$+ \quad \times$

$- \quad \div$

§2. Системы уравнений

1. Линейные системы

Т Система $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ имеет единственное решение $\Leftrightarrow a_1b_2-b_1a_2\neq 0$

Δ Есть в конспектов прошлого года $\blacksquare$

Пример: 1) $\begin{cases} (a+1)x-y=a \\ (a-3)x+ay=-9 \end{cases}$ – $a-?$ имеет ед. реш.

Система имеет единственное реш. $\Leftrightarrow a(a+1)+(a-3)\neq 0$

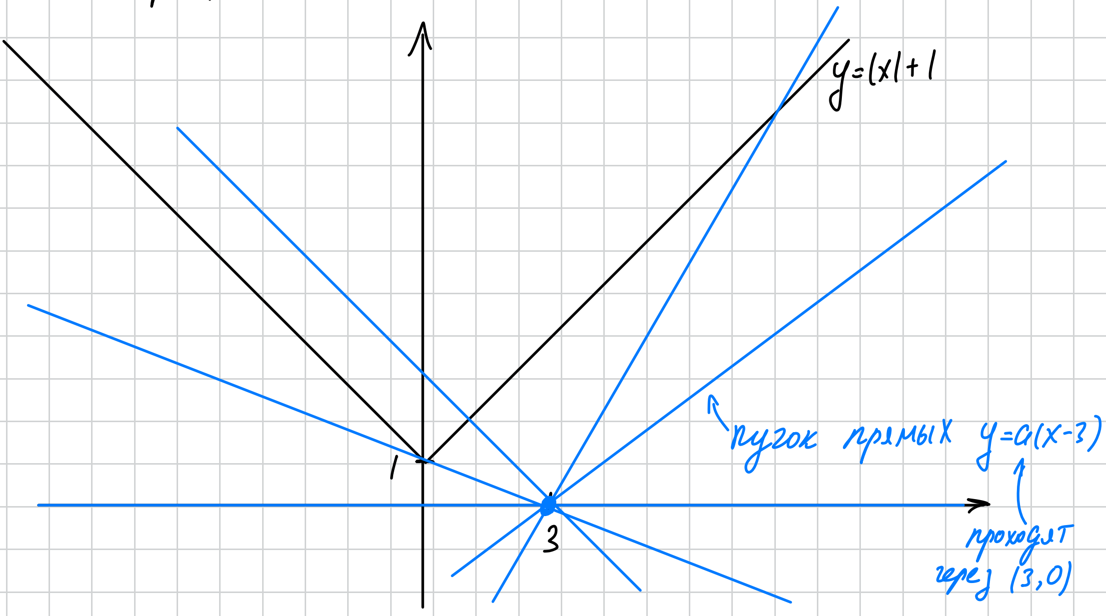
$$a^2+2a-3\neq 0$$

$$a\neq 1,\ a\neq -3$$

2) $\begin{cases} ax-y=3a \\ y-|x|=1 \end{cases}$

Можно рассмотреть случаи $x \geq 0$ и $x < 0$ аналогично пред. и объединить ответы

Или графически:



2. Нелинейные системы

Общих алгоритмов решения нет

Замечание: При действиях с ур-ями системы нужно следить за равносильностью преобразований. Если при каком-либо переходе мы получили следствие, а не равносильность, то в конце решения нужно будет делать проверку.

Пример: 1. $\begin{cases} f_1 = f_2 \\ g_1 = g_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f_1 + g_1 = f_2 + g_2 \\ f_1 - g_1 = f_2 - g_2 \end{cases}$

равносильный переход

2. $\begin{cases} f_1 = f_2 \\ g_1 = g_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f_1 g_1 = f_2 g_2 \\ \dfrac{f_1}{g_1} = \dfrac{f_2}{g_2} \end{cases}$

неравносильный!!!

Т.к. из 2-й системы: $(g_1, g_2 \neq 0)$

$\begin{cases} f_1 = \dfrac{f_2 g_2}{g_1} \\ f_1 g_1 = f_2 g_2 \end{cases} \Rightarrow f_2 = 0$ или $g_2 = \pm g_1 \Rightarrow$ появляются лишние корни

Примеры а) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 - x + y + 1 = 0 \\ 4x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - y^2 - x + y + 1 = 0 \\ (2x - y)(2x + y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - y^2 - x + y + 1 = 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{array} \right. \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=2x \\ 2x^2-x-1=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-2x \\ 2x^2+3x-1=0 \end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \text{Ответ: } (1,2),\ \left(-\frac{1}{2}, -1\right), \left(\frac{-3+\sqrt{17}}{4}, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{4}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$$

б) $\begin{cases} (x-y)xy=30 \\ (x+y)xy=120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y=75 \\ xy^2=45 \end{cases}$

Умножим первое ур-е на второе: $x^3y^3=75\cdot 45 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xy=15$, тогда исх. система:

$$\begin{cases} x\cdot xy=75 \\ xy\cdot y=45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\cdot 15=75 \\ 15y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$$

Подставим в исходную систему и убедимся, что это решение

3. Системы, сводящиеся к однородным ур-ям

Опр Уравнения вида $P(x,y)=0$, где $P(x,y)$ – многочлен называются однородными относительно x и y, степени k, если в каждом из членов сумма степеней равна k

Замечание: Если обе части однородного уравнения степени k разделить на x^k или y^k, то получится ур-е относительно дроби $\frac{x}{y}$ или $\frac{y}{x}$ (при этом перед делением надо отдельно разобрать случай $x=0$, если делим на x^k или $y=0$, если делим на y^k)

Пример а) $\begin{cases} 2x^2+y^2=6 \\ 3x^2+2xy-y^2=3 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad 4x^2+4xy-3y^2=0$

1 способ: квадратное отн x

$D=(4y)^2+48y^2=64y^2$

$x=\dfrac{-4y\pm 8y}{8}=\left[\begin{array}{l} -\frac{3}{2}y \\ \frac{1}{2}y \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ подставляем в ур-е системы

2 способ: Рассмотрим $y=0$: $4x^2=0 \to x=0$ — не явл. решением

При $y\neq 0$:

$$4\left(\frac{x}{y}\right)^2+4\left(\frac{x}{y}\right)-3=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{y}=\ldots \\ \frac{x}{y}=\ldots \end{array}\right.$$

б) $\begin{cases} \dfrac{3x-9y}{x+y} + \dfrac{2x+y}{x-y} = 4 \\ x^2 - y^2 = 48 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x^2 - \cancel{3xy} - 9xy + 9y^2 + 2x^2 + \cancel{xy} + \cancel{2xy} + y^2}{x^2 - y^2} - 4 = 0 \\ x^2 - y^2 = 48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 9xy + 14y^2}{x^2 - y^2} = 0 \\ x^2 - y^2 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9xy + 14y^2 = 0 \quad (1) \\ x^2 - y^2 = 48 \quad (2) \end{cases}$$

Рассмотрим (1): Если $y = 0 \Rightarrow x = 0$ - не подходит в (2)

Поделим на y^2: $t = \dfrac{x}{y}$

$$t^2 - 9t + 14 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 7 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 7y \\ x = 2y \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 7y \\ y^2 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2y \\ y^2 = 16 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \pm 7 \\ y = \pm 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pm 8 \\ y = \pm 4 \end{cases} \end{array}\right.$$

4. Симметричные системы

Опр Функция $f(x,y)$ называется симметричной, если $f(x,y) = f(y,x)$

Примеры: 1) $f(x,y) = xy$ – симм

2) $f(x,y) = x^3 + y^3$ – симм

3) $f(x,y) = x^3 y$ – не симм

Опр: Система $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$ называется симметричной, если $f(x,y)$ и $g(x,y)$ – симметричные

Замечание: Симметричные системы хорошо решаются с помощью замены:

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases}$$

При этом, любой симметричный многочлен мы можем записать через u и v:

$$u^2 = x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2 + 2v$$

$$x^2+y^2=u^2-2v$$

$$x^3+y^3=u^3-3uv$$

$$x^4+y^4=u^4-4u^2v+2v^2$$

Замечание Если (x,y) – решение симм. системы, то (y,x) – также решение этой системы

Примеры: а) $\begin{cases} x^3+y^3=19 \\ (xy+8)(x+y)=2 \end{cases}$

1) Система симметричная $\Rightarrow$ вводим замену

$$\begin{cases} u=x+y \\ v=xy \end{cases}$$

2) Тогда исх. система:

$$\begin{cases} u^3-3uv=19 \\ (v+8)u=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3+24u-25=0 \\ uv=2-8u \end{cases}$$

$$\begin{cases} (u-1)(u^2+u+25)=0 \\ uv=2-8u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=-6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=-6 \end{cases} \Leftrightarrow$$ Ответ: $(3,-2), (-3,2)$

б) $$\begin{cases} x^2y-xy^2=6 \\ xy+x-y=5 \end{cases}$$

1) Введем замену $z=-x$:

$$\begin{cases} z^2y+zy^2=6 \\ zy+z+y=-5 \end{cases}$$ — симметричная система

2) Вводим замену:

$$\begin{cases} u=z+y \\ v=zy \end{cases}$$

Тогда:

$$\begin{cases} uv=6 \\ u+v=-5 \end{cases}$$

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} u=-3 \\ v=-2 \end{cases} \\ &\begin{cases} u=-2 \\ v=-3 \end{cases} \end{aligned} \right.$$

Ответ: $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right), \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right), (-1, -3)$

$(3, 1)$