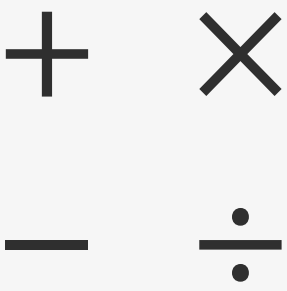

Решение задач

№1 (Ид 2.13)

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{108x}{5y}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} \quad (1) \\ \sqrt{\frac{20y}{3x}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} \quad (2) \end{cases}$$

Решаем в ОДЗ

1) Перемножим (1) и (2) (неравносильное пр-е!)

$$\sqrt{36 \cdot 4} = x+y-(x-y)$$

$$y = 6$$

2) (1) + (2)

$$2\sqrt{x+6} = \sqrt{\frac{108 \cdot x}{5 \cdot 6}} + \sqrt{\frac{20 \cdot 6}{3 \cdot x}}$$

$$2\sqrt{x+6} = \sqrt{\frac{18}{5}x} + \sqrt{\frac{40}{x}} \quad \uparrow^2$$

$$4(x+6) = \frac{18}{5}x + \frac{40}{x} + 2\sqrt{8 \cdot 18}$$

$$x+6 = \frac{9}{10}x + \frac{10}{x} + 6$$

$$\frac{1}{10}x = \frac{10}{x} \Rightarrow x = \pm 10$$

3) Проверка

$(10, 6)$: $\begin{cases} \sqrt{\frac{108 \cdot 10}{5 \cdot 6}} = \sqrt{16} + \sqrt{4} \Leftrightarrow 6 = 6 \\ \sqrt{\frac{20 \cdot 6}{3 \cdot 10}} = \sqrt{16} - \sqrt{4} \Leftrightarrow 2 = 2 \end{cases}$ – подходит

$(-10, 6)$ – очевидно не подходит, т.к.

$$x + y \geq 0$$

Ответ: $(10, 6)$

№2 (Иг. Д13)

$$\begin{cases} y = a - 1 - x \\ x(a - 1 - x) = 3a - 8 \end{cases}, \quad a - ? \text{ – ед. реш}$$

1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a - 1 \\ xy = 3a - 8 \end{cases}$ – симметричная система $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Если (x, y) – реш, то и (y, x) – реш

2) (x, y) и (y, x) совпадают $\Leftrightarrow x = y$, то есть система имеет ед. реш. $\Leftrightarrow x = y = t$

Тогда

$$\begin{cases} 2t = a-1 \\ t^2 = 3a-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2t+1 \\ t^2-6t+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=1 \\ a=3 \end{cases} \\ \begin{cases} t=5 \\ a=11 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: Ед. реш. при $a=3$ или $a=11$

№3 (Ц. Д/З)

$$\begin{cases} x+5y=-5 \quad (1) \\ x^2+16xy+64y^2-12ax-96ay+45a^2+66a+121=0 \quad (2) \end{cases}$$

1) Рассмотрим (2):

$$\underbrace{(x+8y)}_{t}^2 - 12a\underbrace{(x+8y)}_{t} + 45a^2+66a+121=0$$

$$t^2-12at+45a^2+66a+121=0$$

$$D/4 = 36a^2-45a^2-66a-121 = -(3a+11)^2 \le 0$$

$$\frac{D}{4}=0 \Leftrightarrow a=-\frac{11}{3}$$ — иначе нет корней

$$t=6a=-22$$ — проверим будут ли корни

2) Получим систему

$$\begin{cases} x+5y=-5 \\ x+8y=-12 \end{cases}$$

Проверим теорему: $1\cdot 8-5\cdot 1\neq 0 \Rightarrow$ сущ. ед. решение (или можно было решить систему)

Ответ: $a=-\frac{11}{3}$

№4 (МФТИ, 2002)

$$\begin{cases} \sqrt{11x-y}-\sqrt{y-x}=1 \\ 7\sqrt{y-x}+6y-26x=3 \end{cases}$$

1) Сделаем замену:

$$u=\sqrt{11x-y}\geq 0,\quad v=\sqrt{y-x}\geq 0$$

При этом

$$6y-26x=4(y-x)-2(11x-y)=4v^2-2u^2$$

2) Тогда исходная система

$$\begin{cases} u-v=1 \\ 7v+4v^2-2u^2=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u=v+1 \\ 2v^2+3v-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=v+1 \\ \left[\begin{array}{l} v=1 \\ v=-5/2 \text{ – не подх} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{11x - y} = 2 \\ \sqrt{y - x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x - y = 4 \\ y - x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 3/2 \end{cases}$$

Ответ: $(1/2, 3/2)$

№5 (МФТИ, 2003)

$$\begin{cases} 3x - 1 = \frac{y}{x} + 2\sqrt{x+y} \quad (1) \\ \sqrt{y + \sqrt{x+y}} = y - 3x - 6 \quad (2) \end{cases}$$

1) Решаем в ОДЗ, домножим (1) на x ($\neq 0$):

$$3x^2 - x = y + 2x\sqrt{x+y}$$

$3x^2 = 2x\sqrt{x+y} + (x+y)$ – дополним до полного кв-та

$$4x^2 = x^2 + 2x\sqrt{x+y} + (x+y) = (x + \sqrt{x+y})^2$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{x+y})(3x + \sqrt{x+y}) = 0$$

2) Рассмотрим 2 случая

а) $\sqrt{x+y} = x \geqslant 0$, тогда исх. система

$$\begin{cases} 3x^2 - x = y + 2x \cdot x \\ x = y - 3x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = y \\ 4x + 6 = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \text{ - не подх} \\ x_2 = 6 \end{array}\right. \\ 4x + 6 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 30 \end{cases} \text{ - удовл. ОДЗ}$$

б) Рассмотрим $\sqrt{x+y} = -3x$ $(x \le 0)$, тогда второе ур-е системы:

$$\underbrace{\sqrt{y-3x}}_{t \ge 0} = y - 3x - 6$$

$$t^2 - t - 6 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = -2 \text{ - не подх} \\ t_2 = 3 \Leftrightarrow y - 3x = 9 \end{array}\right.$$

Тогда исх. система:

$$\begin{cases} 3x^2 - x = y + 2x \cdot (-3x) \\ y - 3x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{2+\sqrt{85}}{9} \text{ - не подх} \\ x_2 = \dfrac{2-\sqrt{85}}{9} \end{array}\right. \\ y - 3x = 9 \end{cases}$$

Ответ: $(6, 30)$, $\left(\dfrac{2-\sqrt{85}}{9}, \dfrac{29-\sqrt{85}}{3}\right)$

№6 (Физтех, 2022)

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} & (1) \\ x+y^2=5 & (2) \end{cases}$$

1) Рассмотрим (1):

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y\geq 0 \\ (x-2y)^2=xy \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y\geq 0 \\ x^2-5xy+4y^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y\geq 0 \quad (*) \\ \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=4y \end{array}\right. \end{cases} \text{ — подставляем в (2)}$$

а) $x=y$: $y^2+y-5=0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \\ x=\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ x=\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

б) $x=4y$: $y^2+4y-5=0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1 \\ x=4 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-5 \\ x=-20 \end{cases} \end{array}\right.$$

Учитывая (*) записываем ответ

Ответ: $\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}, \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right), (4,1)$

№7 (Физтех 2023)

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} - 2ab = 4 \quad (1) \\ \frac{b^3}{a} - 3ab = 8 \quad (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^3}{b} = 4 + 2ab \\ \frac{b^3}{a} = 8 + 3ab \end{cases}$$

Перемножим ур-я:

$$a^2b^2 = 32 + 28ab + 6a^2b^2$$

$$5(ab)^2 + 28ab + 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ab = -4 \\ ab = -\frac{8}{5} \end{array}\right.$$

Рассмотрим 2 случая:

1) $ab = -4$:

(1): $a^3 = -4b \Leftrightarrow a^4 = -4ab = 16 \Leftrightarrow a = \pm 2, b = \mp 2$ ~

- проверяем (подст. в исх. сист.) => действ. реш

2) $ab = -\frac{8}{5}$

(1): $a^4 = -\frac{32}{25} < 0$ - нет реш

Ответ: $(2, -2), (-2, 2)$