$+ \quad \times$

$- \quad \div$

§3. Многочлены

№1 При каких a, b: $F(x) = x^4 + ax^3 - 2x^2 + 19x + b$ делится на $x^2 - 3x + 2$ без остатка?

1) Заметим, что $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \Rightarrow F(x) \vdots (x-1), (x-2)$

2) То есть, по Т. Безу:

$$\begin{cases} F(1) = 0 \\ F(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 18 = 0 \\ 46 + 8a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -14 \end{cases}$$

Замечание: Из "правила деления уголком" видно, что если $F(x)$ и $G(x)$ - многочлены с целыми коэф-тами, причем старший коэф-т $G(x)$ равен единице, то и частное и остаток являются многочленами с целыми коэф-тами

№2 (Аналогичен Д/3)

Д-те, что число $2^{35} + 1$ делится на 11

1) Рассмотрим многочлен $F(x) = x^7 + 1$, заметим что $F(-1) = 0 \underset{\text{Т. Безу}}{\Rightarrow} F(x) = (x+1)Q(x)$, причем $Q(x)$ - многочлен с целыми коэф-тами

2) Тогда $F(2^5) = 2^{35} + 1 = \underbrace{(2^5+1)}_{33 \vdots 11}\underbrace{Q(2^5)}_{\in \mathbb{Z}} \vdots 11$

§4. Алгебраические уравнения

1. Сложные радикалы

Опр.: Выражения вида $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ называют сложными радикалами ($a,b\in\mathbb{R}$)

Попробуем понять, как упростить это выражение. Рассмотрим:

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2=2a+2\sqrt{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})} \quad (1)$$

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2=2a-2\sqrt{a^2-b} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{(1)}+\sqrt{(2)}}{2}:\ \sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}\pm\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}}}{2}$$

или

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

№1 Преобразуйте сложный радикал $\sqrt{4+\sqrt{7}}$

1сп: $\sqrt{4+\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{4+3}{2}}+\sqrt{\frac{4-3}{2}}=\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$

2 сп: Часто эту ф-лу не помнят – ее можно вывести, выделяя полный квадрат

$$\sqrt{4+\sqrt{7}} = \sqrt{\underbrace{2\cdot\sqrt{\tfrac{7}{2}}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}_{\sqrt{7}} + \underbrace{\tfrac{7}{2}+\tfrac{1}{2}}_{4}} = \sqrt{\tfrac{7}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$\boxed{№2}$ Решите уравнение

$$\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}} + \sqrt{11+x-6\sqrt{x+2}} = 1$$

1) Ур-е не особо относится к сложным радикалам (не будем пытаться исп. ф-лы), но тут 2 корня – поэтому интересно

2) В таких случаях продуктивно обозначить внутренний модуль за новую переменную.

$$t=\sqrt{x+2},\ t\geq 0$$

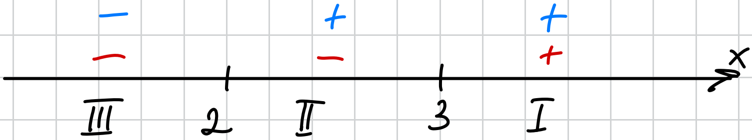
$$x=t^2-2$$

Тогда исх. ур-е примет вид:

$$\sqrt{t^2+4-4t} + \sqrt{t^2+9-6t} = 1$$

$$\sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t-3)^2} = 1$$

$$|t-2| + |t-3| = 1$$



Рассм I ($t \geq 3$):

$$2t = 6 \Leftrightarrow t = 3$$

Рассм II ($2 < t < 3$):

$$1 = 1$$

Рассм III ($t \leq 2$):

$$2t = 4 \Leftrightarrow t = 2$$

3) Тогда

$$t \in [2;3] \Leftrightarrow x \in [2;7]$$

Ответ: $x \in [2;7]$

2. Некоторые приемы при решении ур-й

Пример: Решите ур-е $x^3+4x^2-2x-3=0$

1) Заметим, что $x=1$ – корень, тогда по Т. Безу многочлен делится на $(x-1)$, тогда

$$x^3+4x^2-2x-3=(x-1)(x^2+5x+3)=0$$

Ответ: $x=1$, $x=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$

Способ 1: Подобрать корень, выполнить деление уголком, получить квадратное (обычно хорошо работает для ур-я 3 ст.)

Но что делать, если ± 1 или ± 2 – не явл. корнями?

$\boxed{\text{Т}}$ Если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ ($p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$) является корнем многочлена с целыми коэф-тами, то свободный член делится на p, а старший коэффициент на q. ← обратите внимание, необходимое, но не достаточное!

Следствие: Как правило, предлагаемые вам ур-я имеют целые корни, поэтому в большинстве задач используют следующее: Если у многочлена с целыми коэффициентами есть целые корни, то они являются делителями свободного члена (способ 2)

Примеры: а) $x^4+4x^3-102x^2-644x-539=0$

б) $6x^4-35x^3+28x^2+51x+10=0$

а) Попробуем найти целые корни ур-я.

Пусть p – такой корень $\Rightarrow 539 \vdots p$, при этом

$539=7^2\cdot 11 \Rightarrow p\in\{\pm1, \pm7, \pm11, \pm49, \pm77, \pm539\}$

Подставим $x=1 \Rightarrow$ не подходит

$x=-1 \Rightarrow$ подходит $\Rightarrow$ делим уголком

$$(x+1)(x^3+3x^2-105x-539)=0$$

Подставим в кубическое $x=\pm7 \Rightarrow x=-7$ – корень, тогда

$$(x+1)(x+7)(x^2-4x-77)=0$$

$$(x+1)(x+7)(x+7)(x-11)=0$$

Ответ: $-1, -7, 11$

б) Если уравнение имеет рациональный корень $x_0 = \frac{p}{q}$, то $10 \vdots p$, $6 \vdots q$, т.е. $p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$

$$q \in \{1, 2, 3, 6\}$$

Т.е. возможные варианты для x_0:

$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{10}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{5}{6}$

Перебираем $\Rightarrow \frac{5}{2}$ – подходит, делим на $(2x-5)$, получим:

$$(2x-5)\underbrace{(3x^3-10x^2-11x-2)}_{\substack{2 \vdots p \\ 3 \vdots q} \Rightarrow \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}}=0$$

$x_0 = -\frac{2}{3}$ – подходит $\Rightarrow$ делим:

$$(2x-5)(3x+2)(x^2-4x-1)=0$$

Ответ: $\frac{5}{2}$; $-\frac{2}{3}$; $2 \pm \sqrt{5}$

Способ 3: Группировка

Способ 4: Уравнения вида $ax^4+bx^3+cx^2 \pm bx+a=0$ называются возвратными. Для их решения обе части делят на x^2 и вводят замену $t = x \pm \frac{1}{x}$

Иногда, ур-я 4-й степени решаются с помощью замены $t = ax + \frac{b}{x}$

Рассмотрим примеры

$\boxed{№1}$

а) $x^4 + 4 = 0$

б) $x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$

в) $x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + 4 = 0$

г) $x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 13x - 2 = 0$

работает ∀ суммы 4-х степ.

а) $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2+2)^2 - 4x^2 = (x^2+2-2x)(x^2+2+2x)$

б) $2x^3 - (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = (\sqrt[3]{2}x)^3 - (x+1)^3 = (\sqrt[3]{2}x - x - 1) \cdot$

$\cdot (\sqrt[3]{4}x^2 + \sqrt[3]{2}x(x+1) + (x+1)^2)$

в) $x^2\left(x^2 - x + 2 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}\right) = x^2\left(\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - \left(x + \frac{2}{x}\right) + 2\right)$

Пусть $t = x + \frac{2}{x}$, тогда $x^2 + 4 + \frac{4}{x^2} = t^2$ и выражение в скобках примет вид: $t^2 - 4 - t + 2 = (t+1)(t-2)$

Тогда исх. ур-е:

$$x^2\left(x+\frac{2}{x}+1\right)\left(x+\frac{2}{x}-2\right)=(x^2+x+2)(x^2-2x+2)$$

2) Тут не работает ни один из методов:

$\pm1, \pm2$ - не корни

группировка ничего не дает

Прибегнем к методу неопределенных коэф-тов (способ 5)

$$x^4-4x^3-20x^2+13x-2=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=$$

$$=x^4+(a+c)x^3+(b+ac+d)x^2+(ad+bc)x+bd$$

Приравниваем соотв. коэф-ты:

$$\begin{cases} a+c=-4 \\ b+ac+d=-20 \\ ad+bc=13 \\ bd=-2 \end{cases}$$

– решить ее сложно, но можно найти целочисленные решения

Из 4) ур-я возможны 2 варианта

1) $b=1,\ d=-2$; => нет реш

2) $b=-1,\ d=2$ => $a=-7,\ c=3$

Тогда исходное уравнение:

$$x^4-4x^3-20x^2+13x-2=(x^2-7x+2)(x^2+3x-1)$$

Рассмотрим примеры на замену переменных

Пример 18. Решите уравнение:

а) $(x-4)^2+|x-4|-2=0;$

б) $(x-7)^4+(x+1)^4=706;$

в) $\dfrac{1}{x^2+2x-3}+\dfrac{18}{x^2+2x+2}=\dfrac{18}{(x+1)^2};$

г) $(x-2)(x-4)(x+5)(x+7)=360;$

д) $\dfrac{4x}{4x^2-8x+7}+\dfrac{3x}{4x^2-10x+7}=1;$

е) $25x^4-150x^3+94x^2+150x+25=0.$

а) Пусть $t=|x-4|$

$$t^2+t-2=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-2 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} |x-4|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=3 \end{array}\right. \\ |x-4|=-2 \Leftrightarrow \varnothing \end{array}\right.$$

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

б) Пусть $t=x-3$

$$(t-4)^4+(t+4)^4=706$$

$$t^4-16t^3+96t^2-256t+256+t^4+16t^3+96t^2+256t+$$
$$+256=706$$

$706-512=1$

$$2t^4+192t^2-194=0$$

$$t^4 + 96t^2 - 97 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t^2 = 1 \\ t^2 = -97 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x-3)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Замечание: Ур-е вида $(x-a)^4 + (x-b)^4 = c$ сводится к биквадратному заменой $t = x - \frac{a+b}{2}$