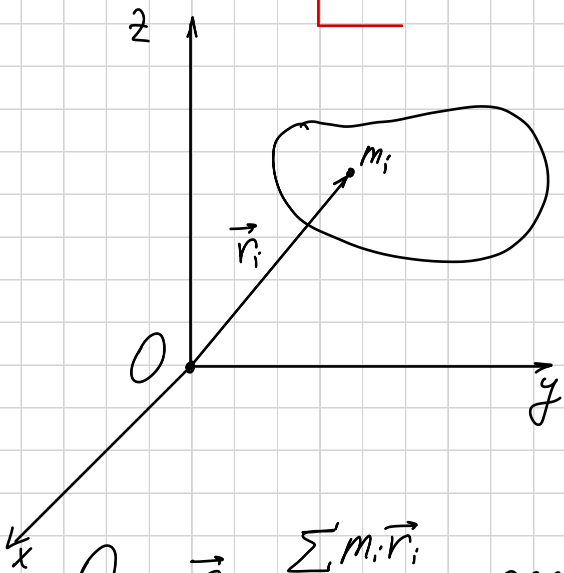
+ ×

− ÷

§5. Центр масс. Центр тяжести



$$m = \sum_i m_i$$

<u>Опр</u> $\vec{r}_c = \dfrac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$ – радиус-вектор центра масс

$\vec{v}_c = \dfrac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i}$ – скорость центра масс

$\vec{a}_c = \dfrac{\sum m_i \vec{a}_i}{\sum m_i}$ – ускорение центра масс

<u>Замечание</u> 1) Центр масс однородных симметричных тел находится в их геометрическом центре

2) Для однородного плоского тела в виде Δ-ка центр масс находится на пересечении медиан

Замечание: 1) $\vec{P}_{\Sigma} = \sum m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_c$

полная масса

2) $M\vec{a}_c = \underbrace{\sum_i \vec{F}_i}_{\text{сумма всех сил, действующих на тело}}$ – теорема о движении центра масс

центр масс движется так, как если бы все внешние силы, действ. на тело, были приложены в центре масс, а масса всего тела была бы сосредоточена в нем

△

1) $\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i = \underbrace{\sum m_i}_{M} \cdot \underbrace{\frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i}}_{\vec{v}_c} = M \vec{v}_c$

2) $\underbrace{\sum m_i \vec{a}_i}_{M\vec{a}_c} = \sum \vec{F}_i$

□

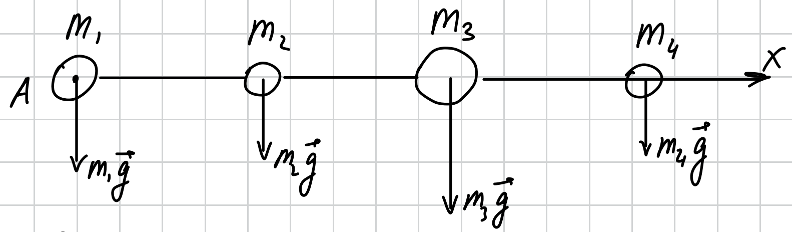
Опр Центр тяжести – точка приложения равнодействующей сил тяжести, действующей на все части тела.

Замечание: 1) Центр тяжести (как и центр масс) не обязательно находится в самом теле (пример - обруг)

2) В однородном (вектор $\vec{g}$ одинаков во всех точках пр-ва) поле тяжести центр масс и центр тяжести совпадают

Местоположение центра тяжести, а значит, и центра масс, удобно находить, учитывая симметричность тела и исп. понятие момента силы.

Задача 5. На лёгком стержне (рис. 12) закреплены шары массами $m_1 = 3$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 6$ кг, $m_4 = 3$ кг. Расстояние между центрами любых ближайших шаров $a = 10$ см. Найти положение центра тяжести и центра масс конструкции.



I способ: С помощью момента сил

1) Пусть центр тяжести находится на расстоянии L от точки A. В центре тяжести приложена равнодействующая $\Rightarrow$ ее момент отн. оси A равен сумме моментов всех сил отн. A:

$$R = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)g$$

$$RL = m_2 g a + m_3 g 2a + m_4 g \cdot 3a$$

$$L = \frac{m_2 + 2m_3 + 3m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \approx 16{,}4 \text{см}$$

II способ: найти центр масс

1) Введем ось Ox с началом в т-ке A.

2) По опр-ю, координата ц.м.:

$$X_c = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot a + m_3 \cdot 2a + m_4 \cdot 3a}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

§6. Решение задач

Вспомним условия равновесия (необходимые, но не достаточные!)

1. Мат. точка / тв. тело без вращения:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

2. Тв. тело с фикс. осью вращения

$$\sum_i M_{0_i} = 0$$

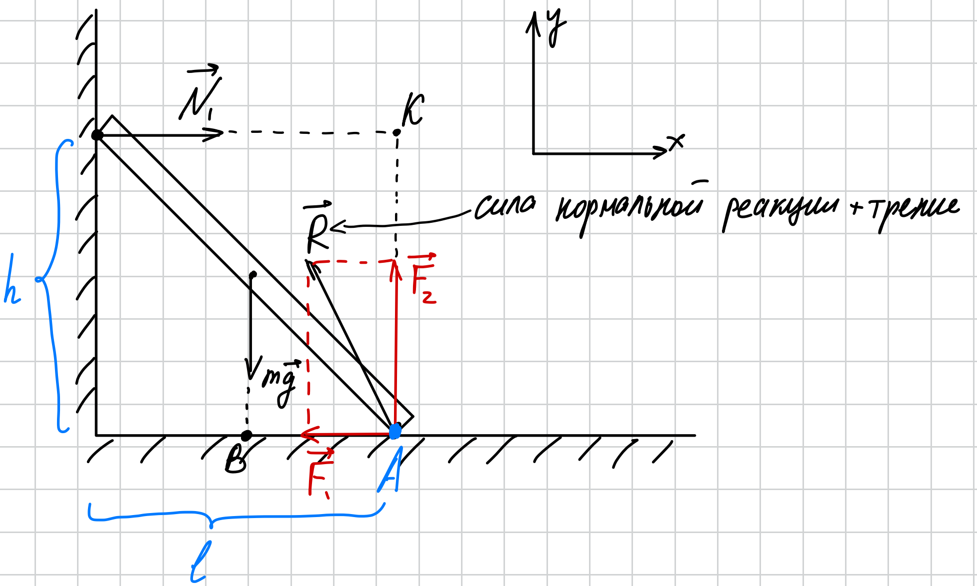
моменты отн. оси вращения

3. Тв. тело, произвольное движение

$$\begin{cases} \sum_i \vec{F}_i = 0 \\ \sum_i M_{0_i} = 0 \end{cases}$$

отн. любой оси

Задача 6. Лестница массой m, приставленная к гладкой стене, покоится (рис. 13). Центр тяжести лестницы в её середине, нижний конец лестницы на расстоянии l от стены, а верхний на расстоянии h от пола. Найти силы, действующие на лестницу со стороны стены и пола.



1 способ: Введем оси Ox, Oy и запишем условия равновесия:

$$\begin{cases} N - F_1 = 0 \\ F_2 - mg = 0 \\ mg\dfrac{l}{2} - Nh = 0 \end{cases}$$

– моменты отн оси A ($\perp$ рис)

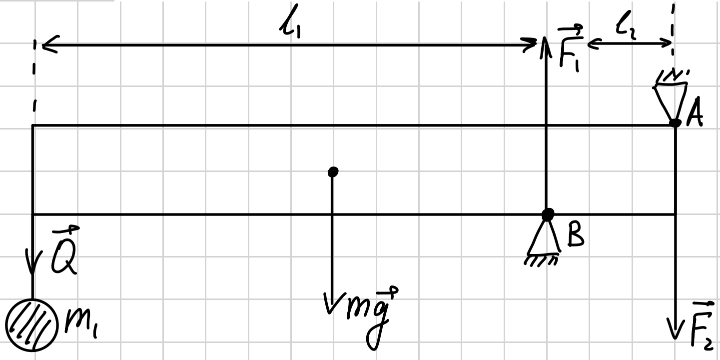
2 способ

$$\begin{cases} F_2 - mg \\ mg\frac{l}{2} - Nh = 0 \text{ - отн оси } A \\ mg\frac{l}{2} - F_1 h = 0 \text{ - отн оси } K \end{cases}$$

3 способ:

$$\begin{cases} mg\frac{l}{2} - Nh = 0 \\ mg\frac{l}{2} - F_1 h = 0 \\ F_2\frac{l}{2} - Nh = 0 \end{cases}$$

Задача 7. Однородная горизонтальная балка массой $m = 60$ кг опирается на опоры в точках A и B (рис. 14). На конце балки висит груз массой $m_1 = 50$ кг. Определить силы действия балки на опоры, если $l_1 = 2$ м, $l_2 = 0{,}5$ м.



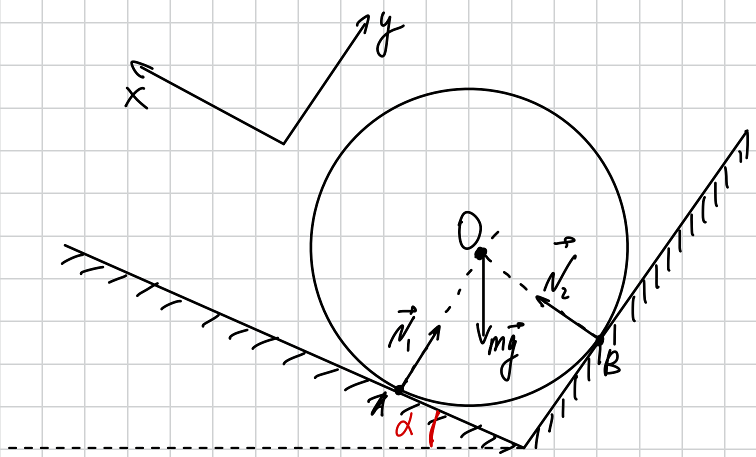
1 способ:

отн оси A: $\begin{cases} F_1 l_2 - mg\dfrac{l_1+l_2}{2} - m_1 g(l_1+l_2) = 0 \\ F_1 - F_2 - m_1 g - mg \end{cases}$

2 способ:

отн оси A: $\begin{cases} F_1 l_2 - mg\dfrac{l_1+l_2}{2} - m_1 g(l_1+l_2) = 0 \\ F_2 l_2 - m_1 g l_1 - mg\left(\dfrac{l_1+l_2}{2} - l_2\right) = 0 \end{cases}$ отн оси B:

Задача 8. На двух взаимно перпендикулярных гладких плоскостях (рис. 15) лежит однородный шар массой m $(mg = 60\ \text{Н})$. Определить силы давления шара на плоскости, если одна из плоскостей составляет с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$.



1 способ: Введем оси вдоль плоскостей

$$\begin{cases} N_2 - mg\sin 30^\circ = 0 \\ N_1 - mg\cos 30^\circ = 0 \end{cases}$$

2 способ:

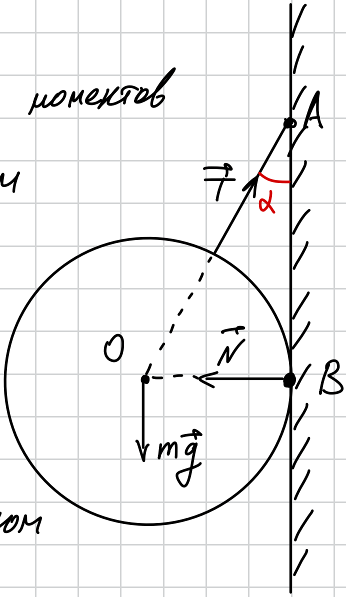
$$\begin{cases} N_2 - mg\sin 30^\circ = 0 \\ N_1 R - mgR\cos 30^\circ = 0 \quad \text{- отн оси } B \end{cases}$$

радиус

3 способ:

$$\begin{cases} -N_2 R + mgR\sin 30^\circ = 0 \quad \text{- отн оси } A \\ N_1 R - mgR\cos 30^\circ = 0 \quad \text{- отн оси } B \end{cases}$$

Задача 9. К вертикальной гладкой стене (рис. 16) подвешен на нити длиной l однородный шар радиусом R и массой m. Определить натяжение нити и силу давления шара на стену.



1) Т.к. шар в равновесии, то сумма моментов всех сил отн оси O $=0$. При этом моменты сил N и $mg = 0$ $\Rightarrow$ момент силы T также $=0$ $\Rightarrow$ линия действия силы $\vec{T}$ проходит через O.

2) Составим ур-е так, чтобы в каждом было по 1 неизвестной:

отн. оси A: $-mgR + N \cdot AB = 0 \Leftrightarrow N = mg\dfrac{R}{\sqrt{l^2+2Rl}}$

отн. оси B: $-mgR + TR\cos\alpha = 0$

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

3) Найти силу T можно еще проще, записав равновесие сил на вертикаль