Christophe Mouilleron
christophe.mouilleron@ensiie.fr

TD 0 : Récurrences

Exercice 1 - Résultats classiques

Démontrer les relations suivantes en utilisant le principe de récurrence.

1.1 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

1.2 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1.3 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

1.4 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n^2$

1.5 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

1.6 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Exercice 2 - Récurrences simples

2.1 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+\sqrt{2})^n$ s'écrit sous la forme $a_n + b_n\sqrt{2}$, où a_n est un entier impair et b_n est un entier.

2.2 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $2^{3n} - 1$ est divisible par 7.

2.3 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $2^{2n} + 15n - 1$ est divisible par 9.

2.4 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_k^p = \mathrm{C}_{n+1}^{p+1}$.

2.5 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2^{n-1} \leq n!$.

2.6 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n! \leq n^n$.

2.7 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k = 2^n$.

2.8 Soit $a \geq -1$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(1+a)^n \geq 1 + n\,a$.

2.9 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$.

Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1$.

Exercice 3 - Récurrences doubles

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = u_1 = 1$ et $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$.

3.1 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$.

3.2 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, on a $u_n \geq \left(\dfrac{4}{3}\right)^n$.

3.3 On considère maintenant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ et $v_{n+2} = 5\,v_{n+1} - 6\,v_n$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = 3^n - 2^n$.

 christophe.mouilleron@ensiie.fr

Exercice 4 - L'abus de récurrence est mauvais pour la santé

Expliquer précisément pourquoi les raisonnements suivants sont faux.

4.1 Il y a autant d'argent que je veux sur mon compte en banque.
Preuve. Montrons par récurrence sur n qu'il y a n euros sur mon compte en banque :

— Je suppose que la propriété est vraie pour $n' < n$. En particulier, il y a par hypothèse de récurrence $n-2$ euros sur mon compte en banque ($n' = n-2$). De même, il y a aussi $n-1$ euros. Ainsi, $n = (n-1)+1 = (n-2)+1 = n-1$. Donc j'ai bien aussi n euros.

4.2 Tous les crayons dans ma trousse sont de la même couleur.
Preuve par récurrence sur le nombre de crayons :

— Si j'ai moins de 2 crayons dans la trousse, c'est bon.

— Sinon, je retire 2 des n crayons au hasard. Si j'en remets un, les $n-1$ crayons de la trousse sont de la même couleur (hypothèse de récurrence). Même conclusion si je remets l'autre. Donc mes n crayons sont bien de la même couleur.