+ ×

− ÷

§1. Комбинаторика

мощность множества

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $|X| = n$

$Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$, $|Y| = m$

Правило умножения: Количество способов выбрать x И y (кол-во пар (x_i, y_j), $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$) $= m \cdot n = |X| \cdot |Y|$

Правило сложения: Количество способов выбрать x ИЛИ y $= n + m = |X| + |Y|$

$\boxed{№1}$ Найдите кол-во двузначных чисел, у которых все цифры различны

$$N(\overline{xy}) - ?$$

1 способ: Зафиксируем x и будем выбирать y:

$X = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$, $|X| = 9$

$$y \in \underbrace{\{0, 1, \cancel{2}, 3, \dots, 9\}}_{10} \Rightarrow |Y| = 9$$

$$\Rightarrow N(\overline{xy}) = |Y| \cdot |X| = 9 \cdot 9 = 81$$

2 способ: Зафиксируем y и будем выбират x:

$$N = |Y| \cdot |X| = 90$$ – Где ошибка?

$|Y| = 10, |X| = 9$

На самом деле:

$$N(\overline{xy}) = N(\overline{xy}, y \neq 0) + N(\overline{x0}) = 9 \cdot 8 + 1 \cdot 9 = 81$$

"y" "x" "y" "x"

$\boxed{№2}$ Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладьи, чтобы они не били друг друга?

1) Ставим 1-ю ладью – 64 способа $(|X| = 64)$
2) Остается $(64 - 15) = 49$ полей, где ладья не может бить $\Rightarrow$ ставим туда вторую ладью $(|Y| = 49)$
3) По правилу произв:

$$N = |X| \cdot |Y| = 64 \cdot 49$$

№3 Сколькими способами можно переставить между собой в ряд цифры 1, 2, 3, …, 9

1) Представим, что мы расставили

$$\overline{X_1 X_2 X_3 \dots X_9}$$

$x_1 \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ — 9 способов

$x_2 \in \{1, \cancel{2}, 3, \dots, 9\}$ — 8 способов

$\vdots$

$x_9 \in \{\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \dots, \cancel{9}\}$ — 1 способ

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 \in \bar{X}_1,\ |\bar{X}_1| = 9 \\ x_2 \in \bar{X}_2,\ |\bar{X}_2| = 8 \\ \vdots \\ x_9 \in \bar{X}_9,\ |\bar{X}_9| = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow N = 9 \cdot 8 \cdot 7 \dots \cdot 1 = 9!$$

правило произв.

факториал

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n,\ n \in \mathbb{N}$$

$$(0! \equiv 1)$$

№3 Сколькими способами можно выбрать k шаров из n шаров (шары различны)? $n>k$

1 случай: Порядок важен

$$\underbrace{\underline{\ n\ }\quad \underline{\ n-1\ }\quad \ldots\quad \underline{\ n-k+1\ }}_{k\text{-мест}} \Rightarrow N_1 = n\,(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \overset{A_n^k}{\frac{n!}{(n-k)!}}$$

2 случай: Порядок не важен (①②③ ≡ ②①③)

$$N_2 = \frac{N_1}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k = \binom{n}{k}$$

Опр Число размещений — $A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ — кол-во способов выбрать k упорядоченных элементов из n элементов

$$\left(A_n^n = n! = P_n - \text{перестановка}\right)$$

Опр Число сочетаний — $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!}$ — кол-во способов выбрать k неупорядоченных элементов из n элементов

№4 Сколько сущ. 6-ти значных чисел, сост. из ненулевых попарно различных цифр

1) Можно сделать аналогично №3 или сразу заметить, что нам нужна упорядоченная выборка 6 чисел из 9, т.е. $A_9^6 = \ldots = 60480$.

№5 Сколькими способами можно разыграть среди 20-ти спортсменов золото, серебро и бронзу?

$$\left.\begin{array}{l} \text{Бронза} - 20 \text{ способов} \\ \text{Серебро} - 19 \text{ способов} \\ \text{Золото} - 18 \text{ способов} \end{array}\right\} N = A_{20}^3$$

№6 Сколькими способами можно разыграть 3 призовых места среди 20-ти спортсменов?

Разница с пред. задачей в том, что здесь не важен порядок

$$\Rightarrow N = \frac{A_{20}^3}{3!} = C_{20}^3$$

№7 В некотором гос-ве нет двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова может быть наиб численность?

1 способ:

$$N = \underset{\text{беззубый}}{\overset{C_{32}^0}{1}} + \underset{C_{32}^1}{\overset{\text{1 зуб}}{32}} + \underset{\text{2 зуба}}{\overset{C_{32}^2}{\frac{32\cdot 31}{2}}} + \ldots + C_{32}^{31} + C_{32}^{32}$$

2 способ:

$\sqcup\ \sqcup\ \sqcup\ \sqcup \ldots \sqcup$ – 32-значное число

1 – зуб есть; 0 – зуба нет

$$N = \overbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}^{32} = 2^{32}$$

Получили частный случай важного св-ва числа сочетаний

$$2^{32} = C_{32}^0 + C_{32}^1 + \ldots + C_{32}^{32}$$

Докажем его в общем случае

$\boxed{№8}$ Д-тб:

$$2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$$

Δ

Докажем более общее утв:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^0 b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^n a^0 b^n$$

$$(a+b)^n = \underbrace{\overbrace{(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}^{k}\overbrace{(a+b)\ldots(a+b)}^{n-k}}_{n} =$$

$$= \underline{\quad\quad}\, a^k b^{n-k}$$

из k-скобок берем a

из $(n-k)$-оставшихся берем b

Сколько есть способов выбрать K скобок из n скобок?

$\parallel$

K шаров из n шаров $= C_n^k$

$\blacksquare$

Замечание: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \underbrace{C_n^k}_{\text{Биномиальный коэффициент}} a^{n-k} b^k$ – Бином Ньютона

Треугольник Паскаля:

$(a+b)^1 = 1a + 1b$

$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

$\vdots$