Кафедра транспорта и хранения нефти и газа

Метод определения скорости при постоянном напоре в режиме смешанного трения

Артемьев Иван Алексеевич, студент группы ММТ53-21

Руководитель: Колчин Александр Владимирович, доц., канд. техн. наук

Уфа, 2021

Введение

Задача определения скорости при постоянном напоре в зоне смешанного трения на данный момент считается трансцендентной и решается методом подбора или графо-аналитически. В данной работе предлагается для нахождения решения предлагается использовать метод простой итерации.

Задачи данной работы:

- Получения уравнений вида $w = \varphi(w)$ для нахождения скорости;
- Определение начальных приближений w_0;
- Определение необходимого числа итераций для каждого случая и верхняя оценка их погрешностей.

Метод простой итерации в общем виде

Постановка задачи

Пусть есть функция $y = f(x)$.

Требуется найти корень этой функции: такой x при котором $f(x) = 0$.

Решение

Заменим исходное уравнение $f(x) = 0$ на эквивалентное $x = \varphi(x)$, и будем строить итерации по правилу $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Таким образом метод простой итерации - это одношаговый итерационный процесс. Для того, что бы начать данный процесс, необходимо знать начальное приближение x_0.

Метод простой итерации в контексте данной задачи

Исходные формулы

$$H_\tau = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{w^2}{2g}$$

$$\lambda = 0{,}11 \cdot \left(\frac{68}{Re} + \frac{k_э}{d}\right)^{0,25}$$

$$Re = \frac{w \cdot d}{\upsilon}$$

Вывод уравнения вида $f(w) = 0$

$$H_\tau = 0{,}11 \cdot \left(\frac{68 \cdot \upsilon}{w \cdot d} + \frac{k_э}{d}\right)^{0,25} \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{w^2}{2g}$$

$$\left(\frac{2 \cdot g \cdot d^{1,25} \cdot H_\tau}{0{,}11 \cdot L \cdot k_э{}^{0,25}}\right)^4 = \frac{68 \cdot \upsilon}{k_э} \cdot w^7 + w^8$$

$$w^8 + b \cdot w^7 - c = 0$$

$$b = \frac{68 \cdot \upsilon}{k_э}$$

Разделение на случаи

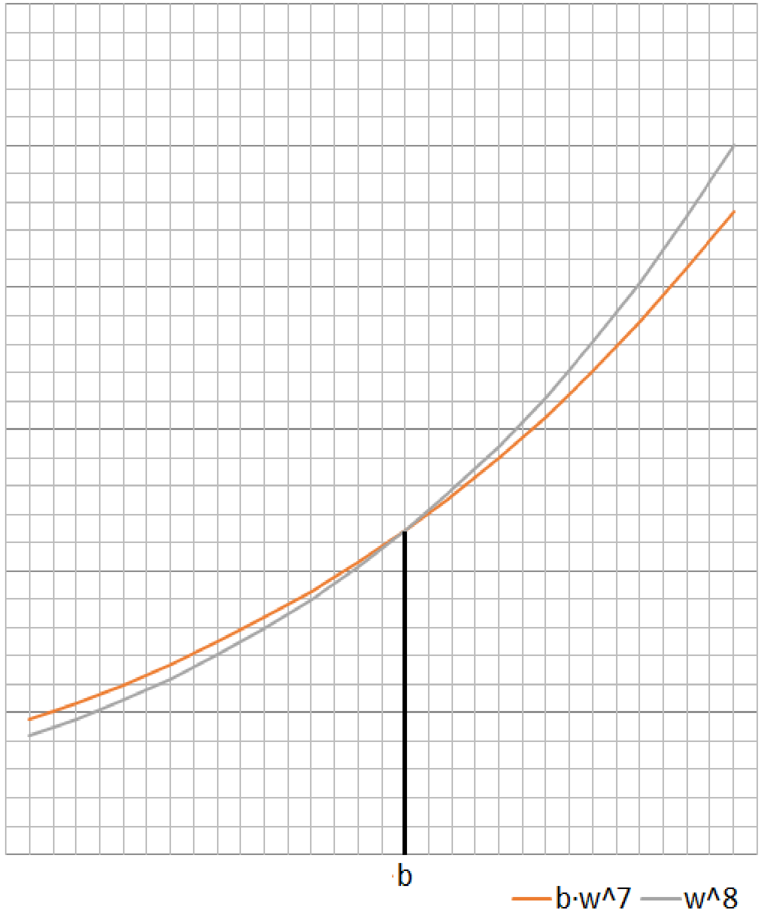
Заметим, что нам надо найти аргумент функции $g(w) = b \cdot w^7 + w^8$, при котором функция равна c.

Подставим вместо аргумента значение b и сравним обе части. Возможно 3 случая:

1) $c = 2 \cdot b^8$,

2) $c < 2 \cdot b^8$,

3) $c > 2 \cdot b^8$.



Рассмотрение второго случая
Вывод уравнения вида $w = \varphi(w)$

Во втором случае корень будем меньше b (w < b). Из чего следует вывод, что в данном случае $b \cdot w^7 < w^8$.

$$b \cdot w^7 + w^8 = c$$

$$b \cdot w^7 \cdot \left(1 + \frac{w}{b}\right) = c$$

$$w = \sqrt[\frac{1}{7}]{\frac{c}{b \cdot \left(1 + \frac{w}{b}\right)}}$$

$$w_{n+1} = \sqrt[\frac{1}{7}]{\frac{c}{b \cdot \left(1 + \frac{w_n}{b}\right)}}, \text{при } n \geq 1$$

Рассмотрение второго случая
Определение w_0

Так как w < b, то:

$$1 < \left(1 + \frac{w}{b}\right) < 2$$

А значит, что для первой итерации мы можем заменить данную скобку на какое-то число от 1 до 2. Формула нулевой итерации будут иметь виды:

$$w_0 = \sqrt[\frac{1}{7}]{\frac{c}{b \cdot k_1}}$$

Рассмотрение второго случая Определение k_1

Для подбора лучшего значения k_1 нам следует уточнить возможные значения скорости, для чего воспользуемся формулами граничных чисел Рейнольдса:

$$Re_I = 10\frac{d}{k_э} \Rightarrow w = 10\frac{\upsilon}{k_э}$$

$$Re_{II} = 500\frac{d}{k_э} \Rightarrow w = 500\frac{\upsilon}{k_э}$$

Заметим, что полученные формулы схожи с формулой b, а скорость в данном случае лежит в диапазоне:

$$10\frac{\upsilon}{k_э} \le w < 68\frac{\upsilon}{k_э}.$$

Или поделив все на b:

$$\frac{10}{68} \le \frac{w}{b} < 1$$

Рассмотрение второго случая
Определение k_1

Подберем k_1 из условия равенства абсолютных значений двух относительных погрешностей на границах данного решения

Левая граница (w/b = 10/68)

$$\gamma_1^{\text{слева}} = \frac{\sqrt[\frac{1}{7}]{\dfrac{c}{b\cdot\left(1+\dfrac{w}{b}\right)}} - \sqrt[\frac{1}{7}]{\dfrac{c}{b\cdot k_1}}}{\sqrt[\frac{1}{7}]{\dfrac{c}{b\cdot\left(1+\dfrac{w}{b}\right)}}}$$

$$\gamma_1^{\text{слева}} = 1 - \frac{\sqrt[\frac{1}{7}]{\dfrac{c}{b\cdot k_1}}}{\sqrt[\frac{1}{7}]{\dfrac{c\cdot 68}{b\cdot 78}}} = 1 - \sqrt[\frac{1}{7}]{\frac{78}{68\cdot k_1}}$$

Правая граница (w/b = 1)

$$\gamma_1^{\text{справа}} = \frac{\sqrt[\frac{1}{7}]{\dfrac{c}{b\cdot\left(1+\dfrac{w}{b}\right)}} - \sqrt[\frac{1}{7}]{\dfrac{c}{b\cdot k_1}}}{\sqrt[\frac{1}{7}]{\dfrac{c}{b\cdot\left(1+\dfrac{w}{b}\right)}}}$$

$$\gamma_1^{\text{справа}} = 1 - \frac{\sqrt[\frac{1}{7}]{\dfrac{c}{b\cdot k_1}}}{\sqrt[\frac{1}{7}]{\dfrac{c}{b\cdot 2}}} = 1 - \sqrt[\frac{1}{7}]{\frac{2}{k_1}}$$

Рассмотрение второго случая
Определение k_1

Так как слева стороны будет заниженное значение, а справа завышенное приравняем полученные формулы, домножив одну из сторон на -1, и найдем k_1:

$$-\gamma_1^{\text{слева}} = \gamma_1^{\text{справа}}$$

$$\sqrt[\frac{1}{7}]{\frac{78}{68 \cdot k_1}} - 1 = 1 - \sqrt[\frac{1}{7}]{\frac{2}{k_1}}$$

$$\sqrt[\frac{1}{7}]{\frac{1}{k_1}} \left(\sqrt[\frac{1}{7}]{2} + \sqrt[\frac{1}{7}]{\frac{78}{68}} \right) = 2$$

$$k_1 = \left(\frac{2}{\left(\sqrt[\frac{1}{7}]{2} + \sqrt[\frac{1}{7}]{\frac{78}{68}} \right)} \right)^{-7} = 1{,}523$$

Рассмотрение третьего случая

В данном случае $b \cdot w^7 < w^8$.

$$w = \sqrt[\frac{1}{8}]{\frac{c}{\left(1 + \frac{b}{w}\right)}}$$

$$w_0 = \sqrt[\frac{1}{8}]{\frac{c}{k_2}}, \text{ где } k_2 = 1{,}515$$

$$w_{n+1} = \sqrt[\frac{1}{8}]{\frac{c}{\left(1 + \frac{b}{w_n}\right)}}, \text{при } n \geq 1$$

Рассмотрение третьего случая в качестве универсального

Так как нам известны точные границы скорости мы можем воспользоваться только одним случаем, для определения скорости изменив пределы скорости и подобрав другой коэффициент для определения скости при первой итерации.

$$w = \sqrt[\frac{1}{8}]{\frac{c}{\left(1 + \frac{b}{w}\right)}}, \text{при } 10\frac{\upsilon}{k_э} \leq w < 500\frac{\upsilon}{k_э} \text{ или } \frac{68}{500} \leq \frac{b}{w} \leq \frac{68}{10}$$

$$w_0 = \sqrt[\frac{1}{8}]{\frac{c}{k_3}}, \text{ где } k_3 = 3{,}154$$

$$w_{n+1} = \sqrt[\frac{1}{8}]{\frac{c}{\left(1 + \frac{b}{w_n}\right)}}, \text{при } n \geq 1$$

Заключение

В результате работы была получена таблица 1, по которой можно судить об эффективности данной методики, каждая последующая итерация уменьшала погрешность приблизительно на порядок. Также была выявлена возможность применения метода простой итерации без разделения на 2 случая с появлением необходимости в дополнительной итерации для достижения аналогичной точности.

Методики			Погрешность, %			
			1 итерация	2 итерация	3 итерация	4 итерация
С разделением на случаи	$c < 2 \cdot b^8$	$k_1 = 1{,}523$	-3,969	0,28	-0,02	-
	$c > 2 \cdot b^8$	$k_2 = 1{,}515$	3,535	0,223	0,014	-
Без разделения на случаи		$k_3 = 3{,}154$	12	-1,24	-0,14	0,015

Спасибо за внимание!

Кафедра транспорта и хранения нефти и газа

Разработка методики нахождения рабочей точки с применением метода простой итерации в системе трубопровод-насос

Артемьев Иван Алексеевич, студент группы ММТ53-21

Руководитель: Колчин Александр Владимирович, доц., канд. техн. наук

Уфа, 2021

Введение

Задача определения рабочей точки в системе трубопровод-насос на данный момент решается методом подбора или графо-аналитически . Разработка методики на основе метода простой итерации позволит находить рабочую точку аналитически без существенных затрат на время, а также уменьшить скорость работы программ, использующих метод бисекции

Задачи данной работы:

- Решение уравнений равенства потребного напора трубопровода и развиваемого напора магистральных насосов в зонах гидравлически гладких труб и смешанного трения;
- Реализация предложенного алгоритма и метод бисекции на языке Python;
- Сравнение полученной методики с методом деления отрезка пополам с точки зрения скорости работы программы.

Метод простой итерации в контексте данной задачи для зоны гладких труб

Исходные формулы

$$H_\tau = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{w^2}{2g}$$

$$\lambda = \frac{0{,}3164}{Re^{0{,}25}}$$

$$Re = \frac{w \cdot d}{\upsilon}$$

$$H = A - Bw^2$$

Вывод уравнения вида $f(w) = 0$

$$A - Bw^2 = 0{,}3164 \cdot \upsilon^{0{,}25} \cdot \frac{L}{d^{1{,}25}} \cdot \frac{w^{1{,}75}}{2g}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{0{,}3164 \cdot \upsilon^{0{,}25} \cdot L}{B \cdot d^{1{,}25}} \cdot w^{1{,}75} + w^2$$

$$t^8 + \beta \cdot t^7 - \gamma = 0$$

$$w = t^{0{,}25}$$

Решение в зоне гидравлически гладких труб

Задача сводиться аргумента функции $\mathrm{g}(t) = t^8 + \beta \cdot t^7$, при котором функция равна γ.

$$\beta \cdot t^7 \cdot \left(1 + \frac{t}{\beta}\right) = \gamma$$

$$t = \sqrt[\frac{1}{7}]{\frac{\gamma}{\beta \cdot \left(1 + \frac{t}{\beta}\right)}}$$

$$t_0 = \sqrt[\frac{1}{7}]{\frac{\gamma}{\beta \cdot k_1}}, k_1 = 1{,}426$$

$$t_{n+1} = \sqrt[\frac{1}{7}]{\frac{\gamma}{\beta \cdot \left(1 + \frac{t_n}{\beta}\right)}}, \text{при } n \geq 1$$

$$1 < \left(1 + \frac{t}{\beta}\right) < 2$$

$$t^8 \cdot \left(1 + \frac{\beta}{t}\right) = \gamma$$

$$t = \sqrt[\frac{1}{8}]{\frac{\gamma}{\left(1 + \frac{\beta}{t}\right)}}$$

$$t_0 = \sqrt[\frac{1}{8}]{\frac{\gamma}{k_2}}, \quad k_2 = 1{,}425$$

$$t_{n+1} = \sqrt[\frac{1}{8}]{\frac{\gamma}{\left(1 + \frac{\beta}{t_n}\right)}}, \text{при } n \geq 1$$

$$1 < \left(1 + \frac{\beta}{t}\right) < 2$$

```
if e2 < 0:
    б = 64 * v / d ** 2 * L / 2 / g
    D = б ** 2 - 4 * B * A
    w = (-б + D ** 0.5) / (2 * B)
    Ht = 64 * v / d ** 2 * L / (2 * g) * w
    if w > w2:···
else:
    б = 0.3164 * v ** 0.25 / d ** 1.25 * L / 2 / g
    β = б / B
    γ = A / B
    e3 = γ - 2 * β ** 8
    if e3 < 0:
        t1 = (γ / (β * K1)) ** (1 / 7)
        t2 = (γ / (β + t1)) ** (1 / 7)
        t3 = (γ / (β + t2)) ** (1 / 7)
        w = (γ / (β + t3)) ** (1 / 1.75)
        Ht = 0.3164 / (w * d / v) ** 0.25 * L / d * w ** 2 /(2 * g)
    else:
        t1 = (γ / K1) ** (1 / 8)
        t2 = (γ / (1 + β / t1)) ** (1 / 8)
        t3 = (γ / (1 + β / t2)) ** (1 / 8)
        w = (γ / (β + t3)) ** (1 / 1.75)
        Ht = 0.3164 / (w * d / v) ** 0.25 * L / d * w ** 2 /(2 * g)
```

Метод простой итерации в контексте данной задачи для зоны смешанного трения

Исходные формулы

$$H_\tau = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{w^2}{2g}$$

$$\lambda = 0{,}11 \cdot \left(\frac{68}{Re} + \frac{k_э}{d}\right)^{0,25}$$

$$Re = \frac{w \cdot d}{\upsilon}$$

$$H = A - Bw^2$$

Вывод уравнения вида $f(w) = 0$

$$A - Bw^2 = 0{,}11 \cdot \left(\frac{68 \cdot \upsilon}{w \cdot d} + \frac{k_э}{d}\right)^{0,25} \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{w^2}{2g}$$

$$w^2 \cdot \left(B + \frac{0{,}11 \cdot L \cdot k_э{}^{0,25}}{2 \cdot g \cdot d^{1,25}} \cdot (1 + \frac{b}{w})^{0,25}\right) = A$$

$$w^2 \cdot (B + C \cdot (1 + b/w))^{0,25} = A$$

$$b = \frac{68 \cdot \upsilon}{k_э}$$

Решение в зоне гидравлически гладких труб

Заметим, что в данном случае мы точно знаем границы скорости относительно b. В данном случае можно решить уравнения без разделения

$$w^2 \cdot (B + C \cdot (1 + b/w))^{0,25} = A$$

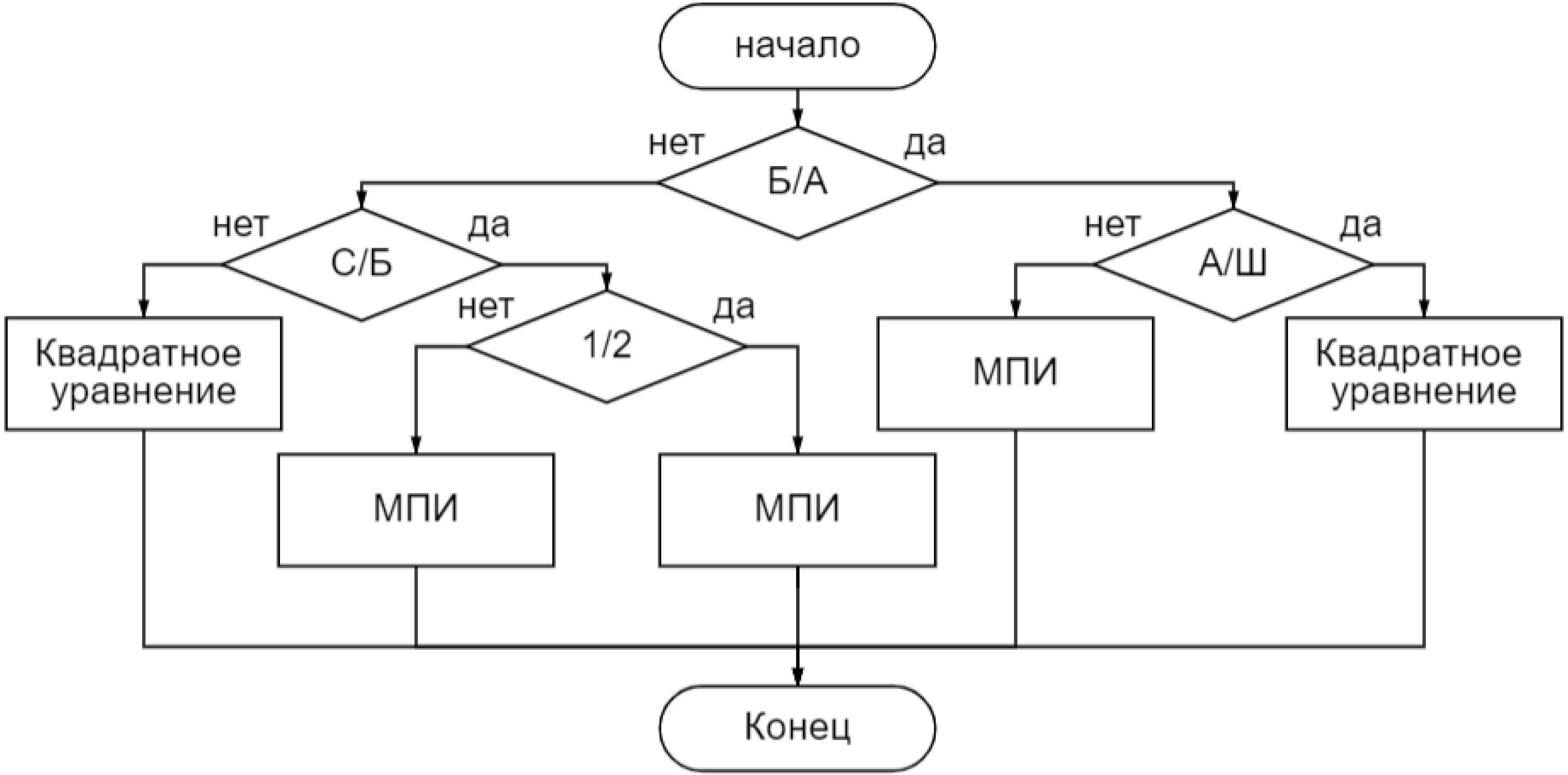
$$w = \sqrt{\frac{A}{(B + C \cdot (1 + b/w))^{0,25}}}$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{A}{(B + C \cdot K_2)^{0,25}}}, \text{ где } K_2 = 3,154$$

$$w_{n+1} = \sqrt{\frac{A}{(B + C \cdot (1 + b/w_n))^{0,25}}}, \text{ при } n \geq 1$$

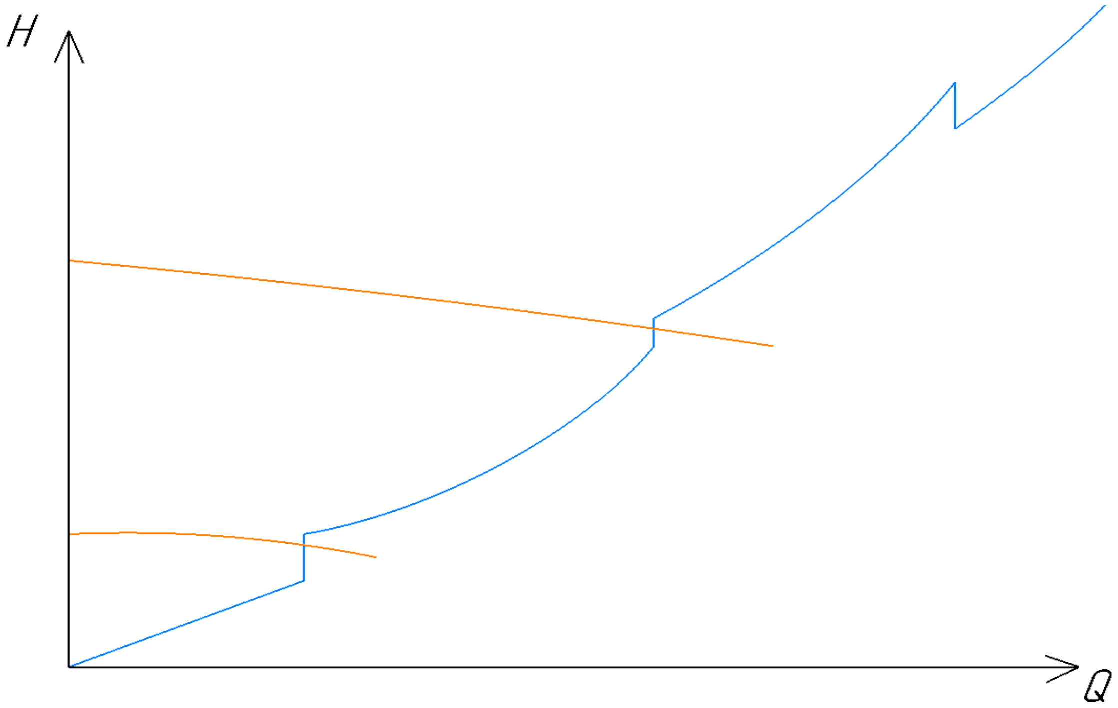
```
else:
    w2 = 500 * v / k
    d1 = 0.11 * 68 ** 0.25 * v ** 0.25 * L / (2 * g * d ** 1.75)
    c1 = B + 0.11 * k ** 0.25 / d ** 1.75 * L / (2 * g)
    e2 = A - d1 * w2 ** 1.75 - c1 * w2 ** 2
    if e2 < 0:
        w1 = (A / (B + C * K2 ** 0.25)) ** 0.5
        w2 = (A / (B + C * (1 + b / w1) ** 0.25)) ** 0.5
        w3 = (A / (B + C * (1 + b / w2) ** 0.25)) ** 0.5
        w = (A / (B + C * (1 + b / w3) ** 0.25)) ** 0.5
        Ht = 0.11 * (68 / (d * w / v) + k / d) ** 0.25 * L / d * w ** 2 / (2 * g)
    else:
        w = (A / (B + 0.11 * k ** 0.25 * L / (d ^ 1.25 * 2 * g))) ** 0.5
        Ht = 0.11 * (k / d) ** 0.25 * L / d * w ** 2/ (2 * g)
```

Блок-схема программы



Ошибки в использовании метода бисекции

Метод бисекции — простейший численный метод для решения нелинейных уравнений вида f(x)=0, основывается на теореме о промежуточных значениях.. Предполагается непрерывность функции f(x).




```python
def RABT (a, b):
    Q = (a + b)/2
    w = 4 * Q / (3600 * pi * d ** 2)
    Re = w * d / v
    if Re < 2000:
        λ = 64 / Re
    elif Re < 10 * d / k:
        λ = 0.3164 / (Re ** 0.25)
    elif Re < 500 * d / k:
        λ = 0.11 * (68 / Re + k / d) ** 0.25
    else:
        λ = 0.11 * (k/d) ** 0.25
    ig = λ * w ** 2 / d / 2 / g
    Ht = ig * L + dz + Ne * h0
    hn = an - bn * (Q / mn) ** 2
    hm = am - bm * Q ** 2
    Hns = Ne * hn + km * hm
    dh = Hns - Ht
    if abs(2 * dh/(Hns + Ht) * 100) < EPS:
        print (2 * dh/(Hns + Ht) * 100)
        return
    elif dh > 0:
        return RABT (Q, b)
    else:
        return RABT (a, Q)
```

Заключение

По итогам написания программы было проведено сравнение представленного алгоритма с методом вещественного двоичного поиска, в результате которого было выявлено, что работа с предложенной программой дает выигрыш в скорости в среднем 15-20 %.

Также были обнаружены неточности в методе подбора рабочей точки с помощью вещественного двоичного поиска, так как данный метод можно применять только для непрерывной функции, в то время как зависимость потребного напора от расхода представляет собой кусочно-заданную функцию с точками разрыва первого рода в местах смена режима трения, что вызывает ошибку типа бесконечной рекурсии.

Спасибо за внимание!