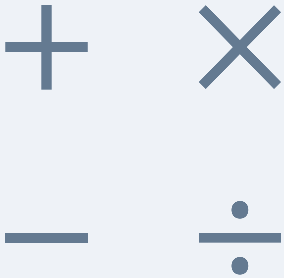

№1 Д-те, что а) $n^2-n \,\vdots\, 2$; б) $n^3-n \,\vdots\, 6$; в) $n^3+5n \,\vdots\, 6$

а) $n^2-n = n(n-1) \,\vdots\, 2$

2 подряд идущих числа ⇒ какое-то из них четное

б) $n^3-n = n(n-1)(n+1) \,\vdots\, 6$

Среди 3-х подряд идущих чисел одно $\vdots\, 2$, одно $\vdots\, 3$

в) Рассмотрим

$$\underbrace{n^3+5n}_{\vdots\,6} - \underbrace{(n^3-n)}_{\vdots\,6} = \underbrace{6n}_{\vdots\,6}$$

$\vdots\,6 \Leftarrow \vdots\,6$

Более общая идея: если есть k последовательных чисел, то:

$$n\cdot(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1) \,\vdots\, (k!) \quad (*)$$

есть число $\vdots\,2$, $\vdots\,3$, $\vdots\,4$, ...

(Здесь $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$)

№2 Д-ть, что $\overbrace{n^4+6n^3+11n^2+6n}^{B} \vdots 24$

1) Заметим, что $24=4!$

(*) $\Rightarrow$ $A=(n-1)n(n+1)(n+2) \vdots 24$

$n^4+2n^3-n^2-2n \vdots 24$

2) Рассмотрим $B-A=4n^3+12n^2+8n=$

$=4n(n^2+3n+2)=\underbrace{4}_{\vdots 4}\underbrace{n(n+1)(n+2)}_{\vdots (3!)} \vdots 24$

То есть:

$$\left.\begin{matrix} B-A \vdots 24 \\ A \vdots 24 \end{matrix}\right\} \Rightarrow B \vdots 24$$

//Можно было сразу заметить что $B=n(n+1)(n+2)(n+3) \vdots (4!)$//

№3 Д-ть, что а) $16^{35}+31^4-2 \vdots 15$;

б) $36^5+19^5-64 \vdots 17$

1) Вспомним ф-лу из темы "Ф-лы сокращенного умножения"

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b^1+\ldots+a^1b^{n-2}+b^{n-1})$$

2) Заметим, что $16-1=15 \vdots 1$, $31-1=30 \vdots 15$;

Тогда сгруппируем:

$$16^{35}-1^{35}+31^{4}-1^{4}=\underbrace{(16-1)}_{\vdots 15}(16^{34}+\ldots+1)+$$

$$+\underbrace{(31-1)}_{\vdots 15}(31^{3}+\ldots+1)\vdots 15$$

3) Аналогично решите пункт б)

Комментарий: Поймем, как считать НОК двух чисел зная их факторизацию (канон. вид)

1) Выписываем все простые делители обоих чисел

2) Ставим минимальные степени делителей, которые есть в разложениях

$$6787=11^{1}\cdot 617^{1}$$

$$7194=2^{1}\cdot 3^{1}\cdot 11^{1}\cdot 109^{1}$$

Тогда $[6787,7194]=2^{1}\cdot 3^{1}\cdot 11^{11}\cdot 109^{1}\cdot 617^{1}$

Сравним с $(6787,7194)=11$

Заметим, что: $(6787,7194)[6787,7194]=6787\cdot 7194$

$$[a,b]\cdot(a,b) = a\cdot b$$

№4 Найдите натуральные числа a и b:

$a \le b,\ (a;b)=6,\ [a;b]=90$

1) $(a;b)=6 \Leftrightarrow \begin{cases} a \,\vdots\, 6 \\ b \,\vdots\, 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6x \\ b = 6y \end{cases}$, где $(x,y)=1$

2) Тогда:

$[a;b] = 6xy = 90$

$6xy \,\vdots\, a$

$6xy \,\vdots\, b$

3) Получаем систему

$\begin{cases} xy = 15 = 3^1\cdot 5^1 \\ (x;y)=1 \\ x \le y \end{cases}$ – Переберем все такие числа

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=15 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=18 \\ b=30 \end{cases} \\ \begin{cases} a=6 \\ b=90 \end{cases} \end{array}\right.$ Ответ

№5 Док-ть, что если натуральное число $\overline{abc} \vdots 37$, то число $\overline{cab} \vdots 37$

1) Заметим, что

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c \vdots 37$$

$$\Leftrightarrow 100a + 10b + c = 37t, \text{ где } t \in \mathbb{N}$$

$$\overline{cab} = 100c + 10a + b = 100(37t - 100a - 10b) +$$

$$+ 10a + b = \underbrace{100 \cdot 37t}_{\vdots 37} - \underbrace{9990}_{\substack{37 \cdot 270 \\ \vdots 37}}a - \underbrace{999}_{\substack{37 \cdot 27 \\ \vdots 37}}b \vdots 37$$