$+ \quad \times$

$- \quad \div$

§1. Числовые множества

Опр.: $\mathbb{N} = \{x : 1 \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{N} : (x+1) \in \mathbb{N}\} =$
$= \{1, 2, 3, \dots\}$ — натуральные числа

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-\mathbb{N}\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} -$$

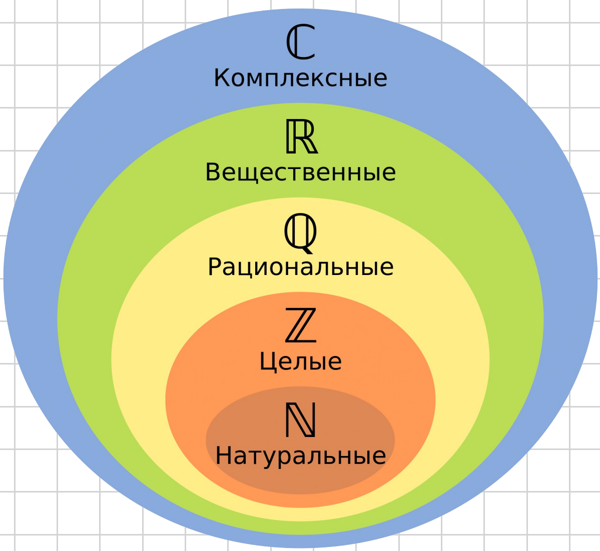
— целые числа

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\} \text{ — рациональные}$$

числа

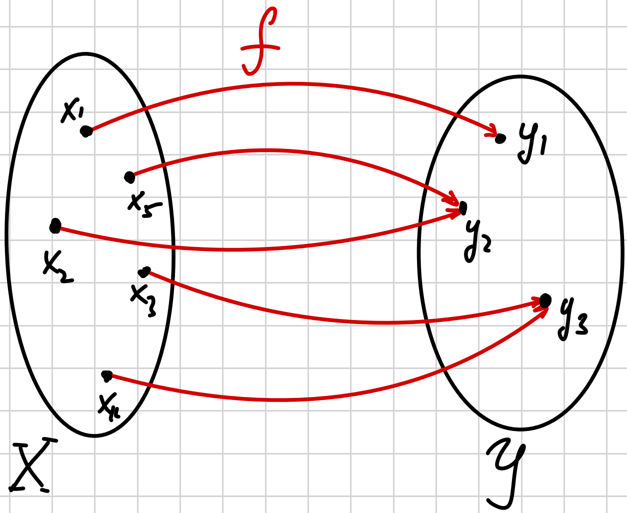
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \text{ — действительные числа}$$

ирр. — числа не явл. рациональными



§2. Обратная функция Квадратный корень

Опр.: Функция $f(x)$ - есть правило, по которому элементу множества X ставится в соответствии ЕДИНСТВЕННЫЙ элемент мн-ва Y

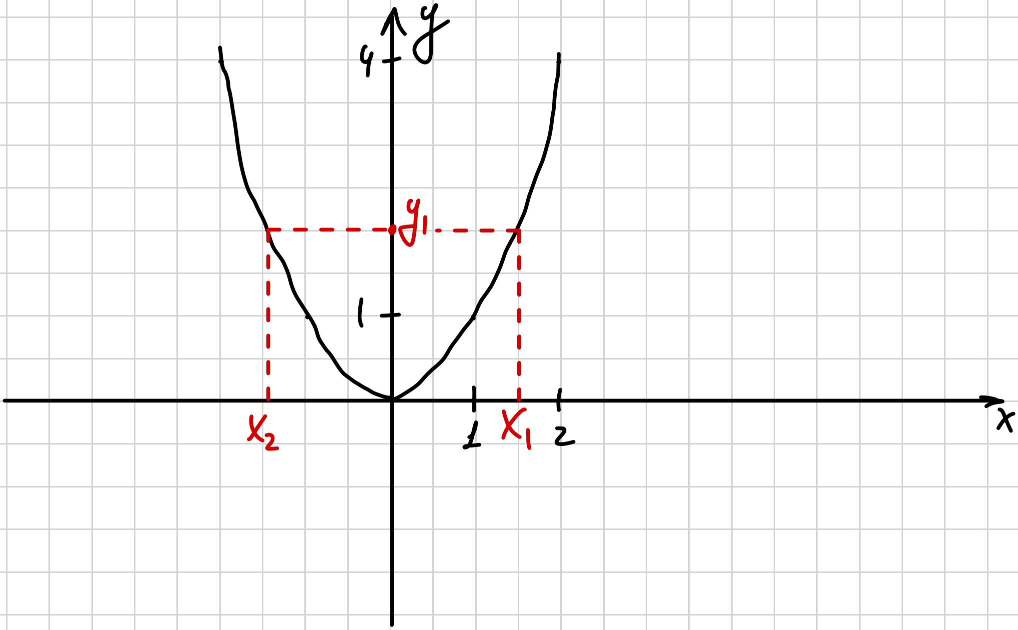


Опр: Обратной функцией называется функция $f^{-1}(y)$, которая действует из Y в X

Замечание: Не у любой ф-ции есть обратная ей, т.к. если $f(x_1) = f(x_2) = y$, то $f^{-1}(y) = \left[\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array}\right.$

– т.е. $f^{-1}(y)$ не является ф-цией, т.к. аргументу y соответствуют 2 значения x_1 и x_2

Рассмотрим ф-цию x^2:



Заметим, что одному y_1 соответствуют 2 аргумента: x_1 и x_2 $(x_2 = -x_1)$. Т.е. обратную ф-цию мы ввести не можем.

Однако, если мы рассмотрим $x > 0$, то $\forall y$ $\exists! \, x : f^{-1}(y) = x \Rightarrow$ можно ввести обратную ф-цию она называется квадратный корень

Опр Арифметическим квадратным корнем из **!** неотрицательного **!** числа a называется такое число, квадрат которого равен a.

Свойства:

$\boxed{1^\circ}$ $\sqrt{a^2} = |a|$

▲ Если $a \geq 0$, то $\sqrt{a^2} = a = |a|$

Если $a < 0$, то $\sqrt{a^2} = -a = |a|$ ■

$\boxed{2^\circ}$ (Правило сравнения)

Из двух неотрицательных чисел больше то, квадрат которого больше

$\boxed{3^\circ}$

1) Если $a \geq 0$, $b \geq 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

2) Если $a \geq 0$, $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Задачи

№1 Доказите, что $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$ (из Д/З)

1) Нам нужно доказать, что $\sqrt{2}$ нельзя представить в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$. $\boxed{\Pi}$

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2 \text{ - четное}$$

Покажем, что m – тоже четное: $m = 2k + p$, $p = 0, 1$
остаток от деления

$$\underbrace{m^2}_{\text{четное}} = \underbrace{4k^2}_{\text{четное}} + \underbrace{4kp}_{\text{четное}} + p^2 \Rightarrow p = 0$$

Тогда m - четное $\Rightarrow m = 2k \Rightarrow m^2 = 4k^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow n^2 = 2m^2 \Rightarrow n^2$ - четное $\Rightarrow n$ – четное $\Rightarrow n = 2q$

То есть

$$\frac{m}{n} = \frac{2k}{2q} = \frac{k}{q} \text{ - т.е. дробь сократима}$$

Противоречие!!!

$\boxed{№2}$ Решите ур-я

а) $\sqrt{x}+2=0$

б) $\sqrt{x}-3=0$

в) $\sqrt{5x+6}=6$

а) $\sqrt{x}\geq 0 \Rightarrow$ решений нет

б) $\sqrt{x}=3 \Leftrightarrow x=9$

в) $\sqrt{5x+6}=6 \Leftrightarrow 5x+6=36 \Leftrightarrow x=6$

$\boxed{№3}$ Решите ур-е

$$\sqrt{22+\sqrt{6+\sqrt{x-1}}}=5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 22+\sqrt{6+\sqrt{x-1}}=25$$

$$\Leftrightarrow 6+\sqrt{x-1}=9$$

$$\sqrt{x-1}=3$$

$$x=10$$

Основные типы ур-й с $\sqrt{\dots}$

1. Учет ОДЗ - не всегда лучший вариант

(ОДЗ для $\sqrt{f(x)}$: $f(x) \geq 0$)

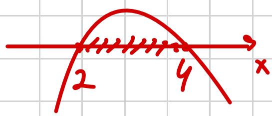
Пример: Решите ур-е:

$$\sqrt{6x-x^2-8}+\sqrt{x-4}=x^2-7x+12$$

1) Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} 6x-x^2-8 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \end{cases}$$

– парабола ветвями вниз



$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x=4$$

2) Подставим $x=4$ в ур-е $\Rightarrow$ верно

Ответ: 4.

2. Равносильные преобразования

а) Ур-я вида $\sqrt{A} = \sqrt{B}$

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \iff \begin{cases} A = B \\ A \geq 0 \text{ (или } B \geq 0) \end{cases}$$

выбираем то, что проще

Пример: $\sqrt{3x^2 - 3x - 11} = \sqrt{2x^2 - 4x - 5}$

1) Ур-е равносильно системе:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3x - 11 = 2x^2 - 4x - 5 \\ 2x^2 - 4x - 5 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0 \\ 2x^2 - 4x - 5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -3 \end{array}\right. \\ 2x^2 - 4x - 5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Ответ: } -3$$

б) Ур-я вида $A\sqrt{B} = 0$

$$A\sqrt{B} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} B = 0 \\ A \text{ - определено} \end{cases} \\ \begin{cases} A = 0 \\ B \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Пример: $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$

1) Ур-е равносильно системе:

$$\left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ \begin{cases} x^2-4=0 \\ x+1\geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ \begin{cases} x=\pm 2 \\ x\geq -1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \text{Ответ: } -1, 2$$

в) Ур-я вида $\sqrt{A}=B$

$$\sqrt{A}=B \Leftrightarrow \begin{cases} A=B^2 \\ B\geq 0 \end{cases}$$

Пример: $\sqrt{x^2-6x+5}=x+5$

1) Ур-е равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2-6x+5=x^2+10x+25 \\ x+5\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x=-20 \\ x\geq -5 \end{cases}$$

Ответ: $-\frac{5}{4}$

2) Ур-я вида $\sqrt{A} \pm \sqrt{B} = C$

В таких ур-ях нужно 2 раза возводить в квадрат. Рассмотрим на примере:

Пример: $\sqrt{3x-5} - \sqrt{4-x} = 1$

$\sqrt{3x-5} = 1 + \sqrt{4-x}$ - обе части $\geqslant 0$

=> можно возвести в квадрат

$3x-5 = (1+\sqrt{4-x})^2$

$\sqrt{4-x} = 2x-5$

Ур-е эквивалентно системе:

$$\begin{cases} 4-x = (2x-5)^2 \\ 2x-5 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Ответ: } 3$$

$$\boxed{\text{Дополнение к задачам}}$$

1. Сравнение чисел

Сравните $\sqrt{3} + \sqrt{11}$ и $\sqrt{6} + \sqrt{8}$

$\sqrt{3} + \sqrt{11} < \sqrt{6} + \sqrt{8} \;\big|\uparrow^2$

$3 + 2\sqrt{33} + 11 < 6 + 2\sqrt{48} + 8$

$$\sqrt{33} < \sqrt{48}$$

$$33 < 48$$

2. Избавление от иррациональности:

1) $$\frac{2 \cdot (3\sqrt{5}+\sqrt{7})}{(3\sqrt{5}-\sqrt{7}) \cdot (3\sqrt{5}+\sqrt{7})} = \frac{2(3\sqrt{5}+7)}{45-7} = \frac{3\sqrt{5}+7}{19}$$

домножаем на сопряженное

2) $$\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{4+2\cdot 2\sqrt{3}+3} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = 2+\sqrt{3}$$

или, если что-то сложное

$$\sqrt{124-70\sqrt{3}} = a-b\sqrt{3}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} (a-b\sqrt{3})^2 = 124-70\sqrt{3} \\ a-b\sqrt{3} \geq 0 \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$a=-7,\ b=5$$

Сложные радикалы

Опр: Выражения вида $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ называют сложными радикалами

Рассмотрим:

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2 = 2a + 2\sqrt{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})} \quad (1)$$

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{b}} - \sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2 = 2a - 2\sqrt{a^2-b} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{(1)} + \sqrt{(2)}}{2}: \quad \sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}} \pm \sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}}}{2}$$

или

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$