$+ \quad \times$

$- \quad \div$

§1. Тождественные преобразования

Математические выражения

числовые

Пример: $2+5(38:9)$

с переменными

- с одной переменной:

Пример: $2x+1,\ 3x^2+5$

- с несколькими переменными:

Пример: $x+y,\ 5a^2b(x-y)^2,\ 3t^2+\vartheta^3+1$

Опр 1: Значением выражения называется число, полученное после подставления конкретных чисел вместо переменных

Опр 2: Значения переменных, при которых выражение имеет смысл, т.е. выполняются все указанные действия, называются допустимыми значениями переменных

Пример: $\sqrt{x}$ - существует $\Leftrightarrow x \geqslant 0$

Опр 3: Значения двух выражений с переменными при одних и тех же значениях переменных называются соответственными

Опр 4: Два выражения (числовые или с переменными), соединенные знаком "=" называются равенством

Замечание 1: Числовые равенства могут быть верными или не верными

Замечание 2: Равенства с переменными могут быть верными при одних значениях переменных и неверными при других

Опр 5: Равенство, верное при всех допустимых значениях, входящих в него переменных, называется тождеством, обозначается "≡"

Опр 6: Два выражения, принимающие равные соответственные значения при всех допустимых значениях, входящих в него переменных, называют тождественно равными

Опр 7: Замену одного выражения другим, ему тождественно равным, называют тождественным преобразованием

Опр 8: Выражения, составленные из чисел и переменных с помощью конечного числа арифметических операций называются рациональными

Пример 1: Одночлены — $9{,}25x^2$, 3^4abxy^4 — произведения чисел и натуральных степеней переменных

Пример 2: Многочлен — сумма одночленов (одночлен это частный случай многочлена)

Опр 9: Стандартным видом одночлена называется такой его вид, где все числовые множители перемножены, а произведение одинаковых переменных заменено степенью.

Опр 10: Одночлены называют подобными, если после их приведения к стандартному виду они либо совпадают, либо отличаются коэффициентами

Опр 11: Преобразование многочлена, при котором производится сложение и вычитание подобных членов называется приведением подобных

Опр 12: Степенью многочлена называют наибольшую из степеней одночленов, составляющих многочлен (ВАЖНО!), обозн. – deg(...) = ...

Опр 13: Однородный многочлен – многочлен, все одночлены которого имеют одинаковые степени

Формулы сокращенного умножения

1. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 =$
$= a^2 + 2ab + b^2$

2. $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) = \ldots =$
$= a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$

Опр 14: Выражение вида $(a+b)^n$, где $n = 1, 2, \ldots$ – называется биномом Ньютона

Треугольник Паскаля

$$
\begin{array}{l|c}
(a+b)^1 = & 1a + 1b \\
(a+b)^2 = & 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\
(a+b)^3 = & 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\
(a+b)^4 = & 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4 \\
(a+b)^5 = & \underline{\quad}\,a^5 + \underline{\quad}\,a^4b + \underline{\quad}\,a^3b^2 + \underline{\quad}\,a^2b^3 + \underline{\quad}\,ab^4 + \underline{\quad}\,b^5
\end{array}
$$

Как получить разность?

Рассмотрим на примере:

$$(a-b)^3 = (a+(-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 =$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

И так далее...

Теперь рассмотрим разность n-ых степеней:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$ ← одн. многочлен 1-й степени

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$ ← одн. многочлен второй степени

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$\vdots$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^1b^{n-2} + b^{n-1})$$

Если n - нечетное, то можно также написать ф-лу суммы n-ых степеней:

$$a^n + b^n = a^n - (-b)^n = (a-(-b))(a^{n-1} + a^{n-2}(-b)^1 + a^{n-3}(-b)^2 + \ldots + a^1(-b)^{n-2} + (-b)^{n-1})$$

Например, $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Выделение полного квадрата

Выражение вида $ax^2 + bx + c$, $!a \neq 0!$ - называется квадратным трехчленом

Как выделять полный квадрат?

$$x^2 - 4x + 5 = 1x^2 - 2\cdot 2\cdot x + \underbrace{5}_{2^2+1} = \underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-2)^2} + 1 = \underbrace{(x-2)^2}_{\text{выделили полный квадрат}} + 1$$

Задачи

№1 Разложите на множ-ли:

а) $5x^2-4x-1$

б) n^4+2n^2+9

в) $y^8-y^6-4y^2-16$

г) $b^2+ab-2a^2-b+a$

а) $5x^2-4x-1=5\left(x^2-2\cdot\frac{2}{5}x+\frac{4}{25}\right)-\frac{4}{5}-1=$

$=5\left(x-\frac{2}{5}\right)^2-\frac{9}{5}=\frac{1}{5}\left(5^2\left(x-\frac{2}{5}\right)^2-9\right)=$

$=\frac{1}{5}\left(5\left(x-\frac{2}{5}\right)+3\right)\left(5\left(x-\frac{2}{5}\right)-3\right)=(5x+1)(x-1)$

б) $n^4+2n^2+9=(n^4+6n^2+9)-6n^2+2n^2 \ominus$

если выделить полный кв.
из этих, то будет сумма квадратов => не разложим

$\ominus (n^2+3)^2-(2n)^2=(n^2+3-2n)(n^2+3+2n)$

в) $y^8-y^6-4y^2-16=((y^4)^2-4^2)-y^2(y^4+4)=$

$=(y^4+4)\underbrace{(y^4-4-y^2)}=(y^4+4y^2+4-4y^2)(y^4-4-y^2)\ominus$

чтобы разложить
эту скобку нужно знать
ирр. числа

$= (y^2+2-2y)(y^2+2+2y)(y^4-4-y^2)$

2) $b^2+2ab-ab-2a^2-(b-a) = (b+2a)(b-a)-(b-a) =$
$= (b+2a-1)(b-a)$

№2 Найдите наименьшее значение выражения

$$2a^2-2ab+b^2-2a+2$$

При каких a и b оно достигается?

$b^2-2ab+a^2+a^2-2a+1+1 = \underbrace{(b-a)^2}_{\geq 0}+\underbrace{(a-1)^2}_{\geq 0}+$
$+1 \geq 1$

Вопрос - существуют ли a и b такие, что достигается равенство?

$$(b-a)^2+(a-1)^2+1=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow a=b=1$$

Ответ: $\min = 1$, при $a=b=1$

№3 Док-те, что из рав-ва $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$ следует рав-во $x=y=z$

$$\underset{\overset{\parallel}{x^2+x^2}}{2x^2}+\underset{\overset{\parallel}{y^2+y^2}}{2y^2}+\underset{\overset{\parallel}{z^2+z^2}}{2z^2}-2xy-2yz-2zx=$$

$$=\underbrace{(x-y)^2}_{\geq 0}+\underbrace{(x-z)^2}_{\geq 0}+\underbrace{(y-z)^2}_{\geq 0}=0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} x-y=0 \\ x-z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \iff x=y=z$$

ч.т.д.

(все вып. одновременно) логическое "и"

№4 Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^{47}+x^{46}+\ldots+x+1}{x^{15}+x^{14}+\ldots+x+1}$

б) $\dfrac{b^{12}-1}{(b^4+b^2+1)(b^3-b^2+b-1)}$

а) Суммы аналогичные числителю и знаменателю были в формуле разности n-ых степеней

$$\frac{(x-1)(x^{47}+x^{46}+\ldots+x+1)}{(x-1)(x^{15}+x^{14}+\ldots+x+1)}=\frac{x^{48}-1^{48}}{x^{16}-1^{16}}=\frac{(x^{16})^3-1^3}{x^{16}-1} =$$

$$= \frac{\cancel{(x^{16}-1)}(x^{32}+x^{16}+1)}{\cancel{x^{16}-1}} = x^{32}+x^{16}+1$$

б) $$\frac{(b^6-1)(b^6+1)}{(b^4+b^2+1)(b^2+1)(b-1)} = \frac{(b^2-1)\cancel{(b^4+b^2+1)}\cancel{(b^2+1)}(b^4-b^2+1)}{\cancel{(b^4+b^2+1)}\cancel{(b^2+1)}(b-1)}$$

$$= \frac{(b-1)(b+1)(b^4-b^2+1)}{(b-1)} = (b+1)(b^4-b^2+1)$$

$\boxed{№5}$ Упростите

$$\frac{3a+2}{9a^2-6a+4} - \frac{18a}{27a^3+8} - \frac{1}{3a+2} =$$

$$27a^3+8 = (3a+2)(9a^2-6a+4)$$

$$= \frac{3a+2}{9a^2-6a+4}^{\backslash 3a+2} - \frac{18a}{(3a+2)(9a^2-6a+4)} - \frac{1}{3a+2}^{\backslash 9a^2-6a+4} = \frac{\cancel{9a^2}+12a+\cancel{4}-18a-\cancel{9a^2}+6a-\cancel{4}}{(3a+2)(9a^2-6a+4)} =$$

$$= 0$$

$\boxed{№6}$ Упростите $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{(n-1)n}$

$$1+\underbrace{\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)}_{\frac{1}{6}}+\underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)}_{\frac{1}{3\cdot 4}}+\dots+\underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n}\right)}_{\frac{1}{(n-1)n}}=$$

$$= 2-\frac{1}{n}$$

№7 Вычислите: а) 11^4

б) 11^5

1) Представим $11 = 10+1$ и вспомним Δ-к Паскаля:

"1": 1 1

"2": 1 2 1

"3": 1 3 3 1

"4": 1 4 6 4 1

"5": 1 5 10 10 5 1

Тогда:

$$(10+1)^4 = 10^4 + 4\cdot10^3\cdot1 + 6\cdot10^2\cdot1^2 + 4\,10\cdot1^3 + 1^4 =$$

$$= 14641$$

$$(10+1)^5 = 10^5 + 5\cdot10^4\cdot1 + 10\cdot10^3\cdot1^2 + 10\cdot10^2\cdot1^3 + 5\cdot10\cdot1^4 +$$

$$+1 = 161051$$

Неравенство Коши о средних

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \quad \left(\begin{matrix} a_k \geqslant 0 \\ \text{где } k\in\mathbb{N}\end{matrix}\right)$$

ср. арифметическое ср. геометрическое

Докажем для $n=2$: $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a+b \geqslant 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$

$a \geqslant 0$
$b \geqslant 0$

верно $\Rightarrow$ исх нер-во верно

Метод неопределенных коэф-тов