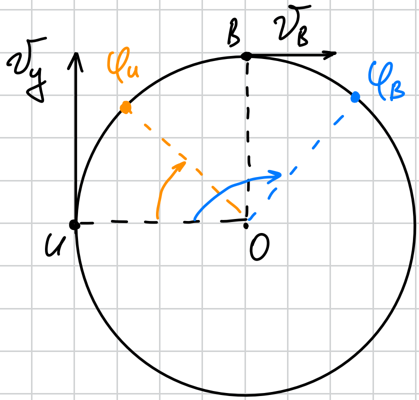
+ ×

− ÷

№ 1

Бегуны Усейн и Василий бегут по кругу с центром в точке O и радиусом 100 м, стартуя из разных точек U и B. Известно, что угол UOB = 90. Петя бежит со скоростью 5 м/с , а Усейн 10 м/с. Через какое время произойдет их вторая встреча, если они бегут в одну сторону? Если они бегут в разные стороны?



1) Давайте от UO - отсчитывать угол

$$!\ \varphi = \varphi_0 + \omega t\ !$$

$$\varphi_u = 0 + \omega_u t = \frac{v_y}{R} t$$

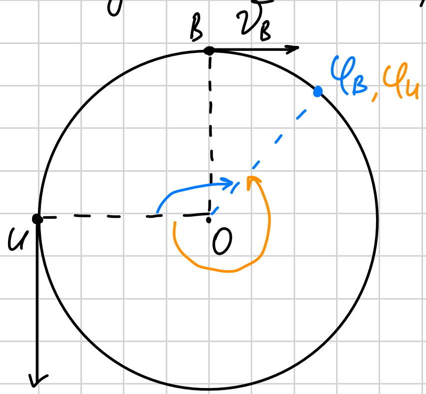
$$\varphi_B = \frac{\pi}{2} + \omega_B t = \frac{v_B}{R} t$$

2) Условие второй встречи

$$\varphi_u = \varphi_B + 2\pi \quad \text{(Усейн пробежал больше Васи)}$$

$$t_2 = \frac{5\pi/2}{\omega_u - \omega_B}$$ разность!

3) Если движение навстречу



$$\varphi_u = -\omega_u t < 0!$$

$$\varphi_B = \frac{\pi}{2} + \omega_B t$$

$$\Rightarrow \varphi_B - \varphi_u = 2\pi \text{ — первая встреча}$$

$$t_1 = \frac{3\pi/2}{\omega_В + \omega_И}$$

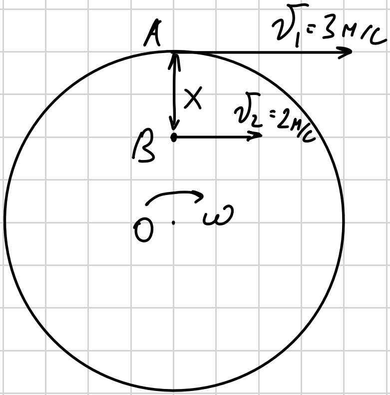
сумме!

Вторая встреча:

$$\varphi_В - \varphi_И = 4\pi$$

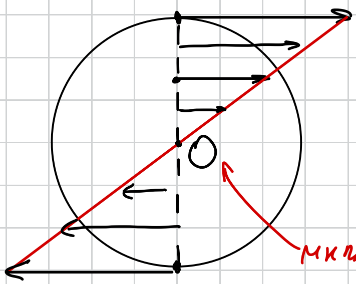
№2

Линейная скорость обода вращающегося диска 3 м/с, а точек находящихся на расстоянии 10 см ближе к оси вращения 2 м/с. Найти частоту вращения диска



$$1)\ \begin{cases} v_1 = \omega R \\ v_2 = \omega(R - x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = \dfrac{v_1 - v_2}{x} \\ R = \dots \end{cases}$$

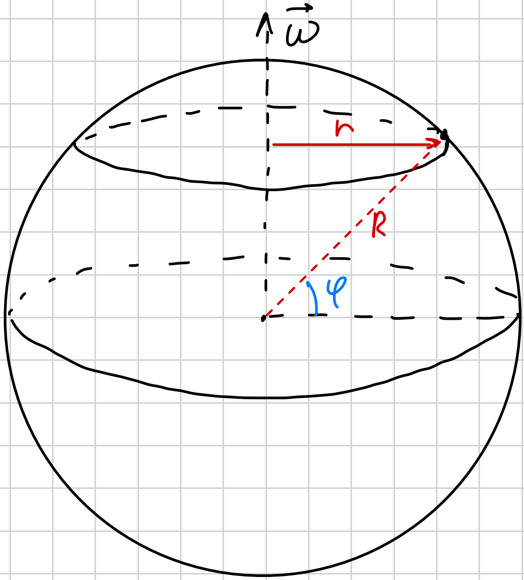
<u>Важно</u>: Рассмотрим распределение скоростей точек колеса



(качение без проск?)

мгновенный центр вращения

Пример 3. Найдите скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ точек земной поверхности на широте $\varphi = 60^\circ$, обусловленные участием в суточном вращении Земли. Радиус Земли $R = 6400$ км.



$$v = \omega r = \frac{2\pi}{T} r = \frac{2\pi R \cos\varphi}{T}$$

$$v \approx 230 \text{ м/с}$$

$$a = \omega^2 r \approx 0{,}017 \text{ м/с}^2$$

§2. Динамика движения по окружности

Основным ур-ем динамики является 2-й з-н Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots \quad (*)$$

При движении по окр-ти $\vec{a}$ направлено радиально к центру $\Rightarrow$ спроецируем 2-й з-н Ньютона на эту ось:

$$ma_n = m\frac{v^2}{R} = F_{1n} + F_{2n} + \dots \quad (1)$$

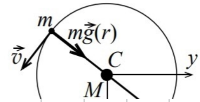
Если движение происходит в пл-ти XoY, то $a_z = 0$, тогда:

$$0 = F_{1z} + F_{2z} + \dots \quad (2)$$

$\Rightarrow$ Решение задач сводится к записи $(*)$ и его проекции (зачастую удобно записать (1), (2)) и решении системы ур-й.

Пример 6. Некоторые планеты (Венера, Земля, Нептун) движутся вокруг Солнца по орбитам «близким» к круговым.

Докажите, что для таких планет квадраты периодов обращения относятся как кубы радиусов орбит.



Вычислите массу M Солнца, считая радиус земной орбиты равным $R = 150$ млн км.

1) Для Земли запишем второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g}(\vec{r})$$

Спроецируем на радиальное напр-е:

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}$$

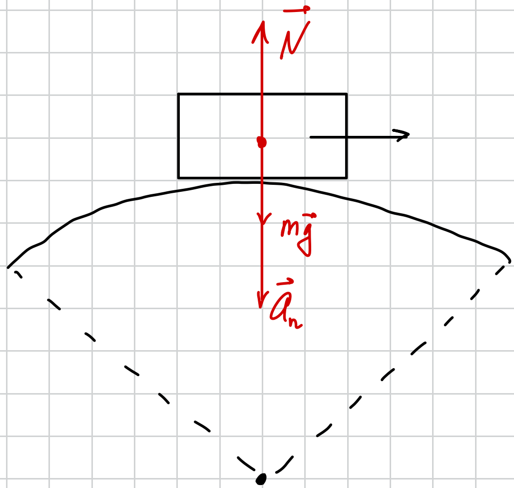
$$m\frac{\omega^2 R^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}$$

$$m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = G\frac{mM}{R^2}$$

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$ — 3-й Закон Кеплера (а есть еще 2?)

$$M_{\text{солнца}} = \frac{4\pi^2}{G}\frac{r^3}{T^2} \simeq 2\cdot 10^{30}\ \text{кг}$$

Пример 13. Определите радиус R горбатого мостика, имеющего вид дуги окружности, если известно, что при скорости $v = 90\,км/ч$ вес автомобиля в верхней точке мостика вдвое меньше веса на горизонтальной дороге. Ускорение свободного падения $g = 10\,м/с^2$.



1) Вес - это сила с которой тело давит на опору:

$$\vec{P} = -\vec{N}$$

2) На ровной пов-ти

$$|P| = mg$$

$(P = -mg$, т.к. это проекция$)$

3) При движении по дуге:

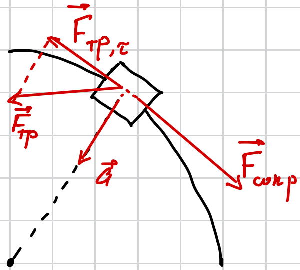
$$m\frac{v^2}{R} = -N + mg$$

$$N = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right)$$

$$P = -N = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right) = \frac{mg}{2}$$

$$R = \frac{2v^2}{g} = 125\,м$$

Пример 7. Автомобиль движется в горизонтальной плоскости с постоянной по модулю скоростью по закруглению дороги – дуге окружности радиуса $R = 200$ м. Коэффициент трения скольжения шин по дороге $\mu = 0{,}1$. При какой скорости v автомобиля его не будет «заносить»? Ускорение свободного падения $g = 10\,\text{м}/\text{с}^2$.



1) На автомобиль действуют силы:

$F_{сопр}$ – сила сопротивления (воздуха и т.д.)

$F_{тр}$ – то, за счет чего движется автомобиль

2) Заметим, что $R = const \Rightarrow F_{тр,\tau} = F_{сопр}$

3) $F_{тр,n}$ – обеспечивает центростремительное ускорение.

"Занос" начнется, если в радиальном направлении появится движение $\Rightarrow$ т.е. когда $F_{тр,n} = \mu mg$, тогда условие заноса:

$$m\frac{v^2}{R} = F_{тр,n} \leq \mu mg$$

$$v \leq \sqrt{\mu g R} \approx 14\ м/с$$

Пример 8. Автомобиль, трогаясь с места, равномерно набирает скорость, двигаясь по горизонтальному участку дороги, представляющему собой дугу в $1/12$ окружности радиуса $R = 100$ м. С какой наибольшей по величине v скоростью автомобиль может выехать на прямолинейный участок дороги, если коэффициент трения скольжения шин по дорожному покрытию $\mu = 0,3$? Ускорение свободного падения $g = 10$ м / с^2. Силу сопротивления считайте пренебрежимо малой.

1) $|F_{сопр}| << |F_{тр}|$ => на машину действует лишь сила трения => $ma_{полн} = F_{тр} = \mu mg$ => нужно найти $a_{полн}$

2)
$$a_{полн} = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

3) Путь, который проезжает автомобиль

С одной стороны: $l = \frac{1}{12} \cdot 2\pi R = \frac{\pi}{6} R$

С другой: $l = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{v^2}{2a_\tau}$

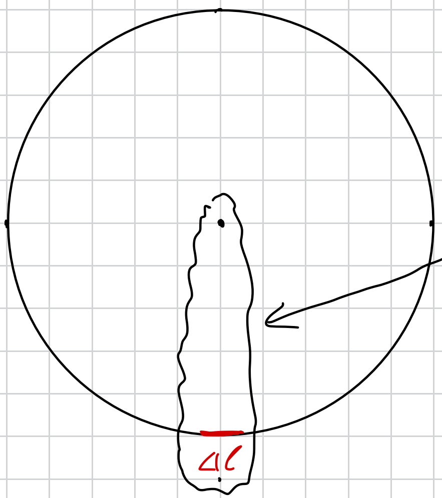
$$\Rightarrow a_\tau = \frac{3v^2}{\pi R}$$

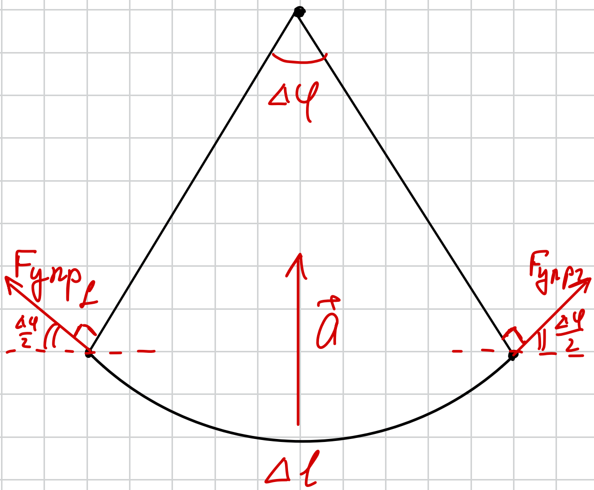
4) При этом
$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

Тогда
$$a_{полн} = \frac{v^2}{R}\sqrt{1 + \frac{9}{\pi^2}} = \mu g$$

$$v = \frac{\sqrt{\mu g R}}{\left(1 + \frac{9}{\pi^2}\right)^{1/4}} \simeq 15 \text{ м/с}$$

Пример 10. Кольцо, изготовленное из однородного резинового жгута длиной L, массой M и жёсткостью k, вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца, с угловой скоростью ω. Найдите радиус R вращающегося кольца.





$$|F_{упр_1}| = |F_{упр_2}| = |F_{упр}|$$

1) Рассмотрим маленький кусочек Δl, на который опирается малый угол $\Delta\varphi$: его масса: $\Delta m = \frac{M}{2\pi R}\cdot\Delta l$, при этом он вращается и на него симм. действуют силы упругости.

Из симметрии (или напр-я a_n) следует, что горизонтальные проекции $F_{упр}$ друг друга компенсируют $\Rightarrow$ 2-й з-н Ньютона, спроецированный на радиальное (верт. напр-е):

$$\Delta m\,\omega^2 R = 2F_{упр}\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \approx F_{упр}\Delta\varphi$$

$$\frac{M}{2\pi R}\cdot\Delta l\cdot\omega^2 R = F_{упр}\Delta\varphi$$

$$\frac{M}{2\pi R}\,R\Delta\cancel{\varphi}\cdot\omega^2 R = \underbrace{F_{упр}}_{\text{сила упругости, действ на выбранный кусочек}}\Delta\cancel{\varphi} \quad (*)$$

2) Найдем $F_{упр}$, которая действует на каждый кусочек. Для этого разобьем кольцо на n фрагментов:

Для каждого:

$$F_{упр} = k'(\Delta X_i - \Delta X_{i_0}) \quad (**)$$

k' — жесткость каждого участка

ΔX_{i_0} — начальная длина: $\Delta X_{i_0} = \frac{2\pi L}{n}$

Причем участки соединены последовательно и их общая жесткость k =>

$$\Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \ldots + \frac{1}{k_n} = \frac{n}{k'} \Rightarrow k' = nk$$

Сложим (**) по всем n-фрагментам:

$$nF_{упр} = nk\left(2\pi R - n\cdot\frac{2\pi L}{n}\right)$$

$$F_{упр} = k(2\pi R - 2\pi L)$$

3) Тогда, вернемся к (*):

$$\frac{M}{2\pi}\omega^2 R = k(2\pi R - 2\pi L)$$

$$R = \frac{2\pi k L}{4\pi^2 k - \omega^2 M}$$