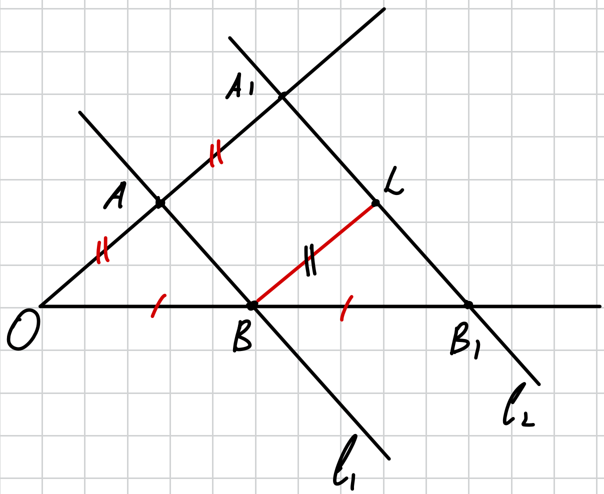
+ ×

− ÷

§4. Задача о делении отрезка

Т1 (Фалеса)

Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой стороне угла



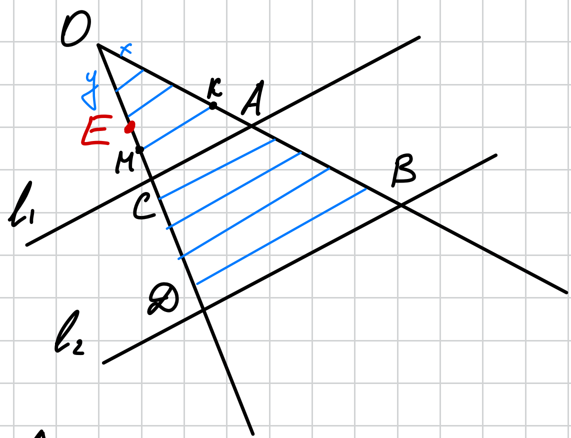
Если $l_1 \parallel l_2$ и $OB = BB_1$, то $OA = AA_1$.

Идея док-ва: проводим $BL \parallel AA_1 \Rightarrow BL = AA_1$

$\triangle OAB = \triangle BLB_1 \Rightarrow OA = BL \Rightarrow OA = AA_1$

■

Т 2 Параллельные прямые пересекая стороны угла, отсекают на них пропорциональные отрезки.



$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \quad (1)$$

$\left(\frac{AB}{CD} \overset{?}{=} \right.$ – верно ли это? $\left.\right)$

△

1) Предположим, что (1) – не выполняется (док-во от противного)

2) Пусть $\frac{OA}{OB} < \frac{OC}{OD}$, , то есть

3) Тогда отложим на луче OD отрезок $OE = \frac{OA \cdot OD}{OB}$

тогда E – лежит м/у точками O и

4) Разобьем отрезок OD на $n (\in N)$ равных отрезков,

пусть длина одного отрезка $y \Rightarrow OD = ny$

5) Проведем через концы этих равных отрезков проведем

прямые ∥ BD. По Т. Фалеса они разобьют отрезок OB

на n равных отрезков (длина x) $\Rightarrow OB = nx$

6) При достаточно большом n: $\exists M$: лежит м/у E и C и $OM = my$. Соотв. прямая пересекает OB в точке K: $OK = mx$, тогда

$$\frac{OM}{OD} = \frac{my}{ny} = \frac{m}{n} = \frac{mx}{nx} = \frac{OK}{OB}$$

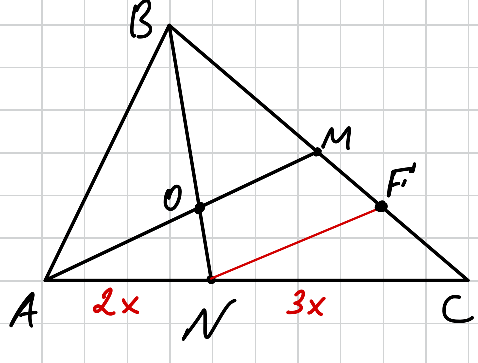
7) Т.к. $OE < OM$ и $OK < OA$, то:

$$\frac{OE}{OD} < \frac{OM}{OD} = \frac{OK}{OB} < \frac{OA}{OB}$$

$$\Rightarrow OE < \frac{OA \cdot OD}{OB}$$ – противоречие!!!

■

Пример 11. Точка N лежит на стороне AC : $\triangle ABC$, причем $AN:NC = 2:3$. Найти, в каком отношении медиана AM делит отрезок BN.



1) Проведем $NF \parallel AM$: по ТП2:

$$\frac{FC}{FM} = \frac{CN}{NA} = \frac{3}{2}$$

2) Аналогично по ТП2: $\frac{BO}{ON} = \frac{BM}{MF} =$

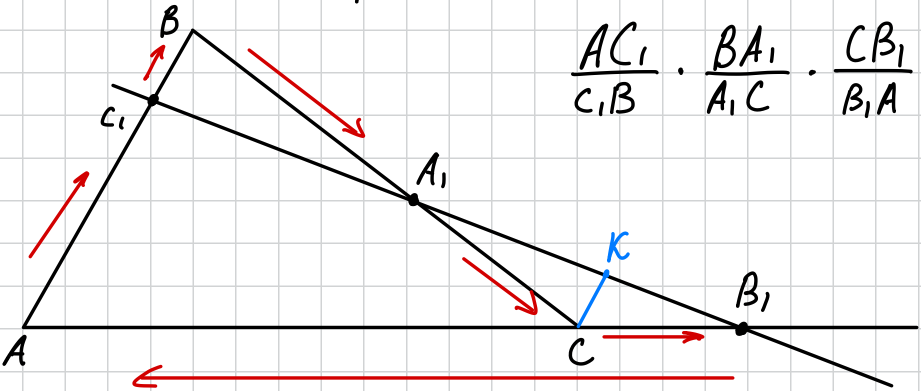
$CM = BM$

$$= \frac{BM}{\frac{2}{5}BM} = \frac{5}{2}$$

№3 (Менелая)

Пусть в $\triangle ABC$ точка A_1 лежит на стороне BC, точка C_1 – на стороне AB, а точка B_1 – на продолжении стороны AC за точку C.

Тогда точки A_1, B_1, C_1 - лежат на одной прямой $\Leftrightarrow$ выполняется равенство:



$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1 \quad (*)$$

$\triangle$

$\boxed{\Rightarrow}$ 1) Проведем $CK \parallel AB$: $\triangle CKB_1 \sim \triangle AC_1B_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{CK}{AC_1}=\frac{CB_1}{AB_1} \Rightarrow CK=\frac{CB_1}{AB_1}AC_1$$

2) $\triangle CKA_1 \sim \triangle BC_1A_1 \Rightarrow \dfrac{CK}{BC_1}=\dfrac{CA_1}{BA_1}$ $\Rightarrow (*)$

$\boxed{\Leftarrow}$ 1) Проведем прямую через точки A_1 и B_1, пусть C_2 - точка пересечения с прямой AB.

Покажем, что C_2 совпадает с точкой C_1

2) A_1, B_1, C_2 – лежат на одной прямой, тогда по доказанному ранее:

$$\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

Сравнив это равенство с (*) получим, что:

$\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{AC_1}{C_1B}$, то есть точки C_2 и C_1 лежат на AB и делят его в одном отношении $\Rightarrow C_2 \equiv C_1$

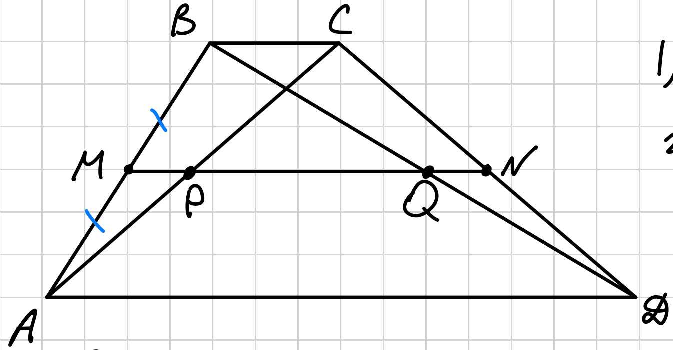
$\blacksquare$

Упражнение: Решите Пример 11 с помощью Т. Менелая

§5. Трапеция

Свойство 1°: Во всякой трапеции середины боковых сторон и середины диагоналей лежат на 1-й прямой

△



1) Проведем $MN \parallel AD$, где M – середина AB

2) В $\triangle ABC$ по Т. Фалеса, т.к. $AM = MB \Rightarrow AP = PC$

3) $\triangle ABD$, Т. Фалеса $\Rightarrow BQ = QD$

4) $\triangle BCD$, Т. Фалеса $\Rightarrow CN = ND$

▨

Свойство 2°: Средняя линия трапеции равна полусумме оснований; Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен полуразности оснований

△

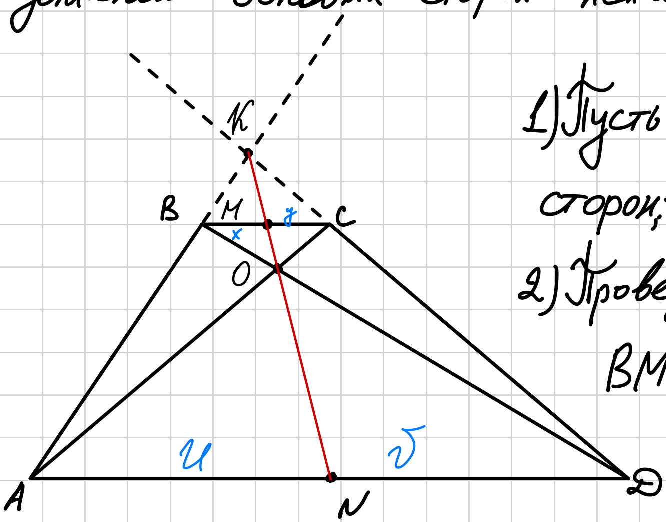
1) Из св-ва 1°: MQ – ср. линия $\triangle ABD \Rightarrow MQ = \frac{1}{2}AD$

2) Аналогично $NQ = \frac{1}{2}BC \Rightarrow MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$

3) $PQ = MN - MP - NQ = \frac{1}{2}(AD - BC)$

■

Свойство 3°: В любой трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на 1 прямой.



1) Пусть K – точка пересечения сторон; O – т-ка пересеч. диагоналей

2) Проведем KO и докажем, что $BM = MC$ и $AN = ND$

3) $\triangle BKM \sim \triangle AKN \Rightarrow \frac{BM}{AN} = \frac{KM}{KN}$
$\triangle MKC \sim \triangle NKD \Rightarrow \frac{MC}{ND} = \frac{KM}{KN}$
$\Rightarrow \frac{BM}{AN} = \frac{MC}{ND} = \frac{x}{u} = \frac{y}{v}$

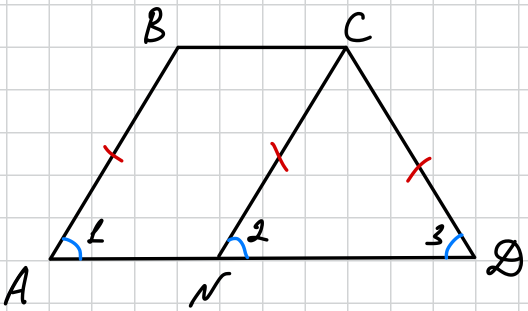
4) $\triangle BMO \sim \triangle DNO \Rightarrow \frac{BM}{ND} = \frac{MO}{NO}$
$\triangle CMO \sim \triangle ANO \Rightarrow \frac{MC}{AN} = \frac{MO}{NO}$
$\Rightarrow \frac{BM}{ND} = \frac{MC}{AN} = \frac{x}{v} = \frac{y}{u}$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{uv} = \frac{y^2}{uv} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ u = v \end{cases}$$

■

<u>Свойство 4°</u>: В равнобокой трапеции углы при основании равны.

△



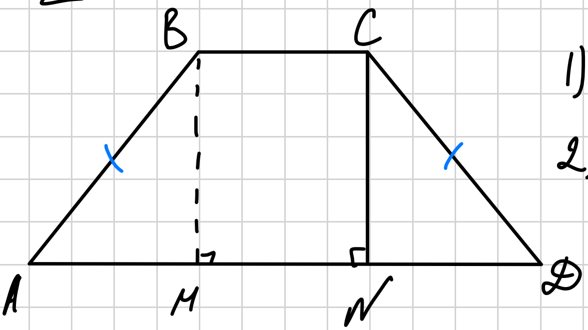
1) Проведем $CN \parallel AB \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$

2) $\triangle CND$ – р/б $\Rightarrow \angle 3 = \angle 2 = \angle 1$

■

Свойство 5°: В равнобокой трапеции высота, опущенная из конца меньшего основания на большее основание, делит его на два отрезка, один из которых равен полусумме оснований, другой — полуразности

△



1) $\triangle ABM = \triangle DCN \Rightarrow AM = ND$

2) $MBCN$ - прямоугольник $\Rightarrow$

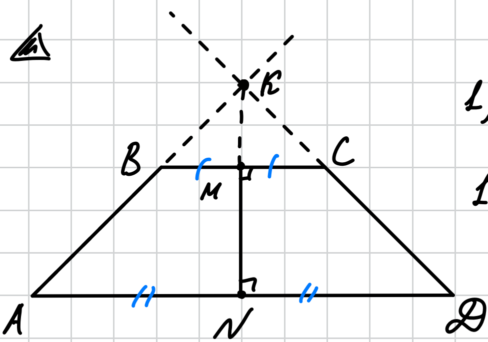
$\Rightarrow MN = BC \Rightarrow ND = \dfrac{AD - BC}{2}$

$$\Rightarrow AN = AD - ND = \frac{AD + BC}{2}$$

▥

Свойство 6°: В равнобокой трапеции прямая, проходящая через середины оснований, перпендикулярна основаниям и является осью симметрии

△



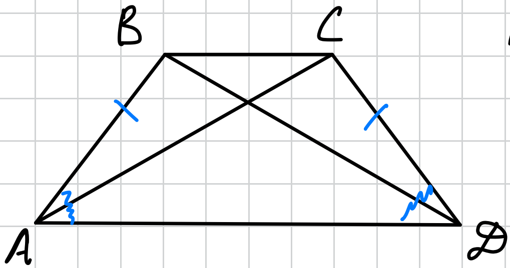
1) По св-ву 2°: K, M, N - лежат на 1 прямой

2) $\triangle AKD$ - р/б, KN - медиана $\Rightarrow$ высота

▥

Свойство 7°: В равнобокой трапеции диагонали равны

△



1) $\triangle ABD = \triangle DCA \Rightarrow AC = BD$

▨