$+$ $\times$

$-$ $\div$

§ 1. Системы уравнений

Опр 1: Уравнение вида $ax+by=c$ - называется линейным уравнением с двумя переменными

Опр.2: Системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Опр. 3: Решением системы ур-й с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая каждое ур-е в верное числовое рав-во

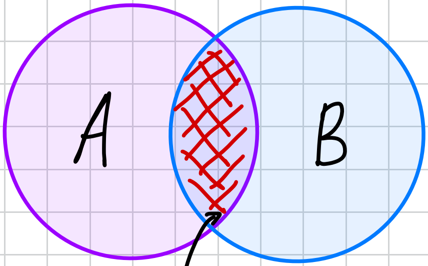
Поймем сколько решений может иметь система из 2-х уравнений:

Пусть A-мн-во решений 1-го ур-я

B-мн-во решений 2-го ур-я

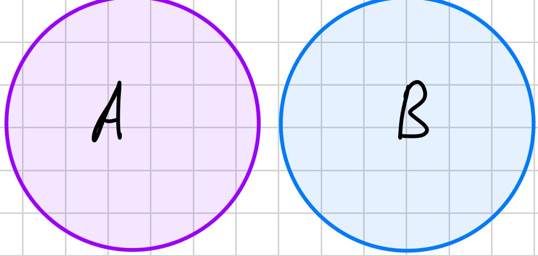
Графически изобразим их возможное расположение друг относительно друга:

1



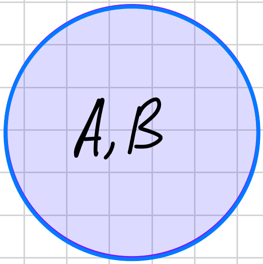
есть решения

2



нет пересечения
⇒ нет решений

3



совпадают
⇓
∞ кол-во решений

<u>Упр.</u>: Приведите примеры систем, которые:

а) Имеют 1 решение

б) Не имеют решений

в) Имеют ∞ кол-во решений

→ Что можно делать с ур-ями в системе?
(Какие преобр. явл. равносильными)

1) С отдельными ур-ями все как всегда: умно-

жать на ненулевое, прибавлять/вычитать слагаемые к левой и правой части

2) Можно к одному уравнению прибавлять/вычитать второе ур-е, домноженное на ненулевое число

Как решать системы?

$\boxed{1.}$ Из 1-й системы выразить одну переменную через другую и подставить во 2-е ур-е ("Метод подстановки")

$\boxed{2}$ Складывать/вычитать друг из друга так, чтобы осталась одна переменная ("Метод сложения")

$\boxed{3.}$ Строим графики обоих ур-й - пересечения есть решения ("Графический метод") - лучше исп. для нелинейных систем - обычно используется для опр-я кол-ва решений, а не самих

$\boxed{4.}$ Замена переменных - тоже лучше для нелинейных - ВАЖНО понимать что такое замена переменных

$\boxed{Т1}$ Система $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ имеет единственное решение $\Leftrightarrow a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$

▲

$\boxed{\Rightarrow}$ $\boxed{П}$ (предположим противное): $a_1b_2 = b_1a_2$

1) Если $a_1 = 0$, $a_2 = 0$: $\begin{cases} b_1y = c_1 \\ b_2y = c_2 \end{cases} \Rightarrow$ нет реш. — противоречие

2) Если $a_1 = 0$, $b_1 = 0$: $a_2x + b_2y = c_2 \Rightarrow \infty$ число решений

4) Если $a_1 \neq 0$:

$$b_2 = \frac{b_1a_2}{a_1} \text{ — подставим}$$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + \frac{b_1a_2}{a_1}y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & |\cdot a_2 \ \ominus \\ a_2a_1x + a_2b_1y = a_1c_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow c_2 = \frac{c_1}{a_1}a_2$, тогда исходная система:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = \frac{c_1}{a_1}a_2 \end{cases} \overset{b_2 = \frac{b_1a_2}{a_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases} \Leftrightarrow a_1x + b_1y = c_1$$

∞ кол-во решений

противоречие!!!

⇐

Подумайте, что делать, если $a_1 = 0$?

1) Пусть $a_1 \neq 0$

$$x = \frac{c_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1}y$$ — подставим во второе

Получим:

$$\frac{c_1}{a_1}a_2 - \frac{b_1}{a_1}a_2 y + b_2 y = c_2$$

$$\frac{b_2 a_1 - b_1 a_2}{a_1} y = \frac{c_2 a_1 - c_1 a_2}{a_1}$$

$$(b_2 a_1 - b_1 a_2) y = c_2 a_1 - c_1 a_2$$

$$\begin{matrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{c_2 a_1 - c_1 a_2}{b_2 a_1 - b_1 a_2} \\ x = \dfrac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{b_2 a_1 - b_1 a_2} \end{cases}$$ — единственное решение

∎

Рассмотрим примеры решения линейных и нелинейных систем способами, описанными выше

Пример 1: Решите самостоятельно :)

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x - 2y = 10 \end{cases}$$

$\boxed{№1}$ Решите систему ур-й

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x-y} + \dfrac{9}{3x+y} = 2 \\ \dfrac{7}{2x-y} - \dfrac{18}{3x+y} = 5 \end{cases} \quad (*)$$

1) Нетрудно видеть, что заменой

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2x-y} \\ v = \dfrac{1}{3x+y} \end{cases}$$

Система (*) сводится к линейной

$$\begin{cases} U+9V=2 \\ 7U-18V=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U=1 \\ V=\frac{1}{9} \end{cases}$$

Тогда:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x-y}=1 \\ \dfrac{1}{3x+y}=\dfrac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=1 \\ 3x+y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

$\boxed{№2}$ Решите систему:

$$\begin{cases} x+y+\dfrac{x}{y}=9 \\ \dfrac{(x+y)x}{y}=20 \end{cases}$$

1) Сделаем замену: $\begin{cases} U=x+y \\ V=x/y \end{cases}$

$$\begin{cases} U+V=9 \\ UV=20 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} U=5 \\ V=4 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} U=4 \\ V=5 \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

2) Рассмотрим (1):

$$\begin{cases} x+y=5 \\ \frac{x}{y}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

3) Рассмотрим (2):

$$\begin{cases} x+y=4 \\ \frac{x}{y}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{10}{3} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$$

Ответ: $(4,1)$; $\left(\frac{10}{3}; \frac{2}{3}\right)$

$\boxed{№3}$ Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy+2x-3y+2=0 \\ 2x^2y-3xy^2-12x+18y=16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy+2x-3y+2=0 \\ xy(2x-3y)-6(2x-3y)=16 \end{cases}$$

1) Сделаем замену:

$$\begin{cases} u=xy \\ v=2x-3y \end{cases}$$

Тогда система:

$$\begin{cases} u+v+2=0 \\ uv-6v=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=2 \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$$

Ответ: $(1,2)$; $(-3; -\frac{2}{3})$

$\boxed{№4}$ Решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=1 \\ \dfrac{yz}{y+z}=2 \\ \dfrac{xz}{x+z}=3 \end{cases}$$

1) Запишем систему в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}=1 \\ \dfrac{y+z}{yz}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x+z}{x+z}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1 \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

2) Сделаем замену: $u=\frac{1}{x}, v=\frac{1}{y}, w=\frac{1}{z}$

$$\begin{cases} u+v=1 \\ v+w=\frac{1}{2} \\ u+w=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\frac{5}{12} \\ v=\frac{7}{12} \\ w=-\frac{1}{12} \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{5}{12}; \frac{7}{12}; -\frac{1}{12}\right)$