$+ \quad \times$

$- \quad \div$

§2. Задачи с параметром

Параметр – коэффициент, заданный буквой, в ур-ии или неравенстве, который может принимать различные числовые значения. В зависимости от значений параметра могут изменяться решения уравнения или системы, а также их количество

Что значит решить задачу с параметром? (!!!!)

- Найти все решения ур-я/неравенства при всех значениях параметра

Ответ должен выглядеть так:

При $a = \ldots$: $x = \ldots$

При $a = \ldots$: нет решений

и т.д

Перейдем к примерам: Для каждого значения a решите

1. $ax = 1$

При $a \neq 0$: $x = \frac{1}{a}$

$a = 0$: $0 = 1$ – решений нет

Ответ: При $a = 0$: решений нет

При $a \neq 0$: $x = 1/a$

2. $|x+1| = a+3$

1-й способ: Аналитический (для нахождения корней)

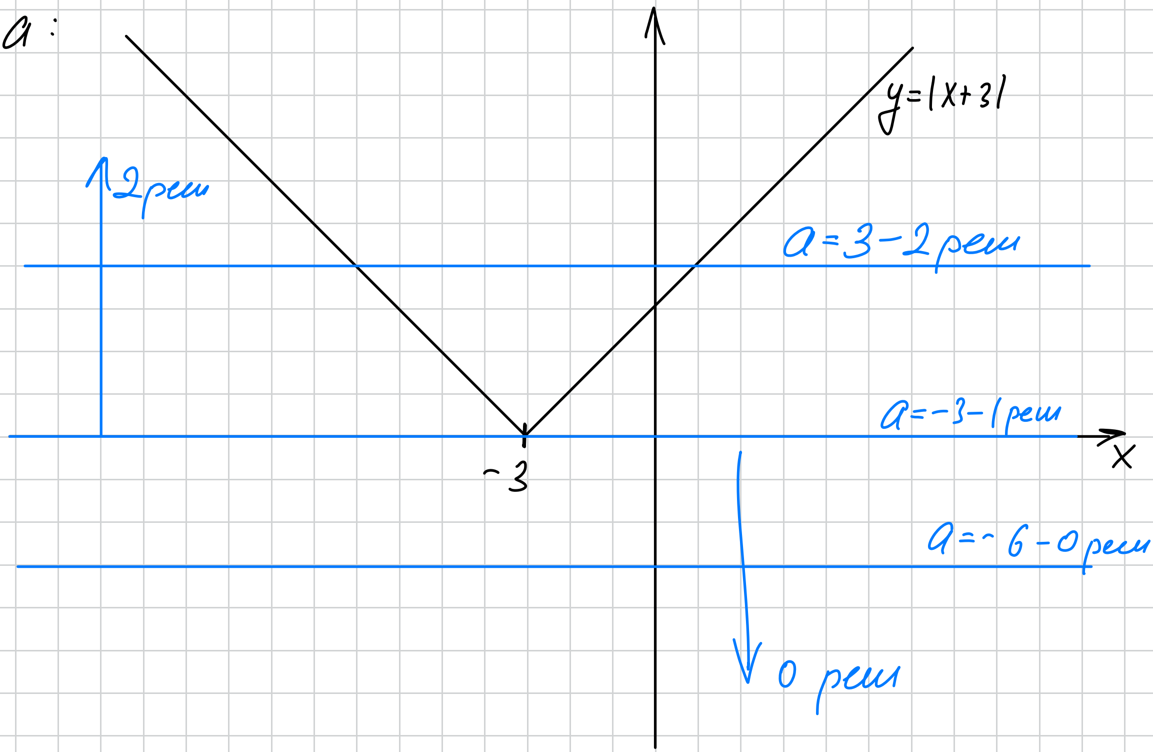
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+3 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x+1 = a+3 \\ x+1 = -a-3 \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq -3 \\ \left[\begin{array}{l} x = a+2 \\ x = -a-4 \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: При $a \geq -3$: $x = a+2$ или $x = -a-4$

При $a < -3$: решений нет

2-й способ: Графический (для нахождения кол-ва корней)

Нарисуем графики левой и правой части для различных a:



3. $|2x-1| \geq a-5$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1 \geq a-5 \\ 2x-1 \leq -a+5 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x \geq \frac{a}{2}-2 \\ x \leq -\frac{a}{2}+3 \end{array}\right.$$

1) Если $\frac{a}{2}-2 \leq -\frac{a}{2}+3 \Leftrightarrow a \leq 5 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

2) Если $\frac{a}{2}-2 > -\frac{a}{2}+3 \Leftrightarrow a > 5 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{a}{2}+3\right] \cup \left[\frac{a}{2}-2, +\infty\right)$

4. Найдите все значения l, при которых неравенство $lx^2-2(l-6)x+3(l-2)<0$ – верно для всех x.

1) При $l=0$ – это линейное нер-во

$12x-6<0$ – верно только для $x<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $l=0$ не подх

2) При $l\neq 0$ – квадратное нер-во: <0 $\forall x \Leftrightarrow$ старший коэф <0 и нет корней:

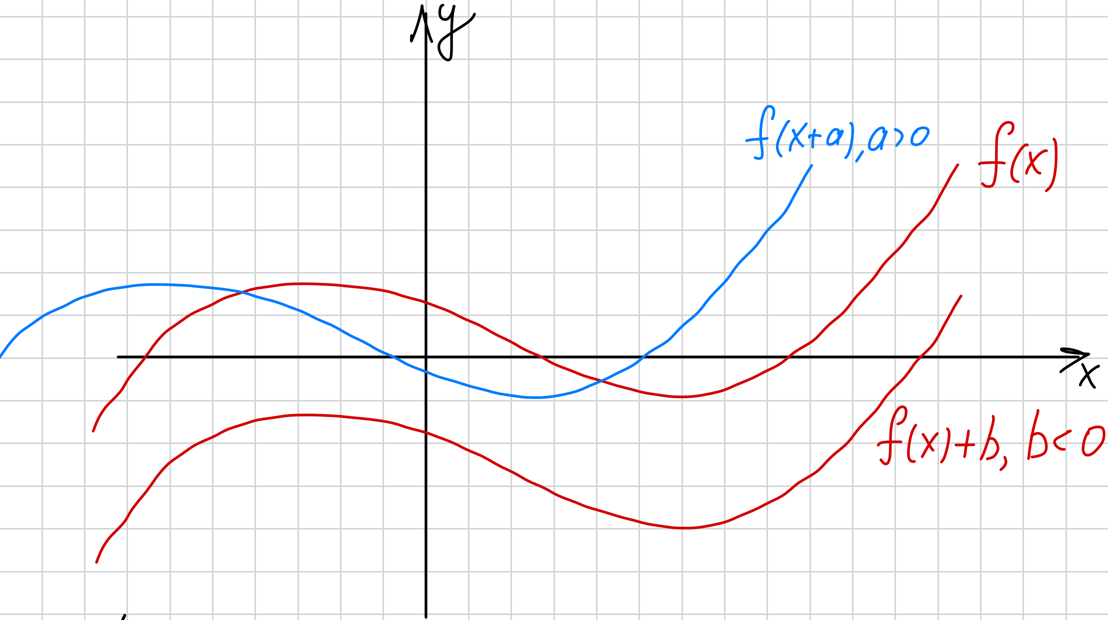
$$\begin{cases} l<0 \\ \frac{D}{4}= l^2-12l+36-3l^2+6l<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} l<0 \\ (-2l+6)(l+6)<0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow l<-6$

Ответ: $l<-6$

§3. Графики функций

I. Основные преобразование графиков



1. Параллельный перенос вдоль Ox:

$$y = f(x+a)$$

Если $a>0$ – влево на a

$a<0$ – вправо на a

2. Параллельный перенос отн. ОУ

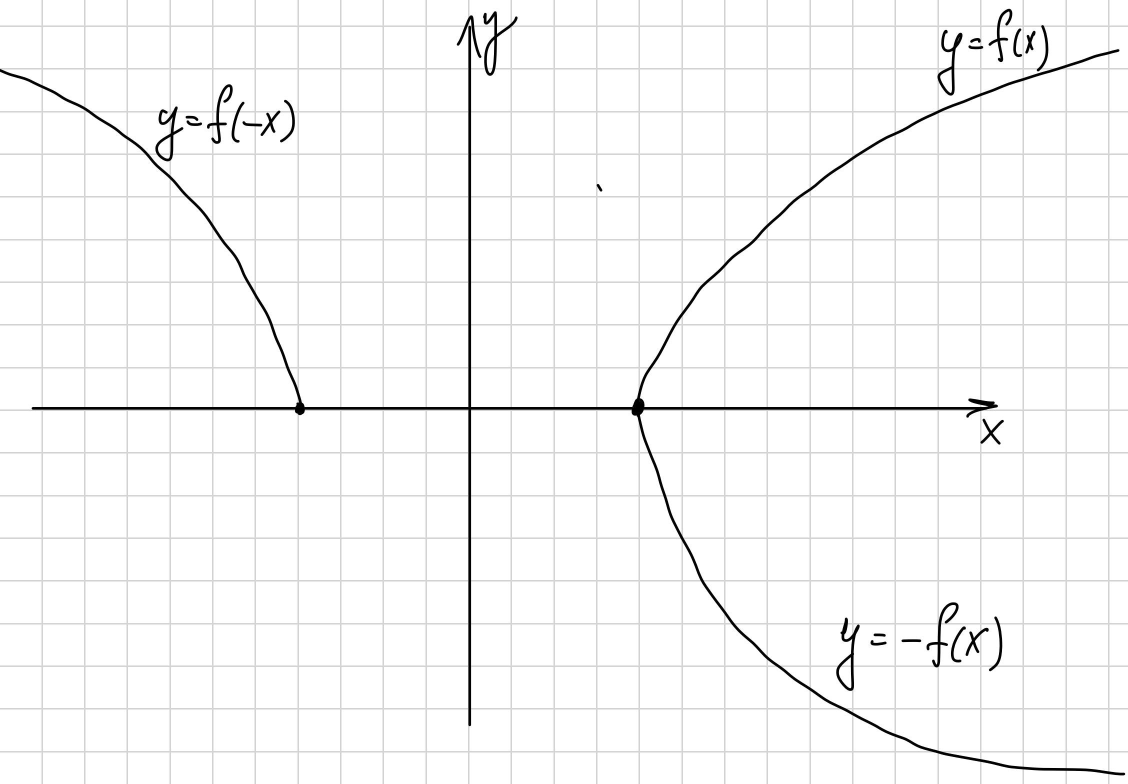
$$y = f(x) + b$$

Если $b > 0$ – вверх на b

$b < 0$ - вниз на b

3. Симметрия относительно ОУ

График $y=f(-x)$ получается из графика $y=f(x)$ с помощью симметрии отн. оси ОУ



4. Симметрия относительно Ox

График $y=-f(x)$ получается из графика $y=f(x)$ с помощью симметрии отн. оси Ox

<u>Замечание:</u> 1) Если $f(x)=f(-x)$, то график ф-ции $y=f(x)$ симметричен отн. Oy (пример $y=x^2$)

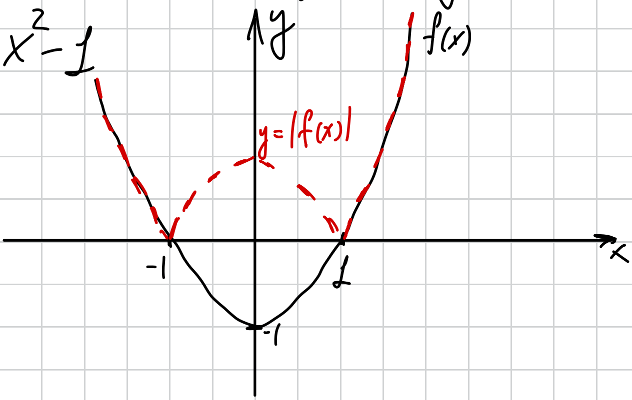
показать на графике

2) Если $f(-x)=-f(x)$, то график ф-ции $y=f(x)$ симметричен отн точки $(0,0)$ (пример $y=x, x^3$)

5. Графики $y=|f(x)|$ и $y=f(|x|)$ (!)

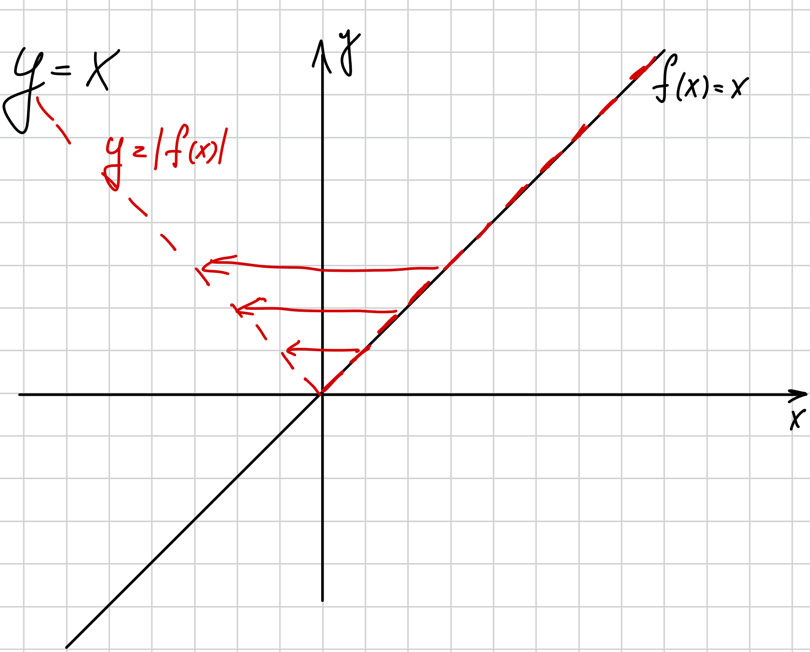
1) Чтобы построить график ф-ции $y=|f(x)|$, то строим $y=f(x)$, а затем оставить на месте ту часть, где $f(x)\geq 0$ и симметрично отразить ту часть, где $f(x)<0$

<u>Пример:</u> $f(x)=x^2-1$



2) Чтобы построить график ф-ции $y = f(|x|)$, то строим $y = f(x)$, а затем нужно остовить ту часть, где $x > 0$ и симметрично отобразить ее симм. отн. OY

Пример: $y = x$

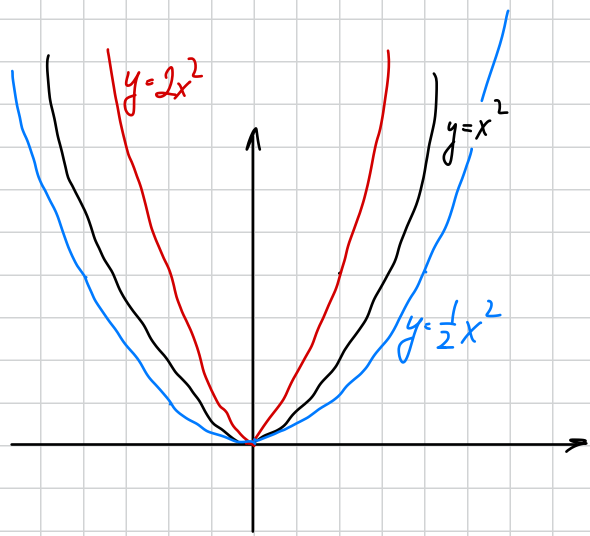


6. Сжатие/растяжение

$$y = f(kx)$$

$k > 1$ – сжатие

$0 < k < 1$ – растяжение

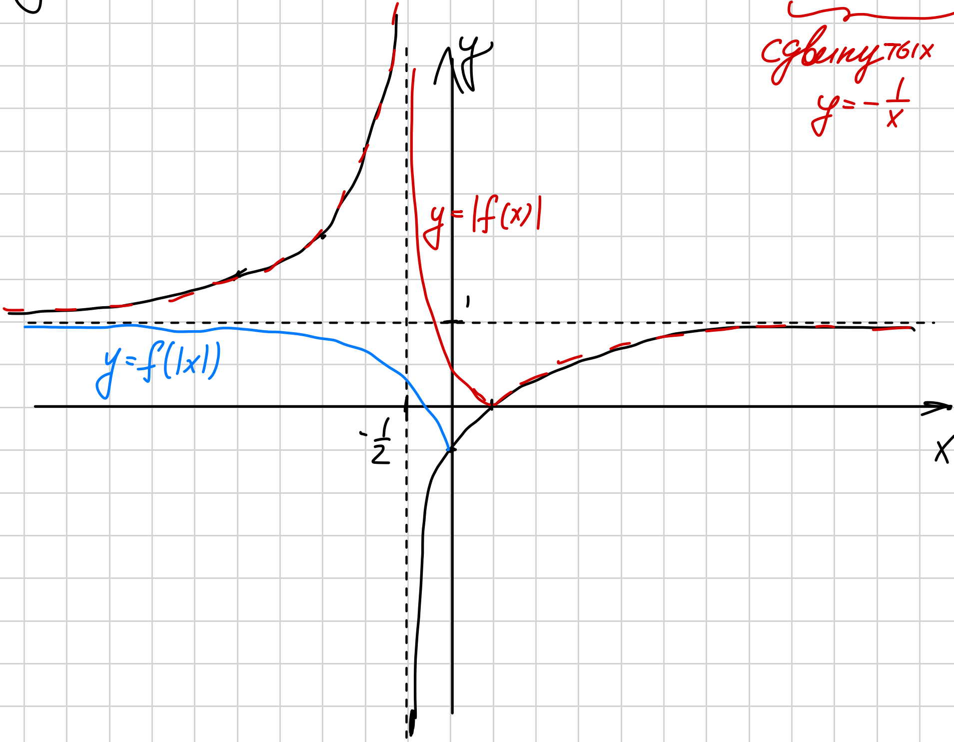


Перейдем к решению задач

1. Постройте график ф-ции $y=\frac{2x-1}{2x+1}$

$$y=\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{2x+1-2}{2x+1}=1-\frac{2}{2x+1}=1-\underbrace{\frac{1}{x+\frac{1}{2}}}$$

сдвинутых график $y=-\frac{1}{x}$



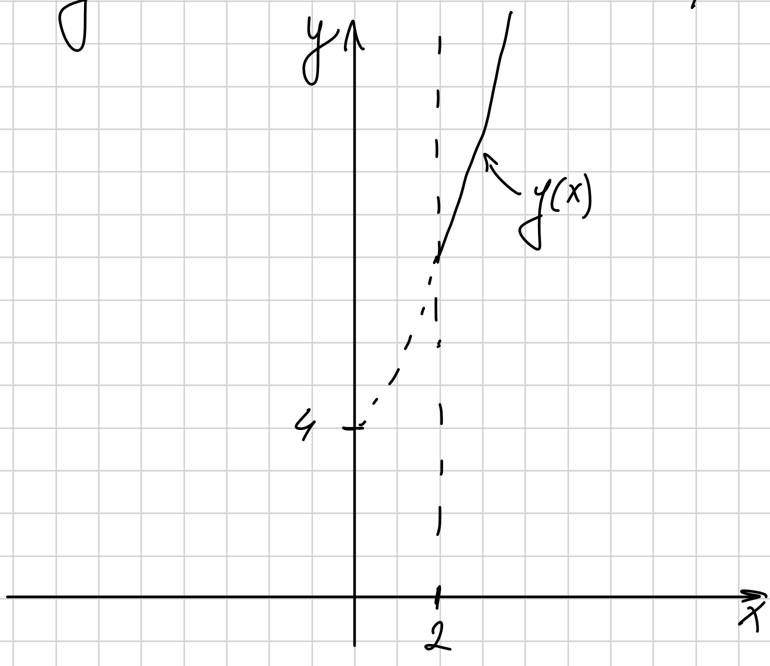
2. а) $y = x^2 - 2x - (\sqrt{2x-4})^2$

б) $y = |-x^2 + 6x - 8|$

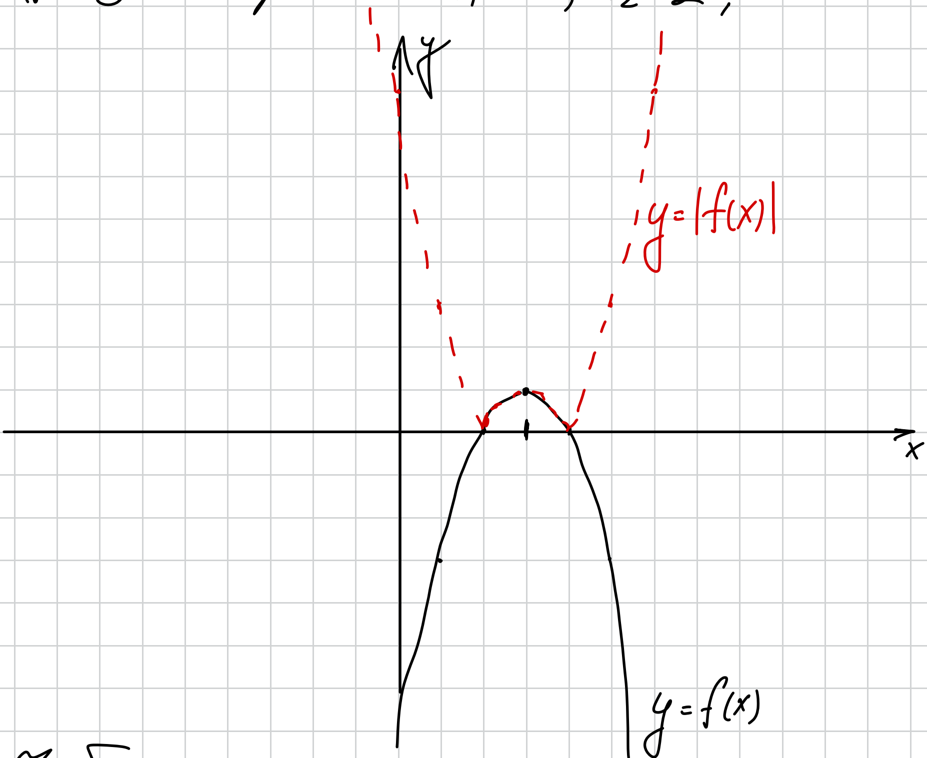
а) $y(x)$ – определена $\Leftrightarrow 2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

При $x \geq 2$:

$y = x^2 - 2x - 2x + 4 = x^2 + 4$ – парабола, "поднятая" на 4



б) Рассмотрим $f(x) = -x^2+6x-8$ – парабола с вершиной $x_0 = 3$ и корнями $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, ветви вниз



Чтобы нарисовать $y=|f(x)|$ нужно отразить отн Ox, ту часть, где $f(x)<0$

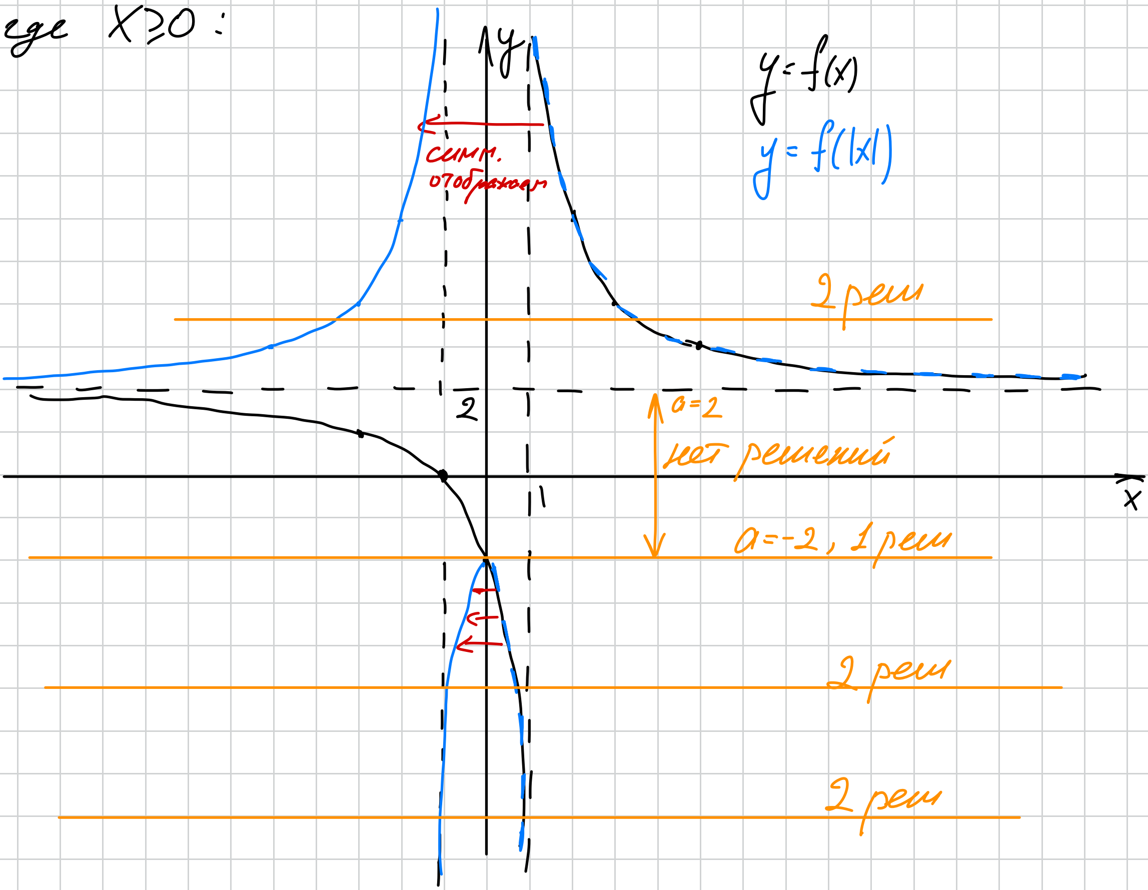
Постройте график функции $y = \frac{2|x|+2}{|x|-1}$ и определите, при каких значениях параметра a уравнение $\frac{2|x|+2}{|x|-1} = a$ не имеет корней.

1) Построим график $y = f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$

$$f(x) = \frac{2x-2+4}{x-1} = \underbrace{2 + \frac{4}{x-1}}_{\text{сдвинутая + сжатая гипербола}}$$

2) Заметим, что график из условия есть $f(|x|)$ =>

=> нужно будет симметрично отобразить отн. OY область, где $X \geq 0$:



Ответ: $a \in (-2, 2]$

Постройте график функции $y = |||x| - 2| - 1| - 1$ и определите, при каких значениях параметра b уравнение $y = |||x| - 2| - 1| - 1 = b$ имеет наибольшее число корней.

1) Будем идти от меньшего к большему

$y_1 = |x| - 2$ – модуль, смещенный вниз на 2

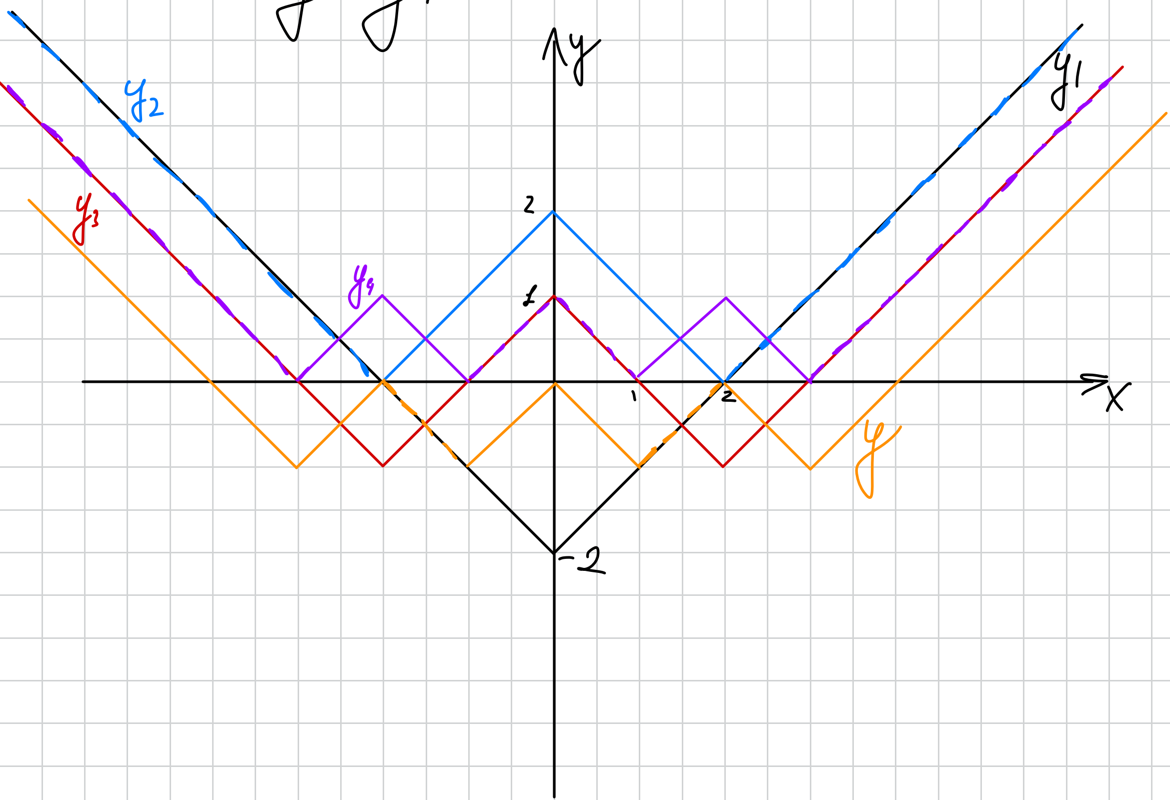
$y_2 = ||x| - 2| = |y_1|$

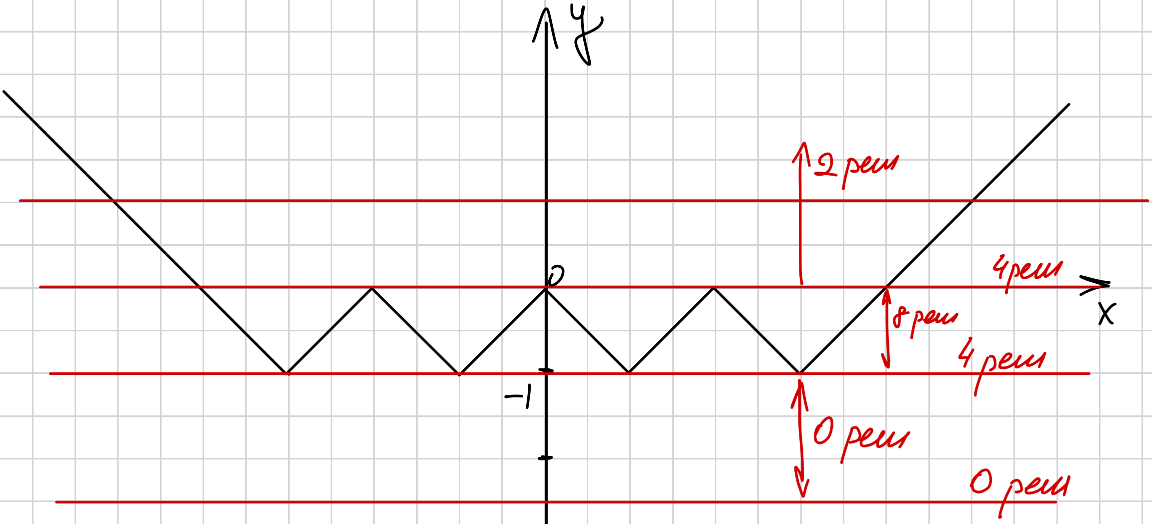
$y_3 = y_2 - 1$

$y_4 = |y_3|$

$y = y_4 - 1$

пошагово рисуем





$\Rightarrow b \in (-1, 0)$