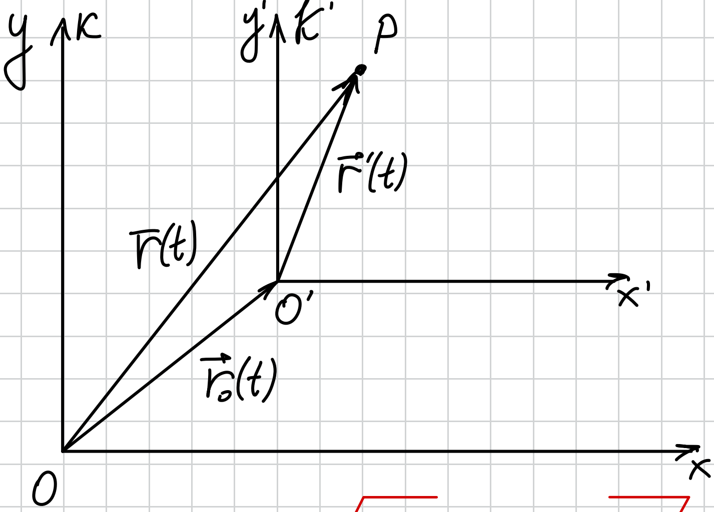
+ ×

− ÷

§3 Относительность движения



$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}\,'}$$ – Закон сложения скоростей Галилея

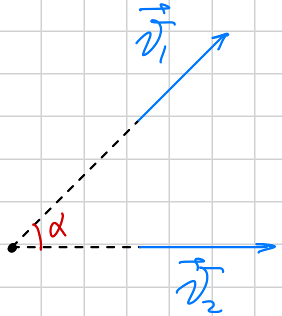
$$\boxed{\vec{a}_{Абс} = \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{отн}}$$

Обратите внимание, что равенства-векторные!!!

Часто встречаются задачи, в которых 2 тела движутся независимо друг от друга в некоторой системе отсчета, и требуется определить какие-то характеристики их относительного движения.

В таких случаях удобно перейти в С.О., связанную с одним из тел.

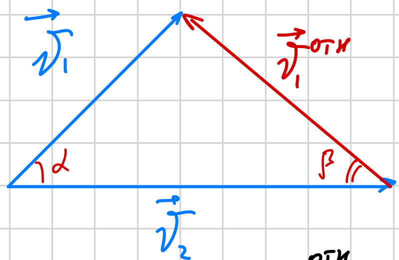
Пример: Два корабля движутся с постоянными скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ под углом α друг к другу. Найти скорость первого корабля относительно второго



1) Перейдем в С.О., связанную с движением второго корабля: по з-ну сложения скоростей:

$$\begin{array}{ccccc} \vec{v}_1^{\,\text{абс}} & = & \vec{v}^{\,\text{пер}} & + & \vec{v}_1^{\,\text{отн}} \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \vec{v}_1 & & \vec{v}_2 & & ? \end{array}$$

$$\vec{v}_1^{\,\text{отн}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$



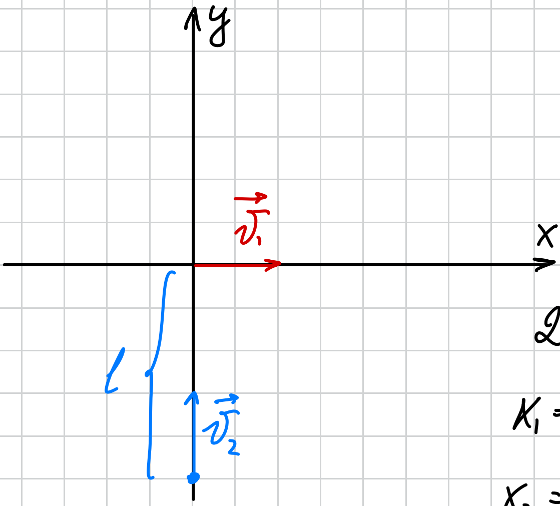
2) Из Δ-ка по Т. cos: $v_1^{\text{отн}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\alpha}$

3) Нашли модуль => нужно найти напр-е => угол β.

По Т. sin:

$$\frac{v_1}{\sin\beta} = \frac{v_1^{\text{отн}}}{\sin\alpha} \Rightarrow \sin\beta = \dots$$

Пример: Два автомобиля двигались с постоянными скоростями V_1 и V_2 по дорогам, пересекающимися под прямым углом. Когда первый из них достиг перекрестка, второму оставалось проехать до этого места расстояние l. Спустя какое время t расстояние между автомобилями будет наименьшим? Чему равно это расстояние S_{min}



Способ 1:

1) Расстояние м/у точками

$$S = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

2) В нашем случае:

$$x_1 = v_1 t, \quad y_1 = 0$$

$$x_2 = 0, \quad y_2 = -l + v_2 t$$

$$\Rightarrow S(t) = \sqrt{v_1^2 t^2 + (v_2 t - l)^2} \longrightarrow \min$$

$$\Leftrightarrow v_1^2 t^2 + (v_2 t - l)^2 \to \min$$ – просто парабола => легко найти min

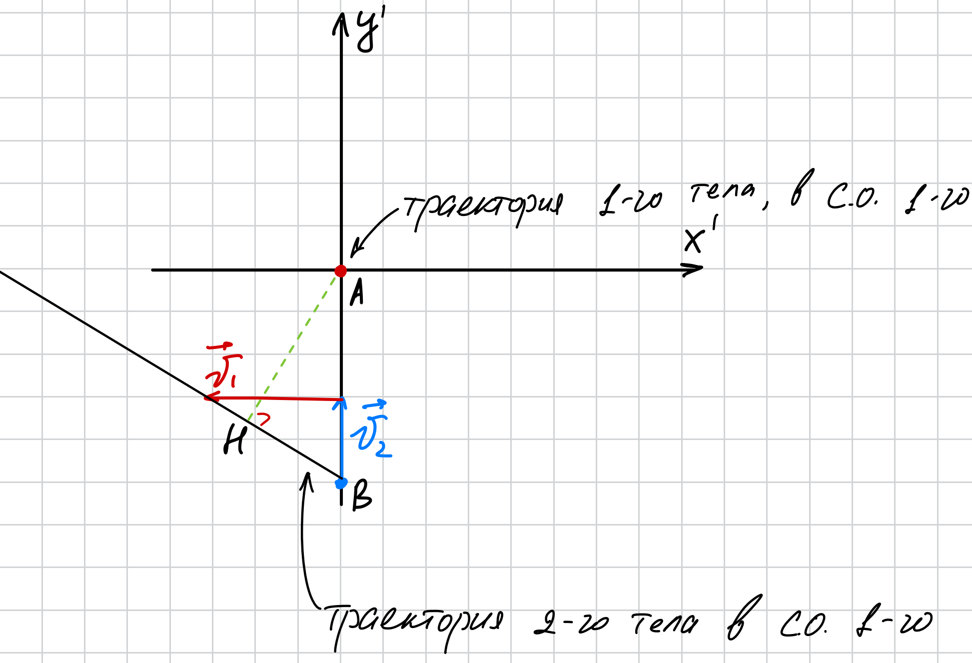
Способ 2: Важно!

1) Перейдем в С.О., связанную с 1-м телом:

$$\vec{v}_2^{\,абс} = \vec{v}^{\,пер} + \vec{v}_2^{\,отн}$$

$$\vec{v}_2^{\,абс} \equiv \vec{v}_2, \quad \vec{v}^{\,пер} \equiv \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_2^{\,отн} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$



$\Rightarrow$ нужно найти min расст от точки до прямой

$\Rightarrow$ перпендикуляр: $AB = l$, $tg(\angle HBA) = \frac{v_1}{v_2}$ ($\Rightarrow \sin = \ldots$)

$$\Rightarrow AH = l \sin(\angle HBA)$$

§4. Примеры движения тел
Графики

1. Равномерное прямолинейное:

Это такое движение, что

$$\boxed{\vec{v} = const}$$

как вектор!!!
Т.е. направление = const
и величина = const

При этом, из опр-я $\vec{v}$, тогда следует:

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}\,t} \quad (*)$$

координата тела в момент $t=0$
(начальное условие!)

Векторное уравнение (*) можно спроецировать на оси Декартовой системы координат

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + v_x t \\ y(t) = y_0 + v_y t \end{cases}$$

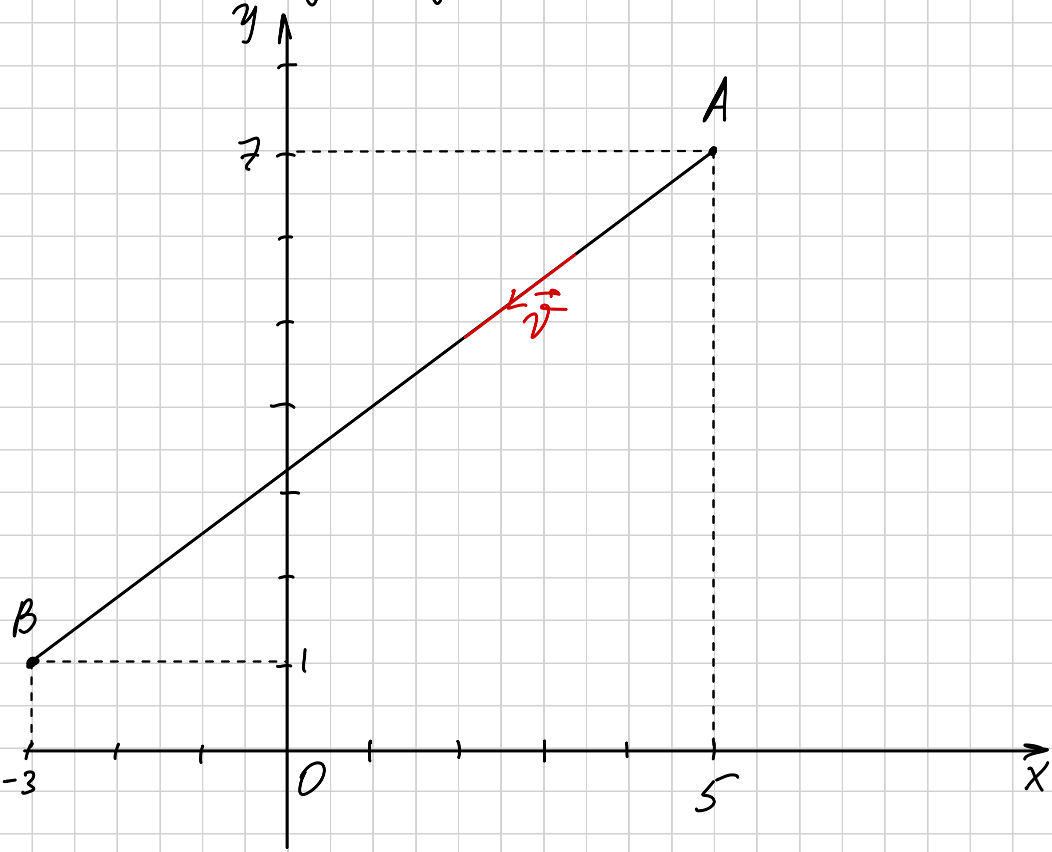
Заметим, что t – это параметр который можно исключить

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = y_0 + \frac{v_y}{v_x}(x - x_0)} \quad (**)$$

Замечание: Уравнение (**) задает прямую в координатах (x, y) => траектория при равномерном движении — это прямая

Пример: Тело $\underbrace{\text{двигалось}}_{}$ прямолинейно, равномерно: $x_0 = 5м$, $y_0 = 7м \xrightarrow{t=2с} x = -3м$, $y = 1м$.

Найдите $\vec{v}$, $y(x)$, $y(t)$, $x(t)$



1) $v_x = \dfrac{x - x_0}{t} = -4 м/с$, $v_y = \dfrac{y - y_0}{t} = -3 м/с$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

2) $$y = \frac{v_y}{v_x}(x - x_0) + y_0 = \frac{3}{4}(x-5) + 7 = \frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$$

3) $$x(t) = x_0 + v_x t \quad , \quad y(t) = y_0 + v_y t$$

2. Равноускоренное:

Это такое движение, что

$$\boxed{\vec{a} = const}$$

траектория не обязательно прямолинейная

Аналогично прямолинейному:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t}$$

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}}$$

значения при $t=0$ (начальные условия)

Проецируем:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{x_0} t + \frac{a_x t^2}{2} \\ y(t) = y_0 + v_{y_0} t + \frac{a_y t^2}{2} \end{cases}$$

Рассмотрим движение вдоль одной из осей:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{x_0} t + \frac{a_x t^2}{2} \\ v_x(t) = v_{x_0} + a_x t \end{cases}$$

выразим t

Путь: $S(t) = x(t) - x_0 = v_{x_0} t + \frac{a_x t^2}{2} =$

$$= v_{x_0} \frac{v_x - v_{x_0}}{a_x} + \frac{a_x}{2}\left(\frac{v_x - v_{x_0}}{a_x}\right)^2$$

$$S(t) = \frac{v_x^2 - v_{x_0}^2}{2a_x}$$ — Нет t в явном виде!!!

<u>Пример</u>: За 2 с прямолинейного равноускоренного движения тело прошло 20 м, увеличив свою скорость в 3 раза. Определите конечную скорость тела.

1) По условию $v = 3v_0$, тогда

$$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a}t$$

Т.к. движение прямолинейное спроецируем на напр-е вектора $\vec{v}$:

$$v = v_0 + at$$

$$a = \frac{2}{3}\frac{v}{t}$$

2)

$$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{2}{3}vt \Rightarrow v = \frac{3}{2}\frac{S}{t}$$

Пример (Аналогичный есть в Д/З)

Пример 5*. Любитель бега трусцой пробежал половину пути со скоростью $v_1 = 10$ км/ч. Затем половину оставшегося времени бежал со скоростью $v_2 = 8$ км/ч, а потом до конца пути шёл пешком со скоростью $v_3 = 4$ км/ч. Определить среднюю скорость движения бегуна.

1) Пусть S_1, S_2, S_3 - соотв. пути, t_1, t_2, t_3 - времена. Тогда, по опр-ю средней скорости:

$$v_{cp} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{S}{t_1 + t_2 + t_3}$$

2) По опр-ю скорости

$$\begin{cases} t_1 = \frac{S_1}{v_1} \\ t_2 = \frac{S_2}{v_2} \\ t_3 = \frac{S_3}{v_3} \end{cases} \Rightarrow v_{cp} = \frac{S}{\frac{S_1}{v_1} + \frac{S_2}{v_2} + \frac{S_3}{v_3}}$$

3) По условию: $S_1 = \frac{1}{2} S$ или $S_2' + S_3' = \frac{1}{2} S$

и $t_2 = \frac{1}{2}(t_2 + t_3) \Leftrightarrow t_2 = t_3 \Leftrightarrow S_2' = \frac{v_2}{v_3} S_3$

$$\begin{cases} S_2' + S_3' = \frac{1}{2} S \\ S_2 = \frac{v_2}{v_3} S_3' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_3' = \frac{v_3}{2(v_2 + v_3)} S \\ S_2 = \frac{v_2}{2(v_2 + v_3)} S \end{cases}$$

4) Получим:

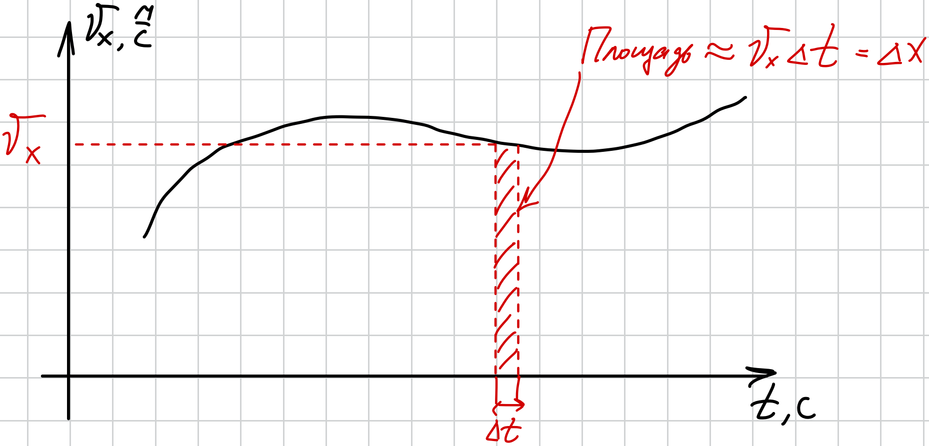
$$v_{cp} = \frac{S}{\frac{S}{2v_1} + \frac{S}{2(v_2 + v_3)} + \frac{S}{2(v_2 + v_3)}} = \frac{2v_1(v_2 + v_3)}{2v_1 + v_2 + v_3} = 7{,}5 \frac{км}{2}$$

Важно: Графики

1. Пройденный путь

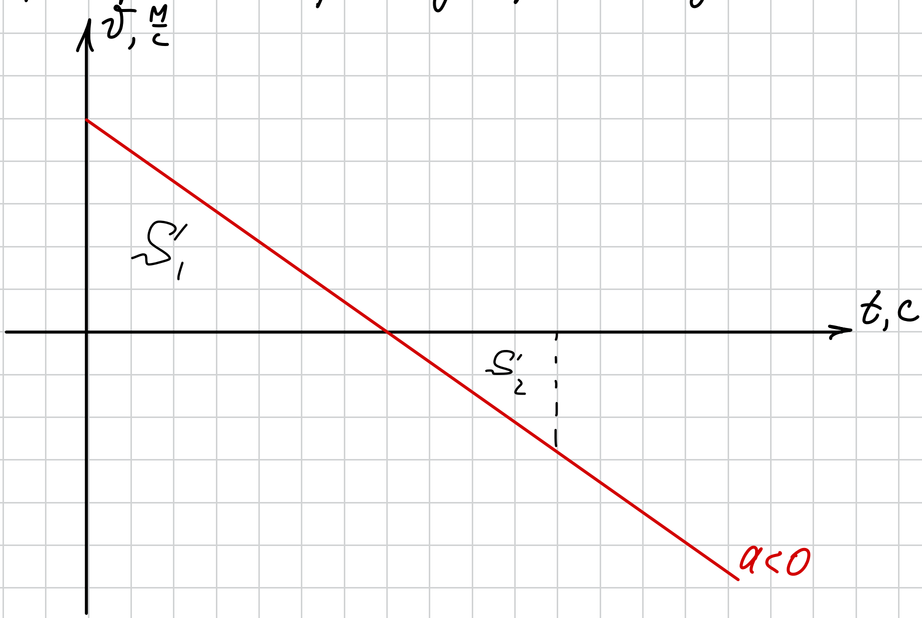
$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ — по определению}$$

$$\Rightarrow \Delta x = v_x \Delta t$$



То есть, площадь под графиком есть пройденный путь

Например, при равноускоренном движении:



$$S_{\Sigma}' = S_1' - S_2'$$