$+ \quad \times$

$- \quad \div$

Комбинаторика
часть 1

мощность мн-ва

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $|X| = n$

$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, $|Y| = m$

Правило умножения: Кол-во способов выбрать x "и" y $\equiv$ кол-во пар (x_i, y_j), $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

"то же самое" принадлежит

$j \in \{1, 2, \dots, m\}$ $= n \cdot m = |X| \cdot |Y|$

Правило сложения: Кол-во способов выбрать x "или" y $= n + m = |X| + |Y|$

$\boxed{№1}$ Найдите кол-во двузначных чисел, у которых все цифры различны

$N(\overline{xy})$ – ?

1) Зафиксируем x и будем выбирать y:

$X = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$

$x \in X$, $|X| = 9$

$$y \in \underbrace{\{0, 1, \cancel{2}, 3, \ldots, 9\}}_{10} \Rightarrow |Y| = 9$$

$$N(\overline{xy}) = |Y||X| = 9 \cdot 9 = 81$$

2) Зафиксируем y и будем выбирать x

$$N = |Y| \cdot |X| \cancel{=} 90$$

???Где ошибка???

$|Y| = 10$

$|X| = 9$

неправильно

$$N(\overline{xy}) = N(\overline{xy}, y \neq 0) + N(\overline{x0}) =$$

$$= \underset{\text{"y"}}{9} \cdot \underset{\text{"x"}}{8} + \underset{\text{"y"}}{1} \cdot \underset{\text{"x"}}{9} = 81$$

$\boxed{№2}$ Сколькими способами можно переставить м/у собой в ряд цифры $1, 2, 3, \ldots, 9$

1) Представим, что мы рассавили

$$\overline{x_1 x_2 x_3 \ldots x_9}$$

$$\left.\begin{aligned}
&x_1 \in \{1, 2, 3, \dots, 9\} - 9\\
&x_2 \in \{1, \cancel{2}, 3, \dots, 9\} - 8\\
&\vdots\\
&x_9 \in \{\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \dots, \cancel{9}\} - 1
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
&x_1 \in X_1,\ |X_1| = 9\\
&x_2 \in X_2,\ |X_2| = 8\\
&x_3 \in X_3,\ |X_3| = 7\\
&\vdots\\
&x_9 \in X_9,\ |X_9| = 1
\end{aligned}\right\} \Rightarrow N = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1 = 9!$$

Правило умножения

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$0! = 1$$

$\boxed{№3}$ Сколькими способами можно выбрать k шаров из n шаров (шары различны), $n > k$

$$\underbrace{\underline{n}\ \ \underline{n-1}\ \ \ldots\ \ \underline{n-k+1}}_{k\text{ - мест}}$$

Важен ли порядок?

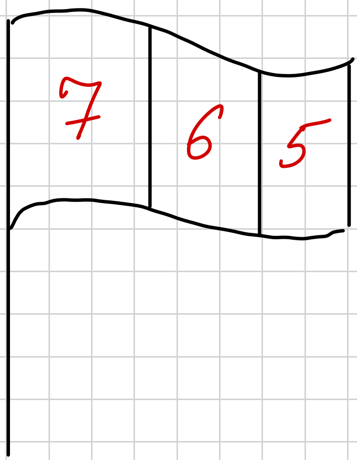
В этой задаче порядок не важен, т.е. ①②③ ②①③ — такие кучки для нас одинаковые

$C_n^k = \binom{n}{k}$

Тогда:

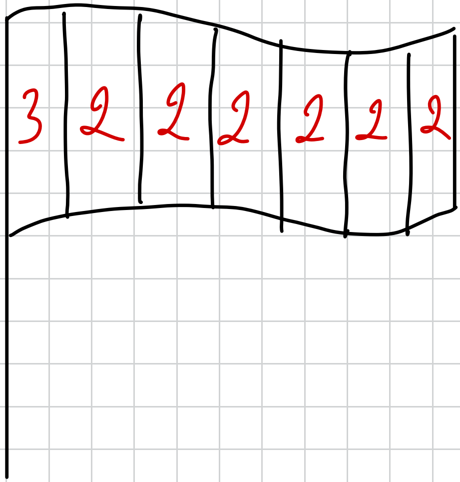
$$N = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$\boxed{№4}$ 1) Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с верт. полосками различных цветов, если имеется материя 7 различных цветов



$N = 7\cdot6\cdot5 = 210$ ✓

2) 7 верт. полос: Красный, белый, синий, причем любые 2 соседние полосы должны быть разл. цветов



$N = 3\cdot 2^6$

$\boxed{№5}$ В некотором гос-ве нет двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова может быть наиб численность?

<u>1 способ:</u>

$$N = \underbrace{1}_{C_{32}^0} + \underbrace{32}_{C_{32}^1} + \underbrace{\frac{32\cdot 31}{2}}_{C_{32}^2} + \ldots + C_{32}^{31} + C_{32}^{32}$$

беззубый

1 зуб

2 зуба

<u>2 способ:</u>

$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup \ldots \sqcup$ - 32-значное число

1 — зуб есть

0 — зуба нет

$$N = \underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2}_{32} = 2^{32}$$

$\boxed{№6}$ Д-ть: $2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$

1) Докажем более общее утв.:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^n a^0 b^n$$

$\triangle$

$$(a+b)^n = \underbrace{\overbrace{(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}^{k}\overbrace{(a+b)\ldots(a+b)}^{n-k}}_{n} =$$

$$= \ldots + C_n^k a^k b^{n-k}$$

из k скобок берем a

из (n-k)-скобок берем b

Сколько способов есть, чтобы выбрать k скобок из n скобок

$\Updownarrow$

k шаров из n шаров $= C_n^k$

$\blacksquare$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \ldots + C_n^n a^n b^0$$

индекс сумм.

№7

Сколько сущ. четырехзнач. чисел, в которых две единицы стоят рядом, а ост. цифры различны и не равны 1?

1) Решим 3 подзадачи

- единицы в начале: $N(\overline{11xy}) = \underset{}{1} \cdot \underset{}{1} \cdot \underset{}{9} \cdot \underset{}{8} = 72$
- единицы в середине: $N(\overline{x11y}) = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 8 = 64$ (+)
- единицы в конце: $N(\overline{xy11}) = 8 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 1 = 64$ (+)

$$N = 72 + 64 + 64 = 200$$

№8

Сколько натуральных делителей имеет число $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^7$

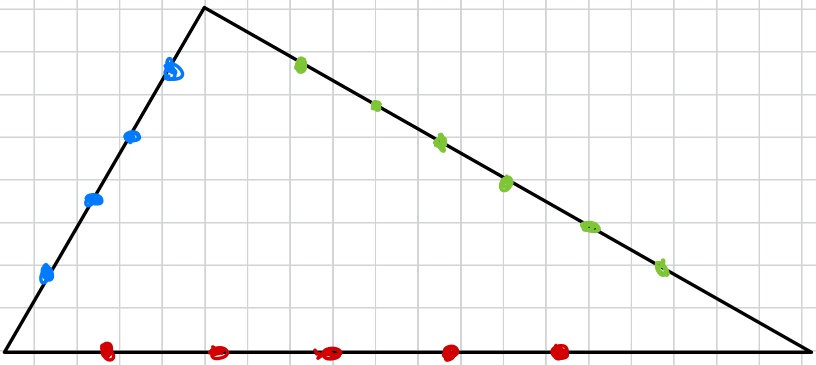
1) Делитель этого числа всегда имеет вид $2^x 3^y 5^z$,

где $\left.\begin{array}{l} x \in \{0, 1, 2, 3\} \\ y \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ z \in \{0, 1, \ldots, 7\} \end{array}\right\}$ Любой делитель однозначно задает $\overline{xyz}$

2) Переформ. задачу: сколько способов составить число $\overline{xyz}$

$$N(\overline{xyz}) = \underbrace{4}_{(3+1)!}\;\underbrace{5}_{(4+1)!}\;\underbrace{8}_{(7+1)!} = 160$$

№9 Сколько △-ков можно составить с вершинами в выд. точках?



1 способ

1) Кол-во △-ков с вершинами на разных сторонах

$$N_1 = \underbrace{4}\;\underbrace{6}\;\underbrace{5}$$

2) Кол-во △-ков с 2 вершинами на 1 стороне:

$$N_2 = \frac{4\cdot 3}{2}(6+5) + \frac{6\cdot 5}{2}(4+5) + \frac{5\cdot 4}{2}(4+6)$$

$$N = N_1 + N_2$$

2 способ

$$N = C^3_{4+7+5} - C^3_4 - C^3_5 - C^3_7$$

кол-во способов выбрать 3 точки

3 точки на 1 прямой