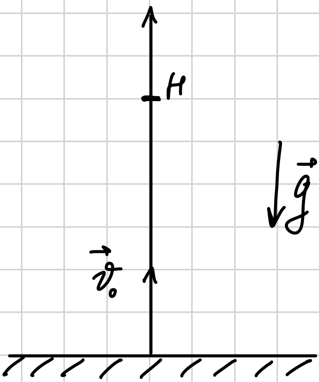
$+ \quad \times$

$- \quad \div$

§4. Примеры движения тел

3. Тело, брошенное вертикально



$\tau_{полета}$ – ?, H – ?

τ_1 (время подъема на max высоту) – ?

S (путь) – ?

Графики координаты и скорости от времени

1) Записываем проекции ур-й движения на OY:

$$\begin{cases} v_y = v_0 - gt \\ y = v_0 t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

2) При $t = \tau$ – тело упало на землю $\Rightarrow y(t=\tau) = 0$

$$v_0 \tau - \frac{g\tau^2}{2} = 0$$

$$\begin{cases} \tau = 0 \text{ – начало броска} \\ \tau = \dfrac{2v_0}{g} \end{cases}$$

Найдем скорость при $t=\tau$:

$$v_y^{кон} = v_0 - g\tau = v_0 - 2v_0 = -v_0 \quad \left(\begin{array}{l}\text{т.е. } |v_y^{кон}| = v_0 \\ \vec{v}_y^{\,кон} \uparrow\downarrow \vec{v}_0\end{array}\right)$$

3) При $t=\tau_1$ – тело в наивысшей точке $\Leftrightarrow y(\tau_1)=H$ и $v(\tau_1)=0$

$$\begin{cases} H = v_0\tau_1 - \dfrac{g\tau_1^2}{2} \\ 0 = v_0 - g\tau_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau_1 = \dfrac{v_0}{g} \\ H = \dfrac{v_0^2}{2g} \end{cases}$$

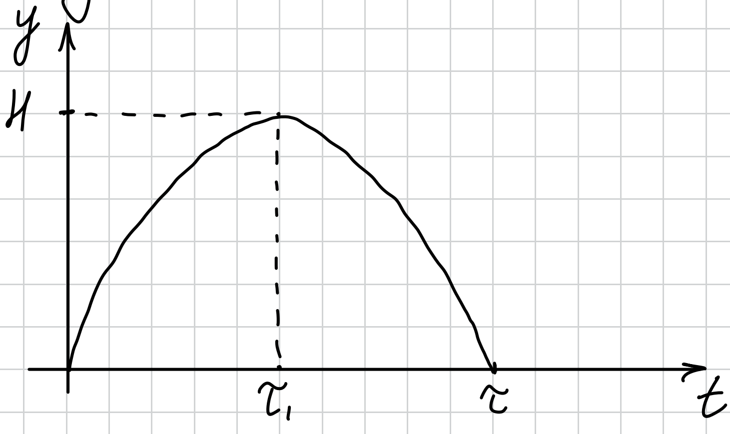
Заметим, что $\tau = 2\tau_1$

4) Пройденный путь $S = 2H$

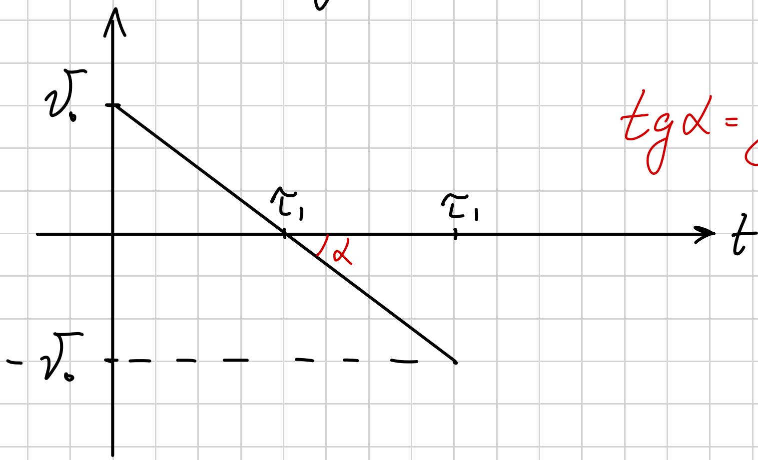
Перемещение $= 0$ (вернулись в ту же точку)

5) Графики

$$y(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \text{ – парабола}$$

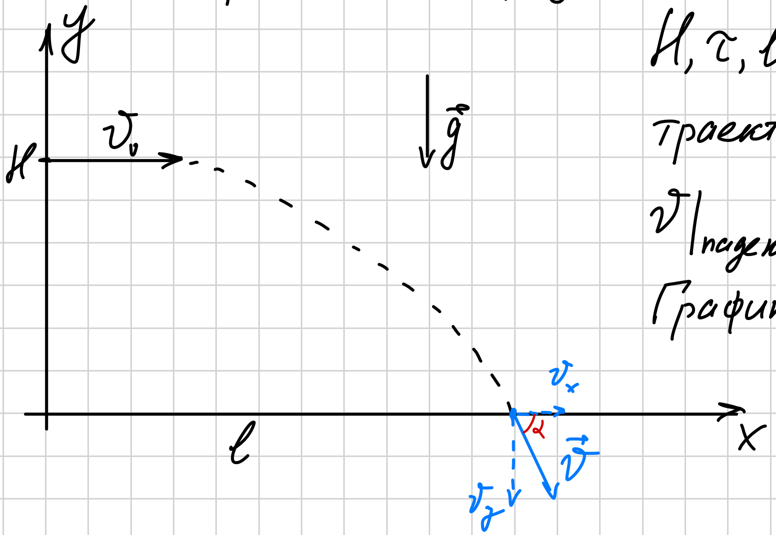


$v_y(t) = v_0 - gt$ — прямая



$tg\,\alpha = g!$

4. Тело, брошенное горизонтально



H, τ, l — ?

траектория — ?

$v|_{падение}$ — ?

Графики

1) Начальные условия (прямоуг. сист. коорд. введена на рис)

$$\begin{cases} x_0 = 0, \; y_0 = H \\ v_{x_0} = v_0, \; v_{y_0} = 0 \end{cases}$$

2) Тогда спроецированное ур-е движения

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = H - \frac{gt^2}{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = -gt \end{cases}$$

3) При $t = \tau$ - тело упало, то есть $y(\tau) = 0$, $x(\tau) = l$

$$\begin{cases} l = v_0 \tau \\ 0 = H - \frac{g\tau^2}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} l = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}} \\ \tau = \sqrt{\frac{2H}{g}} \end{cases}$$

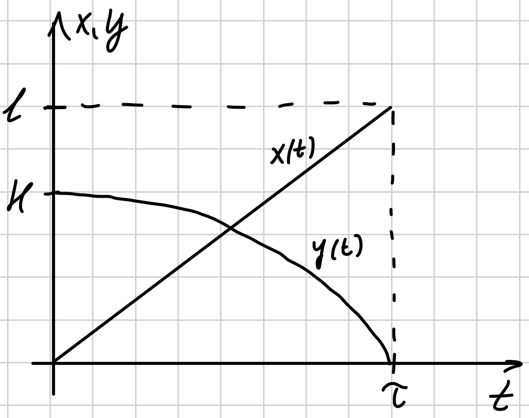
4) Тогда скорости

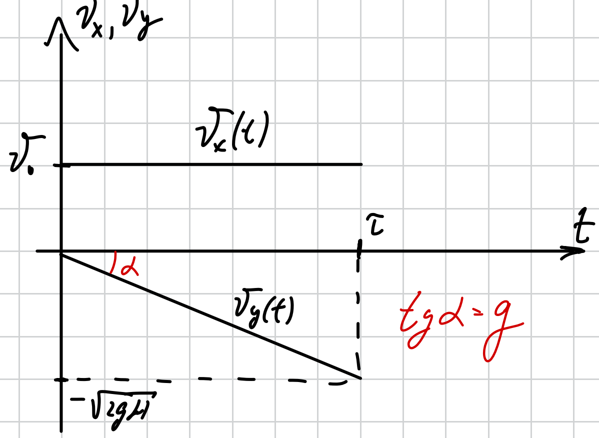
$$\begin{cases} v_x(\tau) = v_0 \\ v_y(\tau) = -\sqrt{2gH} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(\tau) = \sqrt{v_0^2 + 2gH} \\ tg\,\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\sqrt{2gH}}{v_0} \end{cases}$$

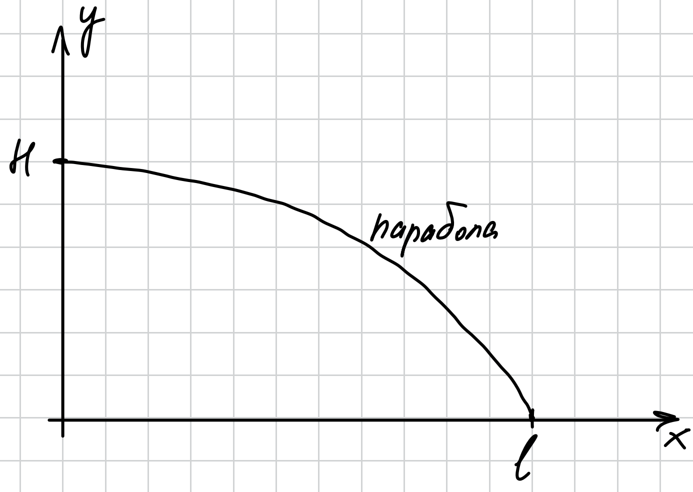
5) Чтобы получить $y(x)$ нужно исключить t:

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + H \text{ - парабола}$$

6) Графики:

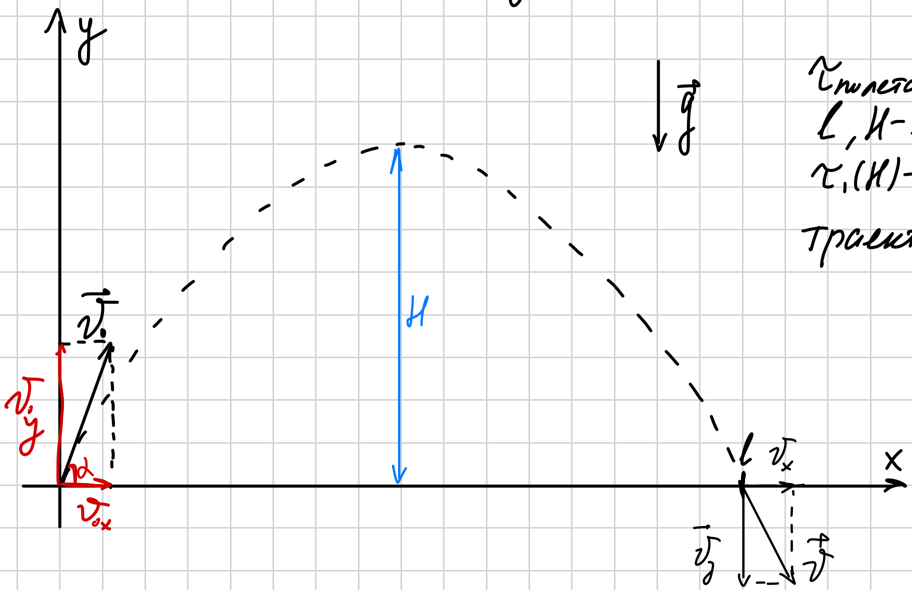






5. Тело, брошенное под углом

$\tau_{полета}$ – ?
l, H – ?
$\tau_1(H)$ – ?
Траектория – ?



1) Ур-е движения

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = v_0 \sin\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x = v_0 \cos\alpha \, t \\ y = v_0 \sin\alpha \, t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

2) При $t = \tau$ – тело упало, тогда $y(\tau) = 0$, $x(\tau) = l$

$$\begin{cases} l = v_0 \cos\alpha \, t \\ 0 = v_0 \sin\alpha \, t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau = \dfrac{2 v_0 \sin\alpha}{g} \\ l = \underbrace{\dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}} \end{cases}$$

отсюда легко понять при каком α : $l \to max$

3) Скорость в этот момент:

$$v(\tau) = \sqrt{v_x^2(\tau) + v_y^2(\tau)} = \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + (-v_0\sin\alpha)^2} = v_0$$

$v(\tau)$ составляет угол α с осью Ox (видно из проекций)

4) При $t = \tau_1$:

$$\begin{cases} 0 = v_0\sin\alpha - g\tau_1 \\ H = v_0\sin\alpha\,\tau_1 - \dfrac{g\tau_1^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau_1 = \dfrac{v_0\sin\alpha}{g} \\ H = \dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} \end{cases}$$

5) Заметим $\tau = 2\tau_1$

6) Траектория:

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + \operatorname{tg}\alpha\, x$$

§5. Решение задач

№1

Пример 10. Два маленьких стальных шарика брошены одновременно из одной и той же точки с поверхности земли с начальными скоростями $v_{01} = 5$ м/с и $v_{02} = 8$ м/с, направленными под углами $\alpha_1 = 80^\circ$ и $\alpha_2 = 20^\circ$ к горизонту соответственно. Чему равно расстояние между шариками, спустя время $t = \frac{1}{3}$ с после броска?

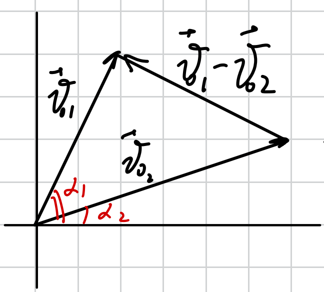
Траектории шариков лежат в одной вертикальной плоскости. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1) Запишем ур-е движения для каждого:

$$\begin{cases} \vec{r}_1(t) = \vec{v}_{01} t + \dfrac{\vec{g}t^2}{2} \\ \vec{r}_2(t) = \vec{v}_{02} t + \dfrac{\vec{g}t^2}{2} \end{cases} \quad (*)$$

2) Расстояние м/у шарами

$$l = |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| \overset{(*)}{=} \underbrace{|\vec{v}_{01} - \vec{v}_{02}|}_{\text{можно вычислить по Т. cos}}\, t = 7 \cdot \frac{1}{3} \approx 2{,}3\text{ м}$$

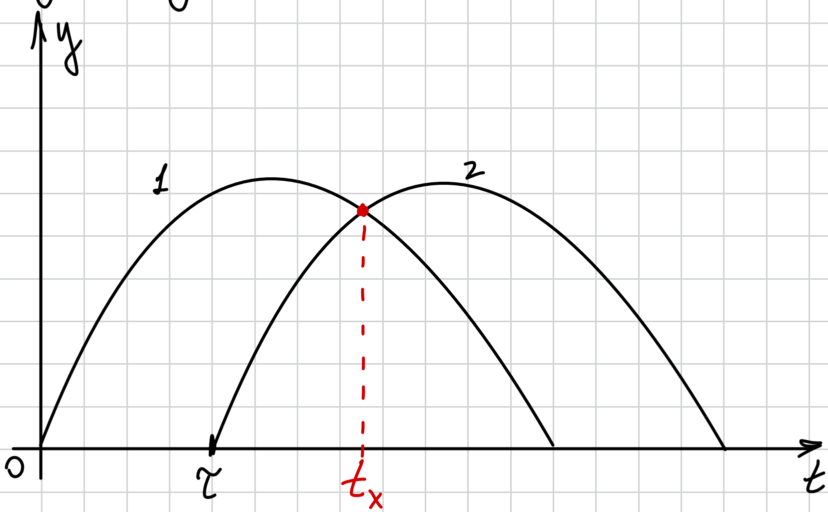


$$\Rightarrow |\vec{v}_{01} - \vec{v}_{02}|^2 = v_{01}^2 + v_{02}^2 - 2v_{01}v_{02}\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

№2

Пример 11*. Два тела брошены вертикально вверх с поверхности земли из одной точки вслед друг за другом с интервалом времени τ, с одинаковыми начальными скоростями $\vec{v}_0$. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, через сколько времени они «встретятся»? Прокомментируйте решение для $v_0 < g\frac{\tau}{2}$.

1) Изобразим ситуацию на графике, зная, что в таком случае $y(t)$ – парабола:



2) Запишем спроецированные ур-ны движения

$$\begin{cases} y_1(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \\ y_2(t) = v_0(t-\tau) - \frac{g(t-\tau)^2}{2} \end{cases}$$

при $t=\tau$: $y_2(\tau)=0$

3) При встрече: $y_1(t_x) = y_2(t_x)$

$$v_0 t_x - \frac{g t_x^2}{2} = v_0(t_x - \tau) - \frac{g}{2}(t_x^2 - 2t_x\tau + \tau^2)$$

$$v_0\tau = \frac{g}{2}(2t_x\tau - \tau^2), \ \tau \neq 0$$

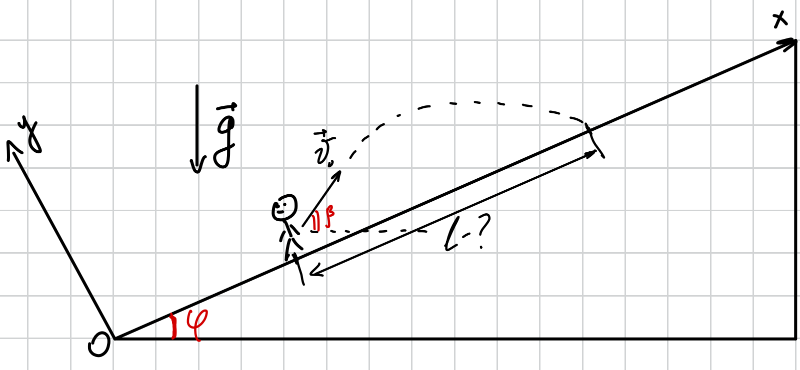
$$v_0 = gt_x - \frac{g\tau}{2}$$

$$\boxed{t_x = \frac{v_0}{g} + \frac{\tau}{2}}$$

При $v_0 < g\frac{\tau}{2} \Rightarrow \tau > \underbrace{\frac{2v_0}{g}}_{\text{время полета 1-го тела}} \Rightarrow$ тела встретятся в $y=0$

№3

Пример 12*. Мальчик, находясь на плоском склоне горы с углом наклона $\varphi = 30^\circ$, бросает камень в сторону подъёма горы, сообщив ему начальную скорость v_0, направленную под углом $\beta = 60^\circ$ к горизонту. На каком расстоянии от мальчика упадёт камень? Сопротивлением воздуха пренебречь.



1) Введем XoY.

2) Уравнения движения: $\vec{a} = \vec{g}$

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2} & (1) \\ \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g} t & (2) \end{cases}$$

3) Спроецируем (1) и (2) – аккуратно!:

$$g_x = -g\sin\varphi, \quad g_y = -g\cos\varphi$$

$$v_{0x} = v_0\cos(\beta-\varphi), \quad v_{0y} = v_0\sin(\beta-\varphi)$$

Тогда (1) и (2):

$$\begin{cases} x(t) = v_0\cos(\beta-\varphi)t - \frac{g\sin\varphi\, t^2}{2} \\ y(t) = v_0\sin(\beta-\varphi)t - \frac{g\cos\varphi\, t^2}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0\cos(\beta-\varphi) - g\sin\varphi\, t \\ v_y(t) = v_0\sin(\beta-\varphi) - g\cos\varphi\, t \end{cases}$$

4) Пусть τ – время полета, тогда: $x(\tau) = l$, $y(\tau) = 0$

$$\begin{cases} l = v_0\cos(\beta-\varphi)\tau - \frac{g\sin\varphi\, \tau^2}{2} \\ 0 = v_0\sin(\beta-\varphi)\tau - \frac{g\cos\varphi\, \tau^2}{2} \end{cases} \quad (\tau = 0 \text{ не подх})$$

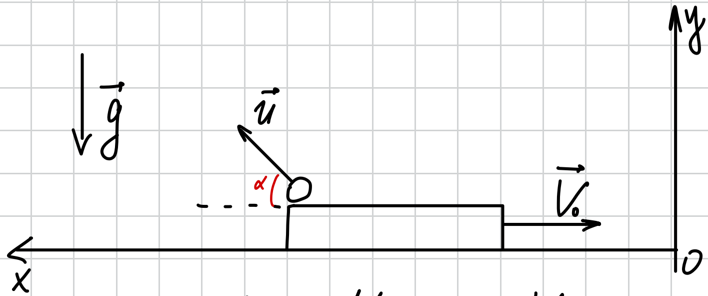
$$\begin{cases} \tau = \dfrac{2v_0 \sin(\beta - \varphi)}{g\cos\varphi} \\ l = \dfrac{v_0^2 \sin(2\beta - 2\varphi)}{g\cos\varphi} - \dfrac{2v_0^2 \sin^2(\beta-\varphi)\sin\varphi}{g\cos^2\varphi} \end{cases}$$

$$l = \frac{v_0^2}{g}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{2v_0^2}{g}\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}\frac{v_0^2}{g}$$

5) Что если нужно найти H_{max}?

№4

Пример 13. Массивная платформа движется с постоянной скоростью $\vec{V_0}$ по горизонтальному полу. С заднего края платформы производится удар по мячу. Модуль начальной скорости мяча относительно платформы равен $u = 2V_0$, причём вектор $\vec{u}$ составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с горизонтом (рис. 23). На какую максимальную высоту над полом поднимется мяч? На каком расстоянии от края платформы будет находиться мяч в момент приземления. Высотой платформы и сопротивлением воздуха пренебречь. Все скорости лежат в одной вертикальной плоскости. (ФЗФТШ при МФТИ, 2009.)



$H - ?$

$L - ?$

0) Платформа массивная $M \gg m \Rightarrow V_0 = const$

1) Из условия U – отн. скорость, тогда з-н сложения скоростей

$$\vec{v}_{Абс} = \vec{U} + \vec{V_0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{Абс}^x = U\cos\alpha - V_0 = V_0(2\cos\alpha - 1) = v_{0x} \\ v_{Абс}^y = -U\sin\alpha = v_{0y} \end{cases}$$

2) Запишем з-н движения

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x} t \\ y(t) = v_{0y} t - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \end{cases}$$

3) В точке max высоты:

$$\begin{cases} y(\tau) = H = v_{0y}\tau - \dfrac{g\tau^2}{2} \\ v_y(\tau) = 0 = v_{0y} - g\tau \end{cases} \Rightarrow H = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

$$H = \frac{3}{4}\,\frac{4V_0^2}{2g} = \frac{3V_0^2}{2g}$$

Время полета: $y(T) = 0 \Rightarrow T = \dfrac{2v_{0y}}{g} = \dfrac{2\cdot 2V_0 \sin\alpha}{g} = \dfrac{2\sqrt{3}V_0}{g}$

4) За это время платформа уехала на

$$L = V_0 T = \frac{2\sqrt{3}V_0^2}{g}$$

Замечание: Заметим, что $v_{0x} = 0$ (что это значит?)