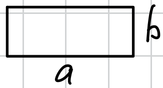
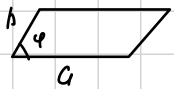
$+ \quad \times$

$- \quad \div$

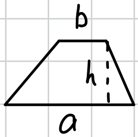
§ 3. Площадь четырехугольника

1. Прямоугольник 

$\Rightarrow S = ab$

2. Параллелограмм 

$\Rightarrow S = ab\sin\varphi$

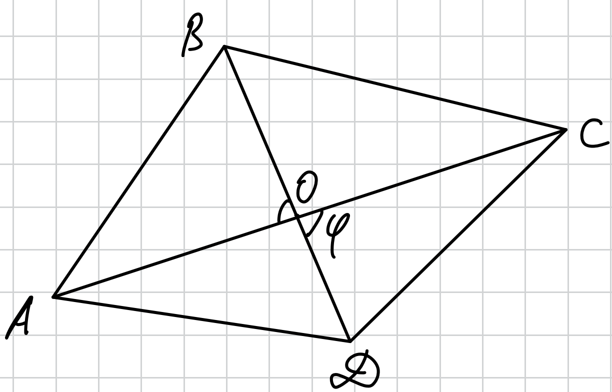
3. Трапеция 

$\Rightarrow S = \frac{a+b}{2}\cdot h$

Обобщим для $\forall$ выпуклого четырехугольника

Лемма: Площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла м/у ними:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$$



Δ I способ:

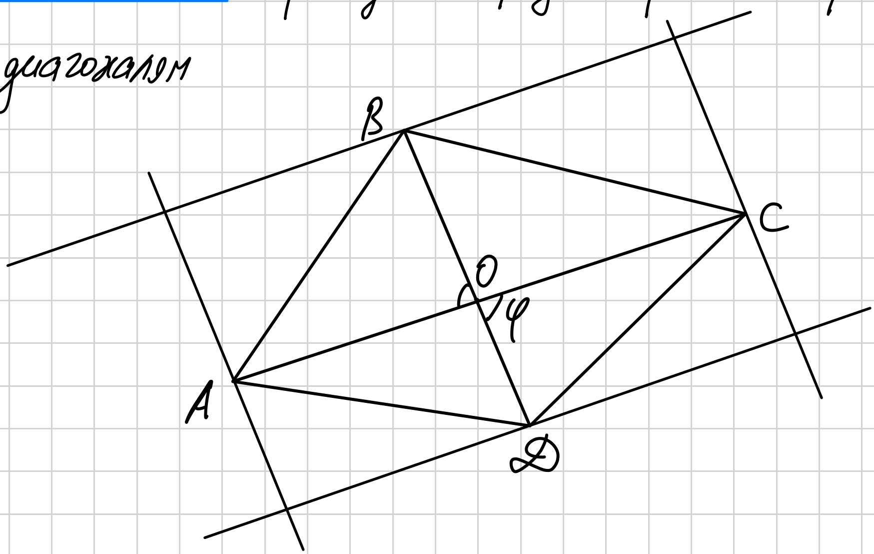
$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD} =$$

$$= \frac{1}{2} AO \cdot OB \sin\varphi + \frac{1}{2} BO\, OC \underbrace{\sin(\pi-\varphi)}_{\sin\varphi} + \frac{1}{2} CO \cdot OD \sin\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2} AO \cdot OD \underbrace{\sin(\pi-\varphi)}_{\sin\varphi} = \frac{1}{2} \sin\varphi \big(BO \cdot (AO+OC) + OD(AO+OC) \big)$$

$$= \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$$

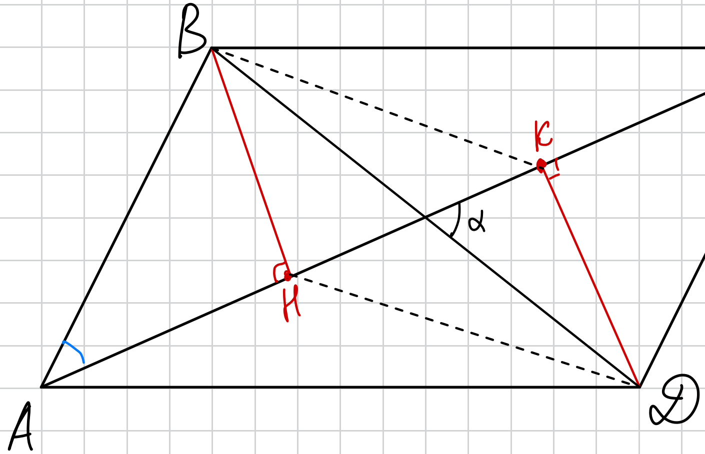
II способ: Проведем через вершины прямые, параллельные диагоналям



Получили 4 параллелограмма $\Rightarrow S_{ABCD}$ половина их общей и равна $\frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\varphi$

■

Задача 13. Дан параллелограмм $ABCD$ площадью S и тупым углом B. Из вершины B и D опущены перпендикуляры BH и DK на диагональ AC. Доказать, что $BHDK$ – параллелограмм и найти его площадь, если $AH = \frac{1}{5}AC$.



1) $\angle BAH = \angle KCD$ – противолеж. $\Rightarrow \triangle ABH = \triangle CKD \Rightarrow$

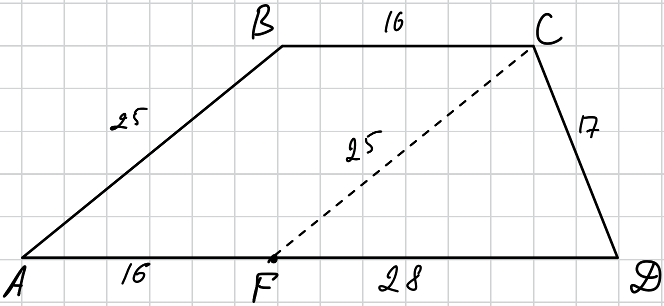
$\Rightarrow DK = BH$, при этом $DK, BK \perp AC \Rightarrow DK \parallel AC$

$\Rightarrow BHDK$ – пар-м

2) $AH = CK = \frac{1}{5}AC \Rightarrow HK = \frac{3}{5}AC \Rightarrow S_{BHKD} = \frac{1}{2}BD \cdot HK \sin\alpha =$

$= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} BD \cdot AC \cdot \sin\alpha = \frac{3}{5} S_{ABCD}$

Задача 14. Найти площадь трапеции, если её основания равны 16 и 44, а боковые стороны равны 17 и 25.



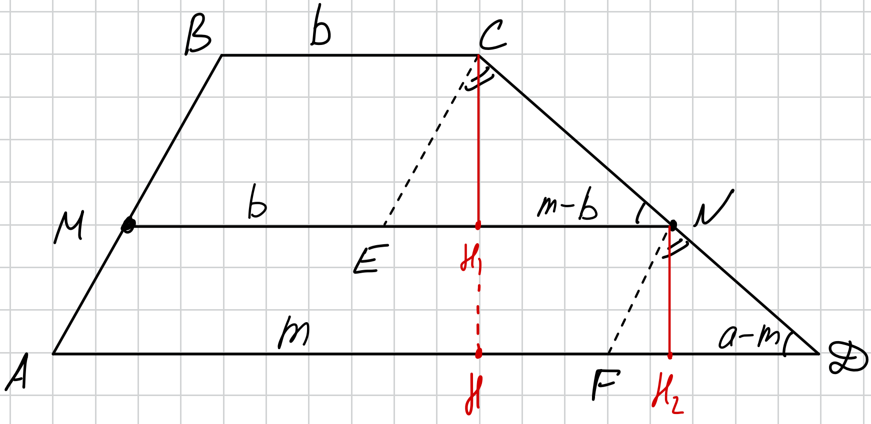
1) Проведем $CF \parallel AB$

2) $S_{CFD} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 210$

$\Rightarrow$ высота $CH = \dfrac{2S_{CFD}}{FD} = 15$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot CH = 450$

Задача 15. Отрезок длины m, параллельный основаниям трапеции, разбивает её на две трапеции (рис. 27). Найти отношение площадей этих трапеций, если основания трапеции равны a и b $(b < a)$.



1) $\triangle CEN \sim \triangle NFD$ – по 2-м углам

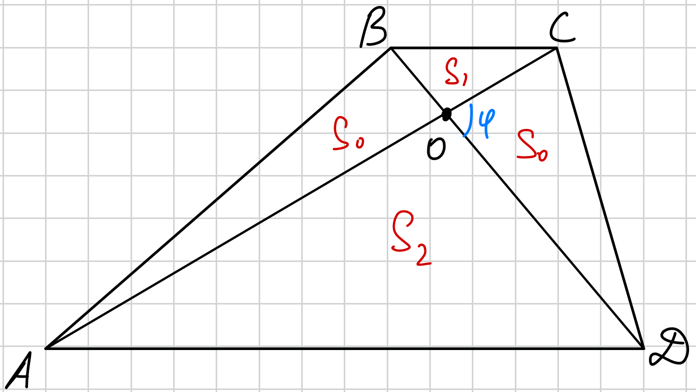
$$\Rightarrow \frac{CH_1}{CH_2} = \frac{EN}{FD} = \frac{m-b}{a-m}$$

2) $S_{MBCN} = \frac{m+b}{2} CH_1$

$S_{AMND} = \frac{a+m}{2} CH_2$

$$\Rightarrow \frac{S_{MBCN}}{S_{AMND}} = \frac{m^2-b^2}{a^2-m^2}$$

Задача 16. Диагонали трапеции $ABCD$, пересекаясь, разбивают её на четыре треугольника с общей вершиной O (рис. 30). Найти площадь трапеции, если площади треугольников, прилежащих к основаниям равны S_1 и S_2.



1) $\triangle AOD \sim \triangle COB$ – по 2-м углам $\Rightarrow \frac{AO}{CO} = \frac{OD}{OB} \Rightarrow$

$\Rightarrow AO \cdot OB = CO \cdot OD \Rightarrow S_{AOB} = S_{COD} = S_0$

2) $\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{AD}{BC}\right)^2$ – из подобия Δ-ков

3) $S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot h = S_2 + S_0$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h = S_1 + S_0$

$\Rightarrow \frac{S_1 + S_0}{S_2 + S_0} = \frac{BC}{AD} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$

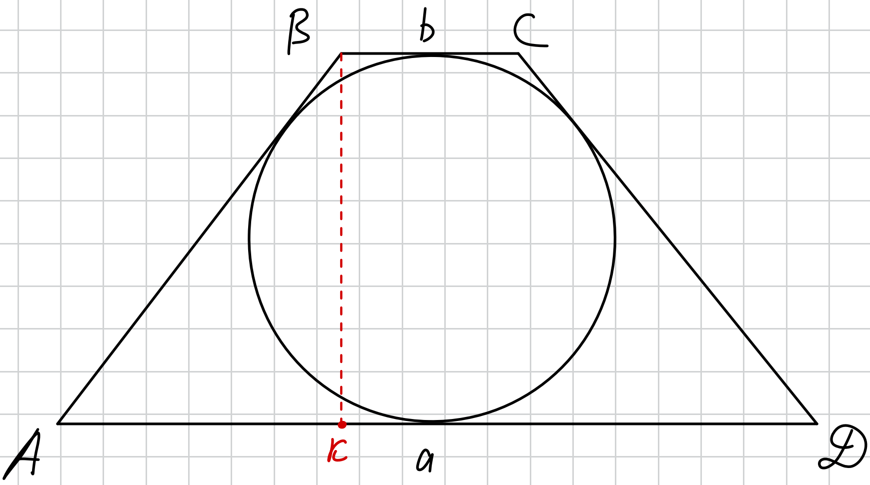
$$\Rightarrow S_0 = \sqrt{S_1 S_2}$$

$$\Rightarrow S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$$

Задача 17. Около окружности описана равнобокая трапеция с основаниями $AD = a$ и $BC = b$ (рис. 31). Найти:

1) радиус окружности r;

2) косинус угла при большем основании.



1) $AB = CD = \frac{a+b}{2}$ (подумайте, почему так)

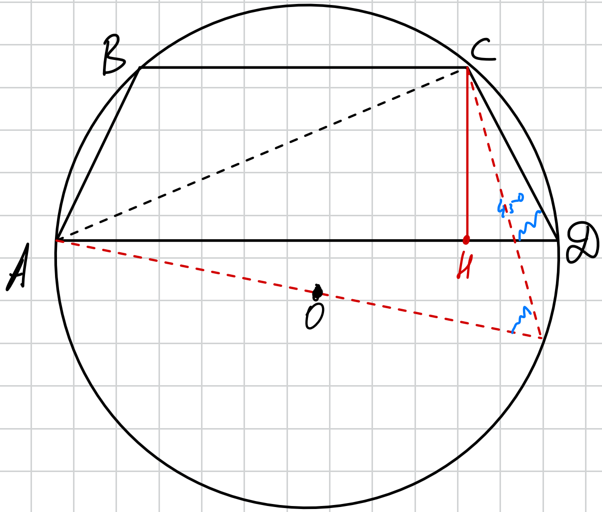
2) $AK = \frac{a-b}{2}$ $\Rightarrow$ по т. Пиф в $\triangle ABK$

$$BK = 2r = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$$

$$\cos\angle A = \frac{a-b}{a+b}$$

Задача 18. Около трапеции $ABCD$ описана окружность. Основание AD образует со стороной AB угол 45° (рис. 32). Найти радиус окружности, если $AD = 8$, $BC = 6$.



1) Заметим, что $\angle D + \angle B = 180^\circ$ (т.к. вписана) $\Rightarrow \angle A = \angle D \Rightarrow$

$\angle A + \angle B = 180^\circ$ (однастор.)

$\Rightarrow$ трапеция равнобокая

2) По Т. :

$$2R = \frac{AC}{\sin 45^\circ} \Rightarrow R = \frac{AC}{\sqrt{2}}$$

вспомните как это д-ть

3) Найдем AC: в $\triangle CHD$: $HD = \frac{AD-BC}{2} = 1 = CH$

$\Rightarrow$ в $\triangle ACH$ по Т. Пиф.:

$$AC = \sqrt{7^2+1^2} = 5\sqrt{2}$$

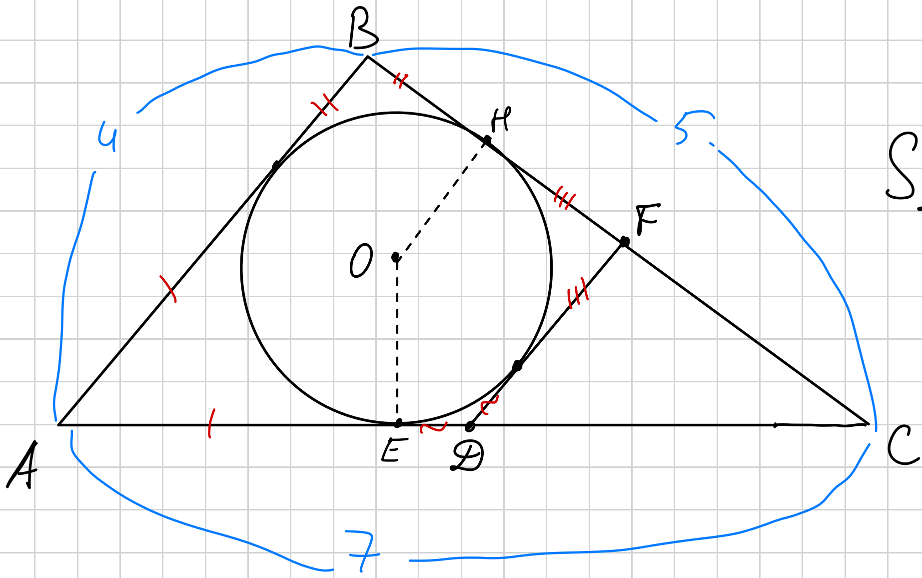
$$R = 5$$

Рассмотрим задачи из Д/З

Задача 7^* – смотрите Теорему 5 и замечание

$\boxed{№15}$

В треугольник со сторонами 4, 5, 7 вписана окружность. Касательная, параллельная наименьшей стороне, разбивает данный треугольник на четырёхугольник и треугольник. Найдите площадь последнего.



S_{DFC} – ?

1) $\triangle DFC \sim \triangle ABC$ - по 2-м углам $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{CF}{BC} = \frac{DC}{AC} = \frac{DF}{AB} = k$$

2) При этом

$$S_{DFC} = k^2 S_{ABC} = k^2\sqrt{8\cdot 4\cdot 3\cdot 1} = 4\sqrt{6}\cdot k^2$$

3) ABDF - описанный $\Rightarrow AB + DF = AD + BF$

$$4 + DF = 7 - DC + 5 - FC$$

$$\underbrace{DF + DC + FC}_{k\cdot(AB+BC+CA)} = 8$$

$$k\cdot(AB+BC+CA) = 8$$

$$k = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{DFC} = \sqrt{6}$$

или: 3) $S_{ABC} = p\cdot r \Rightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{2}$

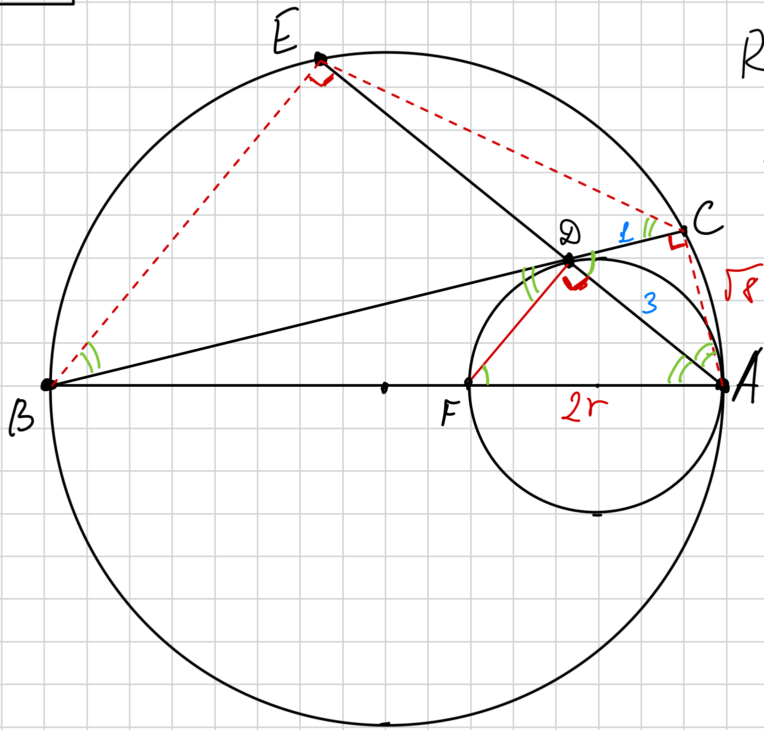
4) Проведем высоту CH: $CH = \frac{2\cdot 4\sqrt{6}}{4} = 2\sqrt{6}$,

тогда высота $\triangle CDF$: $CH_1 = CH - 2r = \sqrt{6}$

$$\Rightarrow k = \frac{CH_1}{CH} = \frac{1}{2}$$

№9

Две окружности внутренне касаются в точке A, отрезок AB – диаметр большей окружности. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке D. Прямая AD пересекает большую окружность ещё раз в точке E. Известно, что $AD = 3$ и $CD = 1$. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$. (Олимпиада «Физтех» для 9 класса, февр. 2022 г.)



$R, r - ?$

$S_{BACE} - ?$

$$\frac{3}{2r} = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$r = \frac{9}{2\sqrt{8}} = \frac{9\sqrt{8}}{16}$$

1) $\triangle FDA \sim \triangle DCA$ – по острому углу (угол м/у касательной и хордой)

$$\Rightarrow \frac{3}{2r} = \frac{\sqrt{8}}{3} \Rightarrow r = \frac{9}{2\sqrt{8}}$$

2) По св-ву касательной и секущей

$$BD = 2\sqrt{R(R-r)}$$

3) По т. Пиф в $\triangle BCA$:

$$4R(R-r)+4\sqrt{R(R-r)}+1+8=4R^2$$

$$4Rr-9=4\sqrt{R(R-r)}$$

$$16R^2\cdot\frac{81}{32}-72R\frac{9}{2\sqrt{8}}=16R\left(R-\frac{9}{2\sqrt{8}}\right)$$

$$\frac{81}{2}R^2-16R^2-\frac{36\cdot 9}{\sqrt{8}}R+\frac{8\cdot 9}{\sqrt{8}}R=0$$

$$\frac{49}{2}R=\frac{28\cdot 9}{\sqrt{8}}$$

$$R=\frac{14\cdot 9}{49\sqrt{8}}=\frac{126}{49\sqrt{8}}$$

4) Площадь

$$S=\frac{1}{2}BC\cdot AE\cdot\sin\varphi$$

$$\sin\varphi=\frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$BC=BD+1$$

$$AE=ED+3$$

находим из $\triangle BDA\sim\triangle EDC$.