$+ \quad \times$

$- \quad \div$

§1. Модуль. Уравнения. Неравенства

Опр: Модуль ф-ции (числа)

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0 \end{cases}$$

Свойства:

1) $|a| \geq 0$
2) $|a| \geq a$
3) $|a \cdot b| = \frac{|a|}{|b|}$ $\left(\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \right)$
4) $|-a| = |a|$
5) $|a^2| = |a|^2 = a^2$
6) $|a+b| \leq |a| + |b|$
7) $|a-b| \geq ||a| - |b||$
8) $|a-b|$ – расстояние между точками на числ. оси
9) $\sqrt{a^2} = |a|$

Замечание: Равносильные переходы для ур-й с модулем

1) $|A| = |B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right.$

2) $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right. \\ B \geq 0 \end{cases}$

Способы решения уравнений с модулем

- Опр-е модуля (I)
- перебор промежутков (II)
- равносильные переходы (III)

Рассмотрим примеры

(I) $|2x-3| = 3-2x = -(2x-3)$

Ответ: $x \leq \frac{3}{2}$

(II) $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$

	$x<1$	1 — 2	2 — 3	$x>3$
$\|x-1\|$:	$-$	$+$	$+$	$+$
$\|x-2\|$:	$-$	$-$	$+$	$+$
$\|x-3\|$:	$-$	$-$	$-$	$+$
	1	2	3	4

Ответ: $[1;2]\cup\{5\}$

(III) 1. $|x^2-x-3|=-x-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2-x-3=-x-1 \\ x^2-x-3=x+1 \end{array}\right. \\ x+1\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2=2 \\ x^2-2x-4=0 \end{array}\right. \\ x+1\le 0 \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{2} \\ x=1\pm\sqrt{5} \end{array}\right. \\ x\le -1 \end{cases}$$

Ответ: $-\sqrt{2};\ 1-\sqrt{5}$

2. $|x-|2x+3||=3x-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-|2x+3|=3x-1 \\ x-|2x+3|=1-3x \end{array}\right. \\ 3x-1\ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} |2x+3|=1-2x \\ |2x+3|=4x-1 \end{array}\right. \\ x\ge \frac{1}{3} \end{cases}$$

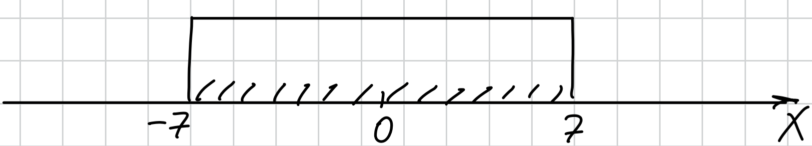
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x+3=1-2x \\ 2x+3=2x-1 \end{array} \right. \\ 1-2x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x+3=4x-1 \\ 2x+3=1-4x \end{array} \right. \\ 4x-1 \geq 0 \end{cases} \end{array} \right. \\ x \geq \frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1/2 \\ 1-2x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\frac{1}{3} \end{array} \right. \\ x \geq \frac{1}{4} \end{cases} \end{array} \right. \\ x \geq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

Неравенства с модулем

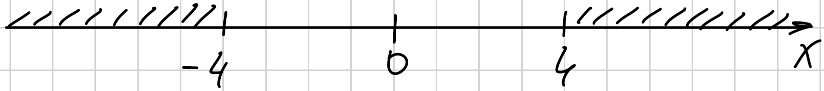
1. Геометрический смысл

$|x-a|$ – расстояние от x до a

$|x|<7$ – все точки, которые удалены от нуля на расст <7



$|x| \geq 4$



Пример: $\dfrac{|x-3|+2}{|2x-3|-5} \leq 0$

Числитель всегда >0 $\Rightarrow$

$$\Leftrightarrow |2x-3|-5<0$$

$$|2x-3|<5$$

Величина $2x$ удалена от 3 на расст меньше 5:

$$-2<2x<8$$

Ответ: $x \in (-1, 4)$

2. Замена переменной

Пример:

$$\frac{|x-2|}{\frac{12}{|x-2|}-1} > 1$$

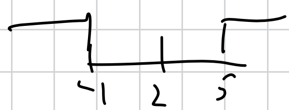
Пусть $t = |x-2|$:

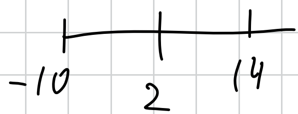
$$\frac{t}{\frac{12}{t}-1} > 1$$

$$\frac{t^2}{12-t} > 1$$

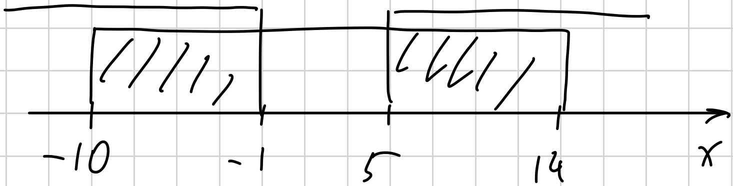
$$\frac{t^2+t-12}{12-t} > 0$$

$$\frac{(t+4)(t-3)}{12-t} > 0$$





$$\left[\begin{array}{l} |x-2| < -4 \iff \varnothing \\ 3 < |x-2| < 12 \iff \begin{cases} |x-2| < 12 \\ |x-2| > 3 \end{cases} \begin{cases} -10 < x < 14 \\ \left[\begin{array}{l} x > 5 \\ x < -1 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$



Ответ: $(-10,-1)\cup(5,14)$

3. Перебор промежутков

Ну тут скучно, аналогично ур-ям

4. Равносильные переходы

4.1. Умножение на модуль:

$$\frac{A}{|B|} < C \iff \begin{cases} A<|B|C \\ B\neq 0\end{cases}$$

Пример:
$$\frac{|x-5|-|x+4|}{|x-2|-|x+1|} < \frac{|x-2|+|x+1|}{|x+4|}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{|(x-5)(x+4)|-(x+4)^2}{(x-2)^2-(x+1)^2} < 1 \\ x\neq 4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|x^2-x-20|-x^2-2x-19}{2x-1} > 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

1) Пусть $x \in (-\infty; -4) \cup [5, +\infty)$

$$\frac{-3x-39}{2x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+13}{2x-1} < 0 \Leftrightarrow -13 < x < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow /-13 < x < -4/$$

2) Пусть $x \in (-4; 5)$

$$\frac{-2x^2-x+1}{2x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(2x-1)}{2x-1} < 0$$

$$/-4 < x < -1/$$

Ответ: $(-13, -4) \cup (-4, -1)$

4.2. Неравенства вида $|A| < B$

$$|A| \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \leq B \\ A \geq -B \end{cases}$$

$\triangle$

1) Если $B>0$ – из геом. равносильны

На олимпиаде лучше приводить эти рассуждения

2) Если $B\le 0$ – ур-е не имеет реш, как и система

$\Rightarrow$ Равносильны

$\boxed{\text{///}}$

Пример: $|x^2-3x+1|<x-2$ – попробуйте решить раскрыв модуль !!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+1<x-2 \\ x^2-3x+1>2-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-4x+3<0 \\ x^2-2x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x<3 \\ \left[\begin{array}{l} x>1+\sqrt{2} \\ x<1-\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $(1+\sqrt{2};\,3)$

4.3. Неравенства вида $|A| > B$

$$|A| \geq B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A \geq B \\ A \leq -B \end{array}\right.$$

⚠

1) Если $B > 0 \Rightarrow$ из геом. равносильны
2) Если $B \leq 0$, то $|A| > B$ – выполнено $\forall x$

Как и совокупность:

Если $A > 0 \Rightarrow A > B \ \forall x \Rightarrow$ равносильны

Если $A < 0 \Rightarrow A < B \ \forall x \Rightarrow$ равносильны

Пример: $\left||x^2-8x+2|-x^2\right| \geq 2x+2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x^2-8x+2|-x^2 \geq 2x+2 \\ |x^2-8x+2|-x^2 \leq -2x-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x^2-8x+2| \geq x^2+2x+2 \\ |x^2-8x+2| \leq x^2-2x-2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-8x+2 \geq x^2+2x+2 \\ x^2-8x+2 \leq -x^2-2x-2 \\ \left\{\begin{array}{l} x^2-8x+2 \leq x^2-2x-2 \\ x^2-8x+2 \geq -x^2+2x+2 \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x \leq 0 \\ x^2-3x+2 \leq 0 \\ \left\{\begin{array}{l} x \geq \frac{2}{3} \\ x^2-5x \geq 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [1, 2] \cup [5, +\infty)$

4.4. Неравенство вида $|A| < |B|$

$$|A| \vee |B| \Leftrightarrow (A-B)(A+B) \vee 0$$

любой знак неравенства

Пример $|x^2+10x+16| \geq |x^2-16|$

$$\Leftrightarrow (10x+32)(2x^2+10x) \geq 0$$

$$\left(x+\frac{16}{5}\right) x (x+5) \geq 0$$

Ответ: $[-5; -\frac{16}{5}] \cup [0; +\infty)$