Algèbre – Fonctions de plusieurs variables

Christophe Mouilleron

école nationale supérieure d'informatique pour l'industrie et l'entreprise

1. Généralisation de la dérivée

2. Extrema locaux de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

3. Intégration de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Plan

1. Généralisation de la dérivée
2. Extrema locaux de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
3. Intégration de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Exemple introductif

On considère les fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array}$$

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x, -x) \end{array}$$

Calculer $g'(x)$.

Exemple introductif

On considère les fonctions suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array}$$

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x, -x) \end{array}$$

Calculer $g'(x)$.

Difficultés :

- formule pour f inconnue
- f = fonction de deux variables

Exemple introductif

On considère les fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array}$$

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x, -x) \end{array}$$

Calculer $g'(x)$.

Difficultés :

- formule pour f inconnue — $g'(x)$ dépendra de la *dérivée* de f
- f = fonction de deux variables — *dérivée* de f ???

Dérivée – Rappels pour le cas $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Soit

$$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$\rightsquigarrow$ f = fonction d'une variable réelle à valeurs réelles

Sa dérivée est définie par : quand elle existe

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$\uparrow$

pente de
x_0 à x

Dérivée – Cas $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$\rightsquigarrow$ f = fonction d'une variable réelle à valeurs vectorielles

Sa dérivée est définie par : quand elle existe

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$\rightsquigarrow$ formules valides car x, x_0, h réels

Dérivée – Cas $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$\rightsquigarrow$ f = fonction d'une variable réelle à valeurs vectorielles

Sa dérivée est définie par : quand elle existe

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$\rightsquigarrow$ formules valides car x, x_0, h réels

Exemple : $m = 2$ dérivation coord. par coord.

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x \\ x^3 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \\ 3\,x^2 \end{pmatrix}$$

Cas $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ f = fonction de plusieurs variables réelles à valeurs réelles

Problèmes :

- $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ne convient plus division par un vecteur
- n variables $\Rightarrow$ n dérivées

Cas $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ f = fonction de plusieurs variables réelles à valeurs réelles

Problèmes :

- $\cancel{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$ ne convient plus   division par un vecteur
- n variables $\Rightarrow$ n dérivées

Solution = vecteur de dérivées

Exemple : $n = 2$

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\nabla_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \end{pmatrix}$$

Vocabulaire, remarques

∂ = d rond

∇ = nabla   Delta (Δ) renversé

∇_f = gradient de f

- fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$
- souvent écrit sous forme d'un vecteur colonne   ligne = mieux ici

Vocabulaire, remarques

∂ = d rond

∇ = nabla — Delta (Δ) renversé

∇_f = gradient de f

- fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$
- souvent écrit sous forme d'un vecteur colonne — ligne = mieux ici

Attention : notation $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ malheureuse — $\partial_1 f(x, y)$ préférable

- x lié à la définition de f — 1^{re} variable de f
- x lié au point courant — 1^{er} arg. de $\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_1 f$

$\rightsquigarrow$ même lettre pour deux choses différentes !

Cas général – Matrice jacobienne

Soit $f : D \subset R^n \to R^m$

$\leadsto$ f = fonction de plusieurs variables réelles à valeurs vectorielles

On lui associe une matrice jacobienne : $\simeq$ dérivée

$$J_f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Cas général – Matrice jacobienne

Soit $f : D \subset R^n \to R^m$

$\rightsquigarrow$ f = fonction de plusieurs variables réelles à valeurs vectorielles

On lui associe une matrice jacobienne :

$\simeq$ dérivée

$$J_f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

m sorties

$\Rightarrow$ m lignes

n entrées $\Rightarrow$ n colonnes

Exemples :

- si $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \mapsto & \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \end{array}$, on a

$$\begin{array}{cc} \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$J_f(r,\theta) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow f_1(r,\theta) = r\cos\theta \\ \longleftarrow f_2(r,\theta) = r\sin\theta \end{array}$$

Exemples :

- si $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \mapsto & \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \end{array}$, on a

$$\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$J_f(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow f_1(r,\theta) = r\cos\theta \\ \longleftarrow f_2(r,\theta) = r\sin\theta \end{array}$$

Exemples :

- si $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \mapsto & \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \end{array}$, on a

$$\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$J_f(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow f_1(r,\theta) = r\cos\theta \\ \longleftarrow f_2(r,\theta) = r\sin\theta \end{array}$$

- si $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a $J_f(x) = \big(f'(x)\big)$ matrice 1×1

Matrice jacobienne – Propriétés

Propriété

On a

$$f(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n) \simeq f(x_1, \ldots, x_n) + J_f(x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

lorsque h_1, ..., h_m sont suffisamment petits.

$\rightsquigarrow$ si $n = 1$, on retrouve $f(x+h) \simeq f(x) + h\, f'(x)$ $\qquad f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Matrice jacobienne – Propriétés

Propriété

On a

$$f(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n) \simeq f(x_1, \ldots, x_n) + J_f(x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

lorsque h_1, ..., h_m sont suffisamment petits.

$\rightsquigarrow$ si $n = 1$, on retrouve $f(x+h) \simeq f(x) + h\,f'(x)$ $\qquad f'(x) \simeq \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Propriété

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, alors :

$$J_{g\circ f}(x_1, \ldots, x_n) = J_g\big(f(x_1, \ldots, x_n)\big) \times J_f(x_1, \ldots, x_n)$$

$\rightsquigarrow$ si $n = m = p = 1$, on retrouve $\Big(g(f(x))\Big)' = g'\big(f(x)\big) \times f'(x)$

Retour à l'exemple introductif

$$x \xmapsto{\varphi} \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \xmapsto{f} f(x,-x)$$

$$x \xmapsto[g = f \circ \varphi]{} f(x,-x)$$

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad J_\varphi(x) =$$

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad J_f(x,y) =$$

Retour à l'exemple introductif

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto, "\varphi"] \arrow[rr, mapsto, bend right, "g = f \circ \varphi"'] & \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \arrow[r, mapsto, "f"] & f(x, -x)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad J_\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad J_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

Retour à l'exemple introductif

$$x \overset{\varphi}{\longmapsto} \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \overset{f}{\longmapsto} f(x,-x)$$

$$x \underset{g = f \circ \varphi}{\longmapsto} f(x,-x)$$

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad J_\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} J_g(x) = J_f(\varphi(x)) \times J_\varphi(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,-x) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,-x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,-x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,-x) \right) \end{aligned}$$

Retour à l'exemple introductif (suite)

Bilan : $$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,-x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,-x)$$

$f(x,y)$	$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$	$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$	$\frac{\partial f}{\partial x}(x,-x)$ $-\frac{\partial f}{\partial y}(x,-x)$	$g(x) =$ $f(x,-x)$	$g'(x)$
$x+y$					
$x\,y$					
x^2+y^2					
$y\,\sin x$					

Retour à l'exemple introductif (suite)

Bilan : $$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,-x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,-x)$$

$f(x,y)$	$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$	$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$	$\frac{\partial f}{\partial x}(x,-x)$ $-\frac{\partial f}{\partial y}(x,-x)$	$g(x) =$ $f(x,-x)$	$g'(x)$
$x+y$	1	1	$1-1=0$	0	0
$x\,y$					
x^2+y^2					
$y\,\sin x$					

Retour à l'exemple introductif (suite)

Bilan : $$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,-x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,-x)$$

$f(x,y)$	$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$	$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$	$\frac{\partial f}{\partial x}(x,-x)$ $-\frac{\partial f}{\partial y}(x,-x)$	$g(x) =$ $f(x,-x)$	$g'(x)$
$x+y$	1	1	$1-1=0$	0	0
$x\,y$	y	x	$-x-x=-2x$	$-x^2$	$-2x$
x^2+y^2					
$y \sin x$					

Retour à l'exemple introductif (suite)

Bilan : $$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, -x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, -x)$$

$f(x,y)$	$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$	$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$	$\frac{\partial f}{\partial x}(x,-x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,-x)$	$g(x) = f(x,-x)$	$g'(x)$
$x+y$	1	1	$1-1=0$	0	0
$x\,y$	y	x	$-x-x=-2x$	$-x^2$	$-2x$
x^2+y^2	$2x$	$2y$	$2x-(-2x)=4x$	$2\,x^2$	$4x$
$y\sin x$					

Retour à l'exemple introductif (suite)

Bilan : $$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,-x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,-x)$$

$f(x,y)$	$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$	$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$	$\frac{\partial f}{\partial x}(x,-x)$ $-\frac{\partial f}{\partial y}(x,-x)$	$g(x) =$ $f(x,-x)$	$g'(x)$
$x+y$	1	1	$1-1=0$	0	0
$x\,y$	y	x	$-x-x=-2x$	$-x^2$	$-2x$
x^2+y^2	$2x$	$2y$	$2x-(-2x)=4x$	$2\,x^2$	$4x$
$y\ \sin x$	$y\ \cos x$	$\sin x$	$-x\ \cos x - \sin x$	$-x\ \sin x$	$-\sin x$ $-x\ \cos x$

Plan

Rappels – Cas $n = 1$

Schéma général quand $n = 1$: $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. calcul de f'
2. résolution de $f'(x) = 0 \rightsquigarrow$ points critiques
3. tableau de variations

Problèmes quand $n > 1$:

- f' n'a pas de sens
- variations + complexes

Rappels – Cas $n = 1$

Schéma général quand $n = 1$: $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. calcul de f'
2. résolution de $f'(x) = 0 \rightsquigarrow$ points critiques
3. tableau de variations

Problèmes quand $n > 1$:

- f' n'a pas de sens — f' remplacé par ∇_f
- variations + complexes — $\rightsquigarrow$ besoin de dériver deux fois

Matrice hessienne – Définitions

Notation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

$\rightsquigarrow$ dérivée par rapport à x_j, puis par rapport à x_i

Matrice hessienne de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\simeq$ dérivée seconde

$$H_f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

Matrice hessienne – Exemple, Propriété

Exemple : $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$ $\qquad n = 2$

$$\nabla_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2} \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad H_f(x,y) = \begin{array}{cc} \nabla_f(x,y) & \\ \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \longleftarrow \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \longleftarrow \dfrac{\partial}{\partial y} \end{array} \end{array}$$

Matrice hessienne – Exemple, Propriété

Exemple : $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$ $\qquad n = 2$

$$\nabla_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2} \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad H_f(x,y) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \phantom{\dfrac{2}{y}} & \nabla_f(x,y) \\ & \downarrow \end{array} \\ & \begin{pmatrix} \dfrac{2}{y} & -\dfrac{2x}{y^2} \\ -\dfrac{2x}{y^2} & 2\,\dfrac{x^2}{y^3} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \longleftarrow \dfrac{\partial}{\partial y} \end{array} \end{array}$$

Matrice hessienne – Exemple, Propriété

$\nabla_f(x, y)$

Exemple : $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y}$ $\qquad n = 2$

$$\nabla_f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2} \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad H_f(x, y) = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{y} & -\dfrac{2x}{y^2} \\ -\dfrac{2x}{y^2} & 2\,\dfrac{x^2}{y^3} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \longleftarrow \dfrac{\partial}{\partial x} \\[2em] \longleftarrow \dfrac{\partial}{\partial y} \end{array} \end{array}$$

Propriété

Si f est suffisamment régulière, on a :

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$
- $H_f(x_1, \ldots, x_n)$ est symétrique par rapport à sa diagonale principale

$\rightsquigarrow$ ordre des dérivées sans importance en pratique

Condition suffisante pour un ? ? ? local

Cas $n = 1$

$f'(x^*) = 0$
$f''(x^*) > 0$

Condition suffisante pour un ? ? ? local

Cas $n = 1$

$f'(x^*) = 0$
$f''(x^*) > 0$

x	x^*
f	
$f'(x)$	0
f’	
$f''(x)$	$+$

Condition suffisante pour un ? ? ? local

Cas $n = 1$

$f'(x^*) = 0$
$f''(x^*) > 0$

x	x^*
f	
$f'(x)$	0
f'	0
$f''(x)$	$+$

Condition suffisante pour un ? ? ? local

Cas $n = 1$

$f'(x^*) = 0$
$f''(x^*) > 0$

x		x^*	
f			
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f’		0	
$f''(x)$		$+$	

Condition suffisante pour un minimum local

Cas $n = 1$

$f'(x^*) = 0$
$f''(x^*) > 0$

x		x^*	
f	$\searrow$	α	$\nearrow$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f'	$\nearrow$	0	$\nearrow$
$f''(x)$		$+$	

Condition suffisante pour un minimum local

Cas $n = 1$

$f'(x^*) = 0$
$f''(x^*) > 0$

x		x^*	
f	$\searrow$	α	$\nearrow$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f'		$\nearrow$ 0	
$f''(x)$		$+$	

Cas général

$\nabla_f(x_1^*, \ldots, x_n^*) = 0$
$\lambda > 0$

pour chaque valeur propre λ de $H_f(x_1^*, \ldots, x_n^*)$

f strictement convexe autour de $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$

Condition suffisante pour un maximum local

Cas $n = 1$

$f'(x^*) = 0$
$f''(x^*) < 0$

x		x^*	
f	$\nearrow$	α	$\searrow$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f’	$\searrow$	0	$\searrow$
$f''(x)$		$-$	

Cas général

$\nabla_f(x_1^*, \ldots, x_n^*) = 0$
$\lambda < 0$

pour chaque valeur propre λ de $H_f(x_1^*, \ldots, x_n^*)$

f strictement concave autour de $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$

Résumé

Pour chercher les extrema de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

1. calculer ∇_f
2. résoudre $\nabla_f(x_1, \dots, x_n) = 0$ pour trouver les points critiques
3. pour chaque point critique $(x_1^*, \dots, x_n^*)$:
   - calculer $H_f(x_1^*, \dots, x_n^*)$
   - trouver ses valeurs propres
   - conclure en fonction des signes de ces valeurs propres

Conclusions possibles :

- toutes les vp $> 0 \Rightarrow$ minimum local $(x_1^*, \dots, x_n^*)$
- toutes les vp $< 0 \Rightarrow$ maximum local $(x_1^*, \dots, x_n^*)$
- une vp > 0 + une vp $< 0 \Rightarrow$ point col point-scelle
- une vp nulle $\Rightarrow$ tout est possible

Plan

Intégrales doubles

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \qquad \text{où } D \subset \mathbb{R}^2 \text{ et } f : D \to \mathbb{R}$$

- intégrabilité ?
- calcul ?

Intégrales doubles

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \qquad \text{où } D \subset \mathbb{R}^2 \text{ et } f : D \to \mathbb{R}$$

- intégrabilité ? lorsque $\displaystyle\iint_D \big|f(x,y)\big|\,\mathrm{d}(x,y) < +\infty$
- calcul ?

Théorème de Fubini-Tonelli

Si $f : D_x \times D_y \to \mathbb{R}$ est intégrable, alors $D = \text{rectangle}$

$$\iint_{D_x \times D_y} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{D_x} \left(\int_{D_y} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{D_y} \left(\int_{D_x} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Intégrales doubles – Cas de variables séparables

$$\iint_D xy \,\mathrm{d}(x,y) \qquad \text{où } D = \{\ (x,y),\ 0 \le x \le 2 \text{ et } 1 \le y \le 3\ \}$$

- $0 \le x\,y \le 6$ sur le carré $D = [0,2] \times [1,3]$

$\rightsquigarrow$ *xy* intégrable sur D $\qquad \iint_D |x\,y|\,\mathrm{d}(x,y) \le 6\times2\times2 < +\infty$

Intégrales doubles – Cas de variables séparables

$$\iint_D xy \, \mathrm{d}(x,y) \qquad \text{où } D = \{\ (x,y),\ 0 \leq x \leq 2 \text{ et } 1 \leq y \leq 3\ \}$$

- $0 \leq x\,y \leq 6$ sur le carré $D = [0,2] \times [1,3]$

$\rightsquigarrow$ xy intégrable sur D $\qquad \iint_D |x\,y| \, \mathrm{d}(x,y) \leq 6 \times 2 \times 2 < +\infty$

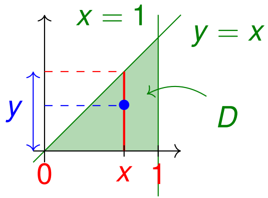
- calcul en séparant les variables :

$$\iint_D xy \, \mathrm{d}(x,y) = \int_{y=1}^{3} \left(\int_{x=0}^{2} xy \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{y=1}^{3} \left(y \int_{x=0}^{2} x \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

$$= \left(\int_{x=0}^{2} x \, \mathrm{d}x \right) \left(\int_{y=1}^{3} y \, \mathrm{d}y \right) = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^3 = \frac{4}{2} \, \frac{9-1}{2} = 8$$

Intégrales doubles – Cas d'un domaine simple

$$I = \iint_D x \, \mathrm{d}(x, y) \qquad \text{où } D = \{\, (x, y),\ 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq x \,\}$$

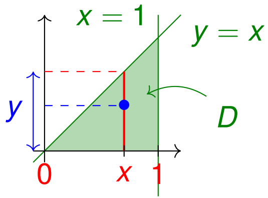


$$I = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{x} x \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_{x=0}^{1} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

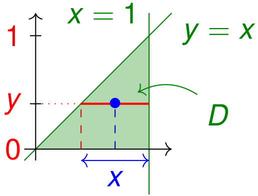
Intégrales doubles – Cas d'un domaine simple

$$I = \iint_D x \,\mathrm{d}(x,y) \qquad \text{où } D = \{\ (x,y),\ 0 \le x \le 1 \text{ et } 0 \le y \le x\ \}$$



$$I = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{x} x \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

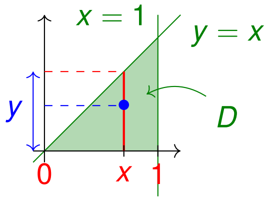
$$= \int_{x=0}^{1} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$



$$I = \int_{y=0}^{1} \left(\int_{x=y}^{1} x \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

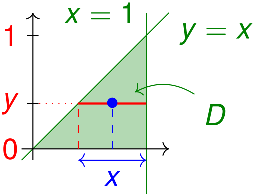
$$= \int_{y=0}^{1} \frac{1-y^2}{2} \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$I = \iint_D x \, \mathrm{d}(x,y) \qquad \text{où } D = \{\ (x,y),\ 0 \le x \le 1 \text{ et } 0 \le y \le x\ \}$$



$$I = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{x} x \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_{x=0}^{1} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$



$$I = \int_{y=0}^{1} \left(\int_{x=y}^{1} x \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

$$= \int_{y=0}^{1} \frac{1-y^2}{2} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

ATTENTION aux bornes $\rightsquigarrow$ faire un dessin

Changement de variables 2D

Théorème

Si $\varphi : \begin{array}{ccc} D & \to & D' \\ (u,v) & \mapsto & (x,y) \end{array}$ est un C^1-difféomorphisme =

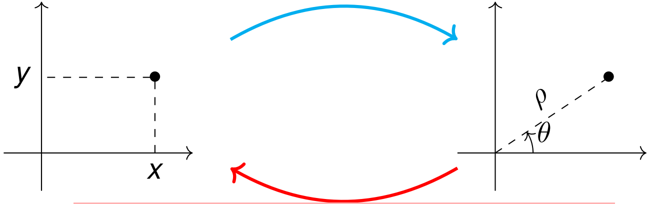
- φ est bijective
- φ est C^1 $\quad$ = ses dérivées partielles existent et sont continues
- φ^{-1} est C^1

alors on a $\displaystyle \iint_{D'} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \iint_{D} f(\varphi(u,v)) \left|\det J_\varphi(u,v)\right| \mathrm{d}(u,v)$

où $J_\varphi(u,v) =$ matrice jacobienne de φ $= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$

Exemple : passage en coordonnées polaires (1)

$$\begin{array}{rccl} \varphi^{-1} : & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \to & \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi] \\ & (x,y) & \mapsto & \left(\sqrt{x^2+y^2},\ 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right) \end{array}$$



$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ & (\rho,\theta) & \mapsto & (\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta) \end{array}$$

$$|\det(J_\varphi)| = \left|\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}\right| = |\rho(\cos\theta)^2 + \rho(\sin\theta)^2| = \rho$$

Exemple : passage en coordonnées polaires (2)

Calcul de l'aire d'un disque de rayon r :

- $D = \{\ (x, y),\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq r^2\ \}$ $\qquad 0 \leq |x + i\,y|^2 \leq r^2$
- $f(x, y) = 1$ $\qquad$ chaque point compte pour 1

$$\begin{aligned}
\iint_D \mathrm{d}(x, y) &= \int_{\rho=0}^{r} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \rho \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho \\
&= \left(\int_{\rho=0}^{r} \rho\,\mathrm{d}\rho \right) \left(\int_{\theta=-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \right) \\
&= \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^r [\theta]_{-\pi}^{\pi} = \frac{r^2}{2} \Big(\pi - (-\pi) \Big) = \pi\, r^2
\end{aligned}$$

Exemple : passage en coordonnées polaires (3)

Calcul de $\iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2)\,\mathrm{d}(x, y)$:

fct. continue en $(0, 0)$

$\Rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} = \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$

$$
\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2)\,\mathrm{d}(x, y) &= \int_{\rho=0}^{+\infty} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \exp(-\rho^2)\,\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho \\
&= \int_{\rho=0}^{+\infty} 2\pi\,\rho\exp(-\rho^2)\,\mathrm{d}\rho \\
&= \Big[-\pi\ \exp(-\rho^2)\Big]_{\rho=0}^{+\infty} = \pi
\end{aligned}
$$

Bonus pour le cours de proba.

Soit $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-y^2)\,\mathrm{d}y\right) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2)\,\mathrm{d}(x,y) = \pi \end{aligned}$$

Donc $A = \sqrt{\pi}$.

Ainsi, pour tout $\sigma > 0$ et en posant $t = x\,\sigma\sqrt{2}$: $\qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \sigma\sqrt{2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\,\sigma\sqrt{2}\,\mathrm{d}x = A\,\sigma\sqrt{2} = \sigma\,\sqrt{2\pi}$$

Bilan sur les intégrales multiples

Intégrales doubles = représentatif du cas général

Pour les intégrales multiples : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- notations similaires pour $n = 3$ $\iiint$
- notations allégées pour $n \geq 4$
- techniques de calculs similaires :
  1. variable par variable Fubini
  2. changement de variables jacobienne $n \times n$