+ ×

− ÷

§1. Основные определения

Как записать, что d - остаток от деления числа a на число b:

$$a = a_1 \cdot b + d, \text{ где } \begin{matrix} a_1, a \in \mathbb{Z} \; ! \\ b \in \mathbb{N} \\ d \in \underbrace{\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}}_{\text{остаток не бывает отрицательным!}} \end{matrix}$$

Например: $-2 = -1 \cdot 3 + 1$

Опр 1: Число a делится нацело на число b, если существует такое число a_1, что $a = a_1 b$. При этом число b и c называются делителями этого числа

Пишут: $a \vdots b$

Опр 2: Число называется простым, если оно имеет ровно 2 делителя - единицу и само себя. Число называется составным, если оно имеет более двух делителей

Замечание: 1 - не явл ни простым, ни составным

Опр 3: Наибольший общий делитель чисел a и b - это самое большое число, на которое одновременно делятся

a и b. Оно обозначается $НОД(a,b) \equiv (a,b)$

Опр 4: Наименьшее общее кратное чисел a и b – это наименьшее число, которое одновременно делится на a и на b. Оно обозначается $НОК(a,b) \equiv [a,b]$

Опр 5: Если НОД двух чисел равен единице, то эти числа называют взаимно простыми

Свойства делимости: $m, n, k, a, b \in \mathbb{Z}$

1. Если $m \vdots n$, $n \vdots k$, то $m \vdots k$

2. Если k – общий делитель чисел m и n, то

   а. $(m+n), (m-n) \vdots k$

   б. $mn \vdots k^2$

Следствие св-ва 2: Если одно из чисел m или n делится на k, а второе не делится на k, то $m+n$, $m-n$ не делятся на k.

3. Если число a делится на взаимно простые делители m и n, то a делится на mn

4. Если $ab \vdots p$ - простое, то $a \vdots p$ или $b \vdots p$

5. Если $ab \vdots n$ и a - взаимно просто с числом n, то b делится на число n

§2. Разложение на простые множители. ОТА.

Т (Основная теорема арифметики)
Любое натуральное число n, большее единицы, можно разложить в произведение простых чисел. Это разложение единственно, с точностью до порядка следования сомножителей

Опр: Процесс разложения числа на простые множители называется факторизацией (нахождение канонического вида)

Утв: Если $n = ab$, то хотя бы один из сомножителей не превосходит $\sqrt{n}$

△ Д-те сами :) ■

Следствие: При факторизации числа имеет смысл проверять лишь те простые числа, которые меньше корня из числа

$\boxed{№1}$ Найдите НОД$(6787; 7194)$

(Признаки делимости рассмотрим потом)

1 способ: Факторизуем оба числа:

$$\begin{array}{r|l} 6787 & 11 \\ 617 & 617 \\ 1 & \end{array}$$

не дел, не дел, не дел, проверим

$\cancel{1}$, 2, 3, $\cancel{4}$, 5, $\cancel{6}$, 7, $\cancel{8}$, $\cancel{9}$, $\cancel{10}$

11, $\cancel{12}$, 13, $\cancel{14}$, $\cancel{15}$, $\cancel{16}$, 17

проверим

$\cancel{18}$, 19, $\cancel{20}$, $\cancel{21}$, $\cancel{22}$, 23, $\cancel{24}$ ....

(Решето Эратосфена)

$$\begin{array}{r|l} 6787 & 7 \\ \underline{-63} & \overline{969} \\ 48 & \\ \underline{-42} & \\ 67 & \\ \underline{-63} & \\ 4 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ не дел

$$\begin{array}{r|l} 6787 & 11 \\ \underline{-66} & \overline{617} \\ 18 & \\ \underline{-11} & \\ 77 & \\ \underline{-77} & \\ 0 & ! \end{array}$$

Теперь ищем делители 617 больше (или равны) 11

13, 17, 19, 23 – не явл делителями

25 – нет смысла рассматривать, т.к. $(25)^2 = 625 > 617$

$$\Rightarrow 6787 = 11^1 \cdot 617^1$$

Аналогично получим:

$$7194 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 11^1 \cdot 109^1$$

Как найти НОД:

1) Выписываем все простые делители обоих чисел
2) Ставим минимальные степени делителей, которые есть в разложениях

То есть – выписываем все общее

$$НОД(6787, 7194) = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 11^1 \cdot 109^0 \cdot 617^0 = 11$$

2 способ: Алгоритм Евклида

1) Пусть $НОД(6787, 7194) = X$
2) Поделим большее число на меньшее:

$$7194 = 1\cdot 6787 + 407$$
$$\vdots x \qquad \vdots x \Rightarrow \vdots x$$

Тогда $x = НОД(6787, 407)$. Аналогично далее

$$6787 = 16\cdot 407 + 275$$
$$\vdots x \qquad \vdots x \Rightarrow \vdots x$$

$\Rightarrow x = НОД(407, 275) = НОД(275, 132) =$

$= НОД(132, 11) = 11$

$132 \vdots 11$

$\boxed{№2}$ Док-те, что $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ явл. несократимой дробью $\forall n$

1) Переформулируем задачу: $\underbrace{НОД(21n+4, 14n+3)}_{x} = 1$

2) Применяем алгоритм Евклида

$$21n+4 = 14n+3 + 7n+1$$
$$\vdots x \qquad \vdots x \Rightarrow \vdots x$$

$$14n+3 = 2(7n+1) + 1$$
$$\vdots x \qquad \vdots x \Rightarrow \vdots x$$

$\Rightarrow x = НОД(7n+1, 1) = 1$ ✓

№3 Док-ть, что $\dfrac{12a+1}{12a^2+43a+3}$ несократима

1) Поделим многочлен на многочлен:

$$\begin{array}{r|l} 12a^2+43a+3 & 12a+1 \\ \underline{-\,12a^2+a} & a+7/2 \\ 42a+3 & \\ \underline{-\,42a+7/2} & \\ -1/2 & \end{array}$$

$$\Rightarrow 12a^2+43a+3=\left(a+\frac{7}{2}\right)(12a+1)-\frac{1}{2} \quad \Big| \cdot 2$$

$$2(12a^2+43a+3)=(2a+7)(12a+1)-1$$

$\vdots\, x$ $\qquad\qquad$ $\vdots\, x \Rightarrow \vdots\, x$

$\|$

НОД$(12a^2+43a+3,\ 12a+1)$

$\Downarrow$

$$x = \text{НОД}(12a+1,\ 1)=1$$

№4 Д-ть, что $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$ несократима

($\dfrac{a}{b}$ - несократимая дробь)

1) Переформулируем: нужно д-ть, что НОД$(a^2+ab+b^2,\ a+b)=1$

учитывая что НОД$(a,b)=1$ $\qquad$ $\| \; x$

2) Заметим, что

$$a^2+ab+b^2=a(a+b)+b^2$$

$\vdots x \qquad \vdots x \Rightarrow \vdots x$

$$a^2+ab+b^2=b(a+b)+a^2$$

$\vdots x \qquad \vdots x \Rightarrow \vdots x$

$\Rightarrow x = \text{НОД}(a^2, b^2) = 1$

$\boxed{№5}$ $\frac{a}{b}$ – несократима. На какие числа может сокращаться дробь $\frac{3a+2b}{a+4b}$?

1) $\text{НОД}(a,b)=1$. $x=\text{НОД}(3a+2b, a+4b)$

$$3a+2b=3(a+4b)-10b$$

$\vdots x \qquad \vdots x \Rightarrow \vdots x$

$$a+4b=2(2b+3a)-5a$$

$\vdots x \qquad \vdots x \Rightarrow \vdots x$

$\Rightarrow x=\text{НОД}(10b, 5a)=5\,\text{НОД}(2b, a)$

$\max x = 10$, при $a \vdots 2$

Ответ: 2, 5, 10