$+ \quad \times$

$- \quad \div$

§2. Импульс системы мат. точек

Опр: $\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \ldots + \vec{p}_n$ – импульс системы n-мат-точек

$$\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} + \ldots + \frac{\Delta \vec{p}_n}{\Delta t}$$

Рассмотрим для простоты 2 взаимодействующих тела

$$\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t} = \vec{F}_{внеш_1} + \vec{f}_{12} + \vec{F}_{внеш_2} + \vec{f}_{21}$$

сумма внеш. сил, действ на 1

сила со стороны 2-го тела

По 3-му з-ну Ньютона: $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$

$$\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \vec{F}_{внеш_1} + \vec{F}_{внеш_2} = \sum \vec{F}_{внеш_i}$$

Пример 10. Снаряд летит по вертикали и разрывается в высшей точке траектории на множество осколков одинаковой массы, летящих во всевозможных направлениях с равными по модулю скоростями. Через $t_1 = 0,4$ с после разрыва все осколки находятся в полете, один из осколков движется горизонтально, его импульс $P_1 = 30$ кг·м/с. Масса снаряда $M = 10$ кг.

Найдите модуль P_2 суммарного импульса $\vec{P}_2$ всех остальных осколков в этот момент времени. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

1) В высшей точке $\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{P}(0) = \vec{0}$

в нач. момент времени

2) Для системы осколков:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = M\vec{g} \\ \vec{P}(0) = \vec{0} \end{cases}$$

$M\vec{g} =$ const $\Rightarrow$ импульс изм. с постоянной «скоростью»

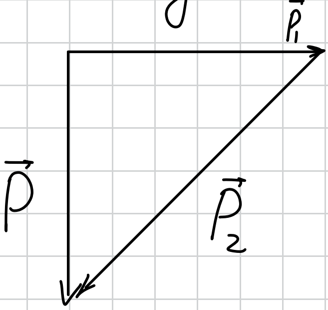
$$\Rightarrow \vec{P}(t) = M\vec{g}t$$

аналогично кинематике

3) Через время t_1:

горизонтально направлен

$$\vec{P}(t_1) = M\vec{g}t_1 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$



$$P_2 = \sqrt{P^2 + P_1^2} = 50 \text{ кг}\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$\sin\alpha = \frac{P_1}{P_2} = 0,6 \Rightarrow \alpha \approx 37^\circ$$

§3. Закон сохранения импульса мат. частиц

$$\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \sum_i \vec{F}_{внеш_i}$$

З-н сохр. импульса (проекции):

- Если $\sum\limits_i \vec{F}_{внеш_i} = 0$, то $\vec{P} = const$ (по модулю и напр-ю)
- Если существует напр X: $\sum\limits_i F_{i,x} = 0 \Rightarrow P_x = const$
- Если внешние силы конечны и их время действия

мало: $\left|\sum\limits_i \vec{F}_i\right| \Delta t \ll |\vec{P}(t)|$, то

$$\Delta \vec{P}_c = \vec{P}(t+\Delta t) - \vec{P}(t) = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)\Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{P}_c \approx \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P}(t+\Delta t) = \vec{P}(t)$$

Пример 11. На пути шайбы, скользящей по гладкому горизонтальному столу (рис. 11), находится гладкая незакреплённая горка. Шайба, движущаяся по горизонтальной поверхности в положительном направлении оси OX со скоростью $v_0 = 6$ м/с, въезжает на горку, безотрывно движется по ней и соскальзывает с горки по той же траектории.

Найдите конечные проекции на ось OX скорости шайбы и скорости горки. Масса горки в $n = 5$ раз больше массы шайбы.

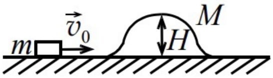


Рис. 11

Найдите конечные проекции v_{1x} скорости шайбы и v_2 горки в случае $v_0 = 4{,}8$ м/с.

1) Рассмотрим систему: шайба + горка:

$$\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = (m+M)\vec{g} + \vec{N}$$

Спроецируем на горизонтальную ось:

$$\frac{\Delta P_x}{\Delta t} = 0 \Rightarrow P_x = const \ (1)$$

2) Запишем (1) и з-н сохранения полной энергии:

$$\begin{cases} m v_0 = m v_{1x} + M v_2 \\ \dfrac{m v_0^2}{2} = \dfrac{m v_{1x}^2}{2} + \dfrac{M v_2^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m(v_0 - v_{1x}) = M v_2 \\ m(v_0 - v_{1x})(v_0 + v_{1x}) = M v_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m(v_0 - v_{1x}) = Mv_2 \\ Mv_2(v_0 + v_{1x} - v_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v_2 = 0 \\ v_0 + v_{1x} = v_2 \end{array} \right.$$

соотв. случаю, когда шайба преодолела горку Д/З

соотв. нашему случаю

$$\begin{cases} v_{1x} = \dfrac{m-M}{m+M} v_0 \\ v_2 = \dfrac{2m}{m+M} v_0 \end{cases}$$

§4. Задачи на столкновения

1. Столкновение в физике ≡ взаимодействие (не обязательно соприкосновение)

2. Столкновения → упругие; → неупругие → изм. внутреннее состояние тел (нагревание, ...)

3. Решаем, рассматривая сталкивающиеся тела как одну замкнутую систему и записывая З.С.Э. и З.С.И.

Пример 12. Движущийся автомобиль сталкивается с неподвижным автомобилем. Масса движущегося автомобиля m, масса неподвижного автомобиля M.

Какая доля кинетической энергии движущегося автомобиля идет в результате абсолютно неупругого столкновения на разрушение «участников столкновения» (автомобилей, водителей, пассажиров)? Считайте, что в месте столкновения поверхность дороги покрыта тонким слоем льда: действие сил трения в процессе столкновения пренебрежимо мало.

1) Рассмотрим систему из двух машин и запишем З.С.И. и З.С.Э:

$$\begin{cases} mv_0 = (m+M)v_1 \\ \dfrac{mv_0^2}{2} = \dfrac{(m+M)v_1^2}{2} + Q \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_0 - v_1 = \dfrac{M}{m}v_1 \quad \Rightarrow v_1 = \dfrac{m}{m+M}v_0 \\ \dfrac{m(v_0 - v_1)(v_0 + v_1)}{2} - \dfrac{Mv_1^2}{2} = Q \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{Mv_1}{2}(v_0 + v_1) - \dfrac{Mv_1^2}{2} = Q \\ v_1 = \dfrac{m}{m+M}v_0 \end{cases} \Rightarrow Q = \frac{M}{m+M}\,\frac{mv_0^2}{2}$$

Пример 13. На гладкой горизонтальной поверхности лежит шайба массой M. На неё налетает шайба массой m, движущаяся поступательно со скоростью $\vec{v}$. Происходит абсолютно упругий центральный удар. Найдите скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ шайб после соударения. При каком условии налетающая шайба будет двигаться после соударения в прежнем направлении? Шайбы – гладкие диски.

1) Шайбы считаем точечными, тогда З.С.И и З.С.Э:

$$\begin{cases} m\vec{v} = m\vec{v}_1 + M\vec{v}_2 \leftarrow \text{спроецируем на ось} \parallel \vec{v} \\ \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{mv_1^2}{2} + \dfrac{Mv_2^2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = \dfrac{m-M}{m+M}v > 0 \Leftrightarrow m > M \\ v_2 = \dfrac{2m}{m+M}v \end{cases}$$

Найдем через какое время T: расст. м/у шайбами $L = 2$ м, $v = 0,5$ м/с:

$$T = \frac{L}{v_{отн}} = L/|v_1 - v_2| = \frac{L}{v}$$

Порешаем задачи из Д/З

Водометный двигатель патрульного катера это насос, который разгоняет каждую порцию воды от состояния покоя в лабораторной системе отсчета до скорости $u = 18$ м/с относительно катера. Площадь поперечного сечения канала, по которому движется вода, $S = 0,01\ \text{м}^2$.

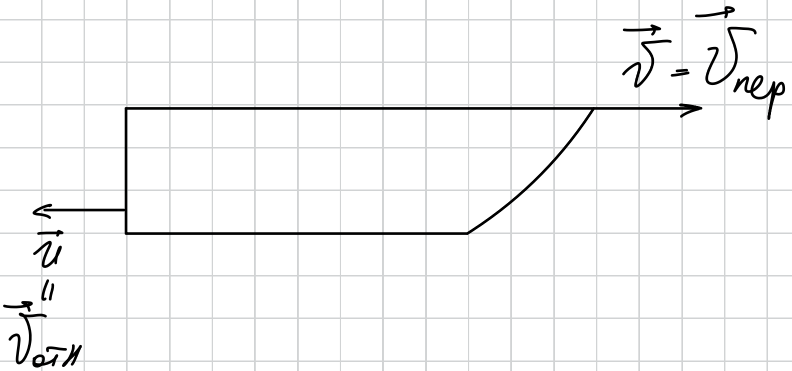
Найдите установившуюся скорость v прямолинейного движения катера. Силу сопротивления считайте пропорциональной квадрату скорости v катера $F = kv^2$, здесь $k = 8\ \dfrac{\text{Н}\cdot\text{с}^2}{\text{м}^2}$. Плотность воды $\rho = 1000\ \text{кг}/\text{м}^3$.

1) Найдем изменение импульса воды, которую разгоняет двигатель за Δt:

$p_{нач} = 0$ (двигатель разгоняет воду из сост. покоя)

$p_{конечное} = \Delta m \cdot V_{абс}$

абсолютная скорость Δm



$\Rightarrow V_{абс} = u - v \Rightarrow \Delta p = \Delta m \cdot (u - v)$

2) Найдем Δm: это покоящаяся вода, которую катер "забирает" по мере своего движения, то есть:

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho S \underbrace{v \Delta t}_{\text{расст., пройденное катером}}$$

3) Тогда сила:

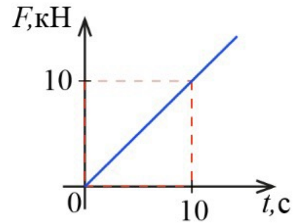
$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \rho v(u-v)S$$

4) В уст. режиме:

$$\rho v(u-v)S = kv^2$$

$$\Rightarrow v = u\,\frac{1}{1+\frac{k}{\rho S}}$$

На автомобиль массой $m = 2000$ кг, движущийся со скоростью $v_0 = 25$ м/с, действует, начиная с момента времени $t = 0$, горизонтальная тормозящая сила F, величина которой нарастает со временем по линейному закону, как показано на рисунке. Через какое время T автомобиль остановится?



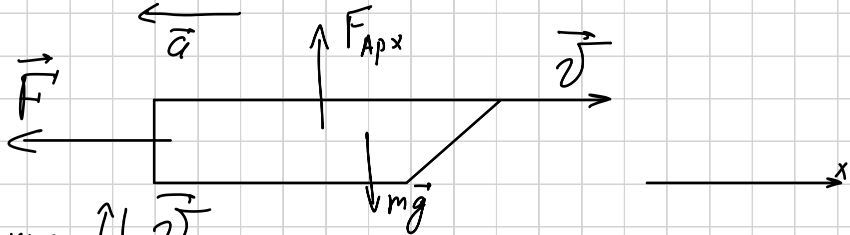
1) 2-й з-н Ньютона:

$$\Delta p = -\underbrace{F\Delta t}_{\text{площадь}} \text{ - суммируем от } t=0 \text{ до } t=T$$

$$|\Delta p_{\Sigma}| = |0 - mv_0| = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 10^3\,T$$

$$T = \frac{2mv_0}{10^4} = \frac{2\cdot 2\cdot 10^3\cdot 25}{10\cdot 10^3} = 1\,c$$

Лодку массой $m = 100$ кг тянут за веревку по поверхности озера с постоянной скоростью $v_0 = 1$ м/с. В некоторый момент веревка обрывается. Какой путь L пройдет после этого лодка к тому моменту, когда ее скорость уменьшится в два раза? Считайте, что сила сопротивления зависит не только от скорости $\vec{v}$, но и ускорения $\vec{a}$ лодки по закону $\vec{F} = -\left(\alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{a}\right)$, где $\alpha = 10\ \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}$, $\beta = 50\ \frac{\text{Н} \cdot \text{с}^2}{\text{м}}$.



1) Ускорение $\uparrow\downarrow \vec{v}$

2) 2-й з-н Ньютона:

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}_{Арх} + m\vec{g} - (\alpha \vec{v} + \beta \vec{a})$$

Проецируем на Ox:

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta t} = -\alpha v_x - \beta \overbrace{a_x}^{\text{проекция (может быть} < 0)}$$

← важный момент со знаками, если хотим $|a|$, то "+", но $|v_{кон} - v_{нач}|$

$$\Delta p_x = -\alpha \underbrace{v_x \Delta t}_{\Delta x} - \beta \underbrace{a_x \Delta t}_{\Delta v}$$

– суммируем по всем Δt, соотв. времени уменьшения скорости

$$\Delta p_{x\Sigma} = p_{кон} - p_{нач} = m\frac{v_0}{2} - m v_0 = -\alpha L - \beta \underbrace{(v_{кон} - v_{нач})}_{-\frac{v_0}{2}}$$

$$\alpha L = m v_0$$

$$L = \frac{m v_0}{\alpha}$$

Две одинаковые льдинки летят вдоль одной прямой навстречу друг другу с равными по величине скоростями. Происходит абсолютно неупругое соударение – льдинки «слипаются», нагреваются и испаряются.

Оцените наименьшую скорость v_0 таких капель перед соударением. Температура льдинок перед соударением $t_0 = 0^{\circ}$. Недостающие данные задайте лично.

1) Запишем З.С.Э:

$$\frac{m v_0^2}{2} + \frac{m v_0^2}{2} = cm\Delta t + \lambda m$$

$$v_0 = \sqrt{c\Delta t + \lambda} = \ldots$$