

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ
по лабораторной работе №3
по дисциплине «Построение и анализ алгоритмов»
Тема: Поток в сети

Студент гр. 7383

Лосев М.Л.

Преподаватель

Жангиров Т.Р.

Санкт-Петербург

2018

Постановка задачи.

Цель работы: реализация и исследование алгоритма Форда-Фалкерсона, получение опыта и знания по его использованию. **Формулировка задачи:**

Формулировка задачи: Найти максимальный поток в сети, а также фактическую величину потока, протекающего через каждое ребро, используя алгоритм Форда-Фалкерсона.

Индивидуализация: для поиска пути использовать поиск в ширину.

Описание алгоритма:

1. Обнуляем все потоки. Остаточная сеть изначально совпадает с исходной сетью.
2. В остаточной сети находим *кратчайший* путь из источника в сток. Если такого пути нет, останавливаемся.
3. Пускаем через найденный путь (он называется **увеличивающим путём** или **увеличивающей цепью**) максимально возможный поток:
 1. На найденном пути в остаточной сети ищем ребро с минимальной пропускной способностью .
 2. Для каждого ребра на найденном пути увеличиваем поток на , а в противоположном ему — уменьшаем на .
 3. Модифицируем остаточную сеть. Для всех рёбер на найденном пути, а также для противоположных им рёбер, вычисляем новую пропускную способность. Если она стала ненулевой, добавляем ребро к остаточной сети, а если обнулилась, стираем его.
4. Возвращаемся на шаг 2.

Чтобы найти кратчайший путь в графе, используем поиск в ширину:

1. Создаём очередь вершин O . Вначале O состоит из единственной вершины s .
2. Отмечаем вершину s как посещённую, без родителя, а все остальные как непосещённые.

3. Пока очередь не пуста, выполняем следующие шаги:

1. Удаляем первую в очереди вершину u .
2. Для всех дуг (u, v) , исходящих из вершины u , для которых вершина v ещё не посещена, выполняем следующие шаги:
 1. Отмечаем вершину v как посещённую, с родителем u .
 2. Добавляем вершину v в конец очереди.
 3. Если $v = t$, выходим из обоих циклов: мы нашли кратчайший путь.
4. Если очередь пуста, возвращаем ответ, что пути нет вообще и останавливаемся.
5. Если нет, идём от t к s , каждый раз переходя к родителю. Возвращаем путь в обратном порядке.

Входные данные:

N - количество ориентированных рёбер графа.

v_0 — исток

v_n — сток

v_i, v_j, ω_{ij} — ребро графа

v_i, v_j, ω_{ij} — ребро графа

...

Выходные данные:

P_{\max} — величина максимального потока

v_i, v_j, ω_{ij} — ребро графа с фактической величиной протекающего потока

v_i, v_j, ω_{ij} — ребро графа с фактической величиной протекающего потока

...

В ответе выходные рёбра отсортируйте в лексикографическом порядке по первой вершине, потом по второй (в ответе должны присутствовать все указанные входные рёбра, даже если поток в них равен 0).

Описание алгоритма:

Реализация

Был использован следующие классы:

Класс Edge:

Поля:

```
ver_type first;  
ver_type last;  
flow_type capacity;  
flow_type flow;  
flow_type rev_flow;
```

Методы:

```
Edge()  
Edge(ver_type first, ver_type last, flow_type capacity)  
void print() – вывод ребра на экран  
bool empty() – возвращает true тогда и только тогда когда ребро не пусто  
flow_type max_flow() – возвращает максимальный поток, который может  
пройти по ребру  
int first_index() – возвращает первый индекс ребра в матрице  
int last_index() – возвращает второй индекс ребра в матрице
```

Класс Vertex:

Поля:

```
ver_type name;  
ver_type prev;  
bool visited;
```

Методы:

```
Vertex()  
Vertex(ver_type name)  
Vertex(ver_type name, ver_type prev)  
  
bool operator < (const Vertex &v2) const  
bool operator == (const Vertex &v2) const  
– операторы сравнения
```

Класс FlowNetwork:

Поля:

```
int num_of_vertexes;  
Edge ** adjacency_matrix;  
Vertex source;  
Vertex sink;
```

```
vector <Vertex> vertexex;  
int num_of_edges;
```

Методы:

```
FlowNetwork()  
~FlowNetwork()  
void input_flow_network() – ввод сети  
void print_actual_flow_value() – вывод всех ребер с потоками  
string BFS(Vertex start, Vertex target) – поиск у ширину  
int FFA – реализация алгоритма Форда - Фалкерсона  
void add_edge(const Edge &e) – добавление ребра  
Edge input_edge() – ввод одного ребра  
void clear_visits() – обнуляет посещенности всех вершин  
void zeroize_flows() – обнуляет потоки  
flow_type edge_max_flow(const Edge &e) const – возвращает  
максимальный поток по ребру  
flow_type path_max_flow(string path) – возвращает максимальный поток  
по пути  
void add_flow(string path, flow_type flow_val) – добавляет поток
```

Исследование

Пусть $|E|$ - множество ребер графа, $|V|$ – множество его вершин. Алгоритм в худшем случае пройдет каждую вершину. При прохождении каждой вершины в очередь будут добавляться пути через эту вершину в смежные с ней из начальной. Добавление в очередь требует в худшем случае столько сравнений, сколько в очереди элементов. Но элементов в очереди не может быть больше, чем $|V|$, если не хранить несколько путей в одну и ту же вершину, что бессмысленно (для оптимальности достаточно рассматривать лишь более короткий из них). Получается $O(|V|*|V|)$. Но, с другой стороны, очевидно, что на самом деле эта величина должна зависеть не только от $|V|$, но и от $|E|$. Некоторые исследователи полагают, что сложность алгоритма A^* составляет $O(|V|*|V|*\log(|E|))$.

Тестирование.

Тестирование проводилось в ОС Ubuntu 18.04 компилятором GCC. Кроме того, программа прошла тесты на Stepic. Результаты тестирования показали, что программа работает корректно.

Вывод.

При выполнении работы был реализован и изучен Эдмондса – Карпа, который является частным случаем алгоритма Форда — Фалкерсона, который использует поиск в ширину для нахождения пути.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Код программы

```
#include <iostream>
#include <queue>
#include <string>
#include <vector>
#include <algorithm> // for_each
#include <cmath>

using namespace std;

template <typename ver_type, typename flow_type>
class FlowNetwork
{
public:
    class Edge
    {
    public:
        ver_type first;
        ver_type last;
        flow_type capacity;
        flow_type flow;
        flow_type rev_flow;

        Edge() { }
        Edge(ver_type first, ver_type last, flow_type capacity) :
first(first), last(last), capacity(capacity), flow(0), rev_flow(0) { }
        void print() { cout << first << " " << last << " " << flow <<
endl; }
        bool empty() { return capacity == 0 && flow == 0 ? true :
false; }
        flow_type max_flow() { return capacity - flow; }
        int first_index() const { return first; }
        int last_index() const { return last; }
    };

    class Vertex
    {
    public:
        ver_type name;
        ver_type prev;
        bool visited;

        Vertex() { }
        Vertex(ver_type name) : name(name), visited(false) { }
        Vertex(ver_type name, ver_type prev) : name(name), prev(prev),
visited(false) { }
        int index() const { return name; }
    };
};
```

```

        bool operator < (const Vertex &v2) const { return this->name <
v2.name; }
        bool operator == (const Vertex &v2) const {      return this-
>name == v2.name; } // needed to use find func
    };

    int num_of_vertexes;
    Edge ** adjacency_matrix;
    Vertex source;
    Vertex sink;
    vector <Vertex> vertexex;
    int num_of_edges;

    FlowNetwork() : num_of_vertexes(256) { // any ascii character can
be the name of a vertex
        for (int i = 0; i < num_of_vertexes; i++) {
            vertexex.push_back(Vertex(i, 0));
        } // fill vertexes list with vertexes from a to z with no
parent(prev)

        try {
            adjacency_matrix = new Edge* [num_of_vertexes];
            for (int i = 0; i < num_of_vertexes; i++){
                adjacency_matrix[i] = new Edge [num_of_vertexes];
                fill(adjacency_matrix[i], adjacency_matrix[i] +
num_of_vertexes, Edge(0, 0, 0));
            }

        }
        catch (...) {
            if (adjacency_matrix) {
                for (int i = 0; i < num_of_vertexes; i++)
                    if (adjacency_matrix[i])
                        delete [] adjacency_matrix[i];
                delete [] adjacency_matrix;
                num_of_vertexes = 0;
                throw;
            }
        }
    }

    void input_flow_network() {
        ver_type tmp_source, tmp_sink;
        cin >> num_of_edges;
        cin >> tmp_source;
        cin >> tmp_sink;
        source = Vertex(tmp_source);
        sink = Vertex(tmp_sink);

        for (int i = 0; i < num_of_edges; i++){
            ver_type tmp_first, tmp_last;

```



```

        flow_type tmp_capacity;
        cin >> tmp_first >> tmp_last >> tmp_capacity;
        Edge e(tmp_first, tmp_last, tmp_capacity);
        adjacency_matrix[e.first_index()][e.last_index()] = e;
    }
}

void print_actual_flow_value() {
    if (adjacency_matrix)
        for (int i = 0; i < num_of_vertexes; i++)
            if (adjacency_matrix[i])
                for (int j = 0; j < num_of_vertexes; j++)
                    if (!adjacency_matrix[i][j].empty())
                        adjacency_matrix[i][j].print();
}

~FlowNetwork() {
    if (adjacency_matrix) {
        for (int i = 0; i < num_of_vertexes; i++)
            if (adjacency_matrix[i])
                delete [] adjacency_matrix[i];
        delete [] adjacency_matrix;
    }
    num_of_vertexes = 0;
}

string BFS(Vertex start, Vertex target) {
    clear_visits();
                                                                    // set
no parenst and no visits
    queue <Vertex> ver_queue;
    ver_queue.push(start);
                                                                    // 0 means no parent
    bool tag = true;
    while (!ver_queue.empty() && tag){
        Vertex curr_ver = ver_queue.front();
        ver_queue.pop();

        for (int i = 0; i < num_of_vertexes; i++) {
                                                                    // for each
vertex
            Edge dir_edge =
adjacency_matrix[curr_ver.index()][i];
            // curr_edge
            Edge rev_edge =
adjacency_matrix[i][curr_ver.index()];

            //calculate max flow through the edge:
            flow_type max_flow = 0;
            if (!dir_edge.empty())
                max_flow += dir_edge.max_flow();

```

```

        if (!rev_edge.empty())
            max_flow += rev_edge.flow;

        if (max_flow > 0) {
            Vertex tmp_next;

            if (!dir_edge.empty())
                // if the flow goes through the direct edge or both edges
                tmp_next = Vertex(dir_edge.last);
            else
                // if the flow goes through the reverse edge
                tmp_next = Vertex(rev_edge.first);

            auto next_ver = find(vertexex.begin(),
vertexex.end(), Vertex(tmp_next));
            if (!next_ver->visited && max_flow != 0) {

                next_ver->visited = true;
                next_ver->prev = curr_ver.name;
                ver_queue.push(*next_ver);
                // push the
next_ver to queue with prev = curr
                if (*next_ver == target) {
                    // if a way
have been found

                    tag = false;
                    break;
                }
            }
        }
        //
leave both cycles
    }
}
}
}

if (ver_queue.empty()) // no path case
    return string("");
// restore the path:
auto curr_ver = find(vertexex.begin(), vertexex.end(),
Vertex(target));
string path("");
path = curr_ver->name + path;;
while (curr_ver != find(vertexex.begin(), vertexex.end(),
Vertex(start))) {
    curr_ver = find(vertexex.begin(), vertexex.end(),
Vertex(curr_ver->prev));
    path = curr_ver->name + path;
}

return path;
}

```

```

int FFA() {
    zeroize_flows();

    source.visited = true;
    flow_type common_flow = 0;

    while (true) {
        string path = BFS(source, sink);
        auto flow_val = path_max_flow(path);
        common_flow += flow_val;
        add_flow(path, flow_val);
        path = BFS(source, sink);
        if (path == "") break;
    }
    return common_flow;
}

private:
void add_edge(const Edge &e) {
    adjacency_matrix[e.first_index()][e.last_index()] = e;
}

Edge input_edge() {
    ver_type tmp_first, tmp_last;
    flow_type tmp_capacity;
    cin >> tmp_first >> tmp_last >> tmp_capacity;
    return Edge(tmp_first, tmp_last, (flow_type)tmp_capacity);
}

void clear_visits() { // for BFS
    for (int i = 0; i < num_of_vertexes; i++) {
        vertexex[i].visited = false;
        vertexex[i].prev = 0;
    }
} // delete parents and visits

void zeroize_flows() {
    for (int i = 0; i < num_of_vertexes; i++)
        for (int j = 0; j < num_of_vertexes; j++)
            if (!adjacency_matrix[i][j].empty())
                adjacency_matrix[i][j].flow = 0;
} // set all the flows zero

flow_type edge_max_flow(const Edge &e) const {
    return edge_max_flow(Edge(e.first, e.last, 0));
}

flow_type edge_max_flow(ver_type first, ver_type last) const {
    Edge dir_edge =
adjacency_matrix[Vertex(first).index()][Vertex(last).index()];

```

```

        Edge rev_edge =
adjacency_matrix[Vertex(last).index()][Vertex(first).index()];

        flow_type max_flow = 0;
        if (!dir_edge.empty())
            max_flow += dir_edge.max_flow();
        if (!rev_edge.empty())
            max_flow += rev_edge.flow;

        return max_flow;
    }

    flow_type path_max_flow(string path) {
        flow_type max_flow = edge_max_flow(path[0], path[1]);
        for (int i = 0; i < path.length() - 1; i++) {
            flow_type curr_flow = edge_max_flow(path[i], path[i +
1]);

            if (curr_flow < max_flow)
                max_flow = curr_flow;
        }
        return max_flow;
    }

    void add_flow(string path, flow_type flow_val) {
        for (int i = 0; i < path.length() - 1; i++) {           // for
each vertex in the path
            Edge* dir_edge =
&adjacency_matrix[Vertex(path[i]).index()][Vertex(path[i + 1]).index()];
            Edge* rev_edge = &adjacency_matrix[Vertex(path[i +
1]).index()][Vertex(path[i]).index()];
            flow_type max_flow = edge_max_flow(path[i], path[i +
1]);

            flow_type tmp_flow = flow_val;

            if (!rev_edge->empty())
                if (rev_edge->flow <= tmp_flow) {
                    tmp_flow -= rev_edge->flow;
                    rev_edge->flow = 0;
                } // first part of a flow: through the reverse edge
            if (!dir_edge->empty() && tmp_flow != 0)
                if (dir_edge->max_flow() >= tmp_flow) {
                    dir_edge->flow += tmp_flow;
                    tmp_flow = 0;
                } // second part of a flow: through the direct edge
            if (tmp_flow != 0) // as a precaution
                cout << "ERROR: sum.(rev + dir) capacity >
flow_val" << endl;
        }
    }

};

```

```
int main()
{
    FlowNetwork <char, int> g;
    g.input_flow_network();
    cout << g.FFA() << endl;
    g.print_actual_flow_value();

    return 0;
}
```