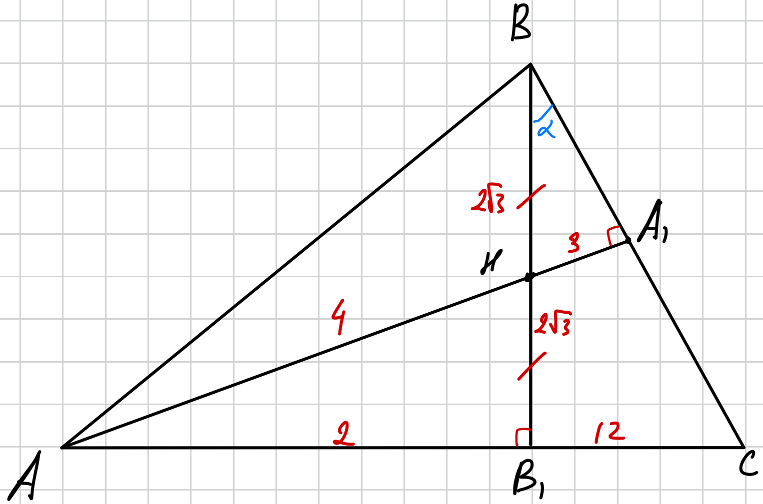
$+ \quad \times$

$- \quad \div$

№1 (Из Д/з)

Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. $BH = HB_1$. $AH = 4$. $AA_1 = 7$. Найти стороны треугольника ABC.



1) По св-ву высот (из подобия AHB_1 и BHA_1):

$$AH \cdot HA_1 = BH \cdot B_1H = x^2$$

$$x = 2\sqrt{3} \Rightarrow BB_1 = 4\sqrt{3}$$

2) По Т. Пиф. $\triangle AHB_1$

$$4^2 = (2\sqrt{3})^2 + AB_1^2 \Rightarrow AB_1 = 2$$

3) По Т. Пифагора $\triangle ABB_1$:

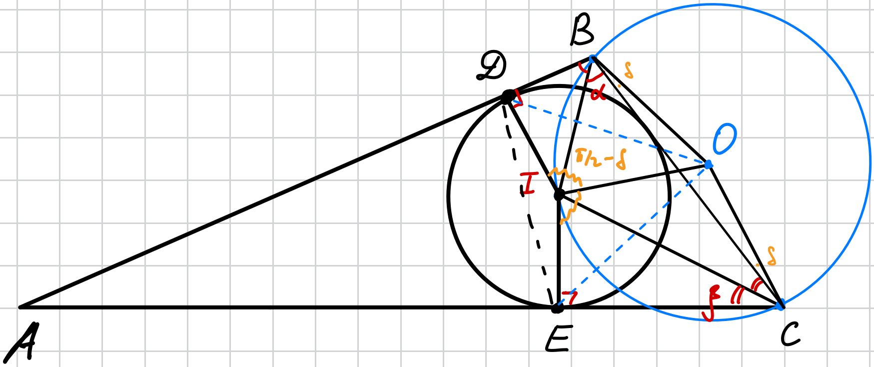
$$AB = \sqrt{4+48} = 2\sqrt{13}$$

4) В $\triangle HBA_1$: $\sin\alpha = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $(\alpha = 60°) \Rightarrow$ в $\triangle BB_1C$:

$$B_1C = BB_1 \operatorname{tg}\alpha = 12; \quad BC = \frac{BB_1}{\cos\alpha} = 8\sqrt{3}$$

$\boxed{№2}$

5. Вписанная окружность треугольника ABC с центром в точке I касается сторон AB и AC в точках D и E соответственно, а O – центр описанной окружности треугольника BCI. Докажите, что $\angle ODB = \angle OEC$.



1) $\angle IOC = 2\alpha$ – как внут; $\angle IOB = 2\beta$

2) Тогда в $\triangle BOC$: $2\alpha + 2\beta + 2\delta = \pi \Rightarrow \delta = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta$

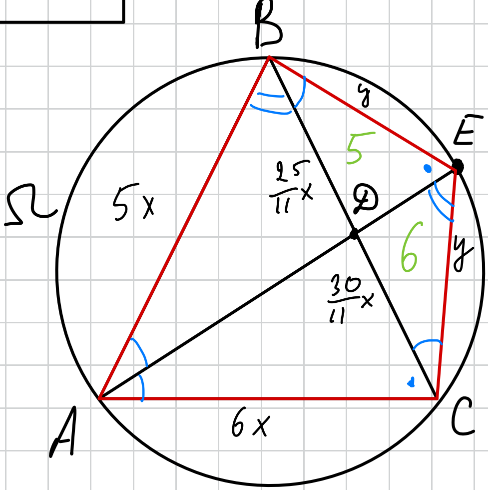
3) $$\angle DIO = \underbrace{\angle DIB}_{=\frac{\pi}{2}-\alpha} + \underbrace{\angle BIO}_{=\underbrace{\pi - \alpha - \delta - 2\beta}_{\frac{\pi}{2}-\beta}} = \frac{\pi}{2} - \delta$$

4) Аналогично $\angle EIO = \frac{\pi}{2} - \delta \Rightarrow \triangle OEI = \triangle DOI \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OEI = \angle DOI \Rightarrow \angle OEC = \angle ODB$

№3

[5 баллов] Вокруг равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) описана окружность Ω. Прямая, содержащая биссектрису AD треугольника ABC, пересекает повторно Ω в точке E. Найдите периметр четырёхугольника $ABEC$, если известно что площади треугольников BED и CED равны 5 и 6 соответственно.



$S_{BED} = 5$, $S_{CED} = 6$

P_{ABEC} - ?

1) $BE = EC$ – т.к. $\angle EAB = \angle EAC$

2) $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ – по св-ву бис-сы

3) $\angle BAD = \angle DAC = \alpha$, тогда $\angle BCE = \angle CBE = \alpha$

$$\begin{cases} 5 = \frac{1}{2} BE \cdot BD \sin\alpha \\ 6 = \frac{1}{2} EC \cdot CD \cdot \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{6} = \overbrace{\frac{BE}{EC}}^{1} \cdot \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

$\Rightarrow AB = 5x$, $AC = 6x$, $BD = \frac{25}{11}x$, $DC = \frac{30}{11}x$

4) $\triangle ABD \sim \triangle CED$:

$$\frac{AB}{CE} = \frac{BD}{ED} \Leftrightarrow \frac{5x}{y} = \frac{25x}{11 \cdot ED} \Rightarrow ED = \frac{5}{11}y$$

Тогда $S'_{BED} = 5 = \frac{1}{2}\frac{5}{11}y\cdot y\cdot\sin(\underset{\angle BCA}{\underset{\parallel}{\angle BED}})$

5) Найдем $\sin\angle BCA$: проведем высоту BH: $\triangle ABC$, тогда

$$\cos(\angle BCA) = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin(\angle BCA) = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{55}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{110}}{2}$$

6) В $\triangle BED$ по т. cos:

$$\frac{25^2}{11^2}x^2 = \frac{25}{11^2}y^2 + y^2 - 2\frac{\cancel{5}}{11}y^2\cdot\frac{3}{\cancel{5}}$$

$$(25x)^2 = 25y^2 + 121y^2 - 66y^2$$

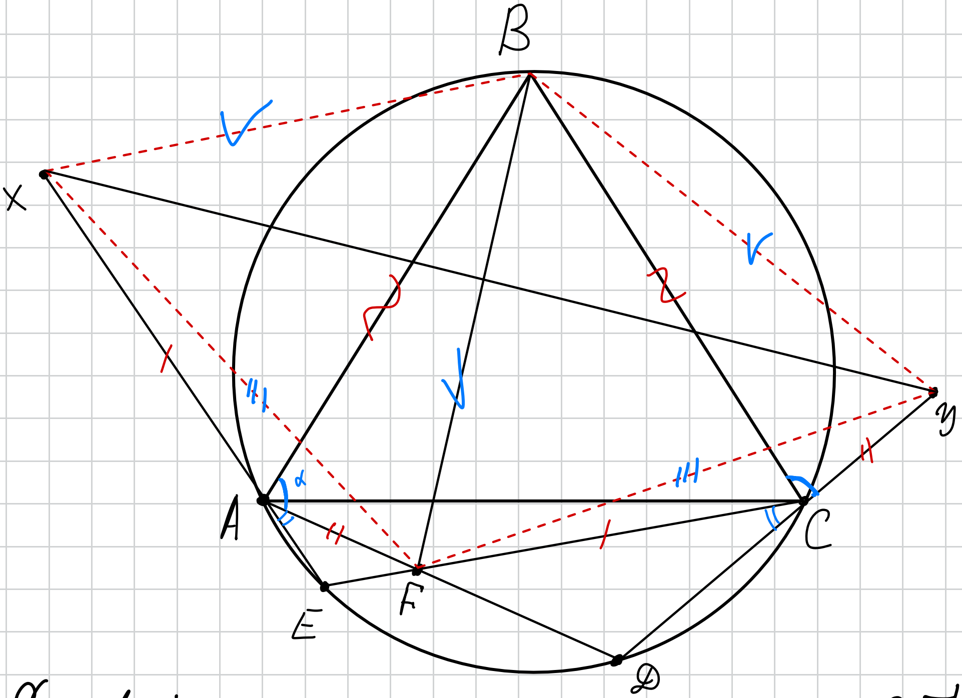
$$(25x)^2 = 80y^2$$

$$x = \frac{\sqrt{80}}{25}y = \frac{\sqrt{80}\cdot\sqrt{110}}{2\cdot 25} = \frac{2\sqrt{22}}{5}$$

$$\Rightarrow P = 11x + 2y = \frac{22\sqrt{22}}{5} + \sqrt{110}$$

№4

[6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω, а на дуге AC, не содержащей точку B, взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F. На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 7{,}5$, $XY = 15$.



1) $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$ => надо найти $\angle(XY, BF)$ или д-ть, что они перп.

2) $\angle EAD = \angle ECD \Rightarrow \angle XAF = \angle YCF \Rightarrow \Delta FCY =$ $= \Delta XAF$ (по 2-м сторонам и углу) $\Rightarrow XF = FY$

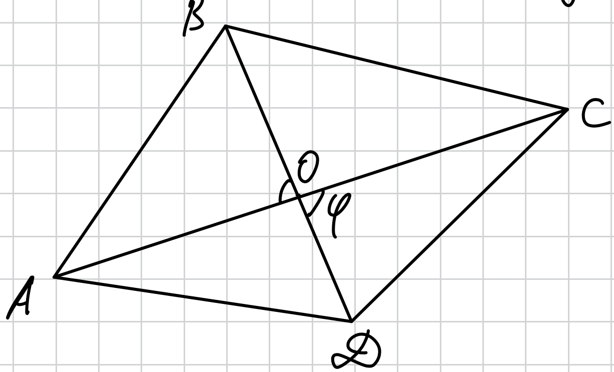
3) Пусть $\angle BAF = \alpha \Rightarrow \angle BCD = \pi - \alpha \Rightarrow \angle BCY = \pi - \angle BCD =$ $= \alpha \Rightarrow \Delta BAF = \Delta BCY$ (по 2-м сторонам и углу)

$\Rightarrow BY = BF'$

4) Аналогично $\triangle BXF' = BFC \Rightarrow BX = BF' = BY$

5) Получили: $BX = BY \Rightarrow B$ - лежит на серединном перп. к XY и $XF' = F'Y \Rightarrow F'$ - лежит на сер. перп. к $XY \Rightarrow BF'$ - сер. перп.

Комментарий: Докажем формулу $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$ для произвольного выпуклого четырехугольника



$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD} =$$

$$= \frac{1}{2} AO \cdot OB \sin\varphi + \frac{1}{2} BO\, OC \underbrace{\sin(\pi - \varphi)}_{= \sin\varphi} + \frac{1}{2} CO \cdot OD \sin\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2} AO \cdot OD \underbrace{\sin(\pi - \varphi)}_{= \sin\varphi} = \frac{1}{2} \sin\varphi \big(BO \cdot (AO + OC) + OD(AO + OC) \big) =$$

$$= \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$$

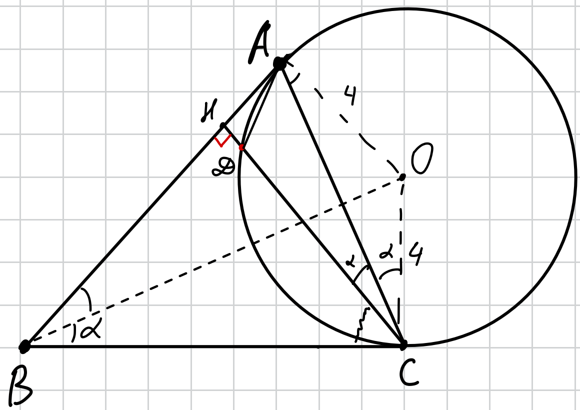
№5

[5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

$S_{ADB}=6$

$R=4$

$AB:CH - ?$



1) Пусть $\angle OBC=\alpha$. $\Delta OBC=\Delta OBA \Rightarrow BC=AB$, $\angle OBA=\alpha$

2) Из ΔOBC: $AB=BC=4\,ctg\,\alpha$

3) Заметим, что $\angle ACO=\angle OAC=\alpha$, т.к. $\angle BOC=\frac{\pi}{2}-\alpha$, $BO\perp OC$

4) В ΔBHC: $\angle BCH=\frac{\pi}{2}-2\alpha \Rightarrow \angle HCA=\frac{\pi}{2}-\alpha-\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\alpha$

5) Тогда в ΔAHC: $AH=AC\sin\alpha=\underbrace{8\cos\alpha}_{AC \text{ из } \Delta AOC}\sin\alpha$

6) Найдем $\angle HAD$ (либо по Т м/у кас и хордой):

проведем OH: $\angle HOC=\pi-4\alpha \Rightarrow \angle DAC=\frac{\pi}{2}-2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle HAD=\frac{\pi}{2}-\alpha-\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\alpha$

$\Rightarrow HD=AH\,tg\,\alpha=8\sin^2\alpha$

7) $CH = AC\cos\alpha = 8\cos^2\alpha$ (из $\triangle CHA$)

8) $\begin{cases} \dfrac{AB}{CH} = \dfrac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha} \\ S = \dfrac{1}{2} BD \cdot CH = 16\cos\alpha\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AB}{CH} = \dfrac{4}{3}$