Christophe Mouilleron
christophe.mouilleron@ensiie.fr

TD 1 : Prise en main de sage

Exercice 1 - Résolution d'une équation

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation $2^x = x^2$.

1.1 Utilisez la fonction `plot` pour obtenir le graphe de la fonction $f : x \mapsto x^2$ en bleu.

1.2 Tracez le graphe de la fonction $g : x \mapsto 2^x$ en rouge.

1.3 Faites en sorte d'avoir les graphes de f et g sur la même image.

note : Vous pouvez stocker le résultat d'un appel à `plot` dans une variable, et utiliser ensuite l'opérateur `+` pour regrouper deux graphes dans une même image.

1.4 En déduire que l'équation de départ possède deux solutions évidentes, et une unique autre solution α située dans l'intervalle $]-1,\ 0[$.

1.5 Utiliser la méthode `solve` pour résoudre l'équation $2^x = x^2$. Commenter.

1.6 On propose l'algorithme suivant pour trouver une valeur approchée de α.

Algorithme 1 : *bisection_method*

Entrée : une fonction f, deux réels a et b, et une précision $\varepsilon > 0$
Hypothèses : $a < b$, la fonction f est définie et continue sur $[a,\ b]$, et l'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution α sur l'intervalle $]a,\ b[$.
Sortie : un réel $x \in\ ]a,\ b[$ tel que $|x - \alpha| \leq \varepsilon$

si $a \geq b$ *ou* $f(a) \times f(b) \geq 0$ **alors** afficher un message d'erreur et s'arrêter
tant que $b - a > \varepsilon$ **faire**
  $m \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$; $y \leftarrow f(m)$
  si $y = 0$ **alors** retourner m
  sinon si $y \times f(a) > 0$ **alors** $a \leftarrow m$
  sinon $b \leftarrow m$
retourner $\dfrac{a+b}{2}$

Expliquez pourquoi cet algorithme est correct.

1.7 Implantez une fonction `bisection_method` et déterminer la valeur de α à 10^{-6} près.

1.8 Comparez votre résultat avec celui que retourne la fonction `find_root`.

1.9 Modifiez votre fonction `bisection_method` pour retourner en plus le nombre d'étapes effectuées lors de la recherche par dichotomie.

1.10 Représentez graphiquement, pour n allant de 0 à 10, le nombre d'étapes nécessaires pour trouver α à 10^{-n} près. Commenter.

note : On pourra par exemple faire appel à la fonction `list_plot`.

Exercice 2 - Diagonalisation de matrices

2.1 Déterminez (à la main) les valeurs propres de la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$.

2.2 Vérifiez votre réponse en faisant appel à la méthode `.eigenvalues()` de `sage`.

2.3 Déterminez (à la main) des vecteurs propres pour la matrice A_1.

2.4 Vérifiez votre réponse en utilisant la méthode `.eigenvectors_right()` de `sage`.
Que se passe-t-il si on définit A_1 avec des coefficients dans `RDF` ? et dans `QQ` ?

2.5 Proposez deux matrices P_1 et D_1 telles que $A_1 = P_1\,D_1\,P_1^{-1}$, P_1 est inversible et D_1 est diagonale.

2.6 Définissez P_1 et D_1 dans `sage`, et vérifiez que vos choix sont corrects.

2.7 Calculez à l'aide de `sage` les valeurs propres, ainsi que des vecteurs propres, pour

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 10 & 11 \\ -1 & -2 & -7 & -8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 - Un problème de balance

On désire déterminer les poids de deux objets A et B. On dispose d'une balance, que nous utilisons de la manière suivante :

— On mesure le poids a de A et la balance répond 1 (kg) ;
— On mesure le poids b de B et la balance répond 1 ;
— On place finalement A et B sur la balance, qui répond à nouveau 1.

3.1 Traduisez (sur votre feuille) les trois mesures effectuées en équations.

3.2 Dans `sage`, utilisez la fonction `solve` pour trouver les valeurs de a et b. Commentez.
note : Commencez par déclarer deux nouvelles variables `a` et `b` grâce à `var('a, b')`.

3.3 On désire vraiment connaître les poids de A et B. Quelles seraient, selon vous, les valeurs les plus crédibles pour a et b ?

3.4 Dans la suite, on note $f(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Une idée pour déterminer a et b est alors de trouver le couple (x, y) qui minimise la distance entre les vecteurs $f(x, y)$ et v.
Le théorème de Pythagore (ici en 3D) nous donne une formule pour calculer la distance euclidienne $d(x, y)$ entre ces deux vecteurs :

$$d(x, y)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x+y-1)^2.$$

En mathématiques, on écrit aussi cette équation sous la forme

$$d(x, y) = \|f(x, y) - v\|_2$$

où $\|\cdot\|_2$ est la *norme 2* (ou norme euclidienne). La méthode `.norm(2)` de `sage` permet de calculer la norme 2 d'un vecteur.

Trouver le couple (x, y) minimisant $d(x, y)^2$ (ou $d(x, y)$) revient à résoudre un problème de *moindres carrés*. Vous verrez peut-être une méthode pour résoudre un tel problème en cours d'optimisation. Nous allons ici nous contenter de trouver un minimum graphiquement.

Définissez dans `sage` la fonction `d(x,y)`, puis utilisez la fonction `plot3d` pour trouver le minimum de cette fonction.

note : En cas de problème de rendu, il est possible de sauvegarder le résultat dans un fichier à l'aide de la méthode `.save('filename.png')`.

3.5 Pour les fonctions à 2 variables, nous pouvons aussi utiliser une représentation graphique en 2D, avec un code couleur pour indiquer la valeur de $d(x, y)$. Utilisez la fonction `contour_plot` pour obtenir un tel graphique, et commentez.

note :
- L'option `cmap=<theme>` permet de choisir le jeu de couleurs [1] ;
- L'option `colorbar=True` permet d'afficher le code couleur ;
- L'option `contours=<int>` permet d'affiner le rendu (au prix d'un temps de calcul plus élevé).

3.6 Dans `sage`, il est aussi possible d'obtenir un graphique similaire à celui de la question précédente en appelant la méthode `.plot()` sur une matrice.

Écrivez une fonction `compute_matrix`, qui prend en entrée un entier n, et qui retourne la matrice A de taille $(n + 1) \times (n + 1)$, telle que $a_{i,j} = d(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$. Affichez cette matrice pour différentes valeurs de n.

3.7 La fonction $d(x, y)$ traduit l'erreur de mesure commise par la balance. Nous avons utilisé jusqu'à présent la distance en norme 2, mais il est possible d'utiliser d'autres distances :
- La distance en norme 1, donnée ici par $d_1(x, y) = |x - 1| + |y - 1| + |x + y - 1|$, permet de considérer que l'erreur de mesure totale est la somme des erreurs des trois mesures successives ;
- La distance en norme infinie, donnée ici par $d_\infty(x, y) = \max\{|x-1|,\ |y-1|,\ |x+y-1|\}$, permet de considérer que l'erreur de mesure totale est la plus grande des erreurs sur les trois mesures successives.

Refaites les questions précédentes en utilisant la norme 1, puis la norme infinie.

3.8 Au final, que peut-on dire sur a et b ?

1. Un thème utilisé fréquemment est `'jet'`. La liste complète des thèmes peut être obtenue à l'aide de `import matplotlib.cm; matplotlib.cm.datad.keys()`.