

TD 1 : Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1 - Calculs de limites

Calculer les limites suivantes.

1.1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x^2+x+1}$

1.2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^2}{3x+2}$

1.3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{x^2-3x+2}$

1.4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) + \cos(x)$

1.5 $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1-x^2}{x^2-7x+12}$

1.6 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2-x}{x^2-6x+9}$

1.7 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2}$

1.8 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

Exercice 2 - Calculs de dérivées

Pour chacune des fonctions suivantes, préciser l'ensemble de dérivation et calculer la dérivée.

2.1 $x \mapsto \cos(x) \exp(2x)$

2.2 $x \mapsto \exp(-x^2)$

2.3 $x \mapsto \ln(1+x^2)$

2.4 $x \mapsto x^x$

Exercice 3 - Études de fonctions

Pour chacune des fonctions suivantes, faire une étude complète et tracer la courbe représentative.

3.1 $x \mapsto (x-1)(x+2)^2$

3.2 $x \mapsto \frac{3x-1}{x-4}$

3.3 $x \mapsto \cos(x) + \sin(x)$

3.4 $x \mapsto \exp(-x^2)$

Exercice 4 - Optimisation sous contrainte

(examen 2022)

Dans cet exercice, x et y sont deux entiers positifs vérifiant $x+y=20$.

4.1 Trouvez les valeurs de x et y rendant x^2y le plus grand possible. Expliquez votre démarche.

note : La contrainte d'égalité imposée dans cet exercice se réécrit $y=20-x$.

Exercice 5 - Attention aux limites

On considère un carré dont le côté est de longueur 1. On note t_n le trajet qui consiste à aller du coin supérieur gauche au coin inférieur droit en répétant n fois :

- On se déplace d'abord de $1/n$ sur la droite ;
- puis, on se déplace de $1/n$ vers le bas.

5.1 Représenter graphiquement t_1 , t_2 , t_3 et t_8 .

5.2 Quel est le trajet t que l'on obtient en faisant tendre n vers $+\infty$?

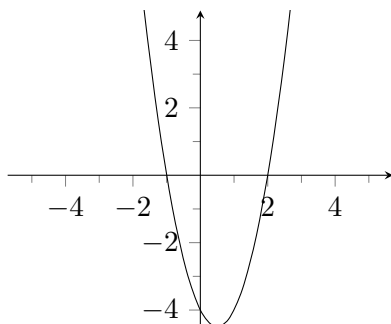
5.3 On note $\ell(\mathcal{T})$ la longueur du trajet \mathcal{T} . Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell(t_n)$.

5.4 Combien vaut $\ell(t)$? Commenter.

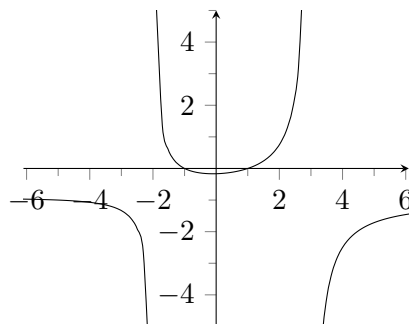
Exercice 6 - Du graphe à la fonction

Pour chacun des graphes suivants, trouver une fonction qui pourrait correspondre.

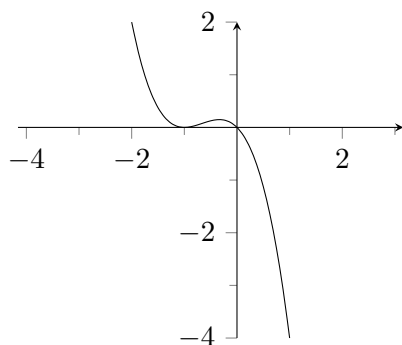
6.1



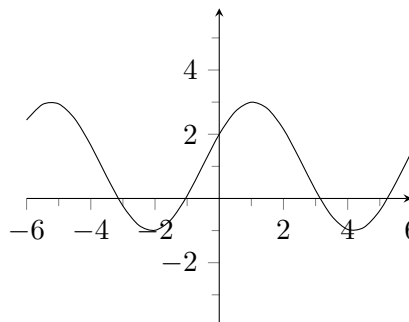
6.4



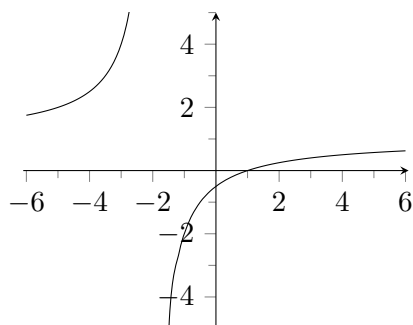
6.2



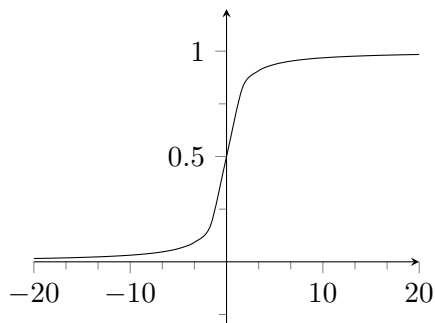
6.5



6.3



6.6



Exercice 7 - Vrai ou faux ?

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

7.1 Si f est définie sur \mathbb{R} et strictement décroissante, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

7.2 Si $f'(a) = 0$, alors f admet un minimum ou un maximum local en a .

7.3 Si une fonction f admet un minimum en a , alors on a forcément $f'(a) = 0$.

7.4 La fonction $\ln(x)$ est convexe sur \mathbb{R}_+^* .

7.5 On a $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{x^2+2x-3} = -\infty$.