$+ \quad \times$

$- \quad \div$

Глухов. Наука в регионы

$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}, \ |X| = n$

$Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_m\}, \ |Y| = m$

мощности множеств

Правило умножения: Кол-во способов выбрать x "и" y = кол-во пар (x_i, y_j), $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ = $= n \cdot m = |X| \cdot |Y|$

Правило сложения: Кол-во способов выбрать x "или" $y = n + m = |X| + |Y|$

$\boxed{№1}$ Найдите кол-во двузначных чисел, у которых все цифры различны

$N(\overline{xy}) - ? \quad x \neq y$

1) Зафиксируем x и будем выбирать y:

$x \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ $X, \ |X| = 9$

$y \in \{0, 1, \cancel{2}, \dots, 9\} \Rightarrow |Y| = 9$

$\Rightarrow N(\overline{xy}) = 9 \cdot 9 = 81$

2) В начале выберем y, а потом x:

$N = |Y| \cdot |X| = \cancel{10 \cdot 8 = 80}$

Нужно так:

$$N = \underbrace{9 \cdot 8}_{N(\overline{xy}),\, y \neq 0} + \overbrace{1 \cdot 9}^{N(\overline{x0})} = 81$$

$\boxed{№2}$ Сколькими способами можно переставить м/у собой в ряд цифры $1, 2, 3, \dots, 9$?

Представим, что мы расставили:

$\overline{x_1 x_2 x_3 \dots x_8 x_9}$ — получили 9-и значное число

$$\left.\begin{aligned} &x_1 \in \{1, 2, 3, \dots, 9\} \\ &x_2 \in \{1, \cancel{2}, 3, \dots, 9\} \\ &\dots \\ &x_9 \in X_9,\ |X_9| = 1 \end{aligned}\right\} N = \underline{9}\,\underline{8} \dots \underline{1} = 9! \quad (0! = 1)$$

для n-цифр: $n!$

№3

Сколькими способами можно выбрать k шаров из n шаров (различные шары)

$$\underbrace{\underline{\;n\;}\ \ \underline{\;n-1\;}\ \ \underline{\;n-2\;}\ \ \dots\ \ \underline{\;n-k+1\;}}_{k\text{-мест}}$$

так мы считаем, если важен порядок, т.е. 1-й шар, 2-й, ...

Если порядок не важен — т.е. вытаскиваем "охапку" шаров, т.е. ① ② ③ ≡ ② ① ③

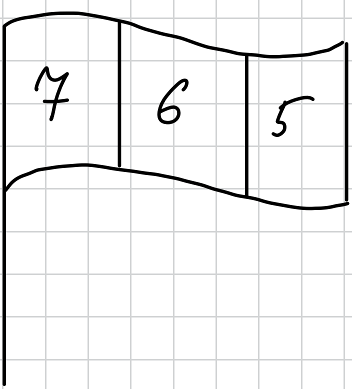
Тогда

$$C_n^k \equiv \binom{n}{k}$$

$$N = \frac{n\cdot(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

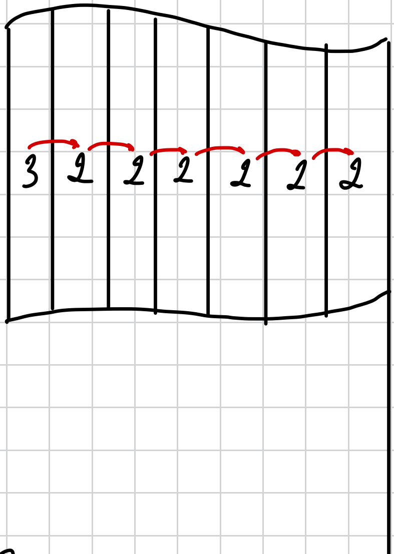
№4

1) Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с верт. полосками различных цветов, если имеется материя 7 различных цветов



$$N = 7\cdot 6\cdot 5 = 210$$

2) Сколькими способами можно сделать флаг, содержащий 7 вертикальных полос красного, белого и синего цвета, причем любые 2 соседние полосы должны быть разл. цветов?



$N = 3\cdot 2^{6}$

№5 В некотором гос-ве нет двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова может быть наиб. численность этого гос-ва?

1 способ:

$$N = \overset{C_{32}^{0}}{1} + \overset{C_{32}^{1}}{32} + \overbrace{\frac{32\cdot 31}{2}}^{C_{32}^{2}} + \ldots + C_{32}^{31} + C_{32}^{32}$$

без зуб. 1 зуб ..

2 способ: Представим что есть 32 места, 1 - есть зуб, 0 - нет зуба. Тогда кол-во людей есть кол-во таких чисел

1 0 1 0 1 0 ... 1 0 $\Rightarrow N = 2^{32}$

№6 Док-те: $2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$

(Докажем, что $(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^n a^0 b^n$)

$$(a+b)^n = \underbrace{\overbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\dots(a+b)}^{k}\overbrace{(a+b)\dots(a+b)}^{n-k}}_{n} =$$

$$= \dots + C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

из k-скобок берем a

из (n-k) скобок

Сколькими способами можно выбрать k скобок из n скобок?

|||

k шаров из n шаров $= C_n^k$

$\boxed{№ 7}$ Сколько сущ. четырехзначных чисел, в которых две единицы стоят рядом, а ост цифры различны и не равны 1?

1) Решим 3 задачи:

а) единицы в начале: $N(\overline{11xy}) = \underline{1}\,\underline{1}\,\underline{9}\,\underline{8} = 72$ (+)

в середине: $N(\overline{x11y}) = \underline{8}\,\underline{1}\,\underline{1}\,\underline{8} = 64$ (+)

в конце: $N(\overline{xx11}) = \underline{8}\,\underline{8}\,\underline{1}\,\underline{1} = 64$

$\Rightarrow N = 200$

$\boxed{№ 8}$ Сколько натуральных делителей имеют числа:

а) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^7$

а) Делитель имеет вид: $2^x 3^y 5^z$, где

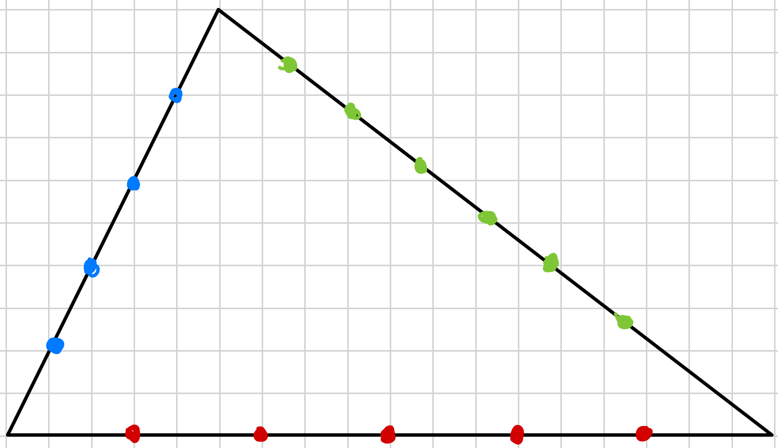
$$\left.\begin{aligned} &x \in \{0, 1, 2, 3\} \\ &y \in \{0, 1, \dots, 4\} \\ &z \in \{0, 1, \dots, 7\} \end{aligned}\right\} \text{Любой делитель кодируется тройкой } xyz$$

Сколько способов составить xyz:

$$N(\overline{xyz}) = \underline{4}\,\underline{5}\,\underline{8} = 160$$

$!\,(3+1)\ (4+1)\ (7+1)\,!$

№9 Сколько Δ-ков можно составить с вершинами в выделенных точках?



1 способ:

1) Кол-во Δ-ков с вершинами на разных сторонах:

$$N_1 = 4 \cdot 7 \cdot 5$$

2) Кол-во Δ-ков с 2 вершинами на 1 стороне

$$N_2 = \frac{4 \cdot 3}{2}(7+5) + \frac{7 \cdot 6}{2}(4+5) + \frac{5 \cdot 4}{2}(4+7)$$

$2 = C_4^2$

т.к. не важен порядок

$$N = N_1 + N_2$$

2 способ:

$$N = C^3_{4+7+5} - C^3_4 - C^3_5 - C^3_7$$

кол-во способов выбрать 3 точки

3 точки на 1 прямой