+ ×

− ÷

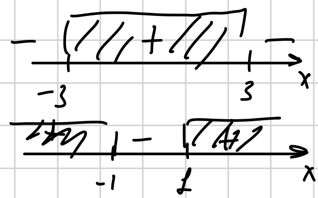
§4. Задачи с параметром

№1 (Физтех 2024)

Найти все t: $x^2 + 4\sqrt{2}\,t\,x + 9t^2 - 9 = 0$ имеет 2 различных действ. корня, их произв. > 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D > 0 \\ 9t^2 - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 32t^2 - 36t^2 + 36 > 0 \\ t^2 - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - t^2 > 0 \\ t^2 - 1 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (3-t)(3+t) > 0 \\ (t-1)(t+1) > 0 \end{cases}$$



Ответ: $t \in (-3, -1) \cup (1, 3)$

$\boxed{№2}$ (Физтех 2019)

$a-?$: $(x+2)\sqrt{ax+x-x^2-a}\geqslant 0$ — $\exists$ 2 реш: $x_1-x_2=4$.

1) Решим неравенство:

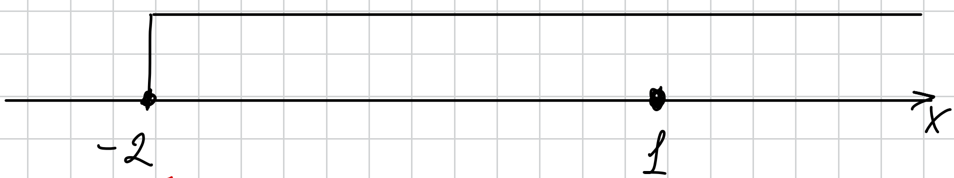
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+2\geqslant 0 \\ ax+x^2-x^2-a=0 \end{array}\right. \\ ax+x-x^2-a\geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\geqslant -2 \\ x^2-(a+1)x+a=0 \quad (1) \end{array}\right. \\ x^2-(a+1)x+a\leqslant 0 \quad (2) \end{cases}$$

2) Рассмотрим (2) — кв. нер-во:

$$D=(a+1)^2-4a=a^2-2a+1=(a-1)^2$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{a+1-(a-1)}{2}=1 \\ x_2=\dfrac{a+1+a-1}{2}=a \end{array}\right| \Rightarrow x\in[\min(x_1,x_2),\max(x_1,x_2)]$$

Что есть: нужно выбрать куда поставить a, так чтобы $\exists x_1,x_2$: $|x_1-x_2|=4$



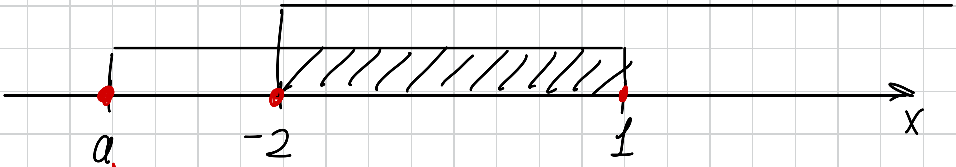
расст = 3

$\Downarrow$

a ставить м/у -2 и 1 нет смысла

Существует еще 2 варианта:

1) Поставить a – слева от -2:



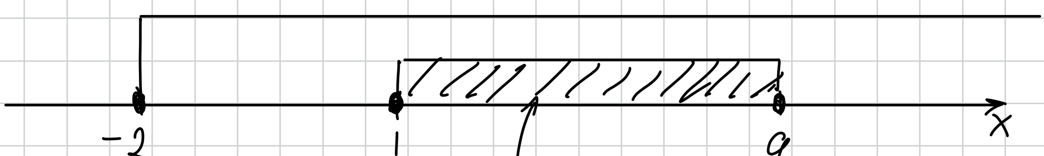
двигаем a влево, пока не найдутся x_1 и x_2: $|x_1-x_2|=4$

Ответ: $x\in\{a\}\cup[-2;1]$.

На расст. 4 будут точки $x_1=a$ и $x_2=a+4$, если $(a+4)\in[-2;1]$:

$$\begin{cases} a+4\geq -2 \\ a+4\leq 1 \\ a\leq -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a\geq -6 \\ a\leq -3 \\ a\leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow a\in[-6;-3]$$

2) Ставим a справа от 1, так чтобы max расст. ≥ 4



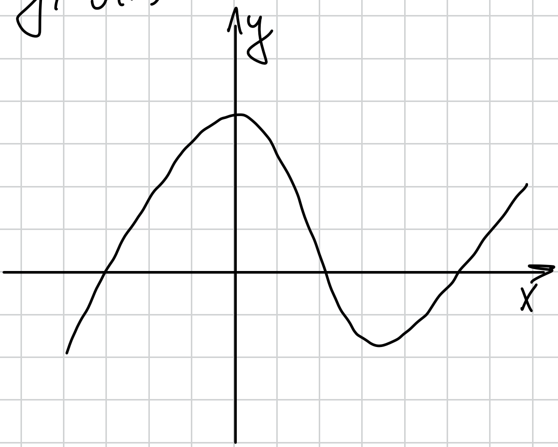
ответ $\Rightarrow$ $a-1\geq 4$

Ответ: $a\in[-6;-3]\cup[5;+\infty)$

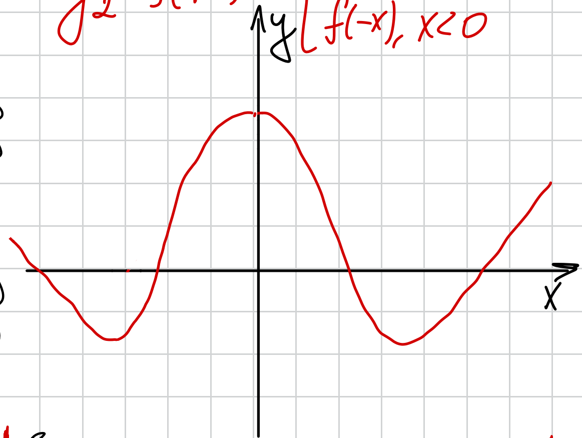
Это были <u>аналитические методы решения</u>

Рассмотрим графические методы: вспомним преобразования графиков:

$y_1 = f(x)$

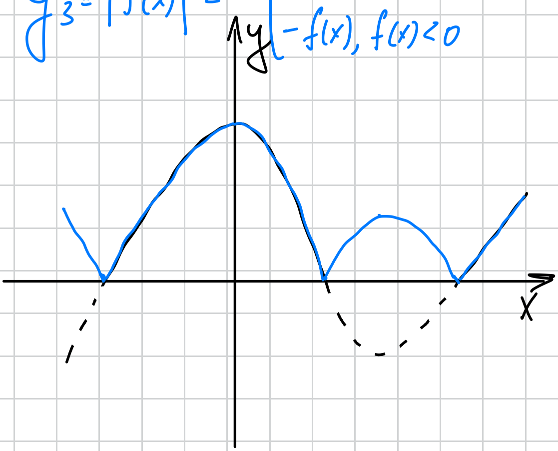


$y_2 = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$

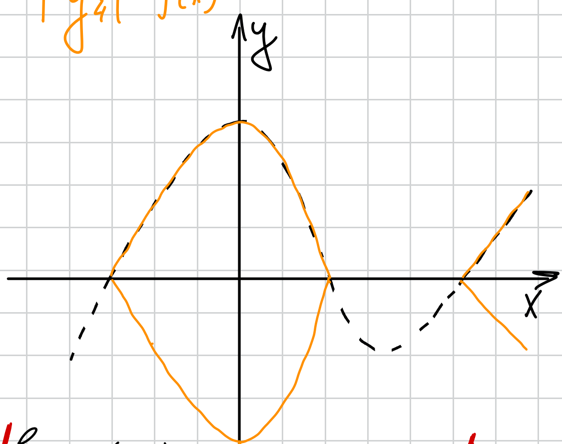


! Если $(x, y) \in$ мн-ву, то и $(-x, y) \in$ мн-ву $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ симм. отн. Oy !

$y_3 = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$



$|y_4| = f(x)$



! Если $(x, y) \in$ мн-ву точек, то и $(x, -y) \in$ мн-ву $\Rightarrow$ симм отн. Ox !

№1

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6x - 16 + 8y & (1) \\ (x-6)^2 + (y-8)^2 = a^2 & (2) \end{cases}$$

имеет ед. реш
a - ?

1) Рассмотрим (1):

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 9$$

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 3^2$$ – окр-ть $((3,4); R_1 = 3)$

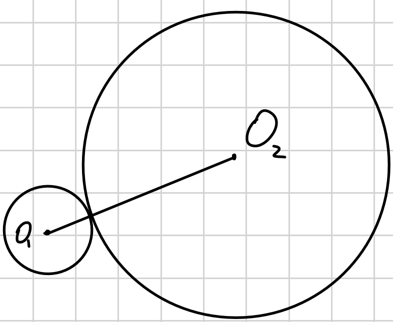
центр радиус

2) Рассмотрим (2):

$$(x-6) + (y-8) = a^2 = |a|^2$$ – окр-ть $((6,8); R_2 = |a|)$

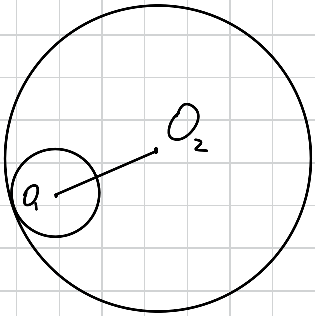
3) Вспомним, при каких условиях окружности касаются

а) Внешнее касание:



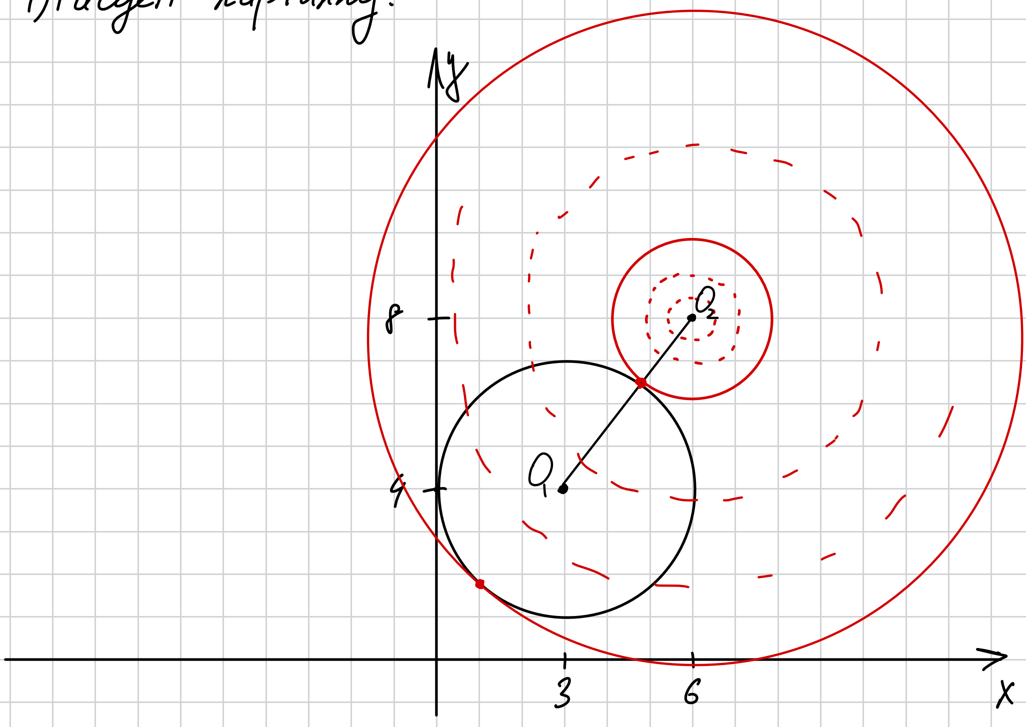
$$|\overrightarrow{O_1 O_2}| = R_1 + R_2$$

б) Внутреннее касание:



$$|\overrightarrow{O_1O_2}| = |R_1 - R_2|$$

4) Рисуем картинку:



I) Внешнее касание:

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{O_1O_2}| = R_1 + R_2 = 3 + |a| \\ \quad \| \\ \sqrt{9+16} = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

II) Внутреннее касание: $R_2 > R_1$ из рис

$$|\overrightarrow{O_1O_2}| = |R_1 - R_2| \overset{\downarrow}{=} |a| - 3 \quad \Big/ \to a = \pm 8$$

$\underset{5}{\overset{\shortparallel}{ }}$

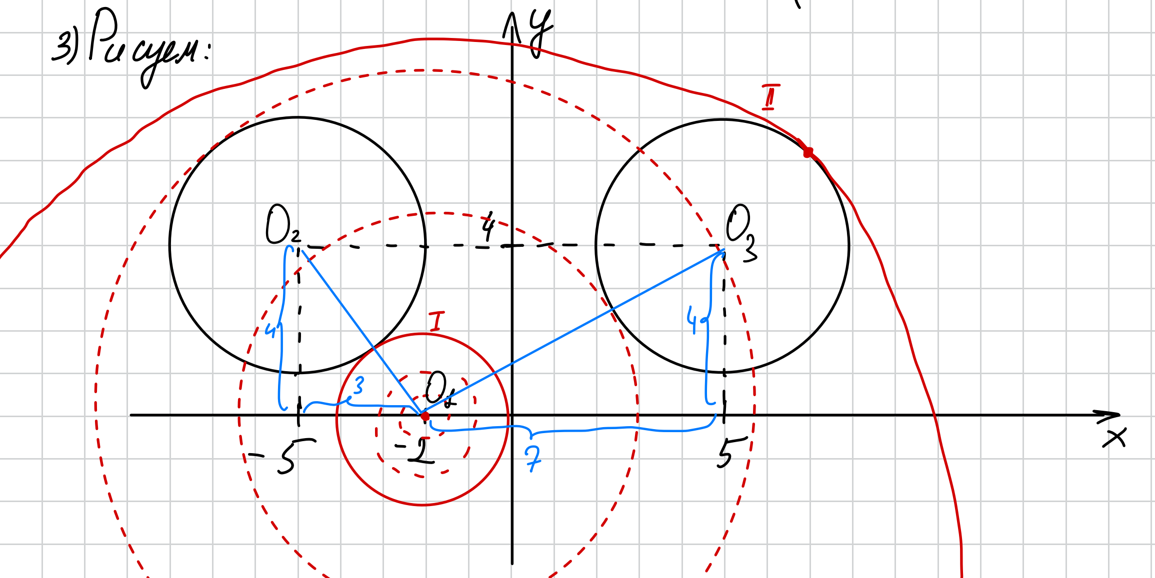
Ответ: $\pm 8; \pm 2.$

$\boxed{№2}$ $\begin{cases} (|x|-5)^2 + (y-4)^2 = 9 \ (1) \\ (x+2)^2 + y^2 = a \ (2) \end{cases}$ имеет ед. реш. $a - ?$

1) Заметим, что при замене $x \leftrightarrow -x$ ур-е (1) не меняется $\to$ если $(x,y) \in$ мн-ву (1), то $(-x,y) \in (1) \Rightarrow$ мн-во (1) симм. отн. Oy.

2) (2): окр-ть $((-2,0), R = \sqrt{a})$ (при $a<0$ пустое мн-во)

3) Рисуем:



I) Касание с O_2:

$$|O_1O_2| = \sqrt{a} + 3 \Rightarrow a = 4$$

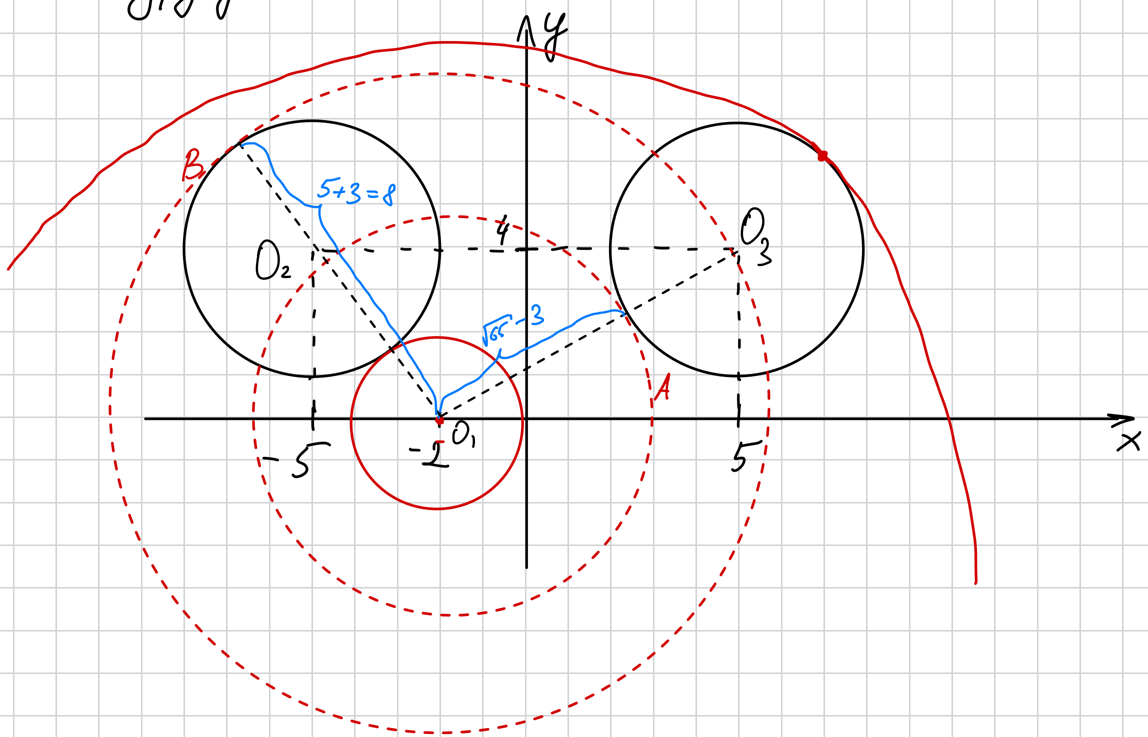
$$\sqrt{9+16} = 5$$

II) Касание с O_3:

$$|O_1O_3| = \sqrt{a} - 3 \Rightarrow a = (3+\sqrt{65})^2$$

$$\sqrt{65}$$

4) Нужно д-ть, что не существует случаев, когда окр-ть O_1 касается с одной из окр-тей и не пересекает другую



A: $\sqrt{65}-3 \vee 8$

$\sqrt{65}-3 \vee 11$

$\sqrt{65} < 11 \Rightarrow \overbrace{\sqrt{65}-3}^{>2} < 8 \Rightarrow$ когда O_1 касается O_3 она пересекает O_2

B: $8 \vee \sqrt{65}+3$

$\underbrace{8}_{>\sqrt{65}-3} < \sqrt{65}+3 \Rightarrow$ когда O_1 касается O_2 она пересекает O_3

Ответ: $4, (3+\sqrt{65})^2$

$\boxed{№3}$

$$\begin{cases} 3|y|-4|x|=6 \quad (1) \\ x^2+y^2-14y+49-a^2=0 \quad (2) \end{cases}$$

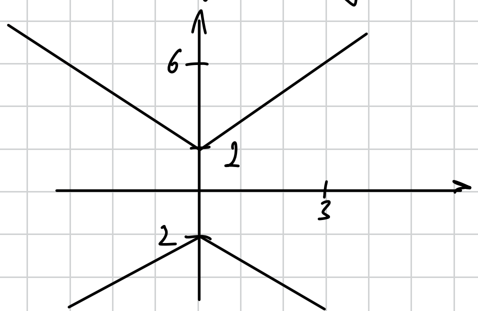
а) имеет 3 реш

б) Имеет 2 реш

$a-?$

1) Рассмотрим (1): заметим, что при замене $x \leftrightarrow -x$, $y \leftrightarrow -y$ ур. (1) не меняется $\Rightarrow$ мн-во точек, заданное ур-ем (1) имеют симм отн Ox, Oy ($\Rightarrow (0,0)$)

Тогда, рассмотрим $x \geq 0$, $y \geq 0$: $3y-4x=6 \Rightarrow y=2+\frac{4}{3}x$

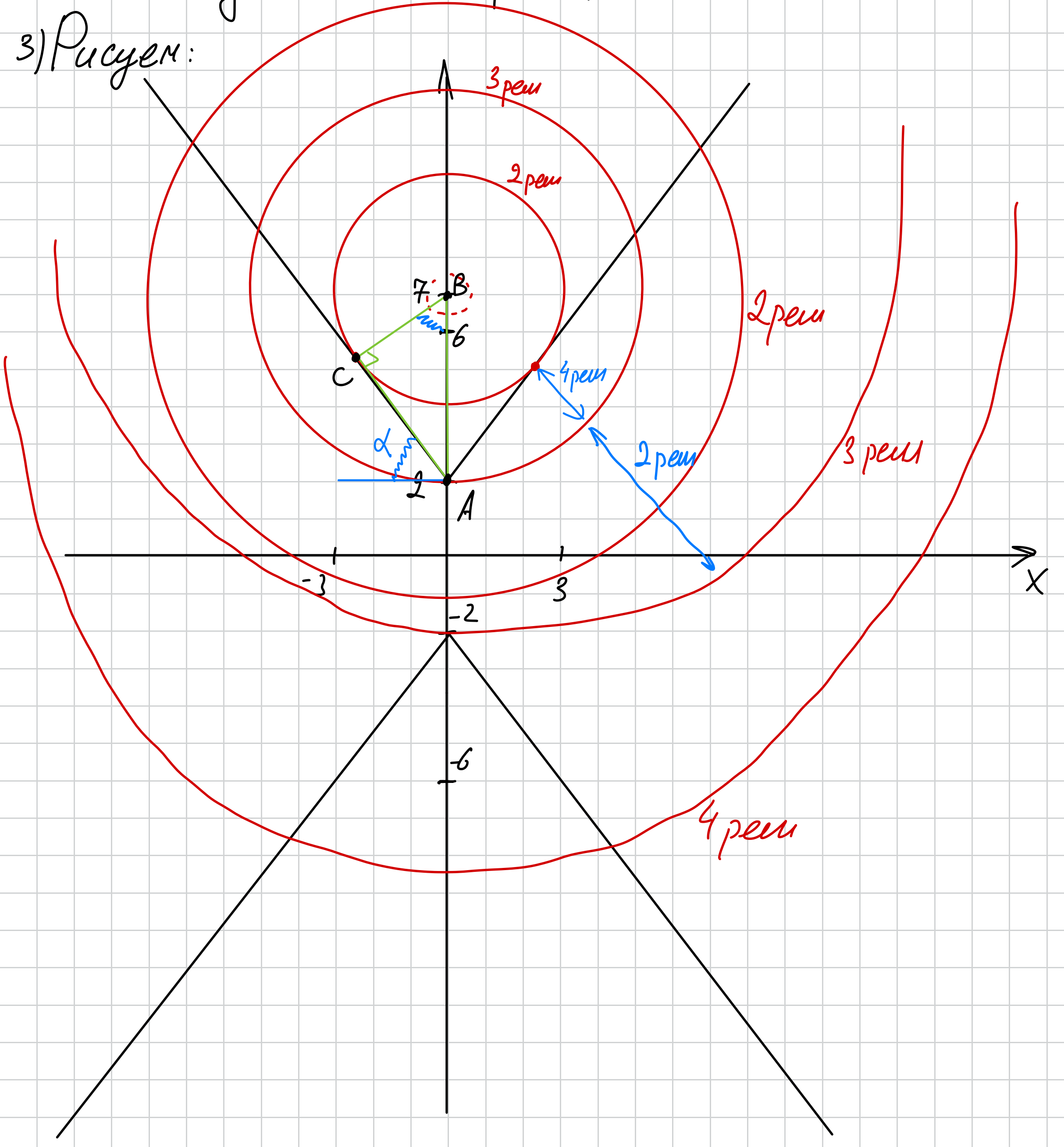


2) Рассмотрим (2):

$$x^2+(y^2-14y+49)=a^2$$

$$x^2+(y-7)^2=|a|^2 - \text{окр-ть}\ ((0,7),\ R=|a|)$$

3) Рисуем:



а) $\left[\begin{array}{l} |a| = 7-2 = 5 \text{ - дает 3 реш} \\ |a| = 7-(-2) = 9 \text{ - дает 3 реш} \end{array}\right.$

Ответ: $\pm 5, \pm 9$.

б) $tg\,\alpha = 4/3$: $\triangle ABC$: $BC = AB\cos\alpha = 5\dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \dfrac{5\cdot 3}{5} = 3$

$\Rightarrow |a| = 3$ - дает 2 реш

Увеличивая радиус: $|a| \in (5, 9)$ - также 2 реш:

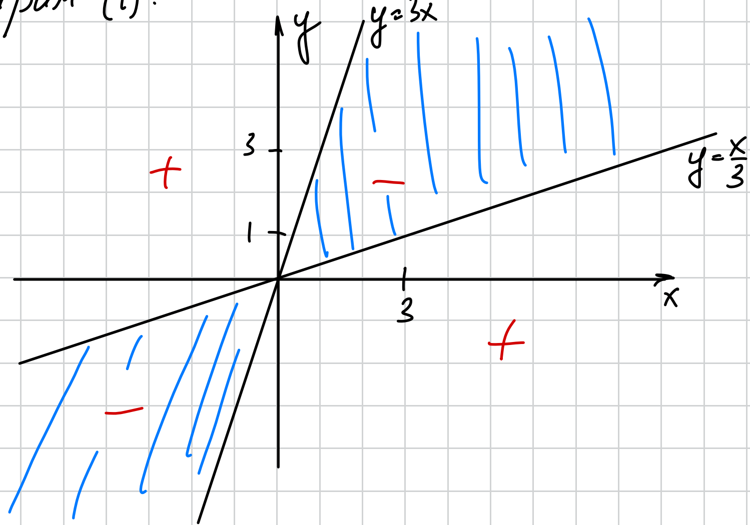
Ответ: $a \in \{\pm 3\} \cup (-9, -5) \cup (5, 9)$

$\boxed{\text{№4}}$

$$\begin{cases} (y-3x)(3y-x) \le 0 \\ (x-a)^2 + (y+a)^2 \le 16a \end{cases}$$

имеет конечное число решений, a - ?

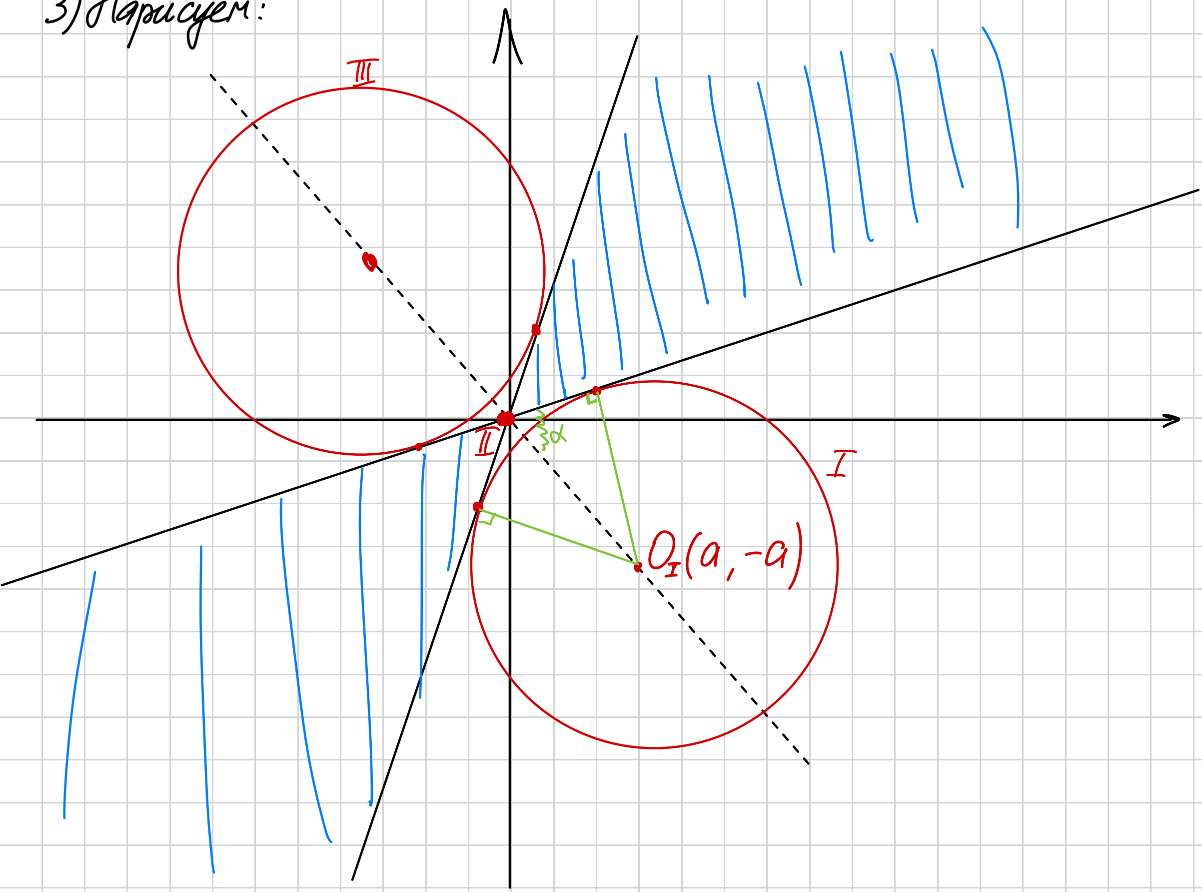
1) Рассмотрим (1):



2) Рассмотрим (2) – окр-ть: $((a,-a),\ R = 4\sqrt{a})$

$\left.\begin{matrix} x_0 = a \\ y_0 = -a \end{matrix}\right| \Rightarrow y_0 = -x_0$ – по этой прямой "катается" центр окр-ти

3) Нарисуем:



I) Касание двух прямых – окружность действ. касается сразу 2-х прямых, т.к. из геом. расст от центра до точек касания равны:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \beta, \quad tg\beta = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{a^2+a^2}\,\sin\alpha = 4\sqrt{a}$$

$$\sqrt{2}\,a\,\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right) = 4\sqrt{a}$$

отсюда видно, что $a=0$ – подх, просто я отдельно выделил

$$\sqrt{a} = \frac{4}{\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\beta + \cos\frac{\pi}{4}\sin\beta\right)} = \frac{4\cdot\sqrt{10}}{4} = \sqrt{10}$$

$$a = 10$$

II) Вырождение в точку: $a=0$

III) Касание с другой стороны: – не будет, т.к. $a>0$

$\Rightarrow (a,-a) \in$ (IV)-четверти

Ответ: $a = 0, 10$.