

+

×

—

÷

Задачи на модули

Есть много способов решения уравнений с модулем. Рассмотрим некоторые из них

1. Определение модуля

№1 Решить ур-е:

$$|2 - 5x^2| = 3$$

Если модуль числа = 3, то подмодульное выражение равно либо 3 либо -3:

$$\begin{cases} 2 - 5x^2 = 3 \\ 2 - 5x^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -\frac{1}{5} \\ x^2 = 1 \end{cases}$$

Ответ: ± 1

№2 Решить ур-е:

$$|2x - 3| = 3 - 2x = -(2x - 3)$$

По есть: $2x - 3 \leq 0$

Ответ: $(-\infty; \frac{3}{2}]$

М3 Решить ур-е:

$$|x^2 - 13x + 35| = |35 - x^2|$$

Если модули чисел равны, то эти числа могут отличаться только знаком:

$$|a| = |b| \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases}$$

Тогда наше ур-е равносильно совокупности

$$\begin{cases} x^2 - 13x + 35 = 35 - x^2 \\ x^2 - 13x + 35 = x^2 - 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 13x = 0 \\ 13x = 70 \end{cases}$$

Ответ: $\{0, \frac{13}{2}, \frac{70}{13}\}$

2. Перебор промежутков

М1 Решить ур-е:

$$|2 - x| = 5 - 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ 2 - x = 5 - 4x \\ 2 - x < 0 \\ x - 2 = 5 - 4x \end{cases}$$

Ответ: 1

№2 Решить ур-е:

$$|x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| = 4$$

Метод интервалов:

		1		2		3		x
$ x-1 $:	-		+		+		+	
$ x-2 $:	-		-		+		+	
$ x-3 $:	-		-		-		+	
		I		II		III		IV

1) Случай (I): $x \leq 1$:

$$x = 1$$

2) Случай (II): $1 \leq x \leq 2$

$$x - 1 - 2(2 - x) + 3(3 - x) = 4$$

$$4 = 4$$

$$\Rightarrow \forall x \in [1; 2]$$

3) Случай (III): $2 \leq x \leq 3$

$$x = 2$$

4) Случай (IV): $x \geq 3$

$$x = 5$$

Ответ: $[1; 2] \cup \{5\}$

3. Равносильные переходы

Рассмотрим ур-е

$$|A| = B$$

где A, B - нек. выражения, содержащие переменную.

Если $B < 0$, то ур-е не имеет решений.

Если же $B \geq 0$, то ур-е сводится к совокупности двух уравнений $A = \pm B$:

$$|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A = -B \\ B \geq 0 \end{cases}$$

М1 Решить ур-е:

$$|x^2 - 2x - 1| - x + 1 = 0$$

$$|x^2 - 2x - 1| = x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 = x - 1 \\ x^2 - 2x - 1 = 1 - x \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0, 3 \\ x = -1, 2 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Ответ: $\{2, 3\}$

м2 Решить ур-е:

$$|x+1| + |-x-3| - 6 = x$$

$$|x+1| + |x+3| = x+6$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+1+|x+3|=x+6 \\ x+1+|x+3|=-x-6 \\ x \geq -6 \end{cases} & \begin{cases} |x+3|=5 \quad (1) \\ |x+3|=-2x-7 \quad (2) \\ x \geq -6 \end{cases} \end{cases}$$

Рассм (1):

$$\begin{cases} |x+3|=5 \\ x \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+3=5 \\ x+3=-5 \\ x \geq -6 \end{cases} & \begin{cases} x \geq -6 \\ x=2 \\ x=-8 \end{cases} \end{cases}$$

не погх
(П.к. :))

Рассм (2)

$$\begin{cases} |x+3| = -2x-7 \\ x \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 2x+7 \\ x+3 = -2x-7 \\ x \geq -6 \\ x \leq -\frac{7}{2} = -3\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ x = -\frac{10}{3} = -3\frac{1}{3} \\ -6 \leq x \leq -3\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x = -4$$

Ответ: -4, 2

№3 Решить ур-е:

$$\begin{cases} |x^2 - 4y + 3| + y = 1 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$$