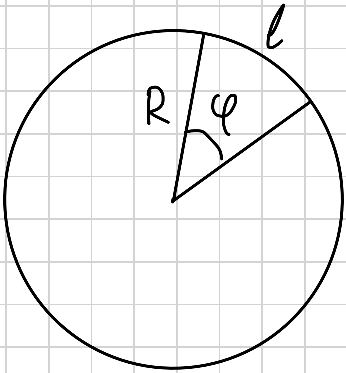
+ ×

− ÷

§ 1. Математическая справка

1. Радианная мера угла



$$\varphi = \frac{l}{R} \,[\text{рад}]$$

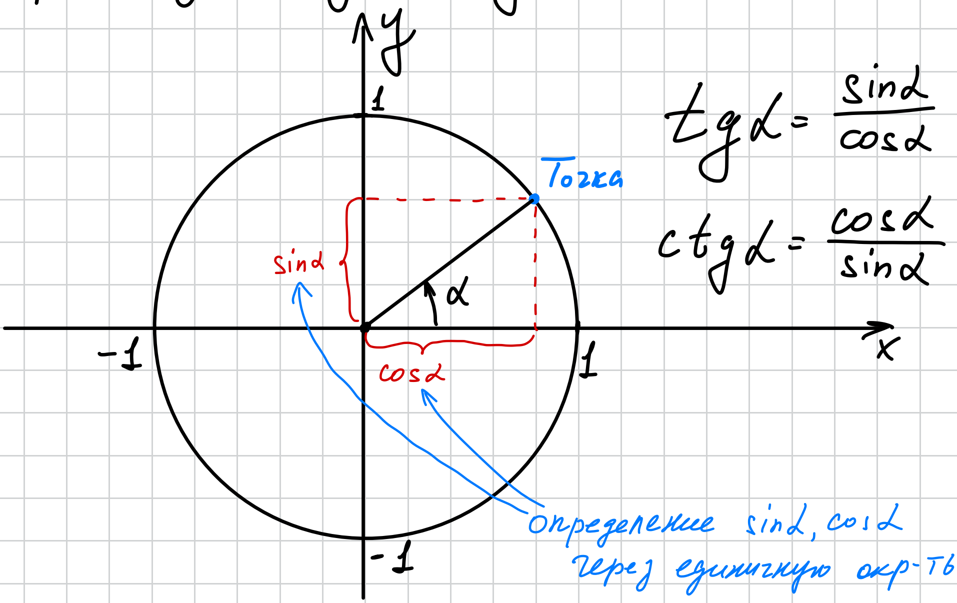
Пол окружности: $\varphi[^\circ] = 180^\circ$

$l = \pi R$

$$\Rightarrow \frac{\varphi[\text{рад}]}{\varphi^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

2. Тригонометрические ф-ции

Рассмотрим единичную окружность:



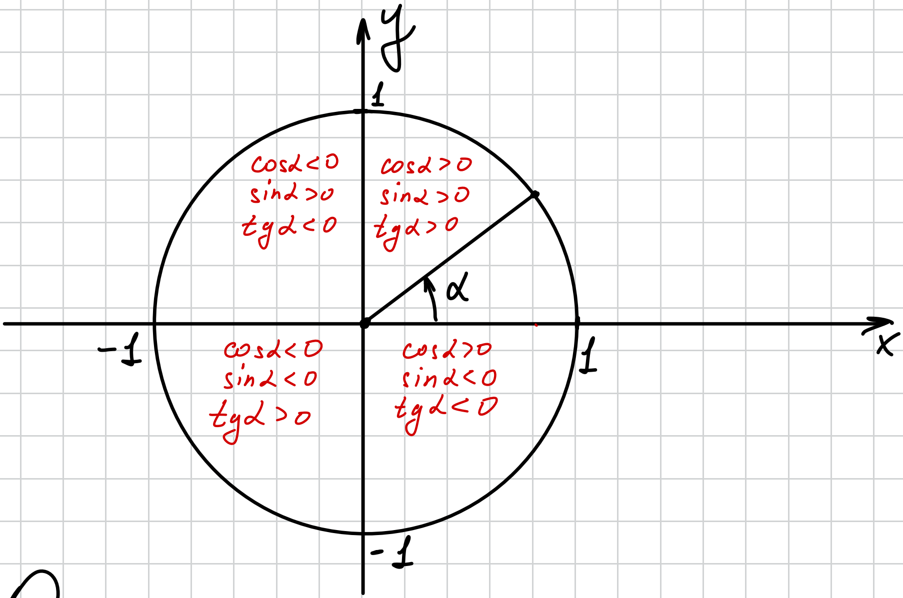
$$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$ctg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Против часовой стрелки $\alpha > 0$, наоборот - $\alpha < 0$

Рассмотрим свойства ф-ций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, введенных таким образом:

1. Интервалы знако-постоянства



2. Ограниченность $\sin\alpha, \cos\alpha$

$$-1 \le \cos\alpha \le 1$$

$$-1 \le \sin\alpha \le 1$$

3. Основное тригонометрическое тождество (!!!)

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

отсюда можно выразить $\sin\alpha = \pm\sqrt{\ldots}$, знак зависит от того, в какой четверти находится α.

4. Четность/нечетность

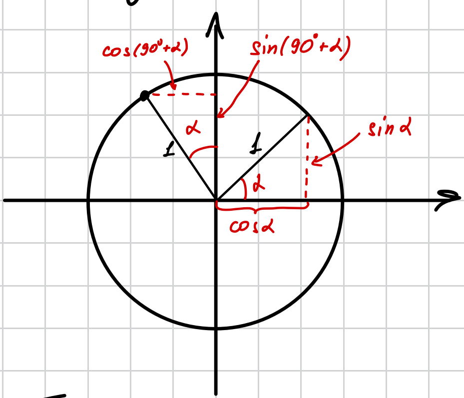
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

5. Формулы приведения

- $\sin(90^\circ+\alpha) = \sin(90^\circ-\alpha) = \cos\alpha$

Поясним на единичной окр-ти



Δ-ки равны ⇒ стороны равны

Таким образом можно аналогично показать, что:

- $\sin(180^\circ+\alpha) = \sin(\alpha)$; $\sin(180^\circ+\alpha) = -\sin\alpha$
- $\cos(90^\circ-\alpha) = \sin\alpha$; $\cos(90^\circ+\alpha) = -\sin\alpha$
- $\cos(180^\circ-\alpha) = -\cos\alpha = \cos(180^\circ+\alpha)$

Общее правило $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

$$f\left(n\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\begin{cases}\pm f(\alpha), & n\text{-четное}\\ \pm g(\alpha), & n\text{-нечетное}\end{cases}$$

знак зависит от знака исходной ф-ции в четверти, к которой принадлежит угол $\left(n\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

- f – любая триг. ф-ция ($\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$)
- g – её "замена": $\sin\alpha \longleftrightarrow \cos\alpha$; $\operatorname{tg}\alpha \longleftrightarrow \operatorname{ctg}\alpha$

6. Косинус/синус суммы

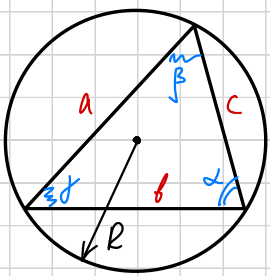
- $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

Часто встречающиеся углы

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	0
$ctg\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	—

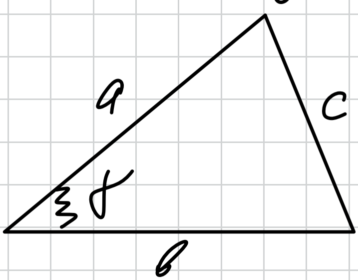
3. Факты из планиметрии

1. Теорема синусов



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

2. Теорема косинусов



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

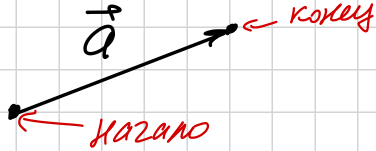
§2. Векторы

Физ. величины

- скалярные (T, m, ρ, V, ...)
- векторные (сила, скорость, перемещение)

Опр 1: Вектором называется направленный отрезок, для которого определены правила сложения (вычитания) с другими векторами и правило умножения вектора на число

Обозначают: $\vec{a}$



Опр. 2: Модуль вектора – его длина. Обозначается $|\vec{a}| = a$.

Опр. 3: Нулевым называется вектор, начало и конец которого совпадают

Опр 4: Векторы называются коллинеарными, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых

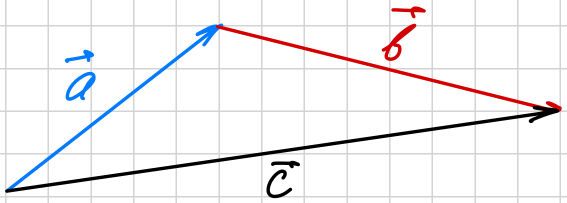
Опр 5: Векторы называются равными, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление

1. Сложение векторов

- **Правило треугольника**

1) Переносим вектор $\vec{b}$ параллельно самому себе так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$

2) Вектор с началом в начале в-ра $\vec{a}$ и с концом в конце в-ра $\vec{b}$ будет их суммой

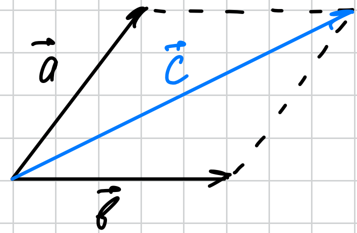


- **Правило параллелограмма**

1) Совмещаем начала векторов

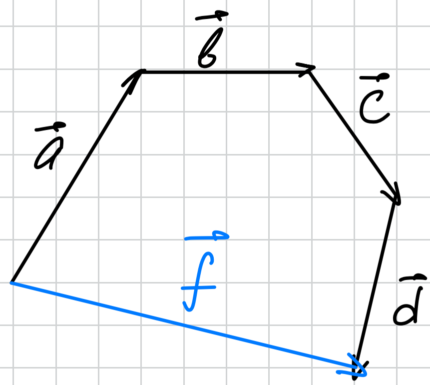
2) Построить на их сторонах параллелограмм

3) Сумма — диагональ этого параллелограмма



• Сложение 3-х и более векторов

$$\vec{f} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\vec{a} + \vec{b}}_{\vec{e}} + \vec{c}}_{\vec{g}} + \vec{d}}_{\vec{h}} + \ldots$$



Правило многоугольника