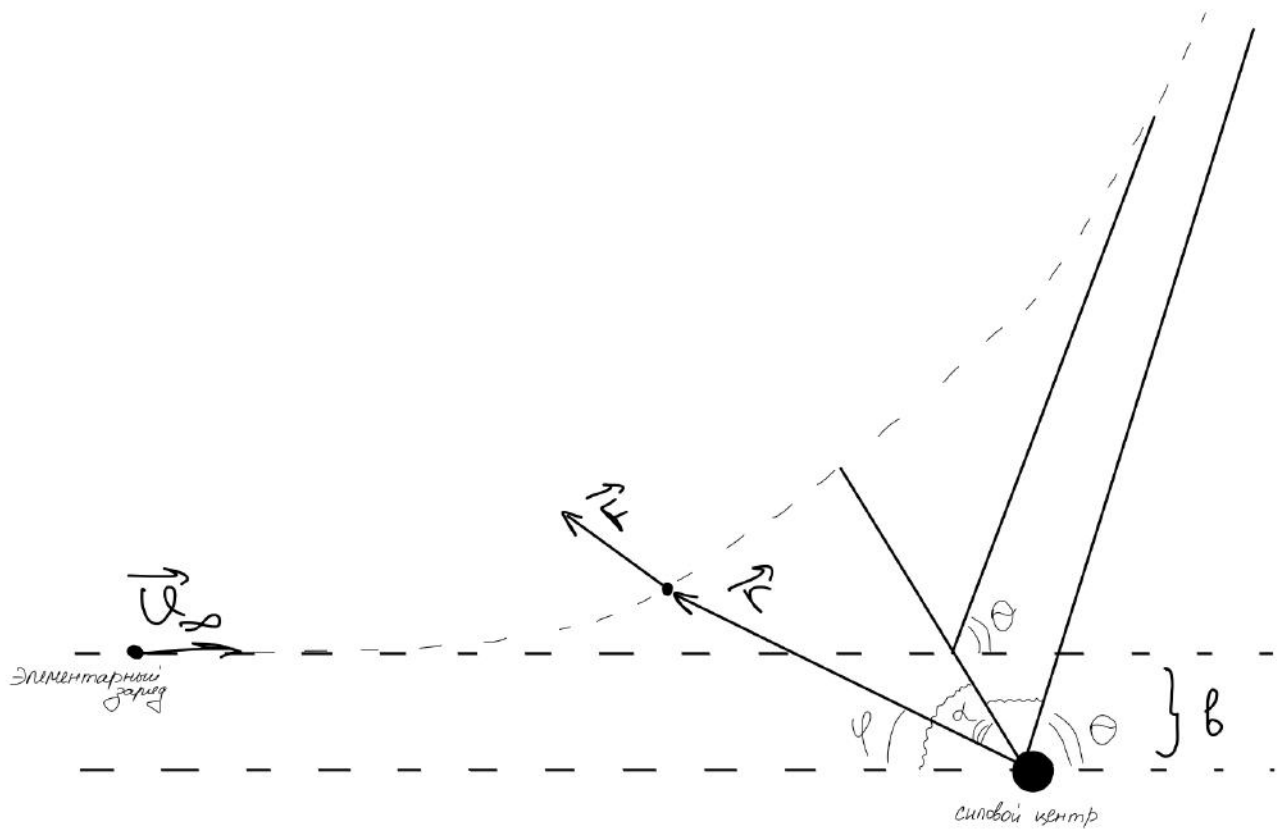


Рис. 7.8: Рассеяние в кулоновском поле.

Однако более корректная формула через  $\mu$ :

$$\mu = \frac{m \cdot M}{m + M} \Rightarrow \mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F} = \vec{F}_{12}. \quad (7.23)$$

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (7.24)$$

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] = 0, \quad (7.25)$$

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \mu \vec{v}], \quad (7.26)$$

$$\dot{\vec{L}} = [\dot{\vec{r}} \times \mu \vec{v}] + [\vec{r} \times \mu \dot{\vec{v}}] = [\vec{r} \times \vec{F}] = 0. \quad (7.27)$$

$$L_z = \mu \rho^2 \dot{\varphi} = \text{const} = L_z(0)$$

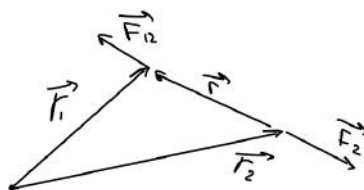


Рис. 7.9: Задача двух тел.

$$\begin{aligned}
\sin \beta &= \sin \varphi, \\
|L| &= \mu |\vec{v}_\infty| |\vec{r}| \sin \beta = \mu \sin \varphi |\vec{r}| \cdot v_\infty = \mu v_\infty \cdot b \\
\Rightarrow L_z(0) &= \mu v_\infty \cdot b = \mu \rho^2 \dot{\varphi} \\
\Rightarrow \boxed{\rho^2 \cdot \dot{\varphi} = v_\infty \cdot b}.
\end{aligned} \tag{7.28}$$

Внимательно рассмотрев геометрическое построение, запишем условие на угол рассея-

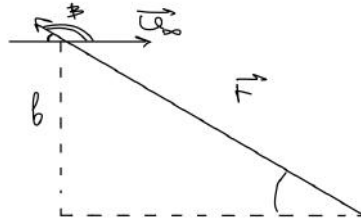


Рис. 7.10: ?.

ния, обозначив его  $\theta$  (для простоты вычислений возьмём его ориентированным, чтобы не рассматривать несколько случаев):

$$\sim + \sim + \theta = \pi, \tag{7.29}$$

$$\alpha + \varphi = \sim = \frac{1}{2}(\pi - \theta). \tag{7.30}$$

Из чего чисто алгебраически

$$\alpha = \frac{1}{2}(\pi - \theta) - \varphi. \tag{7.31}$$

Вернёмся к следствию из II закона Ньютона,

$$\mu \frac{d\vec{v}}{dt} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \tag{7.32}$$

$$\mu \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r} \tag{7.33}$$

$$\text{где } \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{v} = \vec{v} \cdot d\vec{v} \tag{7.34}$$

$$\mu \vec{v} \cdot d\vec{v} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r} \tag{7.35}$$

$$\mu \int v dv = k \int \frac{q_1 q_2}{r^2} dr \tag{7.36}$$

$$\frac{\mu v^2}{2} = -k \frac{q_1 q_2}{r} + \text{const} \tag{7.37}$$

$$\frac{\mu v^2}{2} + k \frac{q_1 q_2}{r} = \text{const}. \tag{7.38}$$

В ходе вывода мы пользовались тем, что  $\vec{r} d\vec{r} = r dr$ , покажем это : ( $\vec{v} d\vec{v} = v dv$  - аналогично )

$$(\vec{r}, \vec{r}) = r^2$$

$$(\vec{r}, \vec{dr}) + (\vec{dr}, \vec{r}) = 2rdr$$

$$(\vec{r}, \vec{dr}) = rdr$$

Если теперь рассмотреть величину  $\vec{p} = \mu\vec{v}$  много до рассеяния и много после рассеяния, то понятно, что второе слагаемое в уравнении 7.38 будет околонулевым (так как расстояние будет очень большим), то есть

$$\frac{\mu v_\infty^2}{2} = \text{const.} \quad (7.39)$$

$$|\vec{p}_{-\infty}| = |\vec{p}_{+\infty}| = p_\infty = \mu v_\infty = \text{const.} \quad (7.40)$$

Чтобы рассмотреть изменение  $\vec{p}$  за всё время рассеяния, достаточно вывести  $\Delta\vec{p} = \vec{p}_{+\infty} - \vec{p}_{-\infty}$ .

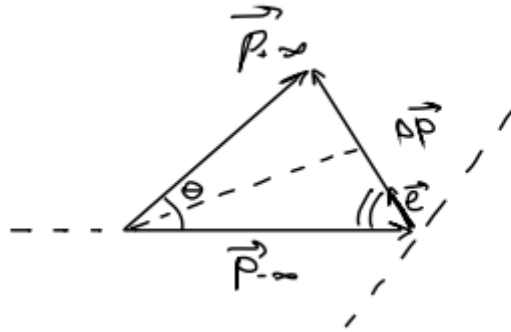


Рис. 7.11: Геометрическое построение векторной разности  $\vec{p}_{+\infty}$  и  $\vec{p}_{-\infty}$

$$|\Delta\vec{p}| = 2\mu v_\infty \sin \frac{\theta}{2}. \quad (7.41)$$

С другой стороны, также из II закона Ньютона следует

$$\Delta\vec{p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F} dt. \quad (7.42)$$

Обозначим направление вектора  $\Delta\vec{p}$  как  $\vec{e}_{\Delta p} = \frac{\Delta\vec{p}}{|\Delta\vec{p}|}$ , тогда

$$|\Delta\vec{p}| = \Delta\vec{p} \cdot \vec{e}_{\Delta p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F} \cdot \vec{e}_{\Delta p} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F \cos \alpha dt = kq_1 q_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\rho^2} \cos \left( \frac{1}{2}(\pi - \theta) - \varphi \right) = (*) \quad (7.43)$$

— перейдём от рассмотрения движения во времени к рассмотрению движения в зависимости от угла  $\varphi$ : очевидно, что угол за всё время изменится от 0 до  $\pi - \theta$ ; при этом

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_\infty b}{\rho^2} \quad (7.44)$$

$$\frac{dt}{\rho^2} = \frac{d\varphi}{v_\infty b} \quad (7.45)$$

$$\begin{aligned}
(*) &= kq_1q_2 \int_0^{\pi-\theta} \frac{d\varphi}{v_\infty b} \cos \left( \frac{1}{2}(\pi - \theta) - \varphi \right) \\
&= \frac{kq_1q_2}{v_\infty b} \int_0^{\pi-\theta} d\varphi \cos \left( \frac{1}{2}(\pi - \theta) - \varphi \right) \\
&= \frac{kq_1q_2}{v_\infty b} \left( -\sin \left( \frac{1}{2}(\pi - \theta) - \varphi \right) \right) \Big|_0^{\pi-\theta}
\end{aligned} \tag{7.46}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{kq_1q_2}{v_\infty b} \left[ \left( -\sin \left( \frac{1}{2}(\pi - \theta) - (\pi - \theta) \right) \right) - \left( -\sin \left( \frac{1}{2}(\pi - \theta) - 0 \right) \right) \right] \\
&= \frac{kq_1q_2}{v_\infty b} \left[ \left( -\sin \left( -\frac{1}{2}(\pi - \theta) \right) \right) - \left( -\sin \left( \frac{1}{2}(\pi - \theta) \right) \right) \right] \\
&= \frac{kq_1q_2}{v_\infty b} \left[ \sin \left( \frac{1}{2}(\pi - \theta) \right) + \sin \left( \frac{1}{2}(\pi - \theta) \right) \right] \\
&= \frac{kq_1q_2}{v_\infty b} \cdot 2 \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = 2 \frac{kq_1q_2}{v_\infty b} \cos \frac{\theta}{2},
\end{aligned} \tag{7.47}$$

$$|\Delta \vec{p}| = 2 \frac{kq_1q_2}{v_\infty b} \cos \frac{\theta}{2}. \tag{7.48}$$

Получив два выражения для величины вектора  $\Delta \vec{p}$ , мы можем просто приравнять их:

$$2\mu v_\infty \sin \frac{\theta}{2} = 2 \frac{kq_1q_2}{v_\infty b} \cos \frac{\theta}{2} \tag{7.49}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{kq_1q_2}{\mu b v_\infty^2}}. \tag{7.50}$$

Важной характеристикой рассеяния является величина  $d\sigma$  - эффективное сечение рассеяния, определяемого как:

$$d\sigma = \frac{dN}{n},$$

- где  $dN$  - число частиц, рассеиваемых в единицу времени на углы  $\theta$  до  $\theta + d\theta$ ,  $n$  - число частиц, пролетающих через единичную площадку поперечного сечения пучка в единицу времени.

По размерности это площадь. Между углом рассеяния  $\theta$  и прицельным расстоянием  $b$  есть связь!

$$\begin{aligned}
\Rightarrow dN &= n \cdot 2\pi b db, \\
\Rightarrow d\sigma &= 2\pi b db.
\end{aligned} \tag{7.51}$$

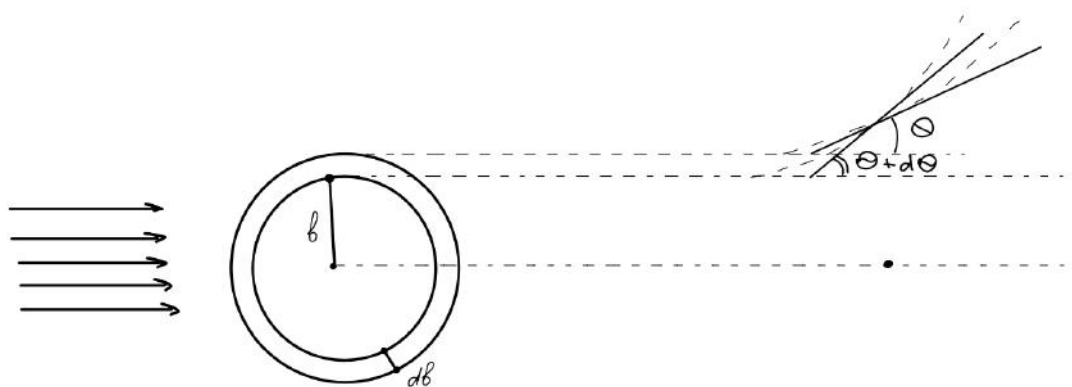


Рис. 7.12: Рассеивание частиц.

$$d\sigma = 2\pi b \cdot \left| \frac{db}{d\theta} \right| \cdot d\theta = b \cdot \left| \frac{db}{d\theta} \right| \cdot \frac{2\pi d\theta \sin \theta}{\sin \theta} = b \cdot \left| \frac{db}{d\theta} \right| \cdot \frac{d\Omega}{\sin \theta} = \frac{b}{\sin \theta} \cdot \left| \frac{db}{d\theta} \right| \cdot d\Omega, \quad (7.52)$$

- где  $d\Omega$  - телесный угол.

Дифференциальное сечение рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \cdot \left| \frac{db}{d\theta} \right|. \quad (7.53)$$

## Лекция 8.

### Формула Резерфорда. Гравитационное взаимодействие

$$\tan \frac{\theta}{2} = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{\mu b v_\infty^2} \Rightarrow b = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{\mu v_\infty^2 \tan \frac{\theta}{2}}.$$

$$\frac{db}{d\theta} = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{\mu v_\infty^2} \cdot \frac{1 \cdot (-1)}{(\tan \frac{\theta}{2})^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{2} = -k \frac{q_1 \cdot q_2}{2\mu v_\infty^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}},$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left( k \frac{q_1 \cdot q_2}{\mu v_\infty^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2} \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2} \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \left( k \frac{q_1 \cdot q_2}{\mu v_\infty^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad \blacksquare \quad (8.1)$$

Прежде чем мы приступим к гравитационному взаимодействию, которое описывается (в рамках классической физики) законом всемирного тяготения, необходимо рассмотреть такое понятие как секториальная скорость. Она обозначается буквой  $\vec{\sigma}$  и имеет смысл площади, которая закрывается радиус-вектором частицы за единицу времени!

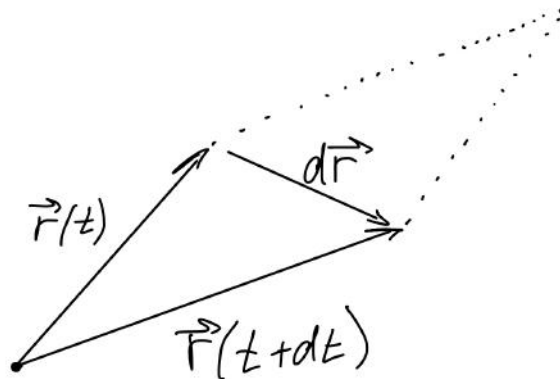


Рис. 8.1: Изменение радиус вектора за время  $dt$ .

$$\begin{aligned}
 dS &= \frac{1}{2} |\vec{r}| \cdot |\vec{r} + d\vec{r}| \cdot \sin(d\alpha) = \frac{1}{2} |\vec{r}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin d\alpha \\
 d\vec{S} &= \frac{1}{2} [\vec{r} \times d\vec{r}] = \frac{1}{2} [\vec{r} \times \vec{r} + d\vec{r}] \\
 |d\vec{S}| &= \frac{1}{2} \cdot |\vec{r}| |d\vec{r}| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} |\vec{r}| |\vec{r} + d\vec{r}| \cdot \sin(d\alpha) = \frac{1}{2} |\vec{r}| |\vec{r}| \cdot d\alpha.
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

Всё с точностью до величин второго порядка малости.

$$\Rightarrow \vec{\sigma} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2} \cdot [\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}] = \frac{1}{2m} \cdot [\vec{r}, \vec{p}] = \frac{\vec{L}}{2m}. \tag{8.3}$$

## Лекция 9.

### Гравитационное взаимодействие. Продолжение

Добавим еще один факт: пусть наши силы будут (опять) центральными:  $\vec{F} \sim \vec{r}$

$$\Rightarrow \vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const} \quad (9.1)$$

$\Rightarrow$  движение, как мы уже говорили, будет в плоскости, а помимо этого секториальная скорость будет постоянной! То есть за равные промежутки времени радиус-вектор материальной точки в центральном поле, отложенный из силового центра, заметает равные площади.

Теперь к закону всемирного тяготения : Сила гравитационного притяжения между двумя материальными точками действует вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки, прямо пропорциональна произведению их масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними :  $\sim 1666$  Исаак Ньютон,  $\sim 1687$  опубликовано.

$$\vec{F} = \gamma \cdot \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (9.2)$$

$\gamma \equiv G$  - гравитационная постоянная.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \left[ \frac{M^3}{\text{кг} \cdot c^2} \right]$$

Генри Кавендиш, 1798 г.

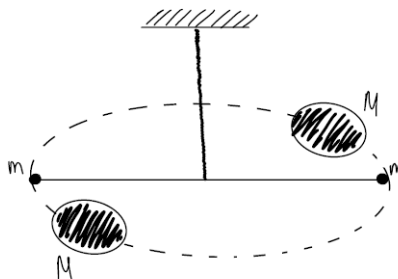


Рис. 9.1: Крутильные весы.



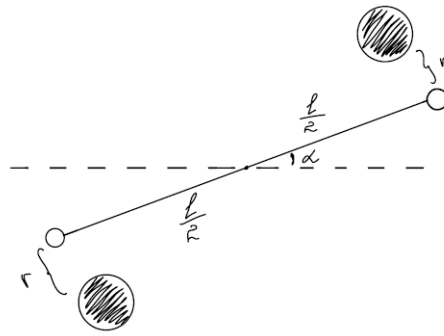


Рис. 9.2: Крутильные весы: вид сверху.

$f$  – модуль кручения стержня (известен);  
 $\alpha$  – угол отклонения;  
 $M = f\alpha$  – момент сил, возникающий при скручивании.

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow f \cdot \alpha_0 \Big|_{\alpha_0} - \text{измеряется} = \\
 &= 2G \frac{mM}{r^2} \left( \frac{l}{2} \right) \Big|_{m, M, r} - \text{измеряются} = \\
 &= G \frac{mM}{r^2} l.
 \end{aligned} \tag{9.3}$$

Найдём значение силы через частоту колебаний данной системы:

$$I\ddot{\alpha} = -M = -f\alpha.$$

Перед моментом сил стоит знак -, так как момент сил, возникающий при скручивании нити, стремится вернуть стержень в первоначальное положение

$$I = 2m \left( \frac{l}{2} \right)^2.$$

При выводе будет использоваться уравнение гармонических колебаний :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

**Для желающих разобраться, как это решается :** Чтобы его решить, надо искать решение вида  $x = c \cdot e^{\gamma t}$  -> подставляем в уравнение, получаем характеристическое уравнение  $\gamma^2 \cdot c \cdot e^{\gamma t} + \omega^2 \cdot c \cdot e^{\gamma t} = 0 \Rightarrow \gamma_{1,2} = \pm i\omega$ , а далее из начальных условий ищем решение вида  $x = c_1 \cdot e^{\gamma_1 t} + c_2 \cdot e^{\gamma_2 t}$ , это и будет всем знакомое уравнение типа  $x = x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$ .

$$2m \left( \frac{l}{2} \right)^2 \ddot{\alpha} + f\alpha = 0 \Rightarrow \tag{9.4}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{2f}{ml^2} \Rightarrow \tag{9.5}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{2f}}. \tag{9.6}$$

$$\begin{aligned}\frac{T^2}{(2\pi)^2} &= \frac{ml^2}{2f} \implies \\ \implies f &= \frac{ml^2 4\pi^2}{2T^2} \implies\end{aligned}\quad (9.7)$$

$$\implies G = \frac{2\pi^2 l r^2}{MT^2} \alpha_0. \quad \blacksquare \quad (9.8)$$

Рассчитаем массу Земли  $M_\oplus$ :

$$\begin{aligned}mg &= G \frac{mM_\oplus}{R_\oplus^2} \implies \\ \implies M_\oplus &= \frac{gR_\oplus^2}{G} \implies M_\oplus = \frac{gR_\oplus^2 MT^2}{2\pi^2 l r^2 \alpha_0}.\end{aligned}\quad (9.9)$$

Рассчитаем среднюю плотность Земли, используя полученные значения её массы и принимая её форму за шар, считая радиус известным.

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_\oplus &= \frac{M_\oplus}{\frac{4}{3}\pi R_\oplus^3} = \frac{3gMT^2}{8\pi^3 R_\oplus l r^2 \alpha_0}.\end{aligned}\quad (9.10)$$

$\bar{\rho}_\oplus \approx 5.48 \text{ г/см}^3$ , современные данные:  $5.52 \text{ г/см}^3$ .

## 9.1 Законы Кеплера

Переходим к задаче Кеплера (получим все законы Кеплера при её решении).

**Задача Кеплера:** движение в потенциале:

$$U = -\frac{\alpha}{r}, \quad \vec{F} = -\nabla U = -\vec{e}_r \cdot \left(\frac{\alpha}{r^2}\right) = -\alpha \frac{\vec{e}_r}{r^2}, \quad \alpha = GmM. \quad (9.11)$$

Движение плоское  $\implies$  полярная система координат.

Силы потенциальны  $\implies E = \text{const.}$

Силы центральные  $\implies \vec{L} = \vec{e}_z L = \text{const.}$

$$\frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{mM}{r} = E. \quad (9.12)$$

$$|\vec{L}| = m|\vec{r} \times \vec{v}| = m[\vec{r} \times \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi] = m\rho^2 \dot{\varphi} = L_z = \text{const.} \quad (9.13)$$

$$\boxed{m\rho^2 \dot{\varphi} = L_z = \text{const.}} \quad (9.14)$$

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{e}_\rho \rho \implies \vec{v} = \vec{e}_\rho \dot{\rho} + \rho \vec{e}_\varphi \dot{\varphi} = \vec{v}_\rho + \vec{v}_\varphi \\ \vec{a} &= \dot{\vec{v}} = \underline{\vec{e}_\rho \ddot{\rho}} + \dot{\rho} \dot{\vec{e}}_\rho + \dot{\rho} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \rho \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \rho \dot{\varphi} \dot{\vec{e}}_\varphi = \\ &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi = \vec{a}_\rho + \vec{a}_\varphi.\end{aligned}\quad (9.15)$$

Посмотрим на  $\vec{a}_\varphi$ :

$$\begin{aligned}\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi} &= \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}) = \frac{1}{\rho} [2\rho \dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho^2 \ddot{\varphi}] = \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{1}{m} \frac{d}{dt} L_z = 0 \quad (\text{т. к. } L_z = \text{const}) \implies \\ \implies \vec{a}_\varphi &= 0 \implies \vec{a} = \vec{a}_\rho - \text{направление к Солнцу}.\end{aligned}\quad (9.16)$$

То, что  $\vec{a}_\varphi = 0$ , можно понять и из других соображений :

Из второго закона Ньютона следует, что  $\vec{a} \parallel \vec{F} = -\gamma \frac{mM\vec{r}}{r^3} \parallel \vec{r} = \vec{\rho} \Rightarrow \vec{a}_\varphi = 0$ .

С другой стороны / здесь  $\rho \equiv r$ , т. к.  $z = 0$  /:

$$\begin{aligned}
 m\vec{a} = \vec{F} &\Rightarrow \\
 \Rightarrow \vec{a}_\rho &= -\frac{\gamma M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow \\
 \Rightarrow [\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2] &= -\frac{\gamma M}{\rho^2}.
 \end{aligned} \tag{9.17}$$

## Лекция 10.

### Законы Кеплера (часть 2)

Математика нам говорит, что для таких уравнений траекторией будет сечение конуса:

$$\rho(1 - \varepsilon \cos \varphi) = p, \quad (10.1)$$

где  $\varepsilon \equiv e$ ,  $\varepsilon$  – эксцентриситет;  $p$  – фокальный параметр. Подберём такие  $p$  и  $\varepsilon$ , чтобы наша траектория удовлетворяла предыдущему уравнению.

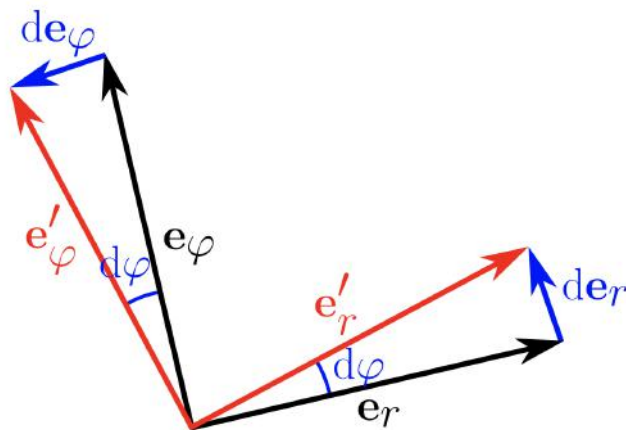


Рис. 10.1: Дифференцирование векторов.

$e > 1$  - гипербола;

$e = 1$  - парабола;

$e < 1$  - эллипс;

$e = 0$  - окружность.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\rho(1 - e \cos \varphi)] &= \dot{\rho}(1 - e \cos \varphi) - \rho e(-\sin \varphi)\dot{\varphi} = 0, \\ \dot{\rho} + \frac{L}{m} e \sin \varphi &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left[ \dot{\rho} + \frac{L}{m} e \sin \varphi \right] &= \ddot{\rho} + \frac{L}{m} e \cos \varphi \dot{\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Учитывая, что  $e \cos \varphi = 1 - p/\rho$ , имеем:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\rho}p + \frac{L}{m} \left[ 1 - \frac{p}{\rho} \right] \dot{\varphi} &= 0 \\
 \Rightarrow p\ddot{\rho} - \frac{m\rho^2\dot{\varphi}^2}{m} \cdot \frac{p}{\rho} &= -\frac{L}{m} \cdot \frac{\rho^2 m}{\rho^2 m} \cdot \dot{\varphi}, \\
 p\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 p &= -\frac{1}{\rho^2} \left( \frac{L}{m} \right)^2, \\
 p [\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2] &= -\frac{1}{\rho^2} \cdot \left( \frac{L}{m} \right)^2, \text{ где } [\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2] = -\gamma \frac{M}{\rho^2}, \left( \frac{L}{m} \right)^2 = \text{const}, \\
 \Rightarrow p \left( -\gamma \frac{M}{\rho^2} \right) &= -\frac{1}{\rho^2} \cdot \left( \frac{L}{m} \right)^2 \\
 \Rightarrow p &= \frac{1}{\gamma M} \cdot \left( \frac{L}{m} \right)^2.
 \end{aligned} \tag{10.3}$$

Откуда найти  $e$ ? Перепишем полную энергию:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{mv^2}{2} + U(\rho) = \frac{m}{2} [\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2] - \frac{\gamma m M}{\rho} \\
 \Rightarrow \frac{m}{2} \cdot \dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2m\rho^2} - \frac{\gamma m M}{\rho} &= \frac{m}{2} \cdot \dot{\rho}^2 + U_{\text{eff}} = E.
 \end{aligned} \tag{10.4}$$

$E_1$  - окружность ( $\rho = \text{const}$ );

$E = 0 \Rightarrow$  парабола;

$E < 0 \Rightarrow$  эллипс;

$E > 0 \Rightarrow$  гипербола.

В этих точках производная от  $\rho$  по  $t$  равна нулю:

$$\begin{aligned}
 \frac{L^2}{2m\rho_{\min, \max}^2} - \frac{\gamma m M}{\rho_{\min, \max}} &= E, \\
 \rho^2 + \frac{\gamma m M}{E} \rho - \frac{L^2}{2mE} &= 0. \\
 \rho_{\min, \max} &= \frac{-\frac{\gamma m M}{E} \pm \frac{\gamma m M}{E} \sqrt{1 + \frac{E^2 4L^2}{2mE\gamma^2 m M^2}}}{2},
 \end{aligned} \tag{10.5}$$

$$\rho_{\min, \max} = -\frac{\gamma m M}{2E} \left( 1 \mp \sqrt{1 + \frac{2E}{m} \left( \frac{L}{\gamma m M} \right)^2} \right). \tag{10.6}$$

Выразим большую полуось через минимальное и максимальное расстояния:

$$2a = \rho_{\min} + \rho_{\max} = -\frac{\gamma m M}{E}, \tag{10.7}$$

$$a = -\frac{\gamma m M}{2E}. \tag{10.8}$$

$$\tag{10.9}$$

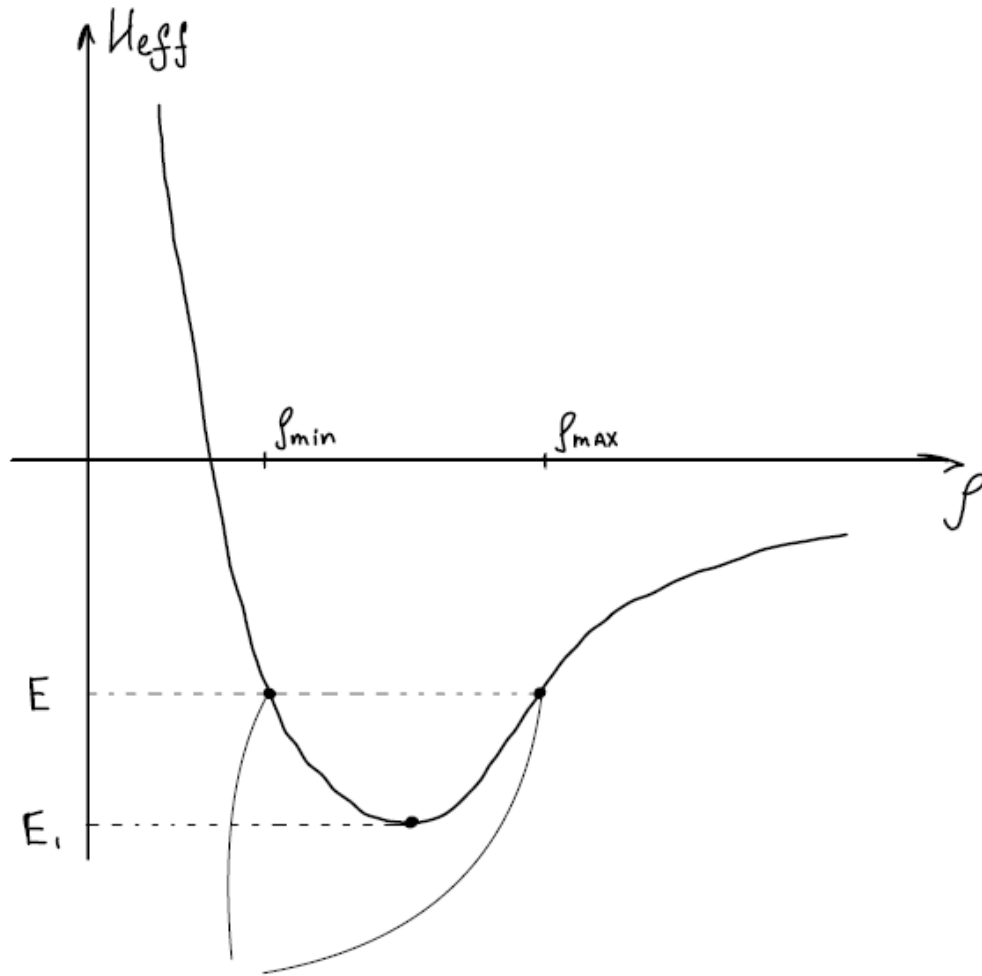


Рис. 10.2: График зависимости эффективной энергии.

С другой стороны, из уравнения эллипса

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}. \quad (10.10)$$

Минимум достигается при  $\cos \varphi = -1$ , максимум — при  $\cos \varphi = 1$ :

$$\rho_{\min} = \frac{p}{1 + e} = \frac{p}{1 - e^2}(1 - e), \quad (10.11)$$

$$\rho_{\max} = \frac{p}{1 - e} = \frac{p}{1 - e^2}(1 + e). \quad (10.12)$$

То есть,

$$\frac{2p}{1 - e^2} = \rho_{\min} + \rho_{\max} = 2a, \quad (10.13)$$

$$\frac{p}{a} = 1 - e^2, \quad (10.14)$$

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{1 - \frac{p}{a}} = \sqrt{1 + \frac{1}{\gamma M} \left(\frac{L}{m}\right)^2 \frac{2E}{\gamma m M}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{2E}{m} \left(\frac{L}{\gamma m M}\right)^2}. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Найдём и малую полуось эллипса  $b$ , применив немного геометрической смекалки.

$$b^2 + c^2 = a^2. \quad (10.16)$$

$$\text{При этом, } c = ea. \quad (10.17)$$

$$b^2 + e^2 a^2 = a^2, \quad (10.18)$$

$$b = a\sqrt{1 - e^2}. \quad (10.19)$$

$$(10.20)$$

Подставим полученное чуть раньше выражение для эксцентриситета.

$$b = -\frac{\gamma m M}{2E} \sqrt{-\frac{2E}{m} \left( \frac{L}{\gamma m M} \right)^2} = \frac{L}{\sqrt{-2mE}}. \quad (10.21)$$

Если движение финитно, то довольно очевиден период обращения,

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{eff}}}}. \quad (10.22)$$

Однако, брать этот интеграл очень тоскиво и неприятно, гораздо легче воспользоваться постоянством секториальной скорости.

$$|\vec{\sigma}| = \text{const} = \frac{S_{\text{эллипс}}}{T} = \frac{L}{2m}. \quad (10.23)$$

$$S_{\text{эллипс}} = \pi ab. \quad (10.24)$$

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{L}{2m}, \quad (10.25)$$

$$T = 2\pi \frac{mab}{L}. \quad (10.26)$$

$$(10.27)$$

Пока что мы рассматриваем частный случай некоего тела, которое вращается вокруг массивного объекта — попробуем вывести какую-то характеристику, которая будет одинакова для всех таких тел, которые вращаются вокруг одного и того же объекта.

$$b = a\sqrt{1 - e^2} = a\sqrt{-\frac{2E}{m} \left( \frac{L}{\gamma m M} \right)^2}, \quad (10.28)$$

$$b^2 = a^2 \cdot \left( -\frac{2E}{\gamma m M} \right) \cdot \frac{L^2}{\gamma m^2 M} = a^2 \cdot \frac{1}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{L^2}{\gamma m^2 M^2}. \quad (10.29)$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m^2 a^2 b^2}{L^2} = 4\pi^2 \frac{\mathfrak{M}^2 a^2}{\mathcal{L}^2} \cdot a \frac{\mathcal{L}^2}{\gamma \mathfrak{M}^2 M}. \quad (10.30)$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M} = K — \text{постоянная Кеплера}. \quad (10.31)$$

В своё время Кеплер на основании экспериментальных данных (очень сильно ему помогли длительные наблюдения Тихо Браге за движением планет по небу) постулировал следующие три закона (мы только что вывели их теоретически):

1. Все планеты движутся по эллиптическим траекториям, в одном из фокусов которых непременно находится Солнце. Траектории движения всех планет лежат в одной плоскости.
2. Секториальная скорость постоянна: за равные промежутки времени каждая планета «заметает» равные площади секторов эллипса, отложенных через фокус, содержащий Солнце.
3. Квадраты периодов обращения планет относятся так же, как кубы больших полуосей.



# Лекция 11.

## Космические скорости

### 11.1 Первая космическая скорость

**Определение :** Первая космическая скорость - минимальная (для заданной высоты над поверхностью планеты) горизонтальная скорость, которую необходимо придать объекту, чтобы он совершал движение по круговой орбите вокруг планеты. Для Земли  $V_1 = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}} = \sqrt{gR} = 7,91 \text{ км/с}$ .

Рассмотрим движение некого тела вокруг некого массивного объекта (например, планеты). Будем пренебрегать сопротивлением среды и гравитационным взаимодействием с другими телами: то есть, из сил рассматривать лишь взаимодействие тела с массивным объектом.

Полная механическая энергия тела тогда составит

$$E = \frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{mM}{r}. \quad (11.1)$$

Давайте рассмотрим вращение тела вокруг нашего массивного объекта: для этого удобно перейти в полярную систему координат и положить  $\varphi \neq 0$  и  $L > 0$ . Понятно, что случаев вращения существует огромное множество — интересно посмотреть на экстремальный случай, когда полная механическая энергия (а, следовательно, и скорость тела) минимальна.

$$\begin{aligned} E_{\min} &= \frac{m\dot{\rho}^2}{2} + \frac{m}{2}\rho^2\dot{\varphi}^2 - \gamma \frac{mM}{\rho} \\ &= \frac{m\dot{\rho}^2}{2} + \underbrace{\frac{L^2}{2m\rho^2} - \gamma \frac{mM}{\rho}}_{U_{\text{eff}}}. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Если кто-то не понимает, почему энергия записана именно таким образом, вернитесь [сюда](#), здесь показано разложение скорости по базисным векторам в полярной системе координат.

Мы хотим вращение!

$$\Rightarrow \dot{\varphi} \neq 0 \Rightarrow L > 0 \Rightarrow E_{\min}, \text{ когда } \dot{\varphi} \text{ и } U_{\text{eff}} \text{ минимальна} \Rightarrow$$

$$\frac{-2L^2}{2m\rho_0^3} + \frac{\gamma mM}{\rho_0^2} = 0 \Rightarrow \rho_0 = \frac{L^2}{\gamma m^2 M}, \quad (11.3)$$

$\Rightarrow$  т.к. по окружности  $L = m\rho_0 v_\varphi$ , т.е.  $L = m\rho v$

$$\Rightarrow \rho_0 = \frac{m^2 \rho_0^2 v^2}{\gamma m^2 M} \Rightarrow v = \sqrt{\gamma \frac{M}{\rho_0}}. \quad (11.4)$$

Вспомним, что мы на поверхности Земли:

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{\gamma \frac{M_\oplus}{R_\oplus}} \sim 8 \text{ км/с}. \quad (11.5)$$

## 11.2 Вторая космическая скорость

**Определение :** Вторая космическая скорость - наименьшая скорость, которую необходимо придать стартующему с поверхности небесного тела объекту (например, космическому аппарату), масса которого пренебрежимо мала по сравнению с массой небесного тела (например, планеты), для преодоления гравитационного притяжения этого небесного тела и покидания замкнутой орбиты вокруг него. Для Земли  $V_2 = \sqrt{2}V_1 = 11,2$  км/с.

$$E = \frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{mM}{r} = 0. \quad (11.6)$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{2\gamma \frac{M_\oplus}{R_\oplus}} = \sqrt{2}v_1 \approx 11.2 \text{ км/с}. \quad (11.7)$$

Если  $E > 0 \Rightarrow$  движение по гиперболе  $\Rightarrow$  превосходит 2-ую космическую скорость.

## 11.3 Третья космическая скорость

**Определение :** Третья космическая скорость - минимальная скорость, которую необходимо придать находящемуся вблизи поверхности Земли телу, чтобы оно могло преодолеть гравитационное притяжение Земли и Солнца и покинуть пределы Солнечной системы. Примерно равна 16,65 км/с.

Для простоты расчётов, разобьём наше движение на две части: удаление из гравитационного поля Земли, а затем уже удаление из гравитационного поля Солнца. Расстояние от Земли до Солнца (примерно 150 млн км) намного больше радиуса Земли (примерно 6400 км), поэтому когда тело уже удалится от Земли настолько, что практически перестанет с ней взаимодействовать, расстояние от него до Солнца принципиально не изменится, поэтому наши приближённые рассуждения будут верны с высокой степенью точности.

Рассмотрим процесс удаления из гравитационного поля Земли :

$$(*) \frac{m\vec{v}^2}{2} - \gamma \frac{mM}{r} = \frac{m\vec{v}_\infty^2}{2}. \quad (11.8)$$

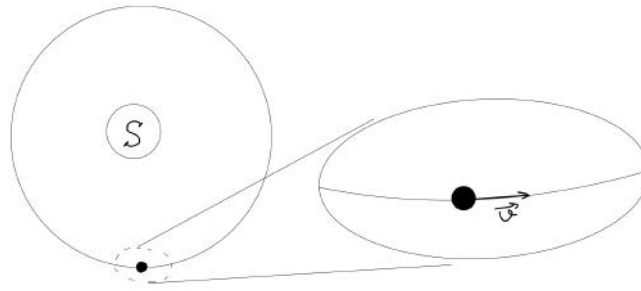


Рис. 11.1: Детализация вектора стартовой скорости относительно Земли.

$\vec{v}$  - скорость (стартовая) относительно Земли.

$\vec{v}_\infty$  - скорость тела относительно Земли, когда тело уже на большом расстоянии от Земли.

Скорость, когда отлетели от Земли:

$$\vec{v}_{\text{отн. Солнца } \infty} = \vec{V} + \vec{v}_\infty \quad (11.9)$$

$\vec{V}$  - скорость кругового движения Земли вокруг Солнца.

$$v_{\text{отн. Солнца } \infty}^2 = V^2 + v_\infty^2 + 2V \cdot v_\infty \cos \theta. \quad (11.10)$$

$\theta$  - угол между скоростью орбитального движения Земли и скоростью, с которой тело выходит из Земного тяготения.

Предположим, что Земля вращается вокруг Солнца по круговой орбите, тогда будет верно, что она движется с первой космической скоростью для Солнца. Чтобы тело могло покинуть гравитационное поле Солнца, оно должно двигаться со второй космической скоростью, а для 1 и 2 космических скоростей верно следующее :  $V_2 = \sqrt{2}V_1$

Чему должна быть равна  $\vec{v}_{\text{отн. солнца. } \infty}$ :

$$\vec{v}_{\text{отн. солнца. } \infty} = \sqrt{2}\vec{V}_3 \text{ (2-ая космическая с орбиты Земли отн. Солнца).}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2V_3^2 &= V_3^2 + V_\infty^2 + 2V_3v_\infty \cos \theta, \\ \Rightarrow v_\infty &= -\frac{2V_3 \cos \theta + \sqrt{4V_3^2 \cos^2 \theta + 4V_3^2}}{2}, \\ \Rightarrow v_\infty &= V_3 \cos \theta \cdot \left( \frac{\sqrt{1 + \cos(\theta)^2}}{\cos \theta} - 1 \right) \end{aligned} \quad (11.11)$$

$$\Rightarrow \text{из (*) } \vec{v}^2 = 2\vec{V}_1^2 + \vec{v}_\infty^2.$$

$$\Rightarrow \vec{v}^2 = 2\vec{V}_1^2 + V_3^2 \cdot \left( \sqrt{1 + \cos(\theta)^2} - \cos \theta \right)^2. \quad \blacksquare \quad (11.12)$$

## Лекция 12.

### Закон всемирного тяготения в случае земной тяжести

$$m\vec{a} = \vec{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow m\vec{a} = m\vec{g} = -\gamma \cdot \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow \vec{g} = -\gamma \frac{M}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \quad (12.1)$$

$\vec{g}$  - ускорение свободного падения.

#### 12.1 Комментарий к третьему закону Кеплера

Если учитывать не неподвижность Солнца, то:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F} = \mu \ddot{\vec{r}} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \mu = \frac{m \cdot M}{m + M} \Rightarrow \quad (12.2)$$

$$\frac{1}{m + M} \cdot \ddot{\vec{r}} = -\gamma \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow \quad (12.3)$$

$$\Rightarrow m \ddot{\vec{r}} = -\gamma \cdot \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot (1 + \frac{m}{M}) \Rightarrow \quad (12.4)$$

$$\Rightarrow m \ddot{\vec{r}} = (1 + \frac{m}{M}) \vec{F} = -\tilde{\gamma} \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad (12.5)$$

Вспомним, что:  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M}$

Теперь:

$$\Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\tilde{\gamma} M} = \frac{4\pi^2}{\gamma(M + m)} \Rightarrow \frac{T^2(m + M)}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma}. \quad (12.6)$$

Не зависит ни от массы, ни от расстояния.

До этого мы рассматривали гравитационное взаимодействие между точечными массами, однако так можно поступать, если размеры тел много меньше расстояния между ними. Для вычисления же с учётом пространственного распределения массы необходимо воспользоваться правилом суперпозиции гравитационных полей, согласно которому гравитационное поле, возбуждаемое какой-либо массой, совершенно не зависит от наличия других масс. Для вычислений вводят понятие напряженности гравитационного поля:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{1}{m} \cdot (-\gamma \frac{mm_i}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r}). \quad (12.7)$$

– Напряжённость гравитационного поля, создаваемого в точке  $\vec{r}$  телом  $m_i$ . Если же таких тел много, то:

$$\vec{g} = - \sum \gamma \frac{m_i}{r_i^2} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i}. \quad (12.8)$$

Потенциал гравитационного поля:

$$\varphi = -\gamma \sum \frac{m_i}{r_i} \Rightarrow \vec{g} = \nabla \varphi. \quad (12.9)$$

В случае непрерывного распределения массы:

$$\begin{aligned} d\vec{g} &= -\gamma \frac{dm}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \\ \vec{g} &= -\gamma \int \frac{dm(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \\ dm &= \rho(\vec{r}') \cdot dV. \end{aligned} \quad (12.10)$$

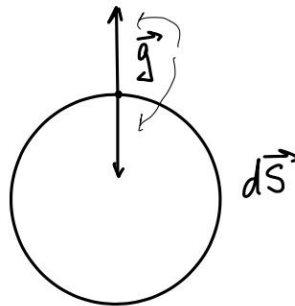


Рис. 12.1: Симметрия.

Введём нормаль:  $\vec{n}$  и элементарную площадку  $d\vec{S} = \vec{n}dS$ . Тогда  $d\phi$  - поток вектора  $\vec{g}$  через ориентированную площадку  $d\vec{S}$ :

$$d\phi = \vec{g} d\vec{S}. \quad (12.11)$$

Полный же поток:

$$\phi = \oint \vec{g} \cdot d\vec{S}. \quad (12.12)$$

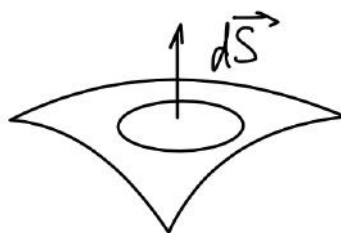


Рис. 12.2: Ввели нормаль.

## 12.2 Теорема Гаусса

Поток вектора напряжённости гравитационного поля через произвольную замкнутую поверхность прямо пропорционален массе тел, находящихся внутри этой поверхности :

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi\gamma M. \quad (12.13)$$

$M$  - Масса, окруженная замкнутой поверхностью  $S$ .

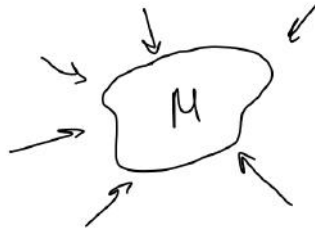


Рис. 12.3: Масса, окружённая замкнутой поверхностью.

$$d\Omega = \frac{dS \cdot \cos\theta}{r^2}. \quad (12.14)$$

Почему так?

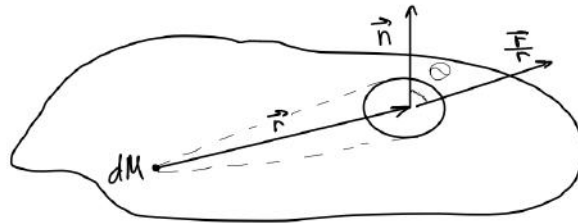


Рис. 12.4: Взаимодействие с малым кусочком массы.

$$\phi = \int_M \int_S -\gamma \frac{dM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{n} \cdot dS = -\gamma \int_M \int_S \frac{dM \cos\theta dS}{r^2} = -4\pi\gamma M. \quad (12.15)$$

## 12.3 Поле однородного шара

Рассмотрим ситуацию  $r > R$ :

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi\gamma M. \quad (12.16)$$

$$-g(r) \int dS = -4\pi\gamma M \Rightarrow g(r) = \gamma \frac{M}{r^2} \Rightarrow \vec{g}(\vec{r}) = -\gamma \frac{M}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \quad (12.17)$$

Рассмотрим  $r < R$ :

$$\oint \vec{g} d\vec{S} = -4\pi\gamma \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -g(r) \cdot 4\pi r^2 = -4\pi\gamma \cdot 4\pi r^2 \cdot \frac{r}{3} \cdot \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad (12.18)$$

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\gamma \cdot \frac{M}{R^3} \cdot r \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad (12.19)$$

либо

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{4}{3}\pi\gamma\rho \cdot r \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \quad (12.20)$$

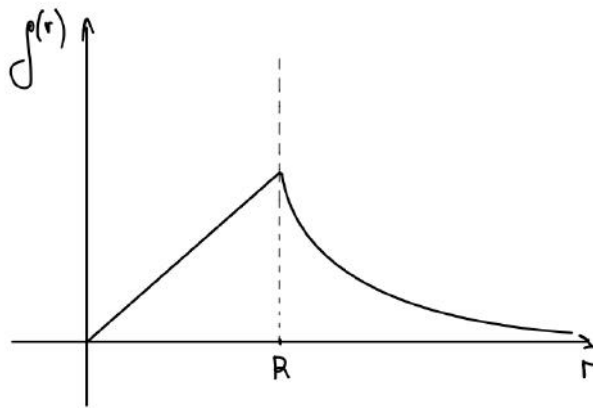


Рис. 12.5: Напряжённость шара.

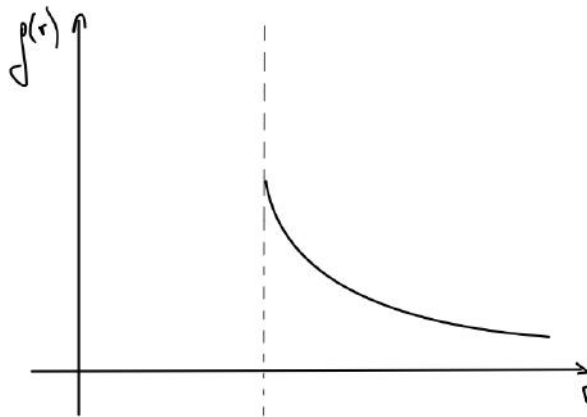


Рис. 12.6: Напряжённость сферы.

## 12.4 Точки Лагранжа

(Жозеф Луи Лагранж, 1771 г.)

Совокупность точек в системе двух массивных тел, в которых третье тело, чья масса пренебрежимо мала, может оставаться неподвижным относительно этих массивных тел.

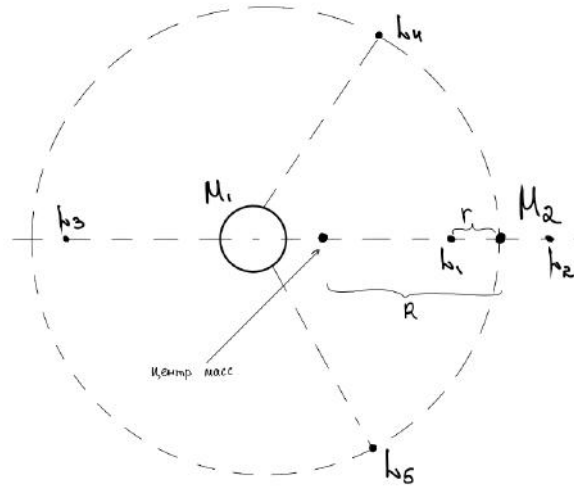


Рис. 12.7: Точки Лагранжа.

Все они лежат в плоскости орбиты. Таких точек 5:  $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5$ .

$L_1, L_2, L_3$  – неустойчивое равновесие;

$L_4, L_5$  – устойчивое равновесие.

Рассмотрим например  $L_1$ :

Вращение происходит относительно центра масс массивной системы за счёт сил гравитационного притяжения:

$$\begin{cases} \gamma \frac{mM_1}{(R-r)^2} - \gamma \frac{mM_2}{r^2} = mR_{c.m.}\omega^2 \\ \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma(M_1+M_2)} \end{cases} \Rightarrow \omega^2 = \frac{(2\pi)^2}{T^2} = \frac{\gamma(M_1+M_2)}{R^3}$$

$$\gamma \frac{mM_1}{(R-r)^2} - \gamma \frac{mM_2}{r^2} = m\gamma \frac{(M_1+M_2)}{R^3} \left( \frac{M_1R}{M_1+M_2} - r \right)$$

$$\frac{M_1}{(R-r)^2} - \frac{M_2}{r^2} = \left( \frac{M_1R}{M_1+M_2} - r \right) \frac{M_1+M_2}{R^3}. \quad (12.21)$$

Пусть  $\alpha = \frac{M_2}{M_1+M_2}$ , тогда:

$$\begin{aligned} \frac{M_1+M_2-M_2}{(M_1+M_2)(R-r)^2} - \frac{\alpha}{r^2} &= \left( \frac{R-r-\alpha R}{R^3} \right) \\ \frac{1}{(R-r)^2} - \frac{\alpha}{(R-r)^2} - \frac{\alpha}{r^2} &= \frac{1}{R^2} (1-\alpha) - \frac{r}{R^3} \\ \frac{1}{(R-r)^2} - \frac{1}{R^2} + \frac{r}{R^3} &= \alpha \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} + \frac{1}{(R-r)^2} \right) \\ \frac{1}{\left(1-\frac{r}{R}\right)^2} - 1 + \frac{r}{R} &= \alpha \left( \left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1 + \frac{1}{\left(1-\frac{r}{R}\right)^2} \right). \end{aligned}$$



Пусть  $\hat{r} = \frac{r}{R}$ , тогда:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-\hat{r})^2} - 1 + \hat{r} &= \alpha \left( \left( \frac{1}{\hat{r}} \right)^2 - 1 + \frac{1}{(1-\hat{r})^2} \right) \\ \hat{r} \text{ и } \alpha &\text{ — малы} \implies \\ \implies \frac{1}{(1-\hat{r})^2} &\sim 1 + 2\hat{r} \implies \\ \implies 3\hat{r} &= \alpha \left( \left( \frac{1}{\hat{r}} \right)^2 - 1 + 1 + 2\hat{r} \right) \\ 3\hat{r} &\approx \frac{\alpha}{\hat{r}^2} \\ \hat{r} &= \left( \frac{\alpha}{3} \right)^{1/3} \end{aligned} \tag{12.22}$$

$$\implies r \approx R \left( \frac{\alpha}{3} \right)^{1/3}. \tag{12.23}$$

Координата  $L_1$  относительно центра масс:  $\left( R \left( 1 - \left( \frac{\alpha}{3} \right)^{1/3} \right), 0 \right)$ .

Аналогично:

$$L_2 : \left( R \left( 1 + \left( \frac{\alpha}{3} \right)^{1/3} \right), 0 \right), \tag{12.24}$$

из:

$$\frac{M_1}{(R+r)^2} + \frac{M_2}{r^2} = \left( \frac{M_1}{M_1+M_2} R + r \right) \frac{M_1+M_2}{R^3} \tag{12.25}$$

$$L_3 : \left( -R \left( 1 + \frac{5}{12} \alpha \right), 0 \right), \tag{12.26}$$

из:

$$\frac{M_1}{(R-r)^2} + \frac{M_2}{(2R-r)^2} = \left( \frac{M_2}{M_1+M_2} R + R-r \right) \frac{M_1+M_2}{R^3}. \tag{12.27}$$

$L_4, L_5$  из рисунка ниже:

## 12.5 Гравитационная задача N тел

Решить гравитационную задачу – это решить следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\gamma \sum \frac{m_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \\ \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \end{cases}, \tag{12.28}$$

где  $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $\vec{v}_i(t_0) = \vec{v}_{i0}$ ;  $\vec{r}_i(t_0) = \vec{r}_{i0}$ .

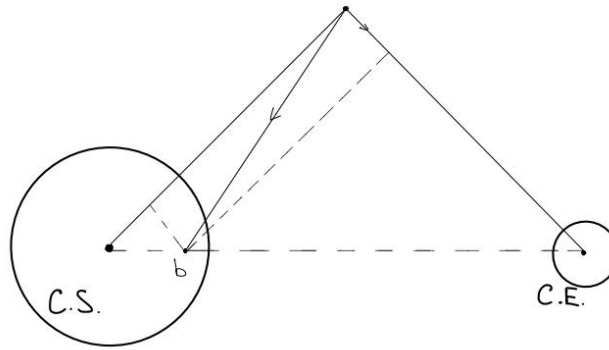


Рис. 12.8: 4 и 5 точки Лагранжа.

При  $N = 1$ : решение тривиально.

При  $N = 2$  (задача двух тел):

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow \quad (12.29)$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = -\gamma \frac{(m_1 + m_2)}{r^3} \vec{r} \quad (12.30)$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21} \end{cases} \quad (12.31)$$

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \mu (\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2) = \vec{F} = \vec{F}_{12} \quad (12.32)$$

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_{c.m.} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_{c.m.} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \end{cases} \quad (12.33)$$

## Лекция 13.

### Неинерциальные системы отсчёта

Иногда удобно работать в НИСО.

Запишем уравнение движения на этот случай:

В системе  $K$ :

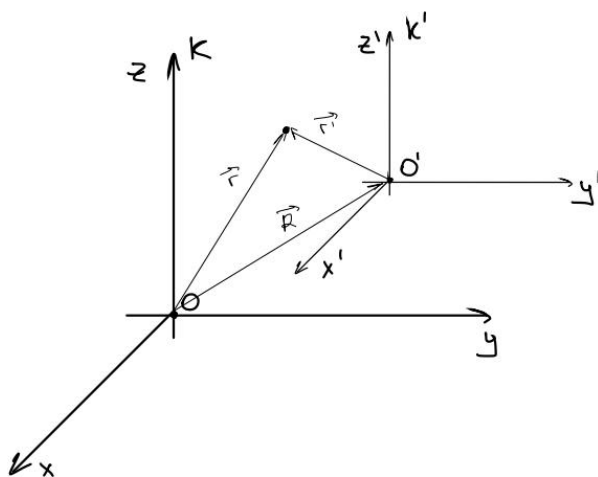


Рис. 13.1: Преобразования Галилея.

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}, \quad (13.1)$$

где  $\vec{F}$  — реальные физические силы.

В системе  $K'$ :

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}. \quad (13.2)$$

Движение  $K'$  относительно  $K$  раскладываем на поступательное движение со скоростью

$\vec{V}$  и вращательное с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  относительно оси, проходящей через  $O'$ .

$$\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z; \quad (13.3)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \triangleq \underbrace{\vec{v}}_{\text{скор. м. т. в К}} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{R}}{dt} \triangleq \vec{V} + \frac{d\vec{r}'}{dt}; \quad (13.4)$$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \underbrace{\dot{x}'\vec{e}_x' + \dot{y}'\vec{e}_y' + \dot{z}'\vec{e}_z'}_{\vec{v}'} + x'\frac{d\vec{e}_x'}{dt} + y'\frac{d\vec{e}_y'}{dt} + z'\frac{d\vec{e}_z'}{dt}; \quad (13.5)$$

$$d\vec{e}_x' = -\vec{e}_z' d\varphi_{y'} + \vec{e}_y' d\varphi_{z'} \implies \dot{\vec{e}}_x' = \vec{e}_{y'}\dot{\varphi}_{z'} - \vec{e}_{z'}\dot{\varphi}_{y'} = \vec{e}_{y'}\omega_{z'} - \vec{e}_{z'}\omega_{y'} \implies \quad (13.6)$$

$$\implies x'\dot{\vec{e}}_x' + y'\dot{\vec{e}}_y' + z'\dot{\vec{e}}_z' = x' \cdot (\vec{e}_{y'}\omega_{z'} - \vec{e}_{z'}\omega_{y'}) + y' \cdot (-\vec{e}_{x'}\omega_{z'} - \vec{e}_{z'}\omega_{x'}) + z' \cdot (-\vec{e}_{y'}\omega_{x'} + \vec{e}_x\omega_{y'}) = \omega \times \vec{r}'. \quad (13.7)$$

Ускорение:

$$\begin{aligned} \vec{a} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\vec{V}}{dt} &= \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{d}{dt}\vec{V}' + \frac{d}{dt}\vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{a}_0 + \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{V}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{V}' + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}'] \\ &= \vec{a}_0 + \vec{a}' + 2[\vec{\omega} \times \vec{V}'] + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}'], \end{aligned} \quad (13.8)$$

где  $\vec{a}_0$  - поступательное ускорение,  $\vec{a}'$  - ускорение в  $K'$ .

$$\text{Переносное ускорение: } \vec{a}_{\text{пер}} = \vec{a}_0 + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}',$$

$$\text{Кориолисово ускорение: } \vec{a}_{\text{кор}} = 2[\vec{\omega} \times \vec{V}']. \quad (13.9)$$

Умножим на массу полученное значение ускорения:

$$m\vec{a}' = \underbrace{\vec{F} - m\vec{a}_0 - 2m[\vec{\omega} \times \vec{V}'] - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' - m[\vec{\omega}[\vec{\omega} \times \vec{r}']]}_{\vec{F}_{\text{ин}}}. \quad (13.10)$$

$$\vec{F}_{\text{ин пост.}} = -m\vec{a}_0; \quad (13.11)$$

$$\vec{F}_{\text{ин кор.}} = -2m[\vec{\omega} \times \vec{V}']; \quad (13.12)$$

$$\vec{F}_{\text{ин ц.б.}} = -m[\vec{\omega}[\vec{\omega} \times \vec{r}']] - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'. \quad (13.13)$$

Введя силы инерции, рассмотрим примеры их проявления.

## 13.1 Поступательная сила инерции(сила Д'Аламбера)

### 13.1.1 Ускоряющийся автобус

Тело находится в ускоряющемся автобусе/вагоне и т.д. Пусть в нашем случае это будет человек и мы хотим сохранять состояние покоя. Как? Уравнение:

$$\begin{aligned} m\vec{a}' &= \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}}, \\ \vec{v}' &= 0, \vec{\omega} = 0 \implies \vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_0. \end{aligned} \quad (13.14)$$

Для сохранения состояния покоя, нам необходимо, чтобы  $m\vec{a}' = 0$ .

$$\begin{aligned} m\vec{a}' = 0 &= m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} - m\vec{a}_0, \\ \text{оу : } N &= mg, \\ \text{оx : } kmg &= ma_0. \end{aligned} \quad (13.15)$$

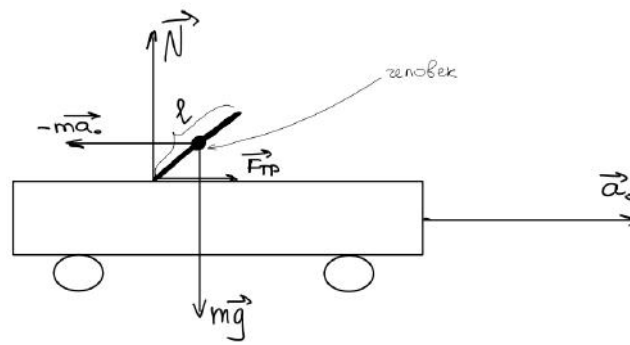


Рис. 13.2: Задача на ускоряющееся тело в НИСО.

Однако, также необходимо записать уравнение на моменты сил, чтобы человек не упал:

$$\frac{l}{2} \cos \alpha m a_0 = \frac{l}{2} \sin \alpha m g,$$

$$\boxed{\frac{a_0}{g} = \tan \alpha}. \quad (13.16)$$

### 13.1.2 Механические часы на математическом маятнике

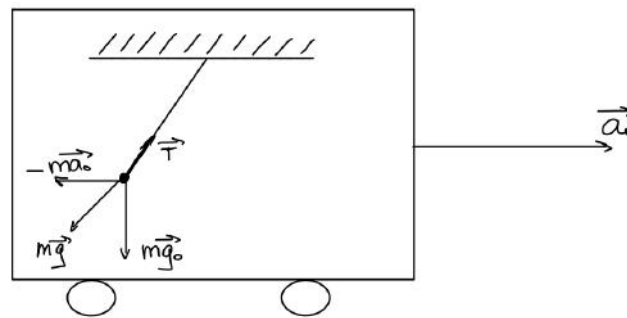


Рис. 13.3: Механические часы на математическом маятнике в НИСО.

$$\begin{aligned} m\vec{a}' &= \vec{T} + m\vec{g}_0 + \vec{F}_{\text{in}}, \\ m\vec{a}' &= \vec{T} + m\vec{g}_0 - m\vec{a}_0, \\ m\vec{a}' &= \vec{T} + m(\vec{g}_0 - \vec{a}_0) \Rightarrow \vec{g}_{\text{эфф}} = \vec{g}_0 - \vec{a}_0 \Rightarrow m\vec{a}' = \vec{T} + m\vec{g}_{\text{эфф}} \\ \Rightarrow T_{\text{период}} &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{|\vec{g}_{\text{эфф}}|}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{\vec{a}_0^2 + \vec{g}_0^2}}}. \end{aligned} \quad (13.17)$$

На земле, без ускорения, замерим и получим, скажем, 1 секунду, отсчитали 50 колебаний в ускоряющемся поезде, то есть захотели сказать, что прошло  $50 \cdot 1$  секунд, однако период уменьшится, то есть пройдёт меньше времени.

3. Рассмотрим вращающуюся систему:  $\vec{a}_0 = 0$ ,  $\underbrace{\vec{\omega}}_{\text{const}} \neq 0$

Найти новое положение равновесия:  $(\vec{v}' = 0, \vec{a}' = 0)$

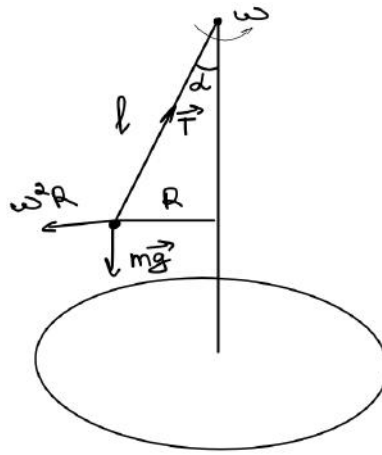


Рис. 13.4: Динамика маятника в НИСО.

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{in}},$$

$$\vec{F}_{\text{in}} = -m[\vec{\omega}, [\vec{\omega} \times \vec{r}']]. \quad (13.18)$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{c},$$

$$|\vec{c}| = |\vec{\omega}| \cdot \underbrace{|\vec{r}'| \cdot \sin \alpha}_R,$$

$$[\vec{\omega} \times \vec{c}] = \vec{b}, \quad \vec{r}', \vec{b} \text{ и } \vec{\omega} - \text{в одной плоскости.}$$

$$|[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}']]| = \omega^2 \cdot R, \text{ направление всегда к оси вращения.} \quad (13.19)$$

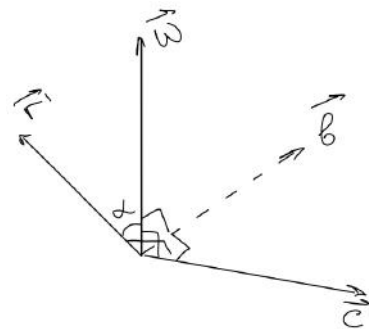


Рис. 13.5: Новое положение равновесия.

Из условия следует:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= m\vec{g} + \vec{T} - m[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}']], \\ 0 &= mg - T \cos \alpha, \\ 0 &= m\omega^2 \underbrace{R}_{l \sin \alpha} - T \sin \alpha. \end{aligned} \quad (13.20)$$

$$\begin{cases} T \cos \alpha = mg, \\ m\omega^2 l = T \end{cases} \Rightarrow \omega^2 l = \frac{g}{\cos \alpha},$$

$$\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 l} \leq 1. \quad (13.21)$$

То есть либо  $\alpha = 0$  если  $\frac{g}{\omega^2 l} \geq 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sin \alpha l m \omega^2 &= T \sin \alpha, \\ 0 \cdot l m \omega^2 &= T \cdot 0 \text{ и } T = mg. \end{aligned} \quad (13.22)$$

То есть в таком случае отклонение от горизонтальной оси:

$$\alpha = \arccos \left[ \frac{g}{\omega^2 l} \right]. \quad (13.23)$$

### 13.1.3 Колебание веса из-за вращения планеты

Учтём вращение Земли, чтобы оценить разницу в весе ( $\vec{P}$ ) тела в разных точках Земли. Вес тела,  $\vec{P}$  - сила, с которой тело действует на опору.  $|\vec{P}| = P = |\vec{N}| = N$  ( $\vec{P} = -\vec{N}$ ).

$$\begin{aligned} m\vec{a}' &= m\vec{g} + \vec{N} - m[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]], \\ 0 &= m\vec{g} - m[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]] + \vec{N}, \\ m\vec{g}_{\text{eff}} + \vec{N} &= 0, \\ \vec{g}_{\text{eff}} &= \vec{g} - \underbrace{[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]]}_{\vec{a}_c} = \vec{g} + \vec{a}_c, \\ |\vec{a}_c| &= \omega^2 R_{\oplus} \cos \alpha, \\ |\vec{g}_{\text{eff}}| &= \sqrt{(\vec{g} + \vec{a}_c)^2} = \sqrt{g^2 + a_c^2 + 2\vec{a}_c \vec{g}} = g \sqrt{1 + \frac{\omega^4 R_{\oplus}^2 \cos^2 \alpha}{g^2} + \frac{2\vec{a}_c \vec{g}}{g^2}} \\ &= g \sqrt{1 - \frac{2\omega^2 R_{\oplus} \cos^2 \alpha}{g} + \frac{\omega^4 R_{\oplus}^2 \cos^2 \alpha}{g^2}}. \end{aligned} \quad (13.24)$$

$$|\vec{g}_{\text{eff}}| = g_{\text{eff}} \simeq g - \omega^2 R_{\oplus} \cos^2 \alpha. \quad (13.25)$$

В случае Земли,

$$\begin{aligned} \omega &\approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}, \\ \omega^2 &\approx 5,3 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-2}, \\ R_{\oplus} &\approx 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}. \end{aligned}$$

Подставляя это в получившийся вывод, получаем численную поправку к ускорению свободного падения

$$|\vec{g}_{\text{eff}}| \approx g - 0,034 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cos \alpha. \quad (13.26)$$

Для общего понимания выразим максимальное отклонение  $|\vec{g}_{\text{eff}}|$  от  $g$  в процентах от  $g$ .

$$\frac{g_{\text{effmax}} - g_{\text{effmin}}}{g_{\text{effmax}}} = \frac{g - (g - 0,034)}{g} \simeq 0,0035 \Rightarrow 0,35\%. \quad (13.27)$$

Такое отклонение возможно засечь достаточно точными приборами, однако его малость оставляет нам простор случаев, в которых мы можем игнорировать переменчивость ускорения свободного падения.

### 13.1.4 Пуля и карусель

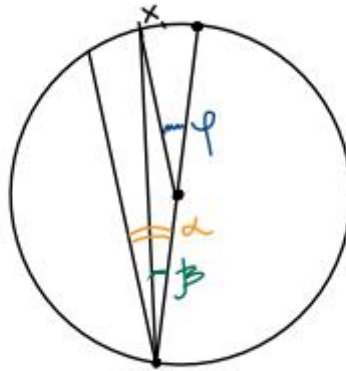


Рис. 13.6: Вращающаяся карусель, на которой стрелок целится в мишень.

Рассмотрим стрелка, который стоит на вращающейся карусели радиуса  $R$  и целится в мишень, которую видит под углом  $\beta$ . (Сама мишень, значит, удалена от диаметра между ней и стрелком на дугу  $\varphi = 2\beta$ ). Скорость пули, которую выпускает стрелок, примем  $u$ . Рассмотрим её смещение  $x$  из-за угловой скорости  $\omega$  и найдём угол  $\alpha$ , который нужен стрелку, чтобы скомпенсировать как своё вращение, так и вращение мишени.

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\omega R}{u} + \beta, \quad (13.28)$$

$$\alpha = \frac{\omega R}{u} + \frac{\varphi}{2} = \frac{\omega R}{u} + \frac{\omega \cdot \frac{2R}{u}}{2} = \frac{\omega R}{u} + \frac{\omega R}{u} = \frac{2\omega R}{u}. \quad (13.29)$$

Рассмотрим динамику пули в системе отсчёта, связанной с вращающимся диском. За  $m$  обозначим её массу, за  $\vec{v}'$  — скорость в этой системе отсчёта, за  $\vec{a}'$  — ускорение.

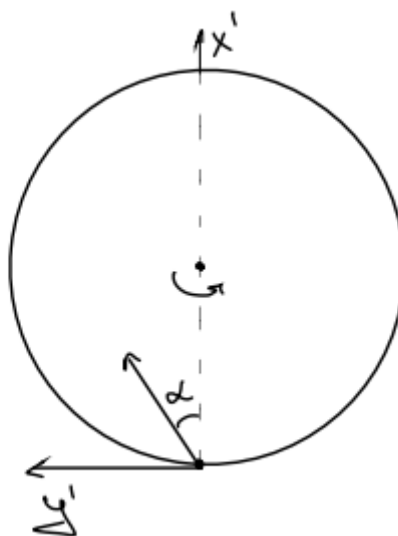


Рис. 13.7: Динамика пули в неинерциальной системе отсчёта.



$$m\vec{a}' = \underbrace{\vec{F}}_0 - \underbrace{m\vec{a}_0}_0 - \underbrace{m[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]]}_{\text{мало, почти 0}} - 2m[\vec{\omega} \times \vec{v}'], \quad (13.30)$$

$$\text{где } |[\vec{\omega} \times \vec{v}']| = \omega u. \quad (13.31)$$

Довольно очевидно, что ускорение направлено строго вдоль оси  $y'$ . ( На самом деле, это не совсем так : кориолисово ускорение всегда перпендикулярно скорости пули в НИСО, а она вообще не совсем параллельна оси  $x'$ , но при этом из-за высокой скорости пули составляет малый угол с этой осью, поэтому проекция кориолисова ускорения на ось  $x'$  будет величиной первого порядка малости и, соответственно, мы можем ей пренебречь. Более точно траекторию пули можно представить в виде дуги окружности, так как кориолисово ускорение всегда перпендикулярно скорости, следовательно изменяет только её направление, но не изменяет абсолютное значение, но так как мы лишь оцениваем величину угла  $\alpha$ , то замена параболы на дугу окружности даст поправку более высокого порядка малости и ей можно будет пренебречь)

$$ma_{y'} = -2m\omega u. \quad (13.32)$$

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{x'} \\ a_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\omega u \end{pmatrix}. \quad (13.33)$$

$$\text{Тогда диаметр } 2R = \underbrace{u \cos \alpha}_{v_{0x}} \tau. \quad (13.34)$$

Получившаяся ситуация кинематически ничем не отличается от движение в поле тяжести Земли — как и в том случае, всё время полёта  $\tau$  можно разбить на время до достижения максимума по оси  $y'$  и на время после, так что  $\tau_{\uparrow} = \tau_{\downarrow} = \frac{1}{2}\tau$ .

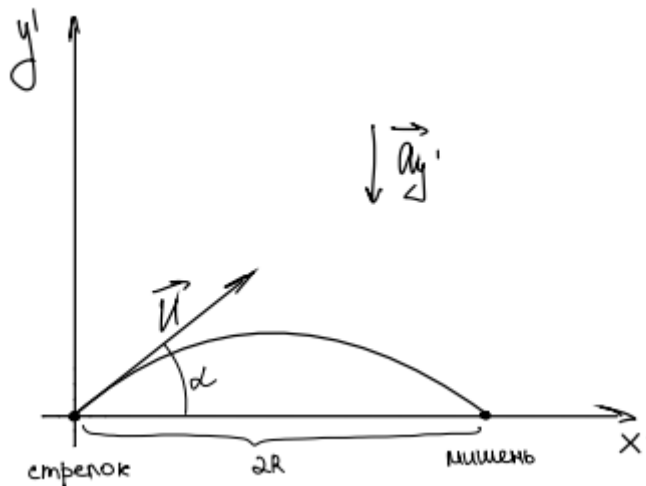


Рис. 13.8: Равноускоренное движение пули от стрелка до мишени.

$$y'(t) = v_{0y}t + \frac{a_{y'}t^2}{2} = ut \sin \alpha - \frac{2\omega ut^2}{2}. \quad (13.35)$$

$$(13.36)$$

По лемме Ферма при достижении максимума производная обнуляется:

$$\left. \frac{dy'}{dt} \right|_{t=\tau_{\uparrow}} = 0 = u \sin \alpha - 2\omega u \tau_{\uparrow}. \quad (13.37)$$

$$\tau_{\uparrow} = \frac{\mathcal{K} \sin \alpha}{2\omega \mathcal{K}}, \quad (13.38)$$

$$\tau = 2\tau_{\uparrow} = \frac{\sin \alpha}{\omega}. \quad (13.39)$$

$$\frac{2R}{u \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\omega}. \quad (13.40)$$

$$(13.41)$$

Возьмём угол  $\alpha$  малым — тогда синус примерно равен ему самому, а косинус можно принять за единицу.

$$\alpha \approx \sin \alpha = \frac{2R\omega}{u}. \quad (13.42)$$

## Лекция 14.

# Маятник Фуко. Сухое и вязкое трение. Пружинка

### 14.1 Маятник Фуко

Изучим тяжёлый шар на длинном подвесе. Встав на полюс, вполне можем считать, что подвес на оси и мы сами находимся в инерциальной системе отсчёта: период обращения плоскости колебаний будет равен одним земным суткам. Это можно объяснить тем, что плоскость, в которой маятник совершает свои колебания не изменяет своего положения в пространстве, а Земля под ним поворачивается с периодом в 1 сутки.

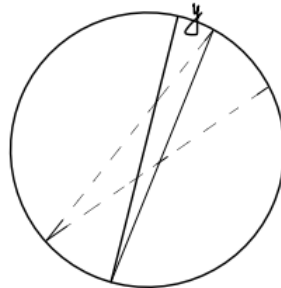


Рис. 14.1: Смещение маятника в ходе движения.

Обозначим за  $y$  смещение за один проход.

$$a_y = 2\omega v_x(t). \quad (14.1)$$

$$v_y = \int_0^t a_y d\tilde{t} = 2\omega \int_0^t v_x d\tilde{t}, \quad (14.2)$$

$$y_0 = 2\omega \int_0^t d\hat{t} \int_0^{\hat{t}} v_x d\tilde{t}. \quad (14.3)$$

$$\frac{T_0}{t} = \frac{2\pi R}{y_0}, \quad (14.4)$$

$$T_0 = \frac{2\pi R t}{y_0}. \quad (14.5)$$

При смещении по широте  $y = y_0 \sin \varphi$ . Это можно объяснить тем, что из выражения для  $y_0$  следует, что  $y_0 \sim \omega$ , а из геометрии составляющая  $\omega$ , перпендикулярная поверхности Земли, на широте  $\varphi$  равна  $\omega \sin \varphi$ . (С помощью правила правой руки определения направления векторного произведения несложно убедиться, что составляющая  $\omega$ , параллельная поверхности Земли при векторном умножении на скорость груза маятника в СО Земли будет перпендикулярна поверхности Земли, следовательно соответствующая составляющая силы Кориолиса будет лишь изменять силу натяжения нити подвеса )

$$T_\varphi = \frac{2\pi R t}{y_0 \sin \varphi} = \frac{T_0}{\sin \varphi}. \quad (14.6)$$

## 14.2 Сила трения

### 14.2.1 Сухое трение

Вязкая сила трения возникает при движении в газах и жидкостях (сила сопротивления). Уже рассматривали разные варианты  $-\alpha \vec{v}$ ,  $-\alpha \vec{v}^2 \frac{\vec{v}}{v}$  и т.д.

Соответствующая названию подглавы сила трения направлена противоположно относительному перемещению тела.

1. Сила трения покоя - сила трения, возникающая между телами при отсутствии относительного движения.
2. Сила трения скольжения - сила трения, возникающая при движении тел друг по другу.

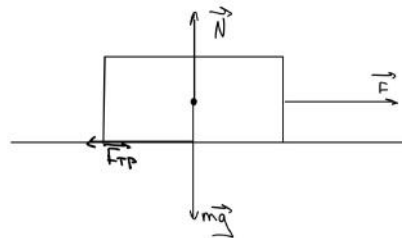


Рис. 14.2: Силы действующие на тело.

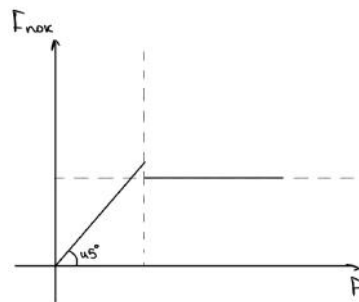


Рис. 14.3: Зависимость силы трения от приложенной силы.

$$F_0 = \mu_0 N$$

$\mu$  - коэффициент трения скольжения.

$\mu_0$  - коэффициент трения покоя.

$F_0$  - максимальная сила трения покоя.

## Трение качения

Сила, возникающая при перекачивании тел друг по другу. Возникает из-за деформации или слипания. Следовательно, смещение нормальной реакции опоры от центра тяжести. Сила трения покоя при качении - сила сцепления. Сила трения сцепления «трения скольжения».

## Условие равновесия

$$F = F_{\text{сцеп}} \quad (14.7)$$

$$N = mg \quad (14.8)$$

$$mg \cdot \Delta = N \cdot \Delta = F \cdot R \quad (14.9)$$

$$\Rightarrow F_{\text{сцеп}} = \frac{\Delta}{R} \cdot N \quad (14.10)$$

$\Delta_{\text{lim}}$  - коэффициент трения качения. Уравнение равновесия предельного:

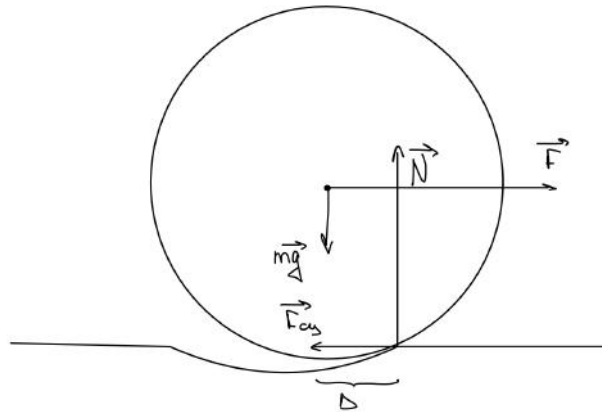


Рис. 14.4: Условие равновесия.

$$N \cdot \Delta_{\text{lim}} = F \cdot R. \quad (14.11)$$

Существует предельное значение  $\Delta_{\text{lim}}$ , после этого уже не скомпенсировать момент  $F \cdot R$ .

## Лекция 15.

# Приливы и отливы. Принцип эквивалентности

### 15.1 Приливы

- 1) **Амплитуда прилива** – разность уровней большой и малой воды;
  - 2) Время между двумя приливами  $\sim 12:25$  (половина периода видимого обращения Луны вокруг Земли);
  - 3) Основной эффект от Луны.
- Найдём эффект в нулевом приближении.

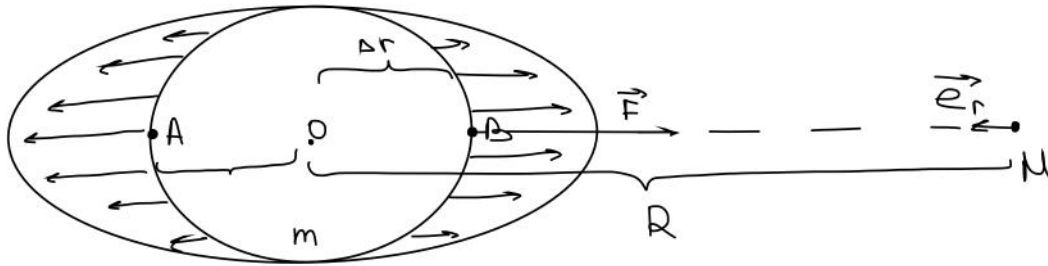


Рис. 15.1: Схема прилива.

Приливное ускорение в точке находится путём вычитания гравитационного ускорения центра тела и гравитационного ускорения в точке рассмотрения.

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\gamma \frac{mM}{R^2} \vec{e}_r \\ \Rightarrow \vec{a} &= -\gamma \frac{M}{R^2} \vec{e}_r.\end{aligned}\tag{15.1}$$

$$\vec{a}_{B,A} = -\gamma \frac{M}{(R \pm \Delta r)^2} \vec{e}_r = -\gamma \frac{M}{R^2 \left(1 \pm \frac{\Delta r}{R}\right)^2} \vec{e}_r;\tag{15.2}$$

$$\vec{a}_B = -\gamma \frac{M}{R^2} \vec{e}_r \left(1 + 2\frac{\Delta r}{R}\right) + \dots = -\gamma \frac{M}{R^2} \vec{e}_r - 2\gamma \frac{M}{R^2} \frac{\Delta r}{R} \vec{e}_r;\tag{15.3}$$

$$\vec{a}_A = -\gamma \frac{M}{R^2} \vec{e}_r \left(1 - 2\frac{\Delta r}{R}\right) + \dots = -\gamma \frac{M}{R^2} \vec{e}_r + 2\gamma \frac{M}{R^2} \frac{\Delta r}{R} \vec{e}_r.\tag{15.4}$$

Замечание:

Прилив происходит не в кульминации Луны (начальные скорость и координата). Аналогия

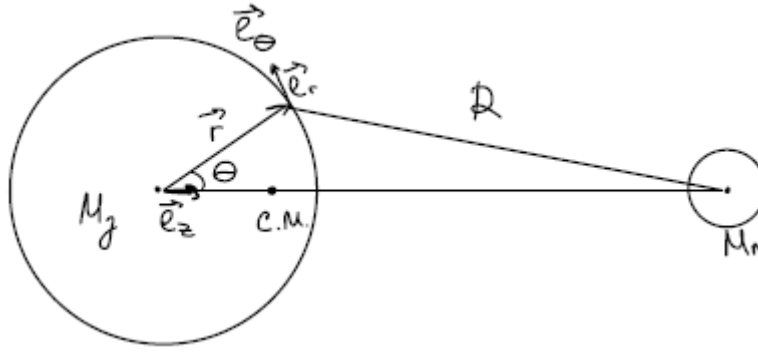


Рис. 15.2:

с пружинкой в поле тяготения. Всё определяется поступательными силами инерции и силой тяготения Луны. Найдём формулу более строго:

$$\vec{g} = -\gamma \frac{M}{R^2} \vec{e}_r, \quad (15.5)$$

Проверим знак:

$$\begin{aligned} \varphi &= -\gamma \frac{M}{R}, \\ -\nabla \varphi &= -\gamma \frac{M}{R^2} \vec{e}_r. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Запишем соотношение на потенциалы:

$$\varphi = \varphi_{\text{л}} + \varphi_{\text{ин}}, \quad (15.7)$$

Найдём  $\varphi_{\text{ин}}$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{ин}} &= a_0 r \cos \theta, \\ \vec{F}_{\text{ин}} &= -m \vec{a}_0 = -m a_0 \vec{e}_z, \\ g &= -a_0 \vec{e}_z = -\frac{d}{dz} \varphi_{\text{ин}} \vec{e}_z \\ \Rightarrow \varphi_{\text{ин}} &= a_0 z = a_0 r \cos \theta. \end{aligned} \quad (15.8)$$

Найдём  $\varphi_{\text{л}}$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{л}} &= -\gamma \frac{M_{\text{л}}}{R} = -\gamma \frac{M_{\text{л}}}{\sqrt{(R_{\text{зл}} - r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2}} = -\gamma \frac{M_{\text{л}}}{\sqrt{R_{\text{зл}}^2 + r^2 - 2R_{\text{зл}}r \cos \theta}} = \\ &= -\gamma \frac{M_{\text{л}}}{R_{\text{зл}}} \left[ 1 + \frac{r \cos \theta}{R_{\text{зл}}} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R_{\text{зл}}^2} + \frac{3}{8} \left( \frac{2r \cos \theta}{R_{\text{зл}}} \right)^2 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (15.9)$$

Введём обозначение:

$$x = \frac{-2R_{\text{зл}}r \cos \theta}{R_{\text{зл}}^2} + \frac{r^2}{R_{\text{зл}}^2}. \quad (15.10)$$

Тогда

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)x^2}{2!} + O(x^3) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{r^2}{R_{\text{зл}}^2} - 2 \frac{r \cos \theta}{R_{\text{зл}}} \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{r^2}{R_{\text{зл}}^2} - 2 \frac{r \cos \theta}{R_{\text{зл}}} \right)^2 + \dots \quad (15.11)$$

Пусть  $\varphi_0 = 0$ ,  $-\gamma M_{\text{л}}/R_{\text{зл}}^2 = a_0$ :

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_0 - \gamma \frac{M_{\text{л}}}{R_{\text{зл}}} \cdot \frac{2r \cos \theta R_{\text{зл}} - r^2}{2R_{\text{зл}}^2} - \frac{3}{8} \gamma \frac{M_{\text{л}}}{R_{\text{зл}}} \left( \frac{2r \cos \theta}{R_{\text{зл}}} \right)^2 = \\ &= -\gamma \frac{M_{\text{л}}}{R_{\text{зл}}^2} r \cos \theta + \gamma \frac{M_{\text{л}}}{2R_{\text{зл}}^3} r^2 - \frac{3}{8} \left( \frac{r^2}{R_{\text{зл}}^2} - 2 \frac{r \cos \theta}{R_{\text{зл}}} \right)^2 + \dots\end{aligned}\quad (15.12)$$

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{л}} + \varphi_{\text{ин}} &= a_0 r \cos \theta - a_0 r \cos \theta, \\ \varphi &= \varphi_{\text{пр}} = -\frac{3}{8} \gamma \frac{M_{\text{л}}}{R_{\text{зл}}^2} \frac{r^2}{R_{\text{зл}}} 2 \cdot (2 \cos^2 \theta - 1) = -\frac{3}{8} \gamma \frac{M_{\text{л}}}{R_{\text{зл}}^2} \cdot \frac{r^2}{R_{\text{зл}}} 2 \cos 2\theta\end{aligned}\quad (15.13)$$

## 15.2 Оценка эффекта

### 15.2.1 Гидростатика

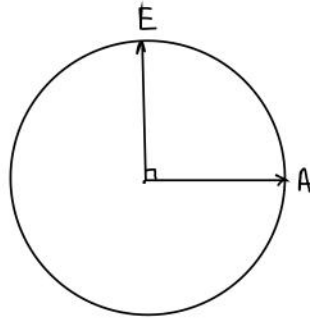


Рис. 15.3: Точки Е и А.

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_{\text{пр}} = \text{const.}$$

$$\varphi(x, y, z) = \text{const}$$

$$\varphi(r, \theta) = \text{const}$$

$$\varphi_0 - \frac{3}{4} \cdot \gamma \frac{M_{\text{л}}}{R_{\text{зл}}^3} r^2 \cos 2\theta = \text{const.}\quad (15.14)$$

А и Е:

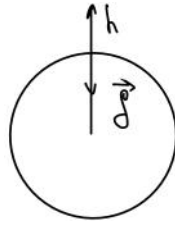
$$\varphi_0(A) - \frac{3}{4} \cdot \gamma \frac{M_{\text{л}}}{R_{\text{зл}}^3} r^2 = \varphi_0(E) + \frac{3}{4} \cdot \gamma \frac{M_{\text{л}}}{R_{\text{зл}}^3} r^2.\quad (15.15)$$

Самое простое: т.к.  $m\vec{g} = \vec{F}$ .

$$-\nabla U = \vec{F}, U = mgh \Rightarrow -\nabla U = -mg\vec{e}_h = m\vec{g} = \vec{F}.$$

$$\varphi = gh$$



Рис. 15.4: Тело на высоте  $h$  испытывает  $g$ .

$$\varphi_0(A) - \varphi_0(E) = g(h_A - h_E) = g\Delta h = \frac{3}{2}\gamma \frac{M_{\text{Л}}}{R_{3\text{Л}}^3} r^2 \quad (15.16)$$

$$\Rightarrow \Delta h = \frac{f}{g} r = 0.5 \text{ м.} \quad (15.17)$$

### 15.3 Гравитационная масса

Масса вводится как мера инерции:  $m^i$ .

Тела могут возбуждать гравитационное поле:  $m^g$  Сила взаимодействия гравитационных масс обратно пропорциональная квадрату расстояния:

$$F = c \frac{m_1^g m_2^g}{r^2}. \quad (15.18)$$

Фиксируем  $c \Rightarrow$  находим способом из лекции 9.

Закон физики, предложенный Ньютоном, заключается в пропорциональности  $F$  инертным массам  $\Rightarrow m^g \sim m^i$ .

Выбором единиц мы можем добиться  $m^g = m^i$ .

Откуда это можно видеть?

$$\begin{aligned} m^i \vec{a} = \vec{F} = m^g \vec{g} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{a} = \frac{m^g}{m^i} \vec{g}. \end{aligned} \quad (15.19)$$

Наблюдаем, что  $\vec{a} = \vec{g}$  (в одном и том же гравитационном поле все тела приобретают одинаковое ускорение).

Это равенство проверяется и иначе: если верить Ньютону и Бесселю, период математического маятника (длинного стержня, на котором располагается тяжёлый груз, много массивнее стержня) удовлетворяет следующему выражению:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{lm^i}{gm^g}}. \quad (15.20)$$

Меняя материал груза, мы замечаем, что период при этом никак не меняется: следовательно, с точностью примерно  $10^{-5} \frac{\text{М}}{\text{с}^2}$  получаем  $m^i = m^g$ .

Этвеш Роланд в 1887 проверил равенство инерционной и гравитационной массы с точность до  $10^{-9} \frac{\text{М}}{\text{с}^2}$  в опыте с крутильными весами: тело, ускоряющееся вблизи поверхности Земли, в НИСО, связанном с Землёй, ускоряется из-за двух сил: реальной силы

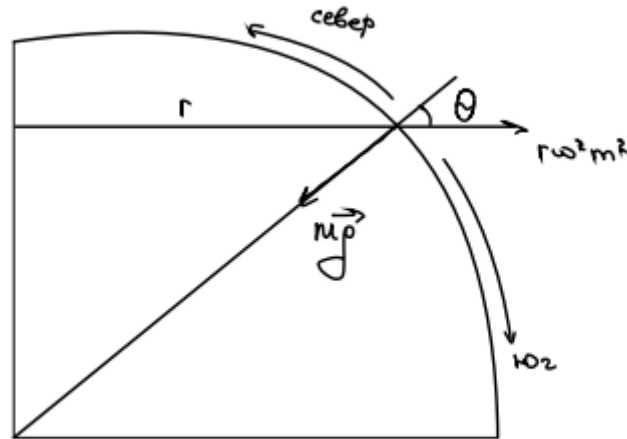


Рис. 15.5: Силы, действующие на тело вблизи поверхности Земли в НИСО Земли

гравитации и фиктивной силы инерции. Если бы инерционная и гравитационная массы не были бы равны, то с перемещением по поверхности Земли менялось бы направление общего ускорения свободно падающего тела.

Равновесие на крутильных весах достигается при следующем соотношении масс двух тел:

$$m_1^g g - m_1^i \omega^2 r \cos \theta = m_2^g g - m_2^i \omega^2 r \cos \theta. \quad (15.21)$$

$$m_1^i \left( \underbrace{\frac{m_1^g}{m_1^i} g}_{\alpha_1} - \underbrace{\omega^2 r \cos \theta}_f \right) = m_2^i \left( \underbrace{\frac{m_2^g}{m_2^i} g}_{\alpha_2} - \underbrace{\omega^2 r \cos \theta}_f \right). \quad (15.22)$$

$$(15.23)$$

Если соотношение гравитационная масса не равна инерционной, то из  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  следует  $m_1^i \neq m_2^i$ . Положим  $M = (m_1^i - m_2^i) \frac{l}{2} \omega^2 r \sin \theta$ .

$$f \varphi = M. \quad (15.24)$$

$$\varphi = \frac{M}{f}. \quad (15.25)$$

Но во всех случаях  $\varphi = 0!!!$  Значит, гравитационная масса равна инерционной массе.

## 15.4 Принцип эквивалентности

**Формулировка :** Все физические явления в гравитационном поле происходят совершенно так же, как и в соответствующем поле сил инерции, если напряжённости обоих полей в соответствующих точках пространства совпадают, а начальные условия одинаковы для всех тел замкнутой системы.

Уже говорили, что все свободно падающие тела на земле приобретают одинаковое ускорение, следовательно то же самое выполняется и для ускорения относительно неинерци-

альной системы отсчёта. Рассмотрим пример с лифтом:

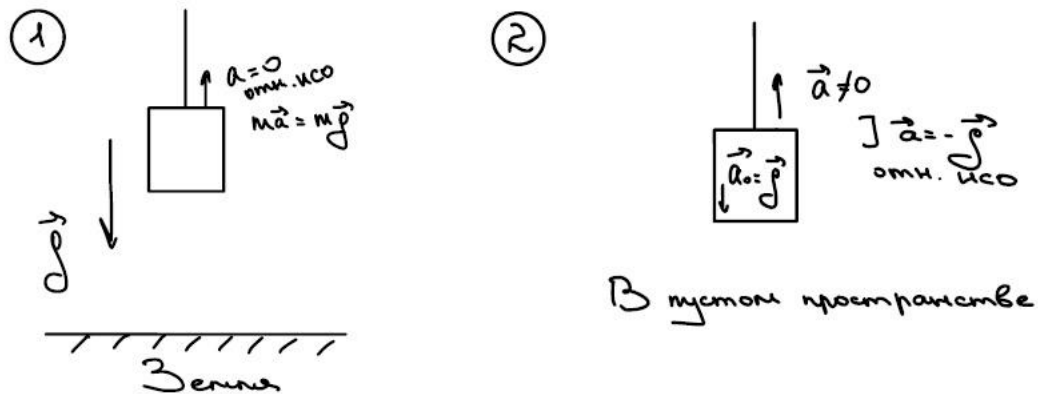


Рис. 15.6: Лифт.

Эйнштейн обобщил:

Все физические явления в равномерно ускоренном лифте будут протекать в точности так же, как и в неподвижном лифте, находящемся в поле тяжести Земли.

## Лекция 16.

# Экспериментальная база специальной теории относительности.

В галилеевских преобразованиях время является абсолютной величиной. Оно не зависит от выбора системы отсчета.

Все хорошо работает до того момента, пока относительные скорости малы.

Ключевой величиной здесь является (в СТО): скорость света, которая имеет конечное значение.

### Постулаты СТО:

1. Все законы природы инвариантны относительно выбора ИСО (принцип относительности Эйнштейна).
2. Свет распространяется в вакууме в любой ИСО с определенной скоростью, которая не зависит ни от скорости источника, ни от скорости наблюдателя (скорость света в вакууме одинакова во всех ИСО и является максимальной скоростью передачи информации).

**Небольшое замечание :** Скорость света не является максимальной скоростью в природе, она является лишь максимальной скоростью передачи информации. Например, "солнечный зайчик" вполне себе может двигаться со скоростью быстрее скорости света.

**Олаф (Оле) Рёмер и Жан Пикар.** Затмение спутника Ио. Ураниборг (рядом с Копенгагеном). Рёмер изучил данные Кассини. (Наблюдали за затмениями спутника своей планеты).

Рёмер: время между затмениями ИО уменьшается, когда Земля приближается к Юпитеру. Почему?

Пусть  $t_1$  и  $t_2$  - время начала и конца затмения. Тогда на Земле эти события будут иметь времена: (Доклад 1676 года)

$$t_{31} = t_1 + \frac{l_1}{c}, \text{ — где } l_1 \text{ — } dist \text{ (Земля - Юпитер в начальный момент времени).}$$

$$t_{32} = t_2 + \frac{l_2}{c}, \text{ — где } l_2 \text{ — } dist \text{ (Земля - Юпитер в конечный момент времени).}$$

$$\Rightarrow T_3 = t_{32} - t_{31} = T + \frac{l_2 - l_1}{c},$$

$$\Rightarrow \text{приближаемся} \Rightarrow l_2 < l_1 \Rightarrow T_3 < T.$$

(Период между вхождением в область тени)

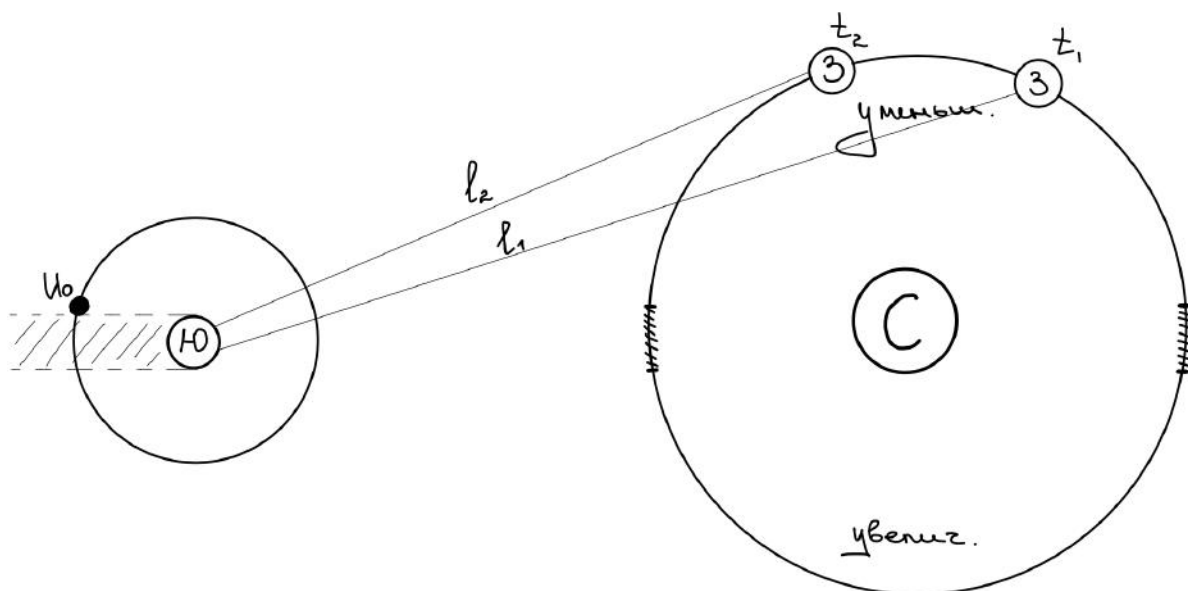


Рис. 16.1: Затмение спутника ИО.

Рёмер вычислил:  $\sim 220000 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ .

**Опыт Физо.** В 1851 году.

Решил в качестве затвора использовать зубчатое колесо.

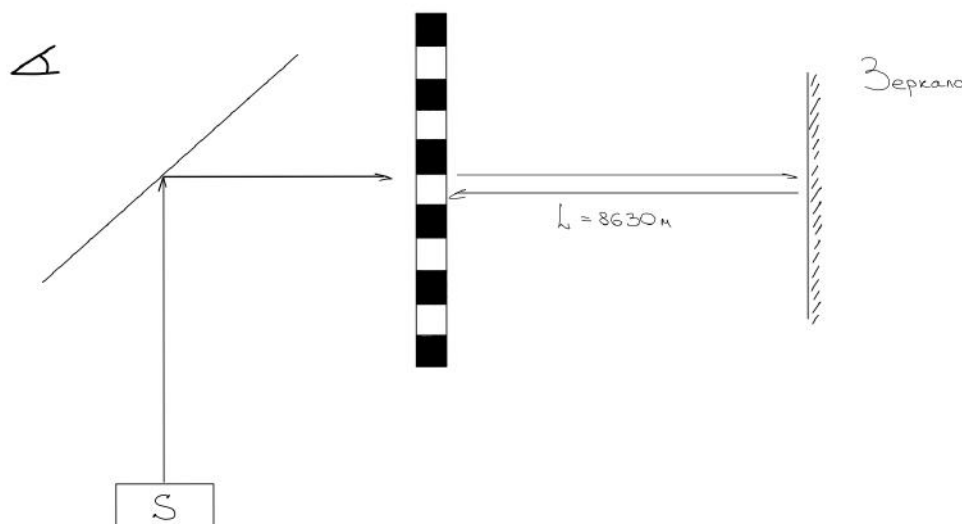


Рис. 16.2: Опыт Физо.

$v = \omega R$ ;  $v = \frac{2\pi R}{T}$ ;  $\Delta\varphi = \omega\Delta t$  Условие исчезновения луча у наблюдателя (за время, пока луч света проходит путь до зеркала и обратно -  $2L$ , зубчатое колесо поворачивается ровно на один зубец - луч, изначально прошедший через дырку между зубцами, на обратном пути попадает на зубец и не доходит до наблюдателя):

$$\Delta t = \frac{2L}{c} = \frac{\Delta\varphi}{\omega}.$$

$\Delta\varphi$  - угол дуги, которая совпадает с величиной зубца.

$\Rightarrow$  можно найти скорость света, если удалось подобрать частоту вращения.

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}; \Delta\varphi = \frac{2\pi}{720}; \frac{2L\omega}{\Delta\varphi} = c,$$

$$\Rightarrow c = \frac{2L \cdot 720}{2\pi} \cdot 2\pi\nu = 1440L\nu.$$

$$\nu \approx 24 \text{ Гц}$$

$$\text{Получил: } 312000 \frac{\text{км}}{\text{с}}$$

Пусть луч параллелен скорости Земли.

1)

$$t_{r1} = t_1 + t_2 = \frac{L_1}{c - v_3} + \frac{L_1}{c + v_3}, \quad (16.1)$$

$$t_{r\perp} = L_1 \frac{2c}{c^2 - v_3^2} = \boxed{\frac{2L_1}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v_3^2}{c^2}}} \approx \frac{2L_1}{c} \cdot \left(1 + \frac{v_3^2}{c^2}\right). \quad (16.2)$$

2)

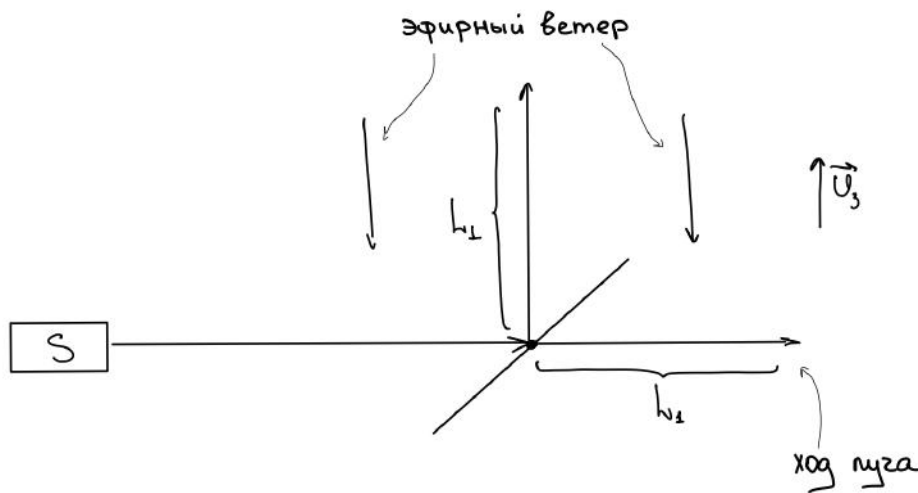


Рис. 16.3: Ход луча.

$$t_{r2} = t'_1 + \dots = 2t'_1 = \frac{2L_2}{c} = \frac{2}{c} \sqrt{L_1^2 + \left(\frac{v_3 t_{r2}}{2}\right)^2}, \quad (16.3)$$

$$\Rightarrow t_{r2}^2 = \frac{4}{c^2} \left( L_1^2 + \frac{v_3^2 t_{r2}^2}{4} \right), \quad (16.4)$$

$$\Rightarrow t_{r2}^2 \left( 1 - \frac{4v_3^2}{4c^2} \right) = \frac{4L_1^2}{c^2}, \quad (16.5)$$

$$\boxed{t_{r2} = \frac{2L_1}{c \sqrt{1 - \frac{v_3^2}{c^2}}}} \approx \frac{2L_1}{c} \left( 1 + \frac{v_3^2}{2c^2} \right). \quad (16.6)$$

Положение полос в конкретной точке экрана интерферометра зависит от разности фаз когерентных волн, пришедших в эту точку. Фазу световой волны можно записать следующим образом:  $\varphi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$ , где  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  - волновой вектор. Таким образом, разность фаз будет зависеть от разности времён, которые затрачивают два разных световых луча до попадания на детектор.

Если бы эфирный ветер существовал, то меняя ориентацию интерферометра, мы изменяли бы разность фаз когерентных световых волн в каждой точке пространства, то есть при повороте интерферометра мы наблюдали бы различную интерференционную картину (наблюдаемые нами линии в таком случае поплыли бы), но этого не было обнаружено.

$$\Delta t = t_{r\perp} - t_{r2} = \frac{L_1}{c} \cdot \frac{v_3^2}{c^2}. \quad (16.7)$$

Задаёт разность хода.

$$\Delta \lambda = c \Delta t. \quad (16.8)$$

Альберт Майкельсон 1926 г.  
Улучшим опыт Фуко:

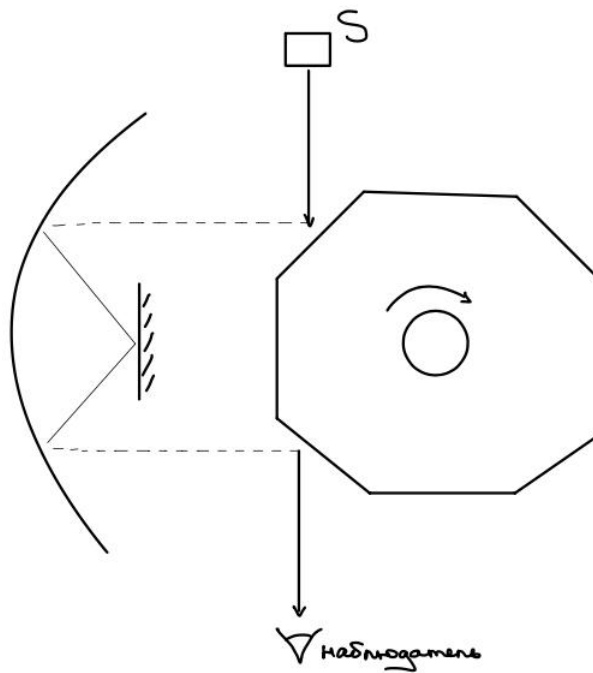


Рис. 16.4: Опыт Физо.

Характерные расстояния:  $\sim 30$  км.

$$c = 299895 \pm 30 \frac{\text{км}}{\text{с}}. \quad (16.9)$$

## 16.1 Эксперимент Майкельсона и Морли.

1881 г. - обнаружение движения Земли относительно эфира.  
Самое простое: Пусть есть эфир, движемся ли мы относительно него?

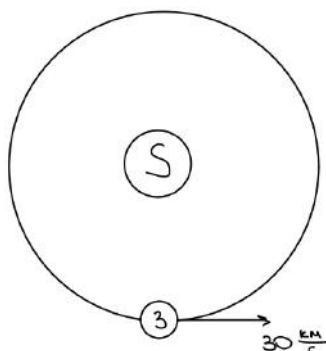


Рис. 16.5: Движение Земли.

Теория эфира предполагает существование эфира, как особого вещества, которое заполняет пространство и служит средой для распространения электромагнитного и гравитационного взаимодействий.

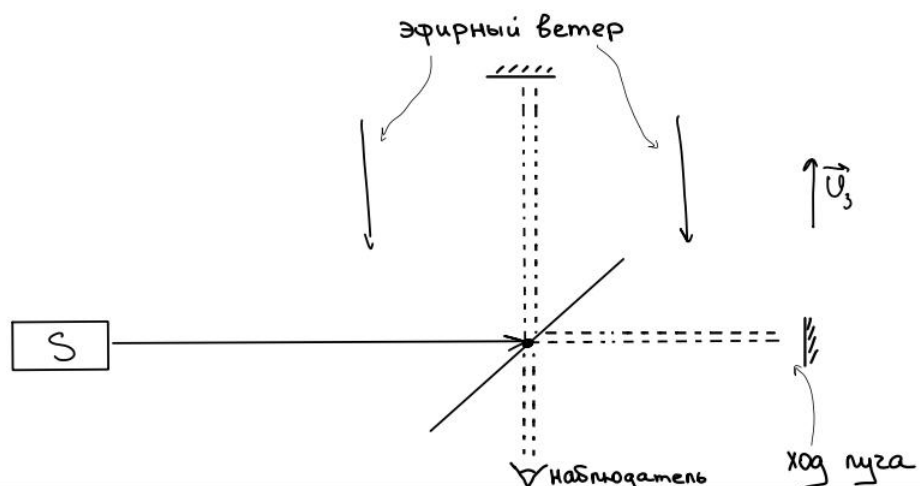


Рис. 16.6: Ход луча. Теория эфира

Все эксперименты выше вели к тому, что от теории эфира надо было отказываться. Теперь вспомним ряд мысленных экспериментов, чтобы получить некоторые следствия к которым нас ведёт СТО (её постулаты).

1) Со стороны наблюдателя **в вагоне**: свет дойдёт до переднего и заднего концов вагона одновременно.

2) Со стороны наблюдателя **вне вагона**: хоть скорость света всё ещё  $c$ , но вагон тоже движется  $\Rightarrow t_1 = \frac{L}{c+v}$  и  $t_2 = \frac{L}{c-v}$ .

Из постоянства скорости света  $\Rightarrow ct_2 = L + vt_2$ .

В этот момент должно закрасться подозрение, что понятие одновременности событий является относительным.

Намёк на то, что и время должно как-то преобразовываться.



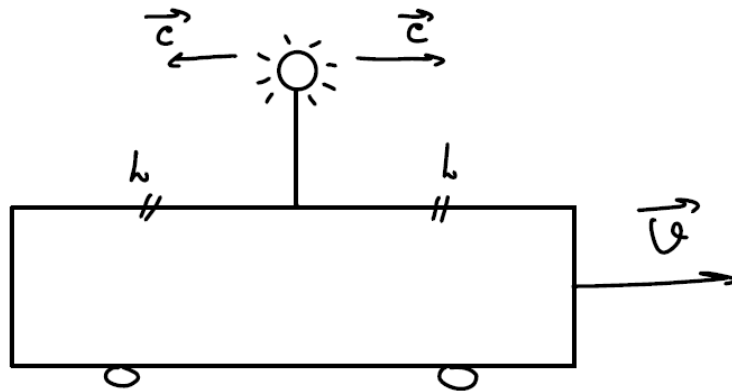


Рис. 16.7: Движение света в движущемся вагоне.

## 16.2 Изменение интервалов времени и длин

Рассмотрим световые часы: 2 зеркала без потерь энергии.

$$\tau_0 = \frac{2l}{c}.$$

Пусть часы движутся вдоль оси  $OX$ :

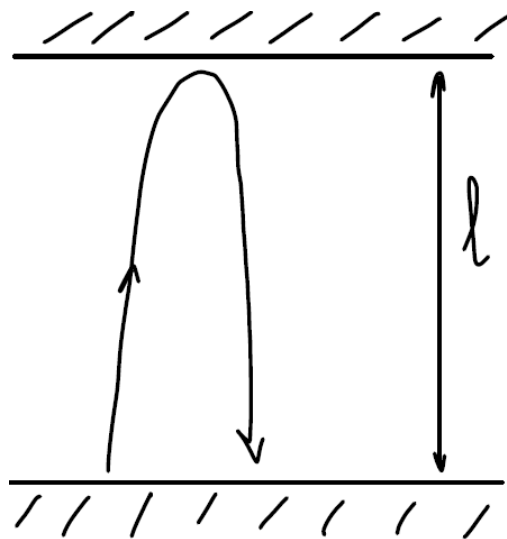


Рис. 16.8: Ход светового луча в световых часах.

$\tau_0$  – период в системе  $K'$ . Чему равен период в системе  $K$ ?  
Вид в  $K$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{v\tau}{2}\right)^2 + l^2 &= \left(\frac{c\tau}{2}\right)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \tau &= \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \geq \tau_0. \end{aligned} \quad (16.10)$$

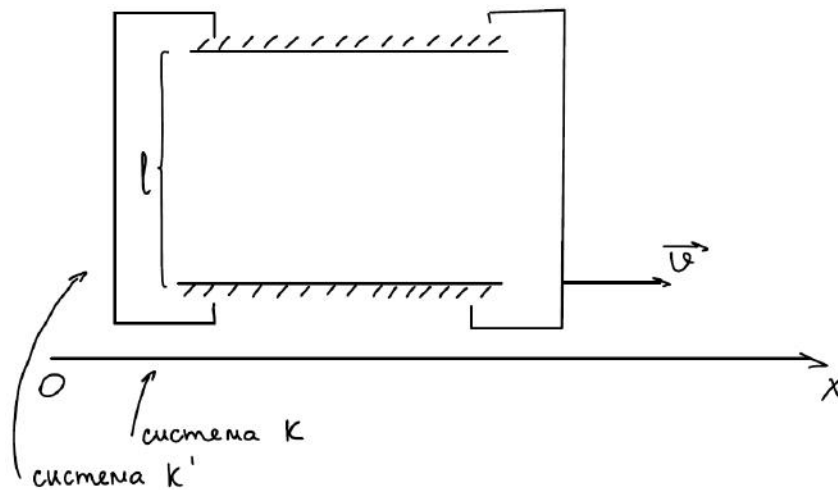
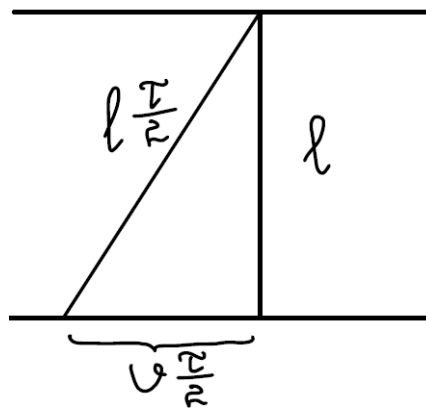


Рис. 16.9: Движение закреплённых световых часов.

Рис. 16.10: Проходимый путь глазами наблюдателя из системы  $K$ .

Таким образом этот процесс займёт больше времени (эффект замедления).  
 Переворачиваем часы (направление оси с часами).

$$\tau_0 = \frac{2l_0}{c} \text{ — в системе } K'.$$

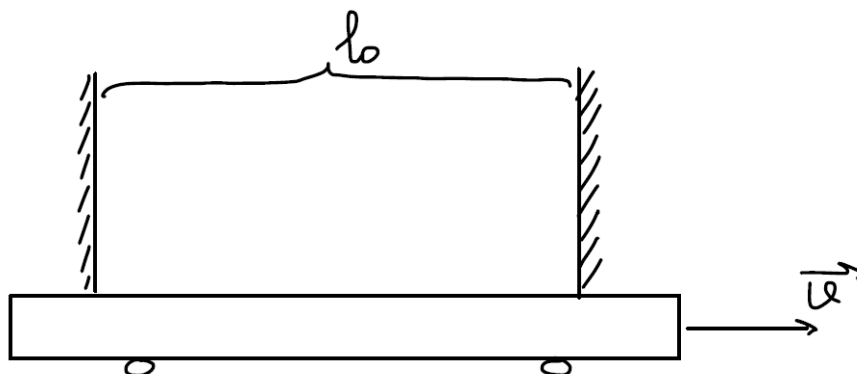


Рис. 16.11: То же движение световых часов, но повернули ось с часами.

$\tau - ?$

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} t_1 c = l + vt_1, \\ l = t_2 c + vt_2. \end{cases} \\
&t_1 = \frac{l}{c-v}; \quad t_2 = \frac{l}{c+v} \implies \tau = t_1 + t_2 \\
&\tau = \frac{2l}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\
&\tau = \frac{2l_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \implies \\
&\implies \boxed{l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \tag{16.11}
\end{aligned}$$

$\implies$  Длина, которую видит наблюдатель в  $K$  меньше той, которую имеет объект в системе, где он покоится!

### 16.3 Синхронизация часов

Выполним процедуру синхронизации.

Часы в точке  $O$  показывают  $t_1$  и  $t_2$ .



Рис. 16.12: Синхронизация часов.

Так как время полёта луча в одну сторону  $\frac{t_2 - t_1}{2} \implies$  то если мы отправляем из  $O$  сигнал с  $t_1$ , то в  $A$  надо установить  $t_1 + \frac{t_2 - t_1}{2} = \frac{t_2 + t_1}{2}$ . Т.е. в 1-й раз можно измерить и найти  $\Delta t = \frac{t_2 - t_1}{2}$ .

В момент  $t_3$  ещё раз отправить сигнал: в нём должна быть зашита информация  $t_3 + \Delta t$ . Такое время должно быть установлено на часах  $A$  в момент получения сигнала.

## Лекция 17.

### Преобразования Лоренца.

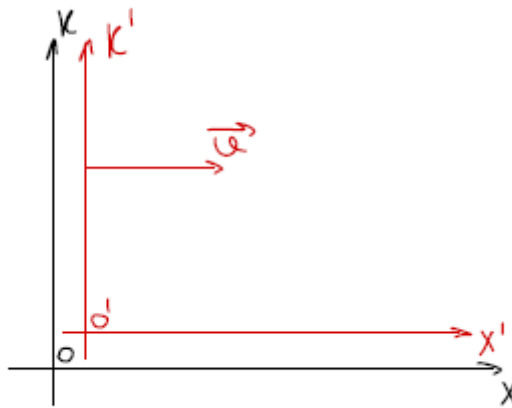


Рис. 17.1: Системы отсчёта  $K$  и  $K'$ .

Будем считать, что в системе  $K$  в момент времени, когда  $t = 0$ , совпадают начала отсчётов систем  $K$  и  $K'$ . Когда это происходит, соответственно  $t' = 0$ . Проведём аналогию: кладём один конец стержня в начало координат системы  $K'$ , обозначим его изначальную длину за  $l_0$ . В релятивистском случае из материала прошлой лекции мы знаем, что в системе отсчёта  $K$  его длина при движении составляет:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{l_0}{\gamma}, \text{ где } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (17.1)$$

У другого конца стержня же в это время должна быть какая-то координата. Положим  $x = l$  (численно). Понятно, что:

$$x = \frac{x'}{\gamma}. \quad (17.2)$$

Это же справедливо для любой координаты (например, в нулевой момент времени):

$$x(0) = \frac{x'}{\gamma}. \quad (17.3)$$

За время  $t$  смещение составит:

$$x = \frac{x'}{\gamma} + Vt$$

$$\Rightarrow \boxed{x' = \gamma(x - Vt)}. \quad (17.4)$$

**Небольшое замечание :** Если мы решим перейти в систему отсчёта  $K'$ , то несложно будет получить аналогичные преобразования для  $x$  (скорость движения  $K$  относительно  $K'$  в таком случае будет равна  $-V$ , а  $K'$  и  $K$  абсолютно равноправны, поэтому) :

$$\boxed{x = \gamma(x' + Vt')}. \quad (17.5)$$

Теперь займемся преобразованием времени. Рассмотрим такое событие: запускаем луч из начала координат обеих систем (поскольку в начальный момент времени они совпадают) в начальные моменты времени  $t = 0$  и  $t' = 0$ . Пусть в каждой системе отсчёта находится очень много синхронизированных во всякой точке часов. За время  $t$  в системе  $K$  луч доходит в точку с координатой  $x_2 = ct$  (в этой точке стоят часы, синхронизированные с началом координат). В системе отсчёта  $K'$  это же событие имеет координату  $x_2' = ct_2'$ . Из преобразования координат нам известно:

$$ct = x_2 = \frac{x_2'}{\gamma} + Vt = \frac{ct_2'}{\gamma} + Vt. \quad (17.6)$$

Отсюда время события  $t'$  в системе отсчёта  $K'$  выражается через время  $t$  в системе отсчёта  $K$  следующим образом:

$$t_2' = \gamma t(1 - \beta), \text{ где } \beta = \frac{V}{c}. \quad (17.7)$$

С другой стороны, часы системы  $K'$ , с точки зрения наблюдателя в системе отсчёта  $K$  находятся в тот же момент времени  $t$  в координате  $x_1 = Vt$ , однако мы знаем, что сами часы в системе отсчёта  $K'$  показывают время:

$$t_1' = t\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{t}{\gamma}. \quad (17.8)$$

Это событие занимает меньше времени в системе отсчёта  $K'$ . Таким образом, есть два события, которые в системе отсчёта  $K$  происходят в один момент времени  $t$  в разных местах. Из-за этого в системе отсчёта  $K'$  они происходят в разные моменты времени:

$$x_1 = Vt \Rightarrow t_1' = \frac{t}{\gamma}, \quad (17.9)$$

$$x_2 = ct \Rightarrow t_2' = \gamma t(1 - \beta). \quad (17.10)$$

Рассмотрим разность во времени в системе отсчёта  $K'$  между этими двумя одновременными событиями в системе отсчёта  $K$ :

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \gamma t(1 - \beta) - \frac{t}{\gamma} = t(c - V) \frac{\gamma(1 - \beta) - \frac{1}{\gamma}}{c - V}. \quad (17.11)$$

С другой стороны,

$$\Delta x = x_2 - x_1 = (c - V)t. \quad (17.12)$$

Подставляя это в выведенную ранее формулу для разницы времени и проводя некоторые преобразования, получаем:

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \frac{\gamma^2(1 - \beta) - 1}{\gamma(c - V)} \Delta x = \frac{\frac{1}{1 - \beta^2}(1 - \beta) - 1}{\gamma c(1 - \beta)} \Delta x = \frac{\frac{1}{1 + \beta} - 1}{\gamma c(1 - \beta)} \Delta x = \frac{1 - 1 - \beta}{\gamma c(1 - \beta)(1 + \beta)} \Delta x = \\ &= -\frac{\beta}{\gamma c \frac{1}{\gamma^2}} \Delta x = \boxed{-\frac{\beta \gamma}{c} \Delta x}. \end{aligned} \quad (17.13)$$

Вернёмся немного назад. У нас есть координаты и их связь в виде какого-то события:  $x' = \gamma(x - Vt)$ . Посмотрим на время в каждой из точек в каждой из систем отсчёта: если в этой произвольной точке едут и показывают время в системе отсчёта  $K'$  часы, то координата этих часов в системе отсчёта  $K$  в начальный момент времени равна  $x - Vt$ , то есть отставание от опорных часов в системе отсчёта  $K'$  (часов в начале координат) составляет:

$$\Delta t' = (x - Vt - 0) \left( -\frac{\gamma \beta}{c} \right) = (x - Vt) \left( -\frac{\gamma \beta}{c} \right). \quad (17.14)$$

$$t' = \frac{t}{\gamma} + \Delta t'. \quad (17.15)$$

$$t' \big|_{x' \neq 0} - t'_{\text{опорные}} \big|_{x'=0} = \Delta t', \quad (17.16)$$

$$t' = \frac{t}{\gamma} + \Delta t' = \frac{t}{\gamma} + (x - vt) \left( -\frac{\gamma \beta}{c} \right), \quad (17.17)$$

$$\text{При этом, чисто алгебраически } \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2}. \quad (17.18)$$

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t}{\gamma} - x \frac{\gamma \beta}{c} + t \gamma \beta^2 \\ &= t \left( \frac{1}{\gamma} + \gamma \beta^2 \right) - \frac{\gamma \beta}{c} x \\ &= t \left( \frac{1}{\gamma} + \gamma - \frac{1}{\gamma} \right) - \frac{\gamma \beta}{c} x = \gamma \left( t - \frac{\beta}{c} x \right) = \gamma \left( t - \frac{\beta}{c} x \right). \end{aligned} \quad (17.19)$$

Таким образом, преобразования Лоренца для одномерного случая выглядят как:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt). \\ t' &= \gamma \left( t - \frac{\beta}{c} x \right). \\ y' &= y. \\ z' &= z. \end{aligned}}$$

Если же мы будем переходить в обратную сторону, то координата и время примут вид

$$x' = \gamma(x + vt). \quad (17.20)$$

$$t' = \gamma \left( t + \frac{\beta}{c} x \right). \quad (17.21)$$

При решении различных задач удобно зафиксировать такие отношения между координатами во времени и пространстве: для двух событий с координатами в  $K$  ( $x_1, t_1$ ) и ( $x_2, t_2$ ), а в  $K'$  — ( $x'_1, t'_1$ ) и ( $x'_2, t'_2$ ) изменения координат,

$$\Delta x = x_2 - x_1, \quad (17.22)$$

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1, \quad (17.23)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1, \quad (17.24)$$

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1. \quad (17.25)$$

$$(17.26)$$

Будут связаны как:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t), \quad (17.27)$$

$$\Delta \tau' = \gamma(\Delta \tau - \frac{\beta}{c}\Delta x). \quad (17.28)$$

В этот момент наших рассуждений мы замечаем, что было бы удобнее уравнивать в правах время и пространство — для этого перейдём от времени  $t$  к величине  $\tau = ct$ , которая измеряется в метрах. Тогда наши соотношения запишутся как

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta\Delta \tau), \quad (17.29)$$

$$\Delta \tau' = \gamma(\Delta \tau - \beta\Delta x). \quad (17.30)$$

Чудеса симметрии!

## 17.1 Собственное время

Собственное время какого-то объекта — время часов, которые перемещаются вместе с ними. Покажем, что собственное время некоего процесса — минимальное среди времени этого процесса, измеряемого в различных ИСО. Вспомним об эффекте замедления времени: если есть некая система  $K'$ , вместе с которой движутся часы, то они и будут показывать собственное время системы.

$$t_{\text{собст}} = \Delta t'. \quad (17.31)$$

При этом в  $K$ , относительно которого движется наша система, это же движение произойдёт за

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + \beta\Delta x'), \quad (17.32)$$

$$\text{где, по построению, } \Delta x' = 0, \quad (17.33)$$

$$\Delta t = \gamma\Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (17.34)$$

Так как мы постулируем максимальность скорости света, то подкоренное выражение не больше единицы — так как корень находится в знаменателе, то  $\Delta t \geq \Delta t'$ , причём равенство достигается лишь при  $v = 0$ , что мы и хотели показать.

### 17.1.1 Регистрация мюонов на поверхности Земли

При попадании высокоэнергетических атомов в атмосферу они вступают в реакцию, которая приводит к расщеплению старых частиц и рождению новых. Один из продуктов распада — мюон  $\mu^\pm$ . Время жизни мюона в его системе отсчёта  $t_{\text{собст}} = 2 \cdot 10^{-6}$  с. Скорость мюона составляет где-то  $v = 0,998c$ . В классической механике это бы значило, что за своё существование он бы пролетал не больше  $vt_{\text{собст}} = 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \approx 600$  м.

Но в реальности мюоны наблюдаются даже у поверхности Земли! Это связано с релятивистскими эффектами:

1. Для мюона продольные расстояния до поверхности значительно сокращаются,

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (17.35)$$

$$vt_{\text{собст}} = l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (17.36)$$

2. Для наблюдателя на поверхности Земли время распада мюона также становится больше

$$t = \gamma t_{\text{собст}} = \frac{t_{\text{собст}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (17.37)$$

$$l_0 = vt = \gamma vt_{\text{собст}} = \frac{vt_{\text{собст}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (17.38)$$

С обеих точек зрения мюон достигает поверхности Земли.

## 17.2 Сокращение длины

Заметим, что из наших общих преобразований промежутков пространства можно вывести полученный нами ранее результат сокращения длины.

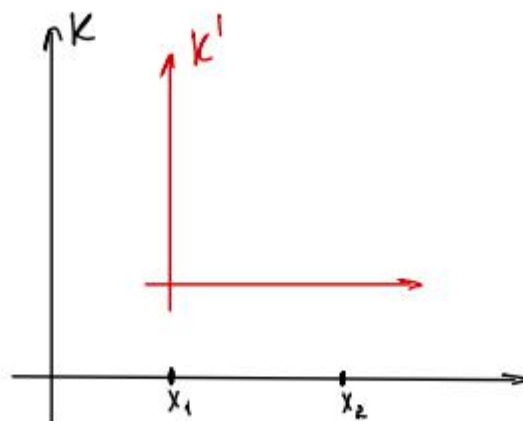


Рис. 17.2: Сокращение длины.



Рассмотрим систему  $K'$ , которая движется относительно  $K$  со скоростью  $v$ , и стержень, длина которого в  $K'$   $\Delta x' = l$ . Рассмотрим его длину в системе  $K$   $\Delta x = l_0$  в какой-то момент времени ( $\Delta t = 0$ )

$$\Delta x' = l_0 = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = \gamma l, \quad (17.39)$$

$$l = \frac{l_0}{\gamma} = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (17.40)$$

Другой способ получить тот же результат — рассмотреть какую-то одну точку ( $\Delta x = 0$ ), через которую в системе  $K$  пролетает сначала конец, а потом и начало стержня. Тогда, из простых кинематических соображений,

$$\Delta t = \frac{l}{v}. \quad (17.41)$$

$$\Delta x' = x'_{\text{начало}} - x'_{\text{конец}} = -l_0. \quad (17.42)$$

$$-l_0 = \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = -\gamma v \frac{l}{v}, \quad (17.43)$$

$$\boxed{l = \frac{l_0}{\gamma} = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (17.44)$$

Таким образом, преобразования Лоренца позволяют нам получать частные результаты не хитростью ума и ловкостью рук, а выводить их из более общего принципа.

## Лекция 18.

### СТО. Часть 2

В нерелятивистской теории нам были хорошо известны различные сохраняющиеся величины (которые при переходе из одной ИСО в другую не меняются), такие величины называются инвариантами, например, время, длина. Однако такие величины уже не будут инвариантами относительно преобразований Лоренца.

Знакомимся с первым инвариантом:  $\Delta S$  - интервал

Пусть  $\Delta\tau = c\Delta t$ .

$$\Delta S = \sqrt{(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2} = \quad (18.1)$$

$$\begin{aligned} &= \gamma \sqrt{(\Delta\tau' + \beta\Delta x')^2 - (\Delta x' + \beta\Delta\tau')^2} \\ &= \sqrt{(\Delta\tau')^2 - (\Delta x')^2} = \Delta S'. \end{aligned} \quad (18.2)$$

где  $\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta\Delta\tau)$ ,

$\Delta x = \gamma(\Delta x' + \beta\Delta\tau)$ ,

$\Delta\tau' = \gamma(\Delta\tau - \beta\Delta x)$ ,

$\Delta\tau = \gamma(\Delta\tau' + \beta\Delta x')$ .

**Обсудим причинность.**

Рассмотрим 2 события с координатами (1)( $x_1; \tau_1$ ) и (2)( $x_2; \tau_2$ ) в одной из ИСО.

Пусть (1) есть причина (2), т.е.  $x_2 - x_1 < c(t_2 - t_1)$ .

Пусть скорость взаимодействия будет  $v_0$ , тогда  $x_2 - x_1 = v_0(t_2 - t_1) < c(t_2 - t_1)$ .

Сохраняется ли его причинность? (или время второго события (его наступления) случается после времени первого)

$$\Delta\tau' = c(t'_2 - t'_1) = \gamma(\Delta\tau - \beta\Delta x) = \gamma \left[ c\Delta t - \frac{V}{c}v_0\Delta t \right] = \quad (18.3)$$

$$= c\gamma\Delta t \left[ 1 - \frac{Vv_0}{c^2} \right] > 0. \quad (18.4)$$

#### 18.1 Фотография объемных (движущихся) тел

Взаимодействие с объектом (то, как мы его видим) осуществляется за счет света (фотонов).

Со стержнем вопросов нет:

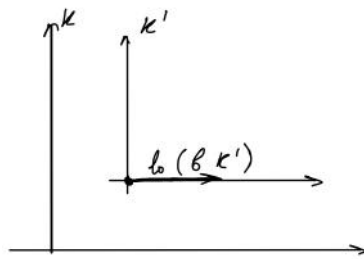


Рис. 18.1: Стержень в системе отсчета  $K'$ .

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{l_0}{\gamma}.$$

Теперь рассмотрим объемный предмет, например, куб. Хотим изучить его размер  $\Rightarrow$  делаем фотографию, т.е. в один момент времени регистрируем начало и конец.  $t_{\text{исп}}$  - момент.

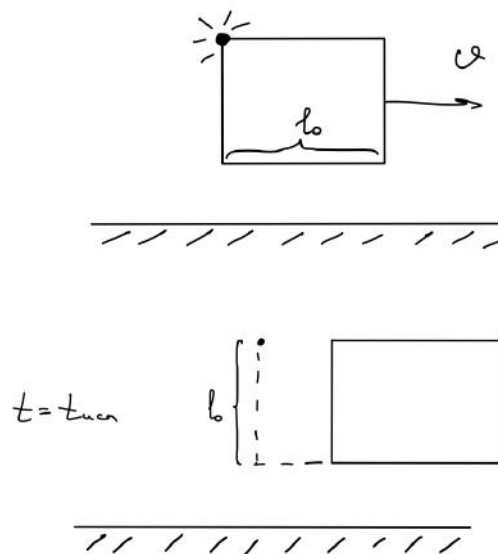


Рис. 18.2: Задача на куб, испускающий сигнал.

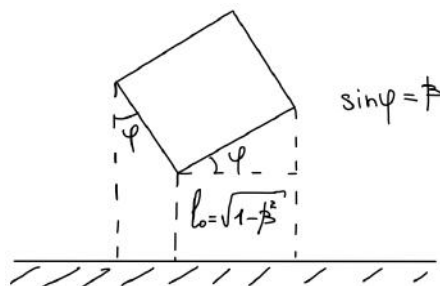


Рис. 18.3: Как мы будем видеть куб.

На фотографии: Поперечные размеры мы видим как  $l_0 \Rightarrow$  свет проходит этот путь

за  $\frac{l_0}{c}$ , т.е. кубик смещается на

$$v \cdot \frac{l_0}{c}.$$

## 18.2 Парадокс шеста и сарая

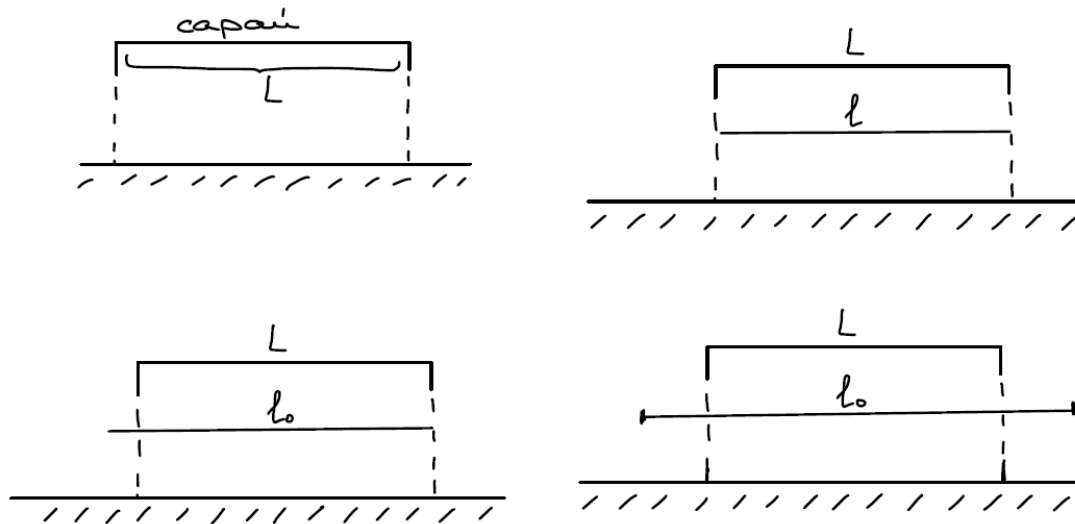
Вопрос об одновременном нахождении обоих концов стержня в сарае.

Парадокс: пусть шест будет более длинным, чем сарай и он летит со скоростью  $v$ .

Собственная длина шеста:  $l_0$

Длина сарая:  $L$

Вопрос нашего видения (из нашей ИСО)



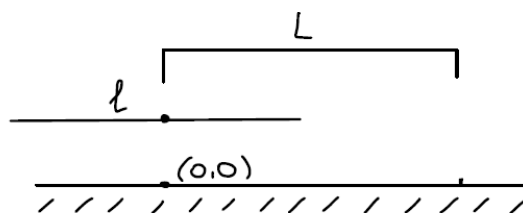
В этот момент одновременно можем закрыть двери, то есть он поместился в сарай.

Тогда говорим: СТОП! В системе отсчёта стержня сарай кажется ещё короче. И как же мы закроем двери? Дело в том, что одновременное закрытие дверей в СО сарая не будет одновременным в СО стержня!

В системе сарая:

Событие 1: влетает передним концом.

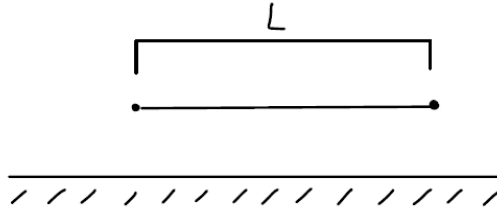
$$(ct_1, x_1) = (0, 0). \quad (18.5)$$



Событие 2: влетает задний конец.

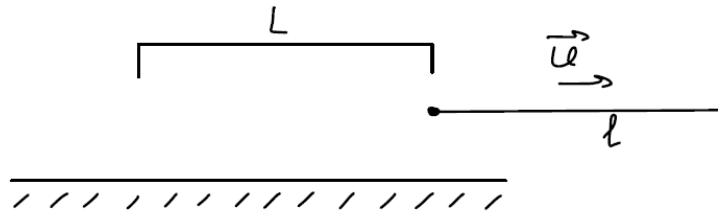
$$\square L = l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (18.6)$$

$$(ct_2, x_2) = \left(\frac{l}{v} \cdot c, 0\right) = \left(\frac{l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v} \cdot c, 0\right) = \left(L \cdot \frac{c}{v}, 0\right). \quad (18.7)$$



Событие 3: вылетает передний конец (одновременно с событием 2).

$$(ct_3, x_3) = \left(\frac{l}{v} \cdot c, 0 + l\right) = \left(L \frac{c}{v}, L\right). \quad (18.8)$$



Событие 4: вылетает задний конец.

$$(ct_4, x_4) = \left(2 \cdot \frac{l}{v} \cdot c, l\right). \quad (18.9)$$

А с точки зрения шеста:

$$(ct'_1, x'_1) = (0, 0) \quad (18.10)$$

$$\boxed{x' = \gamma(x - vt)}. \quad (18.11)$$

$$\boxed{t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2} \cdot x\right)}. \quad (18.12)$$

$$(ct'_2, x'_2) = \left(\gamma \frac{Lc}{v}, -\gamma \cdot L\right) = \left(l_0 \frac{c}{v}, -l_0\right) - \text{логично}; \quad (18.13)$$

$$(ct'_3, x'_3) = \left(c\gamma\left(\frac{l}{v} - \frac{v}{c^2}l\right), \gamma\left(l - v \cdot \frac{l}{v}\right)\right) = \left(\frac{c}{v}l_0\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), 0\right), \quad (18.14)$$

$$\text{то есть не одновременно с событием 2, а раньше.} \quad (18.15)$$

Событие 4:

$$\begin{aligned} (ct'_4, x'_4) &= \left(c\gamma\left(2\frac{l}{v} - \frac{v}{c^2}l\right), \gamma\left(l - v \cdot 2\frac{l}{v}\right)\right) = \\ &= \left(c\frac{l_0}{v}\left(2 - \frac{v^2}{c^2}\right), l_0(-1)\right) = \left(2c\frac{l_0}{v}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), -l_0\right). \blacksquare \end{aligned} \quad (18.16)$$

### 18.3 Преобразование скорости

Пусть у нас есть материальная точка, которая движется со скоростью  $v_x$  в системе  $K$  и  $v'_x$  в системе  $K'$  (обе системы – инерциальные). В обычном случае (не СТО):

$$\boxed{v_x = V + v'_x}. \quad (18.17)$$

А как же в СТО?

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - Vdt}{dt - \frac{V}{c^2}dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - V}{1 - \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \boxed{v'_x &= \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}}. \end{aligned} \quad (18.18)$$

Значения  $dx'$  и  $dt'$  получили, взяв дифференциал следующих знакомых выражений:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - Vt), \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right). \end{aligned}$$

А что будет с перпендикулярным направлением (проекцией на ось  $y$  или  $z$ )? Вспомним, что  $dy|z' = dy|z$

$$\begin{aligned} v'_{y|z} &= \frac{dy|z'}{dt'} = \frac{dy|z}{\gamma\left(dt - \frac{V}{c^2}dx\right)} = \frac{v_{y|z}}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}v_x\right)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \boxed{v'_{y|z} &= \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}v_{y|z}}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}}. \end{aligned} \quad (18.19)$$

## Лекция 19.

## Кинематика СТО. Часть 3

### 19.1 Абберрация света

**Абберрация света** – изменение направления фронта плоской волны при смене СО. Волновой вектор, характеризующий направление распространения волнового фронта, будем ассоциировать с движением луча (фотонов).

Свет идёт к нам в глаза со скоростью  $c$ . В системе отсчёта Солнца:

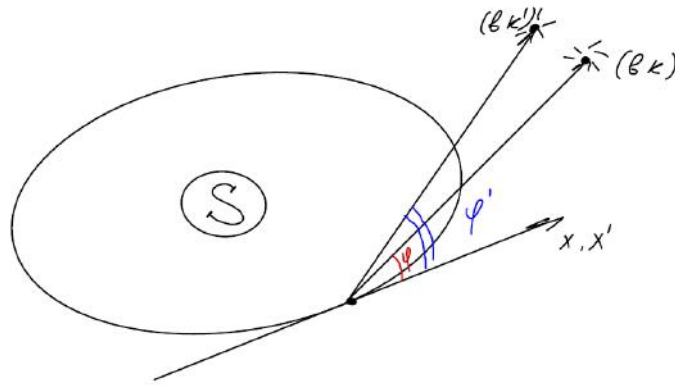


Рис. 19.1: Кажущееся отклонение светила.

$$v_x = -c \cos(\varphi), \quad (19.1)$$

$$v'_x = -c \cos(\varphi'). \quad (19.2)$$

Исходя из полученной в прошлой главе формулы для скорости  $v'_x$  18.18:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 + \frac{c \cos(\varphi) V}{c^2}} \Rightarrow \quad (19.3)$$

$$\Rightarrow \cos(\varphi') = \frac{\cos(\varphi) + \beta}{1 + \beta \cos(\varphi)}. \quad (19.4)$$

Несложно высчитать, используя ряд Тейлора и вынеся  $\cos \varphi$ , что полученное выражение преобразуется до:

$$\cos \varphi' = \cos \varphi \left[ 1 + \beta \left( \frac{1}{\cos \varphi} - \cos \varphi \right) \right] + \dots \quad (19.5)$$

В одном случае – приближается, а в другом – отдаляется.

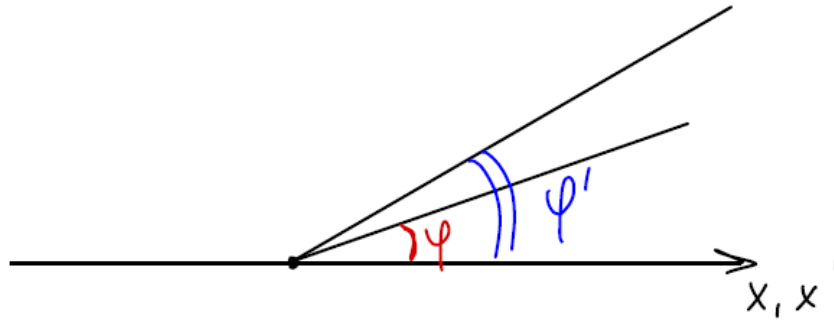


Рис. 19.2: Изменение угла до светила.

## 19.2 Эффект Доплера

### 19.2.1 Классический

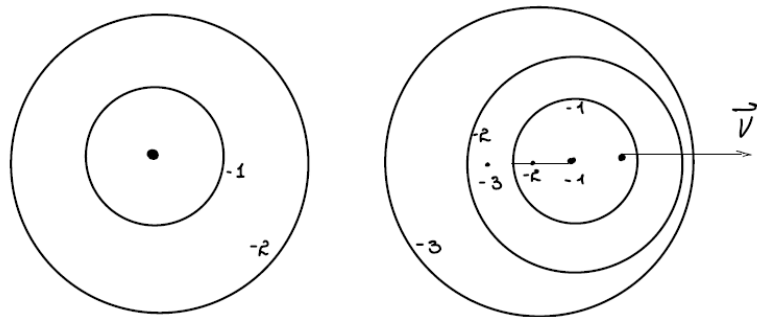


Рис. 19.3: Эффект Доплера.

Какова длина волны?

$V$  – скорость источника относительно среды ( $>0$ , если удаляется и  $<0$ , если приближается).  $T_1$  – период испускания волн источником. Пусть удаляется (как на рисунке):

$$\begin{aligned}\lambda &= T_1 c + V T_1 = T_1 (c + V) \\ \lambda &= \frac{1}{\nu_0} (c + V).\end{aligned}\tag{19.6}$$

На приёмнике регистрируем:

$$\begin{aligned}\frac{1}{T} &= \nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{T_1 (c + V)}, \\ T &= T_1 \left( 1 + \frac{V}{c} \right).\end{aligned}\tag{19.7}$$

В случае сближения:  $T = T_1 \left( 1 - \frac{V}{c} \right)$ .



### 19.2.2 СТО

$T_1$  – это время процесса (испускания сигналов) в системе наблюдателя, т. е. замедленная версия того, что в СО источника:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \\ \Rightarrow T &= \frac{T_0 \left(1 - \frac{V}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (19.8)$$

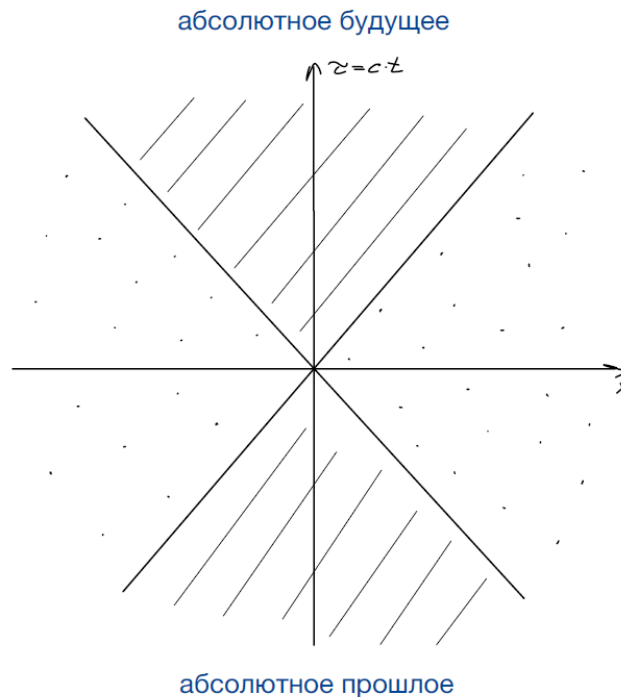
Продольный эффект:  $T = \frac{T_0 \left(1 - \frac{V}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$

Поперечный эффект:  $T = \gamma T_0.$

## 19.3 Пространство Минковского.

Итак, пространство Минковского - пространство событий точек  $(ct, x, y, z)$  с длиной, задаваемой интервалом.

Траектория материальной точки в таком пространстве называется мировой линией. Обычно рассматривается одномерное движение (в осях  $OX, O\tau(\tau = ct)$ ). Получаем диаграмму Минковского:

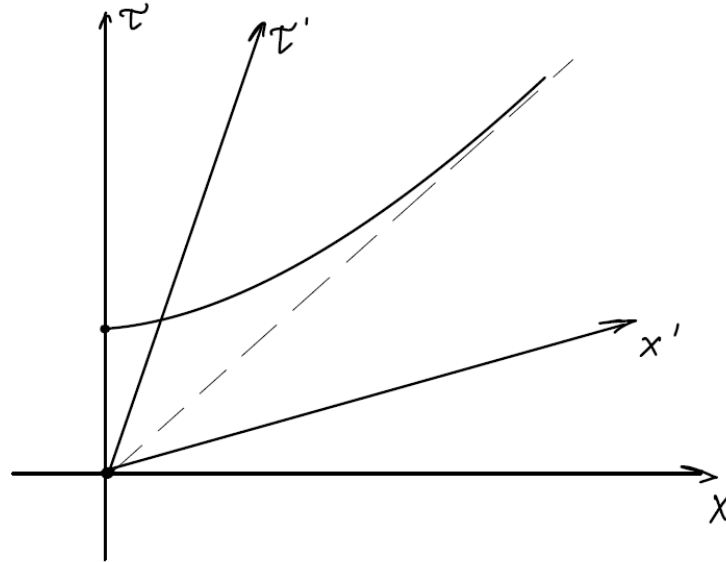


В штрихованной области любое событие связано с событием в начале координат **времениподобными** интервалами. Эти области называются абсолютным прошлым и

абсолютным будущим.

Области точек называются **абсолютно удалёнными** областями.

Изобразим события в разных системах отсчёта. Для этого мы хотим изобразить на рисунке оси системы отсчёта  $K'$ , которая движется со скоростью  $V$  вдоль направления  $X$  относительно системы отсчёта  $K$ . Из преобразований Лоренца помним, что:



$$x' = \gamma(x - \beta\tau), \quad (19.9)$$

$$\tau' = \gamma(\tau - \beta x). \quad (19.10)$$

Ось  $OX$  задаётся простым уравнением:  $\tau = 0$ , ось  $O\tau$  задаётся простым уравнением:  $x = 0$ . Аналогично ось  $OX'$  задаётся уравнением  $\tau' = 0$  и ось  $O\tau'$  уравнением  $x' = 0$ . Таким образом, найдём оси системы отсчёта  $K'$ :

$$\tau' = 0 \Rightarrow \tau = \beta x, \quad (19.11)$$

$$x' = 0 \Rightarrow \tau = \frac{1}{\beta}x. \quad (19.12)$$

Изобразим их, учитывая, что  $\beta = v/c < 1$ .

Посмотрим, как ведёт себя единичный отрезок, который в свою очередь определяется интервалом:

$$\Delta S = \sqrt{\Delta\tau^2 - \Delta x^2}. \quad (19.13)$$

Рассмотрим событие  $(0; 0)$  и  $(1; 0)$ : между ними  $\Delta S = 1$ , мы знаем, что он сохраняется.

Если мы захотим отметить единичную длину (отрезок) в системе отсчёта  $K'$ , то пользуемся интервалом. Например:

$$\Delta S = 1 = \sqrt{1 - 0}. \quad (19.14)$$

Нанесём кривую, события которой будут отделены событием  $(0; 0)$  интервалом  $\Delta S = 1$ . Посмотрим её пересечение с прямой  $\tau = 1/\beta x$ .

$$\begin{aligned} 1 &= \sqrt{\tau^2 - x^2} \Rightarrow \tau = \sqrt{1 + x^2}, \\ \sqrt{1 + x^2} &= \frac{1}{\beta}x \Rightarrow x^2 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \Rightarrow x = \beta\gamma, \quad \tau = \gamma. \end{aligned} \quad (19.15)$$

$(x; \tau)$  - точка пересечения. Точка соответствует также и единичной длине в системе отсчёта  $K'$ . Перепроверим:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(\beta\tau - \beta\gamma) = 0, \\ \tau' &= \gamma(\gamma - \beta^2\gamma) = \gamma^2(1 - \beta^2) = \frac{\gamma^2}{\gamma^2} = 1. \end{aligned} \quad (19.16)$$

Таким образом, мы нашли, где будет единичка системы  $K'$ , когда смотрим на оси в системе  $K$ .

Покажем, как можно пользоваться этими диаграммами:

### 19.3.1 Одновременность и неподвижность

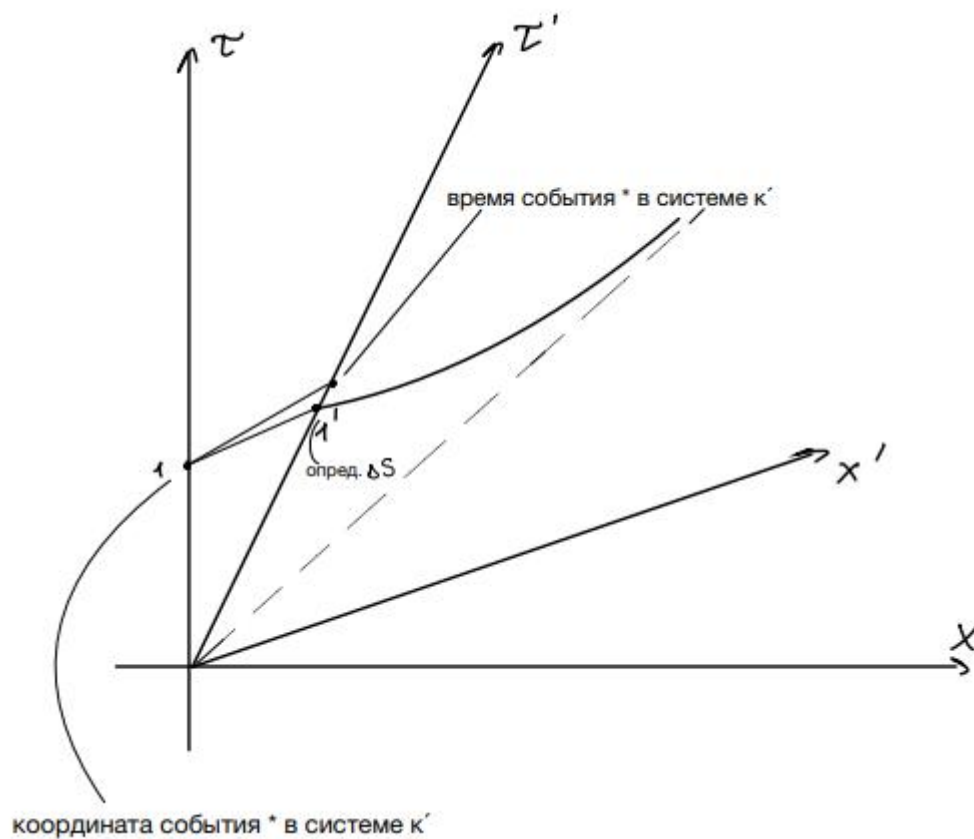


Рис. 19.4: Событие в различных системах отсчёта.

Пусть  $\beta = 0,3$ ; тогда  $\gamma \approx 1,05$ .

$$\begin{aligned} \tau' &= 1,05 \cdot (1 - 0), \\ x' &= 1,05 \cdot (0 - 0,3 \cdot 1) \approx -0,31. \end{aligned} \quad (19.17)$$

Теперь нанесём на диаграмму линии, соответствующие одновременности и неподвижности в  $K$  и  $K'$ .

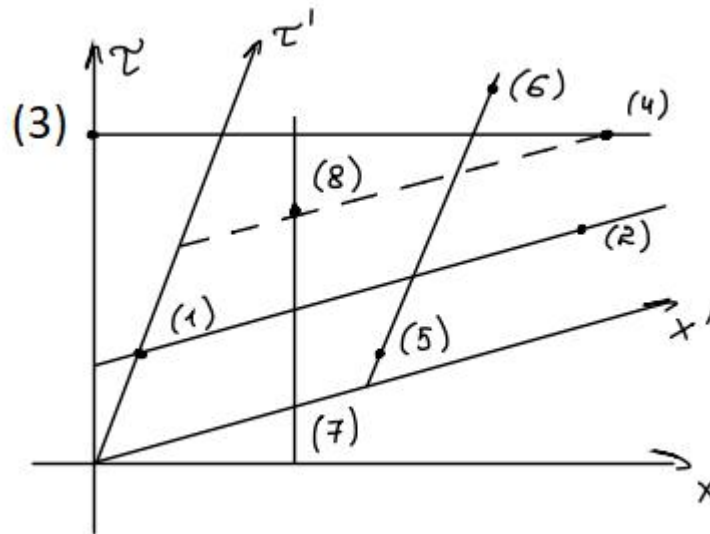


Рис. 19.5: Одновременность и неподвижность на диаграмме Минковского.

- (1) и (2) одновременны в  $K'$
- (3) и (4) одновременны в  $K$
- (5) и (6) находятся в одной точке пространства в  $K'$
- (7) и (8) находятся в одной точке пространства в  $K$

### 19.3.2 Замедление времени

Рассмотрим часы, пусть их с какой-то скоростью относительно часов в начале отсчёта, с которыми их изначально синхронизировали. Из диаграммы элементарно заметить, что время некоего события  $A$  зависит от выбора системы отсчёта — причём, в  $K'$  время будет больше, чем в  $K$ .

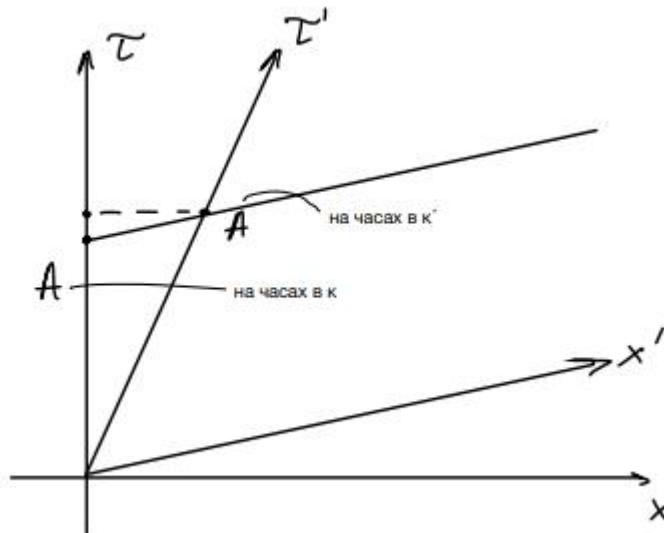


Рис. 19.6: Замедление времени на диаграмме Минковского.

### 19.3.3 Изменение длины

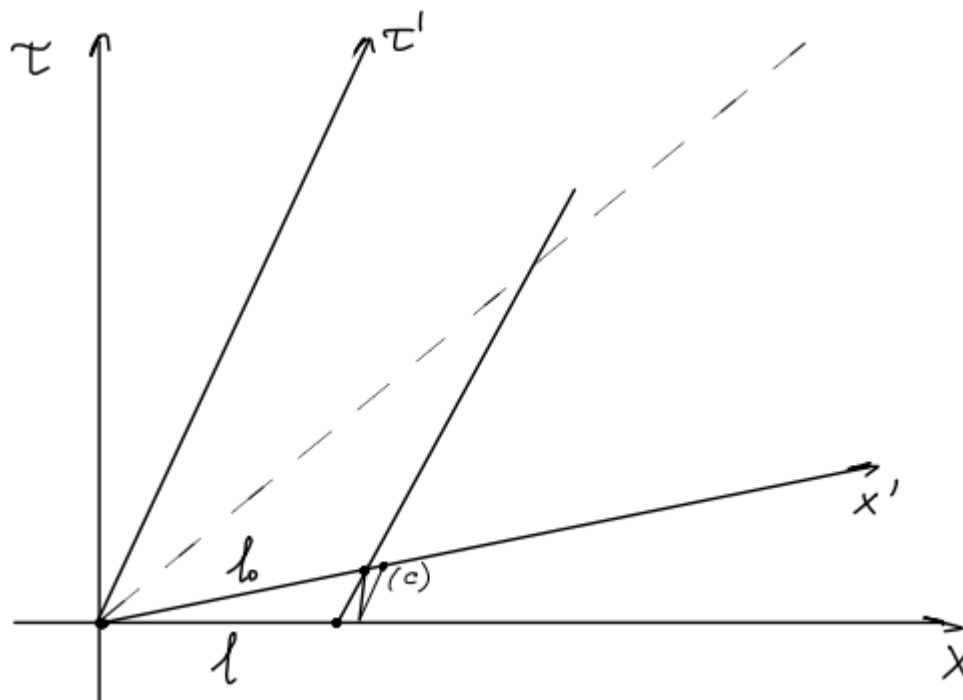


Рис. 19.7: Изменение длины на диаграмме Минковского.

Рассмотрим стержень собственной длины  $l_0$  (в  $K'$ ): Точка  $C$  вместе с длинами образует треугольник: из геометрии легко заметить, что  $l_0$  окажется больше  $l$ , как и показывает наша теория.

### 19.3.4 Парадокс близнецов

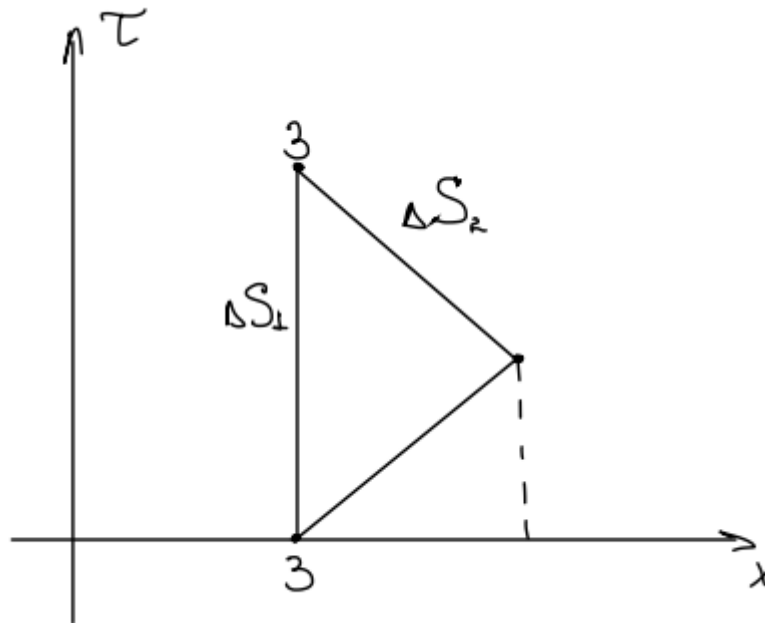


Рис. 19.8: Парадокс близнецов.

Самосогласованность СТО часто пытается поставить под сомнение при помощи парадокса близнецов.

На самом деле рассматриваемые системы совсем не эквивалентны из-за точки излома, в которой предмет испытывает некое ускорение, из-за чего его система отсчёта перестаёт быть инерциальной.

$$\Delta s_2 < \Delta s_1. \quad (19.18)$$

То есть, одни из часов покажут меньшее время.

Из системы, отснятой с Земли, для улетевшего в небеса система будет неинерциальной, то есть в ней не будут работать изученные к этому моменту кинематические законы.

$$2T \geq 2T \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (19.19)$$

## Лекция 20.

### Кинематика СТО. Часть 4

В пространстве Минковского  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ ,  $\beta = \frac{u}{c}$  можно строить и другие векторы, в которых “длина”, а точнее норма задается разностью квадратов временной и пространственной компонент.

$$\vec{A} = (A^0, A^1, A^2, A^3), \quad (20.1)$$

$$A^{\vec{0}'} = \gamma(A^0 - \beta A^1), \quad (20.2)$$

$$A^{\vec{1}'} = \gamma(A^1 - \beta A^0). \quad (20.3)$$

Расположение значков говорит о том, что данный вектор является контравариантным (противоположно базису) (нижние значки – ковариантными).

#### 20.1 Вектор 4-скорости

Определим вектор 4-скорости (вводим его так, чтобы уже корректно определенная длина сохранялась).

$$d\vec{R} = (d\tau, dx, dy, dz)$$

$$\Rightarrow \vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt_c} = (\gamma c, \gamma \vec{v}) = \left( \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right), \quad (20.4)$$

$$\begin{aligned} dt_c &= dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma_v}, \\ |\vec{V}| &= \sqrt{\gamma_v^2 c^2 - \gamma_v^2 v^2} = \sqrt{c^2} = c. \end{aligned} \quad (20.5)$$

**Посмотрим на преобразования:**

$$1. \left( \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \dots \right) = (\gamma_v c, \gamma_v \vec{v});$$

2.  $\gamma_v c, \gamma_v \vec{V}'$  К' движется относительно К со скоростью  $u$ .

Тогда, используя преобразования 20.2, 20.3, получим:

$$\begin{aligned}\gamma_{v'}c &= \gamma_u(\gamma_v c - \beta_u \gamma_v v_x), \\ \gamma_{v'}v'_x &= \gamma_u(\gamma_v v_x - \beta_u \gamma_v c).\end{aligned}$$

Поделим одно на другое:

$$\frac{v'_x}{c} = \frac{v_x - \beta_u c}{c - \beta_u v_x}, \quad (20.6)$$

$$\boxed{v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}}. \quad (20.7)$$

Аналогично вводим 4-импульс:  $\vec{P} = m\vec{v} = (\gamma mc, \gamma m\vec{V})$ .

Инвариантное уравнение движения:

$$\frac{d\vec{P}}{dt_c} = \left( \gamma \frac{d}{dt} \gamma mc, \gamma \frac{d\gamma m\vec{v}}{dt} \right) = \Phi. \quad (20.8)$$

$$\Phi = (\phi_0, \vec{\phi}) - 4\text{-сила.}$$

Для 2-х ИСО:  $dt_c = \frac{dt}{\gamma}$ .

Если скорость материальной точки меняется, то такая система будет **сопутствующей**, она будет все время обновляться.

Наблюдали, что пространственная часть  $\vec{P}$  это  $\gamma\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ , тогда логично предположить, что пространственная часть  $\Phi$  это  $\gamma\vec{F}$ , где  $\vec{F}$  все обычные силы.

т.е.  $\frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \vec{F}$ .

А что с нулевой компонентой?

$$|\vec{V}|^2 = (V^0)^2 - (V^1)^2 - (V^2)^2 - (V^3)^2. \quad (20.9)$$

$$\frac{d}{dt_c} |\vec{V}| = \frac{d}{dt_c} c = \gamma \frac{d}{dt} c = 0, \quad (20.10)$$

$$V^0 \frac{dV^0}{dt_c} - V^1 \frac{dV^1}{dt_c} - V^2 \frac{dV^2}{dt_c} - V^3 \frac{dV^3}{dt_c} = 0, \quad (20.11)$$



$$V^0 = \gamma c, dt_c = \frac{dt}{\gamma} \text{ и еще на массу}$$

$$\gamma^2 c \frac{d}{dt} \gamma c m - \gamma^2 \vec{v} \frac{d}{dt} \gamma m \vec{v} = 0, \quad (20.12)$$

$$c \cdot \phi_0 = \gamma \frac{\vec{v} \vec{F}}{1}, \quad (20.13)$$

$$\phi_0 = \gamma \frac{\vec{v} \vec{F}}{c}, \quad (20.14)$$

$$\gamma \frac{d}{dt} \gamma m c = \gamma \frac{\vec{v} \vec{F}}{c} \cdot c, \quad (20.15)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\vec{v} \vec{F}}{c} \cdot c. \quad (20.16)$$

$\vec{v} \vec{F}$  - мощность

$$E = \gamma m c^2$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right) \quad \vec{p} - \text{релятивистский импульс.}$$

$$|\vec{P}|^2 = \frac{\gamma^2 m^2 c^4}{c^2} - \gamma^2 m^2 v^2 = \gamma^2 (m^2 c^2 - m^2 v^2) = \gamma^2 m^2 (c^2 - v^2) = \frac{m^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m^2 c^2, \quad (20.17)$$

Посчитать квадрат модуля 4-импульса можно и значительно проще : (20.18)

$$|\vec{P}|^2 = |m \vec{V}|^2 = m^2 c^2 \text{ (Так как квадрат модуля 4-скорости равен } c^2 \text{)} \quad (20.19)$$

$$\text{то есть } \boxed{E^2 - \vec{p}^2 \cdot c^2 = (m c^2)^2}. \quad (20.20)$$

$m c^2 = E_0$  - энергия покоя

$T = \gamma m c^2 - m c^2$  - кинетическая энергия.

Из  $E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$  следует, что для  $m \neq 0$  необходима бесконечная энергия для

достижения скорости света. Таким образом, согласно СТО, только безмассовые частицы могут достичь скорости света. Такая запись  $E^2 - \vec{p}^2 \cdot c^2 = (m c^2)^2$  является более общей, чем запись для массивной частицы.

Для световых частиц:

$$E^2 = p^2 c^2, \text{ то есть } \boxed{p = \frac{E}{c}}. \quad (20.21)$$

## 20.2 Дефект массы

Если у нас есть система из невзаимодействующих частиц, то:

$$F \cdot \vec{v} = -dU/dt \quad (20.22)$$

$$\Rightarrow \frac{d\gamma mc^2}{dt} dt + dU = 0 \quad (20.23)$$

$$\Rightarrow \gamma mc^2 + U = const \quad (20.24)$$

В релятивизме:

$$T = mc^2(\gamma - 1) \quad (20.25)$$

$$\Rightarrow T + U = mc^2(\gamma - 1) + U = const. \quad (20.26)$$

Сохраняется в любой ИСО, но меняет значения. **4-импульс:**

Раньше:  $(\frac{E}{c}, \vec{p})$

Теперь:  $(\frac{E - U}{c}, \vec{p})$

Мы нигде не говорим об элементарности частицы! Пусть у нас есть составная частица, тогда:

$$M^2 \cdot c^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2. \quad (20.27)$$

Система не взаимодействует  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow E = \sum E_i, \text{ то есть не взаимодействует} \quad (20.28)$$

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i, \text{ это всегда так} \quad (20.29)$$

$$\Rightarrow M^2 c^2 = \frac{(\sum E_i)^2}{c^2} - (\sum \vec{p})^2. \quad (20.30)$$

Давайте перейдём в СО, где  $\sum \vec{p} = 0$

$$\Rightarrow M^2 c^2 = \frac{(\sum E_i)^2}{c^2} \quad (20.31)$$

$$\Rightarrow M = \frac{\sum E_i}{c^2} \quad (20.32)$$

$$\Rightarrow M = \frac{\sum m_i c^2 + \sum T_i}{c^2} \quad (20.33)$$

$$\Rightarrow M = \sum m_i + \sum \frac{T_i}{c^2}, \quad (20.34)$$

то есть если мы разбиваем частицу на её составляющие, то масса системы будет больше массы её компонент. [на величину полной кинетической энергии, где  $\sum \vec{p} = 0$ ]

Пусть есть взаимодействие.

$$E = \sum_i \epsilon_i + U, \quad U < 0 - \text{характеристика устойчивой системы. Энергия связи.} \quad (20.35)$$

$$\Rightarrow M^2 c^2 = \frac{(\sum \epsilon_i + U)^2}{c^2} \quad (20.36)$$

$$M = \frac{\sum m_i c^2}{c^2} + \frac{\sum_i T_i}{c^2} + \frac{U}{c^2}. \quad (20.37)$$

Пусть кинетическая энергия невелика:

$$M = \sum m_i + \frac{U}{c^2} \quad (20.38)$$

так как  $U < 0$ , то

$$M = \sum m_i - \frac{|U|}{c^2}, \quad (20.39)$$

$$\text{то есть } \sum m_i - M = \frac{|U|}{c^2} = \Delta M - \text{дефект массы.} \quad (20.40)$$

Энергия связи должна быть значительной, чтобы использовать формулу:  $\Delta M \cdot c^2 = |U|$ .

## 20.3 Уравнение движения релятивистской частицы

$$\frac{d\vec{P}}{dt_c} = \vec{\Phi}; \quad (20.41)$$

$$dt_c = \frac{dt}{\gamma}; \quad (20.42)$$

$$\vec{P} = (\gamma mc, \gamma m\vec{v}); \quad (20.43)$$

$$\Phi = \left( \frac{\gamma \vec{v} \vec{F}}{c}, \gamma \vec{F} \right). \quad (20.44)$$

$$\frac{d}{dt} \gamma mc = \frac{\vec{v} \vec{F}}{c} : \quad (20.45)$$

$$1) \frac{dE}{dt} = \vec{v} \vec{F}$$

$$E = \gamma mc^2$$

$$2) \frac{d}{dt} \gamma m\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F}.$$

**Вывод:**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\gamma m\vec{v}) &= \frac{d}{dt} \frac{E\vec{v}}{c^2} = \\ &= \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{dE}{dt} + \frac{E}{c^2} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{v}(\vec{v}, \vec{F})}{c^2} + \gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \end{aligned} \quad (20.46)$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{\gamma} \left[ \vec{F} - \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{v}, \vec{F}) \right]. \quad (20.47)$$

Получается, что обычное ускорение  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  не сонаправлено с силой.

## Лекция 21.

### Кинематика абсолютно твёрдого тела

#### 21.1 Релятивистское движение под действием постоянной силы

Рассмотрим частный случай одномерного прямолинейного движения:

$$\begin{aligned}\vec{F} \parallel \vec{v} &\Rightarrow \vec{F} = \frac{\vec{v}}{v^2} (\vec{F}, \vec{v}) \Rightarrow \\ m \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{\vec{v}}{v^2} (\vec{F}, \vec{v}) - \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{F}, \vec{v}) \right] \\ m \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{1}{\gamma} \vec{v} (\vec{F}, \vec{v}) \left( \frac{c^2 - v^2}{v^2 c^2} \right) \\ m \frac{dv_x}{dt} &= \frac{v_x F v_x}{v_x^2 c^2} \left( 1 - \frac{v_x^2}{c^2} \right) \sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}} \\ m \frac{dv_x}{dt} &= F \left( 1 - \left( \frac{v_x^2}{c^2} \right) \right)^{3/2} \Rightarrow \\ m \frac{dv_x}{\left( 1 - \left( \frac{v_x}{c} \right)^2 \right)^{3/2}} &= F dt \\ m \, d \left( \frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}} \right) &= F dt.\end{aligned}\tag{21.1}$$

Проинтегрируем обе части:

$$m \left( \frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}} \right) = Ft.\tag{21.2}$$

$$\begin{aligned}
 v_x &= \frac{Ft}{m} \sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}} \\
 v_x^2 &= \left( \frac{Ft}{m} \right)^2 \left( 1 - \frac{v_x^2}{c^2} \right) \\
 v_x^2 \left( 1 + \left( \frac{Ft}{mc} \right)^2 \right) &= \left( \frac{Ft}{m} \right)^2 \\
 v_x &= \frac{Ft}{m} \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{Ft}{mc} \right)^2}}.
 \end{aligned} \tag{21.3}$$

Для рисунка 29.2:  $\frac{v_x}{c} = \frac{t}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{t}{c} \right)^2}}$ .

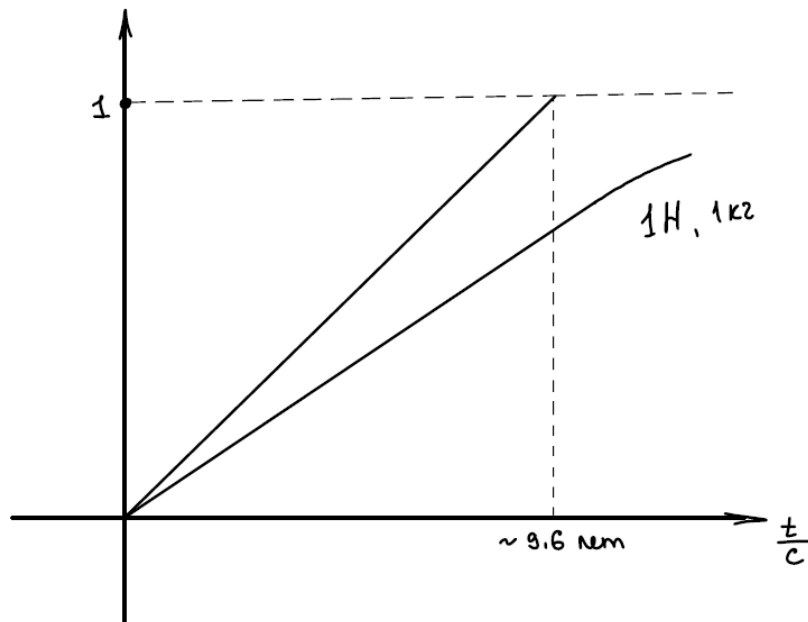


Рис. 21.1: Ускорение с учётом релятивизма.

## 21.2 Реактивное движение

### 21.2.1 Формула Циолковского в СТО

Запишем ЗСЭ и И, помня, что  $\gamma m U = \frac{EU}{c^2}$ , где  $E$  – энергия отлетевшей массы,  $U$  – скорость газа относительно наблюдателя:

$$\begin{cases} \gamma m c^2 = \gamma' m' c^2 + E \\ \gamma m v = \gamma' m' v' - \frac{EU}{c^2} \\ \gamma' m' c^2 - \gamma m c^2 = -E \\ \gamma' m' v' - \gamma m v = \frac{EU}{c^2} = \frac{U}{c^2} (-1) (\gamma' m' c^2 - \gamma m c^2) \end{cases}$$

$\Delta t \rightarrow 0$

$$d(\gamma m v) = -\frac{U}{c^2} d(\gamma m c^2)$$

$$\gamma m dv + v d\gamma m = -\frac{U}{c^2} d(\gamma m)$$

$$\gamma m dv + v d(\gamma m) = -U d\gamma m$$

$$\frac{dv}{v+u} = -\frac{d\gamma m}{\gamma m} = -d \ln(\gamma m). \quad (21.4)$$

Параметр же выбирается относительно ракеты.



Рис. 21.2: Направление скорости испускания газов.

$$v_x' = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}, \quad (21.5)$$

$$u_0 - v = u, \quad (21.6)$$

$$\Rightarrow u = \frac{u_0 - v}{1 - \frac{u_0 v}{c^2}}. \quad (21.7)$$

$$\Rightarrow v + u = v + \frac{u_0 - v}{1 - \frac{u_0 v}{c^2}} = \frac{v - u_0 \frac{v^2}{c^2} + u_0 - v}{1 - \frac{u_0 v}{c^2}} = \frac{u_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{u_0 v}{c^2}} \blacksquare \quad (21.8)$$

$$\frac{dv \left(1 - \frac{u_0 v}{c^2}\right)}{u_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = -\frac{d\gamma m}{\gamma m} \quad (21.9)$$

$$\Rightarrow -d \ln(\gamma m) = \frac{1}{u_0} \cdot \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\frac{u_0 v}{c^2} dv}{u_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}, \quad (21.10)$$

$$-d \ln[\gamma m] = \frac{1}{u_0} \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{2} \frac{d \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (21.11)$$

$$-\ln[\gamma m] \Big|_{\gamma_1 m_1}^{\gamma_2 m_2} = \frac{1}{u_0} \left[ \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{v}{c}\right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{v}{c}\right) \right] + \frac{1}{2} \left[ \ln \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \right]. \quad (21.12)$$

Разложим дробь в сумму двух других:

$$\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c}\right) \left(1 + \frac{v}{c}\right)} = \frac{A}{1 - \frac{v}{c}} + \frac{B}{1 + \frac{v}{c}}, \quad (21.13)$$

$$A \left(1 + \frac{v}{c}\right) + B \left(1 - \frac{v}{c}\right) = 1,$$

$$A \frac{v}{c} - B \frac{v}{c} + A + B = 1,$$

$$A + B = 1,$$

$$A - B = 0,$$

$$\Rightarrow A = B = \frac{1}{2} \quad (21.14)$$

Вернёмся:

$$-\ln[\gamma m] \Big|_{\gamma_1 m_1}^{\gamma_2 m_2} = \frac{c}{2u_0} \ln \left[ \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} \right] \Big|_1^2 + \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Big|_1^2. \quad (21.15)$$

Пусть мы имеем изменение скорости от 0 до  $v$  и массы от  $m_0$  до  $m$ :

$$-\ln \left[ \frac{\gamma m}{m_0} \right] = \frac{c}{2u_0} \ln \left[ \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} \right] + \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \ln \frac{\gamma m}{m_0} + \ln \gamma = \frac{c}{2u_0} \ln \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}, \quad (21.16)$$

$$\ln \frac{\gamma m}{\gamma m_0} = -\frac{c}{2u_0} \ln \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}, \quad (21.17)$$

$$\ln \left[ \frac{m}{m_0} \right] = -\frac{c}{2u_0} \ln \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}, \quad (21.18)$$

$$-2\frac{u_0}{c} \ln \frac{m}{m_0} = \ln \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}, \quad (21.19)$$

$$\left( \frac{m}{m_0} \right)^{-2\frac{u_0}{c}} = \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}, \quad (21.20)$$

$$\left( 1 - \frac{v}{c} \right) e^{-2\frac{u_0}{c} \ln \frac{m}{m_0}} = 1 + \frac{v}{c}, \quad (21.21)$$

$$e^{-2\frac{u_0}{c} \ln \frac{m}{m_0}} = \frac{v}{c} \left( 1 + e^{-2\frac{u_0}{c} \ln \frac{m}{m_0}} \right) + 1, \quad (21.22)$$

$$\boxed{\frac{e^{-2\frac{u_0}{c} \ln \frac{m}{m_0}} - 1}{e^{-2\frac{u_0}{c} \ln \frac{m}{m_0}} + 1} \cdot c = v.} \quad (21.23)$$

## 21.3 Столкновение релятивистских частиц.

Мы знаем, что "длина" 4-импульса это инвариант. Пусть у нас есть 4-импульс системы:

$$(\sum E_i)^2 - c^2(\sum P_i)^2 = const \quad (21.24)$$

Излучение фотона.

Канонически рассматриваемый вопрос: а может ли свободный электрон поглотить или излучить фотон?

Пусть на покоящийся электрон (перешли в такую систему отсчёта) налетает фотон.

ЗСЭ:

$$E_{ph} + mc^2 = \gamma mc^2 = E_{el}. \quad (21.25)$$

ЗСИ:

$$P_{ph} = P_{el} \Rightarrow E_{ph} = \sqrt{E_{el}^2 - (mc^2)^2}, \quad (21.26)$$

$$cP_{ph} = cP_{el} = \sqrt{E_{el}^2 - (mc^2)^2} \quad (21.27)$$

$$\Rightarrow E_{ph} = \sqrt{\gamma^2 (mc^2)^2 - (mc^2)^2} = mc^2(\gamma^2 - 1)^{1/2}, \quad (21.28)$$

$$E_{ph} = mc^2(\gamma - 1). \quad (21.29)$$



Подставим  $E_{ph}$  из ЗСЭ:

$$(\gamma - 1)^2 = \gamma^2 - 1 \Rightarrow \gamma = 1 \Rightarrow E_{ph} = 0. \quad (21.30)$$

## 21.4 Слияние и распад частиц

Рассмотрим распад частицы массой  $M$  на две массы  $m_1$  и  $m_2$ . Считая систему замкнутой, рассмотрим энергию и импульс в системе отсчёта, в которой первоначальная частица покоилась. Обозначим как  $E_1$ ,  $E_2$  — энергии распавшихся частиц, как  $\vec{p}_1$ ,  $\vec{p}_2$  — импульсы распавшихся частиц.

$$Mc^2 = E_1 + E_2. \quad (21.31)$$

$$0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2. \quad (21.32)$$

$$-\vec{p}_1 = \vec{p}_2, \quad (21.33)$$

$$p_1^2 = p_2^2, \quad (21.34)$$

$$E_1^2 - (m_1c^2)^2 = E_2^2 - (m_2c^2)^2. \quad (21.35)$$

$$E_1^2 = E_2^2 + (m_1c^2)^2 - (m_2c^2)^2, \quad (21.36)$$

$$E_1 + E_2 = Mc^2, \quad (21.37)$$

$$E_1^2 = (Mc^2 - E_1)^2 + (m_1c^2)^2 - (m_2c^2)^2, \quad (21.38)$$

$$E_1^2 = (Mc^2)^2 - 2E_1Mc^2 + E_1^2 + (m_1c^2)^2 - (m_2c^2)^2, \quad (21.39)$$

$$2E_1Mc^2 = (Mc^2)^2 + (m_1c^2)^2 - (m_2c^2)^2, \quad (21.40)$$

$$E_1 = \frac{(Mc^2)^2 + (m_1c^2)^2 - (m_2c^2)^2}{2Mc^2} \quad (21.41)$$

В случае слияния можно перейти в систему, где одна из частиц покоится, после чего найти общую массу.

$$E_1 + E_2 = E, \quad (21.42)$$

$$E_1 + m_2c^2 = E. \quad (21.43)$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \underbrace{\vec{p}_2}_0 = \vec{p}_1, \quad (21.44)$$

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}_c = \frac{\gamma m c^2 \vec{v}_c}{c^2} = \frac{E \vec{v}_c}{c^2}. \quad (21.45)$$

$$E^2 - p^2c^2 = (Mc^2)^2 \quad (21.46)$$

$$\begin{aligned} E^2 - p^2c^2 &= (E_1 + m_2c^2)^2 - c^2p^2 = (E_1 + m_2c^2)^2 - c^2p_1^2 \\ &= \cancel{E_1^2} - \cancel{c^2p_1^2} + \overset{m_1c^2}{(m_2c^2)^2} + 2E_1m_2c^2 \end{aligned} \quad (21.47)$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{c^2} \sqrt{m_1^2c^4 + m_2^2c^4 + 2E_1m_2c^2} \quad (21.48)$$

$$M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \frac{2Em_2}{c^2}}. \quad (21.49)$$

## 21.5 Кинематика абсолютно твёрдого тела

Пока что вернёмся к классической механике.

Абсолютно твёрдое тело — модель тела как системы материальных точек, разделённых между собой постоянным расстоянием.

Полная масса абсолютно твёрдого тела из конечного числа частиц это всего лишь сумма их масс,

$$M = \sum_i m_i. \quad (21.50)$$

Если же тело известно нам как некий объём с плотностью, которая как-то меняется в пространстве, то полную массу можно найти, проинтегрировав по поверхности:

$$M = \int_V \rho(\tilde{V}) d\tilde{V}. \quad (21.51)$$

### 21.5.1 Инвариантность угловой скорости

Рассмотрим произвольную точку абсолютно твёрдого тела относительно некой другой точки этого тела  $O$ , имеющей радиус-вектор  $R_O$ .

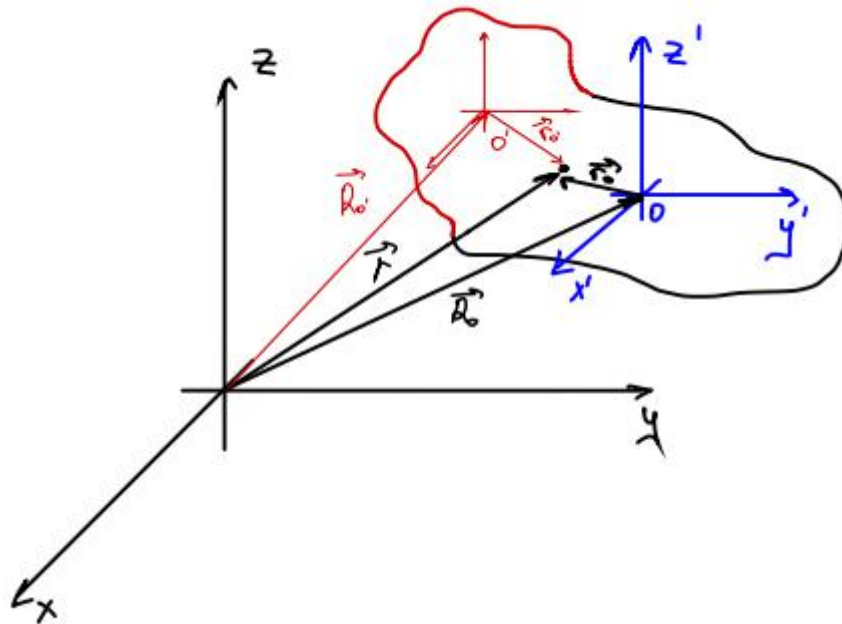


Рис. 21.3: Радиус-вектор точки относительно  $O$  и  $O'$ .

$$\vec{r} = \vec{R}_O + \vec{r}_O. \quad (21.52)$$

Рассмотрим приращение этого вектора за малое время  $dt$ ,

$$d\vec{r} = d\vec{R}_O + d\vec{r}_O = d\vec{R}_O + [d\vec{\varphi} \times \vec{r}_O], \quad (21.53)$$

то есть, движение точки можно разложить на поступательное движение  $O$  и вращение вокруг  $O$ .

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_O + [\vec{\omega} \times \vec{r}_O]. \quad (21.54)$$

Теперь повторим наши рассуждения для движения точки не относительно  $O$ , а относительно какой-то третьей точки тела —  $O'$ ,

$$\vec{v} = \vec{V}_{O'} + [\vec{\omega}' \times \vec{r}_{O'}]. \quad (21.55)$$

$$\vec{V}_O + [\vec{\omega} \times \vec{r}_O] = \vec{V}_{O'} + [\vec{\omega}' \times \vec{r}_{O'}]. \quad (21.56)$$

$$(21.57)$$

Завершим «любовный треугольник» наших трёх точек, рассмотрев движение  $O$  относительно  $O'$ .

$$\vec{R}_O = \vec{R}_{O'} + \vec{R}_{O'O}, \quad (21.58)$$

$$\vec{V}_O = \vec{V}_{O'} + [\vec{\omega}' \times \vec{R}_{O'O}]. \quad (21.59)$$

$$\vec{r}_{O'} = \vec{r}_O + \vec{R}_{O'O}. \quad (21.60)$$

$$\cancel{\vec{V}_{O'}} + [\vec{\omega}' \times \cancel{\vec{R}_{O'O}}] + \vec{\omega} \times \vec{r}_O = \cancel{\vec{V}_{O'}} + [\vec{\omega}' \times \vec{r}_O] + [\vec{\omega}' \times \vec{R}_{O'O}], \quad (21.61)$$

$$[\vec{\omega} \times \vec{r}_O] = [\vec{\omega}' \times \vec{r}_O], \quad (21.62)$$

$$\boxed{\vec{\omega} = \vec{\omega}'}. \quad (21.63)$$

Последнее следует из того, что мы не накладывали дополнительных условий на  $\vec{r}_O$ , а значит равенство выполняется для всех таких векторов без исключения.

Таким образом, угловая скорость не зависит от выбора точки отсчёта абсолютно твёрдого тела.

## 21.5.2 Плоское движение абсолютно твёрдого тела

Плоское движение — движение, при котором все точки движутся параллельно некоторой плоскости, которую называют плоскостью вращения. При таком движении всегда можно выделить в каждый момент времени выделить ось, вокруг которой происходит вращение всех точек абсолютно твёрдого тела.

Выразим это формульной записью:

$$\vec{v} = \underbrace{\vec{v}_c}_0 + [\omega \times \vec{r}_c] = [\omega \times \vec{r}_c]. \quad (21.64)$$

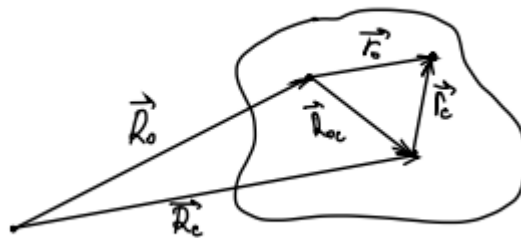


Рис. 21.4: Положение точки относительно оси вращения и точки  $O$ .

Мы показали, что скорость данной точки относительно любой другой произвольной можно представить как

$$\vec{v} = \vec{V}_O + [\vec{\omega} \times \vec{r}_O]. \quad (21.65)$$

Обозначим положение мгновенной оси вращения как  $\vec{R}_c$ , тогда  $\vec{r}_O = \vec{R}_{OC} + \vec{r}_c$ .

$$\vec{V} = \vec{V}_O + [\vec{\omega} \times (\vec{R}_{OC} + \vec{r}_c)] = [\vec{\omega} \times \vec{r}_c]. \quad (21.66)$$

$$[\vec{\omega} \times \vec{V}_O] = [\vec{\omega} \times [-\vec{\omega} \times \vec{R}_{OC}]] = -(\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{R}_{OC}) - \vec{R}_{OC}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})). \quad (21.67)$$

$$\text{Заметим, что } \omega \perp \vec{R}_{OC}, \quad (21.68)$$

$$\vec{\omega} \times \vec{V}_O = \omega^2 \vec{R}_{OC}. \quad (21.69)$$

$$\boxed{\vec{R}_{OC} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{V}_O}{\omega^2}}. \quad (21.70)$$

$$\text{*При этом } \vec{V}_O \perp \vec{\omega}, \quad (21.71)$$

$$|\vec{R}_{OC}| = \frac{\omega V_O}{\omega^2} = \frac{\omega \omega R}{\omega^2} = R. \quad (21.72)$$

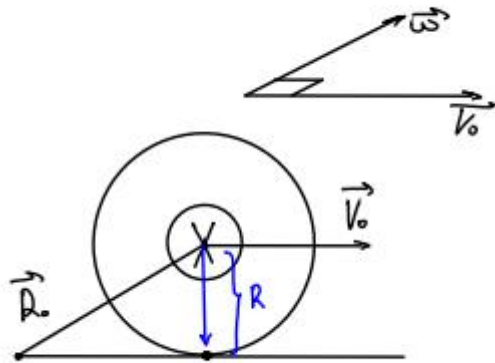


Рис. 21.5: Направления угловой скорости, радиус-вектора и линейной скорости O.

## Лекция 22.

# Момент импульса и момент инерции абсолютно твёрдого тела

### 22.1 Момент импульса

Будем называть момент импульса системы мат. точек:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i,$$

$$\vec{L} = \int_V \vec{r} \times \vec{v} dm.$$

Дальше необходимо детализировать рассмотрение: (рассмотрим частные случаи)

Например, можно рассмотреть момент импульса относительно оси:

$$\vec{L} = \vec{e}_x L_x + \vec{e}_y L_y + \vec{e}_z L_z, \quad (22.1)$$

$$\vec{L}_z = L_z \vec{e}_z = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{p}_i)_z \vec{e}_z. \quad (22.2)$$

Рассмотрим  $i$ -ый вклад:  $(\vec{r}_i \times \vec{p}_i)_z =$

$$= \left[ (\vec{r}_i^{\parallel} + \vec{r}_i^{\perp}) \times (\vec{p}_i^{\parallel} + \vec{p}_i^{\perp}) \right]_z =$$

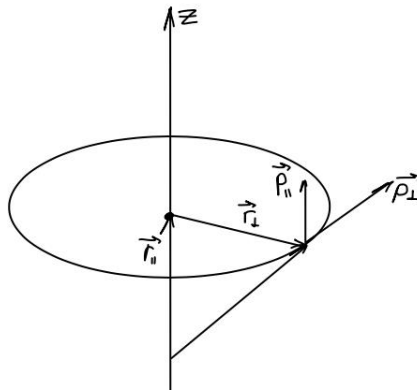


Рис. 22.1: Импульс относительно оси

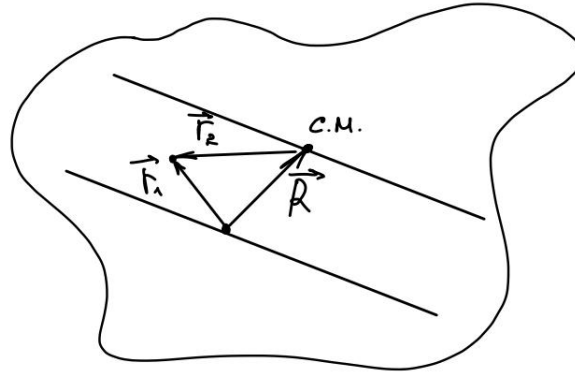


Рис. 22.2: Две параллельные оси.

$$= (\vec{r}_i^\perp \times \vec{p}_i^\perp)_z = (\vec{r}_i^\perp \times \vec{p}_i^\perp)_z = m_i \omega r_i^{\perp 2}.$$

$$L_z = \sum_i m_i \omega r_i^{\perp 2} = \omega \int_V dm r^{\perp 2}.$$

**Момент инерции относительно оси:**  $I_z = \int_V r^{\perp 2} \rho dx dy dz.$

Получим удобный инструмент вычислений моментов инерции относительно двух параллельных осей.

Пусть  $\vec{R}$  - радиус-вектор  $||$ -го переноса. Пусть есть точка, ее вектор относительно оси 1 будет  $\vec{r}_1$  связан с  $\vec{r}_2$  (относительно второй оси):

**Теорема Гюйгенса-Штейнера**

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{R},$$

$$I_1 = \int_V \vec{r}_1^2 dm = \int_V \vec{r}_1 \vec{r}_1 dm = \int_V (\vec{r}_2 + \vec{R})(\vec{r}_2 + \vec{R}) dm = \quad (22.3)$$

$$= \int_V \vec{r}_2^2 dm + \vec{R}^2 \int dm + 2 \int \vec{r}_2 \vec{R} dm = \quad (22.4)$$

$$= \int_V \vec{r}_2^2 dm + \vec{R}^2 \int dm + 2\vec{R} \int \vec{r}_2 dm = I_2 + R^2 \cdot M. \quad (22.5)$$

**Небольшое замечание :** Важно, что  $I_2$  - момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела параллельно исходной оси. Если это не будет так, то тогда теорема Гюйгенса-Штейнера не будет верна. Именно из-за того, что 2 - система центра масс :

$$\vec{r}_{2c} = 0 = \frac{\int \vec{r}_2 dm}{M} \text{ (Радиус-вектор центра масс в системе центра масс равен 0)}$$

Часто рассматривают момент инерции относительно точки

$$I_o = \int r^2 dm$$

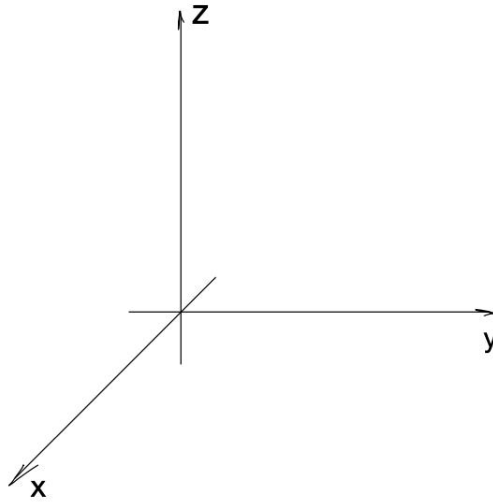


Рис. 22.3: Декартова система координат.

$r$  - расстояние от фиксированной точки до рассматриваемой точки тела.

$$\int_V r^2 dm = \int_V (x^2 + y^2 + z^2) dm = \frac{1}{2} \int_V (2x^2 + 2y^2 + 2z^2) dm = \quad (22.6)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \int_V (x^2 + y^2) dm + \int_V (x^2 + z^2) dm + \int_V (y^2 + z^2) dm \right]. \quad (22.7)$$

$$2I_o = I_x + I_y + I_z.$$

Можно еще рассмотреть момент инерции относительно плоскости:

$$I_o = \int \vec{r}^2 dm = \int (x^2 + y^2 + z^2) dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm + \int z^2 dm = I_{zy} + I_{zx} + I_{xy}.$$

## 22.2 Примеры вычислений

### 22.2.1 Тонкий стержень.

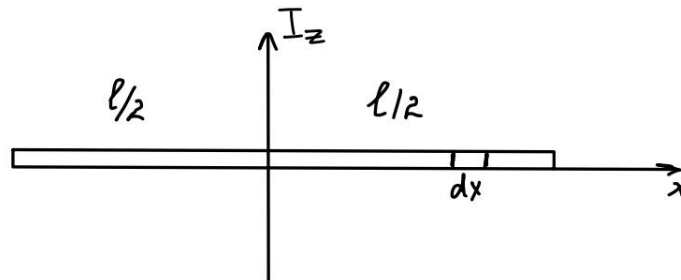


Рис. 22.4: Тонкий стержень.

$$I_z = \int x^2 dm = \int x^2 \cdot dx \cdot \rho_\lambda = 2 \int_0^{l/2} x^2 \cdot dx \frac{m}{l} = \frac{2m}{l} \cdot \frac{x^3}{3} \bigg|_0^{l/2} = \frac{2m}{3l} \cdot \frac{l^3}{8} = \frac{ml^2}{12}. \quad (22.8)$$

$$\text{Относительно конца: } \frac{ml^2}{12} + m \left( \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{4}{12} ml^2 = \frac{ml^2}{3}. \quad (22.9)$$

### 22.2.2 Пластина со сторонами a, b.

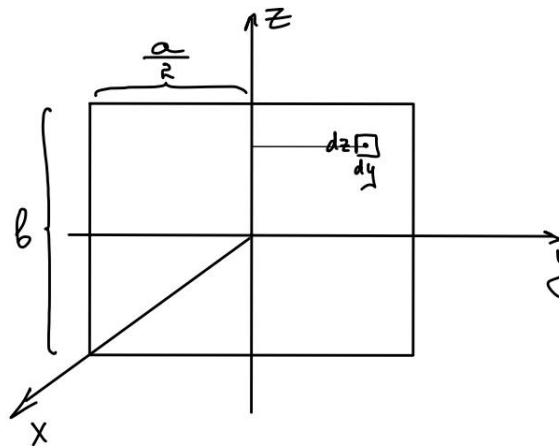


Рис. 22.5: Пластина со сторонами a, b.

$$I_z = \int x^2 dm = \int x^2 \cdot \frac{m}{a \cdot b} \cdot dx dz = 2 \int_0^{a/2} x^2 dx \cdot \frac{m}{a \cdot b} \int_0^b dz = 2 \cdot \frac{\left( \frac{a}{2} \right)^3}{3} \frac{m}{a \cdot b} \cdot b = \frac{ma^2}{12}. \quad (22.10)$$



А чему будет равен момент инерции через центр масс:

$$2I_0 = I_x + I_y + I_z \quad (22.11)$$

$$I_z = I_x + I_y = \frac{m}{12} (a^2 + b^2) \quad (22.12)$$

### 22.2.3 Цилиндр.

Сперва рассмотрим круг радиуса R, массы M:

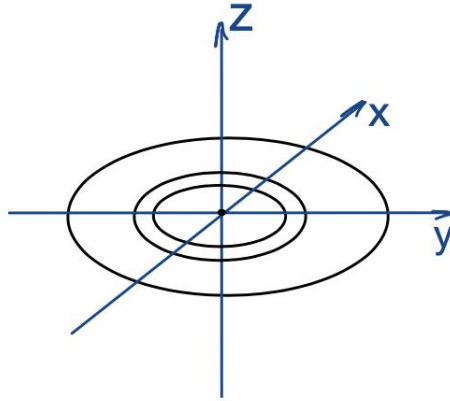


Рис. 22.6: круг радиуса R, массы M.

$$I_z = \int (x^2 + y^2) dm = \int \int \frac{M}{\pi R^2} \cdot (x^2 + y^2) dx dy = \int \frac{M}{\pi R^2} \cdot r^2 d\phi dr \cdot r = \frac{M}{\pi R^2} \cdot 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2} \quad (22.13)$$

$$\text{У цилиндра: } I_z = \frac{MR^2}{2}. \quad (22.14)$$

### 22.2.4 Шар (относительно оси).

$$I_o = \int r^2 dm = \int r^2 \frac{d\phi \cdot r d\omega \cdot r \sin\omega dr M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 2\pi \cdot 2 \int r^4 dr \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{5} MR^2 \quad (22.15)$$

$$\Rightarrow 2I_o = I_x + I_y + I_z = 3I_z \quad (22.16)$$

$$I_z = \frac{2}{3} I_o = \frac{2}{5} MR^2. \quad (22.17)$$

### 22.2.5 Сфера.

$$I_o = MR^2 \Rightarrow I_z = \frac{2}{3} MR^2. \quad (22.18)$$

Переходим к динамическим уравнениям.

Для системы материальных точек мы уже получали:

Уравнение движения центра масс:

$$m \cdot \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \sum F_i^{\text{ext}}. \quad (22.19)$$

Уравнение на моменты:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum M_i^{\text{ext}}. \quad (22.20)$$

Про движение центра масс всё понятно! (Используем теорему о движении центра масс абсолютно твёрдого тела.)

Уравнение на моменты можно записывать относительно либо неподвижной точки (выбрали удобную ИСО), либо относительно центра масс. Но скорости всё ещё берём в ИСО!!! Почему?

( $\vec{M}_i$  — момент внешних сил, действующих на мат. i-тую точку)

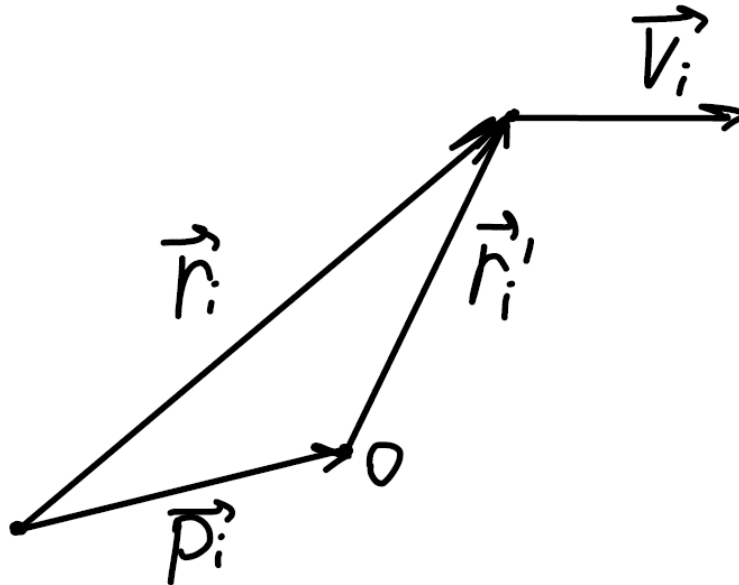


Рис. 22.7: Вспомогательный рисунок к выводу.

Пусть  $\vec{L}_i = [\vec{r}_i', m\vec{v}_i]$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_i}{dt} &= \left[ \frac{d\vec{r}_i'}{dt}, m\vec{v}_i \right] + \left[ \vec{r}_i', m \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right] = \\ &= \left[ \frac{d}{dt} (\vec{r}_i - \vec{R}), m\vec{v}_i \right] + \underbrace{\vec{r}_i' \times \vec{F}_i}_{\vec{M}_i} = \\ &= \vec{M}_i + (-1) [\vec{v}_0 \times m\vec{v}_i] \\ \frac{d\vec{L}_i}{dt} &= \vec{M}_i - [\vec{v}_0 \times m\vec{v}_i] \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \vec{M}_i + \vec{v}_0 \times \sum_i \vec{p}_i,$$

(22.21)

Если в центре масс:  $\implies$   $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ . (22.22)

## Лекция 23.

### Динамика абсолютно твёрдого тела

#### 23.1 Закон изменения количества движения. Тензор инерции

Можно пойти ещё дальше. Если система центра масс, то и скорость можно брать относительно центра масс (тогда и  $\vec{r}_i'$  в системе ц.м.):

$$\begin{aligned} L &= \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i = \sum \vec{r}_i' \times m_i (\vec{v}_c + \vec{v}_i') = \\ &= \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_c + \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' = \underbrace{\sum (m_i \vec{r}_i')}_{M\vec{r}_{c.m.}=0} \times \vec{v}_c + \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}, \end{aligned} \quad (23.1)$$

где  $\vec{M} = \sum \vec{r}_i' \times \vec{F}_i$ ,  $\vec{L} = \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$  в системе центра масс.

В общем случае удобно рассмотреть вращение вокруг неподвижной точки или мгновенной оси (хотим посмотреть на связь  $\vec{L}$  и  $\vec{\omega}$ , если нашли такую):

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \int \vec{r} \times \vec{v} dm = \int \vec{r} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}] dm = \\ &= \int (\vec{\omega} r^2 - \vec{r}(\vec{\omega}, \vec{r})) dm = \int_V (r^2 \vec{\omega} - \vec{r}(\vec{\omega}, \vec{r})) dm = \hat{I} \vec{\omega} \\ &\boxed{\vec{L} = \hat{I} \vec{\omega}}, \end{aligned} \quad (23.2)$$

где  $\hat{I}$  – тензор инерции.

Если тензор инерции диагонален, то говорят, что мы рассматриваем его в главных осях.

$$\hat{I} = \int_V \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & y^2 + x^2 \end{pmatrix} dm. \quad (23.3)$$

Таким образом, мы видим, что в общем случае  $\vec{L} \not\propto \vec{\omega}$ .

В случае вращательного движения относительно фиксированной оси (пусть  $\omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_z \neq 0$ ):

$$L_z = \omega I, \quad I - \text{момент инерции относительно оси вращения}, \quad (23.4)$$

$$\underbrace{\frac{dL_z}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = M_z}_{\text{основное уравнение}} - \text{относительно неподвижной оси}. \quad (23.5)$$

### 23.1.1 Замечание про тензор инерции.

Матрица симметричная и вещественная, значит можно найти ортогональную матрицу  $\hat{Q}$ :

$$\hat{I}_d = Q^T \hat{I} Q,$$

где  $\hat{I}_d$  – диагональная матрица,  $Q^T$  – матрица поворота.

#### Замечание

Мы с вами помним, что можно записывать:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \sum \vec{r}_i' \times \vec{F}' \\ \vec{L} &= \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{V}_i', \end{aligned} \quad (23.6)$$

относительно ц.м.

Откуда

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (23.7)$$

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i' \times m_i [\vec{\omega}, \vec{r}_i'] = \int \vec{r} \times [\vec{\omega}, \vec{r}] dm = \int dm (\vec{\omega} \vec{r}^2 - \vec{r}(\vec{r}, \vec{\omega})). \quad (23.8)$$

Таким образом, не только для неподвижной оси (если вокруг неё вращение), но и относительно центра масс, который, вообще говоря, может двигаться с ускорением.

Резюмируем:

есть уравнение  $d\vec{L}/dt = \vec{M}$ . Мы его можем писать либо **относительно неподвижной точки**, либо **относительно центра масс** (но скорости берём в инерциальной системе отсчёта):

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \sum \vec{r}_i' \times \vec{F}' \\ \vec{L} &= \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{V}_i'. \end{aligned} \quad (23.9)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (23.10)$$

3) либо можно брать скорости в системе центра масс:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \sum \vec{r}_i' \times \vec{F}' \\ \vec{L} &= \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{V}_i'. \end{aligned} \quad (23.11)$$

Если мы можем записать как вращение относительно оси (это может быть неподвижная точка, либо центр масс, если тело вращается относительно него) то:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \int dm(\vec{\omega} \vec{r}^2 - \vec{r}(\vec{r}, \vec{\omega})) = \hat{I} \vec{\omega}, \quad \text{откуда далее} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{M}.\end{aligned}\quad (23.12)$$

Если движение относительно ориентированной оси, то достаточно рассмотреть проекцию момента импульса:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z \Rightarrow I \frac{d\omega}{dt} = M_z. \quad (23.13)$$

То есть найдутся оси — главные оси, — в которых тензор инерции будет диагонален. Получаем уравнения на шесть степеней свободы:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{M}, \\ m \frac{d\vec{v}_c}{dt} &= \vec{F}\end{aligned}\quad (23.14)$$

Каково будет условие равновесия АТТ ?

$\vec{F} = 0$  и  $\vec{M} = 0$ .

То есть отсутствие ускорения у центра масс и отсутствие ускорения во вращении + начальные ускорения.

## 23.2 Кинетическая энергия вращательного движения

Рассмотрим кинетическую энергию абсолютно твёрдого тела. Записываем по определению:

$$\begin{aligned}K \equiv T &= \int_V \frac{1}{2} (\vec{V}_O + [\vec{\omega}, \vec{r}_{\text{из т. о}}])^2 dm = \\ &= \frac{M}{2} \vec{V}_O^2 + \vec{V}_O \int_V [\vec{\omega}, \vec{r}_{\text{из т. о}}] dm + \underbrace{\frac{1}{2} \int_V ([\vec{\omega}, \vec{r}_{\text{из т. о}}])^2 dm}_{\text{связано с чистым вращением.}} \stackrel{\text{Если ц.м}}{=} \frac{M}{2} V_c^2 + \frac{1}{2} \int [\vec{\omega}, \vec{r}_{\text{из т. о}}]^2 dm.\end{aligned}\quad (23.15)$$

Рассмотрим частный случай вращения относительно неподвижной оси  $z$ , для удобства отсчитывая радиус-векторы точек от центра масс:

$$\begin{aligned}T &= \frac{MV_c^2}{2} + \frac{1}{2} \int_M \omega^2 r_{\text{c.m.}}^2 dm \\ &= \frac{MV_c^2}{2} + \frac{I_z \omega^2}{2} \stackrel{z \text{ неподвижна}}{=} \frac{MV_c^2}{2} + \frac{L_z \omega}{2}.\end{aligned}\quad (23.16)$$

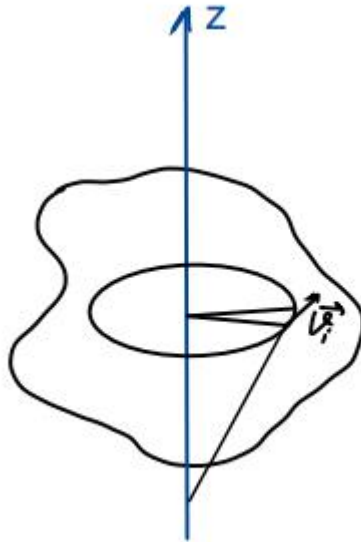


Рис. 23.1: Вращение относительно неподвижной оси.

В случае плоского движения аналогичные рассуждения можно применить и к мгновенной оси вращения,

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \int_M v^2 dm = \frac{1}{2} \int_M \vec{v} \cdot [\vec{\omega} \times \vec{r}] dm \\
 &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \int_M [\vec{r} \times \vec{v}] dm = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \hat{I} \vec{\omega}.
 \end{aligned}
 \quad (23.17)$$

Рассмотрим вращение колеса (или любой другой фигуры с окружностью в сечении) относительно какой-то оси, отстоящей на  $R$  от оси  $z$ , проходящей через центр масс.

$$\frac{1}{2} \omega^2 (I_{\text{c.m.}} + MR^2) \stackrel{I_{\text{c.m.}} = I_z}{=} \frac{\omega^2 I_z}{2} + \frac{1}{2} \omega^2 MR^2 \stackrel{\omega R = V_c}{=} \frac{I_z \omega^2}{2} + \frac{MV_c^2}{2}. \quad (23.18)$$

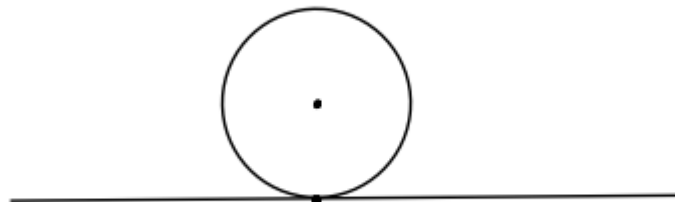


Рис. 23.2: Вращение окружности относительно точки касания.

## 23.3 Скатывание тел с наклонной плоскости без проскальзывания

Рассмотрим скатывание колеса с наклонной плоскости под действием силы тяжести, без проскальзывания — то есть, в каждый момент считая точку касания поверхности неподвижной, что достигается за счёт действия силы трения качения.

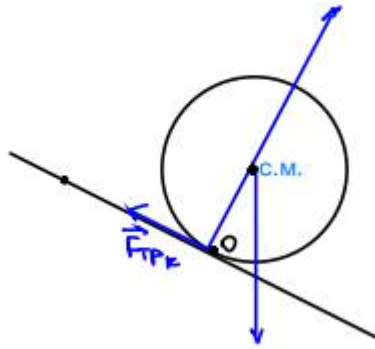


Рис. 23.3: Скатывание колеса с наклонной плоскости.

### 23.3.1 Решение 1, через неподвижную точку

На предмет действуют две силы — тяжести и трения. Выберем точку  $O$ , она неподвижна (так как скатывание без соскальзывания), и при этом именно к ней приложена сила трения, а значит момент силы трения относительно  $O$  нулевой. Осталось рассмотреть момент силы тяжести  $M_g$ , величину которого довольно легко посчитать из геометрических соображений.

$$\frac{dL_O}{dt} = M_g, \quad (23.19)$$

$$I_O \frac{d\omega}{dt} = Rmg \sin \alpha. \quad (23.20)$$

$$(I_c + MR^2) \frac{d\omega}{dt} = Rmg \sin \alpha, \quad (23.21)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{R^2 mg \sin \alpha}{I_c + mR^2}. \quad (23.22)$$

### 23.3.2 Решение 2, через центр масс

Как мы доказали, закон изменения момента количества движения можно записывать не только относительно неподвижной точки, но и центра масс: в этом случае сила трения обретает некий момент, и для решения задачи требуется обратиться ко второму закону Ньютона, то есть закону изменения линейного количества движения. Зато, радуется



то, что момент силы тяжести относительно центра масс нулевой.

$$I_c \frac{d\omega}{dt} = M_{\text{тр}}, \quad (23.23)$$

$$\frac{I_c}{R} \frac{dv}{dt} = RF_{\text{тр}}. \quad (23.24)$$

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}. \quad (23.25)$$

$$\frac{I_c}{R} \frac{dv}{dt} = R(mg \sin \alpha - m \frac{dv}{dt}), \quad (23.26)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I_c}{mR^2}}, \quad (23.27)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{R^2 mg \sin \alpha}{I_c + mR^2}. \quad (23.28)$$

### 23.3.3 Решение 3, через закон сохранения энергии

Вместо рассмотрения сил и их моментов можно посмотреть на энергию системы, которая будет складываться из кинетической и потенциальной: работа силы трения качения будет нулевой, поэтому механическая энергия сохранится.

$$K_2 - K_1 = U_1 - U_2, \quad (23.29)$$

$$\frac{1}{2}(I_c + mR^2)\omega^2 = mgl \sin \alpha \quad (23.30)$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2}(I_c + mR^2)\omega \frac{d\omega}{dt} = mgv \sin \alpha, \quad (23.31)$$

$$(I_c + mR^2) \frac{d\omega}{dt} = mgR \sin \alpha, \quad (23.32)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{R^2 mg \sin \alpha}{I_c + mR^2}. \quad (23.33)$$

Как видно, все три рассмотренных метода эквивалентны в том смысле, что они дают одинаковые ответы — ведь мы рассматриваем один и тот же физический процесс, просто разными методами. Полезно овладеть всеми тремя, так как в более сложных ситуациях уравнения одного из предложенных подходов могут оказаться сильно проще остальных, что сильно экономит мыслительные силы при расчёте какой-то ситуации.

## 23.4 Уравнения Эйлера

До сего момента мы рассматривали лишь плоское вращение. Что же будет в случае более сложного движения, которое не происходит вдоль определённой оси?

Как мы уже вывели ранее, для момента количества движения и суммарного момента сил относительно центра масс всегда справедливо

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (23.34)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{dL_x}{dt} \vec{e}_x + \frac{dL_y}{dt} \vec{e}_y + \frac{dL_z}{dt} \vec{e}_z + L_x \frac{d\vec{e}_x}{dt} + L_y \frac{d\vec{e}_y}{dt} + L_z \frac{d\vec{e}_z}{dt}, \quad (23.35)$$

где последнюю тройку слагаемых можно вместе представить как  $[\vec{\omega} \times \vec{L}]$ .

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{dL_x}{dt}\vec{e}_x + \frac{dL_y}{dt}\vec{e}_y + \frac{dL_z}{dt}\vec{e}_z + [\vec{\omega} \times \vec{L}] = \vec{M}. \quad (23.36)$$

Расписывая по координатам,

$$\begin{cases} \frac{dL_x}{dt} + (\omega_y L_z - \omega_z L_y) = M_x, \\ \frac{dL_y}{dt} + (-\omega_x L_z + \omega_z L_x) = M_y, \\ \frac{dL_z}{dt} + (\omega_x L_y - \omega_y L_x) = M_z. \end{cases} \quad (23.37)$$

Если мы возьмём за оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  главные оси, в которых тензор момента инерции имеет диагональный вид, то получим

$$\begin{cases} \frac{dL_x}{dt} + (I_z - I_y)\omega_z\omega_y = M_x, \\ \frac{dL_y}{dt} + (-I_z + I_x)\omega_x\omega_z = M_y, \\ \frac{dL_z}{dt} + (I_y - I_x)\omega_x\omega_y = M_z. \end{cases} \quad (23.38)$$

Эти три уравнения называют уравнениями Эйлера.

## 23.5 Свободное вращение

Рассмотрим уравнения Эйлера для некоторых предметов в случае нулевого внешнего момента сил,  $\vec{M} = 0$ .

### 23.5.1 Шар

Из-за симметричности шара все его проекции на оси равны,  $I_x = I_y = I_z$ , из-за чего все вторые слагаемые в уравнениях Эйлера обращаются в ноль.

$$\begin{cases} \frac{dL_x}{dt} + 0 = 0, \\ \frac{dL_y}{dt} + 0 = 0, \\ \frac{dL_z}{dt} + 0 = 0. \end{cases} \quad (23.39)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \quad (23.40)$$

$$\vec{L} = \text{const}, \quad (23.41)$$

$$\vec{\omega} = \text{const}. \quad (23.42)$$

### 23.5.2 Симметричный волчок

Посмотрим на фигуру с осевой симметрией относительно оси  $z$ , причём такую, что  $I_x = I_y \neq I_z$  и  $I_z - I_x = \Delta I$ .

$$\begin{cases} I_x \frac{d\omega_x}{dt} + \Delta I \omega_y \omega_z = 0, \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} - \Delta I \omega_x \omega_z = 0, \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} + 0 = 0. \end{cases} \quad (23.43)$$

$$\begin{cases} \frac{d\omega_x}{dt} + \frac{\Delta I}{I_x} \omega_y \omega_z = 0, \\ \frac{d\omega_y}{dt} - \frac{\Delta I}{I_y} \omega_x \omega_z = 0, \\ \frac{d\omega_z}{dt} = 0. \end{cases} \quad (23.44)$$

$$\omega_z = \text{const.} \quad (23.45)$$

Положим приведённую угловую частоту  $\Omega = \frac{\Delta I}{I_x} \omega_z$ , которая будет постоянной из-за постоянства  $\omega_z$ .

$$\begin{cases} \frac{d\omega_x}{dt} + \Omega \omega_y = 0, \\ \frac{d\omega_y}{dt} - \Omega \omega_x = 0. \end{cases} \quad (23.46)$$

$$\omega_x = \frac{1}{\Omega} \frac{d\omega_y}{dt}, \quad (23.47)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\Omega} \frac{d\omega_y}{dt} \right) + \Omega \omega_y = 0, \quad (23.48)$$

$$\frac{1}{\Omega} \ddot{\omega}_y + \Omega \omega_y = 0, \quad (23.49)$$

$$\ddot{\omega}_y + \Omega^2 \omega_y = 0. \quad (23.50)$$

Это дифференциальное уравнение задаёт колебание величины  $\omega_y$  с угловой частотой  $\Omega$ ! А именно, (это можно проверить прямой подстановкой) решение имеет вид

$$\omega_y = A \cos(\Omega t + \varphi), \quad (23.51)$$

$$\omega_x = -A \sin(\Omega t + \varphi), \quad (23.52)$$

где  $A$  — амплитуда,  $\varphi$  — начальная фаза колебания. Положим  $\varphi = 0$  и  $A = \omega_0$ .

$$\omega_y = \omega_0 \cos(\Omega t), \quad (23.53)$$

$$\omega_x = -\omega_0 \sin(\Omega t). \quad (23.54)$$

$$\text{Заметим, что } \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \omega_z^2 + \omega_0^2 = \text{const.} \quad (23.55)$$



## Лекция 24.

# Гармонические колебания. Фазовое пространство

В обычной ИСО, где они не вращаются, т. е. не те, что раньше, в любой момент времени  $\vec{L} = \text{const}$ ,

$\vec{L}$  можно расписать через мгновенную ось вращения! т. е. все точки тела будут  $\sim [\vec{\omega}, \vec{r}_i]$ .

У нас симметричный волчок, т. е. есть ось волчка и есть  $I_z = I_{\parallel}$ ,  $I_x = I_y = I_{\perp}$

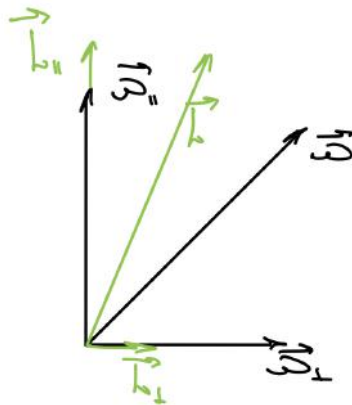


Рис. 24.1: Момент вращения симметричного волчка.

$\vec{L}(\vec{\omega})$  – линейная функция  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\parallel} + \vec{\omega}_{\perp} \Rightarrow$

$$\vec{L}(\vec{\omega}) = I_{\parallel}\vec{\omega}_{\parallel} + I_{\perp}\vec{\omega}_{\perp} = \text{const} \quad (24.1)$$

$$\Rightarrow I_{\parallel}\vec{\omega}_{\parallel} + I_{\perp}\vec{\omega}_{\perp} = \text{const}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}_{\parallel} \text{ и } \vec{\omega}_{\perp} = \text{const длины!!!} \quad (24.2)$$

Кинетическая энергия такого вращения:

$$T = \frac{1}{2}\vec{L}\vec{\omega} = \frac{1}{2}(I_{\parallel}\vec{\omega}_{\parallel}^2 + I_{\perp}\vec{\omega}_{\perp}^2). \quad (24.3)$$

Ось фигуры,  $\vec{L}, \vec{\omega}$  в одной плоскости. Вращение происходит вокруг  $\vec{L}$ .

## 24.1 Вынужденная прецессия

**Гирископом** называют быстро вращающееся тело. Ось вращения может изменять своё положение в пространстве. Точка опоры гироскопа – точка закреплённая. В более общем смысле – точка, относительно которой рассматривается движение гироскопа.

Продолжаем рассматривать приближённую теорию симметричного волчка.

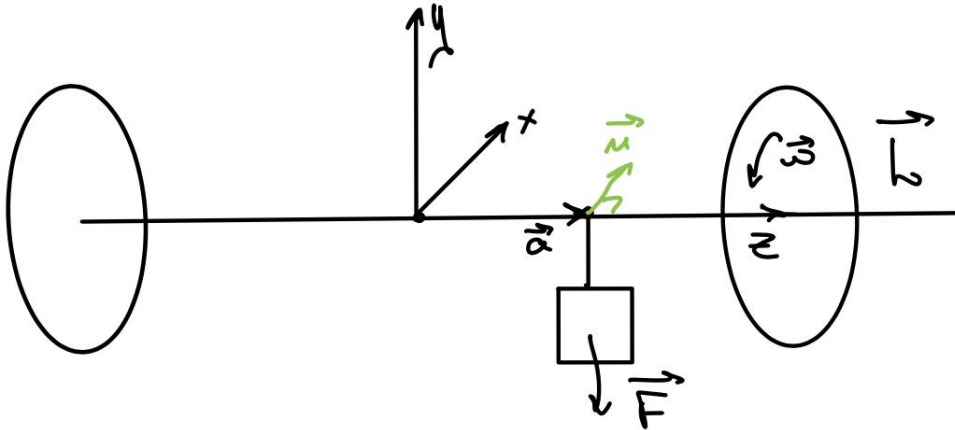


Рис. 24.2: Гироскоп.

При быстром вращении вдоль оси:

$$\vec{L} \simeq I_{\parallel} \vec{\omega}_{\parallel} \simeq I_{\parallel} \vec{\omega}.$$

Пусть точка приложения силы лежит на оси гироскопа:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= [\vec{a}, \vec{F}] \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} &= [\vec{a}, \vec{F}] = \vec{M}, \text{ т.е. } \dot{L} \perp L \\ \Rightarrow &\text{меняется только направление} \\ \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} &= [\vec{\Omega} \times \vec{L}] \quad (d\vec{L} = [d\varphi_{\varphi} \times L]) \\ \Rightarrow [\vec{\Omega} \times \vec{L}] &= \vec{M} \\ \Rightarrow \Omega I_{\parallel} \omega &= F a \\ \Rightarrow \Omega &= \frac{M}{I_{\parallel} \omega}. \end{aligned} \tag{24.4}$$

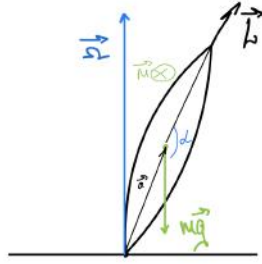


Рис. 24.3: Задача на вынужденную прецессию.

$$\begin{aligned}
 \vec{L} &= I_{\parallel} \vec{\omega} \\
 \vec{M} &= [\vec{a} \times m\vec{g}] \implies |\vec{M}| = amg \sin \alpha \\
 [\vec{\Omega} \times \vec{L}] &= \vec{M} \implies \Omega L \sin \alpha = amg \sin \alpha \\
 \implies \boxed{\Omega = \frac{mga}{I_{\parallel} \omega}}.
 \end{aligned} \tag{24.5}$$

## 24.2 Колебания материальной точки

В общем смысле колебательное движение – это движение, которое повторяется во времени. Наиболее распространенными колебаниями являются колебания, описываемые следующим уравнением:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2} x \tag{24.6}$$

Решение такого уравнения имеет следующий вид:

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \tag{24.7}$$

либо

$$x = a \cos(\omega t + \varphi_0), \tag{24.8}$$

где  $a$  – амплитуда колебаний,  $\omega$  – частота,  $\varphi_0$  – начальная фаза.

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ , где  $T$  – период колебания.

Из того, что период  $\cos$  равен  $2\pi$ , то есть  $\omega \cdot t = \frac{2\pi}{T} \cdot t = 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$\implies t = T \cdot k$ , то есть да,  $T$  – период, ибо каждые  $t=T$  движение повторяется.

Два свободных параметра определяются начальными условиями: значениями  $x(t)$  и  $\dot{x}(t)$  в моменте  $t=0$ .

$$\text{Пусть } x(0) = x_0 \text{ и } \dot{x}(0) = v_0 \quad (24.9)$$

$$\Rightarrow x_0 = a \cos(\varphi_0), \quad v_0 = -a\omega \sin(\varphi_0) \quad (24.10)$$

$$\frac{\sin(\varphi_0)}{\cos(\varphi_0)} = \operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{v_0 a}{a\omega x_0} \quad (24.11)$$

$$\varphi_0 = \arctg \left[ -\frac{v_0}{\omega x_0} \right] \quad (24.12)$$

$$x_0^2 + \left( \frac{v_0}{\omega} \right)^2 = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{x_0^2 + \left( \frac{v_0}{\omega} \right)^2}. \quad (24.13)$$

### 24.2.1 Математический маятник

$$ma_\tau = -mg \sin \alpha \quad (24.14)$$

$$\Rightarrow m \cdot l \cdot \ddot{\alpha} + mg \alpha = 0 \quad (24.15)$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \alpha = 0 \quad (24.16)$$

$$\Rightarrow \ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (24.17)$$

$$\Rightarrow a = a_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (24.18)$$



Рис. 24.4: Математический маятник.

### 24.2.2 Пружинка

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0) \quad (24.19)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_0 \quad (24.20)$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{k}{m}x_0 = \omega^2 x_0 \quad (24.21)$$



**Вариант 1:** пусть  $\tilde{x} = x - x_0$ ,  $\ddot{\tilde{x}} = \ddot{x}$

$$\Rightarrow \ddot{\tilde{x}} + \omega^2 \tilde{x} = 0 \Rightarrow \tilde{x} = a \cos(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow x = x_0 + a \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (24.22)$$

**Вариант 2:** ОРНДУ = ОРОДУ + ЧРНДУ  $\Rightarrow x = a \cos(\omega t + \varphi_0) + x_0$

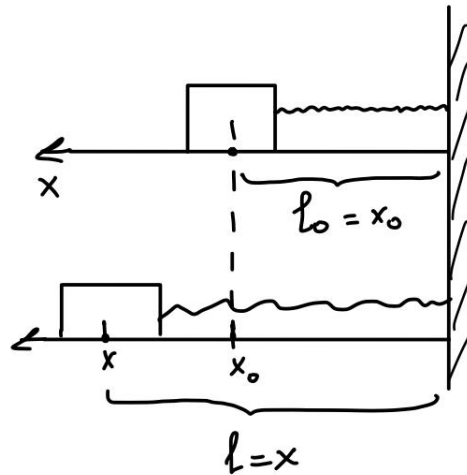


Рис. 24.5: Пружинный маятник.

Иногда удобно решать задачу на колебания при помощи энергии. Рассмотрим на примерах:

$$T + U = \frac{1}{2} m (l\dot{\alpha})^2 + mgl(1 - \cos \alpha) \quad (24.23)$$

При малых  $\alpha$

$$T + U = \text{const} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\alpha}_{\max}^2$$

$$\frac{1}{2} m l^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{mgl}{2} \alpha^2 = \text{const}$$

$$\frac{d}{dt} (\dots) = 0$$

$$\frac{1}{2} m l^2 2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{2l} 2\alpha\dot{\alpha} = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \alpha = 0. \quad (24.24)$$

Для одномерных гармонических колебаний можно записать в общем виде:

$$\frac{1}{2} A (\dot{x})^2 + \frac{1}{2} B x^2 = \text{const} \quad (24.25)$$

$$A\dot{x}\ddot{x} + Bx\dot{x} = 0 \quad (24.26)$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{B}{A}. \quad (24.27)$$

То есть, как только записали выражение для энергии, сразу же знаем и частоту.

$$\begin{aligned}
 x &= a \cos(\omega t + \varphi_0) \\
 T &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m (a\omega)^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \\
 U &= \frac{1}{2} Bx^2 = \frac{1}{2} Ba^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)
 \end{aligned} \tag{24.28}$$

Ещё раз!

$$T = \frac{A}{2} (a\omega)^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{B}{2} a^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \tag{24.29}$$

$$U = \frac{B}{2} a^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{B}{2} a^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) \tag{24.30}$$

$$\langle T \rangle = \frac{1}{T_{\pi}} \int_0^{T_{\pi}} \frac{B}{2} a^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) dt = \frac{Ba^2}{4} \tag{24.31}$$

$$\langle U \rangle = \frac{Ba^2}{4}. \tag{24.32}$$

Кинетическая и потенциальная энергии сов. колебания с удвоенной частотой относительно ф. зн.  $\frac{Ba^2}{4}$ .

## 24.3 Фазовое пространство, фазовая траектория

Совокупность координаты и скорости материальной точки (обобщенных) даёт такой объект, как фазовая плоскость (пространство).

Кривая, описывающая положение точки в фазовом пространстве, называется фазовой траекторией.

$$\begin{aligned}
 x &= a \cos(\omega t + \varphi_0) \\
 v &= -a\omega \sin(\omega t + \varphi_0) \\
 \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{v}{a\omega}\right)^2 &= 1 \quad \text{— эллипс}
 \end{aligned} \tag{24.33}$$

## Лекция 25.

# Затухающие колебания. Вынужденные колебания

### 25.1 Метод комплексных амплитуд

Мы понимаем, что для гармонических колебаний верно следующее соотношение:

$$x \sim \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (25.1)$$

Рассмотрим следующее:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \varphi = \omega t + \varphi_0$$
$$x = \operatorname{Re} \left[ \underbrace{ae^{i\varphi}}_z \right], \quad (25.2)$$

$$y = \operatorname{Im} [z], \quad (25.3)$$

где  $a, \varphi \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi$  - фаза,  $\varphi_0$  - начальная фаза.

Т. е.  $x$  – проекция комплексного числа  $z$  на ось  $\operatorname{Re}$ .

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega^2 z = 0$$

или

$$\frac{d^2}{dt^2}(x + iy) + \omega^2(x + iy) = 0 \implies$$
$$\implies \underbrace{\frac{d^2}{dt^2}x + \omega^2 x}_{=0} + i \underbrace{\left[ \frac{d^2}{dt^2}y + \omega^2 y \right]}_{=0} = 0. \quad (25.4)$$

Решение начального уравнения нужно искать в виде  $e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0 \quad (25.5)$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\omega \quad (25.6)$$

$$\Rightarrow z = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}. \quad (25.7)$$

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{Re}[Z] = \operatorname{Re}[c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}] = \\ &= a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \left[ \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \cos \omega t - \frac{(-a_2)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \sin \omega t \right] \\ &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cos(\omega t + \varphi_0), \\ \operatorname{tg} \varphi_0 &= \frac{a_1}{-a_2} = -\frac{a_1}{a_2}. \end{aligned} \quad (25.8)$$

## 25.2 Затухающие колебания.

Запишем второй закон Ньютона с силами сопротивления:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2}{dt^2} x &= -kx - 2\gamma \dot{x} m \\ \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} x + 2\gamma \dot{x} &= 0, \\ \boxed{\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \frac{k}{m} x} &= 0 \end{aligned} \quad (25.9)$$

Для дальнейшего рассмотрения необходимо разделять частоту собственных колебаний без затухания  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  и частоту колебаний в присутствии затухания  $\omega$ . Можно решить методом комплексных амплитуд:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \\ x &= \operatorname{Re}[z]. \end{aligned} \quad (25.10)$$

А можно решить так:

$$\begin{aligned} x &= e^{\lambda t} \\ \Rightarrow \lambda^2 + 2\gamma \lambda + \omega_0^2 &= 0, \\ \Rightarrow \lambda_{1,2} &= \frac{-2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}, \\ \lambda_{1,2} &= -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \end{aligned} \quad (25.11)$$

Найдём решение  $x$ :

$$\begin{aligned} x &= a_1 e^{[-\gamma + i\omega]t} + a_2 e^{[-\gamma - i\omega]t}, \\ x &= e^{-\gamma t} [a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{-i\omega t}], \\ x &= e^{-\gamma t} a \cos(\omega t + \varphi_0) \\ x &= a e^{-\gamma t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (25.12)$$

Мы рассмотрели вариант, когда  $\omega_0 > \gamma$

Если  $\omega_0 = \gamma$ , то  $\lambda_1 = \lambda_2$ , то есть корень кратности два, следовательно:

$$x = (a_1 + a_2 t)e^{-\gamma t}. \quad (25.13)$$

Если же  $\omega_0 < \gamma$ , то

$$x = e^{-\gamma t} \left[ a_1 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + a_2 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right]. \quad (25.14)$$

## 25.3 Характеристики затухающих колебаний ( $\omega_0 > \gamma$ ).

Амплитуда колебаний затухает:

$$a(t) = ae^{-\gamma t}. \quad (25.15)$$

Логарифмический декремент затухания:

$$\delta \equiv \lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \ln \frac{ae^{-\gamma t}}{ae^{-\gamma(t+T)}} = \ln e^{\gamma T} = \gamma T = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}. \quad (25.16)$$

Добротность:

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{\Delta E} = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)} = 2\pi \frac{e^{-2\gamma t}}{e^{-2\gamma t} - e^{-2\gamma(t+T)}} = 2\pi \frac{1}{1 - e^{-2\gamma T}},$$

$$E = \frac{1}{2} B a^2(t) = \frac{1}{2} B a^2 e^{-2\gamma t}. \quad (25.17)$$

Если  $\gamma \ll \omega_0$ , то  $T/\omega_0 \ll 1 \implies \gamma T \ll 1$

$$Q = 2\pi \frac{1}{1 - 1 + 2\gamma T} = \frac{\pi}{\gamma T} = \frac{\pi}{\lambda}. \quad (25.18)$$

## 25.4 Вынужденные колебания

Рассмотрим вынужденные колебания: такие, при которых присутствует внешняя вынуждающая сила.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - 2\gamma m \frac{dx}{dt} + F(t). \quad (25.19)$$

$$\text{Введём обозначение } f(t) = \frac{F(t)}{m}, \quad (25.20)$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)}. \quad (25.21)$$

Получив дифференциальное уравнение, самым естественным чувством будет желание его решить. Рассмотрим частные случаи того, как может выглядеть решение в зависимости от вида  $F(t)$ .

### 25.4.1 Постоянная вынуждающая сила

Примем  $F(t) = F_0$ , то есть  $f(t) = f_0$ .

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0. \quad (25.22)$$

Решение неоднородного уравнения - это сумма решения однородного и частного решения неоднородного: решение однородного мы знаем, попробуем угадать частное решение неоднородного.

$$\text{Положим } x(t) = \tilde{x} = \text{const}, \quad (25.23)$$

$$0 + 0 + \omega_0^2 \tilde{x} = f_0, \quad (25.24)$$

$$\tilde{x} = \frac{f_0}{\omega_0^2}. \quad (25.25)$$

Получаем общий вид решения неоднородного:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{f_0}{\omega_0^2}, \quad (25.26)$$

$$\text{где } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (25.27)$$

### 25.4.2 Гармоническая вынуждающая сила

Примем  $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ ,  $f(t) = f_0 \cos(\Omega t)$ .

Довольно естественно сказать, что  $x(t)$  будет действительной частью некой комплекснозначной функцией  $z(t)$  — такой, что

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = f_0 e^{i\Omega t}. \quad (25.28)$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\Omega t). \quad (25.29)$$

Раз правая часть пропорциональна  $e^{i\Omega t}$ , то и частное решение нужно искать формы  $\tilde{z}(t) = Ce^{i\Omega t}$ . Подставим это в уравнение 25.28.

$$C(i\Omega)^2 e^{i\Omega t} + 2\gamma C(i\Omega) e^{i\Omega t} + \omega_0^2 C e^{i\Omega t} = f_0 e^{i\Omega t}, \quad (25.30)$$

$$C(-\Omega^2 + 2\gamma i\Omega + \omega_0^2) = f_0, \quad (25.31)$$

$$C = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\gamma i\Omega} = \frac{f_0(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\gamma i\Omega)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}. \quad (25.32)$$

В данном случае  $C$  это комплексная амплитуда нашего колебания — запишем её в тригонометрической форме, разделив, собственно, амплитуду и смещение по фазе.

$$C = |C| e^{i\Psi}, \quad (25.33)$$

$$\text{tg } \Psi = \frac{-2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{2\gamma\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}, \quad (25.34)$$

$$|C| = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}}. \quad (25.35)$$

$$\tilde{x}(t) = \text{Re}(|C| e^{i(\Omega t + \Psi)}). \quad (25.36)$$

$$\tilde{x}(t) = |C| \cos(\Omega t + \Psi). \quad (25.37)$$

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0) + |C| \cos(\Omega t + \Psi), \quad (25.38)$$

$$\text{где } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (25.39)$$

Заметим, что через какое-то время первое слагаемое — решение однородного уравнения — затухнет и полностью исчезнет, так что в конечном счёте останется лишь колебание, вызванное вынуждающей силой.

Амплитуда этого второго слагаемого зависит от частоты прикладываемой силы. Есть такие частоты, на которых амплитуда резко возрастает — это явление называется резонансом. Проанализируем  $C(\Omega)$  и найдём частоты, при которых достигается максимум.

1.  $\Omega \approx 0$ .

$$|C| = \frac{f_0}{\omega_0^2}, \quad (25.40)$$

$$\Psi < 0. \quad (25.41)$$

2.  $\Omega \gg \omega_0$ .

$$|C| = \frac{f_0}{\Omega \sqrt{\Omega^2 + 4\gamma^2}} \approx 0, \quad (25.42)$$

$$\Psi \approx 0. \quad (25.43)$$

3. Достигается максимум:  $\frac{d|C|}{d\Omega} = 0$ .

$$\frac{f_0 \cdot \left( 2(\omega_0^2 - \Omega^2) \cdot 2\Omega \cdot (-1) + 8\gamma^2\Omega \right)}{\left( (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2 \right)^{\frac{3}{2}}} = 0, \quad (25.44)$$

$$-4\Omega(\omega_0^2 - \Omega^2) + 8\gamma^2\Omega = 0, \quad (25.45)$$

$$2\gamma^2 = \omega_0^2 - \Omega^2, \quad (25.46)$$

$$\Omega^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2, \quad (25.47)$$

$$\boxed{\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}}. \quad (25.48)$$

## Лекция 26.

### Колебания. Продолжение

Через какое-то время решение однородного уравнения - затухающее решение полностью исчезнет. Остается только частное решение.

Амплитуда зависит от частоты. Есть максимальное значение этой амплитуды, т.е. мы получаем резонанс - явление резкого возрастания амплитуды.

Анализ  $C(\Omega)$ :

1) При  $\Omega \approx 0 \Rightarrow |C| = \frac{f_0}{\omega_0^2}$  и  $\psi < 0$ .

2) При  $\Omega \gg \omega_0 \Rightarrow |C| = \frac{f_0}{\Omega \sqrt{\Omega^2 + 4\gamma^2}} \approx 0$  и  $\psi \rightarrow 0$ .

3)  $\max \frac{d|C|}{d\Omega} = 0 = -\frac{1}{2} \frac{f_0 \cdot (2(\omega_0^2 - \Omega^2)2\Omega(-1) + 8\gamma^2\Omega)}{((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$

$$\Rightarrow -4\Omega(\omega_0^2 - \Omega^2) + 8\gamma^2\Omega = 0,$$

$$2\gamma^2 = \omega_0^2 - \Omega^2,$$

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}.$$

$$\begin{aligned} |C_{res}| &= \frac{f_0}{\sqrt{4\gamma^4 + 4\gamma^4(\omega_0^2 - 2\gamma^2)}} = \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\gamma^2 + \omega_0^2 - 2\gamma^2}} = \\ &= \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}. \end{aligned}$$

При малых  $\gamma$ :  $\Omega \approx \omega_0$

Фаза в резонансе:

$$\tan \varphi = -\frac{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}}{2\gamma^2} = -\frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}}{\gamma}. \quad (26.1)$$

**Отношение амплитуды в резонансе к статистическому сдвигу:**



$$\frac{|C_{res}|}{\frac{f_0}{\omega_0^2}} = \frac{\omega_0^2}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \approx \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\pi}{\gamma T}. \quad (26.2)$$

- добротность.

Найдем ширину резонансного пика: по определению это ширина определяется значением частоты, где  $|C| = \frac{|C_{res}|}{\sqrt{2}}$ .

$$\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega_{1,2}^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}, \quad (26.3)$$

$$\Rightarrow (\omega_0^2 - \Omega_{1,2}^2)^2 = 2 \cdot 4\gamma^2\omega_0^2 - 4\gamma^2\Omega_{1,2}^2, \quad (26.4)$$

$$(\omega_0^2 - \Omega_{1,2}^2)^2 \cong 4\gamma^2\omega_0^2, \quad (26.5)$$

$$\Rightarrow \Omega_{1,2} \approx \pm \sqrt{\omega_0^2 \pm 2\gamma\omega_0} = \omega_0 \sqrt{1 \pm \frac{2\gamma}{\omega_0}} \approx \omega_0 \pm \gamma, \quad (26.6)$$

$$\Rightarrow \frac{\Omega_{res}}{\Delta\Omega} \cong \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\pi}{T\gamma}. \quad (26.7)$$

## 26.1 Установление колебаний

Переходный процесс - процесс установления вынужденных колебаний.

Характерное время такого процесса:  $\tau = \frac{1}{\gamma}$ . За это время амплитуда затухающих колебаний уменьшается в  $e$  раз

Посмотрим на установление такого режима в случае раскачки гармонического осциллятора со слабым затуханием, с частотой, которая примерно равна частоте собственных колебаний.

$$x(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} \cos(\Omega t + \psi) + ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Пусть  $x_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2}$

$$x(t) = \frac{\omega_0}{2\gamma} x_0 \cos(\omega_0 t + \psi) + ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (26.8)$$

$$\tan \psi = -\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \rightarrow -\infty \Rightarrow \psi = -\frac{\pi}{2}, \quad (26.9)$$

$$x(t) = Qx_0 \sin \omega_0 t + ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (26.10)$$

$$\frac{dx}{dt} \approx Qx_0 \cos(\omega_0 t)\omega_0 - ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi_0)\omega_0. \quad (26.11)$$

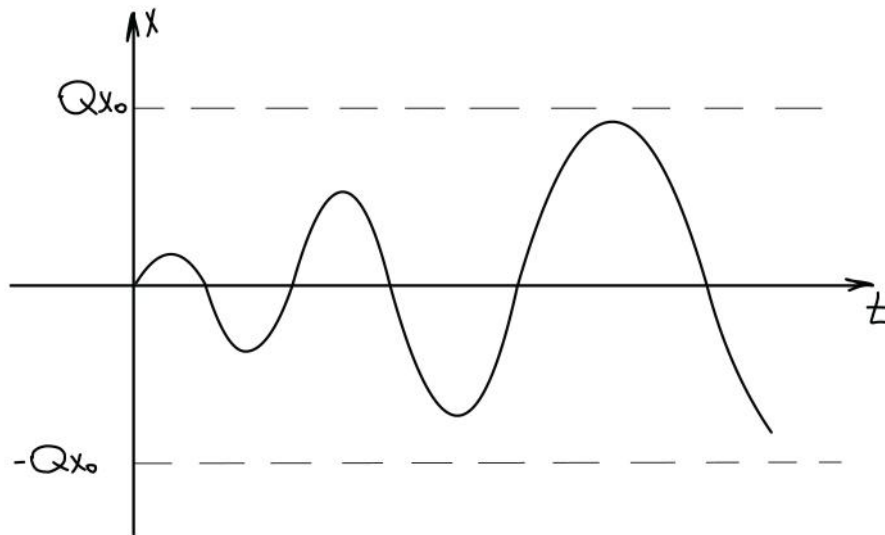


Рис. 26.1: График

Начинаем раскачивать:  $x(0) = 0, \frac{dx}{dt}(0) = 0$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}, a = Qx_0$$

$$x(t) = Qx_0 \sin \omega_0 t [1 - e^{-\gamma t}]$$

Если же учесть отличие частот, то:

$$x(t) \cong Qx_0 \sin \Omega t - Qx_0 \sin \omega_0 t \approx 2Qx_0 \sin \frac{\Delta\omega}{2} t \cos \omega_0 t$$

т.е. медленно меняющаяся амплитуда. Заметим, что это верно только в самом начале колебаний, когда  $e^{-\gamma t} \rightarrow 1$

## 26.2 Мощность затухания

Рассмотрим установившийся режим:

$$P_{\text{тр}} = \frac{\delta A}{dt} = \frac{F_{\text{тр}} dx}{dt} = -\beta \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = \quad (26.12)$$

$$= -\beta \left[ \frac{d}{dt} |C| \cos(\Omega t + \varphi) \right]^2 = -\beta |C|^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega t + \varphi) = \quad (26.13)$$

$$= -2\gamma m \Omega^2 |C|^2 \sin^2(\Omega t + \varphi). \quad (26.14)$$

Усредним по периоду:

$$\langle P_{\text{тр}} \rangle = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T P_{\text{тр}}(t) dt = -\Omega^2 \cdot \gamma m |C|^2 = -\frac{\Omega^2 \gamma m \cdot f_0^2}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2} \quad (26.15)$$

### 26.3 Мощность внешней силы

$$\begin{aligned}
 P_F &= m f_0 \cos(\Omega t) \cdot \frac{dx}{dt} = m f_0 \cos(\Omega t) \cdot (-1)|c| \sin(\Omega t + \psi) \Omega = \\
 &= -m f_0 |C| \Omega \cos(\Omega t) \cdot \sin(\Omega t + \psi) = \\
 &= -m f_0 |C| \Omega \left[ \cos \Omega t \cdot \sin \Omega t \cdot \cos \psi + \cos \Omega t \cdot \cos \Omega t \cdot \sin \psi \right] = \quad (26.16)
 \end{aligned}$$

$$= -m f_0 |C| \Omega \left[ \cos \Omega t \cdot \sin \Omega t \cdot \cos \psi + \cos^2 \Omega t \cdot \sin \psi \right] = \quad (26.17)$$

$$= -m f_0 |C| \Omega \left[ \cos \psi \frac{\sin 2\Omega t}{2} + \cos^2 \Omega t \cdot \sin \psi \right]. \quad (26.18)$$

$$\langle P_F \rangle = -\frac{m f_0 |C| \Omega}{2} \cdot \sin \psi = -\frac{m f_0 f_0 \Omega \sin \psi}{2 \sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}} = \quad (26.19)$$

$$= \frac{m f_0^2 \Omega}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}} \cdot \frac{\gamma \Omega}{\sqrt{(-\Omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}}. \quad (26.20)$$

$$\sin \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\text{tg}^2 \psi}}},$$

$$\text{tg} \psi = -\frac{2\gamma \Omega}{\omega^2 - \Omega^2}.$$

## Лекция 27.

### Свободные колебания двух связанных осцилляторов

Сперва запишем самый общий случай:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -m_1 g \varphi_1 - \beta_1 \dot{x}_1 - k(x_1 - x_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -m_2 g \varphi_2 - \beta_2 \dot{x}_2 - k(x_2 - x_1) \end{cases} \quad (27.1)$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -m_1 g \frac{x_1}{l} - \beta_1 \dot{x}_1 - k(x_1 - x_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -m_2 g \frac{x_2}{l} - \beta_2 \dot{x}_2 - k(x_2 - x_1) \end{cases} \quad (27.2)$$

Данная система имеет аналитическое решение, однако анализировать его нет смысла (очень большое).

Рассмотрим случай малых затуханий: Пусть  $\beta_1$  и  $\beta_2 \ll \sqrt{km}$

$$\begin{cases} \frac{m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{g}{l} \\ \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\frac{g}{l}(x_2 - x_1) - \left( \frac{k}{m_2} + \frac{k}{m_1} \right) (x_2 - x_1) \end{cases} \quad (27.3)$$

$$\begin{cases} \ddot{u} + \frac{g}{l}u = 0 \\ \Delta \ddot{x} + \left( \frac{g}{l} + \frac{k}{\mu} \right) \Delta x = 0 \end{cases} \quad (27.4)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u &= u_0 \cos(\omega_u t + \varphi_u), \\ \Delta x &= \Delta x_0 \cos(\omega_{\Delta x} t + \varphi_{\Delta x}). \\ u &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad \Delta x = x_2 - x_1. \end{aligned} \quad (27.5)$$

Понятно, что  $\omega_{\Delta x} > \omega_u$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_1 &= u - \frac{\Delta x m_2}{m_1 + m_2}; \\ \Rightarrow x_2 &= u + \frac{\Delta x m_1}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (27.6)$$

Подставим полученные ранее выражения для  $\Delta x$  и  $u$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= u \cos(\omega_u t + \varphi_u) - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \Delta x_0 \cos(\omega_{\Delta x} t + \varphi_{\Delta x}), \\ x_2 &= u \cos(\omega_u t + \varphi_u) + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \Delta x_0 \cos(\omega_{\Delta x} t + \varphi_{\Delta x}). \end{aligned} \quad (27.7)$$

Рассмотрим пример: пусть  $x_1(0) = 0$ ;  $x_2(0) = x_0$ ;  $v_1(0) = v_2(0) = 0$ .

$m_1 = m_2 = m$ ,  $\mu = m^2/2m = m/2$ .

$$\begin{cases} x_1 = u_0 \cos(\omega_u t + \varphi_u) - \frac{\Delta x_0}{2} \cos(\omega_{\Delta x} t + \varphi_{\Delta x}), \\ x_2 = u_0 \cos(\omega_u t + \varphi_u) + \frac{\Delta x_0}{2} \cos(\omega_{\Delta x} t + \varphi_{\Delta x}). \end{cases} \quad (27.8)$$

$$\begin{cases} u_0 \cos(\varphi_u) - \frac{\Delta x_0}{2} \cos(\varphi_{\Delta x}) = 0, \\ u_0 \cos(\varphi_u) + \frac{\Delta x_0}{2} \cos(\varphi_{\Delta x}) = x_0, \\ -u_0 \omega_u \sin(\varphi_u) + \frac{\Delta x_0}{2} \omega_{\Delta x} \sin(\varphi_{\Delta x}) = 0, \\ -u_0 \omega_u \sin(\varphi_u) - \frac{\Delta x_0}{2} \omega_{\Delta x} \sin(\varphi_{\Delta x}) = 0. \end{cases} \quad (27.9)$$

Сложим и вычтем парами первые два и последние два уравнения системы:

$$\begin{cases} 2u_0 \cos \varphi_u = x_0, \\ \Delta x_0 \cos \varphi_{\Delta x} = x_0, \\ u_0 \sin \varphi_u = 0, \\ \Delta x_0 \sin \varphi_{\Delta x} = 0. \end{cases} \quad (27.10)$$

Из первого и третьего уравнения новой системы следует, что  $\varphi_u = 0$ , а из второго и четвёртого следует, что  $\varphi_{\Delta x} = 0$ , и тогда:

$$u_0 = \frac{x_0}{2}, \quad (27.11)$$

$$\Delta x_0 = x_0. \quad (27.12)$$

Зная значения  $u_0$  и  $\Delta x_0$  знаем, что:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\Delta x_0}{2} [\cos(\omega_u t) - \cos(\omega_{\Delta x} t)], \\ x_2 = \frac{\Delta x_0}{2} [\cos(\omega_u t) + \cos(\omega_{\Delta x} t)]. \end{cases} \quad (27.13)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{x_0}{2} \left[ -2 \sin \left( \frac{\omega_u - \omega_{\Delta x}}{2} t \right) \sin \left( \frac{\omega_u + \omega_{\Delta x}}{2} t \right) \right], \\ x_2 = \frac{x_0}{2} \left[ 2 \cos \left( \frac{\omega_u + \omega_{\Delta x}}{2} t \right) \cos \left( \frac{\omega_u - \omega_{\Delta x}}{2} t \right) \right]. \end{cases} \quad (27.14)$$

Добавим внешнюю вынуждающую силу и рассмотрим установившиеся колебания:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + 2\gamma_1 \dot{x}_1 + \frac{k}{m_1} (x_1 - x_2) = f_0 \cos(\Omega t), \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + 2\gamma_2 \dot{x}_2 + \frac{k}{m_2} (x_2 - x_1) = 0. \end{cases} \quad (27.15)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \left( \omega_0^2 + \frac{k}{m_1} \right) x_1 + 2\gamma_1 \dot{x}_1 - \nu_1 x_2 = f_0 \cos(\Omega t), \\ \ddot{x}_2 + \left( \omega_0^2 + \frac{k}{m_2} \right) x_2 + 2\gamma_2 \dot{x}_2 - \nu_2 x_1 = 0. \end{cases} \quad (27.16)$$

$$\nu_1 = k/m_1 \text{ и } \nu_2 = k/m_2, \quad \omega_0^2 + k/m_1 = \omega_{01}^2, \quad \omega_0^2 + k/m_2 = \omega_{02}^2.$$

$$x_1 = C_1 e^{i\Omega t}, \quad x_2 = C_2 e^{i\Omega t}.$$

$$\begin{cases} -\Omega^2 C_1 + \omega_{01}^2 C_1 + 2\gamma_1 C_1 i\Omega - \nu_1 C_2 = f_0, \\ -\Omega^2 C_2 + \omega_{02}^2 C_2 + 2\gamma_2 C_2 i\Omega - \nu_2 C_1 = 0. \end{cases} \quad (27.17)$$

$$\begin{cases} C_1 \underbrace{(-\Omega^2 + \omega_{01}^2 + 2\gamma_1 i\Omega)}_{A_1} \underbrace{-\nu_1}_{B_1} C_2 = f_0, \\ C_2 \underbrace{(-\Omega^2 + \omega_{02}^2 + 2\gamma_2 i\Omega)}_{A_2} \underbrace{-\nu_2}_{B_2} C_1 = 0. \end{cases} \quad (27.18)$$

$$\begin{cases} C_1 A_1 + B_1 C_2 = f_0, \\ C_2 A_2 + B_2 C_1 = 0. \end{cases} \quad (27.19)$$

$$\begin{cases} C_2 = -\frac{B_2}{A_2} C_1, \\ C_1 A_1 + B_1 \left( -\frac{B_2}{A_2} C_1 \right) = f_0. \end{cases} \quad (27.20)$$

$$\begin{cases} C_2 = -\frac{B_2}{A_2} C_1 = -\frac{B_2}{A_2} \frac{f_0}{A_1 - \frac{B_1 B_2}{A_2}}, \\ C_1 \left( A_1 - \frac{B_1 B_2}{A_2} \right) = f_0. \end{cases} \quad (27.21)$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{f_0 A_2}{A_1 A_2 - B_1 B_2}, \\ C_2 = \frac{-f_0 B_2}{A_1 A_2 - B_1 B_2}. \end{cases} \quad (27.22)$$

Теперь посмотрим на явление резонанса. Для этого посмотрим на знаменатель:

$$\begin{aligned} A_1 A_2 - B_1 B_2 &= (\omega_{01}^2 - \Omega^2 + 2\gamma_1 i\Omega)(\omega_{02}^2 - \Omega^2 + 2\gamma_2 i\Omega) - \nu_1 \nu_2 \\ &= \Omega^4 - (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)\Omega^2 + \omega_{01}^2 \omega_{02}^2 - \nu_1 \nu_2 + 2\gamma_2 i\Omega \omega_{01}^2 - \end{aligned} \quad (27.23)$$

$$\Omega^3 2\gamma_2 i + 2\gamma_1 i\Omega \omega_{02}^2 - \Omega^3 2\gamma_1 i - 4\gamma_1 \gamma_2 \Omega^2. \quad (27.24)$$

Рассмотрим нулевой порядок по  $\gamma_{1,2}$ :

$$\begin{aligned} \Omega_{1,2}^2 &= \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \pm \sqrt{(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)^2 - 4(\omega_{01}^2 \omega_{02}^2 - \nu_1 \nu_2)}}{2} \\ &= \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \pm \sqrt{(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2 + 4\nu_1 \nu_2}}{2} \\ &= \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \pm (\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2) \sqrt{1 + \frac{4\nu_1 \nu_2}{(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2}}}{2}. \end{aligned} \quad (27.25)$$

При малых колебаниях можем использовать приближение  $(1 + \xi)^\alpha = 1 + \alpha\xi$ , в нашем

случае  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

$$\Omega_{1,2}^2 \approx \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \pm (\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2) \left(1 + \frac{2\nu_1\nu_2}{(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2}\right)}{2}, \quad (27.26)$$

$$\Omega_1^2 = \omega_{01}^2 + \frac{\nu_1\nu_2}{\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2}, \quad (27.27)$$

$$\Omega_2^2 = \omega_{02}^2 - \frac{\nu_1\nu_2}{\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2}. \quad (27.28)$$

$$C_1 = \frac{f_0 A_2}{(\Omega^2 - \Omega_1^2)(\Omega^2 - \Omega_2^2)} = \frac{a_1}{\Omega^2 - \Omega_1^2} + \frac{a_2}{\Omega^2 - \Omega_2^2}, \quad (27.29)$$

$$C_2 = \frac{f_0 B_2}{(\Omega^2 - \Omega_1^2)(\Omega^2 - \Omega_2^2)} = \frac{b_1}{\Omega^2 - \Omega_1^2} + \frac{b_2}{\Omega^2 - \Omega_2^2}. \quad (27.30)$$

То есть, при малых затуханиях и не очень сильной связи отклик элементов это в точности сумма откликов двух осцилляторов.

## 27.1 Параметрическое возбуждение колебаний

Параметрические колебания — такие, при которых увеличивается амплитуда за счёт периодического изменения какого-либо параметра системы.

Для примера рассмотрим математический маятник, который будет увеличивать свою амплитуду за счёт уменьшения длины.

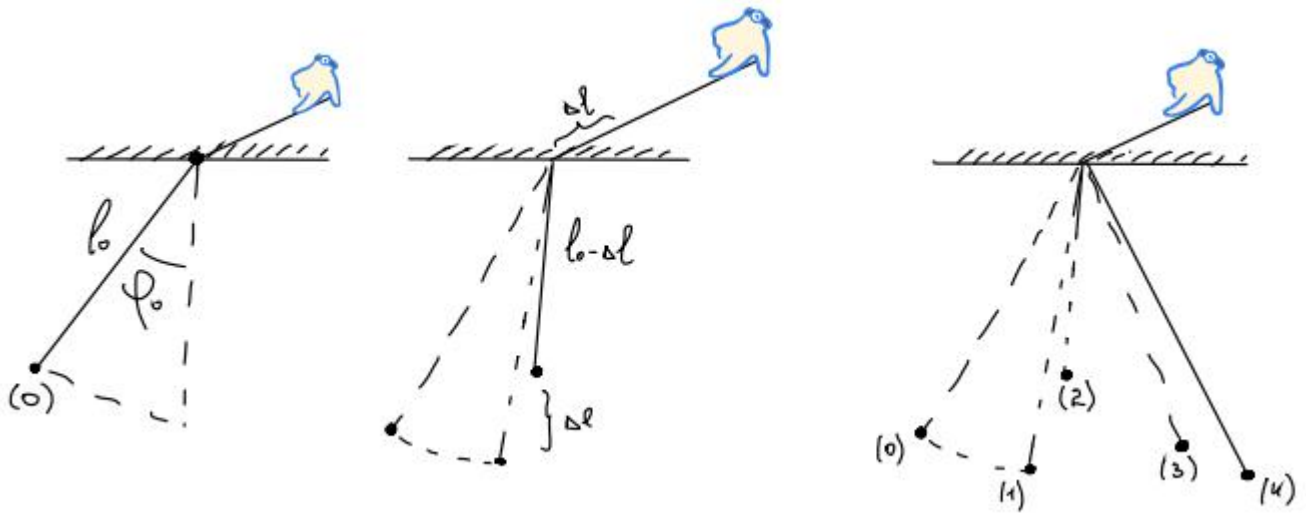


Рис. 27.1: Параметрические колебания математического маятника.

В качестве начальных условий нам известны  $\varphi_0$  и  $l_0$ . Посмотрим на процессы между событиями на рисунке:

(0)  $\rightarrow$  (1): из сохранения энергии

$$mgl_0(1 - \cos \varphi_0) = \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (27.31)$$

(1)  $\rightarrow$  (2): из сохранения момента импульса (сила направлена вдоль верёвки)

$$mv_0 l_0 = mv_1 (l_0 - \Delta l). \quad (27.32)$$

$$\begin{cases} v_1 = v_0 \frac{l_0}{l_0 - \Delta l} = \frac{2gl_0}{l_0 \Delta l} \sqrt{1 - \cos \varphi_0}, \\ v_0 = \sqrt{2gl_0(1 - \cos \varphi_0)}. \end{cases} \quad (27.33)$$

(2)  $\rightarrow$  (3): из сохранения энергии

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mg(l_0 - \Delta l)(1 - \cos \varphi_1). \quad (27.34)$$

(3)  $\rightarrow$  (4): из сохранения момента импульса скорость в этих точках нулевая, что, однако, автоматически выполняется.

Затем на новом витке всё повторится заново, но уже с другим начальным отклонением,  $\varphi_1$ .

Выведем аналитическое выражение для  $\varphi_j$ , считая его много меньше единицы, а также принимая изменение длины малым по сравнению с начальной длиной маятника.

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mg(l_0 - \Delta l)(1 - \cos \varphi_1). \quad (27.35)$$

$$v_1 = \frac{\sqrt{2gl_0} l_0}{l_0 - \Delta l} \sqrt{1 - \cos \varphi_0}. \quad (27.36)$$

$$\frac{1}{2} \frac{gl_0^3}{(l_0 - \Delta l)^2} \left( \sqrt{\frac{2\varphi_0}{2}} \right)^2 \approx gl_0 - \Delta l \left( 1 - \left( 1 - \frac{\varphi_1^2}{2} \right) \right), \quad (27.37)$$

$$\frac{l_0^3}{(l_0 - \Delta l)^3} \frac{\sqrt{2}\varphi_0^2}{\sqrt{2}} = \varphi_1^2, \quad (27.38)$$

$$\varphi_1 = \left( \frac{l_0}{l_0 - \Delta l} \right)^{\frac{3}{2}} \varphi_0. \quad (27.39)$$

$$\varphi_1 = \left( \frac{1}{1 - \frac{\Delta l}{l_0}} \right)^{\frac{3}{2}} \varphi_0 \approx \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{\Delta l}{l_0} \right) \varphi_0. \quad (27.40)$$

В оставшуюся половину периода процесс отекает аналогично, то есть, в конце первого периода  $\varphi$  можно выразить как

$$\varphi_2 = \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{\Delta l}{l_0} \right) \varphi_1 = \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{\Delta l}{l_0} \right)^2 \varphi_0, \quad (27.41)$$

$$\varphi_n = \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{\Delta l}{l_0} \right)^n \varphi_0. \quad (27.42)$$

Перейдём от дискретной индексации натуральными числами к непрерывной индексации вещественными: а именно, заменим в показателе степени номер полупериода  $n$  на отно-



шение прошедшего с начала отсчёта времени  $t$  к продолжительности полупериода  $\frac{T}{2}$ .

$$\varphi_t = \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\Delta l}{l_0}\right)^{2\frac{t}{T}} \varphi_0 = \varphi_0 e^{2\frac{t}{T} \ln \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\Delta l}{l_0}\right)} \quad (27.43)$$

$$\approx \varphi_0 e^{2\frac{t}{T} \frac{3}{2} \frac{\Delta l}{l_0}} = \varphi_0 e^{\lambda t}, \quad (27.44)$$

$$\lambda = \frac{3\Delta l}{Tl_0}. \quad (27.45)$$

При этом энергия системы пропорциональна квадрату амплитуды, т.е.  $E = E_0 e^{2\lambda t}$ . Рассмотрим малые параметрические колебания с затуханием, в которых коэффициент параметрических колебаний больше коэффициента затухания:

$$E = E_0 e^{-2\gamma t + 2\lambda t}, \quad \lambda > \gamma. \quad (27.46)$$

$$\frac{3\Delta l}{Tl_0} > \gamma, \quad (27.47)$$

$$\Delta l > \frac{1}{3} l_0 \gamma T. \quad (27.48)$$

Таким образом, при достаточно большом изменении даже с учётом затухания будет наблюдаться усиление. (Естественным пределом для усиления, конечно, станет изначальная длина маятника, или соответствующий ему параметр колебательной системы.)

## Лекция 28.

# Адиабатические инварианты. Колебания АТТ. Упругость

### 28.1 Адиабатические инварианты.

Под адиабатическими изменениями какого-либо параметра системы подразумевается медленное изменение. Если при этом медленном изменении параметра есть какая-либо комбинация физических характеристик системы, которая сохраняется, то такая комбинация называется адиабатическим инвариантом.

Рассмотрим пример:

Пусть есть система (материальная точка на пружине), которая описывается одномерными гармоническими колебаниями. Энергия таких колебаний, как нам хорошо известно, описывается формулой:

$$E = \frac{\alpha \dot{x}^2}{2} + \frac{\beta x^2}{2}. \quad (28.1)$$

Пусть  $\beta$  меняется, но очень медленно (пружина растягивается неупруго):

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{2\alpha \ddot{x} \dot{x}}{2} + \frac{2\beta x}{2} \dot{x} + \frac{x^2}{2} \dot{\beta}, \\ &= \alpha \dot{x} \underbrace{\left( \ddot{x} + \frac{\beta}{\alpha} x \right)}_{=0} + \frac{\dot{\beta} x^2}{2}. \end{aligned} \quad (28.2)$$

$$(28.3)$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{\dot{\beta} x^2}{2}, \\ E &= \frac{\beta a^2}{2}, \\ x &= a \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (28.4)$$

Рассмотрим изменение энергии:

$$\begin{aligned}\Delta E &= \int_0^T dE = \frac{\dot{\beta}}{2} \int_0^T a^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) dt, \\ &= \frac{\dot{\beta}}{2} a^2 \frac{1}{2} T = \frac{\Delta\beta}{2T\beta} \frac{T\beta a^2}{2}, \\ \implies dE &= \frac{d\beta E}{2\beta} \implies \frac{dE}{E} = \frac{1}{2} \frac{d\beta}{\beta},\end{aligned}\quad (28.5)$$

$$\begin{aligned}\ln E &= \ln \sqrt{\beta} + \text{const}, \\ \frac{E}{\sqrt{\beta}} &= \text{const} \implies \omega_0^2 = \frac{\beta}{\alpha} \implies \omega_0^2 \sim \beta \sim \frac{1}{T^2}.\end{aligned}\quad (28.6)$$

$E \cdot T = \text{const.}$

## 28.2 Колебания твёрдого тела.

### 28.2.1 Бифилярный подвес.

Физический маятник - твёрдое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси.

В нашем случае можно сказать, что АТТ совершает малые колебания в окрестности равновесия.

Пусть полная энергия:  $E = T + U$ .

Мы помним, что в случае вращательного движения:  $T = I\omega^2/2$ , а потенциальная энергия пропорциональна квадрату координаты (в нашем случае углу отклонения):  $U = \beta\varphi^2/2$ .

Запишем полную энергию:

$$\begin{aligned}E &= \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{\beta\varphi^2}{2}, \\ \implies \frac{dE}{dt} &= 0 \implies \frac{I2\dot{\varphi}}{2}\ddot{\varphi} + \frac{\beta2\varphi}{2}\dot{\varphi} = 0, \\ \ddot{\varphi} + \frac{\beta}{I}\varphi &= 0 \implies \Omega^2 = \frac{\beta}{I} = \frac{mga}{I}.\end{aligned}\quad (28.7)$$

Для маятника  $\beta = mga$ , где  $a$  - расстояние до центра масс.

Рассмотрим бифилярный подвес.

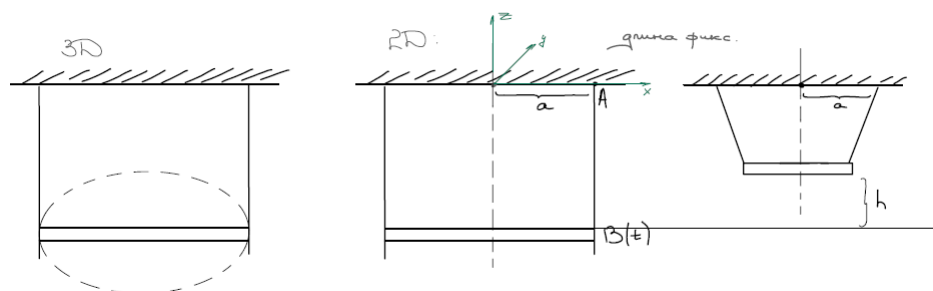


Рис. 28.1: Бифилярный подвес.

Хотим записать потенциальную энергию. Чем она определяется? Положением центра масс

стержня! То есть координатой  $z$ , либо введём  $h$ . длина верёвки = const

$$l^2 = (x_A - x_{B(0)})^2 + (y_A - y_{B(0)})^2 + (z_A - z_{B(0)})^2 \quad (28.8)$$

$$l^2 = (x_A - x_{B(t)})^2 + (y_A - y_{B(t)})^2 + (z_A - z_{B(0)})^2 \quad (28.9)$$

$$x_A = a \quad (28.10)$$

$$y_A = 0 \quad (28.11)$$

$$z_A = 0 \quad (28.12)$$

Если  $\varphi$  - угол отклонения от положения равновесия, то:

$$x_{B(0)} = a, \quad x_{B(t)} = a \cos \varphi \quad (28.13)$$

$$y_{B(0)} = 0, \quad y_{B(t)} = a \sin \varphi \quad (28.14)$$

$$z_{B(0)} = -l, \quad z_{B(t)} = -l + h \quad (28.15)$$

$$\implies l^2 = (a \cos \varphi - a)^2 + (a \sin \varphi)^2 + (-l + h)^2 \quad (28.16)$$

$$a^2 \cos^2 \varphi - 2a^2 \cos \varphi + a^2 + a^2 \sin^2 \varphi + l^2 + h^2 - 2lh = l^2 \quad (28.17)$$

$$a^2 + a^2 - 2a^2 \cos \varphi + h^2 - 2lh = 0, \quad (28.18)$$

$$2a^2(1 - \cos \varphi) + h^2 - 2lh = 0, \quad (28.19)$$

$$\implies 2a^2(1 - \cos \varphi) = h(2l - h) \quad (28.20)$$

Рассмотрим малые колебания:

$$\frac{a^2 \varphi^2}{2} = lh \implies h = \frac{a^2 \varphi^2}{2l} \quad (28.21)$$

$$U = mg \cdot \frac{a^2 \varphi^2}{2l} \quad (28.22)$$

$$E = \frac{I \dot{\varphi}^2}{2} + mg \frac{a^2 \varphi^2}{2l} \quad (28.23)$$

$$\implies \Omega^2 = \frac{mga^2}{lI} \quad (28.24)$$

$$I - \text{момент инерции относительно оси вращения.} \quad (28.25)$$

### 28.2.2 Теорема Гюйгенса

Введём определения:

Приведённая длина физического маятника - это длина такого математического маятника, чей период совпадает с периодом физического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}} \implies \boxed{l_{\text{пр}} = \frac{I}{ma}}. \quad (28.26)$$

Центр качаний - точка, где нужно сосредоточить массу маятника, чтобы период колебаний не изменился.

$\implies$  центр качания отстоит от оси подвеса на приведённую длину. Замечание: центр качания находится всегда дальше центра масс:

$$l_{\text{пр}} = \frac{I}{ma} = \frac{I_c + ma^2}{ma} = a + \frac{I_c}{ma}. \quad (28.27)$$

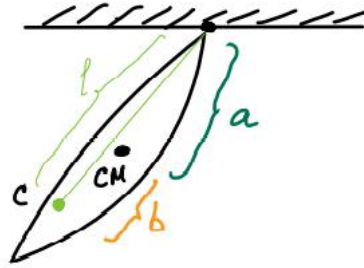


Рис. 28.2: Центр качания и центр масс

**Теорема** Если подвесить маятник за центр качания, то период его колебаний не изменится, а прежняя точка подвеса станет новым центром качания: чему равно расстояние от центра масс до центра качания:

$$\frac{I_c}{ma} = b \implies l_{\text{пр}} = a + b \quad (28.28)$$

, если взять теперь за центр качания (сделать его новой точкой подвеса)  $\implies b$  - расстояние до центра масс  $\implies$  по определению  $b$  входит в выражение для

$$l_{\text{прив } b} = b + \frac{I_c}{mb} = \frac{I_c}{ma} + a = l_{\text{прив } a} \implies l_{\text{пр } b} = l_{\text{пр } a} = l_{\text{пр}}. \quad (28.29)$$

## Лекция 29.

## Деформации. Волны

### 29.1 Элементы теории упругости

#### 29.1.1 Основные определения

**Деформация** – изменение формы/объёма тела под действием приложенных внешних сил. Она бывает двух видов: **упругой** (исчезает, если силы = 0) и **неупругой (пластичной)**.

Малые деформации, как правило, упругие. Максимальное значение прилагаемых сил определяется пределом упругости.

Рассмотрим растяжение стержня.

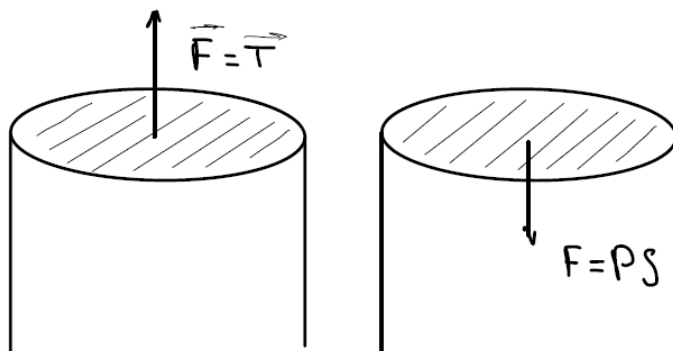


Рис. 29.1: Растяжение и сжатие стержня.

$$\text{Напряжение: } \sigma = \frac{F}{S}. \quad (29.1)$$

Если сила направлена *из* тела, то она будет называться **натяжением** и обозначаться  $\vec{T}$ . Если *внутри* тела, то **давлением**  $\vec{P}$ .

$$\text{Относительное удлинение } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (29.2)$$

### 29.1.2 Закон Гука

**Закон Гука:** малые упругие деформации пропорциональны силам, которые их вызывают:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (29.3)$$

где  $E$  – модуль Юнга.

Мы помним:

$$\begin{aligned} F &= kx \equiv k\Delta l \\ \frac{\Delta l}{l} &= \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{ES} \implies \\ \implies &\boxed{k = \frac{ES}{l}}. \end{aligned} \quad (29.4)$$

### 29.1.3 Энергия и плотность энергии упругой деформации.

Энергия упругой деформации формируется за счёт работы силы по растяжению (сжатию) стержня:

$$\begin{aligned} U &= A = \int_0^{\Delta l} F(x)dx = \int_0^{\Delta l} kx dx = \frac{k\Delta l^2}{2}. \\ \boxed{U &= \frac{k\Delta l^2}{2} = \frac{F\Delta l}{2}}. \end{aligned} \quad (29.5)$$

Плотность энергии:

$$\begin{aligned} u &= \frac{U}{V} = \frac{U}{Sl} = \frac{k\Delta l^2}{2Sl} = \frac{k\Delta l}{2S} \cdot \varepsilon = \frac{E\varepsilon^2}{2}. \\ \boxed{u &= \frac{E\varepsilon^2}{2}} \end{aligned} \quad (29.6)$$

### 29.1.4 Коэффициент Пуассона

**Коэффициент Пуассона** – коэффициент пропорциональности между продольной и поперечной деформациями:

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{a} = -\mu \frac{\Delta l}{l} = -\mu \varepsilon_l = -\mu \frac{\sigma}{E}. \quad (29.7)$$

Модуль Юнга и коэффициент Пуассона полностью характеризуют малые упругие деформации изотропных тел.

Малые упругие деформации подчиняются принципу суперпозиции.

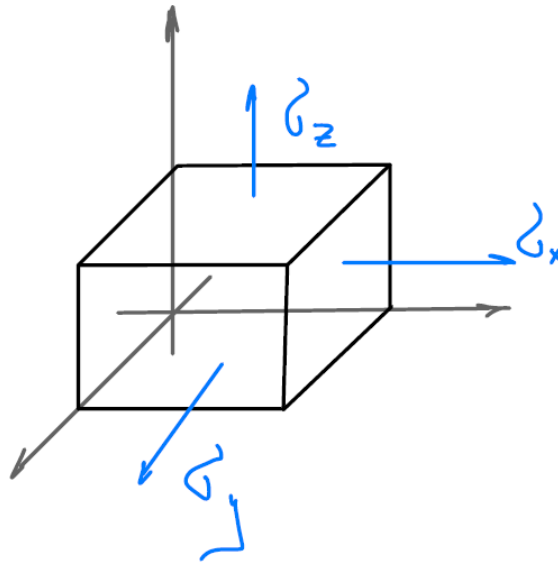


Рис. 29.2: Растяжение параллелепипеда.

### 29.1.5 Деформация параллелепипеда (всестороннее сжатие и растяжение)

Рассмотрим всестороннее растяжение параллелепипеда:

$$\begin{aligned} \epsilon_{x1} = \frac{\sigma}{E} \epsilon_{xa} &= -\mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E} \\ \left\{ \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) \\ \epsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Запасённая энергия:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \underbrace{S_x \sigma_x}_{F_x} \Delta x \frac{l_x}{l_x} + \frac{1}{2} S_y \sigma_y \Delta y \frac{l_y}{l_y} + \frac{1}{2} S_z \sigma_z \Delta z = \\ &= \frac{V}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z). \end{aligned} \quad (29.8)$$

Плотность энергии:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z). \quad (29.9)$$

Теперь рассмотрим случай сжатия параллелепипеда.

Пусть он со всех сторон испытывает одинаковое давление:  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P$ ,

тогда



$$\varepsilon_x = -\frac{P}{E} + \frac{\mu}{E} 2P = -\frac{P}{E} (1 - 2\mu) \quad (29.10)$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{P}{E} (1 - 2\mu). \quad (29.11)$$

А чему будет равно изменение объёма?

$$V + \Delta V = (l_x + \Delta l_x) (l_y + \Delta l_y) (l_z + \Delta l_z) \quad (29.12)$$

$$V = l_x l_y l_z \quad (29.13)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta V &= l_x \Delta l_y l_z + l_y \Delta l_x l_z + l_x \Delta l_z l_y + o(\Delta l) = \\ &= \varepsilon_y V + \varepsilon_x V + \varepsilon_z V = 3V\varepsilon = -\frac{3VP}{E} (1 - 2\mu) \end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta V = -\frac{3VP}{E} (1 - 2\mu)}. \quad (29.14)$$

$$\boxed{\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V} = -\frac{3P}{E} (1 - 2\mu) = -\frac{P}{K}, \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}}. \quad (29.15)$$

Соотношение справедливо не только для параллелепипеда, но и для любого тела, на которое со всех сторон действует одинаковое давление.

Чему бывает равна плотность энергии упругой деформации?

$$u = -\frac{1}{2}(P\varepsilon_x + P\varepsilon_y + P\varepsilon_z) = -\frac{3}{2}P\varepsilon_x = -\frac{3}{2}P \left(-\frac{P}{E}\right) (1 - 2\mu).$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}.$$

$$\boxed{u = \frac{3P^2}{2E} (1 - 2\mu) = \frac{P^2}{2K}}. \quad (29.16)$$

Обычно  $0 < \mu < 0.5$ . Если  $\mu = 0.5$ , то объём постоянен.

### 29.1.6 Сдвиг.

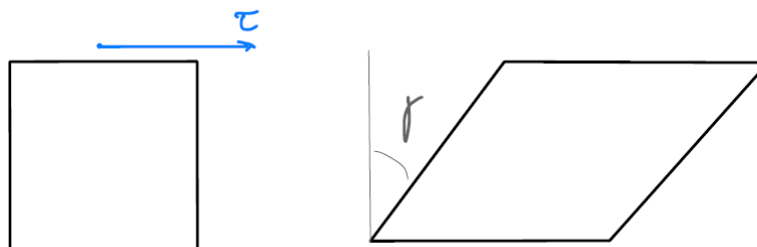


Рис. 29.3: Сдвиг прямоугольника.

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \quad (29.17)$$

$G$  - модуль сдвига.

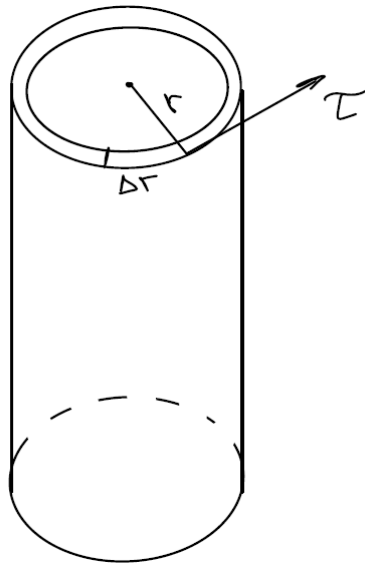


Рис. 29.4: Кручение трубы.

### 29.1.7 Кручение.

$$\varphi = \frac{M}{f}, \quad (29.18)$$

$f$  - модуль кручения, который можно связать с модулем сдвига.

$$\begin{aligned} M &= \tau S r = \tau 2\pi r \Delta r r, \\ U &= \frac{1}{2} F \Delta x = \frac{1}{2} M \Delta \varphi = \frac{1}{2} \frac{M^2}{f} = \frac{1}{2} \frac{\tau^2 4\pi^2 r^2 \Delta r^2 r^2}{f}. \\ \Rightarrow u &= \frac{U}{V} = \frac{\pi r^3 \tau^2 \Delta r}{f l}. \end{aligned} \quad (29.19)$$

## 29.2 Элементы теории волн

### 29.2.1 Волновое уравнение

Мы рассматривали колебательный процесс. У колебаний есть фаза. Если разные части системы имеют разную фазу, то получаются волны. Пусть в нулевой момент времени волна описывается  $f(x)$ . В простейшем случае данная форма движется в пространстве. Пусть в пространстве и времени такая волна описывается  $S(x, t)$ , где  $S(x, 0) = f(x)$ . Если форма не меняется, то за время  $t$  происходит перемещение волны вправо, следовательно

$$S(x, t) = f(x - vt). \quad (29.20)$$

Волна, бегущая в положительном направлении  $Ox$ .

Смещение точек -  $f$  - постоянно для координаты-времени,  $x - vt = \text{const}$ .

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(x - vt) = 0 \Rightarrow \dot{x} = vt = v. \quad (29.21)$$

$\Rightarrow$   $v$  - скорость постоянного значения величины  $f$ , то есть скорость волны. Найдём уравнение волны, которому удовлетворяет данное решение.

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = f' \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = f'(-v) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 f'', \quad (29.22)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (29.23)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0}. \quad (29.24)$$

Полученное уравнение называют волновым уравнением, и иногда записывается с использованием даламбертиана  $\square$ .

$$\square f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (29.25)$$

$$\boxed{\square f = 0}. \quad (29.26)$$

Более того, похожими рассуждениями можно обобщить волновое уравнение и на трёхмерный случай. Вместо второй частной производной по координате нам придётся взять сумму вторых частных производных по всем координатам, то есть дивергенцию градиента —

$$\nabla^2 f = \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}, \quad (29.27)$$

$$\boxed{\nabla^2 f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0}. \quad (29.28)$$

$$\square f = \nabla^2 f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad (29.29)$$

$$\square f = 0. \quad (29.30)$$

Зачем нам все эти рассуждения? Дело в том, что теперь каждый раз, когда нам случайно встретится волновое уравнение, мы сможем тут же без лишних рассуждений указать на его решение. Не важно, из чего мы вывели волновое уравнение для конкретного случая — второго закона Ньютона, уравнений Максвелла, гидродинамических законов, каких-то термодинамических моделей, — выполнение волнового уравнения гарантирует нам, что и струна, и свет, и круги на поверхности жидкости, и звук будут вести себя абсолютно одинаковым образом.

Сейчас мы рассмотрим частные решения волнового уравнения, тем самым заочно решив немало физических задач.

## 29.2.2 Плоская волна

Одним из решений волнового уравнения является плоская одномерная волна,

$$f(x, t) = a_0 \cos(k(x - vt) + \varphi_0) \quad (29.31)$$

$$= a_0 \cos(kx - kvt + \varphi_0). \quad (29.32)$$

$k$  называют волновым числом, а  $v$  — скоростью волны (из соображений размерности: эта величина измеряется в метрах в секунду). Заметим, что это решение весьма похоже на уже

рассмотренное ранее решение уравнения колебания — по сути, волна и есть колебание, которое при этом как-то распространяется в пространстве. Отождествим величину  $kv$  с коэффициентом при  $t$  в решении уравнения колебания, то есть, с угловой частотой  $\omega$ .

$$kv = \omega, \quad (29.33)$$

$$kv = 2\pi\nu, \quad (29.34)$$

$$k = 2\pi \frac{\nu}{v} = 2\pi \frac{1}{vT}. \quad (29.35)$$

Величина  $vT$  имеет размерность длины и измеряется в метрах — назовём её длиной волны  $\lambda$ .

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (29.36)$$

$$f(x, t) = a_0 \cos(kx - \omega t + \varphi_0). \quad (29.37)$$

Довольно интересно, что период косинуса  $2\pi$ , а значит, если зафиксировать некий момент времени и посмотреть на зависимость функции от координаты, то она будет периодичной с периодом  $\frac{2\pi}{k} = \lambda$  — в этом и состоит физический смысл длины волны.

### 29.2.3 Поверхности постоянной фазы

Обобщим случай одномерной волны на трёхмерное пространство. Рассмотрим решение волнового уравнения (в качестве упражнения можно подставить эту функцию в 29.28 и проверить, что она и правда является решением)

$$f(\vec{r}, t) = a_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0) = a_0 \cos(\varphi(\vec{r}, t)), \quad (29.38)$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = (\vec{k} \cdot \vec{r}) - \omega t + \varphi_0. \quad (29.39)$$

Вектор  $\vec{k}$  обобщает волновое число и называется волновым вектором, функцию  $\varphi(\vec{r}, t)$  называют фазой. Рассмотрим поверхность, заданную как  $\varphi(\vec{r}, t) = \text{const}$ .

$$(\vec{k} \cdot \vec{r}) = k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z. \quad (29.40)$$

$$\varphi = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varphi_0 = \text{const}. \quad (29.41)$$

$$\underbrace{k_x}_{A} x + \underbrace{k_y}_{B} y + \underbrace{k_z}_{C} z + \underbrace{-\omega t + \varphi_0 - \varphi}_{D} = 0. \quad (29.42)$$

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (29.43)$$

Из аналитической геометрии можем взять вектор нормали  $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \vec{k}$ , то есть волновой вектор перпендикулярен поверхности одинаковой фазы и показывает направление распространения волны. Величина  $D$  в данном случае определяет, точки с какой конкретно фазой нас интересуют. Интересно, что она зависит от времени.

### 29.2.4 Пригоршня других решений волнового уравнения

Решениями волнового уравнения являются и другие функции, например:

$$f(\vec{r}, t) = \frac{a_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0)}{r} \text{ — сферические волны,} \quad (29.44)$$

$$f(\vec{r}, t) = \frac{a_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0)}{\sqrt{r}} \text{ — цилиндрические волны.} \quad (29.45)$$

Более того, волна не обязательно должна задаваться некой скалярной функцией — ничто не мешает рассмотреть и векторную  $\vec{f}(\vec{r}, t) = \vec{f}(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ . В таком случае, если  $\vec{f}$  параллельна распространению волны, то такие называют продольными, а если  $\vec{f}$  перпендикулярна, то, наоборот, поперечными.

### 29.2.5 Принцип суперпозиции

Очень важно для понимания волн помнить, что для любых двух решений волнового уравнения  $f_1(x, t)$  и  $f_2(x, t)$  их линейная комбинация  $\alpha f_1 + \beta f_2$  будет также являться решением волнового уравнения. На языке даламбертианов это можно записать как  $\square(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \square f_1 + \beta \square f_2$ . (Если читатель знаком с теорией линейных операторов, то он может заметить, что изучение свойств даламбертиана может привести к интересным выводам о физической природе самых разных волновых процессов.)

### 29.2.6 Стоячие волны

Складывая две волны одинаковой амплитуды и частоты, бегущие навстречу друг другу с одинаковой скоростью, мы получаем очень интересное явление — стоячие волны.

$$a_0 \cos(kx - \omega t) + a_0 \cos(-kx - \omega t) = 2a_0 \cos(kx) \cos(\omega t), \quad (29.46)$$

$$f(x, t) = \underbrace{2a_0 \cos(kx)}_A \cos(\omega t) = A(x) \cos(\omega t). \quad (29.47)$$

Таким образом, мы получим обычные колебания в каждой точке, амплитуда которых будет изменяться с координатой. Точки с нулевой амплитудой называют узлами — в них колебание вырождается и превращается в тождественный ноль. Точки с максимальной амплитудой, где  $\cos(kx) = \pm 1$ , называют пучностями.

Из периодичности косинуса, расстояние между ближайшими точками с одинаковой по модулю амплитудой (в том числе, расстояние между двумя соседними узлами или расстояние между двумя соседними пучностями) всегда одинаково и в точности равняется половине длины волны  $\frac{\lambda}{2}$ .

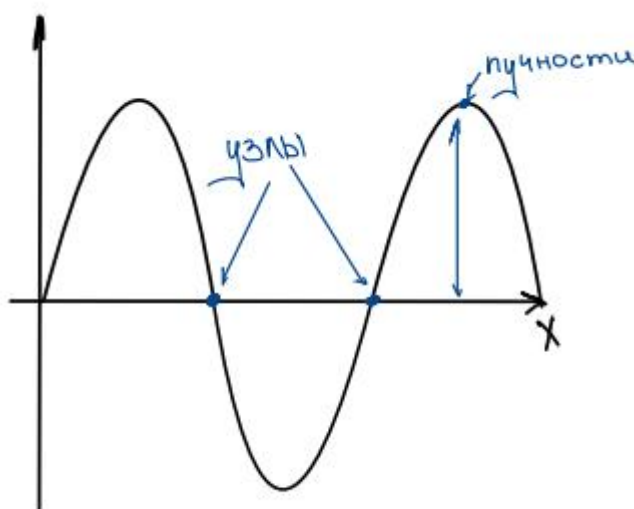


Рис. 29.5: Стоячие волны.

$$\begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{если } x \neq 0 \\ 0 & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

## Лекция 30.

## Послесловие

На этом кончаются лекции по механике в рамках курса общей физики Андрея Кудлиса, а вместе с лекциями и 2022 год. Ни один раздел физики невозможно полностью охватить не то, что за один семестр, но даже за одну человеческую жизнь, чему стоит искренне радоваться.

Динамическая картина приливов, красное смещение, более глубокое знакомство с теориями деформаций и волновыми процессами — всё это и многое другое ждёт вас на длинном и тернистом пути, по которому вы начали идти. Иногда физика будет приносить вам боль, страх и непонимание происходящего: но дорогу осилит идущий, и с помощью усердия и дерзкой веры в свои силы и возможности вы точно сможете преодолеть все возникающие затруднения.

От лица команды, готовившей этот конспект, хочется поблагодарить Андрея Кудлиса за прочитанные им лекции, а также всех, сообщавших о допущенных нами опечатках и ошибках.

Желаем читателям этих строк приятной подготовки к предстоящей сессии, а также всем последующим сессиям, коллоквиумам, научным конференциям и церемониям вручения нобелевских премий. Мы верим, что вам предстоит долгий и великий путь как в науке, так и за её пределами.

**С новым годом, коллеги!**

# Решение 1-ой и 2-ой задач полусеместровой контрольной работы

## 1 вариант

### Задача 1 (полуокружности)

$\gamma, \alpha, R_0, V_0$  – известны.  
 $R_n = R_0 (1 + \gamma (n - 1)^2); v = v_0 + \alpha n t$

1) Для первой полуокружности:  $n = 1$

$$v = v_0 + \alpha t$$
$$\frac{dS}{dt} = v_0 + \alpha t \Rightarrow S(t) = v_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}.$$

Отвечаем на вопрос:

Перед переходом:  $S(T_1) = \pi R_1$  (с одной стороны),  $S(T_1) = v_0 T_1 + \frac{\alpha T_1^2}{2}$  (с другой).

$$\Rightarrow T_1 = \frac{v_0}{\alpha} \left( \sqrt{1 + \frac{2\pi R_0 \alpha}{v_0^2}} - 1 \right).$$

$$v_{\text{искомое}} = v_0 + \alpha T_1,$$

Либо

$$v_{\text{искомое}} = v_0 + \alpha \frac{v_0}{\alpha} \left( \sqrt{1 + \frac{2\pi R_0 \alpha}{v_0^2}} - 1 \right) = v_0 \sqrt{1 + \frac{2\pi R_0 \alpha}{v_0^2}}.$$

2) Скорость будет горизонтальна, когда  $S = \frac{\pi R_1}{2} = \frac{\pi R_0}{2}$ , т.к.  $R_1 = R_0 (1 + \gamma (n - 1)^2)$ .

$\Rightarrow$  момент времени, когда скорость будет горизонтальной:



$$t = \frac{v_0}{\alpha} \left( \sqrt{1 + \frac{\pi R_0 \alpha}{v_0^2}} - 1 \right)$$

$$v_{\rightarrow} = v_0 \sqrt{1 + \frac{\pi R_0 \alpha}{v_0^2}}$$

$$w = \sqrt{a_n^2 + a_{\tau}^2}.$$

$$a_{\tau} = \dot{v}_t = \alpha n \Big|_{n=1} = \alpha.$$

$$a_{\text{norm}} = \frac{v^2}{R_1} = \frac{v^2}{R_0}.$$

$$\Rightarrow w = \sqrt{\frac{v_0^4}{R_0^2} \left( 1 + \frac{\pi R_0 \alpha}{v_0^2} \right)^2 + \alpha^2}$$

$$\equiv \sqrt{\left( \frac{v_{\rightarrow}^2}{R_0} \right)^2 + \alpha^2}.$$

3) Половина времени ...!

$$T_{1/2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{v_0}{\alpha} \left( \sqrt{1 + \frac{2\pi R_0 \alpha}{v_0^2}} - 1 \right) \right].$$

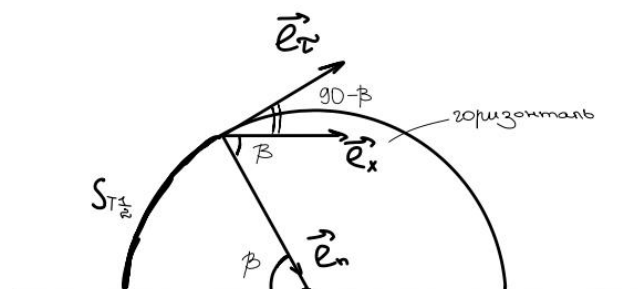
$$\vec{w} = \vec{a}_{\tau} + \vec{a}_{\text{norm}}.$$

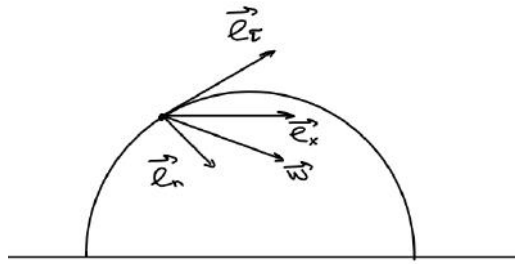
$$\vec{a}_{\tau} = \alpha \vec{\tau}.$$

$$\vec{a}_{\text{norm}} = \frac{\left( v_0 + \alpha \frac{v_0}{2\alpha} \left( \sqrt{1 + \frac{2\pi R_0 \alpha}{v_0^2}} - 1 \right) \right)^2}{R_0^2} \vec{n}.$$

( $R_0 = R_1$  из условия)

$$\beta = \frac{S_{T_{1/2}}}{R_1} = \frac{v_0 T_{1/2} + \frac{\alpha}{2} T_{1/2}^2}{R_1}$$





$$\vec{e}_x = \vec{e}_n \cos \beta + \vec{e}_r \sin \beta$$

$$\Rightarrow \varphi = \arccos \left[ \frac{(\vec{e}_x, \vec{w})}{|\vec{e}_x| |\vec{w}|} \right] = \arccos \left[ \cos \beta \left( \frac{v_0 \left[ 1/2 + 1/2 \sqrt{1 + \frac{2\pi R_0 \alpha}{v_0^2}} \right]^2 + R_0^2 \sin^2 \beta}{R_0^2 \sqrt{a_{norm}^2 + a_\tau^2}} \right) \right].$$

2-ая полуокружность

$$T_1 < t < T_1 + T_2$$

на 2-ой дуге:  $t : T_1$  до  $T_1 + T_2$

$$x = 2R_1 + R_2 - R_2 \cdot \cos \left[ \frac{v_0(t - T_1) + \alpha(t^2 - T_1^2)}{R_2} \right]$$

$$y = -R_2 \cdot \sin \left[ \frac{v_0(t - T_1) + \alpha(t^2 - T_1^2)}{R_2} \right]$$

## Бонус

Пусть  $S_n = \pi R_n$  (длина полуокружности)

$T_n$  - требуемое время для прохода по этому полувитку

$$\pi R_n = v_0 \int_{T_1+T_2+\dots+T_{n-1}}^{T_1+T_2+\dots+T_n} dt + \alpha \int n(t) t dt \stackrel{\circ}{=}$$

$n(t)$  зависит от того, на какой дуге (полуокружности)

$$T_{n-1} + = T_{n-1} + \epsilon, \epsilon \rightarrow 0.$$

$$T_n - = T_n - \epsilon, \epsilon \rightarrow 0.$$

на всём промежутке функция  $n(t) = n$

$$\stackrel{\circ}{=} v_0 T_n + \frac{\alpha}{2} n [(T_n + T_{n-1} + \dots + T_1)^2 - (T_{n-1} + T_{n-2} + \dots + T_1)^2] =$$

$$= \pi R_0 (1 + (n-1)^2) = v_0 T_n + \frac{\alpha}{2} n T_n (2(T_1 + \dots + T_n) - T_n).$$

Пусть, начиная с какого-то  $n > N$  мы находимся достаточно близко к предельному значению:  $T_{lim}$ .

$$\Rightarrow \pi R_0(1 + \gamma(n-1)^2) = v_0 T_n + \frac{\alpha}{2} n T_n \left( 2 \left( \sum_{i=1}^N T_i + \sum_{j=N+1}^N T_j \right) - T_n \right)$$

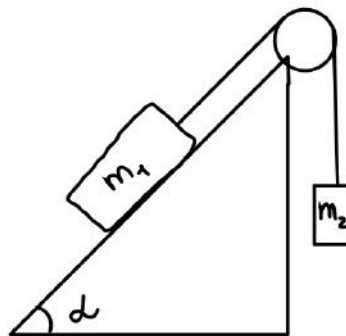
$$\lim_{n \rightarrow \infty}$$

$$\gamma \pi R_0 = 0 + \alpha T_{lim} \left[ 0 + \frac{T_{lim}(n - \frac{1}{2} - N)}{n} \right]$$

$$\Rightarrow T_{lim}^2 = \frac{\gamma \pi R_0}{\alpha}$$

$$\Rightarrow T_{lim} = \sqrt{\frac{\gamma \pi R_0}{\alpha}} \blacksquare$$

## Задача 2



Пусть трения нет ( $\mu = 0$ )  $\Rightarrow$

направление движения будет определяться  $m_2 - m_1 \sin(\alpha) \gtrless 0$  (см. во втором варианте)

Пусть  $m_2 - m_1 \sin(\alpha) > 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow m_2 a &= m_2 g - T_{2 \text{ пок}} \\ m_1 a &= T_{1 \text{ пок}} - m_1 g \sin(\alpha). \end{aligned}$$

Не превышаем значение пред. силы тр. покоя  $\Rightarrow$  система будет покоиться.

$$\begin{aligned} 0 &= m_2 g - T_{2 \text{ пок}} \\ 0 &= T_{1 \text{ пок}}(\alpha, \mu, T_{2 \text{ пок}}) - m_1 g \sin(\alpha). \end{aligned}$$

Максимальное значение сил трения покоя будет равно силе скольжения.

Тогда  $T_2 = T_1 \cdot e^{\mu\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow m_2 g e^{-\mu\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} - m_1 g \sin(\alpha) < 0$$

$$m_2 - m_1 \sin(\alpha) e^{\mu\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} < 0$$

**ЧАСТИЧНОЕ УСЛОВИЕ ПОКОЯ:**  $\sin(\alpha) < \frac{m_1}{m_2} < \sin(\alpha) e^{\mu\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}$ .

Аналогично:

Пусть  $m_2 - m_1 \sin(\alpha) < 0$ , т. е.  $m_1 \sin(\alpha) > m_2$ ,

$$0 = T_{2 \text{ пок}} - m_2 g$$

$$0 = m_1 g \sin(\alpha) - T_{1 \text{ пок}}(T_{2 \text{ пок}}, \alpha, \mu)$$

**НО!**  $T_1 = T_2 e^{\mu\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}$

$$0 > m_1 g \sin(\alpha) - m_2 g e^{\mu\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$m_1 \sin(\alpha) < m_2 e^{\mu\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m_2}{m_1} > \sin(\alpha) e^{-\mu\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}$$

**ЧАСТИЧНОЕ УСЛОВИЕ ПОКОЯ:**

$$\sin(\alpha) e^{-\mu\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} < \frac{m_2}{m_1} < \sin(\alpha).$$

Финальный ответ:

$$\sin(\alpha) e^{-\mu\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} < \frac{m_2}{m_1} < \sin(\alpha) e^{\mu\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

2)  $m_2 > m_1 \sin(\alpha) e^{\mu\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}$

3)

$$\begin{cases} m_2 a = m_2 g - T e^{\mu\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} \\ m_1 a = T - m_1 g \sin(\alpha) \end{cases} \Rightarrow$$

$$g \left( m_2 - e^{\mu\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} m_1 \sin(\alpha) \right)$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_2 + m_1 e^{\mu\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}}{m_2 + m_1 e^{\mu\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}}.$$

$$4) T = g \frac{m_1 m_2 (1 + \sin(\alpha))}{m_2 + m_1 e^{\mu \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right)}}.$$

## Бонус

$a$  – убывающая функция угла  $\implies$  минимальное значение в  $\frac{\pi}{2}$ .

## 2 вариант

### Задача 1 (полувитки)

$$\begin{aligned} x &= ae^u \cos(u) \\ y &= ae^u \sin(u) \\ k &= \frac{1}{a\sqrt{2}e^u} \\ v &= v_0 + \frac{\alpha}{n} e^{\pi(n-1)} \cdot t \end{aligned}$$

1) Длина полувитка:

С одной стороны (она нам и нужна).

Видно, что  $u$  – угол в радианах  $\implies$

$$\begin{aligned} S_{1 \text{ полувитка}} &= \int_0^\pi \sqrt{(\dot{x}_u)^2 + (\dot{y}_u)^2} du = a\sqrt{2}e^u \Big|_0^\pi = \\ &= \boxed{a\sqrt{2}(e^\pi - 1)}. \end{aligned}$$

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2} \frac{du}{du} = \sqrt{\frac{dx^2}{du^2} + \frac{dy^2}{du^2}} du = \sqrt{(\dot{x}_u)^2 + (\dot{y}_u)^2} du.$$

$$\dot{x}_u = ae^u \cos(u) + ae^u(-\sin u); \quad \dot{y}_u = ae^u \sin(u) + ae^u(\cos u); \quad \dot{x}_u^2 + \dot{y}_u^2 = 2a^2 e^{2u}.$$

$$S_{n\text{-ой полуокружности}} = a\sqrt{2}e^4 \Big|_{\pi(n-1)}^{\pi n} = a\sqrt{2}(e^{\pi n} - e^{\pi(n-1)}) = a\sqrt{2}e^{\pi n}(1 - e^{-\pi}) = a\sqrt{2}e^{\pi(n-1)}(e^\pi - 1).$$

Найдём полное ускорение:

$$\begin{aligned} W &= \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}, \\ \dot{v} = a_\tau &= \frac{\alpha}{n} e^{\pi(n-1)} \Big|_{n=1} = \alpha. \\ a_n &= \frac{v_{\text{когда } v_y=0}^2}{R} = kv_{\text{когда } v_y=0}^2, \\ k &= \frac{1}{a\sqrt{2}} e^{-U_\leftarrow}, \end{aligned}$$

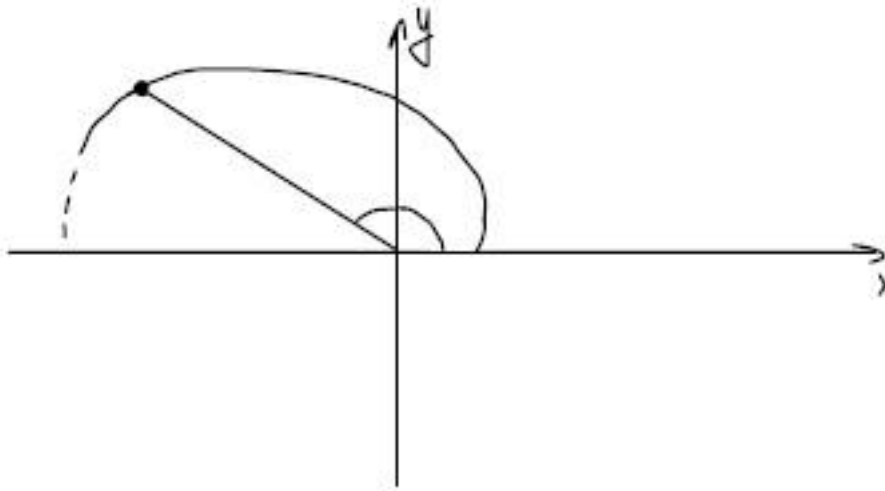


Рис. 30.1: Траектория материальной точки.

$U_{\leftarrow}$  - такое значение параметра  $U$ , когда  $\dot{y}_y = 0$ .

Как связать?

Условие на  $U_{\leftarrow}$  простое: в этой точке  $y_n' = 0$ , конечно же этому соответствует какой-то момент времени  $t$ , но его можно будет найти и позже. Итак,

$$\begin{aligned} y_n' &= 0 = \sin U_{\leftarrow} + \cos U_{\leftarrow} = 0 \\ \Rightarrow \operatorname{tg} U_{\leftarrow} &= -1, u \in [0; \pi] \\ \Rightarrow U_{\leftarrow} &= \frac{3}{4}\pi \\ \Rightarrow k &= \frac{1}{a\sqrt{2}} e^{-\frac{3}{4}\pi}. \end{aligned}$$

Как найти  $v_{\text{когда } v_y = 0}^2$ ?

$$v_{v_y=0}^2 = (v_0 + \alpha t_{\leftarrow})^2.$$

Можно связать через  $S_{\leftarrow}$ :

С одной стороны  $S_{\leftarrow} = a\sqrt{2}(e^{3\pi/4} - 1)$ , с другой  $S_{\leftarrow} = v_0 t_{\leftarrow} + \alpha t_{\leftarrow}^2 / 2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow t_{\leftarrow} &= \frac{v_0}{\alpha} \left( \sqrt{1 + \frac{2S_{\leftarrow}\alpha^2}{\alpha v_0^2}} - 1 \right), \\ \left( t_{\leftarrow}^2 + \frac{2v_0}{\alpha} t_{\leftarrow} - \frac{2S_{\leftarrow}}{\alpha} = 0 \right) \\ t_{\leftarrow} &= \frac{v_0}{\alpha} \left( \sqrt{1 + \frac{2\alpha}{v_0^2} a\sqrt{2} \left( e^{\frac{3\pi}{4}} - 1 \right)} - 1 \right). \\ \Rightarrow v_{v_y=0} &= v_0 + \alpha \frac{v_0}{\alpha} \left( \sqrt{1 + \frac{2\alpha a\sqrt{2}}{v_0^2} \left( e^{\frac{3\pi}{4}} - 1 \right)} - 1 \right) \\ v_{v_y=0} &= v_0 \left( \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{2}\alpha a}{v_0^2} \left( e^{\frac{3\pi}{4}} - 1 \right)} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_{n\leftarrow} = \frac{v_0^2 \left( 1 + \frac{2\sqrt{2}\alpha a}{v_0^2} \left( e^{\frac{3\pi}{4}} - 1 \right) \right)}{a\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{3\pi}{4}},$$

$$\Rightarrow W = \sqrt{\alpha^2 + \frac{v_0^4 \left( 1 + \frac{2\sqrt{2}\alpha a}{v_0^2} \left( e^{\frac{3\pi}{4}} - 1 \right) \right)^2}{2a^2}} \cdot e^{-\frac{3\pi}{2}}.$$

Теперь найдём  $v$  перед переходом с первого полувитка на второй Откуда?

$$\underbrace{a\sqrt{2}(e^\pi - 1)}_{\text{Путь до точки перехода}} = v_0 t_{\text{пер}} + \frac{\alpha t_{\text{пер}}^2}{2}, \text{ откуда:}$$

$$t_{\text{пер}} = \frac{v_0}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{2}\alpha a}{v_0^2}(e^\pi - 1)} - 1 \right)$$

Путь до точки перехода - это то же самое, что и длина полувитка, следовательно:

$$v_{\text{пер}} = v_0 + \alpha t_{\text{пер}} = v_0 \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{2}\alpha a}{v_0^2}(e^\pi - 1)}$$

Найдём угол между горизонталью и ускорением в момент, когда скорость впервые направлена горизонтально:  $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{y}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dt} \\ \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \end{pmatrix} = \frac{du}{dt} \begin{pmatrix} \dot{x}_u \\ \dot{y}_u \end{pmatrix}$$

В начальный момент времени ( $t = 0$ )  $u = 0 \Rightarrow$

$$\dot{x}_u = ae^4 \cos u + ae^4(-\sin n) |_{u=0} = a,$$

$$\dot{y}_u = a$$

Направление  $\sim \begin{pmatrix} \dot{x}_u \\ \dot{y}_u \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{d}$ .

$$\text{Угол между скоростью и горизонтом } \cos \varphi = \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{d}}{|\vec{e}_x| |\vec{d}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \varphi = \frac{\pi}{4}$$

## Бонус

Длина полувитка с номером  $n$ :  $a\sqrt{2}(1 - e^{-\pi})e^{\pi n}$ .

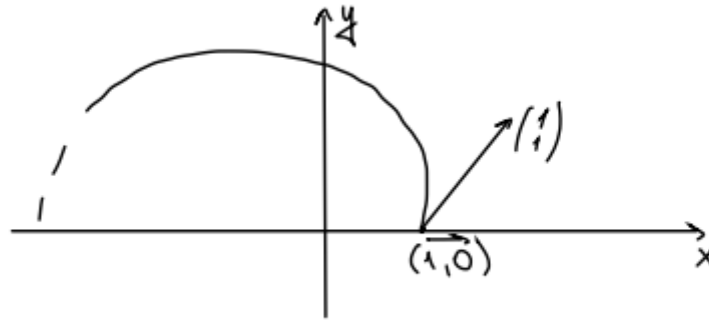


Рис. 30.2: Угол между скоростью и ортом оси x.

При этом он равен,

$$v_0 T_n + \frac{\alpha}{n} e^{\pi(n-1)} \frac{1}{2} T_n (T_n + 2(T_1 + \dots + T_{n-1})).$$

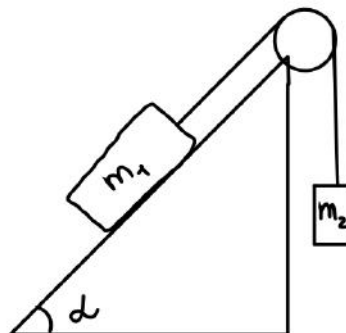
$$a\sqrt{2}(1 - e^{-\pi})e^{\pi n}e^{-\pi}T_n(T_n + 2(T_1 + T_2 + \dots + T_{n-1}))$$

$n \rightarrow \infty$ :

$$a\sqrt{2}(1 - e^{-\pi}) = \frac{v_0 T_\infty}{e^{\pi n}} + \frac{\alpha e^{-\pi}}{2n} T_\infty 2n T_\infty$$

$$\Rightarrow T_\infty = \sqrt{\frac{a\sqrt{2}(e^{-\pi} - 1)}{\alpha}}.$$

## Задача 2



1)

1. Пусть трения нет, тогда направление движения будет определяться

$$m_2 - m_1 \sin(\alpha) \gtrless 0$$

Если  $>$ , то  $m_2$  вниз, если  $<$ , то  $m_2$  вверх.

2. Вводим трение

$$m_2 - m_1 \sin \alpha > 0$$

$$m_2 a = m_2 g - T$$

$$m_1 a = T - m_1 g \sin \alpha - F_{\text{тр. покоя}}.$$



$F_{\text{тр. покоя}}$  будет компенсировать силы до какого-то предельного значения, и тело будет покоиться

$$0 = m_2 g - T$$

$$0 = m_2 g - m_1 g \sin \alpha - F_{\text{тр. покоя}}.$$

Условие покоя:  $m_2 g - m_1 g \sin \alpha < \mu m_1 g \cos \alpha$ .

Пред. значение =  $F_{\text{max трения}} = F_{\text{тр. скольжения}} =$

$$= \mu N = \mu m_1 g \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{m_2 < m_1 (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)},$$

(при  $m_2 > m_1 \sin \alpha$ )

Пусть  $m_2 - m_1 \sin \alpha < 0$

$$\Rightarrow m_2 a = T - m_2 g$$

$$m_1 a = m_1 g \sin \alpha - T - F_{\text{тр покоя}}.$$

Аналогично (условие покоя)

$$m_1 g \sin \alpha - m_2 g < \mu m_1 g \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{m_1 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) < m_2; \quad m_1 \sin \alpha > m_2}.$$

Как любят в ЕГЭ:

$$\left[ \begin{cases} m_2 < m_1 (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \\ m_2 > m_1 \sin \alpha \\ m_1 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) < m_2 \\ m_1 \sin \alpha > m_2 \end{cases} \right]$$

2) Второй пойдёт вниз  $m_2 > m_1 (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$

3)

$$\begin{cases} m_2 a = m_2 g - T \\ m_1 a = T - m_1 g \sin \alpha - F_{\text{тр}} F_{\text{тр}} = \mu m_1 g \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2 a = m_2 g - T \Rightarrow T = m_2 (g - a) \\ m_1 a = T - m_1 g \sin \alpha - \mu m_1 g \cos \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_1 a = m_2 (g - a) - m_1 g \sin \alpha - \mu m_1 g \cos \alpha$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2) a = m_2 g - m_1 g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

$$\boxed{a = g \frac{m_2 - m_1 (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m_1 + m_2}}$$

4)

$$\boxed{T = m_2 \left( g - g \frac{m_2 - m_1 (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m_1 + m_2} \right)}.$$

## Бонус

$$a'_\alpha = 0 \implies \cos \alpha + \mu(-\sin \alpha) = 0$$
$$\implies \boxed{\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{\mu}}.$$

$$a''_\alpha = g \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) > 0 \text{ для } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$
$$\implies \boxed{\alpha_0 - \text{МИНИМУМ}}.$$

# Решение задач от практиков с полусемейственной контрольной работы

## Условия

### 1. (a) Задача

Тяжелая частица массой  $m_1$  налетает на неподвижную легкую частицу с массой  $m_2 < m_1$  и в результате упругого столкновения отклоняется от первоначального направления движения на максимально возможный угол.

Найдите направление движения второй частицы после столкновения.

### (b) Задача

Тяжелая частица налетает со скоростью  $v$  на неподвижную легкую частицу и в результате упругого столкновения отклоняется от первоначального направления движения на максимально возможный угол. Вторая частица при этом получает скорость  $v_2 = \eta v$ .

Найдите отношение масс частиц.

### 2. (a) Задача

Космический аппарат движется вокруг Земли по эллиптической орбите с перигелием  $r_1$  и апогеем  $r_2$ . После кратковременного включения ракетного двигателя в апогее аппарат покидает пределы поля тяготения Земли.

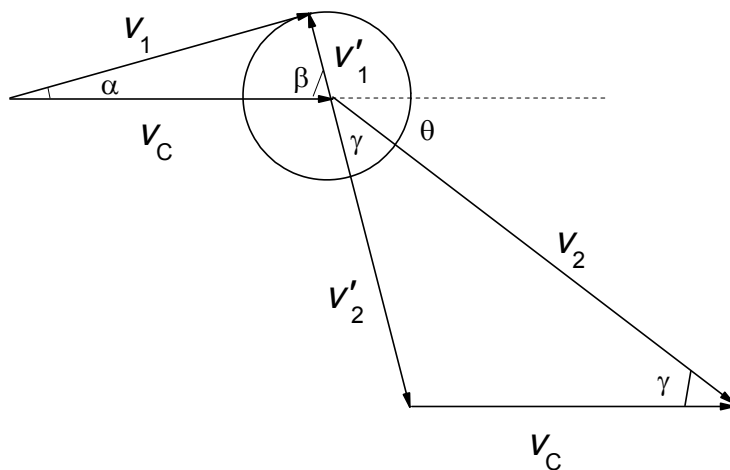
Определите во сколько раз нужно изменить скорость космического аппарата для такого маневра с минимальным расходом топлива.

### (b) Задача

Космический аппарат движется вокруг Земли по эллиптической орбите с перигелием  $r_1$  и апогеем  $r_2$ . После кратковременного включения ракетного двигателя в перигелии аппарат переходит на круговую орбиту.

Определите во сколько раз нужно изменить скорость космического аппарата для такого маневра с минимальным расходом топлива.

## Решения



## 1. (a) Задача

Тяжелая частица массой  $m_1$  налетает на неподвижную легкую частицу с массой  $m_2 < m_1$  и в результате упругого столкновения отклоняется от первоначального направления движения на максимально возможный угол.

Найдите направление движения второй частицы после столкновения.

## Решение

Схема, иллюстрирующая расположение векторов скоростей частиц после соударения в лабораторной системе отсчета  $K$  и в системе их центра масс  $K'$ , показана на Рис. 1 для столкновения с максимальным углом отклонения  $\alpha$  первой частицы. Здесь вектор  $\mathbf{V}_C = m_1 \mathbf{v} / (m_1 + m_2)$  показывает скорость центра масс, вектора  $\mathbf{v}_{1,2}$  и  $\mathbf{v}'_{1,2}$  показывают скорости первого и второго тела после столкновения в системах отсчета  $K$  и  $K'$ , соответственно. Величины этих скоростей в системе центра масс равны  $v'_{1,2} = v m_{2,1} / (m_1 + m_2)$ . Как видно из рисунка, максимальный угол отклонения определяется условием  $\sin \alpha = m_2 / m_1$ . Соотношения между углами на рисунке такие  $\beta = \pi - \alpha$ ,  $\beta = 2\gamma$ ,  $\gamma = \theta$ . Откуда следует, что  $\cos \beta = \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = m_2 / m_1$ . И окончательно

$$\theta = \arccos \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2m_1}}.$$

## (b) Задача

Тяжелая частица налетает со скоростью  $v$  на неподвижную легкую частицу и в результате упругого столкновения отклоняется от первоначального направления движения на максимально возможный угол. Вторая частица при этом получает скорость  $v_2 = \eta v$ .

Найдите отношение масс частиц.

### Решение

Схема, иллюстрирующая расположение векторов скоростей частиц после соударения в лабораторной системе отсчета  $K$  и в системе их центра масс  $K'$ , показана на Рис. 1 для столкновения с максимальным углом отклонения  $\alpha$  первой частицы. Здесь вектор  $\mathbf{V}_C = m_1 \mathbf{v} / (m_1 + m_2)$  показывает скорость центра масс, вектора  $\mathbf{v}_{1,2}$  и  $\mathbf{v}'_{1,2}$  показывают скорости первого и второго тела после столкновения в системах отсчета  $K$  и  $K'$ , соответственно. Величины этих скоростей в системе центра масс равны  $v'_{1,2} = vm_{2,1} / (m_1 + m_2)$ . Как видно из рисунка, максимальный угол отклонения определяется условием  $\sin \alpha = m_2 / m_1$ . Соотношения между углами на рисунке такие  $\beta = \pi - \alpha$ ,  $\beta = 2\gamma$ ,  $\gamma = \theta$ . Откуда следует, что  $\cos \beta = \cos 2\gamma = 2 \cos^2 \gamma - 1 = m_2 / m_1$ . Скорость второго тела в системе  $K$  равна длине основания равностороннего треугольника на Рис. 1  $v_2 = 2V_c \cos \gamma = 2vm_1 / (m_1 + m_2) \sqrt{(m_1 + m_2) / 2m_1}$ . Откуда получаем, что

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{2}{\eta^2} - 1.$$

### 2. (а) Задача

Космический аппарат движется вокруг Земли по эллиптической орбите с перигелием  $r_1$  и апогеем  $r_2$ . После кратковременного включения ракетного двигателя в апогее аппарат покидает пределы поля тяготения Земли.

Определите во сколько раз нужно изменить скорость космического аппарата для такого маневра с минимальным расходом топлива.

### Решение

Найдем момент импульса  $L$  аппарата по значениям параметра его орбиты  $r_{1,2}$ . Для этого запишем выражение для его энергии в перигелии  $r = r_1$  и апогее  $r = r_2$ :

$$E = \frac{L^2}{2mr_1^2} - \frac{GmM}{r_1} = \frac{L^2}{2mr_2^2} - \frac{GmM}{r_2},$$

здесь  $G$  - масса Земли. Откуда находим, что

$$L = mv_2 r_2 = m \sqrt{\frac{2GM r_1 r_2}{r_1 + r_2}} = mr_2 \sqrt{\frac{r_1}{r_1 + r_2}} \sqrt{\frac{2GM}{r_2}}.$$

В правой части мы намеренно выделили множитель, равный второй космической скорости в точке  $r = r_2$ . Таким образом скорость аппарата надо увеличить в

$$\eta = \sqrt{\frac{r_1 + r_2}{r_1}}$$

число раз.

### (б) Задача

Космический аппарат движется вокруг Земли по эллиптической орбите с перигелием  $r_1$  и апогеем  $r_2$ . После кратковременного включения ракетного двигателя в перигелии аппарат переходит на круговую орбиту.

Определите во сколько раз нужно изменить скорость космического аппарата для такого маневра с минимальным расходом топлива.

**Решение**

Найдем момент импульса  $L$  аппарата по значениям параметра его орбиты  $r_{1,2}$ . Для этого запишем выражение для его энергии в перигелии  $r = r_1$  и апогее  $r = r_2$ :

$$E = \frac{L^2}{2mr_1^2} - \frac{GmM}{r_1} = \frac{L^2}{2mr_2^2} - \frac{GmM}{r_2},$$

здесь  $G$  - масса Земли. Откуда находим, что

$$L = mv_1r_1 = m\sqrt{\frac{2GMr_1r_2}{r_1 + r_2}} = mr_1\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}}\sqrt{\frac{GM}{r_1}}.$$

В правой части мы намеренно выделили множитель, равный первой космической скорости в точке  $r = r_1$ . Таким образом скорость аппарата надо уменьшить в

$$\eta = \sqrt{\frac{r_1 + r_2}{2r_2}}$$

число раз.

# Решение семестровой контрольной работы

## Задача 1

### Вариант 1

1. Пусть  $l_0$  – расстояние между Землёй и планетой, тогда (показания счётчиков):

$$\frac{l_0}{4} = \frac{l_0}{\gamma} + \frac{l_0}{4\gamma}$$

$$(\gamma_{З \rightarrow Пл} = \gamma, \gamma_{Пл \rightarrow З} = 4\gamma)$$

$$\gamma = 4 + 1 = 5$$

$$\Rightarrow \gamma = 5 \Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2}$$

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \beta^2 \Rightarrow \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}$$

$$\beta_{З \rightarrow Пл} = \sqrt{\frac{(\gamma)^2 - 1}{(\gamma)^2}}; \quad \beta_{Пл \rightarrow З} = \sqrt{\frac{(4\gamma)^2 - 1}{(4\gamma)^2}}$$

$$\beta_{З \rightarrow Пл} = \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \quad \beta_{Пл \rightarrow З} = \frac{\sqrt{399}}{20}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{З \rightarrow Пл} = \frac{2\sqrt{6}}{5}c; \quad v_{Пл \rightarrow З} = \frac{\sqrt{399}}{20}c}$$

2. Всего 11 лет, 1 год на планете  $\Rightarrow$  10 лет "в движении" .

$t_1$  – время "туда"  $t_2$  – время "обратно" .

$$10 = t_1 + t_2$$

$$10 = \frac{l_0/\gamma}{v_{З \rightarrow Пл}} + \frac{l_0/4\gamma}{v_{Пл \rightarrow З}}$$

Умножим справа и слева на скорость света (получим длину в световых годах):

$$\frac{l_0}{\gamma\beta_{3 \rightarrow \text{Пл}}} + \frac{l_0}{4\gamma\beta_{3 \rightarrow \text{Пл}}} = 10$$

$$\frac{l_0}{5 \frac{2\sqrt{6}}{5}} + \frac{l_0}{\frac{20}{20\sqrt{399}}} = 10$$

$$l_0 \left( \frac{1}{2\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{399}} \right) = 10$$

$$l_0 = \frac{10}{\frac{1}{2\sqrt{6} + \frac{1}{\sqrt{399}}}} \approx 39.3 \text{ св. года.}$$

3.  $l_{3 \rightarrow \text{Пл}} = \frac{l_0}{\gamma} \approx 8 \text{ св. лет}$

$$l_{\text{Пл} \rightarrow 3} = \frac{l_0}{4\gamma} \approx 2 \text{ св. года}$$

4.

$$t_1 = \frac{(l_{3 \rightarrow \text{Пл}}) 1/c}{v_{3 \rightarrow \text{Пл}} 1/c} = \frac{l_{3 \rightarrow \text{Пл}} (\text{св. лет})}{\beta_{3 \rightarrow \text{Пл}}} \approx 8 \text{ лет}$$

$$t_2 = 10 - 8 \approx 2 \text{ года}$$

5. Отец:  $29+11 = 40$  лет

Сын:

$$0 + \frac{l_0}{v_{3 \rightarrow \text{Пл}}} + \frac{l_0}{v_{\text{Пл} \rightarrow 3}} + 1 = \frac{l_0 (\text{в св. годах})}{\beta_{3 \rightarrow \text{Пл}}} + \frac{l_0 (\text{в св. годах})}{\beta_{\text{Пл} \rightarrow 3}} + 1 \approx 40 + 40 + 1 \approx 81 \text{ год.}$$

## Вариант 2

1.

$$l = \overset{30}{\cancel{l_0}} \sqrt{1 - \left( \frac{0.99c}{c} \right)^2} = 4.23 \text{ световых года}$$

2.

$$t_{\rightarrow} = \frac{l}{0.99c} \approx \frac{4.23}{0.99} \text{ лет} \approx 4.23 \cdot (1 + 0.01) \approx 4.27 \text{ лет.}$$

3. Весь путь:  $10 \text{ лет} \Rightarrow 10 - 4.27 - 1 = 4.73 \text{ года} = t_{\leftarrow}$ .

4. Скорость назад:



$$t_{\leftarrow} = \frac{l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v_{\leftarrow}}{c}\right)^2}}{c \sqrt{\left(\frac{v_{\leftarrow}}{c}\right)^2}} = \frac{l_0 \sqrt{1 - \beta_{\leftarrow}^2}}{c \beta_{\leftarrow}}$$

$$\left(\frac{ct_{\leftarrow}}{l_0}\right)^2 = \frac{1}{\beta_{\leftarrow}^2} - 1$$

$$\beta_{\leftarrow}^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{ct_{\leftarrow}}{l_0}\right)^2}$$

$$\beta_{\leftarrow} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{4.73}{30}\right)^2}}$$

$$\beta_{\leftarrow} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{36} \approx 0.986$$

5.  $l_{\leftarrow} = l_0 \sqrt{1 - \beta_{\leftarrow}^2} = 4.7$  световых года

6. Всё время

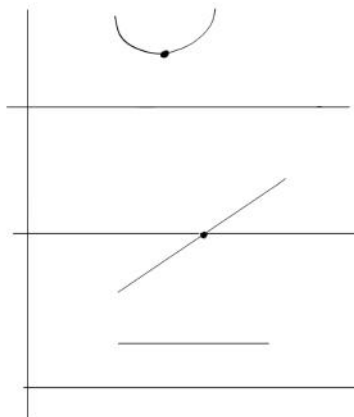
$$\frac{30 \text{ световых лет}}{0.99c} + \frac{1}{\text{на планете}} + \frac{30}{0.986c} \approx 62 \text{ года}$$

## Задача 4

### Вариант 1

$$U(x) = U_0 \left( \frac{x}{a} - \frac{(a+b)}{2a^2b} x^2 + \frac{x^3}{3a^2b} \right)$$

1. Малые колебания в окрестности локального минимума:



$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} &= U_0 \left( \frac{1}{a} - \frac{(a+b)}{a^2 b} x + \frac{3x^2}{3a^2 b} \right) = \frac{U_0}{a} \left( 1 - \frac{a+b}{ab} x + \frac{x^2}{ab} \right) = \\
&= \frac{U_0}{aab} (ab - (a+b)x + x^2) = \frac{U_0}{aab} ((x-b)(x-a)) = \\
&= \frac{U_0}{a} \left( \frac{x}{b} - 1 \right) \left( \frac{x}{a} - 1 \right)
\end{aligned}$$

$$x_1 = b, \quad x_2 = a$$

Что есть минимум? Возьмём вторую производную

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_0}{aab} (-(a+b) + 2x)$$

Если  $b > a$ ,  $b > 0$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x=a} = \frac{U_0}{a^2 b} (a-b) < 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x=b} = \frac{U_0}{aab} (b-a) > 0$$

$$\Rightarrow b - \min$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{U_0(b-a)}{a^2 b}}$$

т. к. это следует из дальнейших рассуждений:

$$m\ddot{x} = F(x) = -\nabla U$$

$U$  в окрестности  $b - \min$ :

$$U(x) = U(b) + \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=b} (x-b) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x=b} (x-b)^2$$

$$U(x) = \frac{1}{2} \frac{U_0}{a^2 b} (b-a)(x-b)^2 \text{ с точностью до const}$$

$$\Rightarrow F(x) = -\frac{U_0}{a^2 b} (b-a)(x-b)$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{U_0}{a^2 b} (b-a)(x-b)$$

$$\ddot{x} + \frac{U_0}{a^2 b} (b-a)(x-b) = 0$$

$$\tilde{x} = x - b, \quad \ddot{\tilde{x}} = \ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{\tilde{x}} + \frac{U_0(b-a)}{a^2 b} \tilde{x} = 0$$

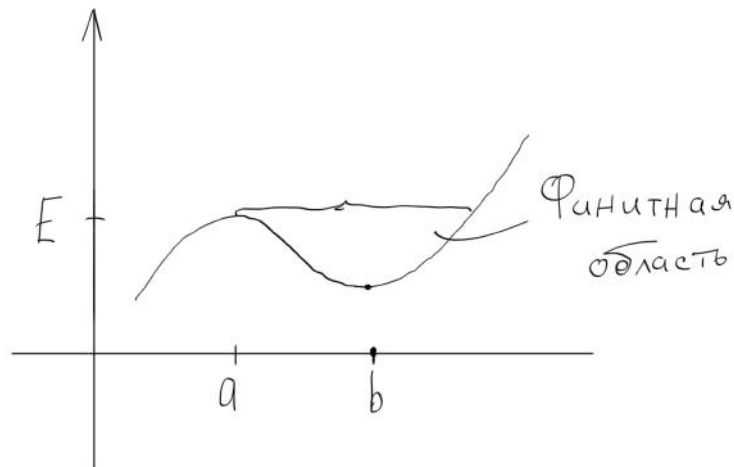
2.

$$\Rightarrow \tilde{x} = x - b = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$x(0) = b \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = 0, \quad A = \frac{v_0}{\omega_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = b + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)}$$

3. При  $b > 0$ ,  $U_0 > 0$ ,  $b > a$ :



т. к.  $v_0$  – скорость в минимуме потенциальной энергии и суммарная энергия должна быть не больше  $E$  (где  $E = U(a)$ ):

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow T|_b < E - U(b) = U(a) - U(b) \\
 &\Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = U(a) - U(b) \\
 &= U_0 \left( 1 - \frac{(a+b)}{2b} + \frac{a}{3b} - \frac{b}{a} + \frac{(a+b)}{2a^2b} \cdot b^2 - \frac{b^3}{3a^2b} \right) \\
 &= U_0 \left( 1 - \frac{a}{2b} - \frac{1}{2} + \frac{a}{3b} - \frac{b}{a} + \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{2a^2} - \frac{b^2}{3a^2} \right) \\
 &= U_0 \left( \frac{1}{2} + \frac{a}{b} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) + \frac{b^2}{a^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{b}{a} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \right) \\
 &v_0 < \sqrt{\frac{2}{m} U_0 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \frac{a}{b} + \frac{b^2}{a^2} \frac{1}{6} - \frac{b}{2a} \right)} \\
 &< \sqrt{\frac{2}{m} \frac{U_0(b-a)}{6a^2b}} = \sqrt{\frac{U_0(b-a)}{3a^2bm}}
 \end{aligned}$$

## Вариант 2

1.

$$U(x) = -U_0 \exp \left\{ - \left( \frac{x}{a} \right)^2 - \left( \frac{x}{b} \right) \right\}$$

Найдём min

$$1) \frac{\partial U}{\partial x} = -U_0 \exp \left\{ - \left( \frac{x}{a} \right)^2 - \left( \frac{x}{b} \right) \right\} \cdot \left( -2 \frac{x}{a^2} - \frac{1}{b} \right) = 0 \implies x_? = -\frac{a^2}{2b}$$

$$2) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{x=-\frac{a^2}{2b}} = \frac{2U_0}{a^2} e^{\frac{a^2}{4b^2}} > 0 \implies$$

$$\implies x_? = x_{min}$$

Колебания в окрестности минимума:

$$\implies m\ddot{x} = F(x) = -\nabla U \Big|_{\text{в окрестности } x_{min}}$$

$$\ddot{x} + \frac{1}{m} \frac{2U_0}{a^2} e^{\frac{a^2}{4b^2}} \left( x + \frac{a^2}{2b} \right) = 0$$

$$\tilde{x} = x + \frac{a^2}{2b}$$

$$\ddot{\tilde{x}} + \frac{2U_0 e^{\frac{a^2}{4b^2}}}{ma^2} \tilde{x} = 0$$

$$\implies \omega_0 = \sqrt{\frac{2U_0 e^{\frac{a^2}{4b^2}}}{ma^2}}$$

2.

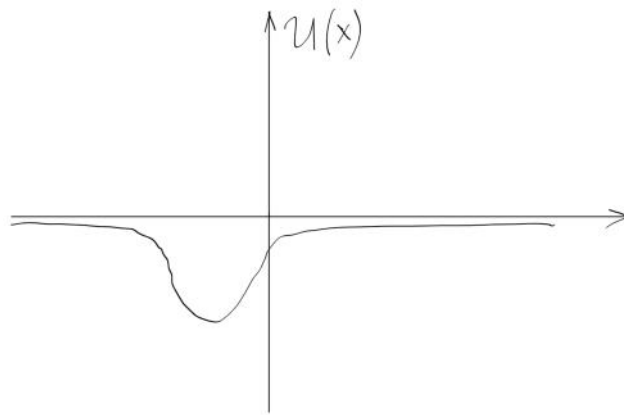
$$\tilde{x} = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$x + \frac{a^2}{2b} = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$x(0) = -\frac{a^2}{2b}, \quad \dot{x}(0) = v_0 \implies \varphi = 0, \quad A = \frac{v_0}{\omega_0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) - \frac{a^2}{2b} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{2U_0 e^{\frac{a^2}{4b^2}}}{ma^2}} \end{array} \right.$$

3. Рассмотрим  $U(x)$ .  $\exp$  всегда  $> 0$  и  $\exp \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$



$E_{\max} < 0 \implies$  т. к.  $v_0$  – скорость в  $\min$

$$\implies \frac{mv_0^2}{2} + U(x_{\min}) < 0$$

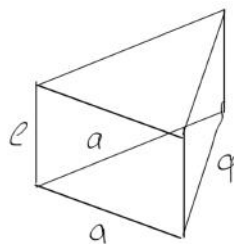
$$\frac{mv_0^2}{2} < U_0 \exp \left\{ - \left( \frac{a}{2b} \right)^2 - \frac{a^2}{2b^2} \right\}$$

$$v_0 < \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{\exp \left\{ - \frac{a^2}{b^2} \left( \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \right) \right\}}$$

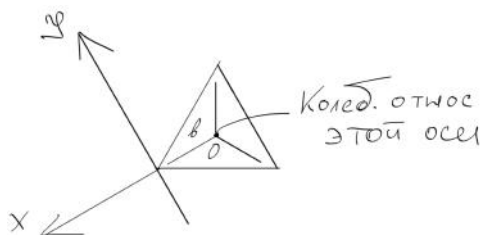
$$v_0 < \sqrt{\frac{2}{m}} e^{-\frac{3a^2}{8b^2}}$$

## Задача 5

### Вариант 1



Пусть сторона треугольника –  $a$ . Рассмотрим вид сверху.



Для нахождения частоты воспользуемся:

$$E = \frac{A}{2}\dot{x}^2 + \frac{B}{2}x^2$$

$$\frac{d}{dt}E = 0 = \frac{A}{2}2\dot{x}\ddot{x} + \frac{B}{2}2x\dot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{B}{A}x = 0 \implies \omega_0^2 = \frac{B}{A}$$

$$E = \frac{I_0\dot{\varphi}^2}{2} + Mgh, \quad M = 3m$$

$$h(\varphi) = \dots?$$

Рассмотрим постоянство длины  $l$

$$l^2 = (b - b \cos(\varphi))^2 + (0 - b \sin(\varphi))^2 + (l - h)^2$$

$$l^2 = b^2 - 2b^2 \cos(\varphi) + b^2 \cos^2(\varphi) + b^2 \sin^2(\varphi) + l^2 - 2lh + h^2$$

$$l^2 = 2b^2(1 - \cos(\varphi)) + l^2 - 2lh + h^2$$

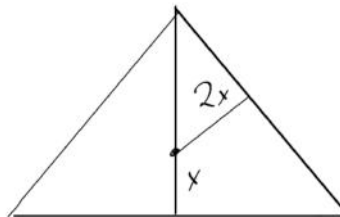
$$0 \approx 2b^2 \left(1 - 1 + \frac{\varphi^2}{2}\right) - 2lh + h^2$$

$$\implies h \approx \frac{b^2\varphi^2}{2l}$$

Получаем

$$\frac{I_0\dot{\varphi}^2}{2} + Mg \frac{b^2\varphi^2}{2l} = \text{const} = E$$

$$\implies \omega_0 = \sqrt{\frac{Mgb^2}{lI_0}}, \quad M = 3m$$



$$b-? \quad I_0-?$$

$$3x = a \cos \frac{\pi}{6} = a \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$b = 2x = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$I_0 = 3 \left( \underset{\substack{\text{th.Г.-Шт.} \\ \text{(одного стержня)}}}{mx^2} + \frac{1}{12}ma^2 \right)$$

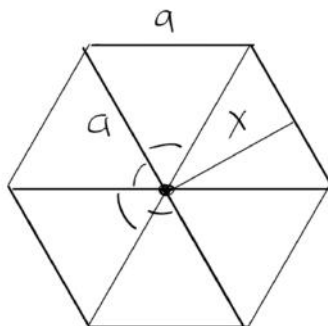
$$= 3 \left( m \frac{a^2}{4 \cdot 3} + \frac{1}{12}ma^2 \right)$$

$$I_0 = \frac{ma^2}{2}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{3mg2a^2}{lma^23}} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

## Вариант 2

Аналогично! Надо знать  $b$  и  $I_0$



$$b = a$$

$$x = a \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$I_0 = 6 \left( mx^2 + \frac{ma^2}{12} \right) = 5ma^2$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{6mgb^2}{lI_0}}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{6}{5}} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

# Список вопросов теоретического минимума

В данном списке представлены вопросы, которые войдут в так называемый теоретический минимум. Согласно регламенту студент обязан быть готов ответить на любой вопрос из этого списка, чтобы получить допуск к дополнительным вопросам на экзамене, которые позволят получить ему оценку хорошо или отлично.

1. **Вопрос:** Дайте определение скорости и ускорения материальной точки. Запишите ускорение материальной точки на плоскости, разбив его на две компоненты с использованием радиуса кривизны

**Ответ:**

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$
$$\vec{W} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \vec{\tau} \cdot \frac{dv}{dt} + v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = a_{\tau}\vec{\tau} + v \cdot \vec{n} \cdot \frac{dS}{Rdt} = a_{\tau}\vec{\tau} + \vec{n} \cdot \frac{v^2}{R}.$$

2. **Вопрос:** дайте определение системы отсчета, материальной точки и радиуса кривизны траектории?

**Ответ: Система отсчёта** – совокупность системы координат, начала отсчёта, привязанного к некоторому физическому объекту, и отсчитывающих время часов.

**Материальная точка** — модель обладающего массой тела, размерами и формой которого можно пренебречь в условиях данной задачи.

**Радиус кривизны траектории** — радиус бесконечно малой дуги окружности, по которой движется тело в данный момент времени. По определению угла в радианах  $d\varphi = dS/R \implies R = dS/d\varphi$ . Если известна траектория движения тела в декартовой системе координат на плоскости, то радиус кривизны траектории можно вычислить по следующей формуле:

$$R = \frac{(1 + (y'_x)^2)^{3/2}}{y''_x}.$$

3. **Вопрос:** назовите типы фундаментальных взаимодействий?

**Ответ:** Существуют лишь четыре типа так называемых фундаментальных взаимодействий: гравитационное (гипотетический переносчик взаимодействия — гравитон, такое взаимодействие испытывают все тела, обладающие массой, самое слабое из всех типов фундаментальных взаимодействий), электромагнитное (переносчик взаимодействия — фотон, такое взаимодействие испытывают все тела, обладающие электрическим зарядом, сильнее гравитационного в  $10^{36}$  раз, примеры — сила упругости, сила трения, сила реакции опоры), слабое (переносчики взаимодействия —  $W^{\pm}$  и  $Z^0$  бозоны, меняет тип кварков внутри нуклонов, изменяя значение квантового числа —



аромата, слабее электромагнитного взаимодействия в  $10^{13}$  раз, пример, где наблюдается — радиоактивный бета-распад, при котором свободный нейтрон превращается в протон), и сильное (переносчик взаимодействия — глюон, во взаимодействии участвуют кварки, в 100 раз сильнее электромагнитного взаимодействия, однако имеет очень ограниченный радиус действия —  $10^{-15}$  м (порядок радиуса протона), изучается квантовой хромодинамикой).

4. **Вопрос:** дайте определение инерции? Сформулируйте первый закон Ньютона

**Ответ: Инерция** — свойство тела сопротивляться к изменению характера его движения. Мерой инерции является масса.

**Первый закон Ньютона:** Существуют такие системы отсчёта, называемые инерциальными, относительно которых свободное тело, т. е. тело, на которое не действуют внешние силы или действие которых на него скомпенсировано, сохраняет свою скорость постоянной.

5. **Вопрос:** дайте определение импульса? Сформулируйте второй закон Ньютона, законы сохранения и изменения импульса

**Ответ: Импульс** — векторная физическая величина, равная произведению массы тела на вектор скорости его движения ( $\vec{p} = m\vec{v}$ ).

**Второй закон Ньютона:** Векторная сумма всех сил, действующих на тело, равна скорости изменения импульса этого тела:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i.$$

**Закон изменения импульса:** Скорость изменения импульса системы материальных точек равна векторной сумме всех внешних сил, действующих на эту систему:

$$\frac{d\vec{p}_{\text{сист}}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}}.$$

**Закон сохранения импульса:** Если система тел замкнутая, т. е. на неё не действуют внешние силы или их действие на неё скомпенсировано, то её импульс сохраняется:

$$\sum_i \vec{p}_i = \overrightarrow{\text{const.}}$$

6. **Вопрос:** Дайте определение силы, сформулируйте третий закон Ньютона?

**Ответ: Сила** — векторная физическая величина, характеризующая меру воздействия на данное тело со стороны других тел или полей.

**Третий закон Ньютона:** Тела действуют друг на друга с силами, равными по модулю и противоположными по направлению, причём эти силы имеют одинаковую природу.

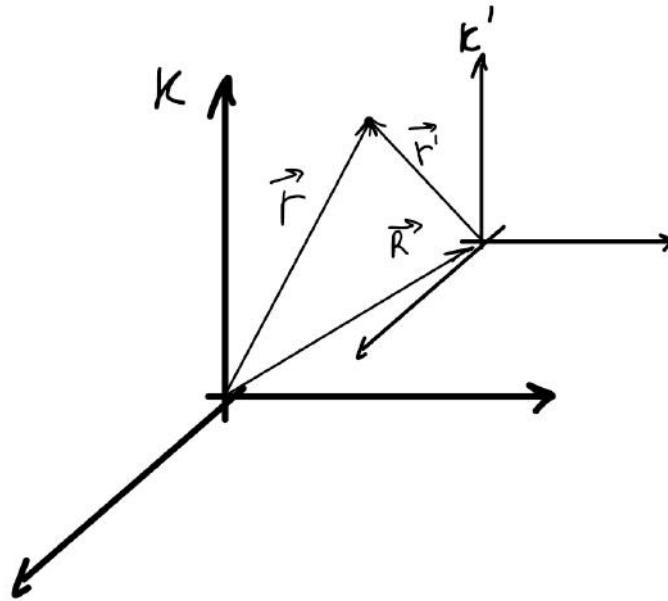
7. **Вопрос:** сформулируйте классический принцип относительности и принцип относительности Эйнштейна?

**Ответ: Классический принцип относительности:** Все законы механики инвариантны относительно выбора инерциальной системы отсчёта.

**Принцип относительности Эйнштейна:** Все законы природы инвариантны относительно выбора инерциальной системы отсчёта по отношению к преобразованиям Лоренца.

8. **Вопрос:** напишите преобразования Галилея?

**Ответ:**



$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R} = \vec{r}' + \vec{V} \cdot t$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{V} = \dot{\vec{r}}' + \vec{V}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}}'$$

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F}}.$$

9. **Вопрос:** дайте определение центра масс?

**Ответ:** Центр масс системы – это такая точка в пространстве, радиус-вектор которой определяется следующим образом:

$$\vec{R}_{c.m.} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \cdot m_i}{M} = \int \frac{\vec{r}\rho(r)dV}{M}.$$

Центр масс тела движется как материальная точка под действием всех внешних сил, приложенных к телу.

10. **Вопрос:** напишите уравнение Мещерского и формулу Циолковского?

**Ответ:**

**Уравнение Мещерского:**

$$M(t) \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}(t) + \vec{V}_{отн} \frac{dM}{dt},$$

$M(t)$  — масса ракеты в зависимости от времени  $t$ .

$\vec{V}$  — скорость ракеты в лабораторной системе отсчёта.

$\vec{F}(t)$  — геометрическая сумма всех внешних сил, действующих на ракету в зависимости от времени.

$\vec{V}_{отн.}$  — скорость газов относительно ракеты.

$dM/dt$  — скорость изменения массы ракеты.

**Формула Циолковского:**  $V = V_0 - V_{\text{отн}} \ln(M_{\text{кон}}/M_{\text{нач}})$  — справедливо, если реактивное движение происходит вдоль прямой, а внешние силы отсутствуют.

$\vec{V}$  и  $\vec{V}_0$  — конечная и начальная скорости ракеты.

$M_{\text{кон}}$  и  $M_{\text{нач}}$  — начальная и конечная массы ракеты.

11. **Вопрос:** Дайте определение работы и мощности?

**Ответ: Работа** — скалярная количественная мера действия силы (равнодействующей сил) на тело или сил на систему тел. Зависит от численной величины и направления силы (сил) и от перемещения тела (системы тел). Элементарная работа равна скалярному произведению силы, действующей на тело, на вектор бесконечно малого перемещения.

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (\vec{F}, d\vec{r}) = |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos(\angle(\vec{F}, d\vec{r})).$$

**Мощность** — скалярная физическая величина, равная скорости совершения работы:

$$P = \frac{dA}{dt}.$$

12. **Вопрос:** Дайте определение кинетической энергии? Сформулируйте теорему Кёнига

**Ответ: Кинетическая энергия** (материальной точки) — скалярная физическая величина, равная половине произведения массы материальной точки на квадрат скорости её движения ( $T = mv^2/2$ ).

Кинетическая энергия системы материальных точек есть сумма кинетических энергий всех материальных точек, составляющих систему.

Физический смысл: кинетическая энергия равна работе внешних сил, которую надо совершить, чтобы разогнать в конкретной системе отсчёта покоящееся тело до заданной скорости.

**Теорема Кёнига:** Полная кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии системы в системе отсчёта центра масс этой системы и кинетической энергии поступательного движения центра масс:

$$T_k = T_{k'} + \frac{MV^2}{2}.$$

13. **Вопрос:** Дайте определение потенциальной энергии? Опишите связь потенциальной энергии и силы

**Ответ:** Потенциальная энергия  $U(\vec{r})$  — скалярная физическая величина, представляющая собой часть полной механической энергии системы ( $E = E_{\text{п}} + E_{\text{к}}$ ), находящейся в поле консервативных сил. Потенциальная энергия зависит от положения материальных точек, составляющих систему, и характеризует работу, совершаемую полем при их перемещении.

**Связь потенциальной энергии и силы:**  $\vec{F} = -\nabla U = -\text{grad } U$ .

14. **Вопрос:** Дайте определение полной механической энергии? Сформулируйте законы изменения и сохранения полной механической энергии

**Ответ: Полная механическая энергия** — скалярная физическая величина, равная сумме потенциальной и кинетической энергий:  $E = T + U$ .

**Закон изменения полной механической энергии:** Изменение полной механической энергии системы тел равно сумме работ внутренних неконсервативных сил системы и внешних сил, действующих на систему:

$$\Delta E = A_{\text{вн. неконс.}} + A_{\text{внеш.}}$$

**Закон сохранения полной механической энергии:** Полная механическая энергия системы сохраняется, если в данной системе неконсервативные и внешние силы не совершают работы.

15. **Вопрос:** Сформулируйте определение момента импульса материальной точки и момента силы? Сформулируйте законы изменения и сохранения момента импульса

**Ответ: Момент импульса материальной точки** — векторная физическая величина, равная векторному произведению радиус вектора точки, проведённого от оси вращения на вектор импульса этой точки:

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}].$$

**Момент силы** - векторная физическая величина, равная векторному произведению вектора, проведённого от оси вращения к точке, к которой приложена сила, на вектор этой силы:

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}].$$

**Закон изменения момента импульса:** Скорость изменения момента импульса системы материальных точек равна геометрической сумме моментов всех внешних сил, действующих на тела системы:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i^{\text{ext}}.$$

**Закон сохранения момента импульса:** Если моменты всех внешних сил, действующих на тела системы, скомпенсированы, то момент импульса такой системы материальных точек сохраняется:

$$\vec{L} = \overrightarrow{\text{const.}}$$

16. **Вопрос:** Сформулируйте законы Кеплера. Дайте определение секториальной скорости.

**Ответ: Законы Кеплера:**

**1 закон:** все планеты движутся по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которого находится Солнце.

**2 закон:** радиус-вектор каждой планеты за равные промежутки времени заметает равные площади.

**3 закон:** квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит:  $T^2/a^3 = \text{const.}$

**Секториальная скорость** — векторная физическая величина, модуль которой равен площади, которую заметает радиус-вектор планеты за единицу времени, а направление совпадает с направлением вектора момента импульса этой планеты.

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{\vec{L}}{2m}.$$

17. **Вопрос:** напишите формулу Резерфорда?

**Ответ:** При рассеянии на кулоновском потенциале угол, на который изменится направление скорости заряженной частицы, налетающей на другую заряженную частицу (в системе отсчёта, связанной с заряженной частицей) можно вычислить по формуле Резерфорда:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{kq_1q_2}{\mu bv_\infty^2},$$

$q_1$  и  $q_2$  — заряды частиц;

$v_\infty$  — скорость налетающей частицы на бесконечном удалении от другой частицы;

$b$  — прицельное расстояние;

$\mu = mM/(m + M)$  — приведённая масса частиц.

Другой вариант формулы Резерфорда (про дифференциальное сечение рассеяния): дифференциальное эффективное поперечное сечение рассеяния заряженных частиц в телесный угол  $\Omega$  в кулоновском поле другой заряженной частицы или ядра (мишени) обратно пропорционально четвёртой степени синуса половинного угла рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \cdot \left( k \frac{q_1 \cdot q_2}{\mu v_\infty^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}},$$

$q_1$  и  $q_2$  — заряды частиц.

$\mu = mM/(m + M)$  — приведённая масса частиц.

$v_\infty$  — скорость налетающих частиц на бесконечном удалении от другой частицы в системе отсчёта другой частицы.

$\theta$  — угол, на который изменяется направление скорости частиц

18. **Вопрос:** сформулируйте закон всемирного тяготения и теорему Гаусса для гравитационного поля? Дайте определения всем космическим скоростям

**Ответ:**

**Закон всемирного тяготения:** Сила гравитационного притяжения между двумя материальными точками действует вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки, прямо пропорциональна произведению их масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2 \vec{r}}{r^3}, \quad \gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}.$$

(Этот закон также будет справедлив, если тела имеют форму шара; если расстояние между телами много больше их размеров; если одно из тел — массивный шар, а размеры второго много меньше размеров массивного шара).

**Теорема Гаусса:** Поток вектора напряжённости гравитационного поля через произвольную замкнутую поверхность прямо пропорционален массе тел, находящихся внутри этой поверхности:

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi\gamma M.$$

**Первая космическая скорость** — минимальная (для заданной высоты над поверхностью планеты) горизонтальная скорость, которую необходимо придать объекту, чтобы он совершал движение по круговой орбите вокруг планеты. Для Земли

$$V_1 = \sqrt{\gamma M/R} = \sqrt{gR} = 7,91 \text{ км/с.}$$

**Вторая космическая скорость** — наименьшая скорость, которую необходимо придать стартующему с поверхности небесного тела объекту (например, космическому аппарату), масса которого пренебрежимо мала по сравнению с массой небесного тела (например, планеты), для преодоления гравитационного притяжения этого небесного тела и покидания замкнутой орбиты вокруг него. Для Земли  $V_2 = \sqrt{2}V_1 = 11,2 \text{ км/с.}$

**Третья космическая скорость** — минимальная скорость, которую необходимо придать находящемуся вблизи поверхности Земли телу, чтобы оно могло преодолеть гравитационное притяжение Земли и Солнца и покинуть пределы Солнечной системы. Примерно равна 16,65 км/с.

19. **Вопрос:** Напишите уравнение движения материальной точки в неинерциальной системе отсчёта? Объясните принцип работы маятника Фуко и возникновение приливов на Земле.

**Ответ:**

**Уравнение движения в НИСО:**

$$m \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} = \underbrace{\vec{F} - m\vec{a}_0 - 2m [\vec{\omega} \times \vec{V}'] - m \left[ \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' \right] - m [\vec{\omega} [\vec{\omega} \times \vec{r}']]}_{\vec{F}_{\text{ин}}},$$

$$\vec{F}_{\text{ин пост.}} = -m\vec{a}_0;$$

$$\vec{F}_{\text{ин кор.}} = -2m [\vec{\omega} \times \vec{V}'];$$

$$\vec{F}_{\text{ин ц.б.}} = -m [\vec{\omega} [\vec{\omega} \times \vec{r}']] - m [(d\vec{\omega}/dt) \times \vec{r}'].$$

$\vec{r}'$  — радиус вектор в неинерциальной системе отсчёта.

$\vec{a}_0$  — ускорение поступательного движения неинерциальной системы отсчёта.

$\vec{\omega}$  — угловая скорость вращения неинерциальной системы отсчёта.

$\vec{V}'$  — скорость в неинерциальной системе отсчёта.

**Маятник Фуко** — математический маятник, используемый для экспериментальной демонстрации суточного вращения Земли. Представляет собой тело массой до нескольких десятков килограммов на гибком подвесе длиной до нескольких десятков метров. Верхний конец нити укрепляется в кардановом подвесе или на упорном шарикоподшипнике для свободного движения маятника в любой вертикальной плоскости. Плоскость колебаний маятника сохраняет своё положение в пространстве, а наличие суточного вращения ответственно за постепенный поворот плоскости колебаний маятника относительно связанных с Землёй ориентиров.

Период маятника Фуко:  $T_\varphi = \frac{T_0}{\sin \varphi}$ , где

$\varphi$  — широта, на которой находится маятник.

**Приливы:** Приливы и отливы — периодические колебания уровня океана или моря, являющиеся результатом воздействия приливных сил Луны и Солнца, однако приливообразующая сила Луны в 2,17 раз больше приливообразующей силы Солнца, поэтому характеристики прилива в основном зависят от взаимного положения Луны и Земли. Приливы оказываются заметны земному наблюдателю, так как Луна обращается вокруг Земли медленнее, чем Земля вокруг своей оси. На всю воду на поверхности Земли в системе отсчёта Земли действуют силы притяжения со стороны

Земли и Луны, поступательная, центробежная и кориолисова силы инерции. Однако из-за малой угловой скорости вращения Земли и ещё более малой скорости движения воды по поверхности нашей планеты, кориолисовой силой можно пренебречь, а центробежную силу считать дающей только вклад статический вклад (поправку)  $g$ . Сила притяжения воды к Земле велика, но она не зависит от положения Луны, следовательно не может вызывать периодические колебания уровня воды. Суммируя потенциалы сил притяжения к Луне и поступательной силы инерции, получаем потенциал приливных сил, проанализировав который, получаем высоту приливов  $h = 0.5$  м.

20. **Вопрос:** Сформулируйте принцип эквивалентности гравитационных сил и сил инерции

**Ответ:** Все физические явления в гравитационном поле происходят совершенно так же, как и в соответствующем поле сил инерции, если напряжённости обоих полей в соответствующих точках пространства совпадают, а начальные условия одинаковы для всех тел замкнутой системы.

# Список вопросов теоретического минимума к экзамену

1. **Вопрос:** Сформулируйте постулаты СТО

**Ответ:** 1. Все законы природы инвариантны относительно выбора любой инерциальной системы отсчёта (принцип относительности Эйнштейна).

2. Свет распространяется в вакууме в любой ИСО с определённой скоростью, которая не зависит ни от скорости источника, ни от скорости наблюдателя и является максимальной скоростью распространения информации во вселенной.

2. **Вопрос:** Запишите преобразования Лоренца

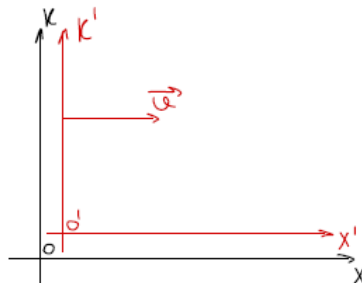
**Ответ:** Прямые преобразования Лоренца:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Обратные преобразования Лоренца:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z'.$$

Важно отметить, что все величины в этих преобразованиях берутся с учётом знака. Если мы рассмотрим предельный случай, когда  $(v/c) \rightarrow 0$ , то преобразования Лоренца перейдут в преобразования Галилея.



3. **Вопрос:** Запишите, как изменяются продольные размеры тел и промежутки времени при переходе от одной системы отсчёта к другой

**Ответ:** Лоренцево сокращение длины:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$



$v$  — скорость системы отсчёта, связанной с телом, (собственной системы отсчёта) относительно другой инерциальной СО.

$l_0$  — продольные размеры тела (в направлении движения СО) в собственной СО.

$l$  — продольные размеры тела в другой системе отсчёта.

Важно отметить, что Лоренцево сокращение длины работает только для продольных размеров тела, поперечные размеры не изменяются.

Замедление времени:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$\tau_0$  — время, проходящее между двумя событиями движущегося объекта с точки зрения наблюдателя, связанного с движущимся объектом.

$\tau$  — время, проходящее между двумя событиями движущегося объекта в неподвижной системе отсчёта.

$v$  — относительная скорость движения объекта.

4. **Вопрос:** Что такое пространство Минковского? Сформулируйте определение интервала

**Ответ:** Интервал — расстояние между двумя событиями в пространстве Минковского с точностью до знака (4-х мерное псевдоевклидово пространство событий с осями  $x, y, z, ct$ ). Интервал — инвариантная величина относительно выбора любой ИСО, поэтому переход из одной ИСО в другую должен быть таким преобразованием пространства в пространстве Минковского, которое сохраняет “расстояния”.

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \text{inv.}$$

5. **Вопрос:** Запишите классический и релятивистский эффект Доплера

**Ответ:** Эффект Доплера — изменение частоты периодического сигнала, воспринимаемое наблюдателем (приёмником), возникающее вследствие движения источника сигнала относительно приёмника.

**Классический эффект Доплера** (используется для анализа звуковых сигналов):

$$\omega = \omega_0 \frac{\left(1 + \frac{u}{c}\right)}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)},$$

$\omega$  — частота сигнала, воспринимаемая приёмником.

$\omega_0$  — частота сигнала, испускаемого источником.

$u$  — скорость приёмника (берётся с учётом знака, положительна, если приёмник движется по направлению к источнику, если приёмник движется под некоторым углом к оси, соединяющей приёмник и источник, то значение  $u$  надо брать в проекции на эту ось).

$v$  — скорость источника (берётся с учётом знака, положительна, если источник движется по направлению к приёмнику, если приёмник движется под некоторым углом к оси, соединяющей приёмник и источник, то значение  $v$  надо брать в проекции на эту ось).

$c$  — скорость звука.

**Релятивистский эффект Доплера** (используется для исследования электромаг-

нитных сигналов):

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi},$$

$\omega$  — частота сигнала, воспринимаемая приёмником.

$\omega_0$  — частота сигнала, испускаемого источником.

$v$  — скорость источника относительно приёмника, берётся по модулю, за направление отвечает  $\cos \varphi$ .

$\varphi$  — угол между направлением от источника к приёмнику и вектором скорости источника в СО приёмника.

$c$  — скорость света.

Если источник приближается к приёмнику и  $\varphi = 0$ , то формула упрощается, превращаясь в следующую:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}.$$

6. **Вопрос:** Запишите энергию релятивистской частицы

**Ответ:**

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Энергию можно записать и по-другому, раскрыв квадрат 4-импульса:

$$P^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2.$$

7. **Вопрос:** Запишите уравнение движения релятивистской частицы

**Ответ:**

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \vec{F}.$$

8. **Вопрос:** Дайте определение 4-импульсу

**Ответ:** 4-импульс равен произведению массы тела на 4-скорость:

$$\vec{P} = m\vec{V} = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right).$$

Так как квадрат 4-скорости равен  $c^2$ , то и квадрат 4-импульса равен  $m^2 c^2$  (в любой ИСО).

9. **Вопрос:** Расскажите о плоском движении АТТ и его разложении на поступательную и вращательную составляющую

**Ответ:** **Абсолютно твёрдое тело** — модель физического объекта, расстояние между двумя любыми точками которого не меняется в процессе движения тела.

**Плоское движение** — движение тела, при котором все его точки в каждый момент времени движутся параллельно некоторой плоскости, называемой плоскостью вращения. При таком движении в каждый момент времени можно выделить ось, вокруг которой в данный момент времени происходит вращение всех точек этого тела. Эту ось называют мгновенной осью вращения. При плоском движении тела угловая скорость его вращения относительно произвольной точки этого тела не зависит от выбора данной точки.

**Разложение движения тела на поступательное и вращательное** — так как справедлив закон сложения скоростей, то при плоском движении тела мы можем выбрать произвольную его точку, назвать её полюсом и рассматривать скорости всех остальных точек этого тела как векторную сумму скорости полюса и относительных скоростей этих точек относительно полюса. А если наше тело является абсолютно твёрдым, то относительное движение всех точек тела относительно полюса обязательно будет вращательным. Таким образом мы смогли представить движение всех точек тела в виде композиции поступательного движения полюса и вращательного движения остальных точек тела относительно полюса.

10. **Вопрос:** Дайте определение момента инерции, сформулируйте теорему Гюйгенса-Штейнера

**Ответ: Момент инерции** — скалярная физическая величина, являющаяся мерой инертности тела при вращательном движении его вокруг некоторой оси, численно равная сумме произведений масс всех материальных точек этого тела на квадрат расстояния от них до оси, вокруг которой вращается тело.

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \int_V r^2 dm.$$

**Теорема Гюйгенса-Штейнера** — момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции этого тела относительно оси, проходящей через его центр масс параллельно данной оси, и произведения массы этого тела на квадрат расстояния между осями.

$$I = I_c + MR^2.$$

11. **Вопрос:** Дайте определение момента импульса, запишите уравнение моментов для АТТ

**Ответ: Момент импульса АТТ** — геометрическая сумма моментов импульса всех его материальных точек.

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \int_V \vec{r}_i \times \vec{v}_i dm,$$

$$\vec{L} = \hat{I} \vec{\omega},$$

где

$$\hat{I} = \int_V \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & y^2 + x^2 \end{pmatrix} dm.$$

То есть в общем случае  $\vec{L}$  и  $\vec{\omega}$  не сонаправлены и связаны довольно хитрым образом, однако очень часто мы сталкиваемся именно с симметричными задачами, где либо

ось вращения совпадает с одной из главных осей тела, либо угловая скорость тела имеет только одну составляющую, в таких ситуациях формула для момента импульса упрощается и переходит в следующую:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}.$$

**Уравнение моментов** — скорость изменения момента импульса АТТ равна геометрической сумме моментов всех сил, приложенных к нему.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i.$$

Интересно, что данное уравнение можно записывать практически в любых условиях: относительно неподвижной точки, мгновенной оси вращения или центра масс тела. Если мы пишем данное уравнение относительно мгновенной оси вращения, то мы можем считать моменты всех сил тоже относительно мгновенной оси вращения, а если мы пишем его относительно центра масс, то мы как скорости, так и моменты всех сил можем брать относительно центра масс.

12. **Вопрос:** Запишите кинетическую энергию движения АТТ

**Ответ:** По теореме Кёнига кинетическую энергию движения АТТ можно разбить на кинетическую энергию поступательного движения его центра масс и кинетическую энергию вращательного движения относительно центра масс. Если в системе есть симметрия, то формула для энергии становится достаточно простой:

$$E = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

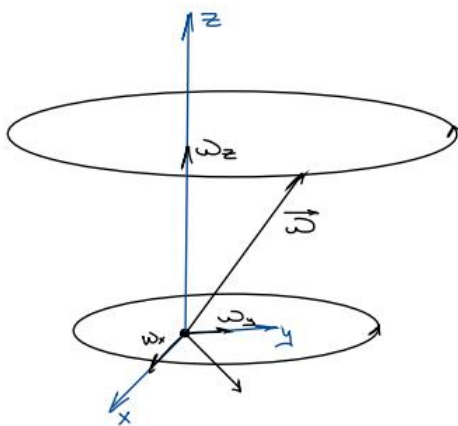
Однако если мы рассматриваем общий случай, когда момент импульса и угловая скорость связаны через тензор инерции, тогда формула для энергии несколько усложняется и принимает следующий вид:

$$E = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{L}}{2} = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{\vec{\omega} \cdot \hat{I}\vec{\omega}}{2}.$$

13. **Вопрос:** Расскажите про гироскоп, его регулярную и вынужденную прецессию

**Ответ: Гироскоп** (буквальный перевод — прибор для обнаружения вращения) — быстро вращающееся твёрдое тело, ось которого может изменять своё направление в пространстве.

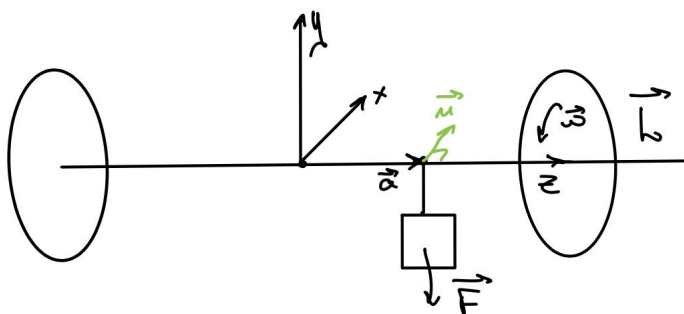
**Регулярная прецессия гироскопа** — движение симметричного гироскопа при отсутствии момента внешних сил, приложенных к нему. Если гироскоп представляет собой шар, то регулярной прецессии не возникает. Если гироскоп представляет собой симметричный волчок, то в ходе регулярной прецессии вектор его момента импульса остаётся неизменным по модулю, но меняет своё направление, описывая коническую поверхность.



$$\omega_z = \text{const}, \quad \omega_y = \omega_0 \cos(\Omega t + \varphi), \quad \omega_x = -\omega_0 \sin(\Omega t + \varphi), \quad \Omega = \frac{\Delta I}{I_x} \omega_z = \frac{I_z - I_x}{I_x} \omega_z.$$

**Вынужденная прецессия гироскопа** — движение гироскопа под действием внешних сил, момент которых постоянен по модулю. При любом виде вынужденной прецессии гироскопа происходит равномерное вращение вектора его момента импульса с частотой, определяющейся следующим соотношением:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{\Omega} \times \vec{L}] = \vec{M} = [\vec{a} \times \vec{F}].$$



Конкретно в данном случае итоговая частота получается следующая:  $\Omega = M / (I\omega)$ . Важно отметить, что на протяжении всего нашего курса мы изучали гироскопы в рамках приближённой теории гироскопа, основные допущения которой заключаются в том, что мы считаем, что гироскоп вращается очень быстро, поэтому вектор его момента импульса направлен практически вдоль оси симметрии гироскопа. Также всё время мы полагали, что гироскоп вращается равномерно, однако в реальной жизни это не так, например, нутация гироскопа, происходящая одновременно с вынужденной прецессией, является ярким примером того, как равномерное вращение оси симметрии гироскопа, довольно хорошо описываемое приближённой теорией, накладывается на её ускоренное движение (нутацию гироскопа), которое невозможно описать в рамках приближённой теории. Такое поведение гироскопа вы могли наблюдать например в лабораторной работе 1.13 про гироскоп.

14. **Вопрос:** Расскажите про гармонические колебания, запишите основное уравнение гармонических колебаний. Рассмотрите колебания физического маятника

**Ответ: Колебания** — физические процессы, точно или приближённо повторяющиеся во времени.

**Гармонические колебания** — такой вид колебаний, при которых периодически меняющаяся физическая величина изменяется по гармоническому закону:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

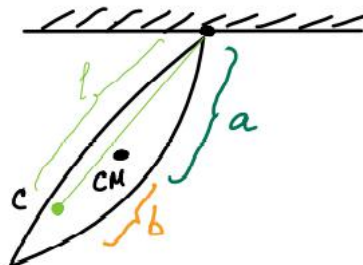
где  $x$  — колеблющаяся величина.

Величины, изменяющиеся по гармоническому закону, удовлетворяют основному уравнению гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Уравнение гармонических колебаний можно получить, записав второй закон Ньютона для колеблющейся системы или записав энергию системы, а затем продифференцировав получившееся равенство по времени. Часто колебания системы можно считать гармоническими только при малых отклонениях от положения равновесия, поэтому в таких случаях, для того, чтобы получить уравнения гармонических колебаний, надо заменить имеющиеся у нас функции на эквивалентные около положения равновесия, причём при динамическом подходе к колебаниям, надо учитывать только первый порядок малости, а вот при энергетическом подходе этого уже не достаточно и раскладывать потенциальную энергию в ряд надо до 2 порядка.

**Физический маятник** — осциллятор, представляющий собой абсолютно твёрдое тело, совершающее колебания в поле каких-либо сил (обычно сил Земного притяжения) относительно точки, не являющейся его центром масс.



Период колебаний физического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}},$$

где  $I$  — момент инерции маятника относительно оси вращения,

$m$  — масса физического маятника,

$a$  — расстояние от оси вращения до центра масс маятника.

Часто для удобства вводят **приведённую длину физического маятника** — длину такого математического маятника, чтобы его период совпадал с периодом колебаний физического маятника:

$$l_{\text{пр}} = \frac{I}{ma} = a + \frac{I_c}{ma},$$

где  $I_c$  — центральный момент инерции физического маятника.

Тогда период колебаний физического маятника записывается достаточно просто:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}}.$$

**Центр качания физического маятника** — такая точка физического маятника, в которой можно сосредоточить всю его массу и при этом период колебаний не изменится. Из этого определения следует, что точка качания удалена от оси вращения на приведённую длину физического маятника.

Об одном из любопытных свойств центра качания физического маятника говорит нам **теорема Гюйгенса**: если подвесить физический маятник за центр качания, то его период колебаний не изменится, а точка подвеса станет новым центром качания.

15. **Вопрос:** Расскажите про затухающие колебания и их основные характеристики

**Ответ: Затухающие колебания** — колебания, энергия которых уменьшается с течением времени. Затухающие колебания возникают, если мы начинаем учитывать различные силы сопротивления, действующие в нашей колебательной системе. Обычно в механике такими силами являются силы сухого или вязкого трения. Затухающие колебания при наличии сил вязкого трения описываются следующим дифференциальным уравнением:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где

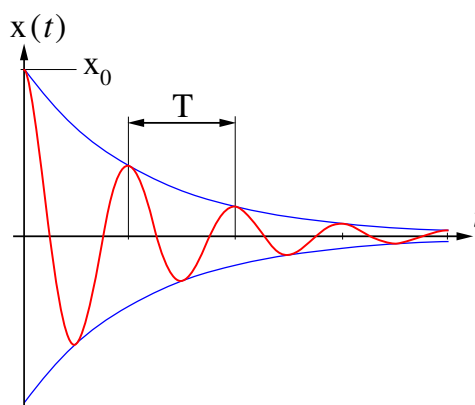
$x$  — колеблющаяся величина;

$\omega_0$  — собственная частота свободных незатухающих гармонических колебаний системы;

$\gamma$  — коэффициент затухания, такой что  $\vec{F}_c = -2\gamma m\vec{v}$ .

Решение такого дифференциального уравнения практически всегда (при малом затухании) имеет следующий вид:

$$x = A \exp[-\gamma t] \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + \varphi_0).$$



**Амплитуда** затухающих колебаний с силой вязкого трения затухает экспоненциально с течением времени:

$$a = Ae^{-\gamma t}.$$

Причём, из этой формулы следует, что за время  $\tau = \gamma^{-1}$  амплитуда затухающих колебаний уменьшается в  $e$  раз. Поэтому такое время  $\tau$  называют **временем затухания**.

**Логарифмический декремент** затухающих колебаний — безразмерная физическая величина, описывающая уменьшение амплитуды затухающих колебаний с течением времени, численно равная натуральному логарифму отношения двух последовательных амплитуд затухающих колебаний, разделённых одним периодом колебаний.

$$\delta = \lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \gamma T.$$

**Добротность** колебательной системы — безразмерный параметр колебательной системы с затуханием, определяющийся отношением энергии колебательной системы к её потерям за изменение фазы на 1 радиан. Чем больше добротность колебательного контура, тем дольше колебания будут затухать.

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} \approx \frac{\pi}{\gamma T},$$

где  $\Delta E$  — потери энергии за период колебаний.

Также существуют затухающие колебания, при которых сила сопротивления является константой, однако периодически меняет направление. Примером такой силы является хорошо всем известная сила сухого трения. В таком случае уравнение затухающих колебаний принимает следующий вид (в качестве примера рассмотрим грузик на пружинке, колеблющийся на горизонтальном шероховатом столе):

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \pm \mu g,$$

где знак в правой части определяется направлением силы сухого трения в данный момент времени. Так как направление силы трения меняется два раза за период колебаний, то и знак в уравнении будет изменяться с плюса на минус тоже два раза за период.

Решение такого уравнения будет иметь следующий вид (при фиксированном направлении силы трения):

$$x(t) = \pm \frac{\mu mg}{k} + A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right).$$

Зная решение нашего дифференциального уравнения, несложно показать, что за период колебаний их амплитуда всё время уменьшается на константу, равную  $(4\mu mg)/(k)$ , а зависимость амплитуды колебаний от времени приобретает линейный вид:

$$a = A - \frac{4\mu mg}{k} \frac{t}{T}.$$

16. **Вопрос:** Расскажите про вынужденные колебания. Отдельно рассмотрите ситуацию резонанса

**Ответ: Вынужденные колебания** — колебания, происходящие под воздействием внешних периодических сил.

Вынужденные колебания описываются следующим дифференциальным уравнением:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t),$$

где  $x, \gamma, \omega_0$  — такие же величины, как и в затухающих колебаниях,  $f(t) = F(t)/m$ , где  $F(t)$  — вынуждающая сила.



Для решения уравнения вынужденных колебаний бывает полезно воспользоваться тем, что уравнение вынужденных колебаний — неоднородное, а общим решением неоднородного уравнения является сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Решение соответствующего однородного уравнения уже нам известно, так как оно представляет собой в точности уравнение затухающих колебаний, а частное решение неоднородного уравнения можно найти исходя из следующего физического соображения: если мы на колебательную систему действуем периодической внешней силой, то в какой-то момент колебания установятся и система будет колебаться с частотой вынуждающей силы.

В случае, когда внешняя сила постоянна, решение уравнения колебаний будет представлять собой **затухающие колебания** со смещённым положением равновесия:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{f_0}{\omega_0^2},$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  — частота затухающих колебаний.

В случае, когда внешняя сила изменяется по гармоническому закону, частное решение неоднородного уравнения удобно искать **методом комплексных амплитуд**, представив его в виде:

$$x = Ce^{i\Omega t},$$

где  $\Omega$  — частота вынуждающей силы.

После несложных алгебраических преобразований решение примет следующий вид:

$$x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0) + |C| \cos(\Omega t + \psi)$$

где

$$|C| = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}};$$

$$\psi = \arctan\left(\frac{-2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right).$$

Отдельно рассмотрим случай **резонанса** — такую ситуацию, когда амплитуда установившегося режима колебаний становится максимальной. В таком режиме резонансные параметры системы будут иметь следующий вид:

$$\Omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2};$$

$$|C|_{res} = \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{f_0}{2\gamma\omega};$$

$$\psi_{res} = \arctan - \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}}{\gamma}.$$

Заметим, что если  $\gamma \rightarrow 0$ , то в резонансе:

$$\Omega_{res} \rightarrow \omega_0, \quad |C|_{res} \rightarrow +\infty, \quad \psi_{res} \rightarrow -\frac{\pi}{2}.$$

Также несложно показать, что отношение амплитуды вынужденных колебаний в резонансе в случае гармонической силы к статическому у сдвигу под действием постоянной силы той же амплитуды представляет собой добротность колебательной системы:

$$\frac{|C_{res}|}{\frac{f_0}{\omega_0^2}} \approx \frac{\pi}{\gamma T} = Q.$$

Из закона сохранения энергии следует, что в режиме установившихся колебаний средние мощности вынуждающей силы и силы сопротивления равны по модулю и противоположны по знаку и равны:

$$P_F = -P_{F_c} = \frac{\gamma m \Omega^2 f_0^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}.$$

17. **Вопрос:** Сформулируйте обобщённый закон Гука. Расскажите про коэффициенты Пуассона и модуль Юнга.

**Ответ: Деформация** — изменение формы и/или размеров тела под действием внешних сил. Различают **упругие деформации** — такие деформации, которые исчезают после того, как на тело перестают действовать внешние силы, и **неупругие деформации** — деформации, не исчезающие полностью после того, как на тело перестают действовать внешние силы.

**Механическое напряжение** — скалярная физическая величина, характеризующая внутренние силы, возникающие в упругом материале при его упругой деформации, численно равная нормальной силе упругости, действующей на единицу площади в этом материале при его растяжении или сжатии:

$$\sigma = \frac{F}{S}, \quad [\sigma] = [\text{Па}].$$

**Относительное удлинение** — безразмерная скалярная физическая величина, численно равная отношению изменения линейных размеров тела к его линейным размерам. Чаще всего изменения линейных размеров тела малы, так что в таком случае за линейные размеры тела можно брать их значения как до деформации, так и во время деформации.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l},$$

где  $l$  — линейные размеры тела.

Для малых упругих деформаций справедлив **закон Гука**: механическое напряжение, возникающее в упругом объекте прямо пропорционально его относительному удлинению. Коэффициентом пропорциональности между двумя этими величинами является **модуль Юнга** — скалярная физическая величина, характеризующая способность данного материала сопротивляться растяжению или сжатию при упругой деформации, численно равная отношению напряжения, возникающего в данном материале при упругой деформации, к его относительному удлинению. Модуль Юнга является гораздо более универсальной и полезной характеристикой, чем например коэффициент жёсткости пружины, так как он является характеристикой упругих

свойств всего материала в целом, а не какого-то конкретного объекта из этого материала.

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где  $\sigma$  — механическое напряжение;

$E$  — модуль Юнга,  $[E] = [\text{Па}]$ ;

$\varepsilon$  — относительное удлинение.

**Коэффициент Пуассона** — безразмерная скалярная физическая величина, устанавливающая связь между продольным растяжением и поперечным сжатием или наоборот. Данный коэффициент численно равен отношению поперечного сжатия к продольному растяжению, и причём при упругих деформациях он не зависит от величины относительного сжатия/растяжения. Коэффициент Пуассона, как и модуль Юнга, зависит только от материала, из которого сделан упругий объект, но не зависит от геометрических параметров самого объекта.

$$\mu = -\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_l},$$

где  $\varepsilon_l$  — относительное изменение продольных размеров тела,  $\varepsilon_a$  — относительное изменение поперечных размеров тела.

Если  $\mu = 0.5$ , то при упругих деформациях объём тела не будет изменяться.

18. **Вопрос:** Сформулируйте обобщённый закон Гука для деформаций кручения и сдвига. Расскажите про модули кручения и сдвига.

**Ответ: Закон Гука для деформаций сдвига** — касательное механическое напряжение сдвига, возникающее в упругом объекте, прямо пропорционально углу сдвига, выраженному в радианах. Коэффициентом пропорциональности между двумя этими величинами является **модуль сдвига** — скалярная физическая величина, характеризующая способность упругого тела сопротивляться деформации сдвига, численно равная гипотетическому касательному напряжению сдвига, возникающему в упругом объекте при сдвиге на угол в 1 радиан. Модуль сдвига зависит только от материала, из которого изготовлен упругий объект, но не зависит от свойств конкретного объекта.

$$\tau = \gamma G,$$

где  $\tau = F/S$  — касательное механическое напряжение сдвига,  $[\tau] = [\text{Па}]$ ;

$G$  — модуль сдвига,  $[G] = [\text{Па}]$ ;

$\gamma$  — угол сдвига,  $[\gamma] = [\text{рад}]$ .

**Закон Гука для деформаций кручения** — момент сил, возникающий в упругом теле под действием деформации кручения, прямо пропорционален углу закручивания. Коэффициентом пропорциональности между двумя этими величинами является **модуль кручения** — скалярная физическая величина, характеризующая способность тела сопротивляться деформациям кручения, численно равная гипотетическому моменту сил, возникающему в упругом теле при его закручивании на угол в 1 радиан. Кажется, что в такой формулировке закона Гука для деформаций кручения модуль кручения будет зависеть от свойств конкретного физического объекта. В качестве примера можно рассмотреть моменты сил, возникающие в двух одинаковых цилиндрах при закручивании на один и тот же угол, а затем эти цилиндры

объединить в один, не меняя угла закручивания. Таким образом, суммарный момент сил должен увеличиться вдвое.

$$M = f\varphi,$$

где  $M$  — момент сил, возникающий в упругом теле при закручивании его на некоторый угол;

$f$  — модуль кручения,  $[f] = [\text{Па}]$ ;

$\varphi$  — угол, на который было закручено тело,  $[\varphi] = [\text{рад}]$ .

19. **Вопрос:** Дайте определение волнам, расскажите про основные характеристики волн.

**Ответ: Волна** — процесс изменения состояния среды, распространяющийся в пространстве с течением времени.

Запишем **общий вид уравнения произвольной волны**:

$$S(x) = f(x - vt).$$

Волна распространяется вдоль оси  $Ox$ , где  $v$  берётся с учётом знака:  $v > 0$ , если по оси  $Ox$  и  $v < 0$ , если против.

Если проследить за поверхностью постоянной фазы в этом уравнении, то несложно получить, что  $v$  — это скорость распространения постоянной фазы волны, а следовательно и её скорость.

**Волновой импульс (одионочная волна)** — сравнительно короткое возмущение произвольной формы, всё так же распространяющееся в пространстве с течением времени.

**Гармоническая волна** — такая волна, все параметры которой изменяются по гармоническому закону.

Запишем общее уравнение плоской гармонической волны.

$$S(x, t) = S_0 \cos(k(x - vt) + \varphi_0),$$

или в комплексном виде:

$$S(x, t) = S_0 e^{i(k(x - vt) + \varphi_0)},$$

$k$  — волновое число, если учесть, что фазы двух точек волны, разделённые 1 длиной волны, должны различаться на  $2\pi$  в каждый конкретный момент времени, то получится, что

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{v} = \frac{\omega}{v}.$$

Запишем общее уравнение плоской гармонической волны, распространяющейся вдоль направления, задаваемого вектором  $\vec{k}$ , который при векторной записи называют уже не волновым числом, а волновым вектором:

$$S(x, t) = S_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0).$$

**Плоская волна** — волна, поверхность постоянной фазы которой является плоскостью, эта плоскость всё время будет перпендикулярной направлению распространения волны или волновому вектору.

**Скорость волны** — скорость распространения поверхности постоянной фазы этой волны.

**Длина волны** — расстояние, на которое перемещается волна за один период колебаний / минимальное расстояние между точками, колеблющимися в одинаковой фазе.

$$\lambda = vT, \quad \nu = \frac{1}{T} \implies v = \nu \cdot \lambda.$$

Волны бывают продольными и поперечными. **Поперечные волны** — такие волны, у которых колебания происходят в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны. **Продольные волны** — такие волны, у которых колебания происходят вдоль направления распространения волны.

В результате наложения двух волн, распространяющихся навстречу друг другу возникают **стоячие волны** — такие волны, которые не перемещаются в пространстве. Запишем её уравнение:

$$S(x, t) = 2S_0 \cos(kx) \cos(\omega t).$$

20. **Вопрос:** Запишите волновое уравнение.

**Ответ:**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Мы записали общий вид волнового уравнения для волны, задаваемой функцией  $f(x, t)$ , распространяющейся вдоль оси  $Ox$  со скоростью  $v$  (в произвольном направлении).

Есть ещё один вид волнового уравнения, который задаёт направление распространения волны, но при этом гораздо реже получается при исследовании чего-нибудь:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \pm \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

В уравнении выбирается знак  $+$ , если волна распространяется сонаправлено с осью  $Ox$ , и  $-$  в случае, когда волна распространяется против оси  $Ox$ .

Если волна распространяется в произвольном направлении, то волновое уравнение несколько усложняется:

$$\Delta f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ — оператор Лапласа.}$$

Физикам лень писать много букв, поэтому был придуман ещё и оператор Даламбера, с помощью которого волновое уравнение можно записать ещё короче:

$$\square f = 0,$$

где

$$\square = \Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{ — оператор Даламбера.}$$

Несложно показать, что решением волнового уравнения является любая функция вида  $f(x - vt)$ .

# Список вопросов коллоквиума

По умолчанию в вопросах все формулы, свойства и теоремы нужно уметь выводить и доказывать. Это необходимое условие получения оценки "отлично".

1. Кинематика материальной точки. Естественный параметр движения. Разложение ускорения на нормальное и тангенциальное.
2. Баллистическое движение. Кривизна плоской кривой. Радиус кривизны баллистической траектории.
3. Принцип относительности. Масса. Импульс. Закон сохранения импульса материальной точки и системы материальных точек.
4. Второй и третий законы Ньютона. Центр масс. Теорема о движении центра масс. Движение пары тел.
5. Сухое и жидкое трение. Формула Эйлера для трения в блоках.
6. Движение тел с переменной массой. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского.
7. Механическая работа. Кинетическая энергия. Теорема об изменении кинетической энергии. Теорема Кёнига.
8. Потенциальная энергия. Связь силы и потенциальной энергии. Закон сохранения полной механической энергии. Финитное и инфинитное движение.
9. Упругие столкновения частиц. Векторная диаграмма скоростей.
10. Момент силы и момент импульса. Свойства. Изменение моментов при изменении системы отсчета.
11. Уравнение моментов для материальной точки и для системы материальных точек. Закон сохранения момента импульса. Особенности движения в центральном поле.
12. Рассеяние Резерфорда. Связь угла отклонения с прицельным параметром и начальной относительной скоростью.
13. Опыт Кавендиша по измерению плотности Земли. Гравитационная постоянная.
14. Законы Кеплера (формулировка и пояснение используемых терминов). Секториальная скорость, связь с моментом импульса. Связь формы траектории с законом всемирного тяготения (вывод зависимости ускорения от расстояния до Солнца из уравнения эллипса). Постоянная Кеплера.
15. Полная энергия в задаче двух тел с гравитационным взаимодействием. Эффективный потенциал. Виды траекторий и их связь с полной энергией.
16. Связь параметров орбиты с полной энергией и моментом импульса в задаче двух тел.

17. Космические скорости (первая, вторая, третья). Точки Лагранжа.
18. Теорема Гаусса для гравитационного поля. Гравитационное поле шара (внутри и снаружи).
19. Движение в неинерциальных системах отсчета. Переносная скорость и переносное ускорение. Кориолисово ускорение. Силы инерции.
20. Различные примеры влияния сил инерции. Стрелок и пуля. Маятник Фуко.
21. Приливные силы. Статическое рассмотрение системы Земля-Луна.
22. Гравитационная и инертная массы. Принцип эквивалентности.



# Список вопросов экзамена

По умолчанию в вопросах все формулы, свойства и теоремы нужно уметь выводить и доказывать. Это необходимое условие получения оценки "отлично".

1. Постулаты СТО. Относительность одновременности. Преобразования Лоренца (вывод).
2. Интервал и его инвариантность. Виды интервалов. Причинность.
3. Собственное время. Измерение длины релятивистских объектов. Парадокс шеста и сарая.
4. Продольный и поперечный релятивистский эффект Доплера.
5. Релятивистское преобразование скорости. Аберрация.
6. Пространственно-временные диаграммы Минковского. Собственное время и измерение длины на диаграммах. Парадокс близнецов.
7. Пространство Минковского и 4-векторы. 4-вектор скорости. Вывод преобразования скоростей из преобразования Лоренца для 4-скорости.
8. 4-вектор силы. Уравнения движения релятивистской частицы. Энергия релятивистской частицы, кинетическая энергия и энергия покоя. Инвариант энергии-импульса.
9. Неаддитивность массы в релятивистской механике. Дефект масс.
10. Гиперболическое движение.
11. Аналог формулы Циолковского в релятивистском случае.
12. Кинематика твердого тела. Независимость угловой скорости от выбора начала отсчета в твердом теле.
13. Момент импульса твердого тела. Уравнение моментов относительно центра масс.
14. Тензор инерции. Выражение момента импульса и кинетической энергии твердого тела через тензор инерции и угловую скорость. Главные оси тензора инерции. Проекция момента импульса на мгновенную ось вращения.
15. Вращение вокруг фиксированной оси. Момент инерции относительно оси. Теорема Гюйгенса-Штейнера.
16. Главные компоненты тензора инерции стержня, пластины, параллелепипеда, диска, сферы, шара.
17. Уравнения Эйлера. Регулярная прецессия симметричного волчка.
18. Гироскоп. Вынужденная прецессия симметричного волчка с неподвижной точкой под действием момента внешних сил.

19. Гармонические колебания. Уравнение одномерных гармонических колебаний. Вывод уравнения колебаний из динамических уравнений и из закона сохранения энергии.
20. Представление гармонических колебаний на фазовой плоскости.
21. Мгновенная и средняя кинетическая и потенциальная энергии при одномерных гармонических колебаниях.
22. Уравнение одномерных гармонических колебаний с учетом вязкого трения. Представление гармонических колебаний на фазовой плоскости.
23. Гармонические колебания с постоянной или гармонической внешней силой. Решение неоднородного уравнения с помощью метода комплексных амплитуд. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний. Резонанс.
24. Добротность как характеристика затухающих колебаний, и как характеристика резонансной кривой.
25. Мгновенная и средняя мощность потерь и мощность вынуждающей силы при вынужденных одномерных гармонических колебаниях и действии гармонической силы. Лоренцевская форма линии.
26. Свободные колебания двух связанных гармонических осцилляторов. Биения.
27. Колебания твердого тела. Приведенная длина. Центр качания. Теорема Гюйгенса.
28. Малые деформации. Напряжение. Закон Гука. Коэффициент Пуассона. Энергия упругой деформации.
29. Всестороннее сжатие. Модуль всестороннего сжатия. Деформация сдвига. Модуль сдвига. Деформация кручения.
30. Волны. Волновое уравнение. Гармонические волны. Амплитуда, фаза, длина волны. Волновое число. Стоячие волны.