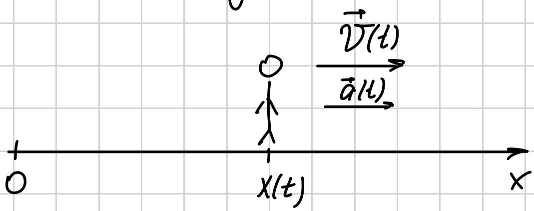
+ ×

− ÷

§ 1. Кинематика движения по окружности

Вспомним движение по прямой и по аналогии рассмотрим движение по окр-ти.



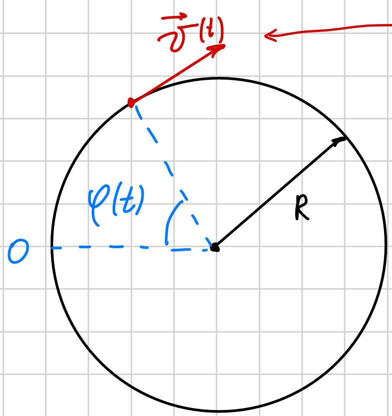
$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$ – мгновенная (линейная) скорость

$$x(t) = x_0 + v_x t + \frac{a_x t^2}{2}$$

Теперь рассмотрим движение по окружности с постоянной по модулю скоростью

1) $|\vec{v}| = const$

Скорость направлена по касательной, т.к. иначе будет изм. R => не движ по окр-ти



В прямолинейном движении, чтобы однозначно задать положение тела мы вводили ось X, как теперь это сделать на окр-ти?

Удобно это сделать углом, при этом угол будем измерять в [рад] (что это и почему удобно?)

На отд. доске

движ. по прямой		движ. по окр
x	$\longleftrightarrow$	φ
v	$\longleftrightarrow$	
a		

Тогда логично ввести понятие скорости изменения угла φ:

Опр: Угловая скорость

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \left[\frac{рад}{с} = \frac{1}{с}\right]$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t$$

Замечание: Как связаны v и ω?

длина дуги

$$v = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{R\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega$$

удобно запомнить из размерностей

Введём ещё несколько определений, характеризующих движение по окружности

Опр: T – период – время, за которое тело совершает один полный оборот (то есть оборот на $\Delta\varphi = 2\pi$)

Замечание: 1) $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$

2) $T_{\text{сек. стрелка}} = 60$ сек

$T_{\text{мин. стрелка}} = 1$ ч

$T_{\text{час. стрелка}} = 12$ ч

$T_{\text{Земли вокруг оси}} = 1$ день

Опр: $\nu = \frac{\Delta N}{\Delta t}$ – кол-во оборотов за ед. времени

$$[\nu] = [\frac{\text{шт}}{\text{с}}] = \frac{1}{\text{с}} = \text{Гц}$$

$$\nu = \frac{1}{T}$$

$$\omega = 2\pi\nu$$

Есть ли ускорение при движении по окр-ти?

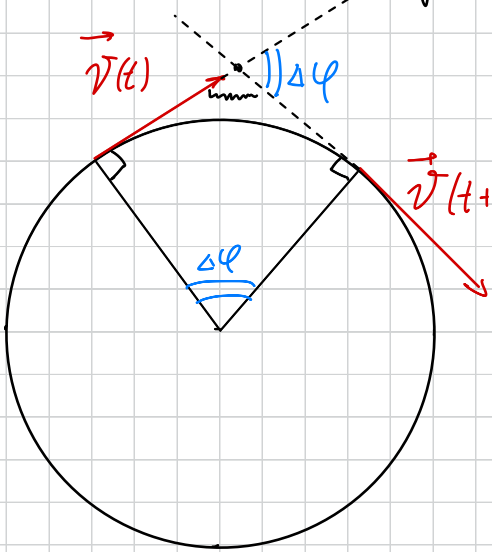
Вроде $|\vec{v}| = const \Rightarrow$ нет? – НЕТ!

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$ ← вектор скорости изм. свое напр. $\Rightarrow$ есть $\vec{a}$

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

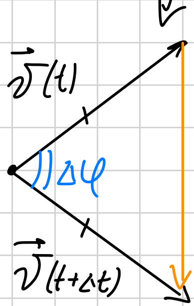
При $|\vec{v}| = const$: a – центростремительное (нормальное)

Выясним как оно связано с ω, R:



Вычислим $\Delta \vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$

Для этого перенесем их начала в общую т-ку.



т.к. $|\vec{v}(t+\Delta t)| = |\vec{v}(t)| = v$

$$\Delta \vec{v} = 2v \sin\frac{\Delta\varphi}{2}$$

Вспоминаем оптику: если φ[рад] и $\varphi \ll 1$, то

$\sin\varphi \approx \varphi$, тогда:

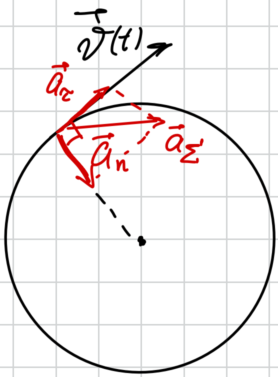
$$\Delta v \approx 2v \cdot \frac{\Delta\varphi}{2} = v\Delta\varphi$$

$$a_n = \frac{v\Delta\varphi}{\Delta t} = v\omega = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$$

Замечание: Условие встречи в т-ке окр-ти

$$\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$ (n<0 - н.б. не знаем кто быстрее)

② $|\vec{v}| \neq const$, $R = const$ – равноуск. движ. по окр-ти



За поворот вектора $\vec{v}$ отвечает $\vec{a}_n$, а за увеличение скорости по модулю – – тангенциальное ускорение

$$a_\tau = \frac{\Delta|\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

При этом

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$ – полное ускорение

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

Тогда закон изменения модуля скорости:

$$v(t) = v_0 + a_\tau t$$

$$\Rightarrow \omega(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{v_0}{R} + \frac{a_\tau}{R} t$$

Угловое ускорение

Опр: Угловое ускорение $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{a_\tau}{R}$

Замечание 1: $\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

Замечание 2: Движение по произвольной криволинейной траектории может быть представлено как последовательность перемещений по малым дужкам окружностей. Тогда справедливы соотношения для равноускоренного движения по окружности; При этом

$$R = \frac{v^2}{a_n}$$ — радиус кривизны траектории в рассм. точке

Пример 4. Материальная точка движется по окружности радиуса R с постоянным угловым ускорением ε. Найдите зависимости от времени величин скорости v и ускорения a. В начальный момент времени точка покоилась.

$$\omega(t) = \varepsilon t$$

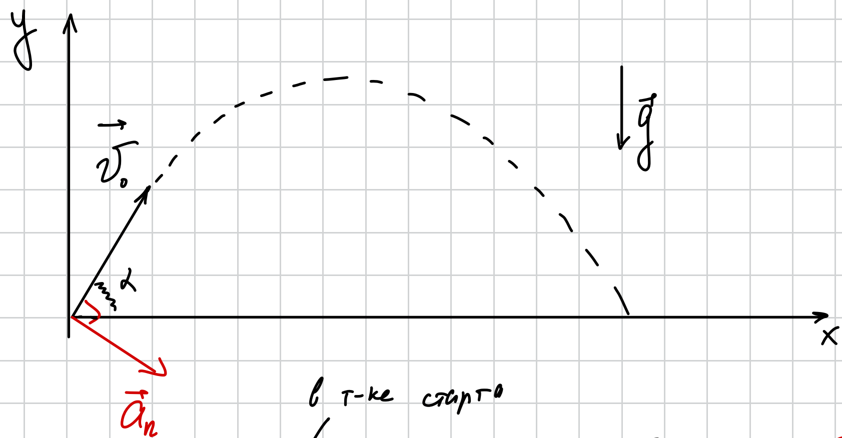
$$v(t) = R\omega(t) = R\varepsilon t$$

$$a_\tau = \frac{\Delta v}{\Delta t} = R\varepsilon$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = (\varepsilon t)^2 R$$

$$\Rightarrow a = \varepsilon R\sqrt{1+\varepsilon^2 t^4}$$

Пример 5. Камень брошен со скоростью v_0 под углом α к горизонту. В малой окрестности точки старта найдите радиус R кривизны траектории и угловую скорость ω вращения вектора скорости.



в т-ке старта

Подумайте где $R \to \min$, $R \to \max$

$$1)\ R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha} = \frac{v^2}{g\cdot\frac{v_x}{v}} = \frac{\left(\sqrt{v_x^2+v_y^2}\right)^{3/2}}{g\cdot v_x}$$

const

в т-ке старта

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{v_0}{v_0^2/g\cos\alpha} = \frac{g\cos\alpha}{v_0}$$