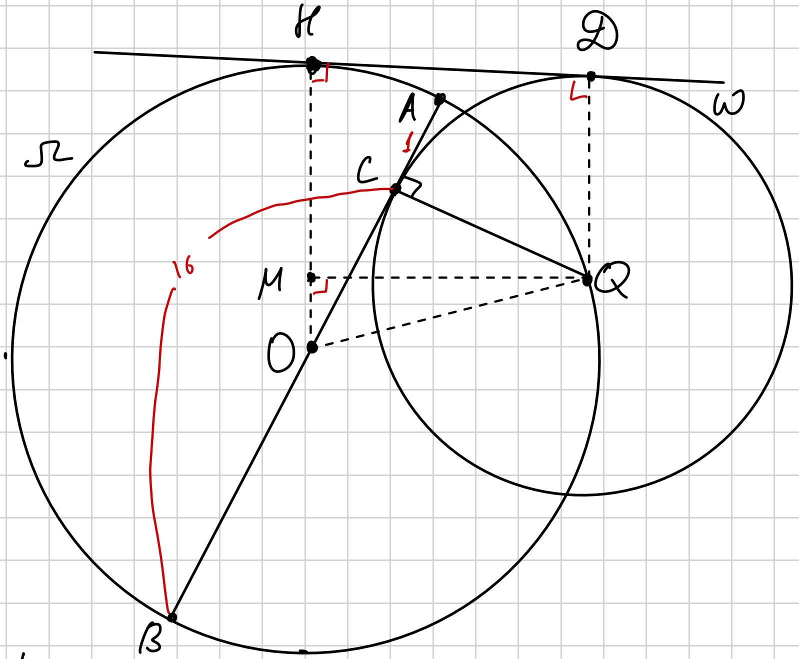
+ ×

− ÷

§4. Решение задач

№1 (Физтех 2023)

[4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω.



1) Пусть R, r – радиусы большой и малой окр-тей

2) Из условия $R = \frac{AB}{2} = \frac{17}{2} \Rightarrow CO = \frac{17}{2} - 1 = \frac{15}{2}$

3) ΔOCQ – прямоуг. $\Rightarrow$ по Т. Пиф:

$$CQ = r = \sqrt{R^2 - CO^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(17-15)(17+15)} = 4$$

4) $MO = R - r = \frac{17}{2} - 4 = \frac{9}{2}$

5) В $\triangle MOQ$: по Т. Пиф.:

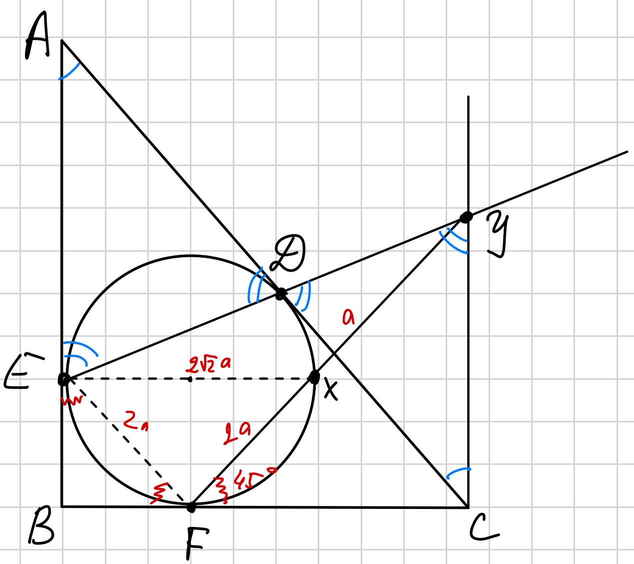
$$MQ = \sqrt{R^2 - MO^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(17-9)(17+9)} = 2\sqrt{13}$$

6) $MQDH$ - прямоуг. $\Rightarrow HD = MQ = 2\sqrt{13}$

$\boxed{№2}$ (Физтех 2023)

[6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC, проходящую через вершину C, в точке Y; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω. Известно, что $EX = 2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

$\sqrt{2}y - a$



$\frac{AD}{DC}$

Заметим, что из графика кажется, что EX - диам - мб потом поможет

1) $\triangle ADE \sim \triangle CDY$ - по двум углам $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{DE}{DY} = \frac{AE}{CY}$$

2) При этом $\triangle ADE$ и $\triangle CDY$ – р/б и $CF = DC \Rightarrow$

$\Rightarrow CY = FC \Rightarrow \triangle FCY$ – прямоуг и р/б

3) $\triangle EFB$ – также прямоуг и р/б $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EFX = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow EX$ - диаметр

4) Тогда $EX \perp BE$ и $\angle BEF = 45^\circ \Rightarrow \triangle EFX$ – р/б

$\Rightarrow EF = FX = 2a$

5) Тогда из $\triangle FCY$: $FC = FY = \frac{3}{\sqrt{2}}a = \frac{3}{2}\sqrt{2}a$

Из $\triangle EBF$: $EB = BF = \sqrt{2}a$

6) Пусть $AE = AD = z$, тогда в $\triangle ABC$ по т. Пиф:

$$(z + \sqrt{2}a)^2 + \left(\frac{5}{2}\sqrt{2}a\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}a + z\right)^2$$

$$2\sqrt{2}az + 2a^2 + \frac{25}{2}a^2 = \frac{9}{2}a^2 + 3\sqrt{2}az$$

$$\sqrt{2}az = 10a^2$$

$$z = \frac{10}{\sqrt{2}}a = 5\sqrt{2}a$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{5\sqrt{2}}{\frac{3}{\sqrt{2}}} = \frac{10}{3}$$

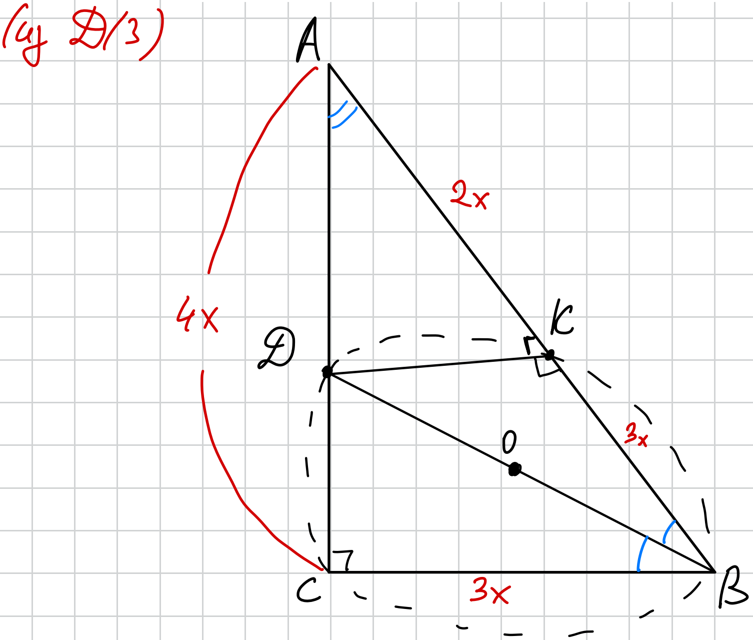
№3

Задача 12

2 дня22 часа 47 минут 09 секунд

Биссектриса BD прямоугольного треугольника ABC является диаметром окружности, которая проходит через вершину C прямого угла и пересекает гипотенузу AB в точке K. Известно, что $BD = \sqrt{15}$ и $BK : KA = 3 : 2$. Найдите периметр треугольника ABC.

(из Д/3)



1) $\triangle ДKB = \triangle ДCB$ – по углу и гип. $\Rightarrow$

$\Rightarrow BC = 3x$

2) Из Т. Пиф. для $\triangle ABC \Rightarrow AC = 4x$

3) $\triangle AKД \sim \triangle ACB$ – по острому углу

$\Rightarrow \frac{AK}{AC} = \frac{AД}{AB} \Rightarrow AД = \frac{2}{4} \cdot 5x = \frac{5}{2}x$

$\Rightarrow ДC = (4 - \frac{5}{2})x = \frac{3}{2}x$

4) В $\triangle DCB$ — по т. Пиф.:

$$15 = 9x^2 + \frac{9}{4}x^2$$

$$15 = \frac{45}{4}x^2$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow P_{ABC} = 12 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$$

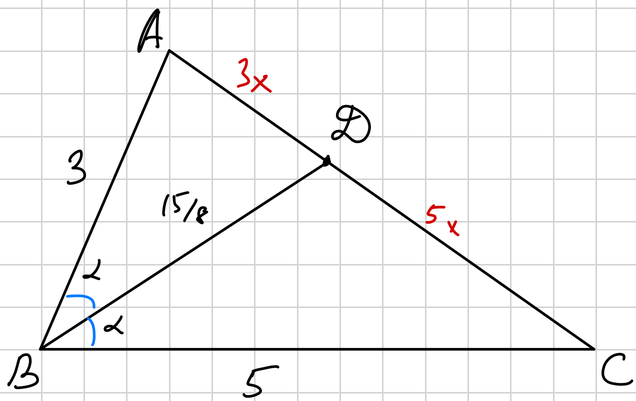
$\boxed{№4}$

Задача 13

2 дня22 часа 46 минут 34 секунды

В треугольнике ABC со сторонами $AB = 3$, $BC = 5$ биссектриса BD равна $15/8$. Найдите третью сторону и радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

(ц Д/з)



$75 - 45$

1) По т. cos для $\triangle ABD$ и $\triangle BDC$:

$$\begin{cases} 9x^2 = 9 + \left(\frac{15}{8}\right)^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{15}{8}\cos\alpha \quad | \cdot 5 \\ 25x^2 = 25 + \left(\frac{15}{8}\right)^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{15}{8}\cos\alpha \quad | \cdot 3 \end{cases} \ominus$$

$$\Rightarrow 30x^2 = 30 - 2 \cdot \frac{225}{8 \cdot 8}$$

$$30x^2 = 30 - \frac{225}{32} = \frac{960-225}{32} = \frac{735}{32}$$

$$x^2 = \frac{49}{32 \cdot 2} = \frac{49}{64}$$

$$x = \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow AC = 7$$

2) Радиус описаной окр:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

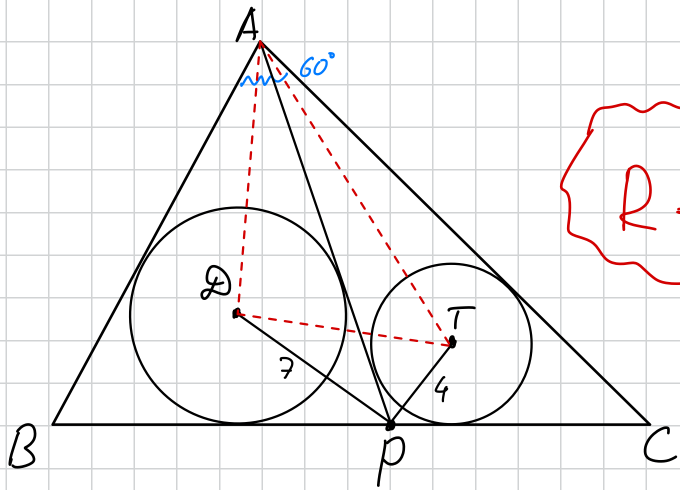
$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \sin\alpha$$

$\Rightarrow \sin\alpha = \ldots$

$$R = \frac{c}{2\sin\alpha} = \ldots$$

№5 (Физтех, 2016)

Точка P лежит на стороне BC треугольника ABC с углом 60° при вершине A. В треугольники APB и APC вписаны окружности с центрами D и T соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ADT, если $PD = 7$, $PT = 4$.



$$R = \frac{AB}{2\sin 2}$$

1) DP, PT – бис-сы углов APB, APC =>

$$\Rightarrow \angle DPT = 180^\circ - \frac{\angle APC}{2} - \frac{\angle APB}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

2) По Т. Пиф в ΔDPT:

$$DT = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$$

3) AD, AT – бис-сы углов BAP, PAC, тогда:

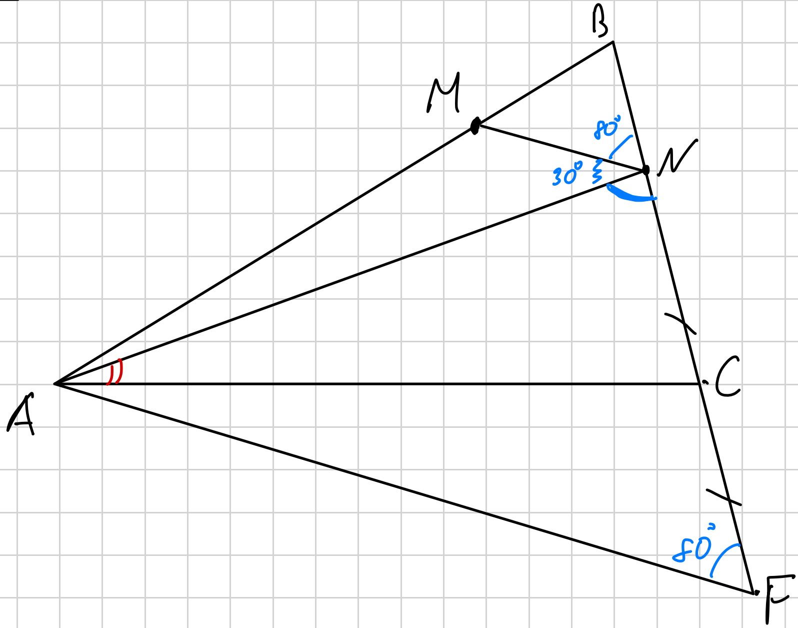
$$\angle DAT = \angle DAP + \angle TAP = \frac{\angle BAP + \angle PAC}{2} = 30^\circ$$

4) Тогда

$$R = \frac{DT}{2\sin(\angle DAT)} = \frac{\sqrt{65}}{2\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{65}$$

№6

[6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



1) $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC = BM \cdot \underbrace{2NC}$

продлим BC, чтобы $NF = 2NC$

2) Тогда: $BN \cdot MA = BM \cdot NF$

$$\frac{BN}{BM} = \frac{NF}{MA} \Rightarrow AF \parallel MN \Rightarrow \angle AFC = 80^\circ \Rightarrow$$

т.к. $\triangle ABF \sim \triangle MBN$

т.к. $\frac{BN+NF}{AM+MB} = \frac{BN}{MB}$ + общ угол

(Т. о проп отрезках)

$\Rightarrow \triangle ANF$ - р/б $\Rightarrow AC$ - высота $\Rightarrow \angle ACN = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle NAC = 10^\circ$