$+ \quad \times$

$- \quad \div$

Повторим основные моменты:

$x \in X$, $y \in Y$

1) Кол-во способов выбрать пару x и y равно $|X| \cdot |Y|$

- правило произведения

2) Кол-во способов выбрать x или y равно $|X| + |Y|$

- правило суммы

3) Кол-во способов переставить в ряду n различных элементов равно $n!$

4) Кол-во способов выбрать k различных элементов (наборы, отлич. порядком считаются одинаковыми) из n равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

- число сочетаний

(чем отличается число разм.?)

5) Бином Ньютона:

$$(a+b)^n = 1 \cdot a^n \cdot b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^k \underbrace{a^{n-k} b^k} + \ldots + 1 \cdot a^0 \cdot b^1$$

такое слагаемое получается, если из k скобок взять b

$\Rightarrow$ таких слагаемых C_n^k

Пример: $(1+1)^n = 2^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$

б) Треугольник Паскаля

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4
\end{array}
$$

$$\boxed{C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}}$$

$\vdots$

№1

Пример 11. На параллельных прямых a и b отмечено 11 и 12 точек соответственно. Сколько треугольников можно составить с вершинами в отмеченных точках?

(Аналогичный в ДЗ)

1 способ:

правило суммы

аналогично на b

$$N = C_{23}^3 - C_{11}^3 - C_{12}^3 = 1386$$

кол-во способов выбрать 3 точки

кол-во способов выбрать 3 т-ки на а (не Δ)

2 способ:

$$N = 12\cdot C_{11}^{2} + 11\cdot C_{12}^{2} = 1386$$

№2

Пример 12. Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если известно, что цифры не повторяются, и цифра 1 не находится непосредственно за цифрой 2.

1) Удобнее вычислить общее кол-во 6-ти знач. чисел и вычесть те, где есть "12"

$$N_1 = 6! \text{ – общее кол-во}$$

2) Найдем кол-во чисел, где есть "12":

1	2	_	_	_	_	
		4 вар	3 вар	2	1	=> 4! чисел

_	1	2	_	_	_	
4			3	2	1	=> 4!

⋮

5 вар

$\Rightarrow N_2 = 5 \cdot 4! = 5!$

правило сложения

$\Rightarrow N = 6! - 5!$

№3

Пример 13. Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, …, 9, если цифры в записи числа не повторяются, и в числе есть цифра 7.

1) Тут сложнее т.к. число 6-ти значное, а цифр 10

2) Рассмотрим 2 случая:

1: 7 - стоит на 1 месте

$$7\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{\text{остается выбрать упорядоченный набор 5 цифр из 8}} \Rightarrow A_8^5$$

2: 7 - стоит не на 1 месте

$$?\ \_\ \_\ 7\ \_\ \_$$

могут быть все кроме "0" и "7" → 8 вариантов

остается выбрать упор. набор 4 цифр из 8 $\Rightarrow A_8^4$

При этом число вариантов поставить "7" – 5

$$\Rightarrow N = A_8^5 + 5 \cdot 8 \cdot A_8^4$$

правило сложения

правило умножения

№4

Пример 14. (Физтех-2014) Есть семь карточек с цифрами 0; 1; 2; 3; 3; 4; 5. Сколько существует различных шестизначных чисел, делящихся на 15, которые можно сложить из этих карточек?

1) $\vdots\, 15 \Leftrightarrow \begin{cases} \vdots\, 5 \Leftrightarrow \text{заканчивается на 0 или 5} \\ \vdots\, 3 \Leftrightarrow \Sigma' \text{цифр} \vdots\, 3 \end{cases}$, общая сумма 18 из 7 чисел

Тогда Σ'цифр из 6-ти $= (18 - X) \vdots\, 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow X \vdots\, 3 \Rightarrow$ мы можем отбросить либо 0 или 3

2) Рассмотрим различные случаи:

а) Отбрасываем 3:

1а) 0 в конце: $\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{5!}\ 0$

2а) 5 в конце: $\_\ \underline{0}\ \_\ \_\ \_\ 5$

4!

$\Rightarrow 4$ варианта поставить "0" $\Rightarrow 4 \cdot 4!$

$$N_1 = 5! + 4 \cdot 4! = 120 + 96 = 216$$

б) Отбрасываем 0:

1б) 5 в конце: $\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{5!\text{, но есть 2 тройки}}\ \underline{5}$

$$\Rightarrow N_2 = \frac{5!}{2!} = 60$$

Ответ: 276

$\boxed{№5}$

Пример 15*. Найти число подмножеств множества A, состоящего из n элементов.

1) Все эти n элементов можно разбить на группы подмножеств, где будет k элементов ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$)

2) Рассмотрим одно из подмножеств с k элементами – чтобы его создать мы выбрали k эл-тов из n, при этом порядок не важен $\Rightarrow$ кол-во способов выбрать подмножество с k эл-тами – C_n^k

$$\Rightarrow N_{\Sigma} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

№6

Пример 17. Найдите наибольший коэффициент многочлена $(3+x)^8$ после раскрытия скобок и приведения подобных членов.

(аналог есть в Д/З)

1) Сравним м/у собой k-й и $(k+1)$-й коэф-т

$$(3+x)^8 = x^8 + \ldots + C_8^k 3^{n-k} x^k + C_8^{k+1} 3^{n-k-1} x^{k+1} + \ldots + 3^8$$

Для этого рассм. их отношение:

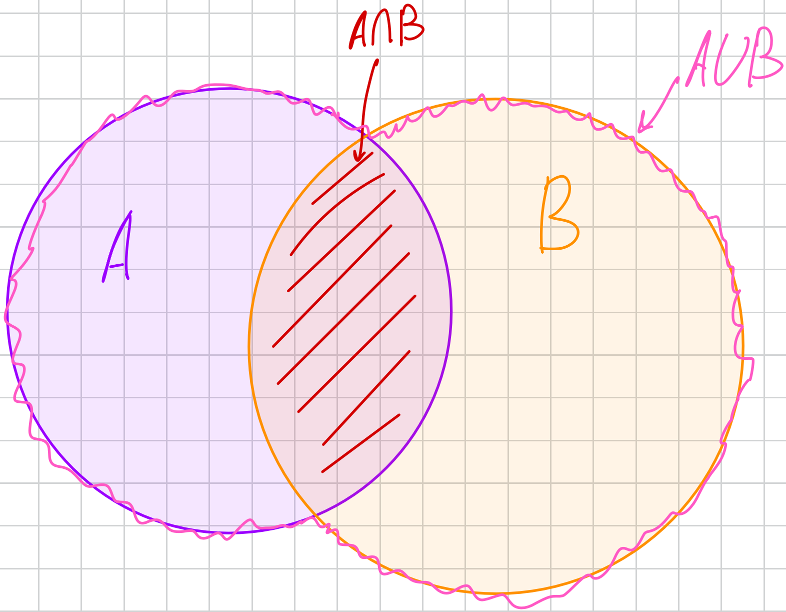
$$\frac{C_8^{k+1} 3^{n-k-1}}{C_8^k 3^{n-k}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{8!}{(k+1)!(8-k-1)!}}{\frac{!}{k!(8-k)!}} = \frac{1}{3} \frac{8-k}{k+1} > 1$$

$\Leftrightarrow 8-k > 3k+3 \Leftrightarrow k < \frac{5}{4}$, $k \in \mathbb{N}$

Таким образом $(k+1)$-й коэф. $>$ k-го при $k < \frac{5}{4}$ и меньше наоборот $\Rightarrow$ max коэф. при $k=1$

Ответ: $C_8^2 3^6$

§2. Формула включения исключений

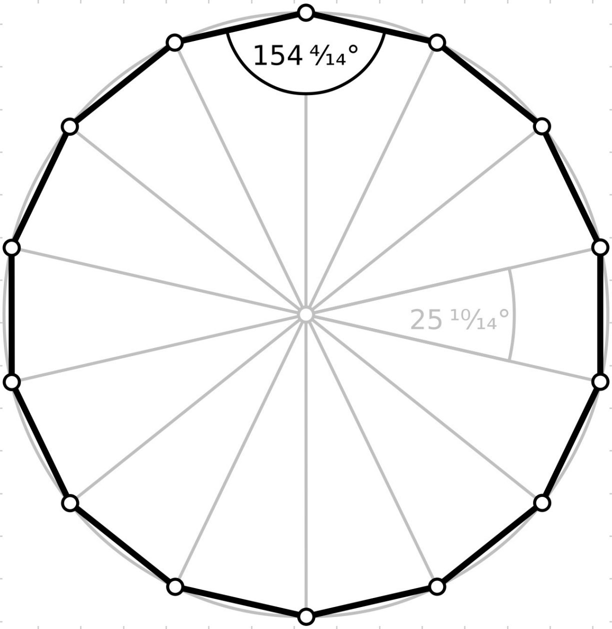


$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$$

По сути, она означает, что нужно вычитать все то, что мы посчитали дважды

№5

Пример 16. (Физтех-2012) Дан правильный 14-угольник. Найдите количество четвёрок его вершин, являющихся вершинами выпуклых четырёхугольников, в которых хотя бы один угол равен 90°. (Две четвёрки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)



1) Впишем 14-угольник в окружность ⇒ нас интересуют 4-ки вершин, где 2 лежат на диаметре (по св-ву впис. углов)

2) Всего диаметров – 7 : $X_1 X_8$, $X_2 X_9$, ..., X_7, X_{14}

3) Тогда кол-во вариантов выбрать 2 т-ки – 7

Другие 2 т-ки должны лежать по разные стороны от диаметра (иначе не будет угла 90°)

$\Rightarrow N = 7 \cdot 6 \cdot 6$

4) Но при этом четырехугольники у которых обе диагонали - диаметры посчитаны дважды:

$$N_1 = N - C_7^2 = 231$$

кол-во способов выбрать точки 2-го диаметра, когда первый уже выбран