+ ×

− ÷

§2. Неравенства

1 Квадратные неравенства

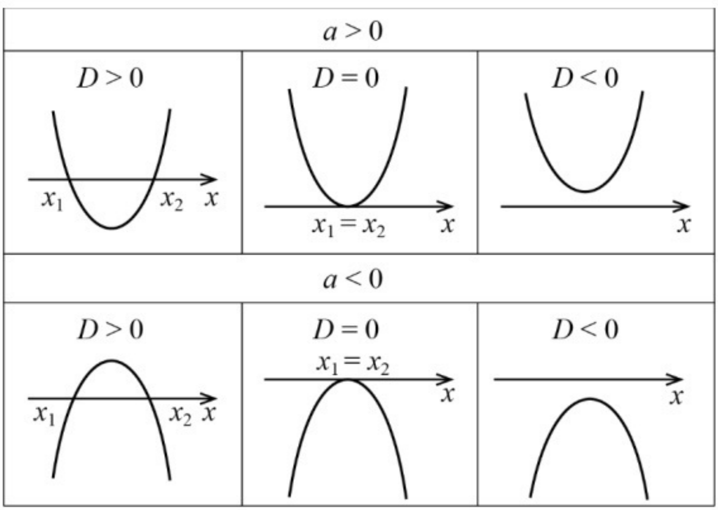
Пусть имеется ф-ция $ax^2+bx+c=f(x)$, $a\neq 0$.

Вспомним, что

1) $a>0$ – ветви вверх, $a<0$ – ветви вниз

2) $D>0$ – есть 2 корня (2 пересечения оси Ox)

$D=0$ – 1 корень (касание Ox), $D<0$ – нет корней (нет пересечений Ox)



Алгоритм решения кв. неравенства:

1. Найти D

2. Если $D \geqslant 0$ – найти корни

3. Учитывая знаки a и D схематически построить график ф-ции ax^2+bx+c

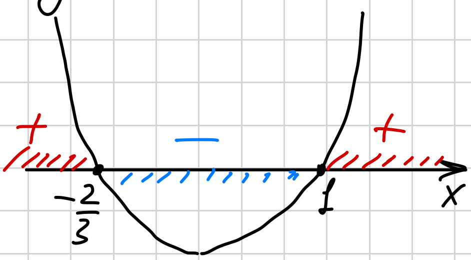
4. Найти множество решений

Примеры:

а) $3x^2 - x - 2 \geqslant 0$

1) Очевидно, что $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = -\frac{2}{3}$ (по Т. Виетта)

Тогда: $3>0$, $D>0$



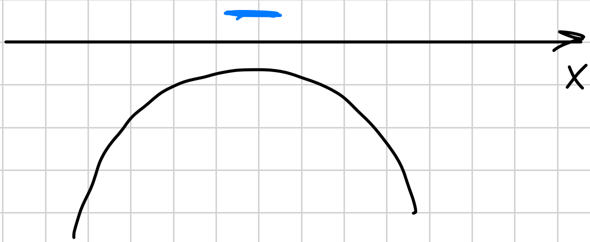
2) Т.к. $3x^2 - x - 2 \geqslant 0$, то решением будут все x, где парабола выше Ox либо пересекает ее

Ответ: $x \in (-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [1; +\infty)$

б) $2x - 3 - x^2 < 0$

1) $D < 0$, $a = -1 < 0$

2)



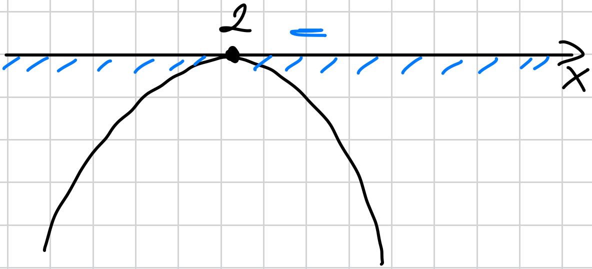
Ответ: $x \in (-\infty; +\infty)$ $(x \in \mathbb{R})$

в) $2x - \frac{1}{2}x^2 - 2 \geq 0$

1) Домножим на 2 для удобства (почему так можно сделать?)

2) $-x^2+4x-4 \geq 0$

$D_1 = 0$, $a = -1 < 0$



Ответ: $x=2$

Пример: При каких a число 2 находится м/у корнями квадратного уравнения

$$x^2+(4a+5)x+3-2a=0$$

1) Ур-е должно иметь 2 корня

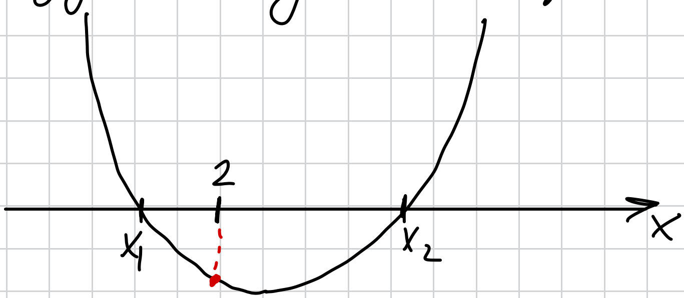
$$D=(4a+5)^2-4(3-2a)>0$$

2) При этом $\begin{cases} x_1<2 \\ x_2>2 \end{cases}$

Получаем систему

$$\begin{cases} (4a+5)^2-4(3-2a)>0 \\ \frac{1}{2}(-4a-5-\sqrt{D})<2 \\ \frac{1}{2}(-4a-5+\sqrt{D})>2 \end{cases}$$ — но ее сложно решать

3) Нарисуем график нужной $f(x)=x^2+(4a+5)x+3-2a$ и подумаем над более простыми условиями:



Заметим, что $a=1>0 \Rightarrow$ ветви всегда вверх, поэтому если $f(2)<0$, то $f(x)$ будет иметь 2 корня, при этом $x_1<2<x_2$.

$$f(2)=4+2(4a+5)+3-2a<0$$

$$a<-\frac{17}{6}$$

<u>Пример:</u> Ур-ие $(a^2-9)x^2-(2a^2+5a-9)x+a+3=0$ имеет 2 корня разных знаков, a-?

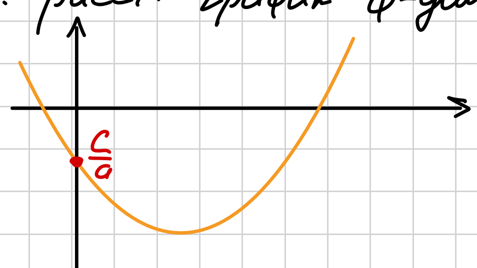
имеется в виду $x_1>0,\ x_2<0$

1) 2 корня + они разных знаков, тогда:

$$\begin{cases} D>0 \\ x_1x_2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2a^2+5a-9)^2-4(a^2-9)(a+3)>0 \quad (1) \\ \dfrac{a+3}{a^2-9}<0 \quad (2) \end{cases} \quad (*)$$

2) Перво неравенство очень сложное. Попробуем придумать условие полегче: рассм график ф-ции

$$y=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$$



Заметим, что если $\frac{c}{a}<0$, то ур-е точно будет иметь 2 корня: (также это видно из ф-лы D)

$$\frac{c}{a}<0 \Rightarrow D<0$$

3) Т.е. в нашей системе (*) - если выполнено (2), то (1) будет выполнено автоматически $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ можно отбросить

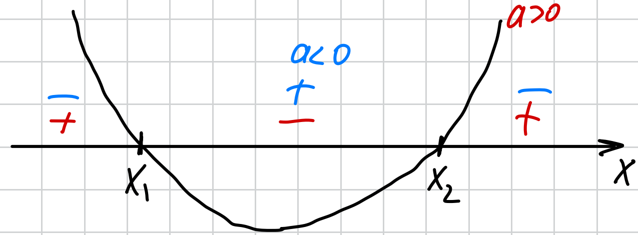
$$\frac{a+3}{(a-3)(a+3)}<0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -3 \\ \frac{1}{a-3}<0 \end{cases}$$

Ответ: $a \in (-\infty, -3) \cup (-3, 3)$

2. Метод интервалов

1) Вспомним, что если $a \neq 0$ $D \geq 0$:

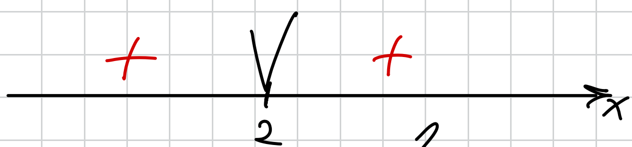
$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$



Знаки чередуются через корни!

2) Если $f(x) = (x-2)^2$

ставим галочку, т.к. четная степень



Знак не чередуется

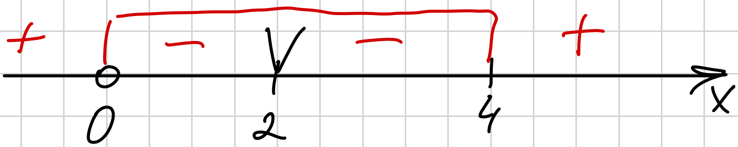
Алгоритм решения методом инт-лов

1) Разложить ф-цию на множители

2) Отметить на оси нули ф-ции как точки (если неравенство не строгое) или как выколотые точки (если неравенство строгое или это ноль знаменателя)

3) Найти один знак, остальные найти чередованием

Пример: $\dfrac{(x-2)^2(x-4)}{x} \le 0$



Ответ: $x \in (0;4]$

§3. Многочлены

Опр 1: Выражение вида

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 \,, \quad a_n \neq 0$$

называют многочленом степени n

$$\deg P(x) = n$$

Замечание: Как делить многочлен на многочлен?

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
1\cdot x^4 & -3x^3 & -2x^2 & -6x & -8 & x-5 \\
\cline{6-6}
-\; x^4 & -5x^3 & & & & 1\cdot x^3 + 2x^2 + 8x + 34 \\
\cline{1-2}
 & 2x^3 & -2x^2 & & & \\
 & -\; 2x^3 & -10x^2 & & & \\
\cline{2-3}
 & & 8x^2 & -6x & & \\
 & & -\; 8x^2 & -40x & & \\
\cline{3-5}
 & & & 34x & -8 & \\
 & & & -\; 34x & -170 & \\
\cline{4-5}
 & & & & 162 &
\end{array}
$$

Получим:

$$x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 6x - 8 = \overbrace{(x^3 + 2x^2 + 8x + 34)}^{T(x)}\overbrace{(x-5)}^{Q(x)} + \overbrace{162}^{R(x)}$$

Лемма: При делении $P(x)$ на $Q(x)$: $\exists!\ T(x), R(x)$ - многочлены:

остаток

$$P(x) = T(x)Q(x) + R(x),\ \deg R < \deg Q$$

(Если $\deg P(x) < \deg Q(x)$, то $T \equiv 0$, $R(x) = P(x)$)

$\boxed{\text{Т 1}}$ (Безу)

Остаток от деления $P(z)$ на $(z-a)$ равен $P(a)$

$\triangle$

По лемме: $P(z) = (z-a)T(z) + R(z)$, $0 \leq \deg R < 1$

$\Rightarrow R(z)$ - число и $R(a) = P(a)$ $\Rightarrow R(z) = P(a)$

$\blacksquare$

Следствия: 1) Число α является корнем многочлена $F(x) \Leftrightarrow F(x) \vdots (x-\alpha)$

2) Два различных числа α и β явл. корнями многочлена $F(x) \Leftrightarrow F(x) \vdots (x-\alpha)(x-\beta)$

3) Многочлен степени n не может иметь более n корней

△

1) Из Т1 $\Rightarrow F'(x) \vdots (x-\alpha) \Leftrightarrow F(\alpha)=0$

2) $F'(\alpha)=0 \Leftrightarrow F'(x)=(x-\alpha)G(x)$

$$F(\beta)=0 \Leftrightarrow (\beta-\alpha)G(\beta)=0 \underset{\alpha\neq\beta}{\Leftrightarrow} G(x)=(x-\beta)H(x)$$

$\Leftrightarrow F'(x)=(x-\alpha)(x-\beta)H(x)$

3) $\boxed{\neg}$ (предположим противное)

Пусть $\deg F'(x)=n$ и $F(x)$ имеет $(n+1)$-корней — $x_1, x_2, \ldots$

$\ldots x_{n+1}$, тогда:

$$F'(x)=\underbrace{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n+1})}_{H(x)}G(x)$$

$$\deg H(x)=n+1$$

$\Rightarrow \deg F \geq n+1$ — противоречие!!!

☒

Рассмотрим примеры

№1

Остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $(2x-3)$ равен (-8), а остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $(3x-2)$ равен 8. Найдите остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $(2x-3)(3x-2)$.

1) По т. Безу

$$P\left(\frac{3}{2}\right)=-8$$

$$P\left(\frac{2}{3}\right)=8$$

2) По лемме:

$$P(x)=(2x-3)(3x-2)T(x)+R(x)$$

где $\deg R(x)<2$

Пусть $R(x)=ax+b$, тогда $\quad \frac{2}{3}-\frac{3}{2}=\frac{4-9}{6}=-\frac{5}{6}$

$$\begin{cases} P\left(\frac{2}{3}\right)=8=\frac{2a}{3}+b \\ P\left(\frac{3}{2}\right)=-8=\frac{3a}{2}+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{5}{6}a=16 \\ b=8-\frac{2}{3}a \end{cases} \begin{cases} a=-\frac{96}{5} \\ b=\frac{104}{5} \end{cases}$$

Ответ: $R(x)=-\frac{96}{5}x+\frac{104}{5}$

$\boxed{№2}$

Найдите остаток от деления многочлена $\underbrace{x^{150} + 3x^{149} - x^3 - 3x^2 - 9}_{P(x)}$ на многочлен $x^2 + 2x - 3$.

1) Рассмотрим

$$x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$$

2) Заметим, что

$$P(x) = x^{149}(x+3) - x^2(x+3) - 9 =$$

$$= x^2\underbrace{(x^{147}-1)}_{\vdots (x-1) \text{ по т. Безу}}(x+3) - 9 = (x-1)(x+3)T(x) - 9$$

Ответ: $R(x) = -9$.