+ ×

− ÷

§1. Квадратные ур-я

Опр.: Квадратным называется ур-е вида $ax^2+bx+c=0$, где ! $a \neq 0$! (Если $a=1$, то кв. ур-е – приведенное)

Т Если $D = b^2 - 4ac \geq 0$, то корни квадратного ур-я:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

▲

$$ax^2+bx+c=0 \,|\cdot 4a$$

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0$$

$$4a^2x^2+2\cdot 2ax\cdot b+b^2-b^2+4ac=0$$

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac$$

$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}=\pm\sqrt{D}$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

■

Следствие: Если $b=2k$, то

$$x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$$

делим числ. и знам.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a} = \frac{-k \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$$

Причем: $\frac{D}{4} = k^2 - ac$ – не дробь $\Rightarrow$ удобно считать

$\boxed{\text{Т}}$ (Теорема Виета)

x_1, x_2 – корни $ax^2+bx+c=0,\ a \neq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 = \frac{c}{a} \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Из следствия ОТА (Основной Теоремы Алгебры)

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) =$$

$$= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1 x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} c = a x_1 x_2 \\ -a(x_1 + x_2) = b \end{cases}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Рассмотрим $P(x) = ax^2 + bx + c$, где $c = ax_1x_2$, $b = -a(x_1 + x_2)$ и покажем, что $P(x_1) = P(x_2) = 0$

$$P(x_1) = ax_1^2 - a(x_1 + x_2)x_1 + ax_1x_2 = 0$$

Аналогично $P(x_2)=0$ ■

Пример: Не находя корней $3x^2+8x-1=0$ найдите:
а) $x_1^2+x_2^2$; б) $x_1^4+x_2^4$

▲

1) По т. Виета: $\begin{cases} x_1x_2=-\frac{1}{3} \\ x_1+x_2=-\frac{8}{3} \end{cases}$

2) Заметим, что:

а) $x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=$

$=\frac{64}{9}+\frac{2}{3}=\frac{70}{9}$

б) $x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=\frac{4900}{81}-\frac{2}{9}=\frac{4882}{81}$ ■

Следствие 1: Если в ур-ии $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$
$a+b+c=0$, то $x_1=1$; $x_2=\frac{c}{a}$

Следствие 2: Если в ур-ии $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$
$a-b+c=0$, то $x_1=-1$, $x_2=-\frac{c}{a}$

Пример: 1) $23x^2+19x-42=0$

2) $23x^2-27x-50=0$

№1

Не вычисляя корней ур-я $2x^2-7x-6=0$, найти: а) $x_1^4x_2+x_2^4x_1$ б) $|x_1-x_2|$

а) $x_1x_2(x_1^3+x_2^3)=x_1x_2(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=$
$=x_1x_2(x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2)=\ldots=-\frac{1785}{8}$

б) $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{x_1^2+x_2^2-2x_1x_2}=$
$=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{97}}{2}$

Можно по-другому: заметим, что по ф-ле корней

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{D}}{a}$$

№2

Квадратное ур-е $x^2+px+q=0$, где $q<0$ имеет корни x_1 и x_2. Составьте прив. кв. ур-е, корнями которого явл $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$

1) Пусть мы нашли это ур-е: $x^2+ax+b=0$

2) Запишем т-мы Виета:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = -a \\ \dfrac{1}{x_1 x_2} = b \\ x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{1}{q} \\ a = -\dfrac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \dfrac{p}{q} \end{cases}$$

3) Тогда искомое ур-е: $x^2 + \frac{p}{q}x + \frac{1}{q} = 0$

№3 Ур-ие $x^2 + px + q = 0$ имеет действ. корни x_1 и x_2. Найдите p и q, если $x_1 + 1$, $x_2 + 1$ – корни ур-я $x^2 - p^2 x + pq = 0$

1) Т.к. $\exists$ действительные корни, то $D_1 = p^2 - 4q \geq 0$ и $D_2 = p^4 - 4pq \geq 0$

2) По Т. Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \quad (1) \\ x_1 x_2 = q \quad (2) \\ x_1 + 1 + x_2 + 1 = p^2 \quad (3) \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) = pq \quad (4) \end{cases}$$

Из (1) и (3) : $p^2 = -p+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p=-2 \\ p=1 \end{array}\right.$

Из (2) и (4) : $q-p+1 = pq \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} p=-2 \\ q+2+1=-2q \end{cases} \\ \begin{cases} p=1 \\ q=q \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} p=-2 \\ q=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} p=1 \\ q\in\mathbb{R} \end{cases} \end{array}\right.$

3) Вспомним про неравенства:

$\begin{cases} p=-2 \\ q=-1 \end{cases} : \; D_1>0, D_2>0$

$\begin{cases} p=1 \\ q\in\mathbb{R} \end{cases} : \quad 1-4q\geqslant 0 \Rightarrow \begin{cases} p=1 \\ q\le \frac{1}{4} \end{cases}$

Ответ: $p=-2, q=-1$ или $p=1, q\le\frac{1}{4}$

$\boxed{№ 4}$ Ур-е $x^2+ax+4=0$ имеет ровно два разл. корня x_1 и x_2; при этом $x_1^2-\frac{20}{3x_2^3}=x_2^2-\frac{20}{3x_1^3}$

$a-?$:

1) Ур-е имеет 2 разл. корня, тогда

$$D=a^2-16>0 \quad (*)$$

2) Рассмотрим второе ур-е:

$$x_1^2-x_2^2+\frac{20}{3}\frac{1}{(x_1x_2)^3}(x_2^3-x_1^3)=(x_1-x_2)(x_1+x_2)+$$

$$+\frac{20}{3}\frac{(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)}{(x_1x_2)^3}=0 \quad \Big|\div(x_1-x_2)\neq 0$$

$=(x_1+x_2)^2-x_1x_2$

Тогда:

$$x_1+x_2-\frac{20}{3}\frac{(x_1+x_2)^2-x_1x_2}{(x_1x_2)^3}=0$$

Вспоминая т. Виета: $\begin{cases} x_1+x_2=-a \\ x_1x_2=4 \end{cases}$ получим:

$$-a-\frac{20}{3}\frac{a^2-4}{64}=0$$

$$5a^2+48a-20=0$$

$$\left[\begin{array}{l} a=-10 \\ a=\frac{2}{5} \end{array}\right.$$ – не удовл $(*)$

Ответ: $a=-10$

№5 Ур-ие $(a^2-9)x^2-(2a^2+5a-9)x+a+3=0$ имеет 2 корня разных знаков, a–?

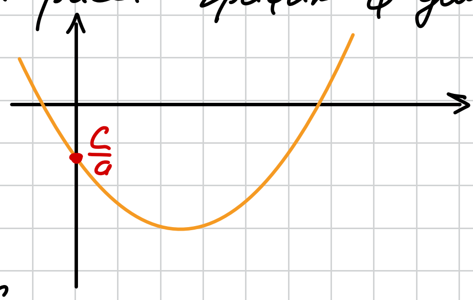
имеется в виду $x_1>0,\ x_2<0$

1) 2 корня + они разных знаков, тогда:

$$\begin{cases} D>0 \\ x_1x_2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2a^2+5a-9)^2-4(a^2-9)(a+3)>0 \quad (1) \\ \dfrac{a+3}{a^2-9}<0 \quad (2) \end{cases} \quad (*)$$

2) Перво неравенство очень сложное. Попробуем придумать условие полегче: рассм график ф-ции

$$y=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$$



Заметим, что если $\frac{c}{a}<0$, то ур-е точно будет иметь 2 корня: (также это видно из ф-лы D)

$$\frac{c}{a}<0 \Rightarrow D<0$$

3) Т.е. в нашей системе $(*)$ – если выполнено (2), то (1) будет выполнено автоматически $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ можно отбросить

$$\frac{a+3}{(a-3)(a+3)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -3 \\ \dfrac{1}{a-3} < 0 \end{cases}$$

Ответ: $a \in (-\infty, -3) \cup (-3, 3)$