+ ×

− ÷

Шары и перегородки

Повторим основные моменты из 1-го занятия:

$x \in X$, $y \in Y$

1) Кол-во способов выбрать пару x и y равно $|X| \cdot |Y|$

кол-во эл-тов в X

2) Кол-во способов выбрать x или y равно $|X| \cdot |Y|$

3) Кол-во способов переставить в ряд n различных элементов равно $n!$

4) Кол-во выбрать k разл элементов из n равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

"число сочетаний"

наборы, отличающиеся только порядком эл-тов считаются одинаковыми

если иначе - порядок имеет значение, то кол-во способов

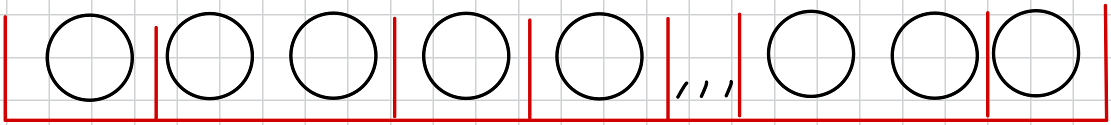
$$k!\,C_n^k = A_n^k$$

"число размещений"

№1

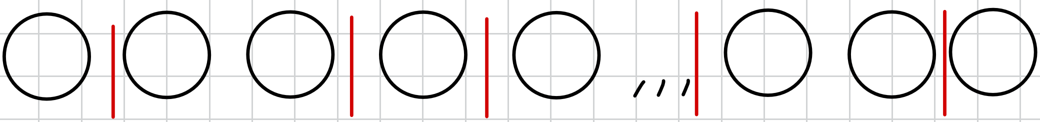
Шары и перегородки

1. 6 ящиков занумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым?



ящики

1) Дно ящиков и крайние перегородки нас не интересуют => уберем их



2) Вместо того чтобы считать способы разложения шаров по ящикам - посчитаем кол-во способов расставить перегородки м/у шарами.

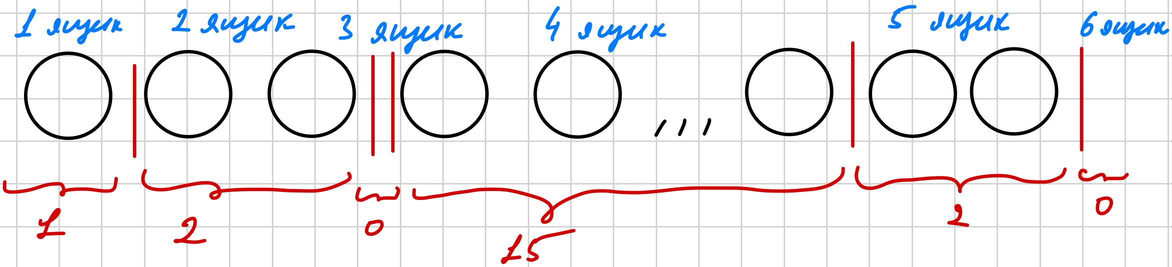
Или посчитать кол-во способов выбрать 5 пустых мест из 19

А это C_{19}^{5}

Ответ: $C_{19}^{5} = C_{20-1}^{6-1}$

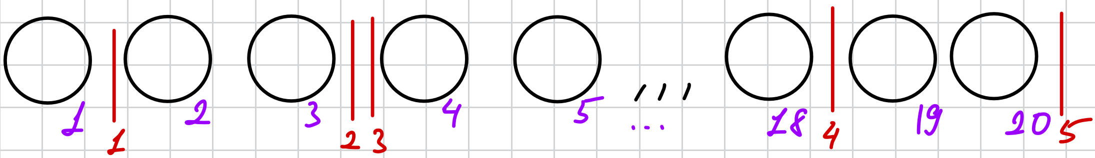
№2

2. 6 ящиков занумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров (на этот раз некоторые ящики могут оказаться пустыми)?



1) В отличии от прошлой задачи несколько палочек может оказаться вместе + палочки могут быть "слева" и "справа" => решаем по-другому

2) Занумеруем объекты:



Общее количество перестановок: $(20+5)!$

Вспомним, что шары одинаковые (и стенки ящиков) => нужно поделить на число перестановок м/у собой:

$$\frac{(20+5)!}{20!\,5!} = C_{25}^{5} = C_{20+6-1}^{6-1}$$

общая ф-ла

Как из решения №2 получить решение №1

"приклеим" по 1 шару в каждый ящик

Осталось решить задачу №2 для 14 шаров

Ответ: $C_{14+6-1}^{6-1} = C_{19}^{5}$

№3

3. Сколькими способами натуральное число n можно представить в виде суммы

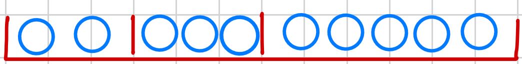
(а) k натуральных слагаемых;

(б) k неотрицательных целых слагаемых (представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными)?

а)

1) Например для $n=10$, $k=3$:

$$10 = 2 + 3 + 5$$



Т.е. нужно посчитать кол-во способов разложить n шаров по K ящикам (ящики не пустые)

Ответ: C_{n-1}^{k-1}

б) В ящике может быть 0 шаров => №2

Ответ: C_{n+k-1}^{k-1}

Кол-во способов разложить шары по ящикам

места \ шары	различные	одинаковые
1 место	$n\cdot(n-1)\ldots(n-k+1)$ $\parallel$ $C_n^k\cdot k! = A_n^k$	C_n^k
∞	n^k	C_{n+k-1}^{k-1} №2

$\underbrace{n}\ \underbrace{n}\ \underbrace{n}\ \ldots\ \underbrace{n}$

k - мест

№4 Кол-во способов разложить 9 шаров по 3-м ящикам с 2,3,4 местами?

1 способ

$$C_9^2 \cdot C_7^3 \cdot C_4^4 = \frac{9!}{7!\,2!} \cdot \frac{7!}{4!\,3!} \cdot \frac{4!}{0!\,4!} =$$

кол-во способов выбрать шары для 1-го ящика

$$= \frac{9!}{2!\,3!\,4!}$$

2 способ

$$\frac{\text{Кол-во перестановок 9 шаров}}{\left(\begin{array}{c}\text{перестановки}\\ \text{в 1-м ящике}\end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c}\text{— '' —}\\ \text{во 2-м ящике}\end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c}\text{— '' —}\\ \text{в 3-м ящике}\end{array}\right)}$$

Кол-во слов длины k, где алфавит содержит n букв?

порядок букв / буквы	важен	не важен
повт	n^k	C_{n+k-1}^{k-1}
не повт	$k!\,C_n^k = A_n^k$	C_n^k

1) Порядок важен и буквы могут повторяться:

$$\underbrace{n}\ \underbrace{n}\ \dots\ \underbrace{n} = n^k$$

k - мест (букв в слове)

2) Порядок важен и буквы не повт.:

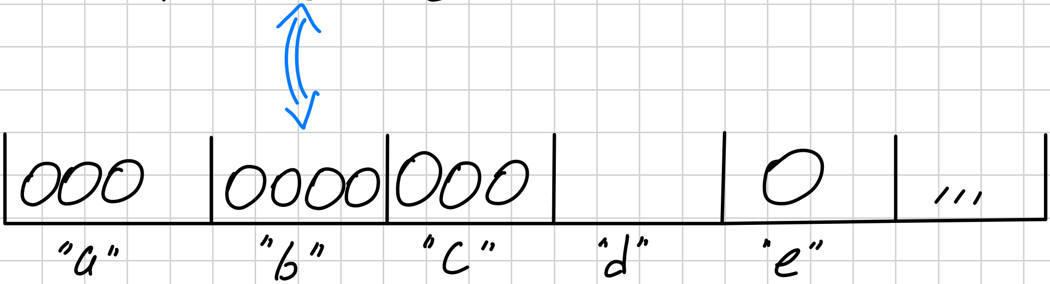
$$\underbrace{n}\ \underbrace{n-1}\ \underbrace{n-2}\ \dots\ \underbrace{n-k+1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3) Буквы не повт. и порядок не важен

$$\frac{\underbrace{n}\ \underbrace{n-1}\ \underbrace{n-2}\ \dots\ \underbrace{n-k+1}}{k!}$$

4) Порядок не важен и буквы повт.

$\overline{aaabbbbccce}$ – слово



⇒ Кол-во способов разложить k шаров по n ящикам

одинаковых!

$$C_{n+k-1}^{k-1}$$