$+ \quad \times$

$- \quad \div$

# §1. Иррациональные уравнения

Рассмотрим различные виды ур-й и методы их решений

## 1. Учет ОДЗ

Пример: Решите ур-е

$$\sqrt{6x - x^2 - 8} + \sqrt{x-4} = x^2 - 7x + 12$$

1) Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} 6x - x^2 - 8 \geq 0 \\ x - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$$

2) Подставим $x=4$ в ур-е $\Rightarrow$ верно

Ответ: $x=4$

# 2. Равносильные переходы

Опр: Уравнения называются равносильными, если множества решений ур-й совпадают

## а) Ур-е вида $\sqrt{A} = \sqrt{B}$

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ B \geq 0 \ (\text{или } A \geq 0) \end{cases}$$

выбираем самое простое

Пример: 1. $\sqrt{1-x^2} = -5$

2. $\sqrt{3x^2-3x-11} = \sqrt{2x^2-4x-5}$

1. $\sqrt{x} \geq 0$, при $x \geq 0$ $\Rightarrow$ ур-е не имеет корней

2. $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-6=0 \\ 2x^2-4x-5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[ \begin{array}{l} x=2 \ \times \\ x=-3 \ \checkmark \end{array} \right. \\ 2x^2-4x-5 \geq 0 \end{cases}$

Ответ: $-3$

## б) Ур-я вида $A\sqrt{B} = 0$

$$A\sqrt{B} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} B = 0 \\ A - \text{определено} \end{cases} \\ \begin{cases} A = 0 \\ B \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Пример: Решите ур-е

$$(16 - x^2)\sqrt{3+x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 16 - x^2 = 0 \\ 3 + x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3 \\ 16 - x^2 - \text{опр.} - \forall x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \pm 4 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 \\ x = -3 \end{array}\right.$$

Ответ: $-3, 4$.

## в) Ур-я вида $\sqrt{A} = B$

$$\sqrt{2-x} = x \quad \uparrow^2$$

$$2 - x = x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \text{ – не явл. корнем} \end{array}\right.$$

Мы получаем посторонний корень, т.к. возведение в квадрат - неравносильное преобразование и при возведении в квадрат нам нужно накладывать доп. условия.

Вспомним, что по опр-ю корня: $\sqrt{a}$ есть такое число $b \geq 0$, что $a = b^2$

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} A = B^2 \\ B \geq 0 \end{cases}$$

Пример: 1. $\sqrt{2x^2 - 8x + 5} = x - 2$

2. $\sqrt{|x-5|} = x - 3$

$$1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^2 - 8x + 5 = x^2 - 4x + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 4x + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 2 \pm \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{3}$$

2

$$\begin{cases} |x-5| = (x-3)^2 \\ x-3 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} (x-3)^2 \geqslant 0 \\ \left[ \begin{aligned} x-5 &= (x-3)^2 \\ x-5 &= -(x-3)^2 \end{aligned} \right. \end{cases} \\ x-3 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} A = \pm B \\ B \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3 \\ \left[ \begin{aligned} & x^2 - 7x + 14 = 0 \Leftrightarrow \varnothing \\ & -x^2 + 5x - 4 = 0 \end{aligned} \right. \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant 3 \\ \left[ \begin{aligned} x &= 1 \\ x &= 4 \end{aligned} \right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$$

## 2) Ур-е вида $\sqrt{A} + \sqrt{B} = C$

Замечание: $\sqrt{A}\sqrt{B} = C \cancel{\Leftrightarrow} \sqrt{AB} = C$

Нужно обязательно добавить ОДЗ корней!

$$\sqrt{A}\sqrt{B} = C \Leftrightarrow \begin{cases} A \geqslant 0 \\ B \geqslant 0 \\ \sqrt{AB} = C \end{cases}$$

В общем случае ур-я типо г) решаются возведением в квадрат 2 раза. Рассмотрим на примере

т.к. обе части $\geq 0$

$$\sqrt{2t+4}+\sqrt{t+9}=5 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2t+4}+\sqrt{t+9}\right)^2=25$$

$$3t+13+2\sqrt{2t+4}\sqrt{t+9}=25$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t+4\geq 0 \\ t+9\geq 0 \\ \sqrt{2t^2+22t+36}=6-\frac{3}{2}t \end{cases} \Leftrightarrow t=0$$

Ответ: $t=0$

д) Ур-е вида $\sqrt{A}-\sqrt{B}=C$

Можно решать с помощью домножения на сопряженное ($\sqrt{A}+\sqrt{B}\geq 0$)

Пример: Решите ур-е:

1. $\sqrt{x^2-5x+2}-\sqrt{x^2+x+1}=1-6x$

Домножим на сопряженное $(\neq 0)$

$$x^2-5x+2-(x^2-x+1)=(1-6x)\left(\sqrt{x^2-5x+2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1-6x=(1-6x)\underbrace{\left(\sqrt{x^2-5x+2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}_{G}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{1}{6} \\ G\text{ - существует} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{6} \\ 1=\sqrt{x^2-5x+2}+\sqrt{x^2+x+1} \text{ - рассмотрим отдельно} \end{array}\right.$$

(решим по-другому, чем раньше)

$$\sqrt{x^2-5x+2}=1-\sqrt{x^2+x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{x^2+x+1}\geq 0 \\ \sqrt{x^2+x+1}=3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{x^2+x+1}\geq 0 \\ x\geq 0 \\ 8x^2-x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$$

Ответ: $\frac{1}{6}$

2. $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$

$\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2+2x+3}=\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{x^2-3x-2}$

$$\frac{2x^2-1-(2x^2+2x+3)}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}}=\frac{x^2-x+2-(x^2-3x-2)}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}}$$

$$\frac{-2x-4}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}}=\frac{2x+4}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}}$$

$$(2x+4)\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}}\right)}_{F>0}=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+4=0\\ F\text{-сущ}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ F\text{-сущ}\end{cases}\Leftrightarrow \text{Ответ: } -2$$

Еще один метод решения иррациональных ур-й/систем – замена переменных

Пример: 1. $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}=35-2x$

1) Пусть $t=\sqrt{x}+\sqrt{x+7}$

$$t^2=x+2\sqrt{x}\sqrt{x+7}+x+7$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0,\ x+7\geqslant 0 \\ \sqrt{x^2+7x}=\frac{t^2}{2}-x-\frac{7}{2} \end{cases}$$

2) Тогда исходное ур-е равносильно системе:

$$\begin{cases} t+t^2-2x-7=35-2x \\ x\geqslant 0 \\ x+7\geqslant 0 \end{cases}$$

можно не писать, т.к. у нас есть $t=\sqrt{x}+\sqrt{x+7}$ в ур-ии

$$\Leftrightarrow t^2+t-42=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=6 \\ t=-7 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=6 \Leftrightarrow \\ \sqrt{x}+\sqrt{x+7}=-7 \Leftrightarrow \varnothing\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2\sqrt{x^2+7x}+x+7=36 \\ x\geq 0,\ x+7\geq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{x^2+7x}=-2x+29 \\ x\geq 0,\ x+7\geq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x^2+7x)=4x^2-116x+841 \\ x\geq 0,\ x+7\geq 0,\ -2x+29\geq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{841}{144}$$

---

**2.** $\sqrt{2x^2-12x+46}-\sqrt{x^2-6x+22}=3$ ← В ДЗ аналогичный с кубами

1) Сделаем двойную замену:

$$u=\sqrt{2x^2-12x+46};\ v=\sqrt{x^2-6x+22}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u^2 = 2x^2 - 12x + 46 \\ v^2 = x^2 - 6x + 22 \end{cases}$$

Заметим, что $u^2 - 2v^2 = 2$, тогда исходное ур-е равносильно системе:

$$\begin{cases} u - v = 3 \\ u^2 - 2v^2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} u = 3 + v \\ -v^2 + 6v + 7 = 0 \end{cases}$$

$v \geq 0$

$$\begin{cases} \left[ \begin{array}{l} v = -1 \Leftrightarrow \varnothing \\ v = 7 \end{array} \right. \\ u = 3 + v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 7 \\ u = 10 \end{cases} \Rightarrow x = 9, -3$$