$+ \quad \times$

$- \quad \div$

§2. Уравнения с одной переменной

Опр 1: Равенство, содержащее переменную, называют уравнением с одной переменной

Опр 2: Корнем или решением уравнения называется значение переменной, при котором ур-е превращается в верное числовое равенство.

Опр 3: Уравнения называются равносильными, если каждое решение первого ур-я является решением второго и каждое решение второго уравнения является решением первого или если оба ур-я не имеют решений (знак равносильного перехода - $\Leftrightarrow$)

Полезные свойства:

1) Если к обоим частям прибавить (вычесть) слагаемое, то получится уравнение, равносильное данному

2) Если обе части уравнения умножить на одно и то же отличное от нуля число, то получится ур-е, равносильное данному

Опр 4: Уравнение вида $ax=b$, где x - переменная, a и b - некоторые числа, называется линейным ур-ем с одной переменной

→ Если $a \neq 0$, то $\underbrace{\exists!}_{\text{существует единственное}}$ решение $x = \frac{b}{a}$

→ Если $a=0$, $b=0$ $\Rightarrow$ верно $\underbrace{\forall}_{\text{для любого}} x$

→ Если $a=0$, $b=0$ $\Rightarrow$ нет решений.

Пример: $x^3-2x^2-9x+18=0$

$$x^2(x-2)-9(x-2)=0 \Leftrightarrow (x^2-9)(x-2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+3)(x-2)=0$$

Ответ: $\{2; 3; -3\}$

§4. Модуль числа

Опр 1: Модулем назовем, такую ф-цию, что:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Свойство 1: $|x| \geq 0 \ \forall x$

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$\blacktriangle$

1) Если $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \geq 0$
2) Если $x < 0 \Rightarrow |x| = -x > 0$

$\blacksquare$

Свойство 2: $\forall x, y : |xy| = |x||y|$ (или $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$)

$\blacktriangle$

1) Если $x > 0, y > 0 : |xy| = xy, |x| = x, |y| = y$
2) Если $x < 0, y < 0 : |xy| = xy, |x| = -x, |y| = -y$
3) Если $x > 0, y < 0 : |xy| = -xy, |x| = x, |y| = -y$
4) Если $x < 0, y > 0 : \ldots$

$\blacksquare$

Свойство 3: (Неравенство Δ-ка)

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$\blacktriangle$

1) Если $a, \geq 0 \Rightarrow |a+b| = |a| + |b|$
2) Если $a, b < 0$ $(a = -a_1, b = -b_1) \Rightarrow |-a_1 - b_1| =$

$$= |a_1 + b_1| \underset{\substack{\uparrow \\ a_1, b_1 \geq 0}}{=} |a_1| + |b_1| = |a| + |b|$$

3) Если $a<0,\ b>0$: $a=-a_1$: $|b-a_1| < |b|+|a_1| =$

$= |b|+|a|$

4) Аналогично ■

Свойство 4: $|a-b| \geqslant |a|-|b|$

▲ Доказывается аналогично св-ву 3 ■

Задача: Решите ур-е: $|x-1|+|x+1|=2$

"Метод интервалов":

	$x \leq -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$x > 1$
$\lvert x-1\rvert$:	−		−		+
$\lvert x+1\rvert$:	−		+		+
	I		II		III

1) Рассмотрим I : $x \leq -1$: оба модуля раскрываются со знаком "−":

$$1-x-x-1=2$$

$$x=-1 \quad (\text{удовл. соотн. } x \leq -1 \Rightarrow \text{подходит})$$

2) Рассмотрим II: $-1 < x < 1$:

$$1 - x + x + 1 = 2$$

$$2 = 2 \text{ - верно}$$

$\Rightarrow$ подходит $\forall x \in (-1; 1)$

3) Рассмотрим III: $x \geqslant 1$:

$$x - 1 + x + 1 = 2$$

$$x = 1$$

Ответ: $x \in [-1; 1]$

Свойство 5: $|A| = B$ ($B \geqslant 0$ - иначе нет решений)

$$\Updownarrow$$

$$(A - B)(A + B) = 0$$

$\triangle$

$$|A| - B = 0 \quad | \cdot |A| + B \ (\neq 0, \text{если } A, B \neq 0)$$

$$(|A| - B)(|A| + B) = 0$$

$$|A|^2 - B^2 = 0$$

$$A^2 - B^2 = 0$$

$$(A - B)(A + B) = 0$$

$\blacksquare$

Задача: Решите ур-е: $|5 - |x+6|| + 1 = 6$

$$\Leftrightarrow (5 - |x+6| - 5)(5 - |x+6| + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x+6| = 0 \\ |x+6| - 10 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ x+6 = 10 \\ x+6 = -10 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ x = 4 \\ x = -16 \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-16, -6, 4\}$

§5. Множество точек на плоскости

1. Линейная функция

$y_1 = x$

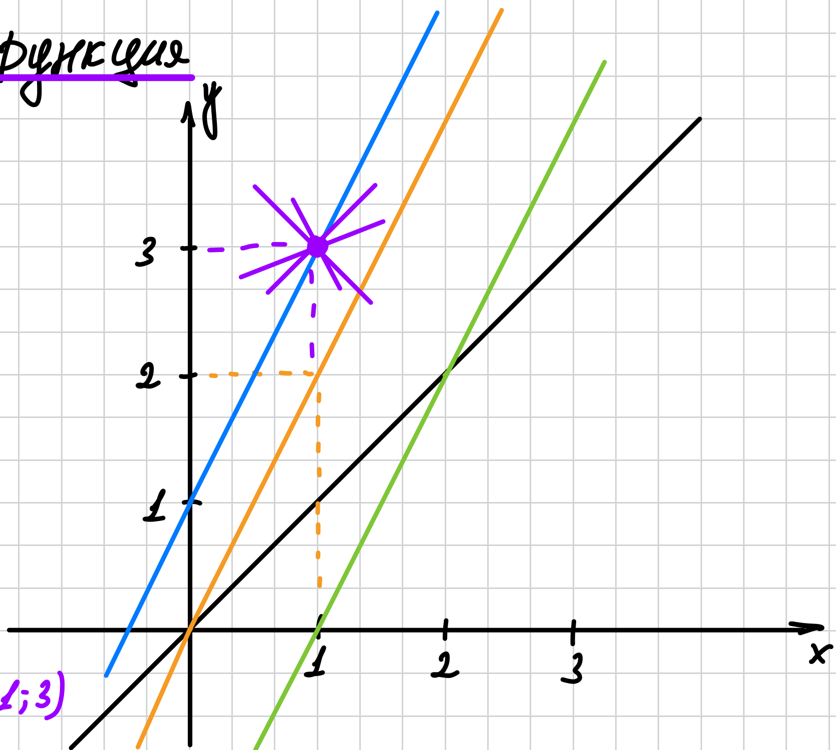
$y_2 = 2x$

$y_3 = 2(x-1)$

$y_4 = 2(x-1)+3$

$y_5 = a(x-1)+3$

"пучок прямых" проходящих через т. $(1;3)$



Замечание: Пучок прямых не задает вертикальную прямую

Замечание: Коэф-т при "x" - угловой коэф-т равен тангенсу угла м/у прямой и полож напр. OX.

Лемма 1: Прямые $y_1 = k_1 x + b_1$ и $y_2 = k_2 x + b_2$ параллельны $\Leftrightarrow k_1 = k_2$ (← такое есть в домашке)

Δ

$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть прямые параллельны покажем тогда, что $k_1 = k_2$:

Параллельны ⇒ углы пересечения с OX одинаковы ⇒ $\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2 \Rightarrow k_1 = k_2$

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $k_1 = k_2$. Покажем, что прямые параллельны:

$k_1 = k_2 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow$ пар-ны

■

Лемма 2: Прямые $y_1 = k_1 x + b_1$ и $y_2 = k_2 x + b_2$ перпендикулярны $\Leftrightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2}$

Δ Без док-ва

■

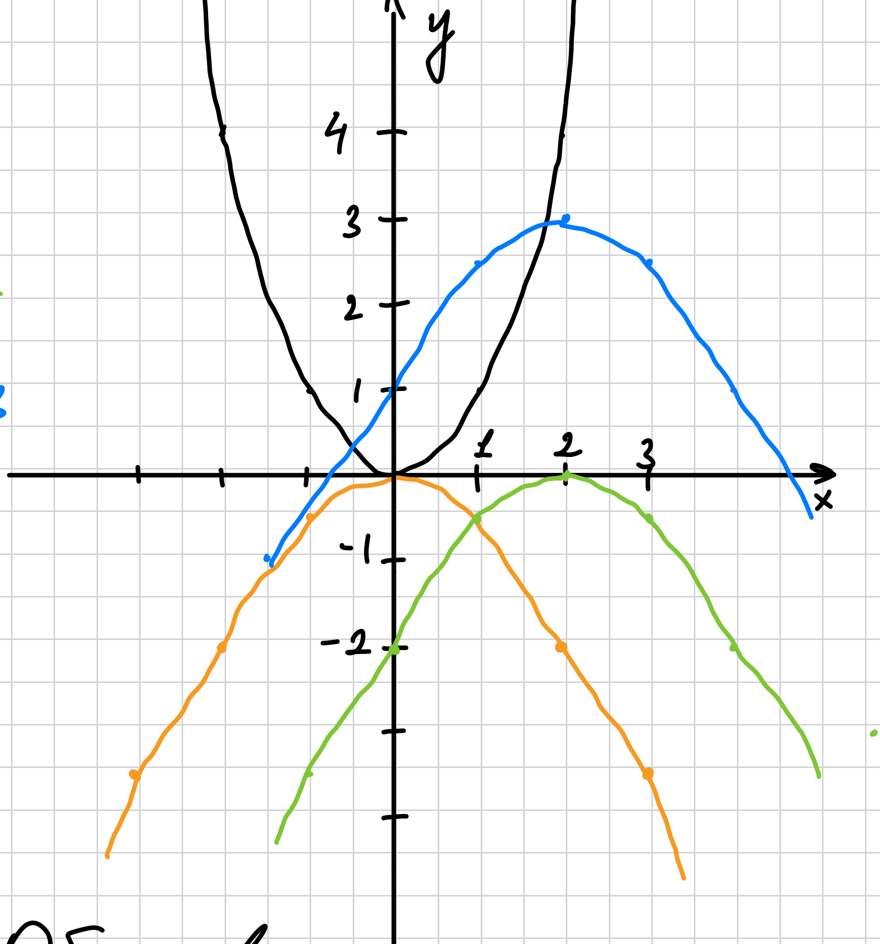
2. Гипербола

$y_1 = x^2$

$y_2 = -\frac{1}{2}x^2$

$y_3 = -\frac{1}{2}(x-2)^2$

$y_4 = -\frac{1}{2}(x-2)^2+3$

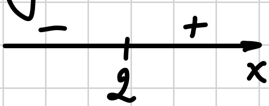


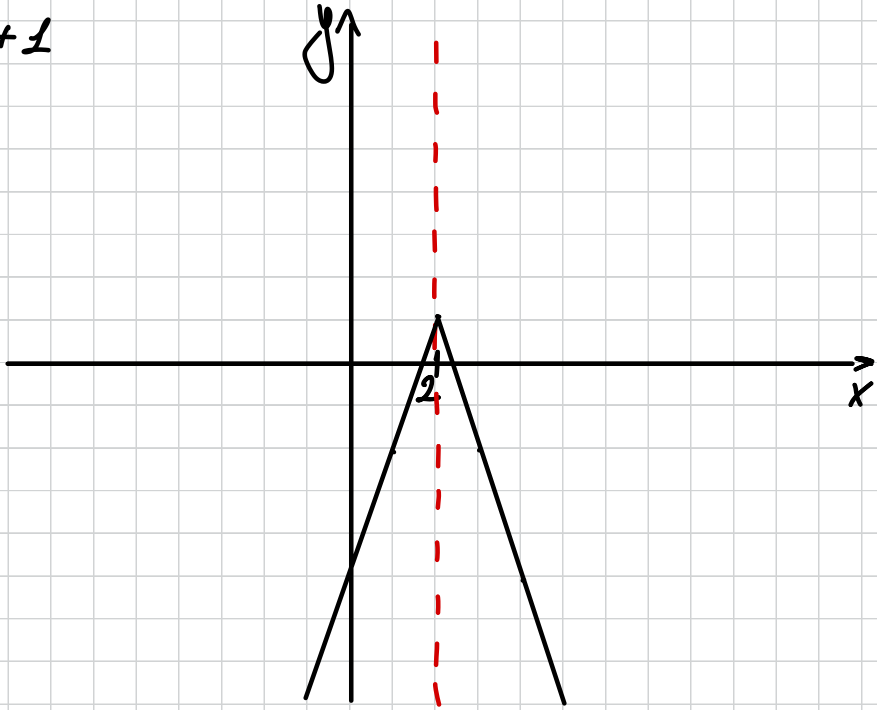
Замечание: Обычно в задачах на построение гиперболы сначала нужно выделить полный квадрат:

$$y = -\frac{1}{2}x^2+2x+1 = y_4$$

3. Модуль

$$y = -3|x-2|+1$$





$x \geq 2$: $y = -3x+7$

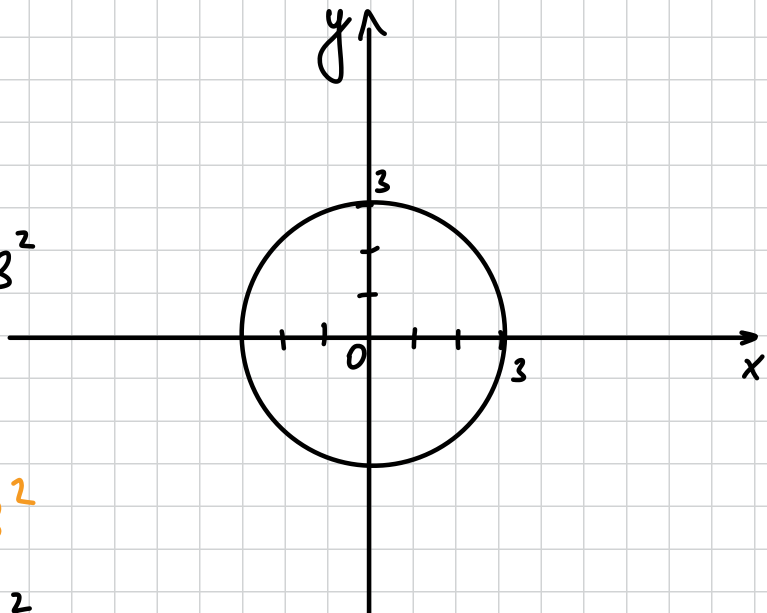
$x < 2$: $y = 3x-5$

4. Окружность

$$y^2 + x^2 = 3^2$$

$$\rho^2((x,y),(0,0)) = 3^2$$

расстояние



$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 3^2$$

$$\rho^2((x,y),(3,-1)) = 3^2$$

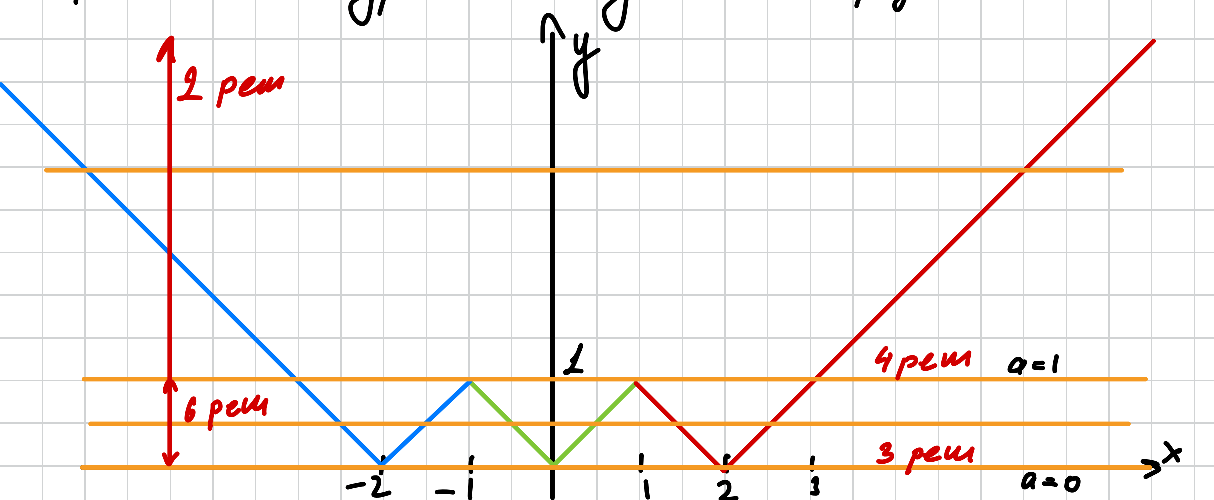
Или: $x \to (x-3)$, $y \to (y+1)$ – это можно интерпретировать как перенос всего мн-ва точек на вектор $(3;-1)$

Задачи

№1 Постройте график функции

$$y=\begin{cases} |x-2|, \text{ если } x \geq 1; \\ |x|, \text{ если } x \in (-1, 1) \\ |x+2|, \text{ если } x \leq -1 \end{cases}$$

Используя график функции, укажите сколько корней имеет уравнение $y(x)=a$ при различных a.



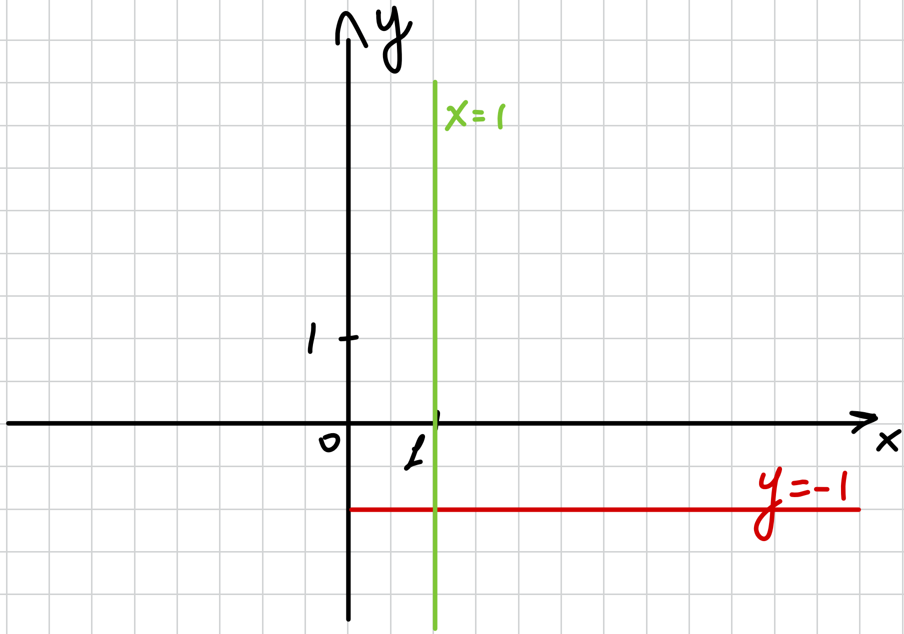
Ответ: $a=0$ – 3 реш
$a\in(0,1)$ – 6 реш
$a=1$ – 4 реш
$a>1$ – 2 реш.

$\boxed{№2}$ Изобразите мн-во точек, заданных ур-ем

$$y\sqrt{x}-1=y-\sqrt{x}$$

$$y(\sqrt{x}-1)+\sqrt{x}-1=0$$

$$(y+1)(\sqrt{x}-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ \sqrt{x}=1 \end{array}\right. \\ x\geq 0 \ ! \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ x=1 \end{array}\right. \\ x\geq 0 \end{cases}$$



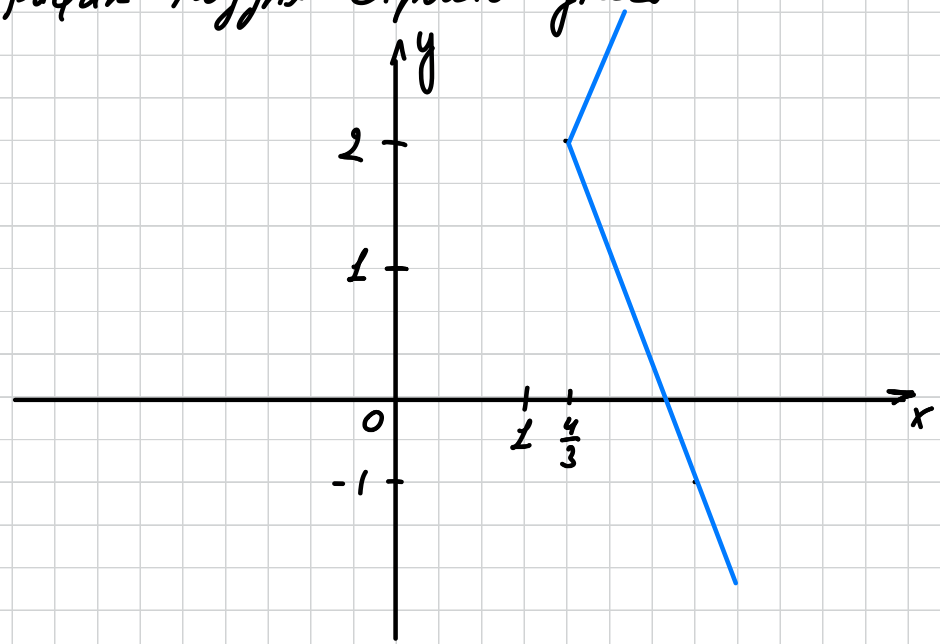
№3 Изобразите мн-во точек, заданных ур-ем:

$$|y-2| = 3x-4$$

1) Не спешим раскрывать модуль: выразим x:

$$x = \frac{1}{3}|y-2| + \frac{4}{3}$$

График модуля строить умеем:



№4 Изобразите мн-во точек, заданных ур-ем:

$$|3y+2x-2| = |x-y+3|$$

1) Либо возводим обе части в квадрат (равносильное преобразование, т.к обе части ≥ 0), либо переносим все влево и домножаем на $|3y+2x-2|+|x-y+3|$ (равносильное пр-е т.к. эта сумма >0). Получим:

$$(3y+2x-2)^2-(x-y+3)^2=0$$

$$(3y+2x-2-x+y-3)(3y+2x-2+x-y+3)=0$$

$$(4y+x-5)(2y+3x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4} \\ y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

— т.е. мн-во точек это две пересек. прямые

(мне лень рисовать...)