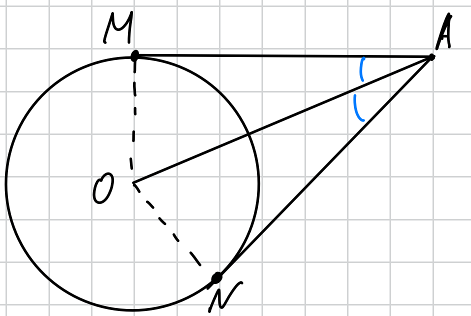
$+ \quad \times$

$- \quad \div$

§1. Св-ва касательных, хорд и секущих

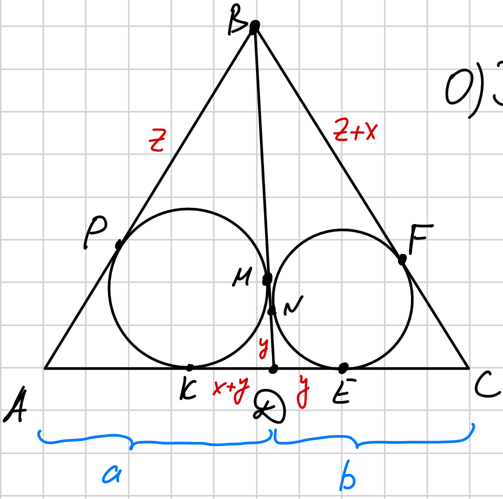
1. Две касательные из одной точки



Св-во 1.1°: $AM = AN$

Св-во 1.2°: AO — бис-са $\angle MAN$

Задача 1. На основании AC равнобедренного треугольника ABC расположена точка D, при этом $DA = a$, $DC = b$ (рис. 2). Окружности, вписанные в треугольники ABD и DBC, касаются прямой BD в точках M и N соответственно. Найти отрезок MN.



0) Пусть $a > b$

1) Пусть $MN = x$, $DN = y$, $BM = z$

2) По св-ву касательных

1. $CE = CF = BC - (z+x)$

$b = BC - (z+x) + y$

2. $AK = AP = AB - z$

$a = AB - z + x + y = BC - z + x + y$

$\Rightarrow x = \dfrac{a-b}{2}$

Если $a<b$: $x = \frac{b-a}{2}$

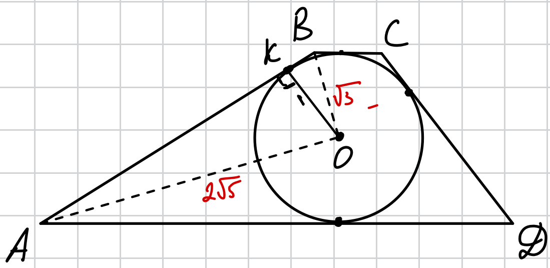
$$MN = \frac{|a-b|}{2}$$

! Св-во 1.2 также значит, что центр вписанной в угол окр-ти лежит на бис-се !

Задача 3. Около окружности с центром в точке O описана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC (рис. 4а).

а) Доказать, что $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$.

б) Найти радиус окружности, если $BO = \sqrt{5}$ и $AO = 2\sqrt{5}$. (рис. 4б)



1) $\angle AOB = \frac{1}{2}(\angle DAB + \angle ABC) = 90^\circ$

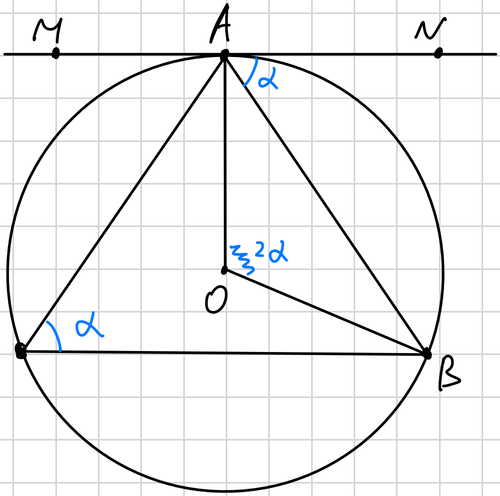
2) $\frac{OK}{AO} = \frac{OB}{AB}$ $(\triangle AOK \sim \triangle ABO) \Rightarrow OK = \frac{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{5} = 2$

Задача 2. Доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма катетов равна удвоенной сумме радиусов вписанной и описанной окружностей, т. е. $a + b = 2R + 2r$.

2. Угол м/у касательной и хордой

Теорема 1: Мера угла м/у касательной и хордой, имеющими общую точку на окр-ти, равна половине градусной меры дуги, заключённой м/у его сторонами

△



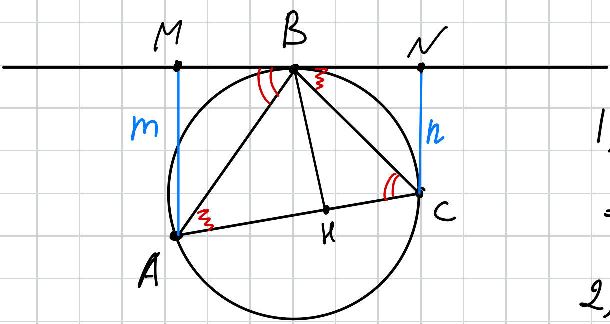
1) Пусть $\angle AOB = 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OAB = 90 - \alpha$

$\Rightarrow \angle BAN = \alpha = \frac{1}{2} \smile AB$

□

Задача 4. В окружность вписан треугольник ABC. Расстояния от точек A и C до касательной, проходящей через точку B, соответственно равны m и n. Найти высоту треугольника ABC, проведённую через вершину B.



1) $\triangle CBH \sim \triangle BAM$

$\Rightarrow \frac{CB}{BA} = \frac{BH}{AM} = \frac{h}{m}$ (1)

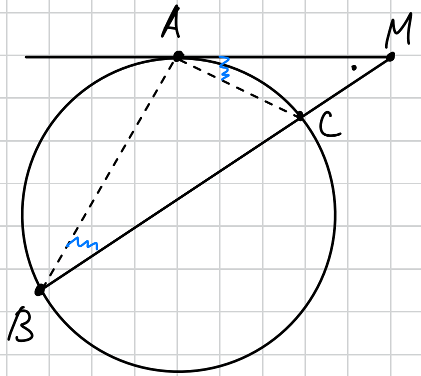
2) $\triangle ABH \sim \triangle BCN$

$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{h}{n}$ (2)

$(1),(2) \Rightarrow \frac{n}{h}=\frac{h}{m} \Rightarrow h=\sqrt{m\cdot n}$

<u>Теорема 2</u>: Если из одной точки M к окружности проведены касательная MA и секущая MB, пересекающая окружность в точке C, то справедливо рав-во $MA^2=MB\cdot MC$

△



1) $\angle CBA=\angle CAM$ (по св-ву кас. и хорды)

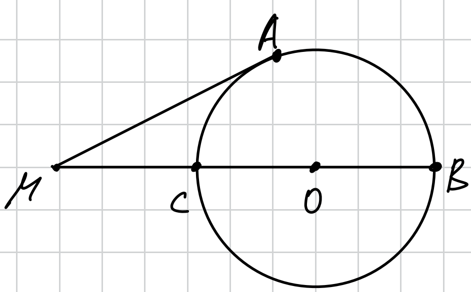
2) $\triangle MAC\sim\triangle MBA$

$$\frac{MA}{MB}=\frac{MC}{MA}$$

$$AM^2=MB\cdot MC$$

$\boxed{\triangle}$

Задача 5. Радиус окружности равен R. Из точки M проведены касательная MA и секущая MB, проходящая через центр O окружности (рис. 8). Найти расстояние между точкой M и центром окружности, если $MB=2MA$.



1) $MA^2=MC\cdot MB$

$MA^2=(2MA-2R)2MA$

$3MA^2-4R\cdot MA=0$

$$MA = \frac{4}{3}R$$

$$\Rightarrow MC = \left(\frac{8}{3} - 2\right)R = \frac{2}{3}R$$

$$MO = \frac{5}{3}R$$

3. Свойства хорд окружностей

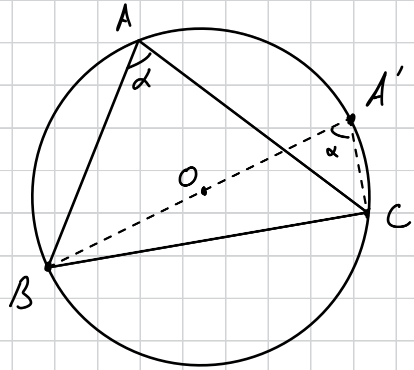
Свойство 1.3: Диаметр, перп. хорде, делит ее пополам. Обратно: диаметр, прох. ч/з середину хорды перп. ей

Свойство 1.4: Равные хорды окружности находятся на равном расстоянии от центра окружности. Обратно: на равном расстоянии от центра окружности находятся равные хорды

Свойство 1.5: Дуги, заключенные м/у параллельными хордами равны

Свойство 1.6: Если две хорды AB и CD пересекаются в точке M, то $AM \cdot MB = CM \cdot MD$

Свойство 1.7: Если в окружности радиуса R вписанный угол, опирающийся на хорду длины a, равен α, то $a = 2R\sin\alpha$



1. Если α - острый:

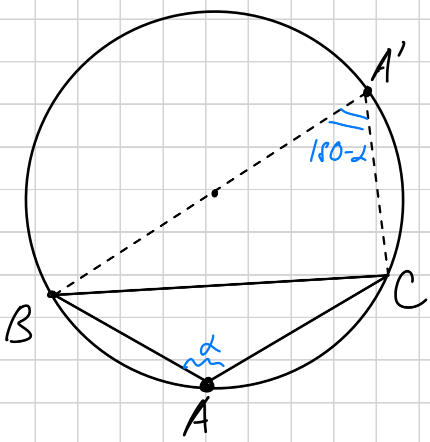
1) Проведем BO:

$\angle BA'C = \alpha$

2) BA' - диам $\Rightarrow \angle BCA' = 90^\circ$

$\Rightarrow$ в $\triangle BCA'$: $BC = 2R\sin\alpha$

2. Если α - тупой

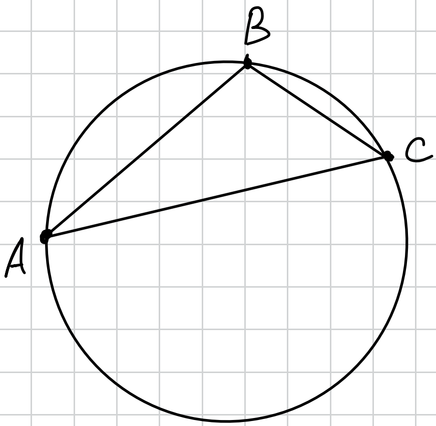


$\angle BCA' = 90^\circ$

$\Rightarrow BC = 2R\sin(180^\circ - \alpha) = 2R\sin\alpha$

$\boxtimes$

Задача 6. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC, в котором $AB = 3\sqrt{3}$, $BC = 2$ и угол $ABC = 150°$.



1) По т. cos:

$$AC^2 = 27 + 4 + 2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot 2 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AC^2 = 49$$

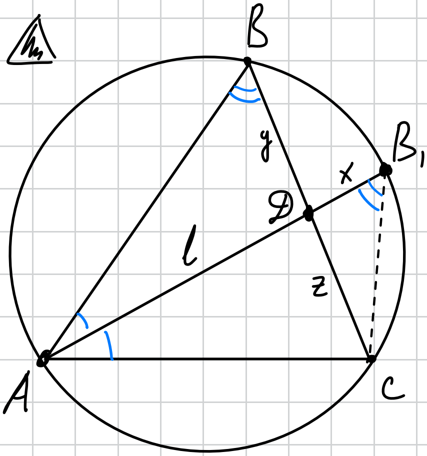
$$AC = 7$$

2) По доказанному выше:

$$R = \frac{AC}{2\sin\alpha} = \frac{7}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 7$$

С помощью данного факта можно д-ть теорему

Теорема 3: Пусть AD — биссектриса $\triangle ABC$, тогда
$$AD^2 = AB\,AC - BD \cdot CD$$



1) Опишем окр-ть около ABC

2) $\triangle ABD \sim \triangle AB_1C$

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{AD}{AC} \Leftrightarrow \frac{AB}{l+x} = \frac{l}{AC} \quad (1)$$

3) По св-ву пересек. хорд
$$l \cdot x = y \cdot z \quad (2)$$

4) Тогда (1), (2):
$$l^2 + y \cdot z = AB \cdot AC$$

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

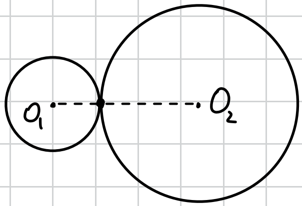
$\blacksquare$

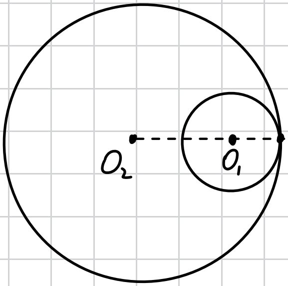
4. Две касающиеся окружности

Варианты касания

Внешнее

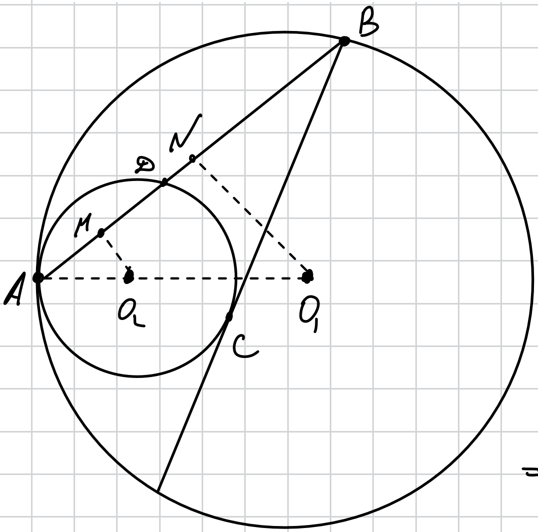
Внутреннее





Замечание: Точка касания лежит на прямой, соед. центры окр-тей

Задача 7. Две окружности радиусов R_1 и R_2 ($R_1 > R_2$) внутренне касаются в точке A. Через точку B, лежащую на большей окружности, проведена прямая, касающаяся меньшей окружности в точке C (рис. 15). Найти AB, если $BC = a$.



1) По св-ву хорды и кас.

$$BC^2 = BD \cdot AB$$

2) $AM = \frac{1}{2} AD$, $AN = \frac{1}{2} AB$

3) $\triangle AMO_2 \sim \triangle ANO_1$

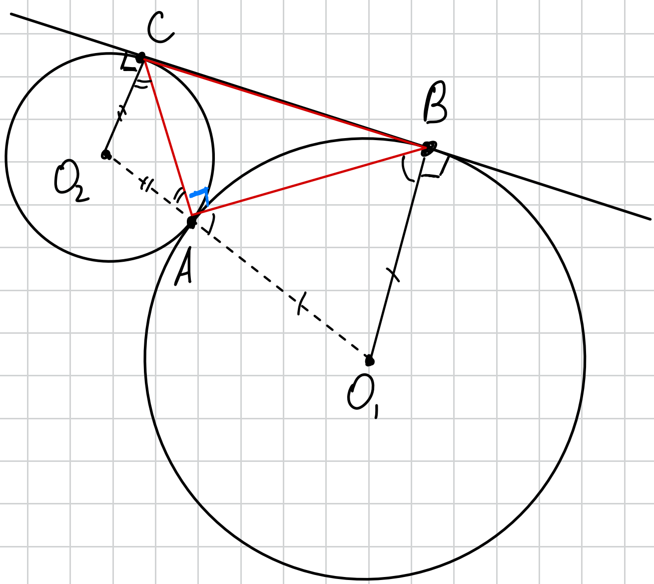
$$\Rightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{R_2}{R_1}$$

Тогда

$$BC^2 = AB(AB - AD) = AB^2\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$AB = \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{R_2}{R_1}}}$$

Задача 8. Две окружности радиусов R_1 и R_2 внешне касаются в точке A (рис. 16). Их общая внешняя касательная касается большей окружности в точке B и меньшей – в точке C. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.



$\angle BO_1A + \angle CO_2A = 180°$