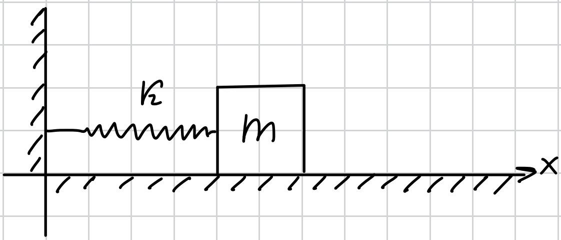
$+ \quad \times$

$- \quad \div$

§3. Решение задач

№1

На горизонтальной поверхности лежит грузик,который прикреплен к стене нерастянутой пружиной. Для того чтобы отодвинуть грузик на расстояние 2 см дальше от стены, необходимо совершить работу 20 Дж, а для того чтобы отодвинуть на расстояние 4 см от стены необходимо совершить в 3 раза большую работу. Чему равен коэффициент жесткости пружины?



$A_1 = 20$ Дж, x

$A_2 = 3A_1$, $2x$

1) На первый взгляд:

$$A_1 = \frac{kx^2}{2}$$

$$A_2 = \frac{k(2x)^2}{2}$$

но отличаются в 4 раза ⇒ есть работа силы трения

2) Тогда:

$$\begin{cases} A_1 = \frac{kx^2}{2} + F \cdot x \\ A_2 = \frac{k(2x)^2}{2} + 2Fx = 3A_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_1 = 2kx^2 - kx^2 = kx^2$$

$$k = \frac{A_1}{x^2} = \frac{20}{(0{,}02)^2} = 50 \ \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

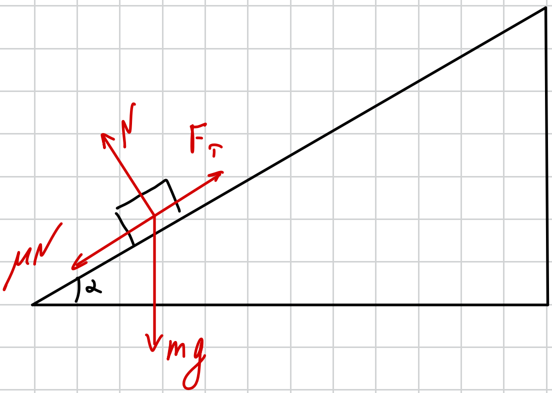
№2

(Д/З №18)

Пример 4.3. Аэросани массой 2 т движутся в гору с постоянной скоростью (рис. 13). Развиваемая аэросанями полезная мощность – 30 кВт, коэффициент трения 0,1, угол наклона «горы» 5°.

1) Определите скорость аэросаней.

2) Какую полезную мощность должны развивать сани, чтобы двигаться с той же горы вниз с той же скоростью?



1) При подъеме:

$$\begin{cases} F_T = \mu N + mg\sin\alpha \\ N = mg\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow F_T = mg(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)$$

2) Мощность:

$$P = F_T \cdot v = mgv(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)$$

$$v = \frac{P}{mg(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)} \approx 30 \text{ км/ч}$$

3) При спуске $F_T = mg(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{\mu\cos\alpha - \sin\alpha}{\mu\cos\alpha + \sin\alpha} P \approx 2 \text{ кВт}$$

№3

Второй космической скоростью v_2 называют *минимальную* скорость, которую нужно сообщить телу на поверхности планеты для того, чтобы оно неограниченно удалилось от нее. (*Минимальность* предполагает, что на бесконечности скорость тела обратится в нуль.) Для Земли $v_2 = 11,2$ км/с. Какова будет скорость v тела на бесконечно большом расстоянии от Земли, если на поверхности Земли сообщить ему скорость $V = 12,2$ км/с? Считать, что в обоих случаях тело удаляется по радиусу от центра Земли. Влиянием вращения Земли, сопротивлением воздуха и притяжением других небесных тел пренебречь.

1) Запишем З.С.Э для v_2:

$$\underbrace{\frac{mv_2^2}{2} + E_{пот}^1}_{\text{на пов-ти Земли}} = \underbrace{E_{пот}^2}_{\text{в космосе на } \infty}$$

$$\Rightarrow E_{пот}^2 - E_{пот}^1 = \frac{mv_2^2}{2}$$

2) Запишем З.С.Э для V:

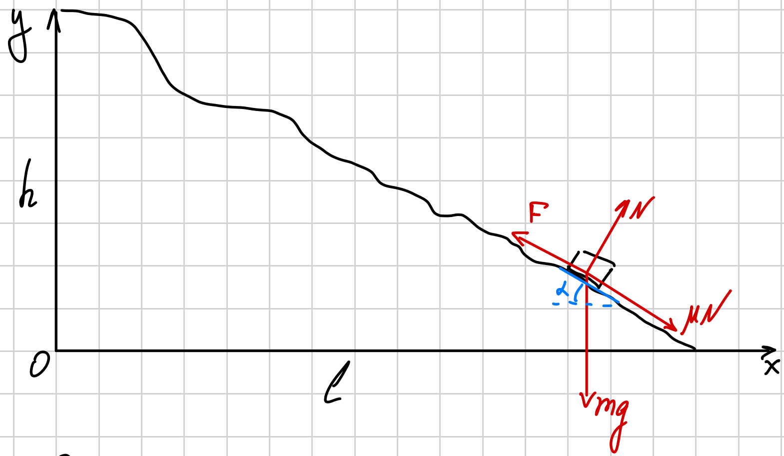
$$\frac{mV^2}{2} + E_{пот}^1 = \frac{mv^2}{2} + E_{пот}^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{V^2 - v_2^2}$$

№4

Небольшое тело массой m медленно вытащили на горку, действуя силой F, которая направлена по касательной к траектории. Найдите работу этой силы, если высота горки h, длина ее основания l и коэффициент трения mu

(Д/3, №10)



1) Разобьем весь склон горки на маленькие участки, которые можно считать прямыми. Рассмотрим один такой участок:

$$\begin{cases} F = \mu N + mg\sin\alpha \\ N = mg\cos\alpha \end{cases}$$

спроецировали на оси ∥ участку и ⊥ ему

$$\Rightarrow \Delta A_F = F \cdot \underbrace{\Delta l}_{\text{длина участка горки}} = \mu mg \underbrace{\Delta l \cos\alpha}_{\Delta x} + mg \underbrace{\Delta l \sin\alpha}_{\Delta y}$$

Тогда полная работа – это сумма ΔA_F по всем участкам:

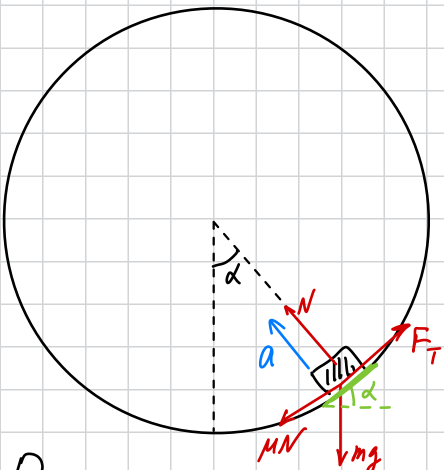
$$A_F = \sum' \Delta A_F = \mu mg \underbrace{\sum' \Delta x}_{l} + mg \underbrace{\sum' \Delta y}_{h}$$

$$A_F = \mu mgl + mgh$$

№ 5

Какова работа силы трения за один оборот аэросаней, движущихся по вертикальной круговой дорожке? Скорость саней постоянна и равна v, масса m, коэффициент трения mu

(Цу Д/3)



1) Рассмотрим аэросани, когда они находятся на угле α от вертикали:

$$\begin{cases} ma = N - mg\cos\alpha \\ a = \dfrac{v^2}{R} \end{cases} \Rightarrow N = m\frac{v^2}{R} + mg\cos\alpha$$

2) Пусть сани сместились на малое расстояние Δl (прямолинейный), тогда элементарная работа силы трения на этом участке:

$$\Delta A = -\mu N \Delta l = -\mu N m \frac{v^2}{R}\Delta l - mg\Delta l \cos\alpha$$

3) Тогда полная работа:

$$A = \sum{}' \Delta A = -\mu N m \frac{v^2}{R}\underbrace{\sum{}' \Delta l}_{2\pi R} - mg\underbrace{\sum{}' \Delta l \cos\alpha}_{\sum{}' \Delta x = 0 \text{ за один оборот}}$$

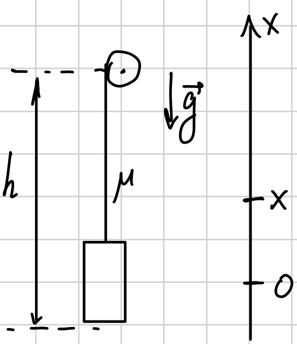
$$\Rightarrow A = -2\pi \mu N m v^2$$

№6

Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы из колодца глубиной h = 10 м поднять на тросе ведро с водой массой m = 8 кг? Линейная плотность троса mu = 0,4 кг / м

Решим задачу 2-мя способами

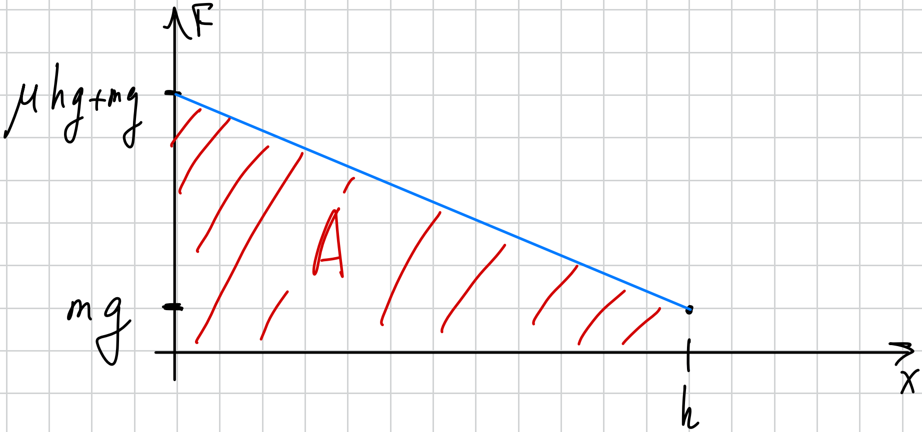
1 способ: Графический



1) Сила, которую нужно приложить для подъема ведра, на координате x:

$$F = mg + \underbrace{\mu(h-x)g}_{\text{висящая часть веревки}}, \quad 0<x<h$$

Построим график $F(x)$:



$$A = \frac{2m+\mu h}{2} gh$$

2 способ: По з-ну сохр. энергии

Пусть нуль пот. энергии соотв. нижнему положению ведра:

Начальное сост – ведро висит на h

Конечное – ведро полностью поднят

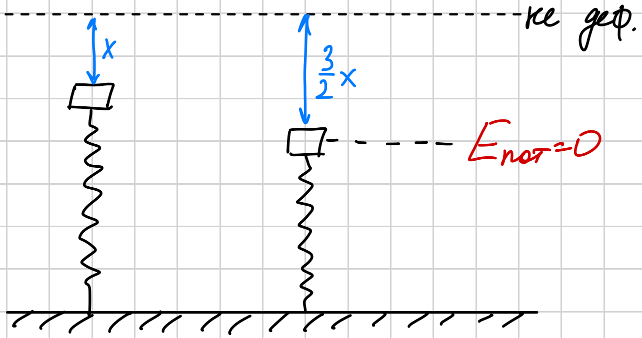
Система – ведро + веревка. Запишем закон изменения полной энергии системы:

$$E_{кон} - E_{нач} = A$$

$$mgh + \mu hgh - \mu hg\frac{h}{2} = A$$

№7

Деформация вертикально расположенной легкой пружины, удерживающей гирю, составляет x. Чтобы увеличить деформацию пружины на 50%, медленно надавливая на груз в вертикальном направлении, надо совершить работу A. Найдите жесткость пружины k



1) Запишем закон изм. полной энергии:

$$E^{кон}-E^{нач}=A$$

$$\frac{k\left(\frac{3}{2}x\right)^2}{2}-\frac{kx^2}{2}-mg\left(\frac{3}{2}x-x\right)=A$$

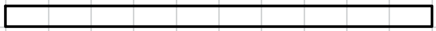
$$A=\frac{5}{8}kx^2-\frac{1}{2}mgx$$

2) Условие равновесия: $mg=kx$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{8}kx^2 \Rightarrow k=\frac{8A}{x^2}$$

№ 8

(**МФТИ**, из старых задач) Какую работу нужно совершить. Чтобы длинную доску, лежащую на земле, повернуть в горизонтальной плоскости вокруг одного из концов на угол α? Длина доски L, масса M, коэффициент трения между доской и землей μ.



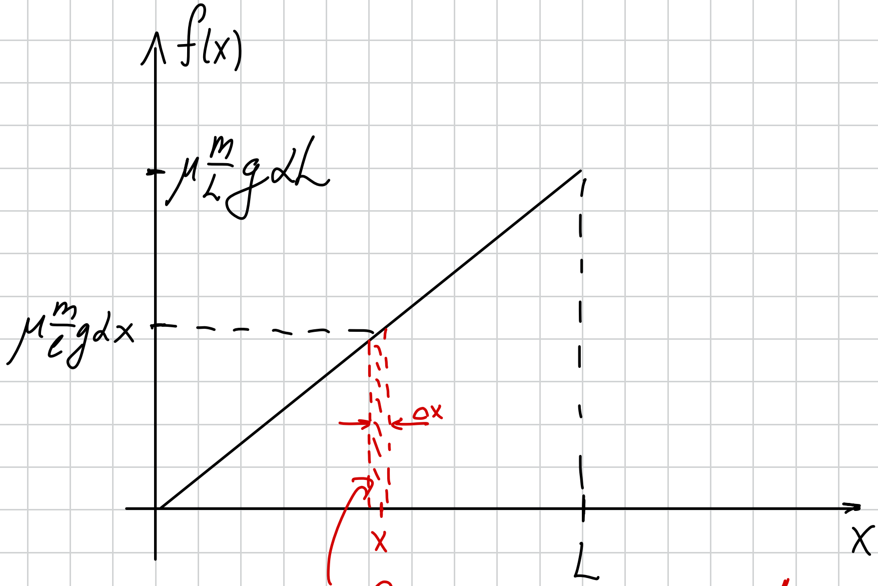
1) На расстоянии x выделим элемент толщиной Δx – его масса $\frac{m}{L}\cdot\Delta x$ и за вращение он проходит дугу длиной $\Delta S = x\cdot\alpha$, α в рад.

2) Тогда работа силы трения на этот кусочек:

$$\Delta A_{тр} = F_{тр}\cdot\Delta S = \mu\frac{m}{L}\Delta x g\cdot x\alpha$$

$$A_{тр} = \sum \underbrace{\mu\frac{m}{L}g\alpha x}_{f(x)}\Delta x$$

Построим график $f(x)$

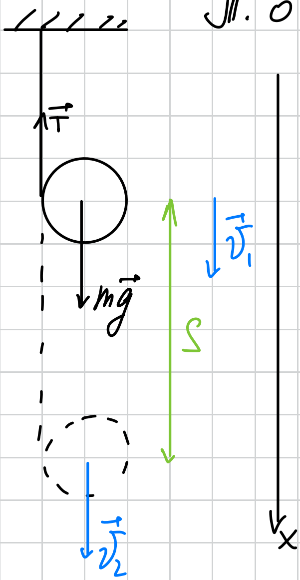


$$\Delta S = \mu \frac{m}{\ell} g \alpha L x \cdot \Delta x = \Delta A$$

$\Rightarrow A =$ площадь под графиком

$$A = \frac{1}{2} \mu \frac{m}{L} g \alpha L \cdot L = \frac{\mu m g L}{2}$$

Замечание: Аналог Т. об изм. кин. энергии для абсолютно тв. тела



Т. о движ. ц.м:

$$m\vec{a}_{ц.м} = \sum{}' \vec{F}_{внеш}$$

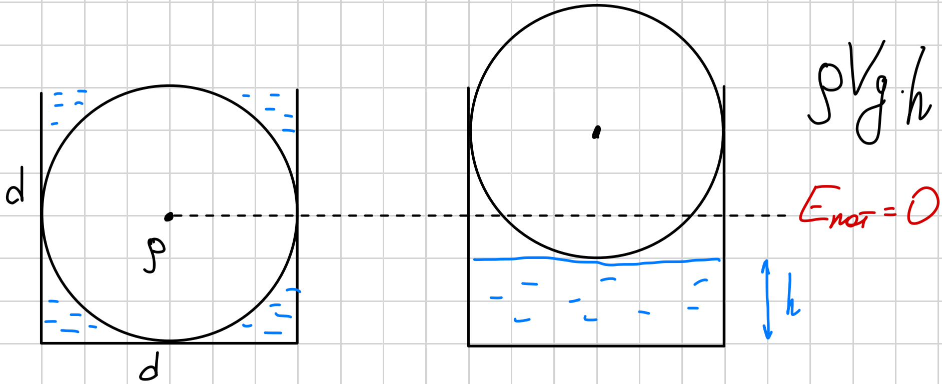
$$m a_{ц.м._x} = \sum{}' F_{внеш._x}$$

$$m \frac{v_2^2 - v_1^2}{2S} = \sum{}' F_{внеш_x}$$

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \underbrace{\overset{(mg-T)S}{\overset{\shortparallel}{\sum{}' F_{внеш_x} S}}}_{\text{Работа, т.к. } S \uparrow\uparrow X}$$

№6

В лунке размером 10 х 10 х 10 см3, целиком заполненной водой, лежит на дне металлический цилиндр. Диаметр цилиндра d немного меньше 10 см. Высота цилиндра равна его диаметру. Для того чтобы вытащить цилиндр из воды, необходимо совершить работу А = 0,185 Дж. Чему равна плотность материала цилиндра



1) Решать будем через изменение потенциальной энергии системы => нужно знать массу воды

2) Найдем объем воды:

$$V_{воды} = V_{куба} - V_{цилиндра} = d^3 - \frac{\pi d^2}{4} d = d^3\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

3) Найдем h:

$$d^2 \cdot h = d^3\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$h = d\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

4) Закон изм. энергии для системы вода + цилиндр