$+ \quad \times$

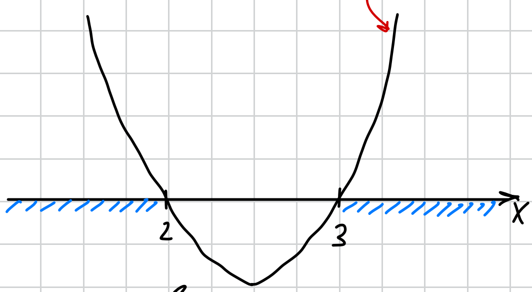
$- \quad \div$

§5. Рациональные неравенства

№1

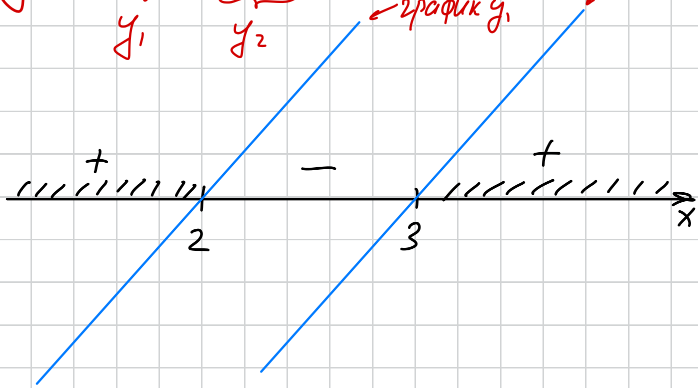
$$2x^2-10x+12\geq 0$$

$$y=2(x^2-5x+6)\geq 0 \iff$$



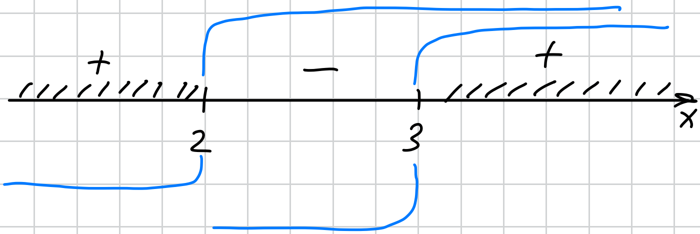
$\Rightarrow$ ответ: ...

или: $y=2\underbrace{(x-2)}_{y_1}\underbrace{(x-3)}_{y_2}\geq 0$



Заметим, что нам достаточно знать количество отриц. слагаемых в произведении: если их четное кол-во, то у всего выражения знак "≥ 0", иначе – "≤ 0"

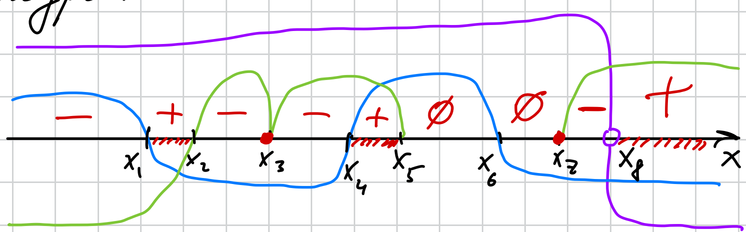
Для наглядности можно схематично рисовать графики каждой скобки



Данный метод называется методом интервалов.

Рассмотрим его подробнее:

$$\frac{f(x)\cdot g(x)}{\varphi(x)} \geq 0$$

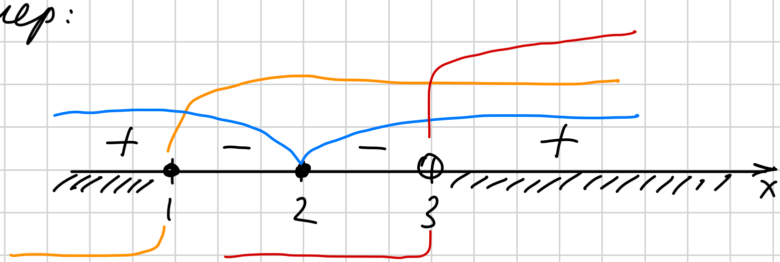


Ответ: $[x_1, x_2] \cup \{x_3\} \cup [x_4, x_5] \cup \{x_7\} \cup (x_8, +\infty)$

тут показаны знаки ф-ций f, g, φ $\Rightarrow$ расставим знаки, обращая внимание на количество отрицательных ф-ций

Рассмотрим пример:

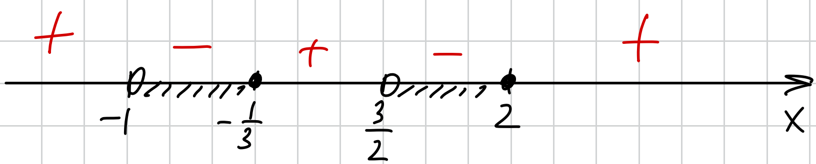
$$\frac{(x-1)(x-2)^2}{(x-3)} \geq 0$$



Ответ: $x \in (-\infty, 1] \cup \{2\} \cup (3; +\infty)$

$\boxed{№2}$

а) $\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-3} = \dfrac{3(x-2)(x+1/3)}{2(x+1)(x-3/2)} \le 0$

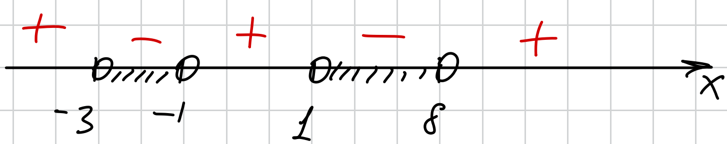


Ответ: $x \in (-1, -\frac{1}{3}] \cup (\frac{3}{2}, 2]$

б) $\dfrac{9}{x+1} + 1 < \dfrac{14}{x-1}$

$\dfrac{9(x-1) + x^2 - 1 - 14(x+1)}{(x+1)(x-1)} < 0$

$\dfrac{x^2-5x-24}{(x+1)(x-1)} < 0$



Ответ: $x \in (-3; -1) \cup (1, 8)$

№3

$$(x^2-x-3)(x^2-x-2)>12$$

1) Если раскрыть скобки и привести подобные $\Rightarrow$ ничего не получится

2) Сделаем замену переменных: $t=x^2-x-3$

$$t(t+1)-12>0$$

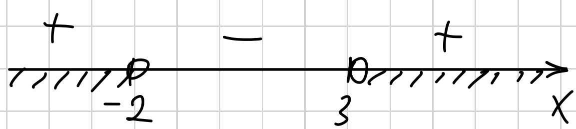
$$t^2+t-12>0$$

$$(t-3)(t+4)>0$$ – подставляем обратную замену!!!

$$(x^2-x-6)\underbrace{(x^2-x+1)}_{>0}>0$$

$$\Updownarrow$$

$$(x+2)(x-3)>0$$



Ответ: $x\in(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$

$\boxed{№4}$ $x^2+\frac{16}{x^2}-2x+\frac{8}{x}-11\geq 0$

$x^2+\left(\frac{4}{x}\right)^2-2\left(x-\frac{4}{x}\right)-11\geq 0$ – возвратное неравенство

$t=x-\frac{4}{x} \Rightarrow t^2=x^2-8+\frac{16}{x^2}$

Тогда исходное неравенство:

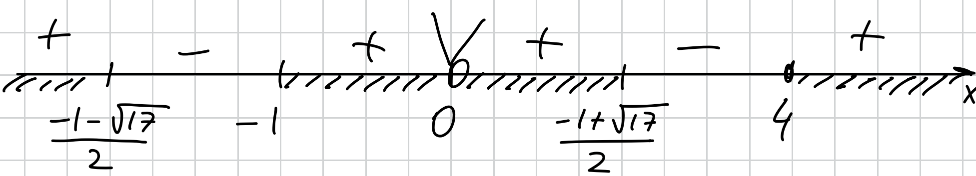
$t^2+8-2t-11\geq 0$

$t^2-2t-3\geq 0$

$(t+1)(t-3)\geq 0$

$\left(x-\frac{4}{x}+1\right)\left(x-\frac{4}{x}-3\right)\geq 0$

$\frac{(x^2+x-4)(x^2-3x-4)}{x^2}\geq 0$



Ответ: $x\in\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right]\cup[-1,0)\cup\left(0,\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right]\cup[4,+\infty)$

$\boxed{№5}$

$$\frac{x^4-8x^2-9}{\left((x-5)^{10}+(2x-9)^5\right)(x^4-5x^2+4)} \le 0$$

биквадратные

1) Рассмотрим самую непонятную скобку и сравним с 0

$$(x-5)^{10}+(2x-9)^5 \vee 0$$

$$(x-5)^{10} \vee -(2x-9)^5 = (9-2x)^5$$

Заметим, что $A \vee B \Leftrightarrow A^5 \vee B^5$ (нечетная степень сохраняет знак)

Тогда:

$$\Leftrightarrow (x-5)^2 \vee 9-2x \Leftrightarrow \underbrace{(x-5)^2+2x-9}_{} \vee 0$$

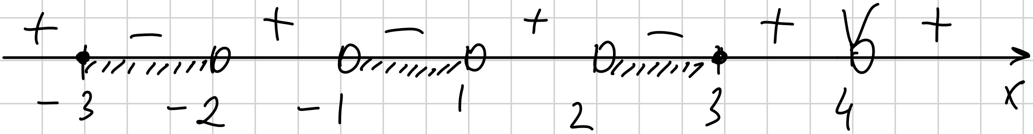
этим можно заменить изначальную скобку

2) Раскладываем на множители:

$$\frac{(x^2+1)(x^2-9)}{(x^2-8x+16)(x^2-4)(x^2-1)} \le 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{(x-3)(x+3)}{(x-4)^2(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)} \le 0$$



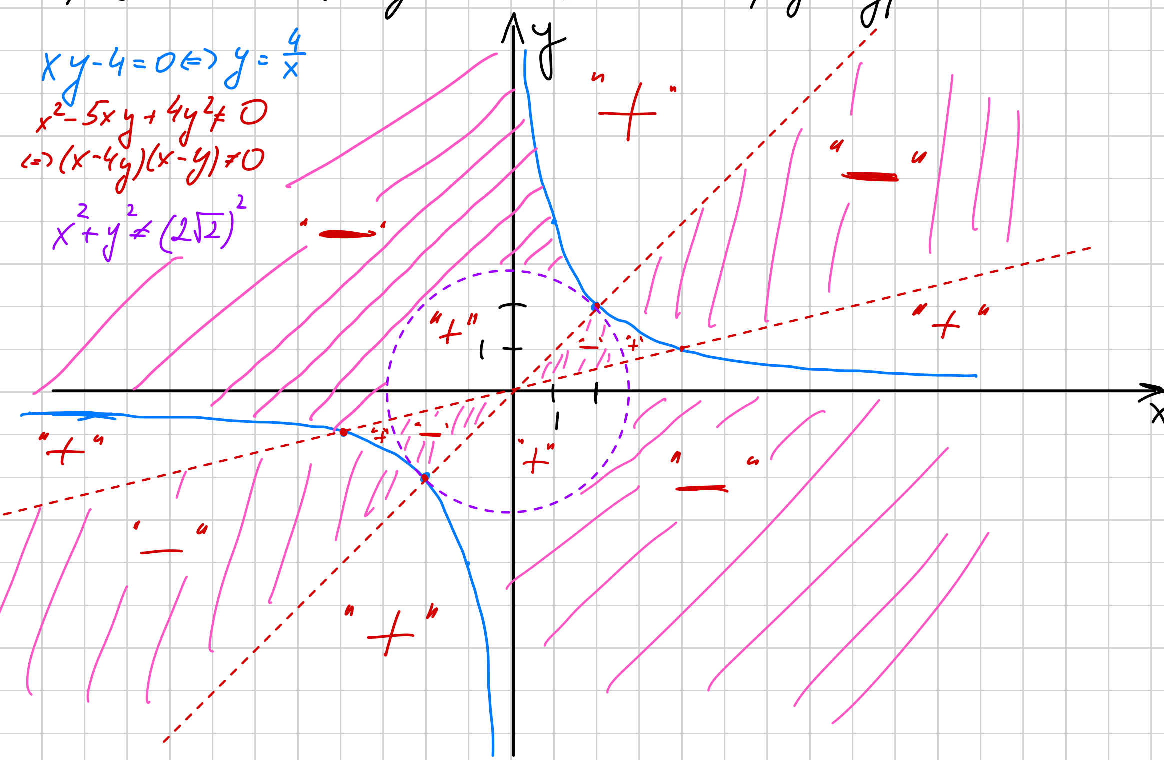
Ответ: $x \in [-3,-2) \cup (-1,1) \cup (2,3]$

$\boxed{№6}$

$$\frac{xy-4}{(x^2-5xy+4y^2)(x^2+y^2-8)} \le 0$$

1) Система имеет 2 переменные => решением будет множество точек на плоскосто XoY

2) Давайте найдем мн-ва точек, где дробь $=0$.

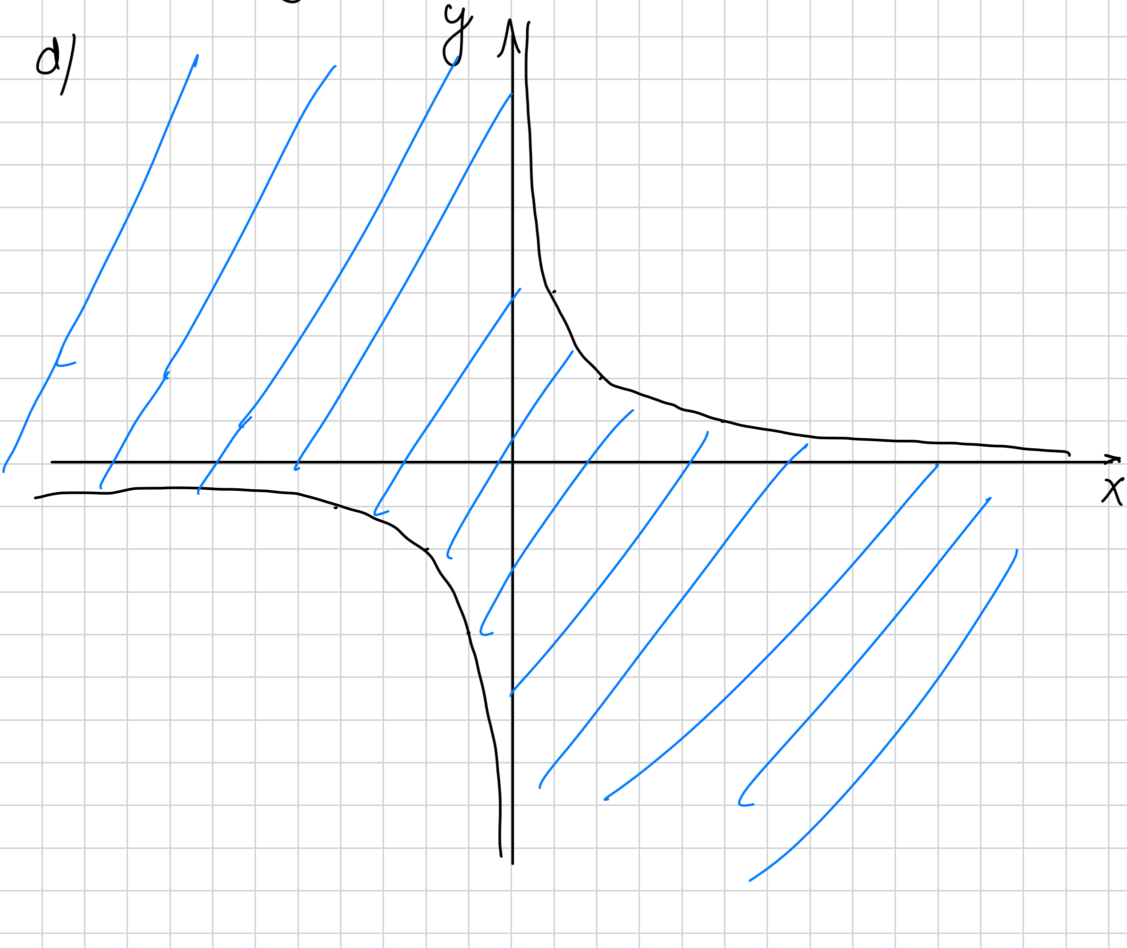


На этих кривых выражение $= 0$ или неопределено.
При переходе через каждую из кривых выражение меняет знак $\Rightarrow$ расставим знаки

$\boxed{№7}$ Решить неравенства

а) $xy \le 4$ б) $y \le \frac{4}{x}$

а)



б)

$$\frac{xy-4}{x} \leq 0$$