Моделирование эпидемии с помощью марковского процесса

С.п. $\xi(t)$ (с конечным или счетным множеством состояний E) наз. марковским, если

$$\forall\, n \geq 1,\ \forall\, 0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1}, \forall\, i_0, \dots, i_{n+1} \in E$$

$$P(\xi(t_{n+1}) = i_{n+1} | \xi(t_0) = i_0, \dots, \xi(t_n) = i_n) = P(\xi(t_{n+1}) = i_{n+1} | \xi(t_n) = i_n)$$

Условная вероятность $P(\xi(t+\Delta) = j | \xi(t) = i) = P_{ij}(t,\Delta)$ наз. переходной вероятностью МП из состояния i в состояние j на интервале $(t; t+\Delta)$.

$$\sum_{j\in E} P_{ij}(t,\Delta) = 1$$

Марковский процесс задается семейством матриц переходных вероятностей $P_{ij}(t,\Delta),\ i,j \in E$ и начальным распределением $p(0) = (p_i(0),\ i \in E)$, где $p_i(0) = P(\xi(0) = i)$

$$\sum_{i\in E} p_i(0) = 1, \forall i \in E \quad p_i(0) \geq 0$$

МП наз. однородным, если $P_{ij}(t,\Delta) = P_{ij}(\Delta)$

Однородный марковский процесс задается инфинитезимальными характеристиками (интенсивностями перехода и выхода) и начальным распределением.

Интенсивность перехода: $a_{ij} = \lim\limits_{\Delta\to 0} \frac{P_{ij}(\Delta)}{\Delta}, i \neq j$

Предел a_{ij} всегда существует и всегда конечен.

Интенсивность выхода: $a_i = \lim\limits_{\Delta\to 0} \frac{1-P_{ii}(\Delta)}{\Delta}$

$$P_{ii}(\Delta) = P(\xi(t+\Delta) = i | \xi(t) = i)$$

Процесс регулярный (консервативный), если $a_i = \sum_{j\neq i} a_{ij}$

Процесс с конечным множеством состояния всегда является регулярным.

Для регулярного процесса верна систему ДУ Колмогорова:

$$P_j(t) = P(\xi(t) = j)$$

$$\begin{cases} P_j'(t) = -a_j P_j(t) + \sum_{i\neq j} a_{ij} P_i(t) \\ P_j(0) = p_j(0),\ \ j \in E \end{cases}$$

Предельное распределение

$$\pi_j = \lim_{t\to\infty} P_j(t)$$

$$\begin{cases} 0 = -a_j\pi_j + \sum_{i\neq j} a_{ij}\pi_i \\ \sum_j \pi_j = 1 \end{cases}$$

<u>Конструктивное определение траектории</u>

<u>однородного марковского процесса.</u>

t_n – момент n-го изменения состояния процесса $\xi(t)$.

Последовательность $\xi_n = \xi(t_n), n \geq 0$ называется вложенной марковской цепью.

$$P(\xi_n = j|\xi_{n-1} = i) = \frac{a_{ij}}{a_i}$$

$\tau_n = t_n - t_{n-1}$ – интервал между изменениями состояний процесса

$$P(\tau_n < t|\xi_{n-1} = i) = \begin{cases} 0, t \leq 0 \\ 1 - e^{-a_i t}, t > 0 \end{cases}$$

<u>Метод обратных функций для моделирования непрерывных случайных величин</u>

Утверждение. Пусть X – непрерывная случайная величина, и ее функция распределения F(x)=P(X<x) монотонно возрастает. Тогда случайная величина Y= F(X) имеет равномерное распределение на отрезке [0;1].

Доказательство. Напомним, что если случайная величина равномерно распределена на отрезке *[a;b]*, то ее функция распределения имеет следующий вид: $G(y) = \begin{cases} 0, y \leq a \\ \dfrac{y-a}{b-a}, a < y \leq b \\ 1, y > b \end{cases}$. Очевидно, для отрезка *[0;1]* $G(y) = \begin{cases} 0, y \leq 0 \\ y, 0 < y \leq 1 \\ 1, y > 1 \end{cases}$

.

Найдем функцию распределения случайной величины *Y= F(X).* При $y \leq 0$ $G_Y(y) = P(Y < y) = P(F(X) < y) = 0$, поскольку *F(X)* – это вероятность, и она не может принимать отрицательные значения. Аналогично, если $y > 1$, то $G_Y(y) = 1$, т.к. вероятность всегда ≤ 1.

Осталось рассмотреть случай $0 < y \le 1$. Заметим, что поскольку функция *F(x)* непрерывна и монотонно возрастает, то у нее существует обратная функция, которая также является монотонно возрастающей. Поэтому $G_Y(y) = P(Y < y) = P(F(X) < y) = P\left(F^{-1}(F(X)) < F^{-1}(y)\right) = P\left(X < F^{-1}(y)\right) = F\left(F^{-1}(y)\right) = y$, что и треб.

Из доказанного утверждения следует, что если *Y= F(X)* – реализация случайной величины, имеющей равномерное распределение на отрезке *[0;1]*, то $X = F^{-1}(Y)$ - это реализация случайной величины, имеющей распределение *F(x)*. Поэтому для того, чтобы смоделировать выборку из генеральной совокупности с заданным теоретическим распределением, нужно сначала получить выборку $(Y_1,\ldots,Y_n)$ из генеральной совокупности с равномерным распределением на отрезке *[0;1]*, а затем, подставляя полученные числа в формулу обратной функции, вычислить значения $(X_1,\ldots,X_n)$, которые и будут являться реализациями случайной величины с заданным распределением *F(x)*.

$F(t) = 1 - e^{-a_i t}$

$Y = F(X) = 1 - e^{-a_i X}$

$e^{-a_i X} = 1 - Y$

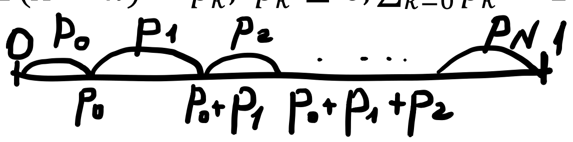
$-a_i X = \ln(1 - Y)$

$$X = -\frac{\ln(1 - Y)}{a_i}$$

<u>Моделирование дискретных случайных величин</u>

$Y \sim R[0;1]$ Random, Uniform

$\mathrm{P}(X = k) = p_k,\ p_k \ge 0, \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$



$P\left(Y \in (0; p_0)\right) = p_0 = P(X = 0)$

$$P\left(Y \in \left(\sum_{i=0}^{k-1} p_i ; \sum_{i=0}^{k} p_i\right)\right) = p_k = P(X = k)$$

Для эпидемического процесса:

(i, j) – текущее состояние в момент t

i – количество больных (инфицированных)

j – количество восприимчивых

$$a_{(i,j)(i+1,j-1)} = i\beta \frac{j}{N}$$

$$a_{(i,j)(i-1,j)} = i\gamma$$

$$a_{(i,j)} = i\beta \frac{j}{N} + i\gamma$$

$$P_{(i,j)(i+1,j-1)} = \frac{i\beta \frac{j}{N}}{i\beta \frac{j}{N} + i\gamma} = \frac{\beta \frac{j}{N}}{\beta \frac{j}{N} + \gamma}$$

$$P_{(i,j)(i-1,j)} = \frac{\gamma}{\beta \frac{j}{N} + \gamma}$$