+ ×

− ÷

Порешаем задачки:

$\boxed{№1}$ При всех значениях a решите систему

$$\begin{cases} 2x - ay = 1 \\ 3x + 4y = -2 \end{cases}$$

1) Можно пользоваться Т. из пред. занятия.

2) Решим по-другому.

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2}y + \frac{1}{2} \\ \frac{3a}{2}y + \frac{3}{2} + 4y = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{a}{2}y + \frac{1}{2} \\ (3a+8)y = -7 \end{cases}$$

Если $a = -\frac{8}{3}$:

$$0 \cdot y = -7 \Rightarrow \text{нет решений}$$

Если $a \neq -\frac{8}{3}$ – одно реш.

$$\begin{cases} x = -\frac{7a}{2(3a+8)} + \frac{1}{2} \\ y = -\frac{7}{3a+8} \end{cases}$$

Ответ: $a = -\frac{8}{3}$ – нет корней; $a \neq \frac{8}{3}$ – один корень

№2

$$\begin{cases} |x-y|=5 \\ 2x+3y=10 \end{cases}$$

– под модулем 2 перем
$\Rightarrow$ нельзя $\left[\begin{array}{l} x-y=5 \\ x-y=-5 \end{array}\right.$

1) Раскроем модули

а) $x-y \geq 0$:

$$\begin{cases} x=y+5 \\ 2y+10+3y=10 \end{cases} \quad \begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases} - x \geq y \Rightarrow (5,0) \text{ - реш}$$

б) $x-y \leq 0$:

$$\begin{cases} x=y-5 \\ 2y-10+3y=10 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow x \leq y \Rightarrow (-1;4) \text{ - реш}$$

Ответ: $(5;0)$; $(-1;4)$

$\boxed{№3}$ $\begin{cases} |x| + 2y = 1{,}5 \\ 2x - 4|y| = 3 \end{cases}$

1) Раскрываем разные случаи модулей.

⋮

Ответ: $(1{,}5 - 2y;\ y)$, $y \leq 0$

Замечание: В домашке есть текстовые задачи – в методичке аналогичные – заботайте сами

Рассмотрим симметричные системы

Опр 1: Функция $f(x,y)$ называется симметричной, если $f(x,y) = f(y,x)$

Примеры: $f(x,y) = x^3 + y^3$ - симм.

$f(x,y) = xy$ – симм

$f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$ – симм

$f(x,y) = x^3 + y$ – НЕ симм

Опр 2: Система

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \quad (*)$$

Называется симметричной, если $f(x,y)$ и $g(x,y)$ -
- симметричные. (семмитрические)

Замечание: Если (x,y) - решение симм. системы
(y,x) - решение симм. системы

В симметрических системах хорошо работает
замена переменных:

$$\begin{cases} U=x+y \\ v=xy \end{cases}$$

$\boxed{№4}$

$$\begin{cases} x^2y+xy^2=2-2x-2y \\ x+y+5=-xy \end{cases}$$ - симм. система

$$\begin{cases} xy(x+y)+2(x+y)=2 \\ x+y+xy=-5 \end{cases} \quad (*)$$

1) Вводим замену:

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = xy \end{cases}$$

Тогда система (*) примет вид:

$$\begin{cases} uv + 2u = 2 \\ u + v = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} u^2 + 3u + 2 = 0 \\ v = -u-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} u = -1 \\ u = -2 \end{array}\right. \\ v = -u-5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = -1 \\ v = -4 \end{cases} \\ \begin{cases} u = -2 \\ v = -3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y = -1 \\ xy = -4 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y = -2 \\ xy = -3 \end{cases} \end{array}\right. - \ldots$$

Ответ: $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right); \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$

$(1; -3); (-3, 1)$

Замечание: Любой симметричный многочлен можно записать через u и v. Например:

$$u^2 = x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2 + 2v$$

$$x^2 + y^2 = u^2 - 2v$$

Аналогично показывается, что:

$$x^3+y^3=u^3-3uv$$

$$x^4+y^4=u^4-4u^2v+2v^2$$

$\boxed{№5}$ $\begin{cases} x^3+y^3=19 \\ (xy+8)(x+y)=2 \end{cases}$ – симм. система

1) Вводим замену:

$$\begin{cases} u=x+y \\ v=xy \end{cases}$$

2) Тогда иск. система:

$$\begin{cases} u^3-3uv=19 \\ u(v+8)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3+24u-25=0 \\ uv=2-8u \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^3-u+25(u-1)=0 \\ uv=2-8u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u-1)(u^2+u+25)=0 \\ uv=2-8u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=6 \end{cases}$$

Ответ: $(3;-2);(-2;3)$

$\boxed{№6}$

$$\begin{cases} x^2y^3=16 \quad (1) \\ x^3y^2=2 \quad (2) \end{cases}$$

1) Если $x=0 \Rightarrow$ реш. нет

$y=0 \Rightarrow$ реш. нет

2) Значит $x\neq 0, y\neq 0$ Поделим $(1)\div(2)$:

$$\begin{cases} \frac{y}{x}=8 \\ x^2y^3=16 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=8x \\ x^5=\frac{1}{32} \end{cases} \qquad \begin{cases} y=4 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ответ: $(\frac{1}{2};4)$

$\boxed{№7}$

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2}(2+x) = 4y-3x & (1) \\ 2y^2-3xy = 4y-x^2 & (2) \end{cases}$$

1) Домножим (1) на x^2:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ 2y^2+xy^2 = 4x^2y-3x^3 \\ 2y^2-3xy = 4y-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x(y-x)(y-3x) = -2y^2 \\ (x-y)(x-2y) = 4y & (3) \end{cases}$$

2) Заметим, что обе части ур-я (3) не могут обращаться в нуль (иначе $x=0$), тогда делим:

$$\frac{x(y-3x)}{x-2y} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow 2y^2+xy-6x^2=0$$

$$\Leftrightarrow (y+2x)(2y-3x)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} y=-2x \\ y=\frac{3}{2}x \end{array}\right.$$ - подставим

Ответ: $\left(-\frac{8}{15}; \frac{16}{15}\right); (6,9)$