МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э.Баумана (национальный исследовательский университет)»

(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФН

КАФЕДРА

«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление подготовки: Математика и компьютерные науки

Дисциплина: Основы метода конечных элементов

Домашнее задание №1

Группа ФН11-72

Вариант № 6

Студент: Важенцев А.А.

Преподаватель: Юрин Ю.В.

Оценка:

Москва 2019

1) Рассматривается осесимметрический вариант стационарной краевой задачи теплопроводности с граничными условиями первого и третьего рода:

Пусть Ω - липшицева область в $\mathbb{R}^3$, $O_{\rho\phi z}$ - цилиндрическая система координат с ортами $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$, пусть $\partial\Omega = \Sigma_\Theta \cup \Sigma_q$, где Σ_Θ, Σ_q - открытые части $\partial\Omega$: $\mu^2(\Sigma_\Theta) > 0$, $\mu^2(\Sigma_q) > 0$. Пусть $f = \mathring{\rho} q_m \in C(\Omega)$, $\Theta_e \in C(\Sigma_\Theta)$, $q_e \in C(\Sigma_q)$,

$\underline{\lambda} = \lambda_{ij} e_i \otimes e_j$, $(\lambda_{ij})_{i=1..3}^{j=1..3} \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\underline{\lambda}^T = \underline{\lambda}$.

Пусть $\Theta \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{q} = \mathring{\rho} q_m, \forall\, \tau \in \Omega; \\ \vec{q} = -\underline{\lambda} \cdot \nabla \Theta, \forall\, \tau \in \overline{\Omega}; \\ [\vec{q}] \cdot \vec{n}\big|_{\Sigma_i} = 0, i = 1..m; \\ [\Theta]\big|_{\Sigma_i} = 0, i = 1..m; \\ \vec{q} \cdot \vec{n} + \alpha_t (\Theta - \Theta_\infty)\big|_{\Sigma_q} = q_e, \forall\, \tau \in \Sigma_q; \\ \Theta|_{\Sigma_\Theta} = \Theta_e, \forall\, \tau \in \Sigma_\Theta. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь $\alpha_T = const, \Theta_\infty = const$ - коэффициент теплообмена и температура окружающий среды, $[.]\big|_{\Sigma_i}$ - скачок функции через границу раздела $\Sigma_i, i = 1..m$.

Запишем исходную краевую задачу в явном виде в цилиндрической системе координат:

Пусть Ω - липшицева область в $\mathbb{R}^3$, $O_{\rho\phi z}$ - цилиндрическая система координат с ортами $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$, пусть $\partial\Omega = \Sigma_\Theta \cup \Sigma_q$, где Σ_Θ, Σ_q - открытые части $\partial\Omega$: $\mu^2(\Sigma_\Theta) > 0$, $\mu^2(\Sigma_q) > 0$. Пусть $f = \mathring{\rho} q_m \in C(\Omega)$, $\Theta_e \in C(\Sigma_\Theta)$, $q_e \in C(\Sigma_q)$,

$\underline{\lambda} = \lambda_{ij} e_i \otimes e_j$, $(\lambda_{ij})_{i=1..3}^{j=1..3} \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\underline{\lambda}^T = \underline{\lambda}$.

Пусть $\Theta \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho q_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = \mathring{\rho} q_m, \forall\, \tau \in \Omega; \\ \vec{q} = -\underline{\lambda} \cdot \{ \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} \cdot \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Theta}{\partial \phi} \cdot \vec{e}_\phi + \frac{\partial \Theta}{\partial z} \cdot \vec{e}_z \}, \forall\, \tau \in \overline{\Omega}; \\ [\vec{q}] \cdot \vec{n}\big|_{\Sigma_i} = 0, i = 1..m; \\ [\Theta]\big|_{\Sigma_i} = 0, i = 1..m; \\ \vec{q} \cdot \vec{n} + \alpha_t (\Theta - \Theta_\infty)\big|_{\Sigma_q} = q_e, \forall\, \tau \in \Sigma_q; \\ \Theta|_{\Sigma_\Theta} = \Theta_e, \forall\, \tau \in \Sigma_\Theta. \end{cases} \qquad (1.1)$$

Рассматриваемое тело Ω - тело вращения, являющееся ортотропным в системе координат $O_{\rho\phi z}$.

2) Получим вариационное уравнение. Умножим 1-е уравнение системы (1) на $v \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$: $v|_{\Sigma_\Theta} = 0$ и проинтегрируем по Ω . Получаем:

$$\int_\Omega v \nabla \cdot \vec{q}\, d\tau = \int_\Omega v f\, d\tau \tag{2}$$

Тогда по теореме Грина:

$\int_\Omega v \nabla \cdot \vec{q}\, d\tau = -\int_\Omega \vec{q} \cdot \nabla v\, d\tau + \int_{\partial\Omega} v (\vec{q} \cdot \vec{n})\, d\tau = \int_\Omega v f\, d\tau$, т. к. $v|_{\Sigma_\Theta} = 0$, то

$$-\int_\Omega \vec{q} \cdot \nabla v\, d\tau = -\int_{\Sigma_q} v (q_e - \alpha_T (\Theta - \Theta_\infty))\, d\tau + \int_\Omega v f\, d\tau \ .$$

В итоге получаем, используя 2-е уравнение системы (1):

$$\int_\Omega \nabla \Theta \cdot \underline{\lambda} \cdot \nabla v\, d\tau - \alpha_T \int_{\Sigma_q} v (\Theta - \Theta_\infty)\, d\tau = -\int_{\Sigma_q} v q_e\, d\tau + \int_\Omega v f\, d\tau \ ,$$

перегруппируем:

$$\int_\Omega \nabla \Theta \cdot \underline{\lambda} \cdot \nabla v\, d\tau - \alpha_T \int_{\Sigma_q} v \Theta\, d\tau = -\int_{\Sigma_q} v q_e\, d\tau + \int_\Omega v f\, d\tau - \alpha_T \int_{\Sigma_q} v \Theta_\infty\, d\tau \tag{3}$$

Введем обозначения:

$$B(\Theta, v) = \int_\Omega \nabla \Theta \cdot \underline{\lambda} \cdot \nabla v\, d\tau - \alpha_T \int_{\Sigma_q} v \Theta\, d\tau \tag{4}$$

$$f(v) = -\int_{\Sigma_q} v q_e\, d\tau + \int_\Omega v f\, d\tau - \alpha_T \int_{\Sigma_q} v \Theta_\infty\, d\tau \tag{5}$$

Перейдем к цилиндрическим координатам, используя формулы перехода в цилиндрическую с.к. в интеграле, а также то, что функция $F(\rho, \phi, z)$ не зависит от ϕ :

$$\int_\Omega F(\rho, \phi, z)\, d\tau = 2\pi \int_{\widetilde{\Omega}} \rho F(\rho, z)\, d\tau \tag{6}$$

$$\int_{\partial\Omega} F(\rho, \phi, z)\, d\tau = 2\pi \int_{\partial\widetilde{\Omega}} \rho F(\rho, z)\, d\tau \ , \tag{7}$$

где $\widetilde{\Omega}$ - липшицева область в $\mathbb{R}^2$, полученная, как сечение Ω при $\phi = const$,

$\partial\widetilde{\Omega} = \widetilde{\Sigma}_\Theta \cup \widetilde{\Sigma}_q$, где $\widetilde{\Sigma}_\Theta, \widetilde{\Sigma}_q$ - открытые части $\partial\widetilde{\Omega}$.

Используя формулы (6),(7) для (4),(5) , т.к. задача осесимметрическая, получаем:

$$B(\Theta, v) = 2\pi \left(\int_{\widetilde{\Omega}} \nabla \Theta \cdot \underline{\lambda} \cdot \nabla v \rho\, d\tau - \alpha_T \int_{\widetilde{\Sigma}_q} v \Theta \rho\, d\tau \right) \ , \tag{8}$$

$$f(v) = 2\pi \left(-\int_{\widetilde{\Sigma}_q} v q_e \rho\, d\tau + \int_{\widetilde{\Omega}} v f \rho\, d\tau - \alpha_T \int_{\widetilde{\Sigma}_q} v \Theta_\infty \rho\, d\tau \right) \ , \tag{9}$$

где $(\lambda_{ij})_{i=1..2}^{j=1..2} \in C^1(\widetilde{\Omega}) \cap C(\overline{\widetilde{\Omega}})$,

$f \in C(\widetilde{\Omega})$, $\Theta_e \in C(\widetilde{\Sigma}_\Theta)$, $q_e \in C(\widetilde{\Sigma}_q)$, $(\lambda_{ij})_{i=1..2}^{j=1..2} \in C^1(\widetilde{\Omega}) \cap C(\overline{\widetilde{\Omega}})$,

$\dfrac{\partial \Theta}{\partial \phi} = 0$, т. к. Θ не зависит от ϕ .

Тогда получаем вариационное уравнение, сократив правую и левую части на 2π :

$$B(\Theta, v) = f(v) \quad . \tag{10}$$

3) Пусть теперь - $\tilde{\Omega}$ липшицева область в $\mathbb{R}^2$, полученная, как сечение Ω при $\phi = const$, пусть $\partial\tilde{\Omega} = \tilde{\Sigma}_\Theta \cup \tilde{\Sigma}_q$, где $\tilde{\Sigma}_\Theta, \tilde{\Sigma}_q$ - открытые части $\partial\tilde{\Omega}$.

Функции f, q_e, Θ_e не зависят от ϕ , тогда в новой области имеем: $f \in C(\tilde{\Omega})$, $\Theta_e \in C(\tilde{\Sigma}_\Theta)$, $q_e \in C(\tilde{\Sigma}_q)$, $(\lambda_{ij})_{i=1..2}^{j=1..2} \in C^1(\tilde{\Omega}) \cap C(\overline{\tilde{\Omega}})$.

Отталкиваясь от вариационного уравнения можно ослабить условия на $f, q_e, \Theta_e, \underline{\lambda}$, а именно, пусть $f \in L_2(\tilde{\Omega}), q_e \in L_2(\tilde{\Sigma}_q), \lambda_{ij}(\tau)$ - кусочно-непрерывная в $\tilde{\Omega}$ и $|\lambda_{ij}| \le M, M > 0, M = const$,

$v \cdot \lambda \cdot v \ge \gamma v \cdot v, \forall v \in \mathbb{R}^2, \gamma > 0, \gamma = const$, пусть $\exists \Theta_e \in L_2(\tilde{\Sigma}_\Theta)$ и $\exists \omega \in H^1(\tilde{\Omega}) : Tr_{\tilde{\Sigma}_\Theta} \omega = \Theta_e$;

Тогда слабое решение задачи — функция $u \in H^1(\tilde{\Omega})$:

$$\begin{cases} B(u, v) = f(v) \\ u - \omega \in \tilde{V}, \forall v \in \tilde{V} \end{cases} , \tag{11}$$

где $\tilde{V} = \{ v \in H^1(\tilde{\Omega}) : Tr_{\tilde{\Sigma}_\Theta} v = \Theta_e \}$.

4) Пусть Th - триангуляция на основе симплексных КЭ в $\mathbb{R}^2$, $X_h \in H^1(\tilde{\Omega}), \omega_h \in X_h$ тогда дискретная задача имеет вид:

$$\begin{cases} B(u_h, v_h) = f(v_h), \forall v_h \in \tilde{V}_h = \{ v_h \in X_h : v_h|_{\tilde{\Sigma}_\Theta} = 0 \} \\ \qquad u_h - \omega_h \in \tilde{V}_h \end{cases} . \tag{12}$$

5) Теперь выведем глобальную СЛАУ:

$$B(u_h, v_h) = \int_{\tilde{\Omega}} \nabla u_h \cdot \lambda \cdot \nabla v_h \rho d\tau - \alpha_T \int_{\partial\tilde{\Omega}} v_h u_h \rho d\tau = \int_{\tilde{\Omega}} (D u_h)^T \cdot \lambda \cdot (D v_h) \rho d\tau - \alpha_T \int_{\partial\tilde{\Omega}} v_h u_h \rho d\tau \quad , \tag{13}$$

используя $v_h|_K = (\Pi_h \circ v_h)|_K = \phi^T T_k(v_h)$ и $(D v_h)|_K = \underbrace{(D\phi^T)}_{B_k} T_k(v_h) = B_k T_k(v_h)$, получим:

$$B(u_h, v_h) = \sum_{K \in Th} \{ \int_K (D u_h)^T \cdot \lambda \cdot (D v_h) \rho d\tau - \alpha_T \int_{\partial K \cap \tilde{\Sigma}_q} v_h u_h \rho d\tau \} =$$

$$= \sum_{K \in Th} T_k^T(v_h) \{ \int_K B_k^T \cdot \lambda \cdot B_k \rho d\tau - \alpha_T \int_{\partial K \cap \tilde{\Sigma}_q} \phi^T \phi \rho d\tau \} T_k(u_h) \quad , \tag{14}$$

$$f(v_h) = \sum_{K \in Th} T_k^T(v_h) \{ \int_K \phi f \rho d\tau - \int_{\partial K \cap \tilde{\Sigma}_q} \phi q_e \rho d\tau - \alpha_T \int_{\tilde{\Sigma}_q} \phi \Theta_\infty \rho d\tau \} \quad . \tag{15}$$

Введем обозначения:

$$G_k=\int_K B_k^T\cdot\lambda\cdot B_k\rho d\tau-\alpha_T\int_{\partial K\cap\widetilde{\Sigma}_q}\phi^T\phi\rho d\tau \quad , \tag{16}$$

$$f_k=\int_K \phi f\rho d\tau-\int_{\partial K\cap\widetilde{\Sigma}_q}\phi q_e\rho d\tau-\alpha_T\int_{\widetilde{\Sigma}_q}\phi\Theta_\infty\rho d\tau \quad . \tag{17}$$

Получаем эквивалентную задачу — найти $u_h\in X_h$:

$$\begin{cases}\sum_{K\in Th}T_k^T(v_h)\{G_kT_k(u_h)-f_k\}=0,\forall v_h\in V_h\\ u_h-\omega_h\in V_h\end{cases} \tag{18}$$

Т.к $\forall v_h\in X_h, v_h=\sum_{i=1}^{|\Sigma_h|}F_i(v_h)h_i$ => (18) будет выполнятся <==> будет выполнятся для $v_h=h_i, i=1..|\Sigma_h|: a_i\notin Nd(Th)\cap\widetilde{\Sigma}_\Theta$, тогда $\forall K\in Th$:

$$T_k(h_i)=\begin{cases}e_{l(K,i)}, K\in D_i\\ 0, K\notin D_i\end{cases} \quad ,$$

где $e_j=\delta_{ij},\forall j=1..|\Sigma_h|$,

$D_i=\{K\in Th: F_i\in\Sigma_K\}$, $F_i\in\Sigma_h$.

Т.к. $u_h,\omega_h\in V_h$, то $u_h-w_h=\sum_{i=1}^{|\Sigma_h|}F_i(u_h-w_h)h_i=\underbrace{\sum_{i=1..|\Sigma_h|}F_i(u_h-w_h)h_i}_{a_i\in Nd(Th)\cap\Sigma_\Theta}+\underbrace{\sum_{i=1..|\Sigma_h|}F_i(u_h-w_h)h_i}_{a_i\notin Nd(Th)\cap\Sigma_\Theta}$ => $u_h-\omega_h\in V_h$ <=> $F_i(u_h)=F_i(\omega_h),\forall i=1..|\Sigma_h|, a_i\in Nd(Th)\cap\widetilde{\Sigma}_\Theta$ => дискретная задача эквивалентна:

$$\begin{cases}\sum_{K\in Th}e_{l(K,i)}^T\{G_kT_k(u_h)-f_k\}=0,\forall i\in\{1..|\Sigma_h|\}, a_i\notin Nd(Th)\cap\widetilde{\Sigma}_\Theta\\ F_i(u_h)=F_i(\omega_h),\forall i\in\{1..|\Sigma_h|\}, a_i\in Nd(Th)\cap\widetilde{\Sigma}_\Theta\end{cases} \quad . \tag{19}$$

(19) — глобальная СЛАУ МКЭ для данной задачи,

где G_k - локальная матрица жесткости КЭ,

f_k - локальный вектор правой части.

6) Вычислим все интегралы, входящие в локальную СЛАУ для данной задачи, заменяя в формулах (16), (17) функции q_e,Θ_e,f на конечно-элементные аппроксимации q_{eh},Θ_{eh},f_h , тогда:

$$q_{eh}|_K=(\Pi_h\circ q_{eh})|_K=\phi^T T_k(q_{eh}) \quad , \tag{20}$$

$$f_h|_K=(\Pi_h\circ f_h)|_K=\phi^T T_k(f_h) \quad , \tag{21}$$

$$\Theta_{eh}|_K=(\Pi_h\circ\Theta_{eh})|_K=\phi^T T_k(\Theta_{eh}) \quad . \tag{22}$$

Тогда подставляем формулы (20),(21),(22) в (16), (17) , получаем:

$$G_k=\int_K B_k^T\cdot\lambda\cdot B_k\rho d\tau-\alpha_T\int_{\partial K\cap\widetilde{\Sigma}_q}\phi^T\phi\rho d\tau\;; \qquad (23)$$

$$f_k=\int_K \phi f\rho d\tau-\int_{\partial K\cap\widetilde{\Sigma}_q}\phi q_e\rho d\tau-\alpha_T\Theta_\infty\int_{\partial K\cap\widetilde{\Sigma}_q}\phi\rho d\tau=$$

$$=T_k(f_h)\int_K\phi^T\phi\rho d\tau-T_k(q_{eh})\int_{\partial K\cap\widetilde{\Sigma}_q}\phi^T\phi\rho d\tau-\alpha_T\Theta_\infty\int_{\partial K\cap\widetilde{\Sigma}_q}\phi\rho d\tau\;. \qquad (24)$$

Пусть $\phi^T=\begin{pmatrix}L_1\\L_2\\L_3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\rho}\\ \frac{d}{dz}\end{pmatrix}$. Выразим ρ через $L-$ координаты КЭ: $\rho=r_1L_1+r_2L_2+r_3L_3$,

где r_i - расстояние от оси симметрии до узла $a_i, i=1..3$;

$\bar{r}=\frac{(r_1+r_2+r_3)}{3}$ - расстояние от оси симметрии до центра КЭ.

6.1) Вычислим первый интеграл в G_k : $\int_K B_k^T\cdot\lambda\cdot B_k\rho d\tau$.

$B_k^T\cdot\lambda\cdot B_k$ не зависит от ϕ, z поэтому вынесем за знак интеграла и воспользуемся переходом к единичному аффинно-эквивалентному конечному элементу. Для симплексных КЭ это позволяет использовать следующую формулу:

$$\int_\Omega f(\tau)=|detB|\int_0^1 dL_1\int_0^{1-L_1}dL_2\ldots\int_0^{1-L_1-..-L_{n-1}}f(L_1\ldots L_n)dL_n\;, \qquad (25)$$

Для симплексного КЭ порядка $m=1$, в $\mathbb{R}^2$ с вершинами $x_{1,}x_{2,}x_3$ выпишем якобиан:

$$B=\begin{pmatrix}x_1^1-x_3^1 & x_2^1-x_3^1\\ x_1^2-x_3^2 & x_2^2-x_3^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1-r_3 & r_2-r_3\\ z_1-z_3 & z_2-z_3\end{pmatrix}\text{, тогда}\quad |detB|=\left|\begin{vmatrix}r_1-r_3 & r_2-r_3\\ z_1-z_3 & z_2-z_3\end{vmatrix}\right|\;.$$

где r_i - расстояние от оси симметрии до узла $a_i, i=1..3$,

z_i - расстояние от оси z до узла $a_i, i=1..3$;

Получаем

$$\int_K B_k^T\cdot\lambda\cdot B_k\rho d\tau=B_k^T\cdot\lambda\cdot B_k\int_K\rho d\tau\;,$$

$$\int_K\rho d\tau=|detB|\int_0^1 dL_1\int_0^{1-L_1}dL_2\int_0^{1-L_1-L_2}(r_1L_1+r_2L_2+r_3L_3)dL_3=|detB|\frac{1}{6}(r_1+r_2+r_3)\;.$$

6.2) Вычислим второй интеграл в G_k : $\alpha_T\int_{\partial K\cap\Sigma_q}\phi^T\phi\rho d\tau$, считаем по $\partial K=F_1^K\cup F_2^K\cup F_3^K$.

Для интеграла по $\partial K=F_1^K\cup F_2^K\cup F_3^K$, якобиан в формуле (25) является длиной ребра КЭ, т. е. :

$$\int_{F_i^K} f(\tau) d\tau = l_{jk} \int_0^1 f(L_1 \ldots L_n)\Big|_{\substack{L_i=0 \\ L_k=1-L_j}} dL_j \quad ,$$

где $l_{jk} = |x_k - x_j|$ - длина ребра КЭ.

Для F_1^K :

$$\int_{F_1^K} \phi^T \phi \rho d\tau = l_{23} \int_0^1 \begin{pmatrix} \rho L_1^2 & \rho L_1 L_2 & \rho L_1 L_3 \\ \rho L_1 L_2 & \rho L_2^2 & \rho L_2 L_3 \\ \rho L_1 L_3 & \rho L_2 L_3 & \rho L_3^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{\rho=r_1 L_1+r_2 L_2+r_3 L_3 \\ L_1=0 \\ L_3=1-L_2}} dL_2 = l_{23} \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho L_2^2 & \rho L_2(1-L_2) \\ 0 & \rho L_2(1-L_2) & \rho(1-L_2)^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{\rho=r_1 L_1+r_2 L_2+r_3 L_3} dL_2 =$$

$$= \frac{l_{23}}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3r_2+r_3 & r_2+r_3 \\ 0 & r_2+r_3 & r_2+3r_3 \end{pmatrix} \quad ;$$

Для F_2^K :

$$\int_{F_2^K} \phi^T \phi \rho d\tau = l_{13} \int_0^1 \begin{pmatrix} \rho L_1^2 & \rho L_1 L_2 & \rho L_1 L_3 \\ \rho L_1 L_2 & \rho L_2^2 & \rho L_2 L_3 \\ \rho L_1 L_3 & \rho L_2 L_3 & \rho L_3^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{\rho=r_1 L_1+r_2 L_2+r_3 L_3 \\ L_2=0 \\ L_1=1-L_3}} dL_3 = l_{13} \int_0^1 \begin{pmatrix} \rho(1-L_3)^2 & 0 & \rho L_3(1-L_3) \\ 0 & 0 & 0 \\ \rho L_3(1-L_3) & 0 & \rho L_3^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{\rho=r_1 L_1+r_2 L_2+r_3 L_3} dL_3 =$$

$$= \frac{l_{13}}{12} \begin{pmatrix} 3r_1+r_3 & 0 & r_1+r_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_1+r_3 & 0 & r_1+3r_3 \end{pmatrix} \quad ;$$

Для F_3^K :

$$\int_{F_3^K} \phi^T \phi \rho d\tau = l_{12} \int_0^1 \begin{pmatrix} \rho L_1^2 & \rho L_1 L_2 & \rho L_1 L_3 \\ \rho L_1 L_2 & \rho L_2^2 & \rho L_2 L_3 \\ \rho L_1 L_3 & \rho L_2 L_3 & \rho L_3^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{\rho=r_1 L_1+r_2 L_2+r_3 L_3 \\ L_3=0 \\ L_2=1-L_1}} dL_1 = l_{12} \int_0^1 \begin{pmatrix} \rho L_1^2 & \rho L_1(1-L_1) & 0 \\ \rho L_1(1-L_1) & \rho(1-L_1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{\rho=r_1 L_1+r_2 L_2+r_3 L_3} dL_1 =$$

$$\int_{F_3^K} \phi^T \phi \rho d\tau = \frac{l_{12}}{12} \begin{pmatrix} 3r_1+r_2 & r_1+r_2 & 0 \\ r_1+r_2 & r_1+3r_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

6.3) Вычислим первый интеграл в f_k : $T_k(f_h) \int_K \phi^T \phi \rho d\tau$.

$$\int_K \phi^T \phi \rho d\tau = |detB| \int_0^1 dL_1 \int_0^{1-L_1} \begin{pmatrix} \rho L_1^2 & \rho L_1 L_2 & \rho L_1 L_3 \\ \rho L_1 L_2 & \rho L_2^2 & \rho L_2 L_3 \\ \rho L_1 L_3 & \rho L_2 L_3 & \rho L_3^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{\rho=r_1 L_1+r_2 L_2+r_3 L_3 \\ L_3=1-L_1-L_2}} dL_2 =$$

$$=|detB|\frac{1}{60}\begin{pmatrix} 3r_1+r_2+r_3 & r_1+r_2+\frac{1}{2}r_3 & r_1+\frac{1}{2}r_2+r_3 \\ r_1+r_2+\frac{1}{2}r_3 & r_1+3r_2+r_3 & \frac{1}{2}r_1+r_2+r_3 \\ r_1+\frac{1}{2}r_2+r_3 & \frac{1}{2}r_1+r_2+r_3 & r_1+r_2+3r_3 \end{pmatrix} .$$

6.4) Вычислим второй интеграл в f_k : $T_k(q_{eh})\int\limits_{\partial K\cap\tilde{\Sigma}_q}\phi^T\phi\rho d\tau$.

Данный интеграл вычислен в пункте (6.2).

6.5) Вычислим третий интеграл в f_k : $\alpha_T\Theta_\infty\int\limits_{\partial K\cap\tilde{\Sigma}_q}\phi\rho d\tau$.

Данный интеграл вычисляем как в пункте (6.2) :

Для F_1^K : $\int\limits_{F_1^K}\phi\rho d\tau=l_{23}\int\limits_0^1(\rho L_1 \quad \rho L_2 \quad \rho L_3)\Big|_{\substack{\rho=r_1L_1+r_2L_2+r_3L_3\\ L_1=0\\ L_3=1-L_2}} dL_2=\frac{l_{23}}{6}(0 \quad 2r_2+r_3 \quad r_2+2r_3)$;

Для F_2^K : $\int\limits_{F_2^K}\phi\rho d\tau=l_{13}\int\limits_0^1(\rho L_1 \quad \rho L_2 \quad \rho L_3)\Big|_{\substack{\rho=r_1L_1+r_2L_2+r_3L_3\\ L_2=0\\ L_1=1-L_3}} dL_3=\frac{l_{13}}{6}(2r_1+r_3 \quad 0 \quad r_1+2r_3)$;

Для F_3^K : $\int\limits_{F_3^K}\phi\rho d\tau=l_{12}\int\limits_0^1(\rho L_1 \quad \rho L_2 \quad \rho L_3)\Big|_{\substack{\rho=r_1L_1+r_2L_2+r_3L_3\\ L_3=0\\ L_2=1-L_1}} dL_1=\frac{l_{12}}{6}(2r_1+r_2 \quad r_1+2r_2 \quad 0)$;