

TD 1 : Calcul matriciel

Exercice 1 - Opérations simples sur les matrices

On considère les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} & B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} & I_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ J_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & I_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.1 Calculer lorsque cela a du sens les quantités suivantes.

- | | | | |
|---------------|-----------|-------------|------------|
| (a) $2A$ | (d) AB | (g) $I_2 A$ | (j) AA^t |
| (b) $B + I_3$ | (e) BA | (h) $J_2 A$ | (k) DB |
| (c) $A + B$ | (f) A^t | (i) AI_3 | (l) BD |

Exercice 2 - Calculs de déterminants

Calculer les déterminants des matrices suivantes. À quelle(s) condition(s) sont-elles inversibles ?

$$\begin{aligned} \mathbf{2.1} \quad M_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} & \mathbf{2.3} \quad M_3 &= \begin{pmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 \\ 1 & C_{n+1}^1 & C_{n+1}^2 \\ 1 & C_{n+2}^1 & C_{n+2}^2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{2.2} \quad M_2 &= \begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ & -1 & 1 & \\ & 1 & -1 & \\ 1 & & & -1 \end{pmatrix} & \mathbf{2.4} \quad M_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 3 - Calculs d'inverses de matrice

Pour chacune des matrices suivantes, dire à quelle condition le déterminant est non-nul, puis calculer l'inverse de la matrice.

$$\begin{aligned} \mathbf{3.1} \quad M_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \mathbf{3.3} \quad M_3 &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} \\ \mathbf{3.2} \quad M_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{3.4} \quad M_4 &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ d & c & b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 4 - Calcul matriciel et interpolation polynomiale (examen 2023-2024)

On considère le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

4.1 Calculer $P(2)$, $P(3)$, et $P(1) - P(-1)$.

4.2 Calculer $A \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$. Comparer le résultat avec celui de la question précédente, et commenter.

4.3 Calculer $\det(A)$ et A^{-1} à l'aide de la méthode par **pivot de Gauss**.

4.4 **En utilisant ce qui précède**, trouver $P(x)$ sachant que $P(1) = P(-1)$, $P(2) = 1$ et $P(3) = 6$.