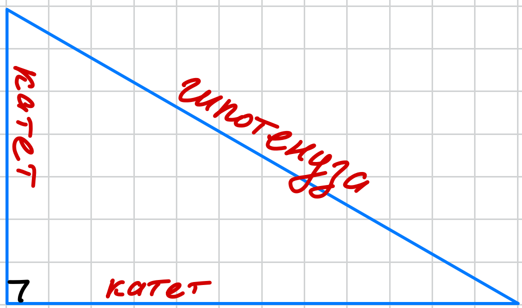
$+ \quad \times$

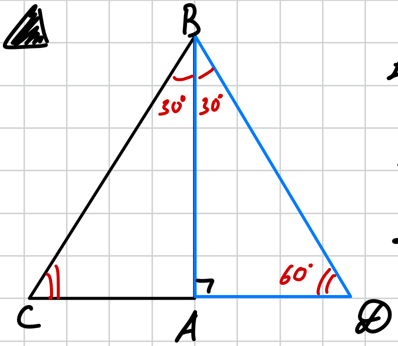
$- \quad \div$

# § 4. Прямоугольный Δ-к




**Т1** Катет прямоугольного Δ-ка, лежащий напротив угла 30°, равен половине гипотенузы

△



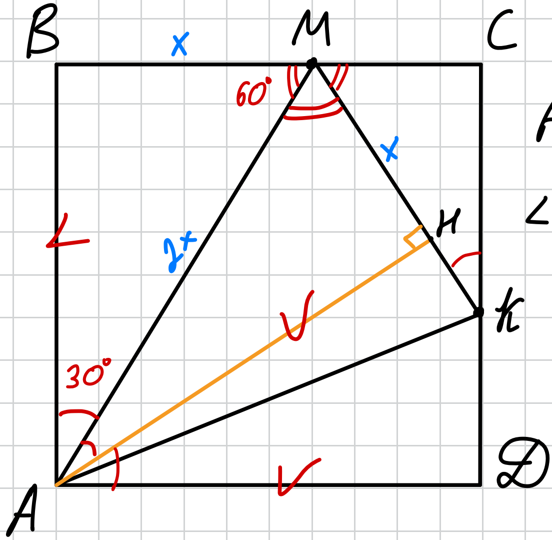

1) $\Delta DBC$ - правильный $\Rightarrow AB$ - высота, медиана, бис-са.

2) Тогда $AC = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} BC$

$AD = BC$

■

№1




$ABCD$ - квадрат

$\angle BAM = \angle MKC = 30^\circ$

$\angle AKD$ - ?

1) Рассмотрим $\triangle ABM$ - он прямоугольный - по $\boxed{\text{П1}}$

$BM = \frac{1}{2} AM = x$

2) $\angle AMK = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$

3) В $\triangle AMK$ проведем высоту $AH$: В $\triangle AMH$: $\angle AMK = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle MAH = 30^\circ \Rightarrow$ по $\boxed{\text{П1}}$ : $MH = x$

$\triangle AHK = \triangle AKD$

$\Downarrow$

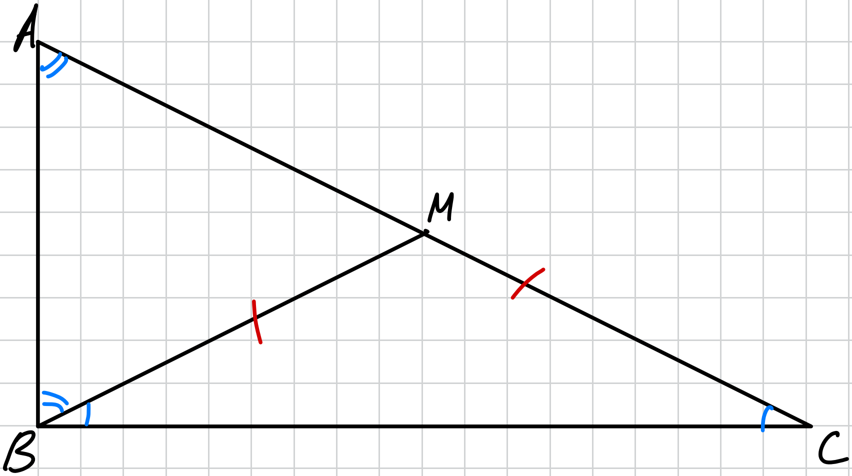
$\angle AKH = \angle AKD = \varphi$

$2\varphi = 150 \Rightarrow \varphi = 75^\circ$

**Т2** (Св-во медианы прямоуг. $\Delta$)

Медиана прямоугольного $\Delta$-ка, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы

▲




1) Проведем BM так, что $CM = BM \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta BMC$ - р/б $\Rightarrow \angle ACB = \angle MBC = \alpha$

2) Рассм $\Delta ABC$: $\angle BAC = 90 - \alpha$

3) $\angle ABM = \angle ABC - \alpha = 90 - \alpha$

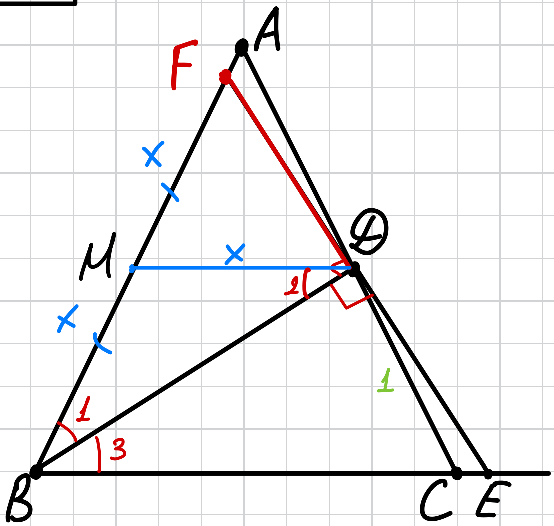
$\Rightarrow \Delta AMB$ - р/б

4) Тогда $AM = BM = MC \Rightarrow BM$ - медиана

■

№2

В равнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса к боковой стороне. На продолжении основания BC выбрана точка E, так что угол EDB — прямой. Найдите BE, если CD = 1




1) Заметим, что мы можем достроить DE до пересечения с AB $\Rightarrow \triangle BFE$ - равнобедренный $\Rightarrow$

$\Rightarrow EB = BF$

2) В $\triangle ADF$ проведем медиану к стороне BF: по св-ву медианы прямоугольного треугольника $MD = BM = FM = x$

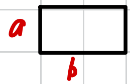
3) $\triangle BMD$ - р/б $\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$
По условию: $\angle 1 = \angle 3$
$\Rightarrow MD \parallel BE$

4) $\triangle ABC$ - р/б $\Rightarrow \angle ABC = \angle ACB \Rightarrow BMDC$ - равнобокая трапеция

$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow BE = BF = 2x = 2$

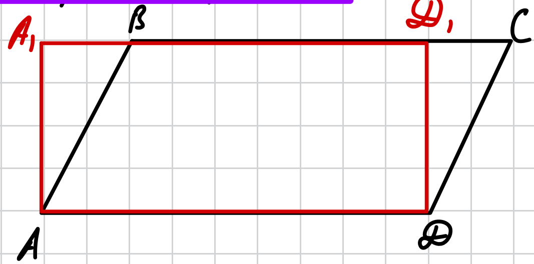
# §5. Подобные Δ-ки. Площади

## 1. Площадь прямоугольника:




$$S_{\square} = a \cdot b$$ – постулат

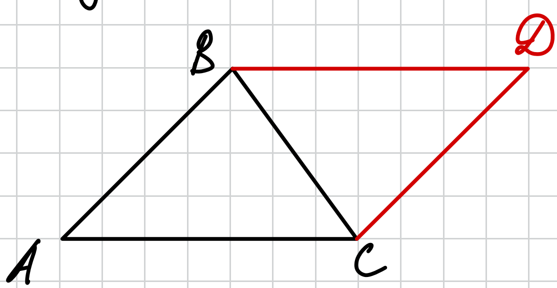
## 2. Площадь параллелограмма:




$$S_{AA_1DD_1} = S_{ABCD},$$ т.к. $\triangle AA_1B = \triangle DD_1C$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = a \cdot b = h_1 \cdot AD = h_2 \cdot AB$$

## 3. Площадь треугольника:



$$\left.\begin{array}{l} S_{ABCD} = h \cdot AC \\ \triangle ABC = \triangle BCD \end{array}\right| \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} h \cdot AC$$

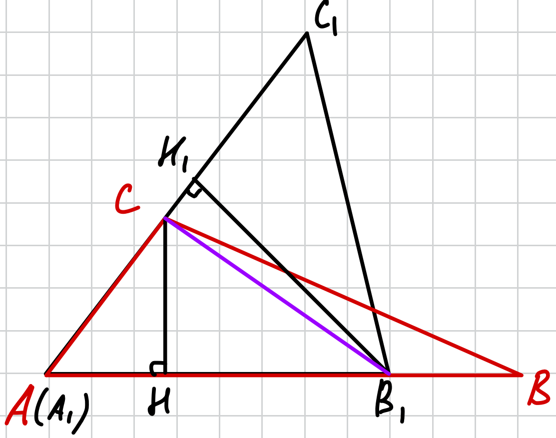
## Т 1

(Задача о площадях $\triangle$-ков, вписанных в 1 угол)

Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих эти углы

▲

1) $\angle A = \angle A_1$, Наложим $\triangle$-ки так, чтобы вершина $A_1$ совместилась с вершиной $A$, а стороны $A_1B_1$ и $A_1C_1$ наложились на стороны $AB$ и $AC$




2) $\triangle ABC$ и $\triangle AB_1C$ имеют общую высоту $CH$:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB_1C}} = \frac{AB}{AB_1}$$

3) $\triangle AB_1C$ и $\triangle AB_1C_1$ имеют общую высоту $B_1H_1$:

$$\frac{S_{AB_1C}}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AC}{AC_1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$$

$\blacksquare$

Опр 1: Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного $\Delta$-ка пропорциональны соотв. сторонам другого. Коэф-т пропорциональности есть коэф-т подобия

Обозначение: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

$\boxed{\text{Т2}}$ (Признаки подобия)

1) Если два угла одного $\Delta$-ка соотв. равны двум углам другого $\Delta$-ка, то такие $\Delta$-ки подобны

2) Если две стороны одного $\Delta$-ка пропорциональны двум сторонам другого $\Delta$-ка и углы, заключенные м/у

этими сторонами равны, то такие Δ-ки подобны

3) Если три стороны одного Δ-ка пропорциональны трем сторонам другого Δ-ка, то такие Δ-ки подобны

Д

$\boxed{1}$ 1) По Т. о сумме углов, т.к. $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, то $\angle C = \angle C_1$

2) Т.к. $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} = \frac{CA \cdot CB}{C_1A_1 \cdot C_1B_1} \Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$$

И т.д. ⇒ по опр-ю подобны

$\boxed{2}$ $\angle A = \angle A_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$

1) Достаточно д-ть, что $\angle B = \angle B_1$.

2) Рассмотрим $\triangle ABC_2$, у которого $\angle BAC_2 = \angle A_1$, $\angle ABC_2 = \angle B_1$.

$\triangle ABC_2 \sim \triangle A_1B_1C_1 \Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC_2}{A_1C_1}$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ - из усл-я

$\Rightarrow AC = AC_2 \Rightarrow \triangle ABC_2 = \triangle A_1B_1C_1 \Rightarrow \angle ABC_2 = \angle B_1$

$\boxed{3}$ 1) Достаточно д-ть, что $\angle A = \angle A_1$

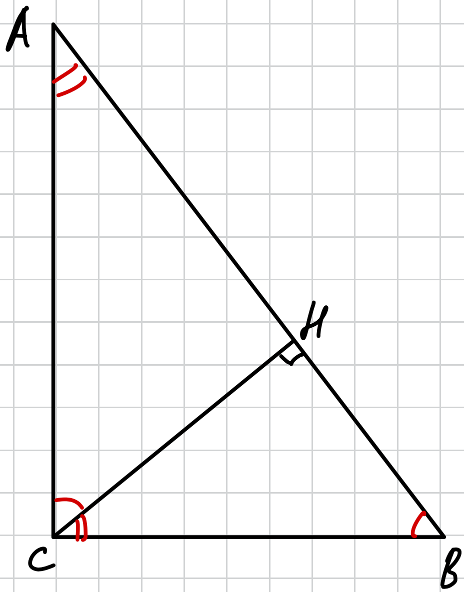
2) Рассмотрим $\triangle ABC_2$: $\angle BAC_2 = \angle A_1$, $\angle ABC_2 = \angle B_1$

$\Rightarrow \triangle ABC_2 \sim \triangle A_1B_1C_1$ + условие $\Rightarrow BC = BC_2$, $AC = AC_2$

$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle ABC_2$ (по 3-м сторонам) $\Rightarrow \angle A = \angle BAC_2 = \angle A_1$

$\blacksquare$

**Пример:** Теорема Пифагора




по 2-м углам

1) Проведем высоту $BH \Rightarrow \triangle CBH \sim \triangle ABC$, $\triangle CAH \sim \triangle BAC$

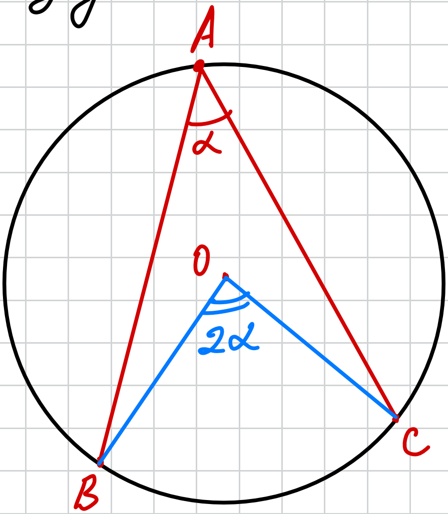
2) Из опр-я подобия:

$$\begin{cases} \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{BH}{BC} \\[2ex] \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AH}{AC} \end{cases} \Rightarrow AB = AH + BH = \frac{BC^2 + AC^2}{AB}$$

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

# §6. Вписанные и описанные окружности

**Опр 1:** Окружность – множество точек, равноудаленных от заданной точки




$\angle BAC$ – вписанный угол

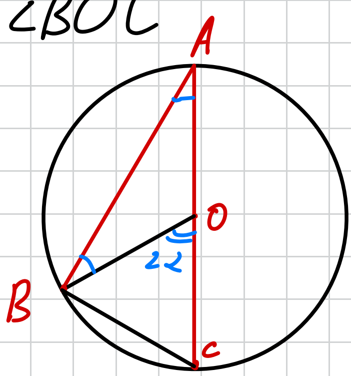
$\angle BOC$ – центральный

**Опр 2:** Градусной мерой дуги AB (< половина окр-ти) называется градусная мера соотв центрального угла

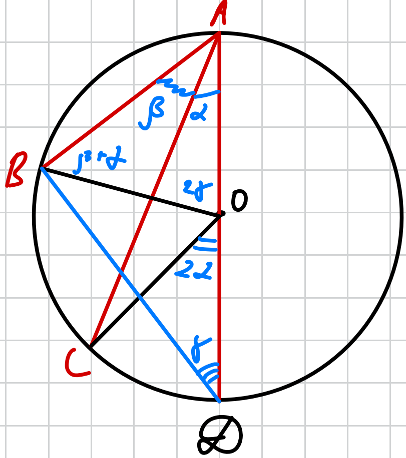
**Т1** $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$

Δ

1 случай:



2 случай

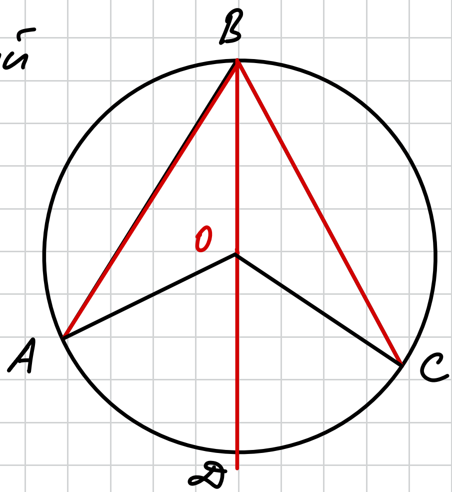



$$\begin{cases} \angle BOC = 180 - 2(\alpha+\gamma) \\ 2(\alpha+\beta) + 2\gamma = 180 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\angle BOC = 2\beta$$

3 случай




**Следствие 1:** Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу равны

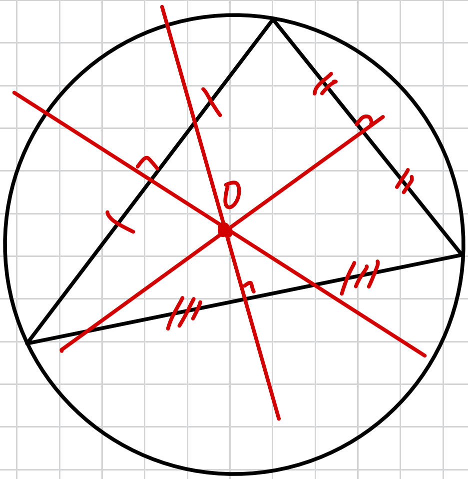
**Следствие 2:** Вписанный угол, опирающийся на диаметр $= 90^\circ$

**Упр:** Если 2 хорды пересек, то произведение отрезков одной хорды равно произв отрезков другой.

**Опр 3:** Описанная окружность - окружность, на которой лежат все вершины многоугольника

**Лемма 1:** Вокруг любого $\triangle$-ка можно описать окр-ть

▲




O - точка пересечения серединных перп.

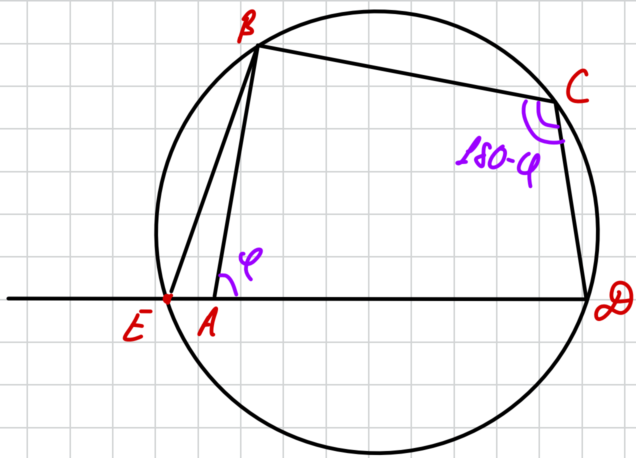
■

**Лемма 2:** Около четырехугольника можно описать окружность $\Leftrightarrow$ сумма противоположных углов $= 180°$

▲

$\boxed{\Rightarrow}$ Очевидно

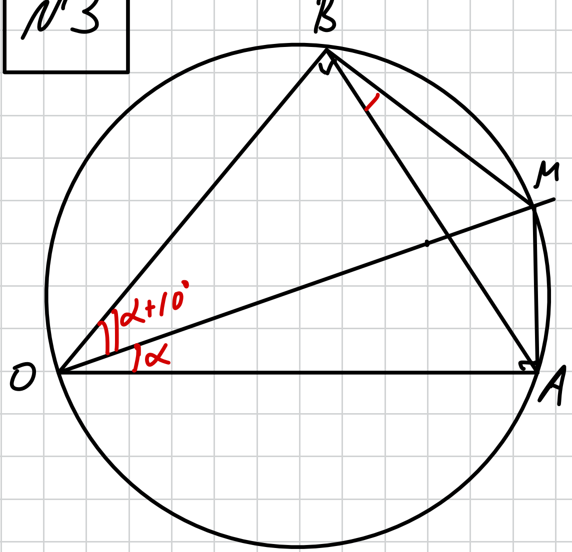
$\boxed{\Leftarrow}$



1) Опишем окр-ть около $BCD \Rightarrow EBCD$ - вписан $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BEA = \varphi \Rightarrow$ в $\Delta EBA$ сумма углов $> 180^\circ \Rightarrow E \equiv A$

## №3




$\angle(OM, AB)$ - ?

1) $\angle OBM + \angle OAM = 180^\circ \Rightarrow$ вокруг $OBMA$ можно описать окр-ть

2) $\angle AOM = \angle ABM$, как вписанные, опир на 1 дугу

3) В $\Delta OBM$: $\angle OMB = 180^\circ - 90^\circ - (\alpha + 10^\circ) = 80^\circ - \alpha$

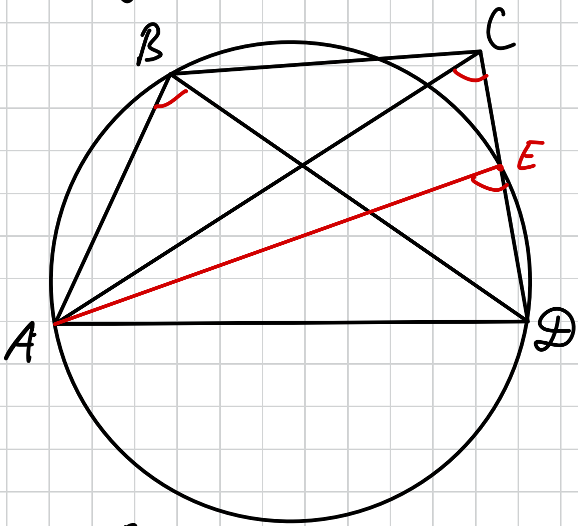
4) В $\Delta BKM$: $\angle BKM = 180^\circ - \angle KBM - \angle BMK =$

$= 180^\circ - \alpha - (80^\circ - \alpha) = 100^\circ \Rightarrow \angle(OM, AB) = 80^\circ$

Лемма 3: Если в 4-х угольнике $ABCD$: $\angle ABD = \angle ACD$, то вокруг него можно описать окружность

$\triangle$

$\boxed{П}$ (предположим противное)

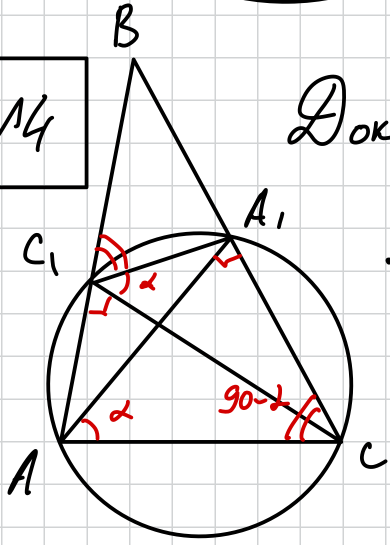



В $\triangle ACE$ сумма углов $> 180°$

$\Rightarrow$ противоречие

$\blacksquare$

$\boxed{№4}$




Док-те: $\triangle ABC \sim \triangle A_1BC_1$

1) $\angle AC_1C = \angle AA_1C \Rightarrow AC_1A_1C$ — вписанный 4-х угольник

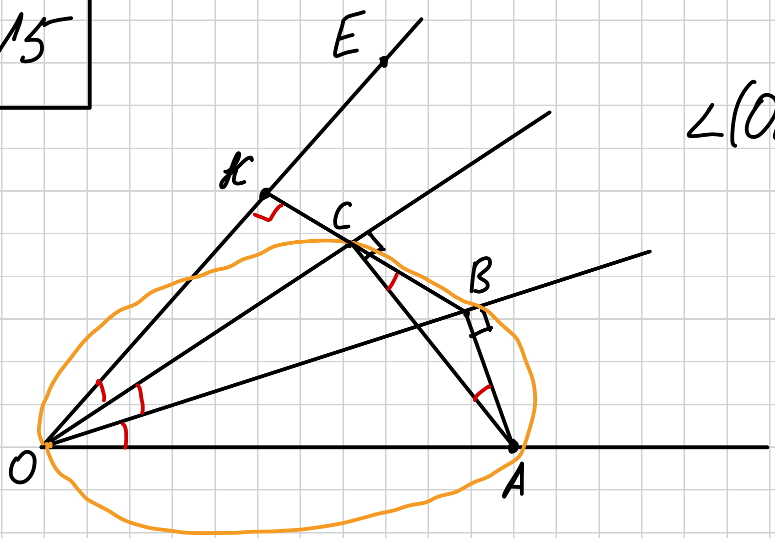
2) $\angle A_1AC = \angle A_1C_1C = \alpha$

3) Из $\triangle AA_1C$: $\angle ACA_1 = 90° - \alpha$

4) $\angle BC_1A_1 = \underbrace{\angle BC_1C}_{90°} - \underbrace{\angle A_1C_1C}_{\alpha} = 90° - \alpha$

5) $\triangle ABC \sim \triangle A_1BC_1$ — по двум углам

**№5**




$\angle(OE, BC)$ — ?

1) $\angle OCA = \angle OBA \Rightarrow$ около $OCBA$ можно описать окружность

2) $\angle CAB = \overset{=\alpha}{\angle COB}$ — т.к. они опираются на одну дугу, аналогично $\angle BCA = \angle BOA = \alpha$

3) $\angle OCK = 180^\circ - \angle OCA - \angle ACB = 90^\circ - \alpha$

4) В $\triangle OKC$: $\angle OKC = 180^\circ - \angle KOC - \angle OCK = 90^\circ$