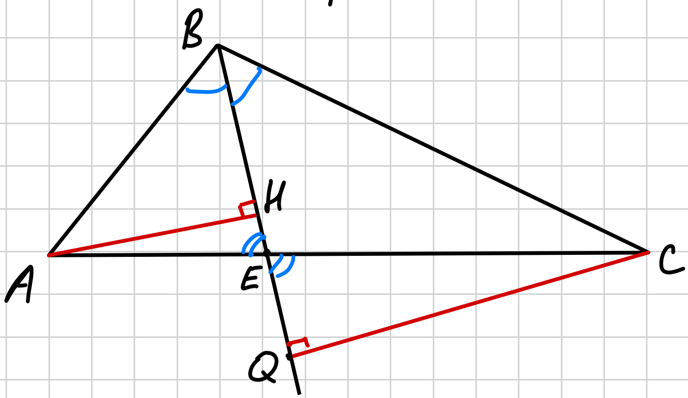
+ ×

− ÷

Свойство биссектрисы: BE - бис-са $\Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AE}{CE}$



▲

1) $\triangle ABH \sim \triangle CBQ$: $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AH}{CQ}$

2) $\triangle AHE \sim \triangle CQE$: $\dfrac{AH}{CQ} = \dfrac{AE}{CE}$

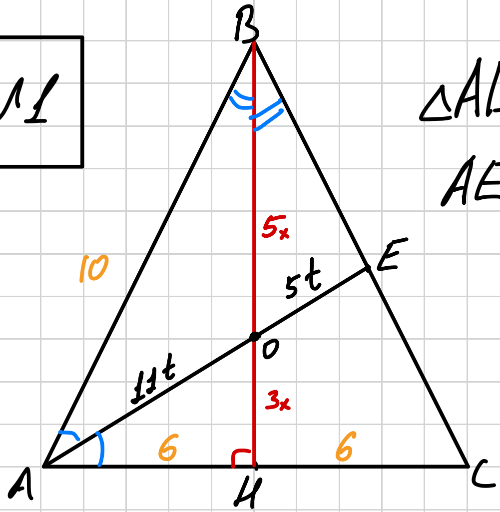
$\Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AE}{CE}$

■

$\boxed{№1}$

$\triangle ABC$ – р/б, $AB = BC = 10$, $AC = 12$

AE – ?



1) Проведем высоту/медиану/бис-су – AH

2) По св-ву бис-сы AO в $\triangle ABH$: $BO = 5x$, $OH = 3x$

3) По св-ву бис-сы AE в $\triangle ABC$: $BE = 5y$, $EC = 6y$

Тогда: $BC = 11y = 10 \Rightarrow BE = \frac{50}{11}$

4) По св-ву бис-сы BO в $\triangle ABE$:

$$\frac{AO}{OE} = \frac{10}{50/11} = \frac{11}{5}$$

5) Найдем x из Т. Пифагора в $\triangle ABH$:

$$8^2 x^2 = 10^2 - 6^2 = (10-6)(10+6) = 8^2$$

$$x = 1 \Rightarrow OH = 3$$

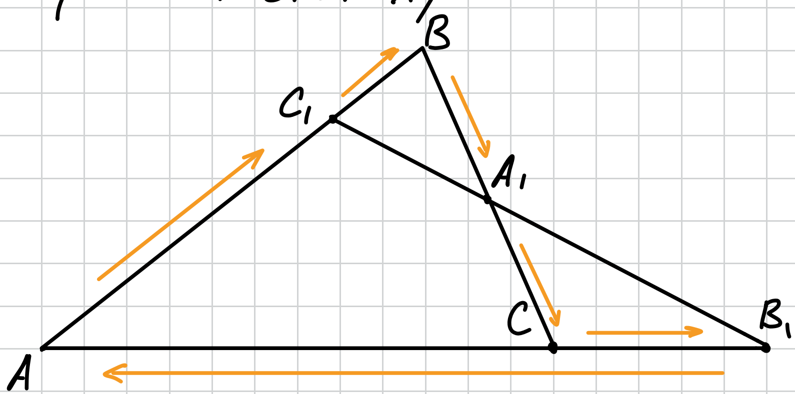
6) По Т. Пифагора в $\triangle AOH$:

$$11^2 t^2 = 6^2 + 3^2 = 3^2(2^2+1) = 5 \cdot 3^2$$

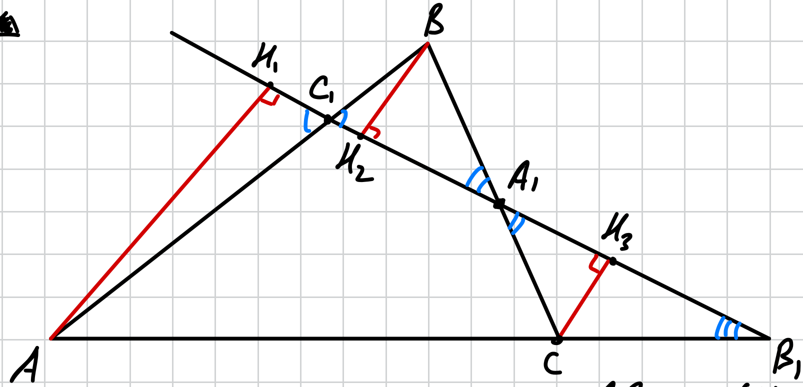
$$t = \frac{3\sqrt{5}}{11} \Rightarrow AE = \frac{48\sqrt{5}}{11}$$

Т1

(Теорема Менелая)



$$\boxed{\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1}$$



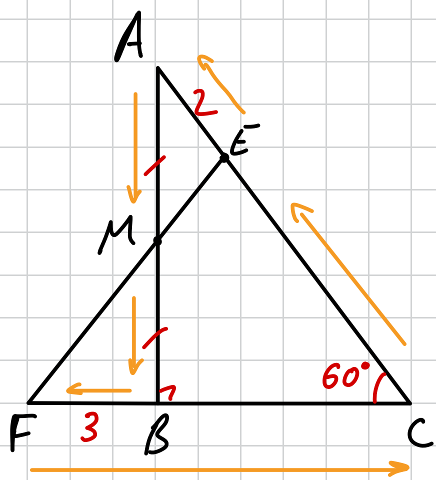
1) $\triangle AC_1H_1 \sim \triangle BC_1H_2 \Rightarrow \dfrac{AC_1}{C_1B} = \dfrac{AH_1}{BH_2}$

2) $\triangle BA_1H_2 \sim \triangle CA_1H_3 \Rightarrow \dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{BH_2}{CH_3}$

3) $\triangle B_1CH_3 \sim \triangle B_1AH_1 \Rightarrow \dfrac{B_1C}{B_1A} = \dfrac{CH_3}{AH_1}$

$\Rightarrow$ перемножаем

№2



$S_{\triangle ABC}$ – ?

1) Пусть $BC = x$. т.к. $\angle BAC = 30^\circ \Rightarrow AC = 2x \Rightarrow EC = 2x-2$

2) Применим Т. Менелая:

$$\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BF}{FC}=1$$

$$\frac{2x-2}{2}\cdot 1\cdot\frac{3}{3+x}=1$$

$$3x-3=3+x \Rightarrow x=3 \Rightarrow \begin{cases}BC=3\\ AC=6\end{cases}$$

3) По т. Пифагора:

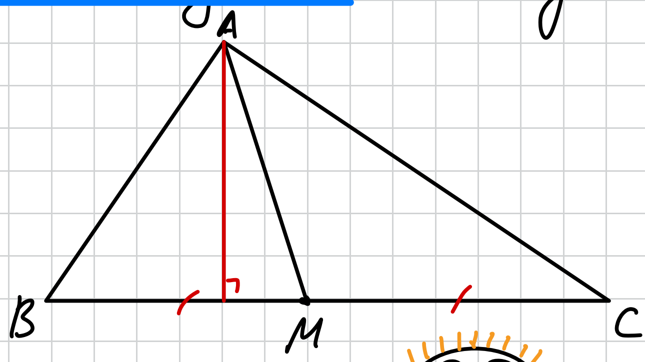
$$AB^2=6^2-3^2=3^2(2^2-1)=3^2\cdot 3$$

$$AB=3\sqrt{3}$$

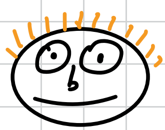
4) Тогда площадь:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\,3\sqrt{3}\cdot 3=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Свойство медианы: AM - медиана $\Rightarrow S_{ABM}=S_{AMC}$

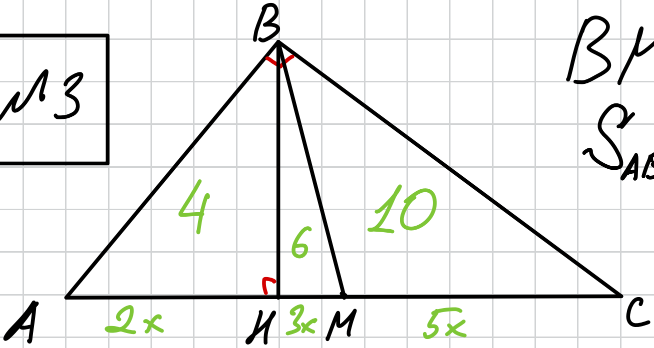


Подумайте сами



$\blacksquare$

№3



BM – медиана

$S_{ABH} = 4,\ S_{BMC} = 10$

AC – ?

1) BM – медиана $\Delta ABC \Rightarrow S_{ABM} = S_{BMC} = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{BHM} = 10 - 4 = 6$

2) Заметим, что: $S_{ABH} : S_{HBM} : S_{MBC} = 4 : 6 : 10 =$

$= AH : HM : MC = 2 : 3 : 5$

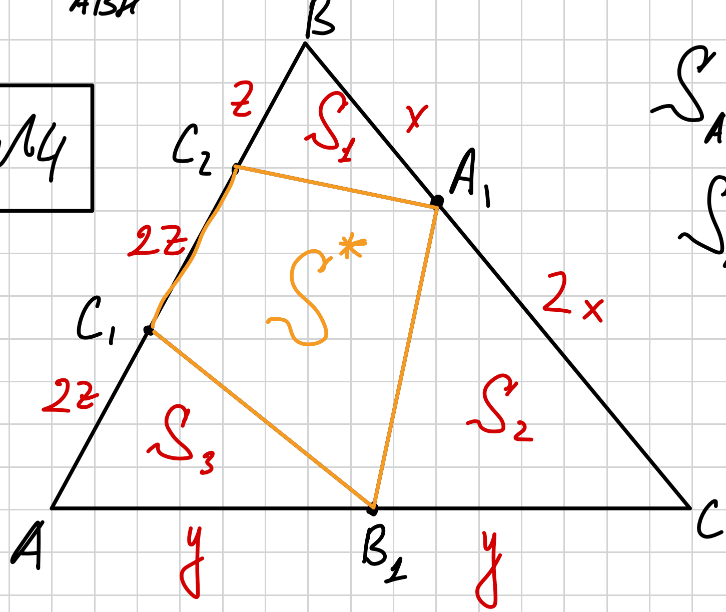
3) $\Delta ABH \sim \Delta CBH$: $\dfrac{AH}{BH} = \dfrac{BH}{HC} \Rightarrow BH^2 = AH \cdot HC = 16x^2$

$\Downarrow$

$BH = 4x$

4) $S_{ABH} = 4 = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 4x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow AC = 10$

№4



$S_{ABC} = S$

$S_{A_1B_1C_1C_2}$ – ?

1) В этой задаче, чтобы найти S_1, S_2, S_3 применим ЗП1 из §5 (задача о Δ-ках, вписанных в один угол):

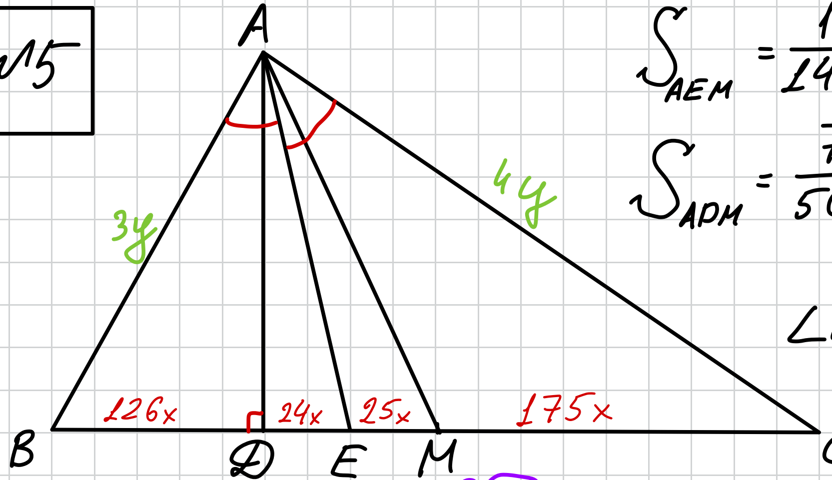
$$\frac{S_1}{S} = \frac{BC_2}{BA} \cdot \frac{BA_1}{BC} = \frac{z}{5z} \cdot \frac{x}{3x} = \frac{1}{15}$$

$$\frac{S_2}{S} = \frac{2x}{3x} \cdot \frac{y}{2y} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{S_3}{S} = \frac{2z}{5z} \cdot \frac{y}{2y} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \quad S_4 = \left(1 - \frac{1}{15} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) S = \frac{6}{15} S = \frac{2}{3} S$$

№5



$S_{AEM} = \frac{1}{14} S_{ABC}$

$S_{ADM} = \frac{7}{50} S_{ABC}$

$\angle A = ?$

AE - бис-са

AД - высота

AM - медиана

Замечание: Есть теорема о том, что бис-са угла лежит м/у медианой и высотой

1) Заметим, что ΔAEM и $\Delta AДM$ имеют общую высоту

$$\Rightarrow \frac{S_{AEM}}{S_{ADM}} = \frac{50}{14 \cdot 7} = \frac{25}{49} = \frac{EM}{ДM}$$

2) Аналогично для ΔEAM и ΔABC:

$$\frac{S_{EAM}}{S_{ABC}} = \frac{EM}{BC} = \frac{1}{14} \Rightarrow BC = 14 \cdot 25x = 350x$$

3) AM - медиана $\Rightarrow BM = MC = 175x$

4) По св-ву бис-сы AE в ΔABC:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{150x}{200x} = \frac{3}{4}$$

5) Найдем АД – по Т. Пифагора в Δ-ках ΔАВД и ΔАСД и приравняем (!):

$$9y^2 - (126x)^2 = 16y^2 - (224x)^2$$

$$7y^2 = (224 - 126)(224 + 126)x^2$$

$$7y^2 = 98 \cdot 350x^2$$

$$7y^2 = 7 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 50x^2 = 7 \cdot 49 \cdot 100x^2$$

$$y = 7 \cdot 10x$$

$$y = 70x$$

Тогда: $BC = 350x = 5y$

6) Тогда в Δ-ке АВС:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \angle A = 90^\circ$$