$+ \quad \times$

$- \quad \div$

§1. Повторение

Повторим некоторые определения и теоремы из 8-го класса

Опр 1: Число a называется решением (корнем) уравнения, если при его подстановке в уравнение превращается в верное равенство. Решить уравнение - значит найти все его корни или доказать, что их нет

Аналогично определяется решение неравенства

Опр 2: Совокупность всех решений уравнения (неравенства) называется множеством решений

Опр 3: Уравнения (неравенства) называют равносильными, если множества их решений совпадают. Заметим, что уравнения и неравенства могут быть равносильны друг другу (например $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x = 0$)

Замечание: Как решать ур-я/неравенства?

1) Заменять равносильными — сразу получаем ответ

2) Если делаем неравносильные преобразования — ни одно из них не должно привести к потере корней (невозможно их вернуть) + в конце нужно проводить отбор корней, чтобы исключить приобретение посторонних корней

⇒ Проще всего — равносильные переходы!

Пример 1: Являются ли преобразования равносильными?

а) $\sqrt{x-12}=24-x$ и $x-12=(24-x)^2$

б) $x^2\leq x$ и $x\leq 1$ в) $|x|=x$ и $x\geq 0$

г) $x^2<0$ и $x^2+3x+3=0$

△

а) $x-12=x^2-48x+576 \Leftrightarrow x^2-49x+588=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=21 \\ x=28 \end{array}\right.$

Подставим $x=28$ в $\sqrt{x-12}=24-x$, получим

$4=-4$ — неверно ⇒ не явл. корнем ⇒ множества решений ур-й не совпадают ⇒

$\Rightarrow$ не равносильны ← вот так нужно обосновывать в д/з

б) $x=-1$ – решение 2-го, но не решение 1-го $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ не равносильны

в) По опр-ю модуля $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ ← значит равносильны

г) $x^2 < 0$ – не имеет корней

$D = 9-12 = -3 < 0 \Rightarrow$ не имеет корней $\Rightarrow$ равносильны

Замечание: Вспомним равносильные преобразования уравнений (вспомните, как их обосновать)

1) $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array} \right. \\ B \geq 0 \end{cases}$

2) $|A| = |B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array} \right.$

3) $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A \geq 0 \text{ (или } B \geq 0) \end{cases}$

4) $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} A = B^2 \\ B \geq 0 \end{cases}$

5) $A\sqrt{B}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B=0 \\ \begin{cases} A=0 \\ B\geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Вспомним квадратные уравнения и многочлены

Опр 4: Уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ – называется квадратным (если $a=1$, то ур-е приведенное)

$\boxed{\text{Т 1}}$ Если $D=b^2-4ac\geqslant 0$, то корни кв. ур-я

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$\triangle$

$$ax^2+bx+c=0 \quad |\cdot 4a$$

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0$$

$$4a^2x^2+2\cdot 2ax\cdot b+b^2+4ac-b^2=0$$

$$(2ax+b)^2-(b^2-4ac)=0$$ – раскрываем по разности квадратов

$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}=\pm\sqrt{D}$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$\blacksquare$

$\boxed{\text{Т2}}$ (Виета)

x_1, x_2 – корни $ax^2+bx+c=0, a\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 = \frac{c}{a} \\ x_1+x_2 = -\frac{b}{a} \end{cases}$

работает в 2 стороны!!!

$\boxed{\Rightarrow}$ Из следствия основной теоремы алгебры

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2 - a(x_1+x_2)x + ax_1x_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = ax_1x_2 \\ b = -a(x_1+x_2) \end{cases}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Рассмотрим $P(x) = ax^2+bx+c$, где $c = ax_1x_2$, $b = -a(x_1+x_2)$ и покажем, что $P(x_1) = P(x_2) = 0$

$$P(x_1) = ax_1^2 - a(x_1+x_2)x_1 + ax_1x_2 = 0$$

Аналогично $P(x_2) = 0$

■

Следствие(!!!):

1) Если в ур-ии $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ $a+b+c=0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$

2) Если в ур-ии $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ $a-b+c=0$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$

Пример 2: $23x^2+19x-42=0$ – попробуйте посчитать D и $\sqrt{D}$:)

Пример 3. Не вычисляя корней ур-я $2x^2-7x-6=0$ найти: а) $x_1^4x_2+x_2^4x_1$; б) $|x_1-x_2|$

а) $x_1x_2(x_1^3+x_2^3)=x_1x_2(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=$

$=x_1x_2(x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2)=\dots=-\frac{1785}{8}$

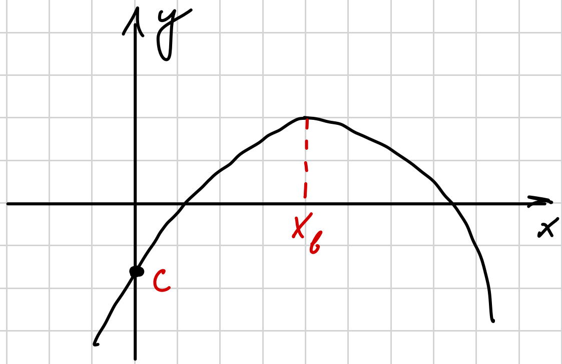
Т. Виетта

б) $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{x_1^2+x_2^2-2x_1x_2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=$

$=\frac{\sqrt{97}}{2}$ ← Еще больше задач на Т. Виета ест в конспектах 8 класса "квадратные ур-я"

Порешаем задачи

$\boxed{№1}$ По виду графика ax^2+bx+c определите знаки a,b,c



1) Ветви вниз $\Rightarrow a<0$

2) $c=y(0)$ – пересечение с осью Оу $\Rightarrow c<0$

3) $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}$

$\Rightarrow$ координата вершины $x_в = -\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow b > 0$

$a < 0$

$\boxed{№2}$ Решить уравнение с параметром

а) $ax^2 + 1 = 0$

б) $(a-5)x^2 - 2ax + a - 4 = 0$

1) Решить ур-е с параметром значит при всех значениях параметра а определить корни

а) $ax^2 = -1$

1) Если $a = 0$: $0 = -1 \Rightarrow$ нет корней

2) Если $a \neq 0$: $x^2 = -\frac{1}{a}$

2.1) Если $a > 0$: $\left(-\frac{1}{a}\right) < 0 \Rightarrow$ нет корней

2.2.) Если $a < 0$: $x = \pm\sqrt{-\frac{1}{a}}$

Ответ: 1) Если $a \geqslant 0$ - корней нет

2) Если $a < 0$: $x = \pm\sqrt{-\frac{1}{a}}$

б) 1) Если $a = 5$, то это не кв. ур.:

$-10x + 1 = 0$

$x = \frac{1}{10}$

2) Если $a \neq 5$:

$$D_1 = \frac{D}{4} = a^2 - (a-5)(a-4) = 9a - 20$$

2.1) Если $D_1 < 0 \Leftrightarrow a < \frac{20}{9}$ – нет корней

2.2) Если $D_1 \geq 0$:

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{9a-20}}{a-5}$$

Ответ: 1) Если $a = 5$: $x = \frac{1}{10}$

2) Если $a < \frac{20}{9} \Rightarrow$ нет корней

3) Если $a \geq \frac{20}{9}$, $x \neq 5$: $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{9a-20}}{a-5}$