§11 КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЯ 2-ГО ПОРЯДКА

Знак подкоренного выражения определяет тип уравнения

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F = 0. \tag{1}$$

Это уравнение мы будем называть в точке M уравнением

- гиперболического типа, если в точке M $\frac{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}{a_{12}^2} > 0$,
- эллиптического типа, если в точке M $\frac{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}{a_{12}^2} < 0$,
- параболического типа, если в точке M $\frac{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}{a_{12}^2} = 0$[1].

Нетрудно убедиться в правильности соотношения

$$\tilde{a}_{12}^2 - \tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})D^2, \quad D = \xi_x\eta_y - \eta_y\xi_y.$$

из которого следует инвариантность типа уравнения при преобразовании переменных, так как функциональный определитель (якоблан) D преобразования переменных отличен от нуля. В различных точках области определения уравнение может принадлежать различным типам.

Рассмотрим область G, во всех точках которой уравнение имеет один и тот же тип. Через каждую точку области G проходят две характеристики, причем для уравнений гиперболического типа характеристики действительны и различны, для уравнений эллиптического типа — комплексны и различны, а для уравнений параболического типа обе характеристики действительны и совпадают между собой.

Разберем каждый из этих случаев в отдельности.

1. Для уравнения гиперболического типа $\tilde{a}_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ и правые части уравнений (9) и (10) действительны и различны. Общие интегралы их $\varphi(x, y) = C$ и $\psi(x, y) = C$ определяют действительные семейства характеристик. Полагая

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \tag{11}$$

приводим уравнение (4) после деления на коэффициент при $u_{\xi\eta}$ к виду

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad \text{где } \Phi = -\frac{F}{2\tilde{a}_{12}}.$$

Это — так называемая каноническая форма уравнений гиперболического типа[2]. Часто пользуются второй канонической формой. Положим

$$\xi = \alpha + \beta, \quad \eta = \alpha - \beta,$$

т. е.

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2},$$

где α и β — новые переменные. Тогда

$$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), \quad u_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta), \quad u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}).$$

В результате уравнение (4) примет вид

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1 \quad (\Phi_1 = 4\Phi).$$

2. Для уравнений параболического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$, уравнения (9) и (10) совпадают, и мы получаем один общий интеграл уравнения (6): $\varphi(x, y) = \text{const}$. Положим в этом случае

$$\xi = \varphi(x, y) \quad \text{и} \quad \eta = \eta(x, y),$$

где $\eta(x, y)$ — любая функция, не зависимая от φ. При таком выборе переменных коэффициент

$$\tilde{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)^2 = 0,$$

так как $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$; отсюда следует, что

$$\tilde{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0.$$

После деления уравнения (4) на коэффициент при $u_{\eta\eta}$ получим каноническую форму для уравнения параболического типа

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \quad (\Phi = -\frac{F}{a_{22}}).$$

---

[1]Эта терминология заимствована из теории кривых 2-го порядка.

[2]Для того чтобы было возможно введение новых переменных ξ и η через функции φ и ψ, надо убедиться в независимости этих функций, достаточным условием чего является отличие от нуля соответствующего функционального определителя. Пусть функциональный определитель

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{vmatrix}$$

в некоторой точке M обращается в нуль. Тогда имеет место пропорциональность строк, т. е.

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{\psi_x}{\psi_y},$$

что, однако, невозможно, так как

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \quad \text{и} \quad \frac{\psi_x}{\psi_y} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \quad (a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0)$$

(при этом мы считаем $a_{11} \neq 0$, что не является ограничением общности). Тем самым независимость функций φ и ψ установлена.