+ ×

− ÷

$\boxed{№1}$ Д-те, что $7^n - 1 \,\vdots\, 6$

1 способ

По ф-лам сокращенного умножения:

$$7^n - 1^n = \underbrace{(7-1)}_{\vdots\, 6}(7^{n-1} + \ldots + 1) \,\vdots\, 6$$

2 способ

$$7 \equiv 1 \pmod 6 \Rightarrow 7^n \equiv 1 \pmod 6$$

$$\Rightarrow 7^n - 1 \equiv 0 \pmod 6$$

$\boxed{№2}$ Д-те, что $13^n + 3^{n+2} \,\vdots\, 10 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$13 \equiv 3 \pmod{10} \Rightarrow 13^n \equiv 3^n \pmod{10}$$

$$\Rightarrow 13^n + 3^{n+2} \equiv 3^n + 3^{n+2} = 3^n(1+9) = 10 \cdot 3^n \pmod{10}$$

$$10 \cdot 3^n \equiv 0 \pmod{10}$$

Тогда:

$$13^n + 3^{n+2} \equiv 0 \pmod{10}$$

$\boxed{№3}$ Д-те, что $7^{n+2}+8^{2n+1} \vdots 57$, $\forall n \in \mathbb{N}$

1) $8^2 \equiv_{57} 7 \Rightarrow 8^{2n+1} \equiv_{57} 7^n \cdot 8$

Тогда

$$7^{n+2}+8^{2n+1} \equiv_{57} 7^n \cdot 57 \equiv_{57} 0$$

$\boxed{№4}$ Д-те, что $(2^n-1)^n-3 \vdots 2^n-3$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

1) Пусть $2^n-3=m$, тогда

$$2^n-1=2^n-3+2=m+2 \equiv_m 2$$

$$\Rightarrow (2^n-1)^n \equiv 2^n \pmod m$$

$$(2^n-1)^n \equiv 2^n-3=m \equiv 0 \pmod m$$

№5 Д-те, что $n^3 - n \,\vdots\, 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Заметим, что при делении на 3 возможны остатки 0, 1, 2. Тогда по mod 3:

n	n^3
0	0
1	$1^3 = 1$
2	$2^3 = 8 \equiv 2$

$\Rightarrow n^3 - n \equiv_3 0$

№6 Д-те, что $n^5 - n \,\vdots\, 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Опять, смотрим какие могут быть n по mod 5:

n	n^5
0	0
1	1
2	$2^5 \equiv 2$
3	$3^5 = 9 \cdot 9 \cdot 3 \equiv 4 \cdot 4 \cdot 3 = 16 \cdot 3 \equiv 1 \cdot 3 = 3$
4	$4^5 = 16 \cdot 16 \cdot 4 \equiv 1 \cdot 1 \cdot 4 = 4$

$\Rightarrow n^5 - n \equiv_5 0$

№7 Д-те, что $n^7 - n \vdots 7$ $\forall n \in \mathbb{N}$

mod 7

n	n^7
0	0
1	1
2	$2^7 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2 = 8 \cdot 8 \cdot 2 \equiv 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$
3	$3^7 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 3 \equiv 2^3 \cdot 3 \equiv 3$
4	$4^7 \equiv (-3)^7 = -3^7 \equiv -3 \equiv 4$
5	$5^7 \equiv (-2)^7 = -2^7 \equiv -2 \equiv 5$
6	$6^7 \equiv (-1)^7 = -1 \equiv 6$

$\Rightarrow n^7 - n \equiv 0$

Закрадывается мысль, что это работает для всех нечетных

Проверим 9: $n^9 - n \vdots n$

n	n^9
0	0
1	1
2	$2^9 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \equiv (-1) \cdot (-1)(-1) = -1$

!! не работает

$\boxed{\text{Т}}$ (Малая Теорема Ферма)

Пусть p-простое, $a \not\vdots\, p$ (a и p взаимнопростые),

тогда:
$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$
$$\left(a^p - a \equiv 0 \pmod p\right)$$
$$\left(a^p - a \vdots\, p\right)$$

$\boxed{№8}$ Найдите остаток от деления 14^{258} на 17

1) $14 \equiv_{17} -3 \Rightarrow 14^{258} \equiv_{17} 3^{258}$

2) $3^2 \equiv_{17} -8 \Rightarrow 14^{258} \equiv_{17} 3^{258} = (3^2)^{129} \equiv_{17} (-2^3)^{129} =$

$= -2^{387}$

36 2 4

3) $2^4 \equiv_{17} -1 \Rightarrow -2^{387} = -2^3 \cdot 2^{384} = -8 \cdot (2^4)^{96} \equiv_{17} -8(-1)^{96} =$

$= -8 \equiv_{17} 9$

То есть $14^{258} \equiv_{17} 9$ и по опр-ю

Ответ: 9

Задачу можно было решить легче, используя МТФ: 17 – простое, $14 \not\vdots\, 17$, тогда:

$$14^{17-1} \equiv_{17} 1$$

$$14^{16} \equiv_{17} 1$$

$$258 = 16 \cdot 16 + 2$$

Тогда из св-в сравнения по модулю:

$$\left(14^{16}\right)^{16} \equiv_{17} 1^{16} = 1$$

$$14^{2} \cdot 14^{16 \cdot 16} \equiv_{17} 14^{2}$$

$$14^{256} \equiv_{17} 14 \cdot 14 \equiv_{17} (-3)(-3) = 9$$

Ответ: 9