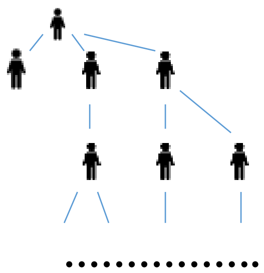
Ветвящиеся процессы (Гальтона-Ватсона)



- нулевое поколение, $n = 0$

- первое поколение, $n = 1$

- второе поколение, $n = 2$

Время жизни частицы - 1 шаг

X – случайное число потомков частицы

$\mathrm{P}(X = k) = p_k,\ p_k \geq 0, \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$

Z_n – число частиц в n –м поколении

$X_i^{(n)}$ – число потомков i –й частицы $(n-1)$ –го поколения в n –м поколении, нез.с.в., распределенные так же, как X.

Тогда $Z_0 = 1$,

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_i^{(n)},\ \ n \geq 1$$

<u>Опр.</u> Последовательность $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ называется ветвящимся процессом Гальтона-Ватсона.

Обозначим $T = min\{n \geq 1: Z_n = 0\}$

$Z_{n-1} \neq 0, Z_n = 0 \Rightarrow Z_{n+1} = 0, Z_{n+2} = 0$ и т. д.

T – момент вырождения процесса $\{Z_n\}_{n\geq 0}$

$q = P(T < \infty)$ - вероятность вырождения ветвящегося процесса

<u>Лемма.</u> Вероятность вырождения q ветвящегося процесса с законом размножения частиц X является решением уравнения $q = \varphi(q), 0 \leq q \leq 1$, где φ – производящая функция случайной величины X: $\varphi(s) = Es^X = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k$

<u>Теорема</u>. Пусть $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ - ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона с законом размножения частиц X. Обозначим $\mu = EX$. Если $\mu \leq 1$, то уравнение $q = \varphi(q)$ имеет единственное решение $q = 1$ на отрезке $[0; 1]$. В этом случае

вероятность вырождения $q = 1$. Если $\mu > 1$, то уравнение $q = \varphi(q)$ имеет единственное решение q_0 на полуинтервале $[0; 1)$. В этом случае $q = q_0$.

Опр. Если $\mu < 1$, то ветвящийся процесс называется докритическим, если $\mu = 1$ – критическим, если $\mu > 1$ – надкритическим.

Среднее время до вырождения для докритического ветвящегося процесса

Теорема. Пусть $Z_0 = N$. Если $\mu < 1$ и $E(Xln^+X) < \infty$, то

$ET \approx \frac{lnN}{|ln\mu|}$ при $N \to \infty$

$ln^+X = lnX$ при $X > 1$ и $ln^+X = 0$ при $X \leq 1$

Геометрическое распределение

$X \in \{0,1,2, \dots\}$

$P(X = k) = p(1-p)^k$

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} kp(1-p)^k = p(1-p)\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{p(1-p)}{p^2}$$

$$= \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} - 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (x^k)' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}\Bigg|_{x=1-p}$$

Метод моментов: $(X_1, X_2, \dots X_n)$ – выборка объема n из генеральной совокупности с теоретическим распределением, зависящим от параметра θ.

$EX(\theta) = \overline{X}$, $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ – первый эмпирический момент, выборочное среднее

$\mu_k = EX^k = \sum_i x_i^k p_i$ – теоретический момент порядка k.

$\mu_1 = EX$ – первый теоретический момент

$DX = EX^2 - (EX)^2 = E(X - EX)^2$

$EX^2 = DX + (EX)^2$ – второй теоретический момент

$\frac{1}{p} - 1 =$0,98547 $\quad p = \frac{1}{1{,}98547}$ =0,503659

Вероятность вырождения для геометрического распределения числа потомков

$$\varphi(s) = Es^X = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p(1-p)^k = \frac{p}{1 - s(1-p)}$$

$$\frac{p}{1 - q(1-p)} = q$$

$$p = q - q^2(1-p)$$

$$q^2(1-p) - q + p = 0$$

$$D = 1 - 4p(1-p) = 4p^2 - 4p + 1 = (1-2p)^2$$

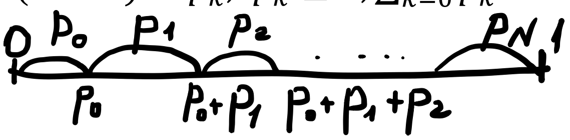
$$q = \frac{1 \pm (1-2p)}{2(1-p)}$$

$q = 1$ или $q = \frac{p}{1-p} \Rightarrow \ q = \begin{cases} 1, p \geq 0{,}5 \\ \frac{p}{1-p}, p < 0{,}5 \end{cases}$

<u>Моделирование дискретных случайных величин</u>

$Y \sim R[0;1]$ Random, Uniform

$\mathrm{P}(X = k) = p_k,\ p_k \geq 0, \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$



$$P\big(Y \in (0; p_0)\big) = p_0 = P(X = 0)$$

$$P\left(Y \in \left(\sum_{i=0}^{k-1} p_i ; \sum_{i=0}^{k} p_i\right)\right) = p_k = P(X = k)$$

Для геометрического распределения:

Сумма k первых членов геометрической прогрессии:

$S_k = \sum_{i=1}^{k} b_1 q^{i-1} = \frac{b_1(1-q^k)}{1-q}$

$$P(X = k) = p(1-p)^k \Rightarrow b_1 = p, q = 1 - p$$

$$S_k = 1 - (1-p)^k$$

$$Y \leq 1 - (1-p)^k$$

$$(1-p)^k \leq 1 - Y$$

$$k ln(1-p) \leq ln(1 - Y)$$

$$k \geq \frac{ln(1 - Y)}{ln(1-p)}$$