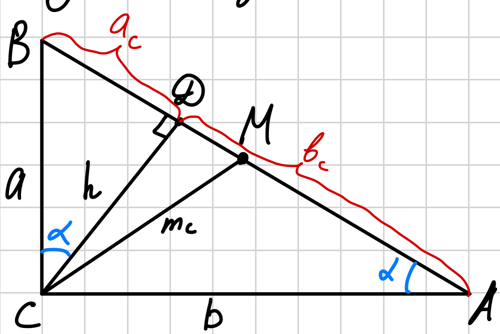
+ ×

− ÷

§ 1. Прямоугольный треугольник

Рассмотрим полезные метрические соотношения, возникающие в прямоугольном треугольнике. Для этого введем обозначения



a, b - катеты; c - гипотенуза

a_c, b_c - проекции катетов на гипотенузу

h - высота, опущ. на гипотенузу

m_c - медиана к гипотенузе

R, r - радиусы описанной и вписанной окр-тей соотв.

Свойство 1°: $a^2 = c \cdot a_c$; $b^2 = c \cdot b_c$

▲

1) $\angle BCD = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \alpha$

2) Рассмотрим $\triangle ABC$, $\triangle BCD$:

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{a}{c} \\ \sin\alpha &= \frac{BD}{a} = \frac{a_c}{a} \end{aligned}\right\} a^2 = a_c \cdot c$$

■

Свойство 2°: $h^2 = a_c \cdot b_c$

▲

1) Рассмотрим ΔCBD и ΔCDA:

$$\left.\begin{aligned} tg\,\alpha &= \frac{a_c}{h} \\ tg\,\alpha &= \frac{h}{b_c} \end{aligned}\right| \Rightarrow h^2 = a_c \cdot b_c$$

■

Свойство 3°: $ab = ch$

▲

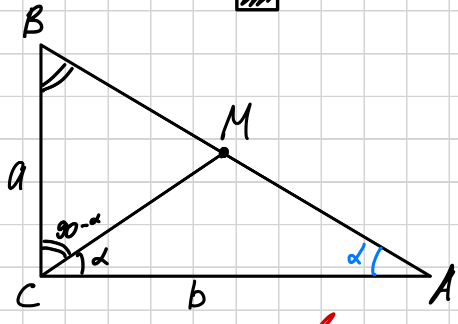
1) Рассмотрим ΔABC и ΔACD:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\Rightarrow ab = ch$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{b}$$

■



Свойство 4°: $m_c = \frac{1}{2} c$

▲

1) Проведем CM: $AM = CM$

$\Rightarrow \angle MCB = 90° - \alpha \Rightarrow \Delta BCM$ – р/б.

почему, кстати, всегда можно так сделать?

■

Свойство 5°: $R = m_c = \frac{1}{2}c$

▲

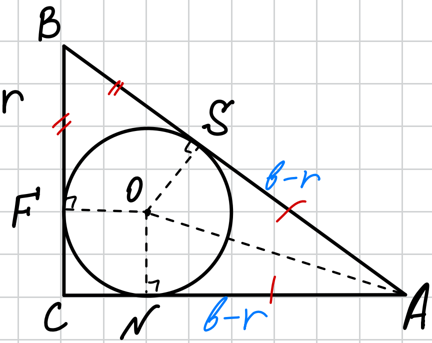
1) Следует из 4°: M – равноудалена от $A, B, C \Rightarrow$

$\Rightarrow$ центр окр-ти

■

Свойство 6°: $a+b = 2(R+r)$; $a+b = c+2r$

▲



1) $OFCN$ – квадрат со стороной r

$\Rightarrow AN = b - r$

2) $\triangle AON = \triangle AOS$ (по катету и гипотенузе) $\Rightarrow AN = AS$

3) Аналогично $BF = BS = a - r$

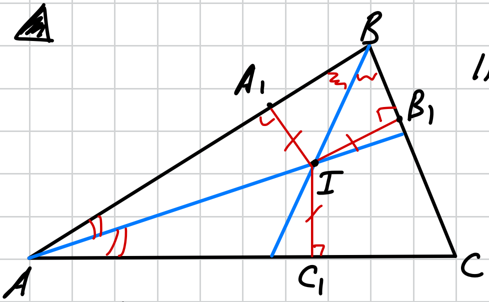
4) Тогда $c = a + b - 2r$

■

§2 Замечательные точки Δ-ка

Т1 Три биссектрисы Δ-ка пересекаются в одной т-ке, которая есть центр вписанной окр-ти

▲



1) Рассмотрим т-ку пересечения биссектрис углов A и B – I

вспомните, как оно доказывается

2) По св-ву биссектрис – точка I равноудалена от сторон, т.е. $IA_1 = IB_1$, $IC_1 = IA_1$ ⇒

⇒ $IA_1 = IB_1 = IC_1$ ⇒ точка I равноудалена от сторон AC и BC ⇒ лежит на бис-се (свойство бис-сы)

3) Центр вписанной окр-ти равноудален от всех его сторон ⇒ это точка пересечения сторон

т.к. других равноуд. точек нет

■

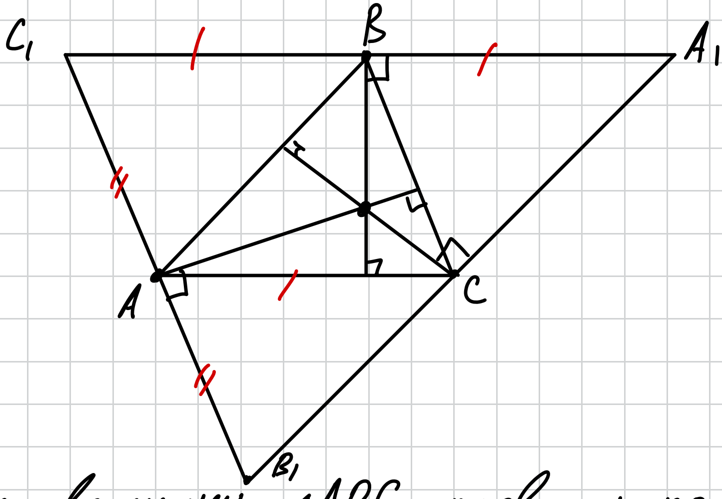
Т2 Три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая есть центр описанной окружности.

▲

Доказывается аналогично Т1 - попробуйте сами ■

Т3 Три высоты или !!! три прямые, на которых лежат высоты Δ, пересекаются в одной точке. Эта точка называется <u>ортоцентром</u> Δ.

▲



1) Через вершины ΔABC проведем прямые, противоположным сторонам. По построению ABA_1C - параллелограмм $\Rightarrow BA_1 = AC \Rightarrow C_1B = BA_1 \Rightarrow B$ - середина C_1A_1

2) Аналогично A - середина B_1C_1

3) Пусть BN - высота ΔABC, тогда для A_1C_1: BN - середин-

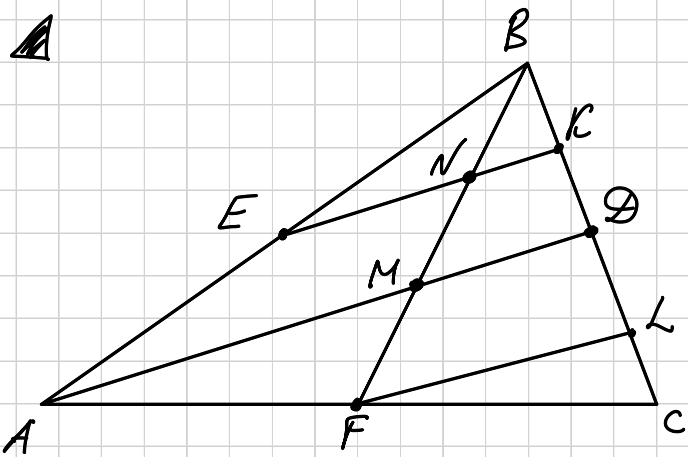
ный перп. ⇒ прямые, на которых лежат высоты $\triangle ABC$ есть сер. перп. $\triangle A_1B_1C_1$ ⇒ они пересек. в 1 точке.
Т2

4) Для тупоугольного док-во точно такое же, но пересечение лежит вне Δ-ка

■

Т4 При медианы Δ пересекаются в одной точке и каждая медиана делится точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины. Эта т-ка называется центром тяжести

Δ



1) Пусть E, D, F – середины сторон AB, BC, AC.
2) Проведем AD и прямые параллельные AD через точки E и F.
3) По Т. Фалеса: BK = KD и DL = LC, но BD = DC ⇒ BK = KD = DL = LC

4) Проведем медиану BF'

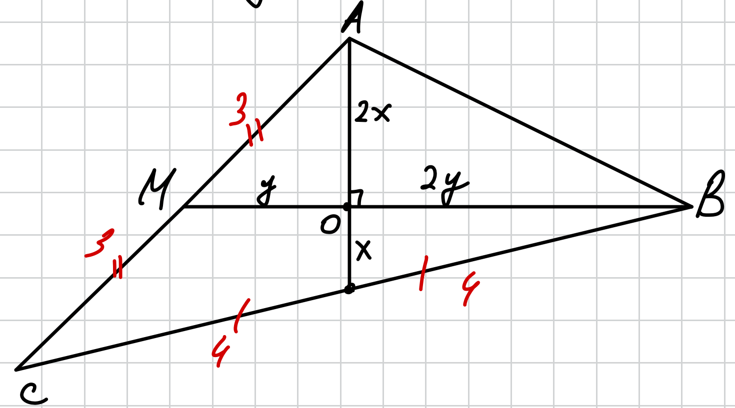
5) По т. Фалеса $BN = NM = MF' \Rightarrow BM : MF' = 2:1$

6) Если провести прямые $\parallel BF'$ через точки D и E, то можно доказать, что $AM : MD = 2:1$

7) Рассмотрев медианы BF' и CE можно д-ть, что они также пересекаются в т-ке которая делит их как $2:1$ (т-ка M) $\Rightarrow$ в точке M пер. все медианы

$\boxtimes$

Пример: Две стороны Δ: 8 и 6, медианы к этим сторонам $\perp$. Найти 3 сторону.



По т. Пифагора:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 16 & (1) \\ y^2 + 4x^2 = 9 & (2) \end{cases}$$

Сторона AB:

$$AB^2 = 4x^2 + 4y^2 \underset{(1)+(2)}{=} 20$$

§3. Подобие Δ-ков

Опр: Две фигуры F и F' называются подобными, если они переводятся друг в друга преобразованием, которое изменяет расст. м/у точками в одно и то же число раз

Критерий подобных Δ-ков: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 \Leftrightarrow$

$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$; $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = AC : A_1C_1$.

Признаки подобия:

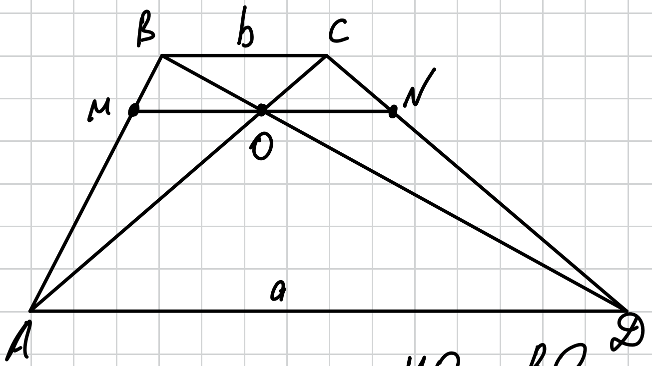
1) Если два угла одного Δ-ка соотв. равны двум углам другого Δ-ка, то такие Δ-ки подобны

2) Если две стороны одного Δ-ка пропорциональны двум сторонам другого Δ-ка и углы, заключенные м/у этими сторонами равны, то такие Δ-ки подобны

3) Если три стороны одного Δ-ка пропорциональны трем сторонам другого Δ-ка, то такие Δ-ки подобны

Лемма: Если 2 стороны Δ-ка пересекает прямая, параллельная третьей стороне, то она отсекает Δ подобный данному

Пример 4 (важное свойство трапеции)



$MN - ?$

1) $\triangle BMO \sim \triangle BAD \Rightarrow \dfrac{MO}{AD} = \dfrac{BO}{BD}$

2) $\triangle AOD \sim \triangle COB \Rightarrow \dfrac{OD}{OB} = \dfrac{AD}{BC} = \dfrac{a}{b}$

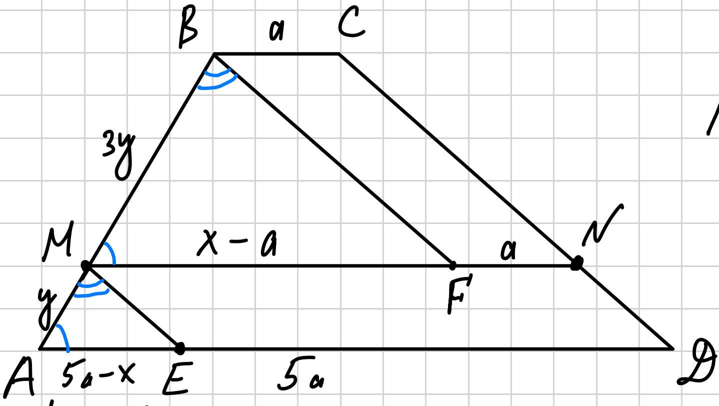
3) Тогда

$$\frac{BO}{BD} = \frac{BO}{BO+OD} = \frac{1}{1+\frac{OD}{BO}} = \frac{b}{a+b}$$

$$\Rightarrow MO = \frac{ab}{a+b}$$

4) Аналогично $NO = \dfrac{ab}{a+b} \Rightarrow MN = \dfrac{2ab}{a+b}$

Пример 5 (Полезный метод решения)



$MN = x - ?$

1) Проведем BF и $ME \parallel CD \Rightarrow \angle AME = \angle MBF$; $\angle MAE = \angle BMF$.

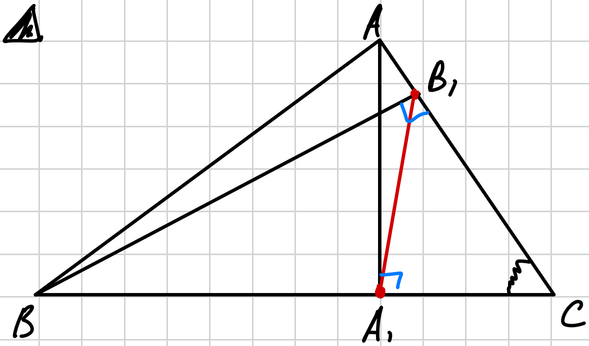
2) Тогда $\triangle AME \sim \triangle MBF$, тогда: $\dfrac{5a - x}{x - a} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow x = 4a$

§4. Свойства высот и биссектрис

Лемма 1 (о высотах). Пусть в ΔABC – нет прямого угла. AA_1 и BB_1 – его высоты, то $\Delta A_1B_1C \sim \Delta ABC$ с коэф-том подобия $k = |\cos C|$ ← подумайте, почему тут модуль

▲



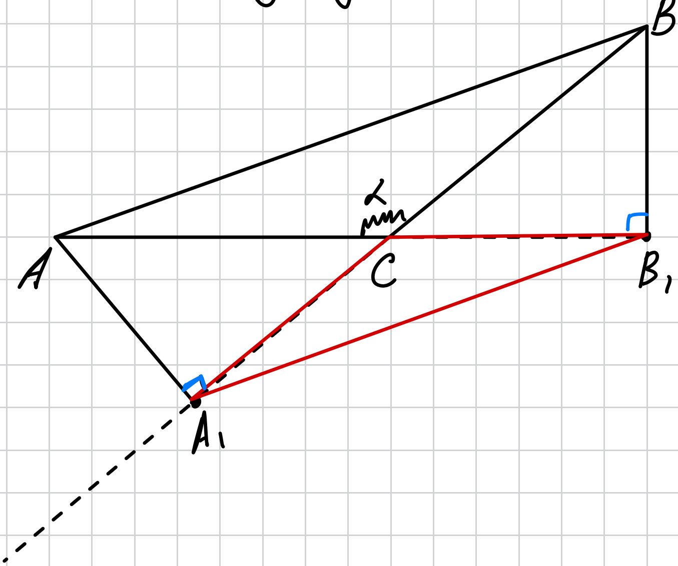
I) ΔABC – остроугольный

1) Рассмотрим ΔBB_1C : $BC = \dfrac{B_1C}{\cos C}$

2) В ΔAA_1C : $AC = \dfrac{A_1C}{\cos C}$

⇒ $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$ по 2-м проп. ст. и углу м/у ними

II) $\triangle ABC$ - тупоугольный, $\angle C$ - тупой

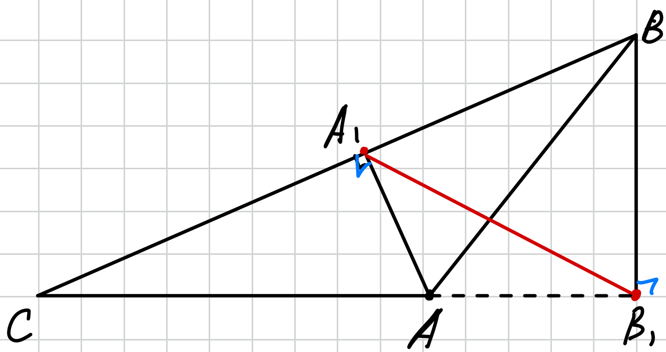


Аналогично:

$B_1C = BC\cos(\pi-\alpha)$

$A_1C = AC\cos(\pi-\alpha)$

III) $\triangle ABC$ - тупоугольный, $\angle A$ - тупой



$A_1C = AC\cos C$

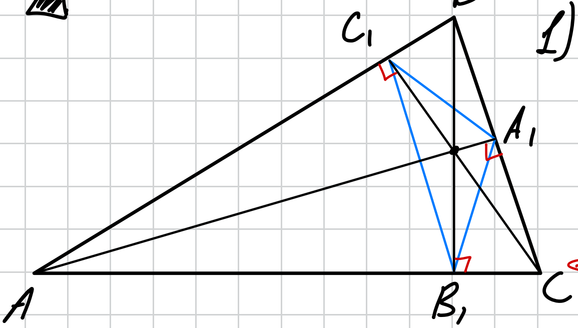
$CB_1 = CB\cos C$

Пример 7 (Св-во ортотреугольника)

Опр: Треугольник, вершинами которого служат основания высот другого Δ, называется ортотреугольником

Покажем, что высоты исходного Δ есть бис-сы соотв. углов ортотреугольника.

▲



1) По Лемме 1: $\Delta A_1B_1C \sim \Delta ABC$

$\Rightarrow \angle B_1A_1C = \angle A$

$\Rightarrow \angle AA_1B_1 = 90° - \angle A$

← рисунок не ограничивает общность т.к. Лемма 1 верна ∀ Δ-ка

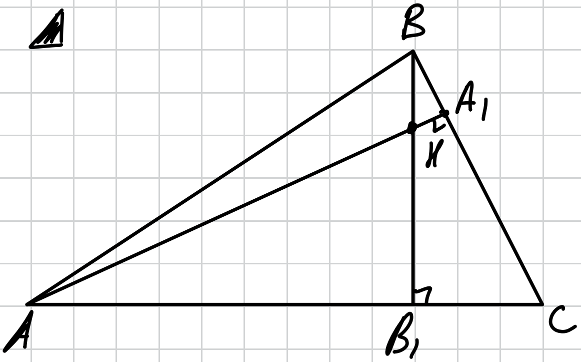
2) По Лемме 1: $\Delta A_1BC_1 \sim \Delta ABC \Rightarrow \angle C_1A_1B = \angle A \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle C_1A_1A = 90° - \angle A = \angle AA_1B \Rightarrow AA_1$ - бис-са

■

Лемма 2 (о высотах): Пусть высоты $\triangle ABC$: AA_1 и BB_1 пересекаются в т-ке H. Тогда $AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1$

▲



1) $\triangle AHB_1 \sim \triangle BHA_1$ – по острому углу

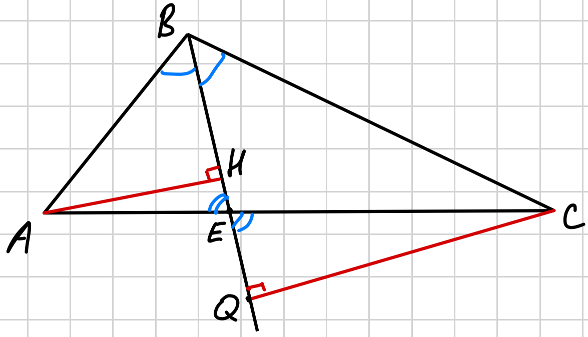
$$\Rightarrow \frac{BH}{AH} = \frac{A_1H}{B_1H}$$

Для тупоугольного тоже верно – д-те сами :)

■

Лемма 3 (Теорема 5, о бис-се): Бис-са внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам

▲



1) $\triangle ABH \sim \triangle CBQ$: $\frac{AB}{BC} = \frac{AH}{CQ}$

2) $\triangle AHE \sim \triangle CQE$: $\frac{AH}{CQ} = \frac{AE}{CE}$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AE}{CE}$$

■