

+

×

—

÷

§ 3. Решение задач

Небольшое напоминание.

Теорема об упр. кин. энергии

$$E_{кин}^{кон} - E_{кин}^{нач} = A_{ВСЕХ сил}$$

При этом, существует 2 вида сил

Непотенциальные

Работа зависит от пути

Пример:

- Сила трения

Потенциальные

Работа не зависит от пути

Работа по замкнутому контуру = 0

Можно ввести потенциальную энергию

Примеры:

- Сила тяжести: $E_{пот} = mgh$

• Сила упругости: $E_{\text{пост}} = \frac{k(x-x_0)^2}{2}$



Работа таких сил

$$A_{\text{пост}} = -(E_{\text{пост}}^{\text{кон}} - E_{\text{пост}}^{\text{нач}})$$

⇒ Из работы всех сил можно выделить работу потенциальных

$$\underbrace{E_{\text{кин}}^{\text{кон}} + E_{\text{пост}}^{\text{кон}}}_{E_{\text{полн}}^{\text{кон}}} - \underbrace{(E_{\text{кин}}^{\text{нач}} + E_{\text{пост}}^{\text{нач}})}_{E_{\text{полн}}^{\text{нач}}} = A_{\text{келост сил}}$$

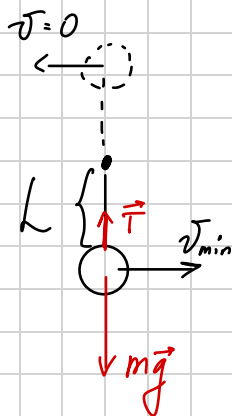
$\Delta E_{\text{полн}}$

Замечание: З.С.Э: $\Delta E_{\text{полн}} = 0 \Leftrightarrow E_{\text{полн}}^{\text{нач}} = E_{\text{полн}}^{\text{кон}}$

Если: • Нет келост. сил

• $A_{\text{келост}} = 0$ ($\vec{F}_{\text{келост}} \perp \vec{v}$, например)

Пример 3.1. Лёгкий стержень длиной L с грузом малых размеров на одном конце может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через другой конец. Сначала груз находится в нижнем положении. Какую минимальную скорость нужно сообщить грузу, чтобы он совершил полный оборот? Сопротивлением воздуха и трением в оси пренебречь.



1) $v_{min} \Leftrightarrow$ когда в верхней точке $v=0$.

2) Т.к. $\vec{T} \perp \vec{v}$ на протяжении всего движ.,

$m\vec{g}$ - потенциальная \Rightarrow можно записать З.С.Э:

(за кол-во пот. э. выберем какое положение):

$$\frac{mv_{min}^2}{2} = mg \cdot 2L$$

$$\Rightarrow v_{min} = 2\sqrt{gL}$$

***Пример 3.2.** Груз малых размеров висит на лёгкой нерастяжимой нити длиной L . Какую минимальную скорость v_0 надо сообщить грузу, чтобы он сделал полный оборот в вертикальной плоскости? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1) Отличие в том, что кисть не жесткая \Rightarrow
 \Rightarrow может деформироваться. То есть, если в наивысшей точке $v=0$, то грузик "свалится"

2) Аналогично пред. задаче можно записать З.С.Э.:

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \underbrace{mg \cdot 2L}_{const} \quad (1)$$

(v_1 - в нижней т-ке)
(v_2 - в верхней)

$$v_1 \rightarrow \min \Leftrightarrow v_2 \rightarrow \min$$

При этом, v_2 - определяется ур-ем вращательного движения в верхней точке:

$$\underbrace{\frac{mv_2^2}{L}}_{\text{ускорение}} = T + \underbrace{mg}_{const} \Rightarrow v_2 \rightarrow \min \Leftrightarrow T = 0!$$

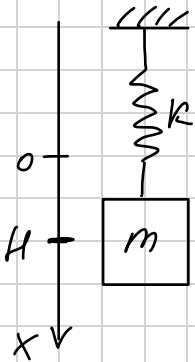
$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{gL}$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} v_1 = \sqrt{5gL}$$

Пример 3.3. Шарик массой m висит на пружине жёсткости k . В начальный момент пружина не деформирована (шарик придерживают). Затем шарик освобождают, и он начинает опускаться.

1) На какую максимальную длину растянется пружина?

*2) Какую максимальную скорость будет иметь шарик в процессе опускания?



1) Введем ось x , за ее край обозначим положение нерастянутой пружины

2) На шарик действуют пот. силы \Rightarrow можно записать З.С.Э:

H — максимальное
растяжение

За край потенциальной энергии возьмем $x=H$, тогда:

$$mgH = \frac{kH^2}{2} \Rightarrow H = \frac{2mg}{k}$$

3) Шарик будет разогнаться до тех пор пока $mg >$ силы упругости — они сравняются в координате h , там и будет v_{\max} :

$$kh = mg \Rightarrow h = \frac{mg}{k}$$

4) Запишем З.С.Э:

$$mgh = \frac{mv_{\max}^2}{2} + \frac{kh^2}{2} \Rightarrow v_{\max} = g\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$v_{\max} = g\sqrt{k}$$

Пример 3.4. На гладком горизонтальном полу лежит доска массой $M = 3$ кг, а на ней — брусок массой $m = 1$ кг. Коэффициент трения между бруском и доской $\mu = 0,6$. В начальный момент брусок и доска покоятся относительно пола. К бруску прикладывают горизонтальную силу $F = 9$ Н. Определить количество тепла Q , которое выделится за время $t = 1$ с движения бруска и доски вследствие трения между ними. Найти также КПД силы F , тянущей грузы, считая полезной работу, затраченную на разгон бруска (рис. 11).

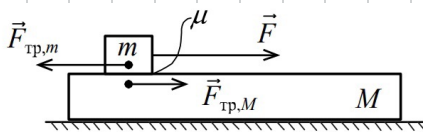


Рис. 11

Лир. отступление: КПД

Не вся энергия, потребляемая механизмом идет на то, что нужно (например, нагрев воды в чайнике и т.д.). Часть ее тратится впустую: разогрев деталей, окр. среды, ... Энергия, затраченная на нужное нам действие называется полезной

$$\eta = \frac{A_{\text{полезн}}}{A_{\text{полн}}} \cdot 100\%$$

1) Запишем II-й закон (на гор. ось)

$$\begin{cases} ma_m = F - F_{\text{тр}, m} \\ ma_M = F_{\text{тр}, M} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ma_m = F - \mu mg \\ ma_M = \mu mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_m = 3 \text{ м/с}^2 \\ a_M = 2 \text{ м/с}^2 \end{cases}$$

модули
равны по III-му
з-ну Ньютона

трение
скольжения

2) Чтобы найти кол-во тепла запишем II. об изм. кин. энергии:

$$\Delta E_{\text{кин}} = A_{\text{всех сил}} = A_{\text{суп. тр.}}^{\text{II}} + A_F$$

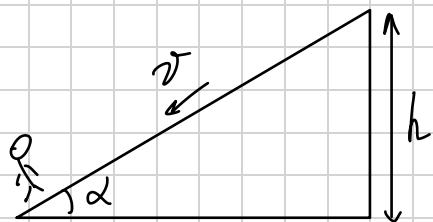
$$\Delta E_{\text{кин}} = \frac{mV_m^2}{2} + \frac{MV_M^2}{2} = \frac{m(a_m t)^2}{2} + \frac{M(a_M t)^2}{2} = 10,5 \text{ Дж}$$

$$A_F = F \cdot S = F \cdot \frac{a_m t^2}{2} = 13,5 \text{ Дж}$$

$$Q = 13,5 - 10,5 = 3 \text{ Дж}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{\frac{mV_m^2}{2}}{A_F} = \frac{4,5}{13,5} \approx 0,33$$

Какую min работу должен совершить человек массой m , чтобы за время t подняться по движ. вверх со скоростью v эскалатору? Высота подъема h , угол к горизонту — α

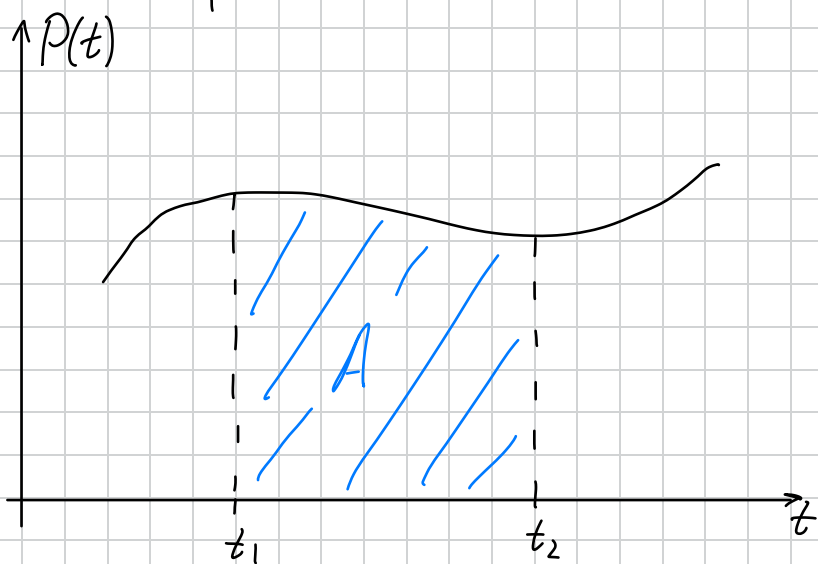
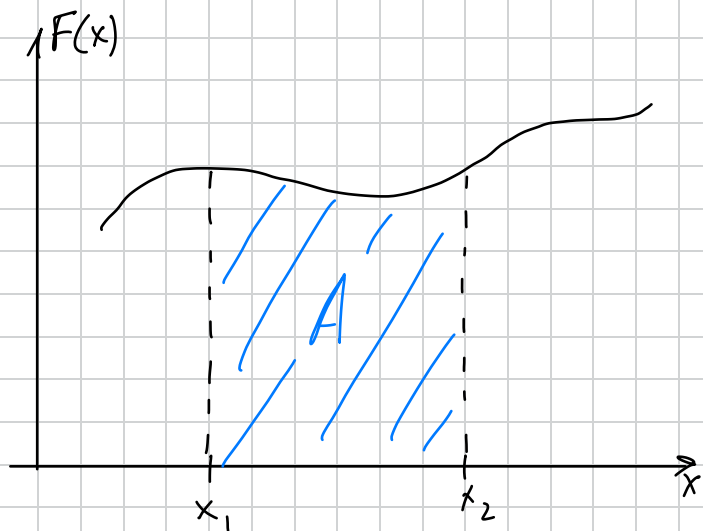


1) Скорость эскалатора можно интерп. как движение дополнительной длины пути $l = vt \Rightarrow$
 \Rightarrow человеку нужно подняться на экв. высоту $h = l \sin \alpha$.

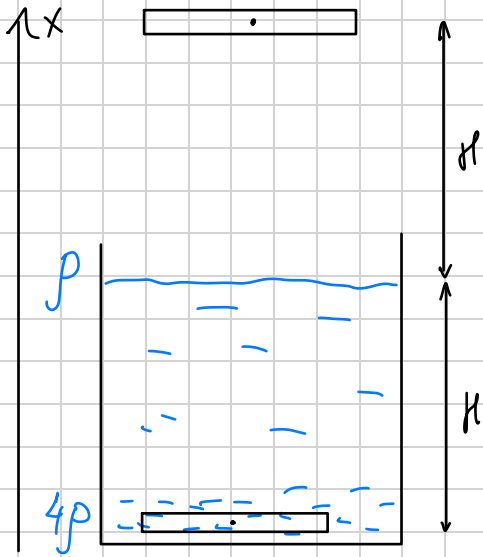
2) Тогда работа против силы тяжести:

$$A = mg(h + l \sin \alpha) = mg(h + vt \sin \alpha)$$

Напомним, про графический метод нахождения работы:



На дне стакана с жидкостью, плотность которой равномерно убывает от 4ρ до ρ лежит тонкая спица, имеющая плотность 6ρ . Высота жидкости H . Какую работу надо совершить, чтобы поднять центр тяжести спицы на высоту H над поверхностью жидкости? Объем спицы V . Какую работу совершит сила Архимеда



1) Спица тонкая \Rightarrow пренебрегаем объемом вытесняемой жидкости

2) II з-н. для покоя

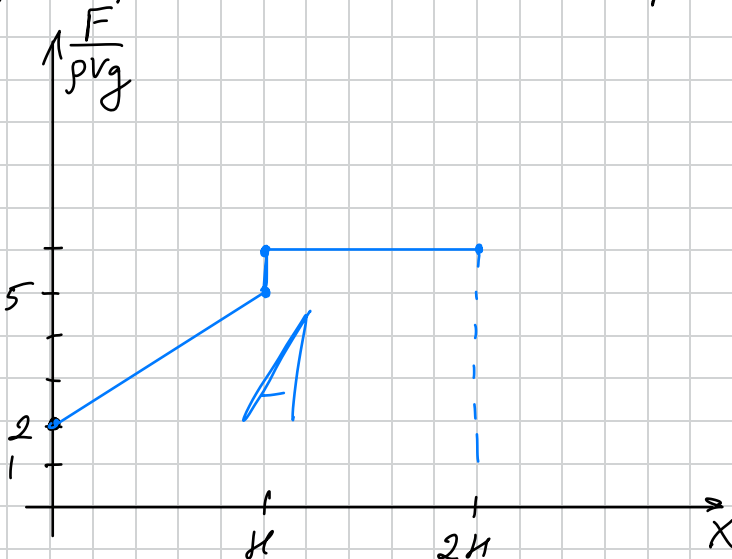
$$(O_x): ma = 0 = F + F_{\text{Арх}} - mg$$

$$\Rightarrow F = mg - F_A =$$

$$= 6\rho \cdot Vg - \rho(x)Vg$$

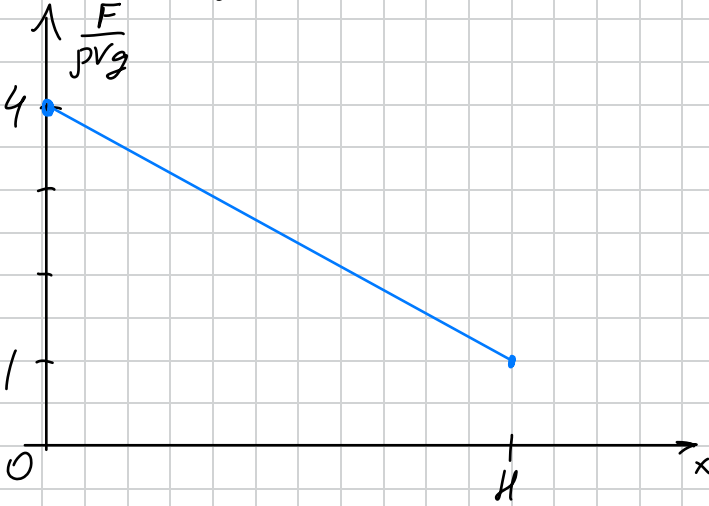
изм. от ρ до 4ρ

3) Нарисуй график $F(x)$, чтобы найти работу:



$$A = 9,5 V \rho g H$$

4) Найдём работу силы Архимеда:



$$A_{\text{Арх}} = \frac{5}{2} \rho V g H$$

Замечание: Мы рассмотрели случай, когда тащим горизонтальную спицу - что если это не так?

$$\Delta E_{\text{полн}} = A_F$$

не зависит
от "метода вытягивания"

$\Rightarrow A_F$ тоже не зависит.