

+

×

—

÷

§1. Гидростатика

Note: То хорошему, сначала нужна статика!

Часть механики, изучающая условия, при которых тело находится в покое под действием нескольких сил, называется статикой

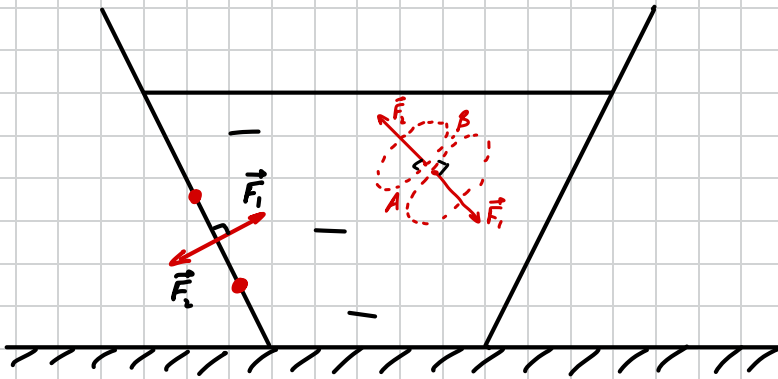
Опр Положением равновесия механической системы назовем такое ее положение, в котором она может находиться бесконечно долго, будучи помещенной в него с нулевой начальной скоростью

Замечание: Положение и состояние равновесия — два разных понятия

Газы и жидкости отличаются от твердых тел тем, что у них нет сил трения покоя между слоями — такое св-во называется текучесть. Жидкость принимает форму сосуда и её объем не зависит от формы и вида сосуда. Также, сила трения покоя между стенкой сосуда и жидкостью равна нулю.

Газ занимает весь предоставленный ему объем.

Замечание: Из вышесказанного следует, что в неподвижной жидкости (или газе) слои (части) жидкости действуют друг на друга и на стенки сосуда с силами, направленными перпендикулярно к поверхности их соприкосновения.



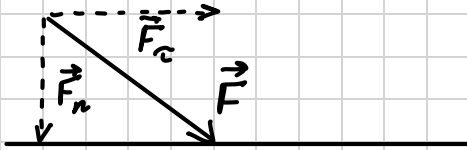
Замечание: Важно, что отсутствуют именно силы трения покоя (т.е. любое сколь угодно малое воздействие приводит жидкость в движение), т.к. "обычное" трение н/у слоями воды есть и оно приводит к вязкости

Опр: Давлением называется величина, равная отношению модуля силы давления F , направленной по нормали (перпендикулярно) к плоской поверхности, к площади S этой поверхности:

$$P = \frac{F}{S} \quad [Pa = \frac{H}{m^2}] \quad (1)$$

Замечание: Давление это **НЕ ВЕКТОР!**

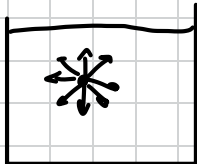
Замечание: Вклад в давление дает только составляющая силы, перпендикулярная площадке

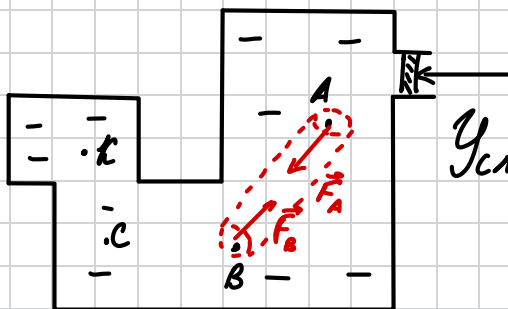


Тогда

$$P = \frac{F_n}{S}$$

Закон Паскаля: Давление, оказываемое на жидкость в каком-либо одном месте на ее границе, передается без изменения во все точки жидкости.





Усл-е равновесия:

$$F_A = F_B$$

||

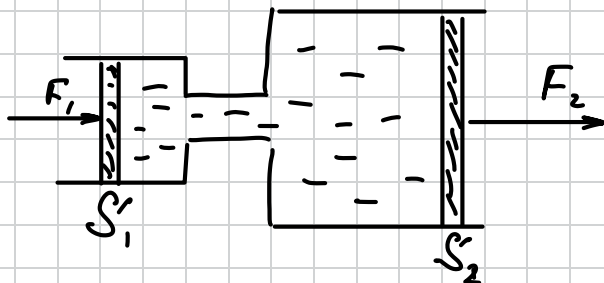
$$P_A S = P_B S$$

⇓

$$P_A = P_B$$

Аналогично для других точек

Пример: Гидравлические механизмы:



Из равенства давлений:

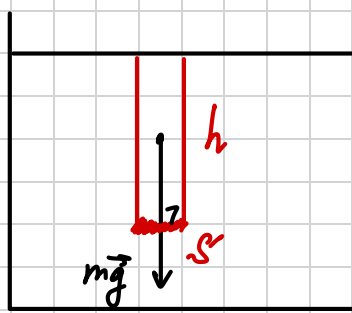
$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

$$F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1$$

При $S_2 > S_1 \Rightarrow F_2 > F_1$

Гидростатическое давление:

Рассмотрим давление столба воды высотой h



$$F = mg, \quad P = \frac{F}{S}$$

$$P = \frac{mg}{S} = \frac{\rho V g}{S} = \rho g h$$

$m = \rho V$ $V = Sh$

$$P = \rho g h$$

(2)

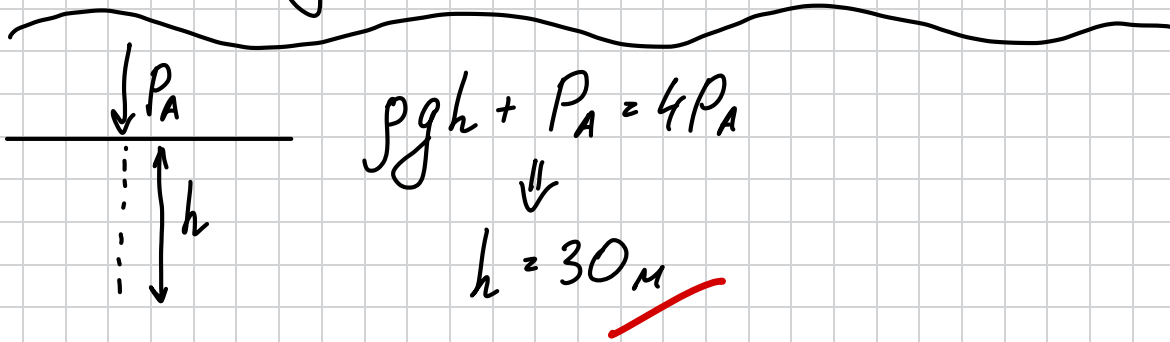
Пример: $P = 10^5 \text{ Па} \approx 1 \text{ атм}$, $h = ?$ (столба воды)

$$h = \frac{P}{\rho g} = \frac{10^5}{1000 \cdot 10} = 10 \text{ метров}$$

Замечание: В задачах на давление нужно помнить, что существует атмосферное давление $p_a \approx 10^5 \text{ Па}$

Пример: На какой глубине давление в 4 раза больше атмосферного:

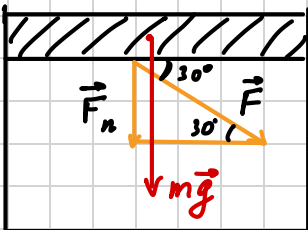
▲
$$h = \frac{4p_a}{\rho g} = 40 - \text{НЕ ВЕРНО}$$



Задачи

№1

Цилиндрический сосуд с жидкостью плотно закрыт поршнем массой 1 кг. Площадь поршня 200 см². На поршень действует сила 200 Н, направленная под углом 30° к плоскости поршня. Какое давление действует со стороны жидкости на поршень? Атмосферное давление не учитывать



1) Из Δ -ка: напротив угла 30° лежит катет равный половине гипотенузы:

$$F_n = \frac{F}{2} = 100 \text{ Н}$$

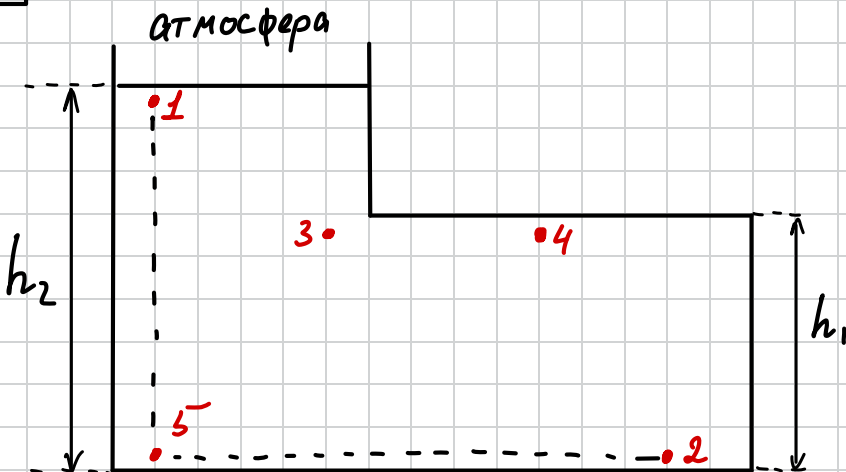
2) П.к. поршень находится в равновесии, то сила, действ. со стороны воды на поршень (направлена вверх) равна сумме сил, действующих на поршень, направленных вниз:

$$F_1 = mg + F_n$$

3) Тогда давление:

$$P = \frac{F_1}{S} = \frac{mg + F_n}{S} = \frac{10 + 100}{100 \cdot 10^{-4}} = \frac{110}{2 \cdot 10^{-2}} = 5500 \text{ Па}$$

№2 Найдите давление в точках 1-5



1) На точку 1 не давит никакой столб жидкости:

$$p_1 = p_A$$

2) На точку 5 давит столб высотой h_2 :

$$p_5 = p_A + \rho g h_2$$

3) По закону Паскаля:

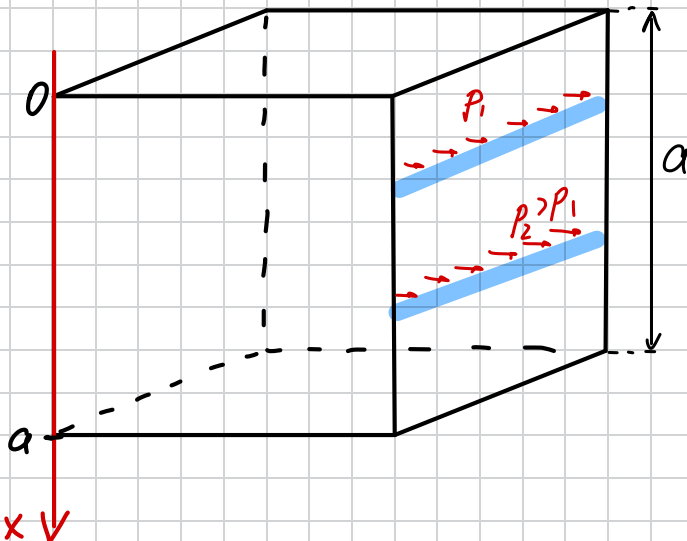
$$p_5 = p_2 = p_A + \rho g h_2$$

4) Аналогично для точек 3 и 4

$$p_3 = p_4 = p_A + \rho g (h_2 - h_1)$$

№3

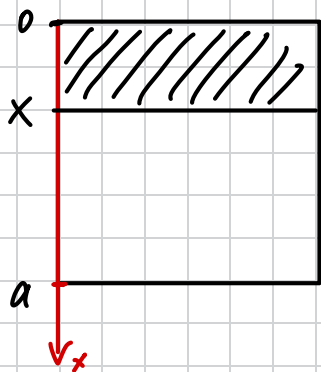
Сосуд кубической формы с ребром 10 см до краев заполнен водой. Определите силу давления воды на боковую грань сосуда. Атмосферное давление не учитывать



1) Очевидно, что на каждую точку дна сосуда давит столб воды высоты h . Тогда сила давления на дно:

$$F = \overbrace{\rho g a}^p \cdot \underbrace{a^2}_{S} = \underbrace{\rho a^3}_m g = mg$$

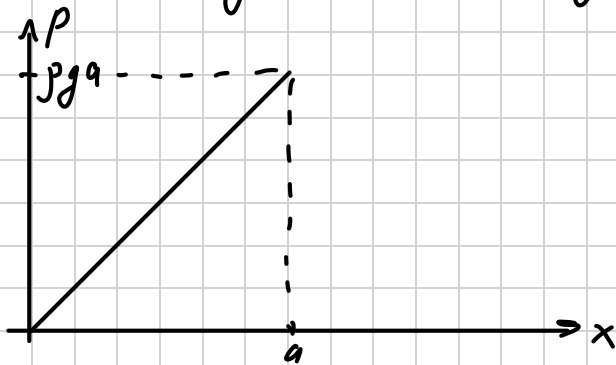
2) Рассмотрим как меняется давление с глубиной:



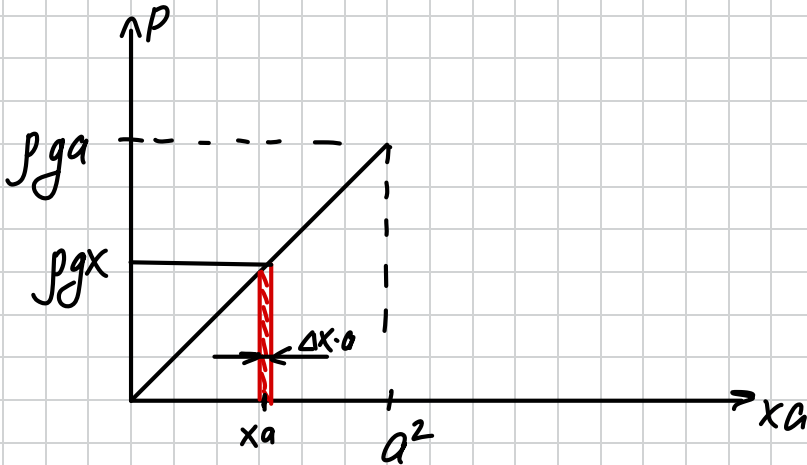
$$p_x = \rho g x - \text{давление на "глубине" } x$$

3) По закону Паскаля такое же давление действует на полоску боковой грани на глубине x . Таким образом, давление увеличивается с "глубиной".

4) График зависимости давления от глубины:



5) Теперь нарисуем график зависимости давления от $x \cdot a$ (умножим все значения x на a):



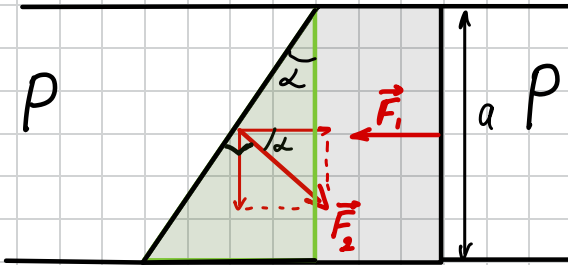
6) Выделим кусочек шириной $\Delta x \cdot a$ и координатой x — это площадь сил плоскости (см. первый рисунок) на боковой грани, на которую действует давление $p_g x$. Тогда — $p_g x \cdot \Delta x a = \Delta F$ — сила, действующая на плоскость, а также это площадь красного закрашенного кусочка на графике.

7) Таким образом, чтобы найти полную силу нужно проинтегрировать все ΔF , т.е. найти площадь под графиком:

$$F = \frac{1}{2} p_g a \cdot a^2 = \frac{1}{2} p_g a^3 = \frac{mg}{2}$$

M4

В трубе находится поршень, продольное сечение которого показано на рисунке. Давление жидкости с обеих сторон на поршень. Находится ли поршень в равновесии



$$F_1 = P S_1$$

$$F_2 = P S_2$$

Горизонтальная компонента F_2 : $F_2 \cos \alpha = P S_2 \cos \alpha$

Рассмотрим \triangle : гипотенуза $= \frac{a}{\cos \alpha}$

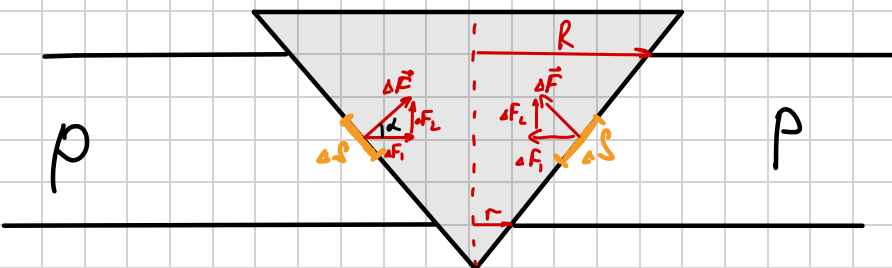
Тогда площадь S_2 (учитывая, что поршень имеет прямоугольные грани): $S_2 = \frac{S_1}{\cos \alpha}$

То есть:

$$F_2 = P \cdot \frac{S_1}{\cos \alpha} \cos \alpha = F_1 \Rightarrow \text{равновесие} //$$

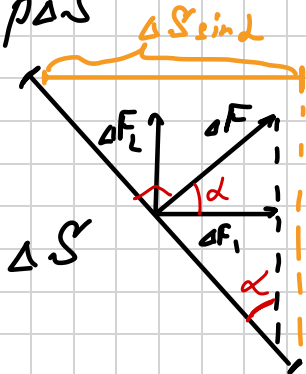
15

Коническая пробка перекрывает сразу 2 отверстия в сосуде, заполненном жидкостью при давлении P . Известно, что радиусы отверстий равны r и R . Определите силу, действующую на пробку со стороны жидкости. Силу тяжести не учитывать.



Способ I:

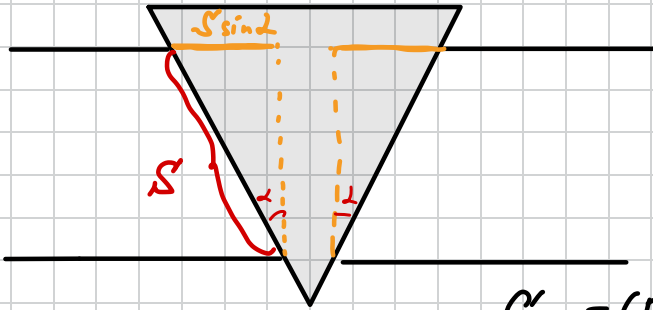
- 1) Рассмотрим площадку ΔS - на нее действует сила $\Delta F \perp \Delta S$ - разложим ее на 2 проекции - ΔF_1 и ΔF_2
- 2) На аналогичную ΔS с другой стороны действует такая же сила ΔF . Следовательно горизонтальные силы ΔF_1 - друг друга уравновесят. И суммарная сила будет направлена вверх
- 3) Сила $\Delta F = p \Delta S$



$$\Delta F_2 = \Delta F \sin \alpha = p \Delta S \sin \alpha$$

4) Теперь просуммируем по всем площадкам ΔS ,
получим $S \cdot \sin \alpha$

торце пробки



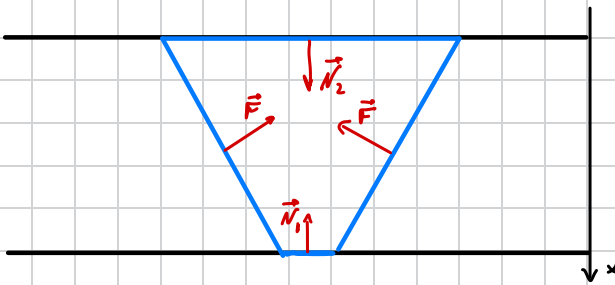
Тогда суммарная площадь $S_{\text{сум}} = \pi (R^2 - r^2)$

$$F_{\text{сум}} = P S_{\text{сум}} = P \pi (R^2 - r^2)$$

Способ II:

1) Мысленно заменим пробку жидкостью такой же формы.
Суммарная сила, действующая на жидкость будет такая же, как и сила, действующая на пробку, т.к. сила давления определяется только S и P - а они такие же.

2)



Аналогично способу I — горизонтальные проекции F компенсируют друг друга. Запишем условие равновесия на вертикальную ось:

$$(Q): -F_z + N_1 - N_2 = 0 \Rightarrow F_z = N_1 - N_2$$

↖ ↗
реакции опор со стороны
трубы

3) N_1 и N_2 берутся из того, что вода давит на трубу, и по 3-му 2-му Ньютона труба давит на воду с такой же силой, тогда:

$$N_1 - N_2 = P\pi(R^2 - r^2)$$