+ ×

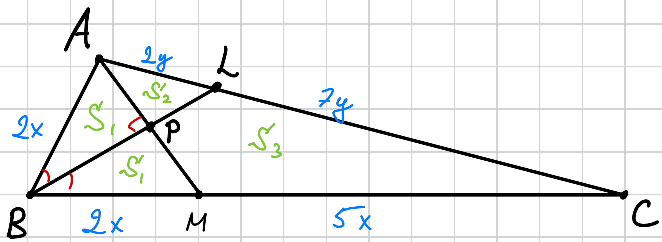
− ÷

№1 (Физтех 2015, 11 класс)

На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM:MC = 2:5$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка F такая, что $MF:FC = 1:4$. Пусть дополнительно известно, что прямые LF и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.



1) $\dfrac{S_{ABP}}{S_{LPMC}}$ – ?

1) $\Delta ABP = \Delta MBP$ – BP – общий катет, $\angle ABP = \angle PBM \Rightarrow$

$\Rightarrow AP = PM$, $AB = BM = 2x$

2) По св-ву бис-сы:

$$\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{7}$$

3) Обозначим $S_{ABM} = S_{BMP} = S_1$, $S_{APL} = S_2$, $S_{MPLC} = S_3$

4) Рассм. ΔABM и ΔAMC – высота, опущ. из A-у них общая, тогда:

$$\frac{S_{ABM}}{S_{AMC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot h\cdot BM}{\frac{1}{2}\cdot h\cdot MC} = \frac{2}{5} = \frac{2S_1}{S_2+S_3}$$

5) Рассм. $\triangle ALB$ и $\triangle BLC$ – высота, опущ. из B у них общая:

$$\frac{S_{ALB}}{S_{BLC}} = \frac{AL}{LC} = \frac{2}{7} = \frac{S_1+S_2}{S_1+S_3}$$

6) Получили:

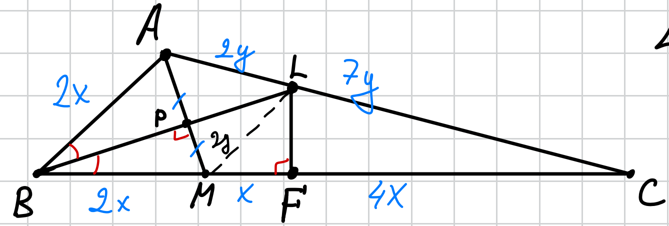
$$\begin{cases} \frac{S_1}{S_2+S_3} = \frac{1}{5} \\ \frac{S_1+S_2}{S_1+S_3} = \frac{2}{7} \\ \frac{S_3}{S_1} = x \text{ - ?} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\frac{S_2}{S_1}+x} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = 5-x \\ \frac{1+\frac{S_2}{S_1}}{1+x} = \frac{2}{7} \Rightarrow \frac{6-x}{1+x} = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 42-7x = 2+2x$$

$$x = \frac{40}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABP}}{S_{LPMC}} = \frac{9}{40}$$

②



$\angle CBL = ?$

1) Проведем ML: $\triangle ALP = \triangle MLP \Rightarrow ML = AL = 2y$

2) Рассм. $\triangle MLF'$ и $\triangle LF'C$: по Т. Пифагора:

$$\begin{cases} LF'^2 = 49y^2 - 16x^2 \\ LF'^2 = 4y^2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \sqrt{3}\,y$$

$$\Rightarrow LF'^2 = \frac{4}{3}x^2 - x^2 = \frac{1}{3}x^2 \Rightarrow LF' = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

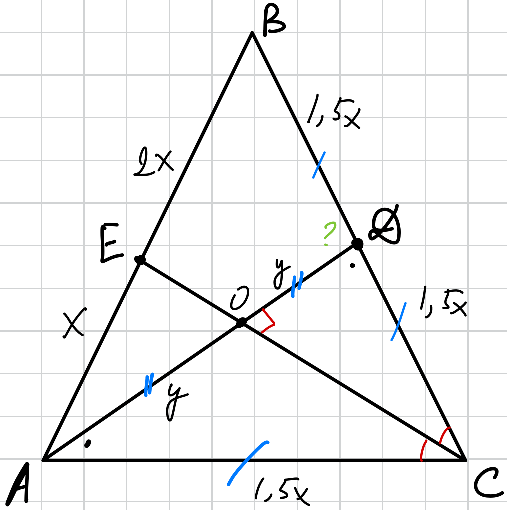
3) Тогда в $\triangle BLF'$:

$$\underset{\angle CBL}{\underset{\parallel}{\mathrm{tg}(\angle LBF')}} = \frac{x}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3x} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\cos(\angle CBL) = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{27}}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

в ответах было так

№2



1) $\triangle AOC = \triangle ДOC \Rightarrow AC = ДC = \frac{1}{2} BC \Rightarrow$

$\Rightarrow CO$ – медиана $\Rightarrow AO = OД = y$

2) По св-ву бис-сы:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{matrix} AE = x;\ EB = 2x \\ AД = ДC = 1{,}5x = AC \end{matrix}$$

3) Пусть $\angle ACE = \angle ECB = \alpha \Rightarrow \angle BAC = \angle ACB = 2\alpha$

4) Рассм $\triangle ABC$: по т. cos:

$$9x^2 = 9x^2 + 2{,}25x^2 - 2 \cdot 1{,}5x \; 3x \cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{4}$$

5) Рассм $\triangle AДC$: по т. cos:

$$4y^2 = 2{,}25x^2 + 2{,}25x^2 - 2 \cdot 1{,}5x \cdot 1{,}5x \cos 2\alpha$$

$$4y^2 = 4{,}5x^2 - \frac{1}{2}\cdot 2{,}25x^2$$

$$4y^2 = \frac{3}{2}\cdot 2{,}25x^2$$

$$y^2 = \frac{3}{8}\cdot\frac{9}{4}x^2$$

$$y = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}x$$

6) Рассм $\triangle ADC$

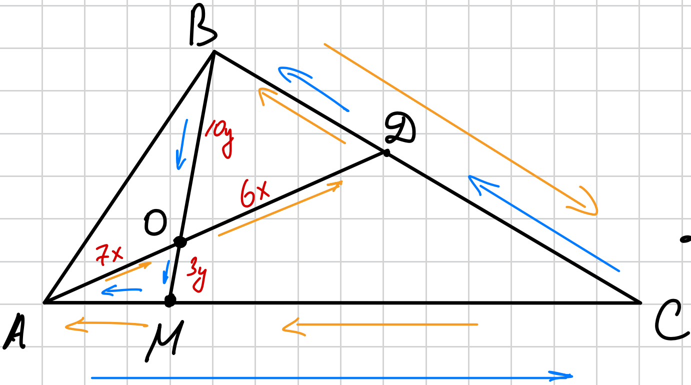
$$\cos(\angle ODC) = \frac{y}{\frac{3}{2}x} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin(\angle ODC) = \sqrt{1-\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$\Rightarrow \angle ADB = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{10}}{4}$$

№3 (Из Д/З)

Точка M лежит на стороне AC, точка D – на стороне BC треугольника ABC. Отрезки BM и AD пересекаются в точке O. Известно, что $AO:OD=7:6$ и $BO:OM=10:3$. Найти отношения $AM:MC$ и $BD:DC$.



1) $\frac{AM}{MC}$ – ?

2) $\frac{BD}{DC}$ – ?

1) Рассм. ΔMBC: по Т. Менелая:

$$\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BO}{OM}\cdot\frac{AM}{AC}=1$$

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{MO}{BO}\cdot\frac{AM+MC}{AM}=1$$

$$\frac{BD}{DC}\cdot\left(1+\frac{MC}{AM}\right)=\frac{10}{3}$$

2) Рассм. ΔADC: по Т. Менелая:

$$\frac{MC}{AM}\cdot\frac{AO}{OD}\cdot\frac{DB}{BC}=1$$

$$\frac{MC}{AM}\cdot\frac{DB}{BC}=\frac{6}{7} \Leftrightarrow \frac{AM}{MC}\cdot\left(1+\frac{DC}{BD}\right)=\frac{7}{6}$$

3) Получим:

$$x = \frac{BD}{DC} \cdot \frac{MC}{AM}; \quad y = \frac{BD}{DC}$$

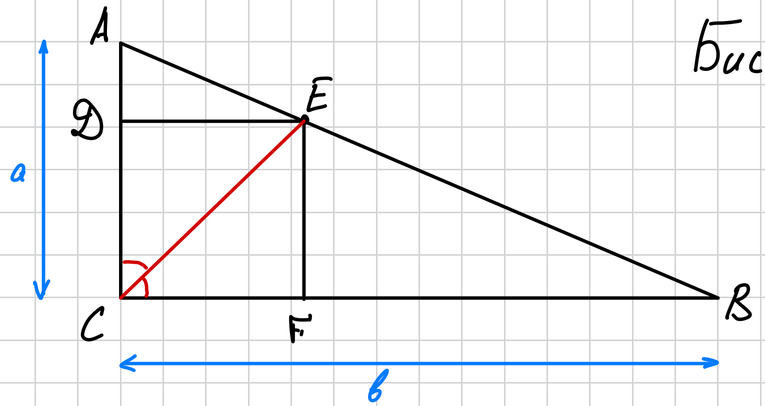
$$\begin{cases} \frac{BD}{DC} \cdot \frac{MC}{AM} + \frac{BD}{DC} = \frac{10}{3} \\ \frac{AM}{MC} \cdot \frac{DC}{BD} + \frac{AM}{MC} = \frac{7}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \frac{10}{3} \\ \frac{1}{x} + \frac{y}{x} = \frac{7}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{10}{3} - x = \frac{52}{21} - \frac{6}{7}y \\ x = \frac{6}{7}(1+y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{26}{9} \\ x = \frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{BD}{DC} = \frac{26}{9} \\ \frac{MC}{AM} = \frac{15}{13} \end{cases}$$

№4 (Из Д/З)

В прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) с катетами a и b вписан квадрат $CDEF$, точка E лежит на гипотенузе AB. Найти сторону квадрата и длину биссектрисы треугольника ABC, проведенной из вершины прямого угла.



Бис-са-? ; СД-?

1) Заметим, что по св-вам квадрата СД–есть искомая биссектриса

2) По св-ву бис-сы:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{b} \quad (*)$$

3) Заметим, что $\angle CBE = \angle ДEA$ (как соотв.) $\Rightarrow \triangle AEД \sim \triangle EBF$ – по острому углу. Тогда:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{EД}{BF} \quad (**)$$

4) Обозначим сторону квадрата – x, тогда $(**)$, с учетом $(*)$:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{b-x} \Leftrightarrow bx = ab - ax \Leftrightarrow x = \frac{ab}{a+b}$$

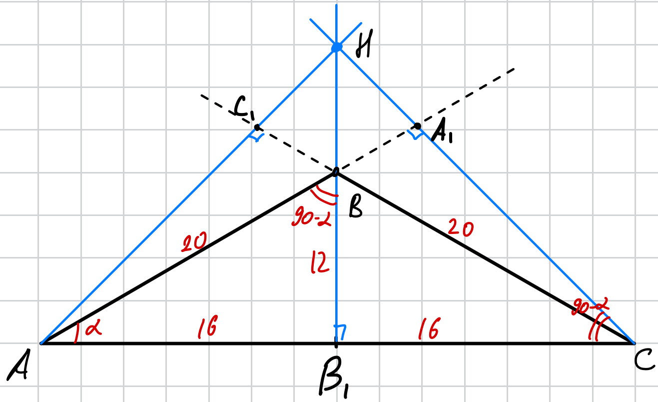
5) Тогда бис-са (диагональ квадрата): $CE = \sqrt{2}x$

(Из Д/З)

№5

В равнобедренном треугольнике ABC, $AB = BC = 20$, $AC = 32$, найти расстояние от точки B до точки H пересечения прямых, на которых лежат высоты.

0) Заметим, что $AB^2 + BC^2 < AC^2 \Rightarrow$ треугольник тупоугольный



1) Заметим, что $AB_1 = B_1C = 16$ (по св-ву высоты в равнобед. Δ-ке).

2) Тогда по Т. Пифагора в ΔABB_1: $BB_1 = 12$

3) Пусть $\angle BAB_1 = \alpha \Rightarrow \angle ABB_1 = 90° - \alpha$ (в ΔABB_1). В ΔAA_1C: $\angle ACA_1 = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha \Rightarrow \Delta AB_1B \sim \Delta AA_1C$ - по 2-м углам, тогда:

$$\frac{AA_1}{AB_1} = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow \frac{20 + BA_1}{16} = \frac{32}{20}$$

$$\Rightarrow BA_1 = \frac{8}{5}\cdot 16 - 20 = \frac{4}{5}(32-25) = \frac{28}{5}$$

4) По св-ву высот $\triangle ABC$: (легко получить из подобия)

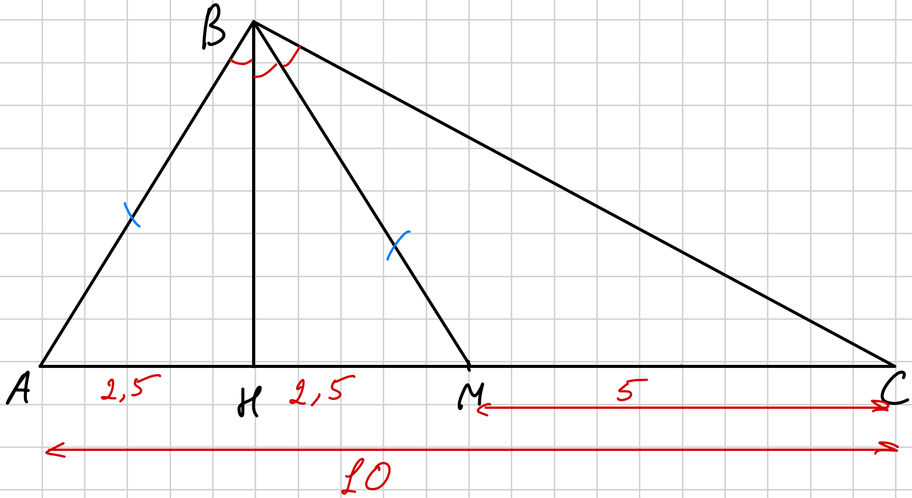
$$AB\cdot BA_1 = BH\cdot BB_1$$

$$\overset{4}{\cancel{20}} \cdot \frac{28}{\cancel{5}} = BH\cdot \overset{3}{\cancel{12}}$$

$$BH = \frac{28}{3}$$

$\boxed{№6}$ (Из Д/З)

В треугольнике ABC высота BH и медиана BM делят угол B на три равные части. Известно, что $AC = 10$. Найти периметр треугольника ABC.



1) Рассм. $\triangle ABM$: BH - высота и бис-са $\Rightarrow \triangle ABM$-р/б $\Rightarrow$ медиана $\Rightarrow$

$\Rightarrow AH = HM = 2{,}5$ и $AB = BM$

2) Пусть $BH = x$, тогда в $\triangle BHC$ по св-ву бис-сы

$$\frac{BH}{BC} = \frac{HM}{MC} \Leftrightarrow \frac{x}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow BC = 2x$$

3) В $\triangle BHC$ по т. Пифагора:

$$4x^2 = x^2 + (7{,}5)^2$$

$$3x^2 = 7{,}5 \cdot 7{,}5 = (3 \cdot 2{,}5)^2$$

$$x^2 = 3 \cdot (2{,}5)^2$$

$$x = 2{,}5\sqrt{3} \Rightarrow BC = 5\sqrt{3}$$

4) В $\triangle BHM$ по т. Пифагора:

$$BM^2 = 3 \cdot (2{,}5)^2 + (2{,}5)^2 = 4 \cdot (2{,}5)^2$$

$$BM = 5 \Rightarrow AB = 5$$

$$\Rightarrow \underline{P} = 5(3 + \sqrt{3})$$