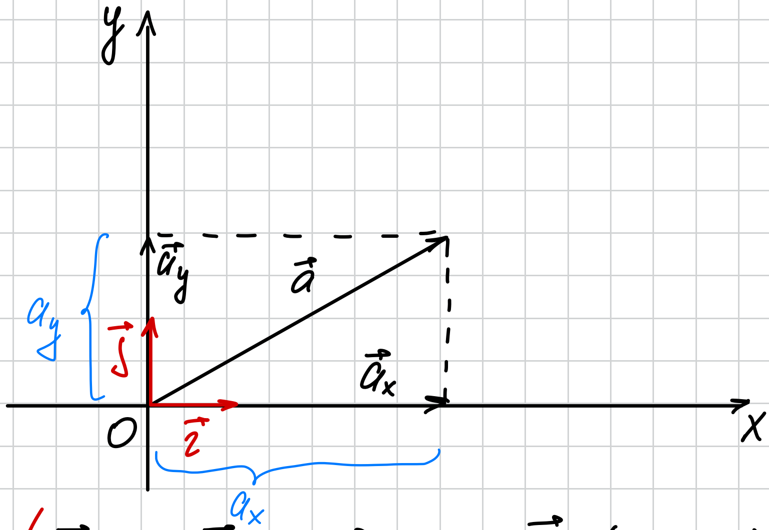
$+ \quad \times$

$- \quad \div$

Рассмотрим разложение вектора по двум взаимно-перпендикулярным направлениям

Вдоль положительных направлений осей вводят единичные векторы: $\vec{i}, \vec{j}$: $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$.



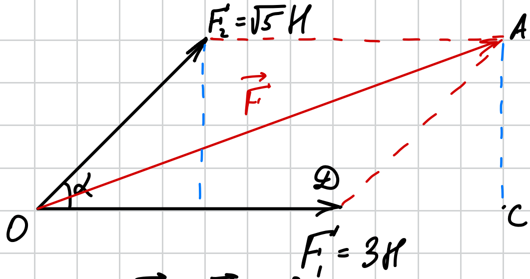
Тогда $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$, или $\vec{a} = (a_x, a_y)$

Пример: Отличие проекции от составляющей

1) Равнодействующая сила - векторная сумма всех сил, действующих на тело

К телу приложены две горизонтальные силы 3 Н и $\sqrt{5}$ Н, тангенс угла между которыми равен $\mathrm{tg}\alpha = 2$ (рис. 11). Определить модуль равнодействующей этих сил. Под каким углом β к силе $\vec{F}_1$ будет направлена равнодействующая?

$tg\alpha = 2$



1) По определению, $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$, то есть F_1 и F_2 – составляющие вектора F.

2) $tg\alpha = 2$, α – острый, $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

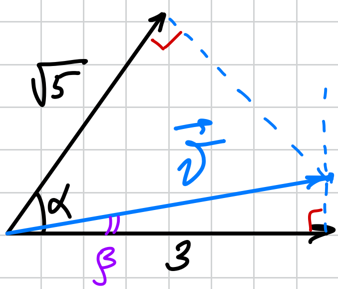
$\Rightarrow$ в $\triangle DAC$: $DC = AD \cdot \cos\alpha = 1$; $AC = AD \sin\alpha = 2$.

3) В $\triangle AOC$: $AO^2 = 4^2 + 4^2 = 2 \cdot 4^2 \Rightarrow AO = 2\sqrt{2} = F$;

$$tg\beta = \frac{AC}{OC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2) Скорости

Баржу перемещают с помощью двух буксиров, движущихся со скоростями 3 м/с и $\sqrt{5}$ м/с, образующими угол α (рис. 12), тангенс которого равен $tg\alpha = 2$. Тросы, с помощью которых буксируют баржу, нерастяжимы и прикреплены к одной точке баржи. Под каким углом β к скорости $\vec{v}_1$ будет направлена скорость точки крепления тросов и чему равна скорость этой точки? Воспользуйтесь формулой для косинуса разности двух углов $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.



1) В этом же случае v_1 и v_2 - не составляющие, а проекции v - на направление тросов. Это можно осознать, например, положив $\alpha = 0°$, тогда лодка поедет не со скоростью $v_1 + v_2$, а с v_2 (т.к. она $> v_1$)

2) Из 2-х прямоугольных Δ-ков

$$\frac{3}{\cos\beta} = \frac{\sqrt{5}}{\cos(\alpha-\beta)}$$

$$\frac{3}{x} = \frac{\sqrt{5}}{\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{x+2\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{5}{3}$$

$$1 + 2\sqrt{\frac{1}{x^2}-1} = \frac{5}{3}$$

$$\sqrt{\frac{1}{x^2}-1} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{10}} = \cos\beta$$

§3. Скалярное произведение

Опр. 1: Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется !число!, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла м/у ними

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}\vec{b} = ab\cos\varphi$$

Замечание: $a\cos\varphi = a_b$; $b\cos\varphi = b_a$, то есть $(\vec{a}, \vec{b}) = a_b b = a b_a$

Свойства скалярного произведения

1. Коммутативность

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$$

$\blacktriangle$ Следует из опр-я $\blacksquare$

2. Неотрицательность

$$(\vec{a}, \vec{a}) \geq 0, \text{ причем } (\vec{a}, \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

$\blacktriangle$ Следует из опр-я $\blacksquare$

3. Критерий перпендикулярности

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}: \quad (\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$\triangle$

$\boxed{\Rightarrow}$ $(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0$

$\blacksquare$

4. Ассоциативность умножения на скаляр

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{a}, \vec{b}: ((\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b})$$

$\triangle$

$$(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \underbrace{(\lambda \vec{a})_b}_{} \cdot b = \underbrace{\lambda a_b}_{} b = \lambda (\vec{a}, \vec{b})$$

из опр-я проекции

$\blacksquare$

5. Дистрибутивность

$$(\vec{a} + \vec{b}) \vec{c} = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$$

$\triangle$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b})_c \, c \overset{\text{проекция суммы}}{=} (a_c + b_c) c = a_c c + b_c c = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$$

$\blacksquare$

6. Выражение через разложение на составляющие

Пусть $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$, тогда

рассмотрим:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j}, b_1\vec{i} + b_2\vec{j}) \overset{\text{дистрибутивность + ассоциативность}}{=} a_1 b_1 |\vec{i}|^2 + a_1 b_2 (\vec{i}, \vec{j}) + a_2 b_1 (\vec{j}, \vec{i}) + a_2 b_2 |\vec{j}|^2$$

! В прямоугольной с.к., где $\vec{i} \perp \vec{j}$ и $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$!

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 = a_x b_x + a_y b_y$$

Пример: $\vec{a} = (1, 3)$ и $\vec{b} = (\lambda, 5)$ коллинеарны.

Найдите λ.

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \exists K: \vec{a} = K\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = K b_x \\ a_y = K b_y \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{3}{5} \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{5}{3}$ ∎

Пример: Найдите угол м/у векторами $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ и $\vec{b} = -2\vec{i} - \vec{j}$.

$\triangle$

1) $(\vec{a}, \vec{b}) = ab\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{(\vec{a}, \vec{b})}{a \cdot b}$

$(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) = -8$

$a = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$; $b = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ $\Bigg/ \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\varphi = -\dfrac{8}{\sqrt{65}} \Rightarrow \varphi \simeq 173^\circ$

$\blacksquare$

Пример: $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$; $|\vec{a} - 22\vec{b}| = |\vec{a} + 22\vec{b}|$, д-те, что $\vec{a} \perp \vec{b}$

$\triangle$

1) Заметим, что $|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}|^2} = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$, тогда:

$$\sqrt{(\vec{a} - 22\vec{b}, \vec{a} - 22\vec{b})} = \sqrt{(\vec{a} + 22\vec{b}, \vec{a} + 22\vec{b})}$$

$$(\vec{a} - 22\vec{b}, \vec{a} - 22\vec{b}) = (\vec{a} + 22\vec{b}, \vec{a} + 22\vec{b})$$

$$|\vec{a}|^2 - 22(\vec{b}, \vec{a}) - 22(\vec{a}, \vec{b}) + 484|\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 22(\vec{b}, \vec{a}) + 22(\vec{a}, \vec{b}) + 484|\vec{b}|^2$$

$$88(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

$\blacksquare$

На тест

1) Как a_x через скалярное произв.
2) Найти скалярное/угол
3) Найти равнодейств. силу