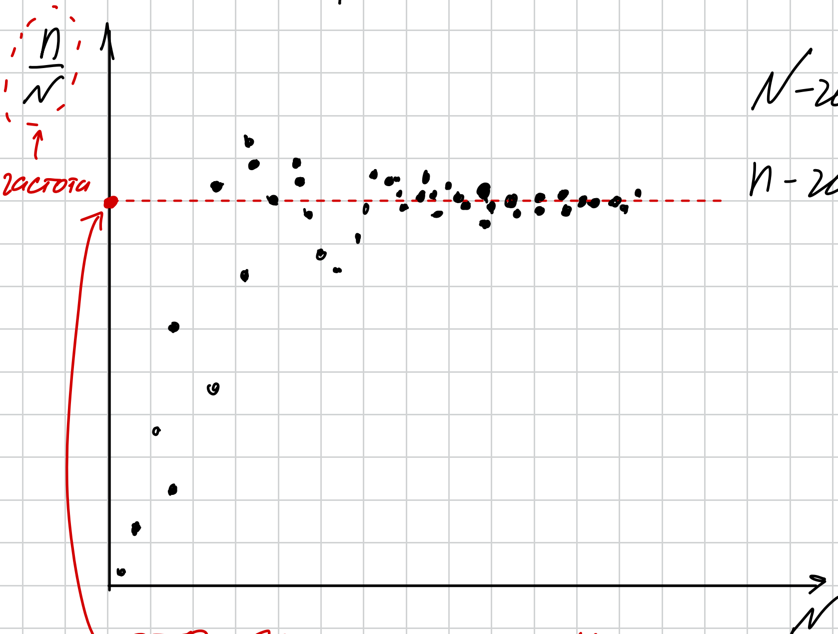
$+ \quad \times$

$- \quad \div$

§3. Понятие случайного события. Вероятность

Рассмотрим график



N – число испытаний

n – число интересующих событий

это может быть
- выпадение орла при подбр. монетки
- выпадение 1 при подбр. кубика и т.д.

ЭТО значение мы и назовем вероятностью

$$\left(\omega = \lim_{N\to\infty} \frac{n}{N}\right)$$

При решении задач, мы будем предполагать, что все события (исходы) равновероятны

И вероятностью события А, связанного с n равновероятными исходами называется отношение числа исходов, благоприятствующих событию A, к числу всех исходов:

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

Замечание: $0 \le P(A) \le 1$

Пример 19. Наугад были нажаты 5 клавиш на русской клавиатуре (33 буквы). Какова вероятность того, что было напечатано слово «ФЗФТШ»?

1) Всего вариантов слов — 33^5

Нам подходит — 1

$$\Rightarrow P = \frac{1}{33^5}$$

Пример 20. Из колоды в 36 карт выбирают наугад 4 карты. Какова вероятность того, что среди этих карт есть хотя бы один туз?

1) Всего вариантов выбрать 4 карты из колоды (порядок не важен) — C_{36}^4

2) Благоприятный исход — хотя бы 1 туз

Найдем кол-во исходов, в которых не будет ни одного туза — C_{32}^4

$$\Rightarrow P = \frac{C_{36}^4 - C_{32}^4}{C_{32}^4}$$

Замечание: По сути, мы получили, что

$$1 = \sum_{\text{по всем исходам}} P_i$$

Пример 21. В урне лежат 60 белых и 4 чёрных шарика. Из неё наудачу вынимается 5 шаров. Найдите вероятность того, что среди них будут ровно 2 белых шарика.

1) Всего исходов – C_{64}^5

2) Благоприятные – ровно 2 белых $\Rightarrow$ то есть 2 белых и 3 черных $\Rightarrow C_{60}^2 \cdot C_4^3$

$$P = \frac{C_{60}^2 \cdot C_4^3}{C_{64}^5}$$

Докажите тождество $C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = 2^{n-1}n$

1) Рассмотрим правую часть:

$$n2^{n-1} = n\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k = n\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}$$

2) Левая часть:

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

Заметим, что если мы обозначим $m=k-1$, то суммирование будет от $m = \underset{\uparrow k=1}{1} - 1 = 0$ до $m=n-1$, тогда левая часть имеет вид:

$$\sum_{m=0}^{n-1} \frac{n!}{m!\,(n-m-1)!}$$

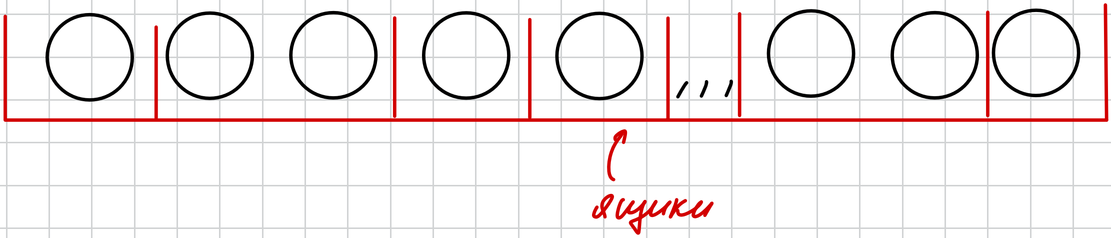
одно и то же с точностью до переобозначения $m \leftrightarrow k$

чтд

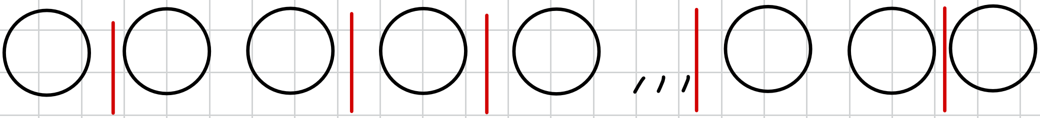
№1

Шары и перегородки

1. 6 ящиков занумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым?



1) Дно ящиков и крайние перегородки нас не интересуют => уберем их



2) Вместо того чтобы считать способы разложения шаров по ящикам - посчитаем кол-во способов расставить перегородки м/у шарами.

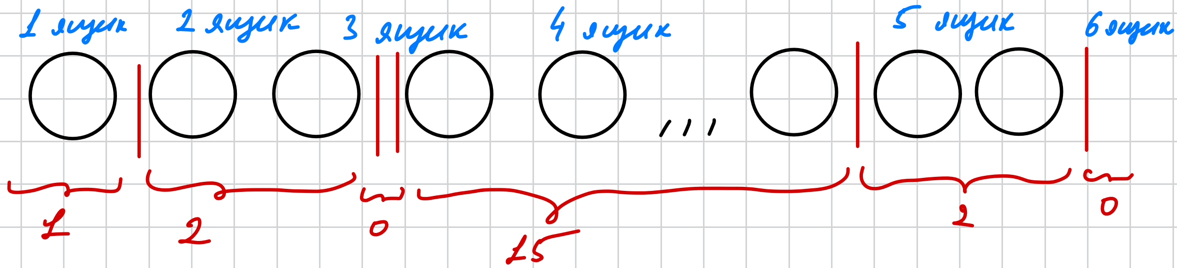
Или посчитать кол-во способов выбрать 5 пустых мест из 19

А это C_{19}^{5}

Ответ: $C_{19}^{5} = C_{20-1}^{6-1}$

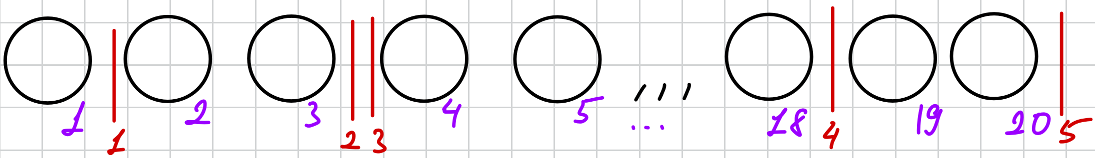
№2

2. 6 ящиков занумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров (на этот раз некоторые ящики могут оказаться пустыми)?



1) В отличии от прошлой задачи несколько палочек может оказаться вместе + палочки могут быть "слева" и "справа" => решаем по-другому

2) Занумеруем объекты:



Общее количество перестановок: $(20+5)!$

Вспомним, что шары одинаковые (и стенки ящиков) => нужно поделить на число перестановок м/у собой:

$$\frac{(20+5)!}{20!\,5!} = C_{25}^{5} = C_{20+6-1}^{6-1}$$

общая ф-ла

Как из решения №2 получить решение №1

"приклеим" по 1 шару в каждый ящик

Осталось решить задачу №2 для 14 шаров

Ответ: $C_{14+6-1}^{6-1} = C_{19}^{5}$

$\boxed{№3}$

3. Сколькими способами натуральное число n можно представить в виде суммы

(а) k натуральных слагаемых;

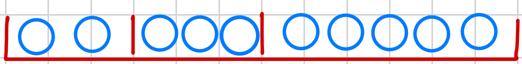
(б) k неотрицательных целых слагаемых (представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными)?

а)

1) Например для $n=10$, $k=3$:

$$10 = 2 + 3 + 5$$

$$\Updownarrow$$



Т.е. нужно посчитать кол-во способов разложить n шаров по k ящикам (ящики не пустые)

Ответ: C_{n-1}^{k-1}

б) В ящике может быть 0 шаров ⇒ №2

Ответ: C_{n+k-1}^{k-1}

$\boxed{№ 7}$ Кол-во способов разложить 9 шаров по 3-м ящикам с 2,3,4 местами?

<u>1 способ</u>

$$C_9^2 \cdot C_7^3 \cdot C_4^4 = \frac{9!}{7!\,2!} \cdot \frac{7!}{4!\,3!} \cdot \frac{4!}{0!\,4!} =$$

кол-во способов выбрать шары для 1-го ящика

$$= \frac{9!}{2!\,3!\,4!}$$

<u>2 способ</u>

$$\frac{\text{Кол-во перестановок 9 шаров}}{\left(\begin{matrix}\text{перестановки}\\ \text{в 1-м ящике}\end{matrix}\right) \cdot \left(\begin{matrix}\text{—"—}\\ \text{во 2-м ящике}\end{matrix}\right) \cdot \left(\begin{matrix}\text{—"—}\\ \text{в 3-м ящике}\end{matrix}\right)}$$