Конспект по алгебре

Лектор: Сивацкий Александр Станиславович

Автор: Артемий Дружинин

Факультет МКН СПБГУ

Весенний семестр 2026

1. Теория представлений конечных групп.

Лекция от 11.02.2026

1.1. Простые модули.

Вспомним несколько важных определений и теорем из предыдущего семестра:

Теорема. (Ма́шке) Пусть k - поле, G - конечная группа, $\mathrm{char}\ k \nmid |G|$, V - $k[G]$-модуль, тогда для любого подмодуля W найдется подмодуль U, такой что $V = U \oplus W$.

Определение. Неприводимый G-модуль - простой $k[G]$-модуль.

Определение. Модуль называется **неразложимым**, если он не является прямой суммой двух ненулевых подмодулей.

Везде далее V - конечномерное векторное пространство над полем k и $\mathrm{char}\ k \nmid |G|$

Хотим доказать, что разложение в прямую сумму неприводимых существует и единственно, существование очевидно из леммы Машке, а единственность - из следующей леммы.

Лемма. (Шура) Пусть M, N - простые модули над кольцом R
1. $\forall$ гомоморфизм $\varphi : M \to N$ либо изоморфизм либо нулевой.
2. $\mathrm{End}_R(M)$ - тело (т.е. кольцо с делением).

Доказательство:
1. Пусть φ не изоморфизм, тогда $\ker(\varphi)$ - модуль, $\neq \{0\}$, так как M простой, то $\ker(\varphi) = M$, значит φ - нулевой гомоморфизм.
   Если же φ не нулевой, то $\mathrm{Im}(\varphi) \neq \{0\}$, значит $\mathrm{Im}(\varphi) = N$, значит φ - эпиморфизм, а так как M простой, то $\ker(\varphi) = \{0\}$, значит φ - изоморфизм.
2. Действительно, любой ненулевой элемент - изоморфизм, а значит обратим.

$\square$

Теорема. Пусть V - приводимый модуль над G, тогда V можно разложить на прямую сумму неприводимых над G:

$$V = V_1 \oplus V_2 \ldots \oplus V_n$$

Такое разложение единственно до перестановок и изоморфности отдельных модулей.

Доказательство: Пусть есть два различных разложения:

$$V \simeq M_1^{r_1} \oplus M_2^{r_2} \ldots \oplus M_k^{r_k} \quad \text{и} \quad V \simeq N_1^{s_1} \oplus N_2^{s_2} \ldots \oplus N_l^{s_l}$$

Пусть $M_i \not\simeq N_j$ для любого j. Тогда гомоморфизм φ_j, определенный как композиция вложения и проекции (на диаграмме), по лемме Шура тривиален.

$$\begin{tikzcd} M_i^{r_i} \arrow[r, "in"] \arrow[rr, bend right, "\varphi_j"'] & \bigoplus N_t^{s_t} \arrow[r, "pr_j"] & N_j^{s_j} \end{tikzcd}$$

Поймем, что через эти гомоморфизмы можно разложить вложение $M_i^{r_i}$ в $V = \bigoplus N_t^{s_t}$, что в композиции с проекцией на себя дает $\mathrm{id}_{M_i^{r_i}} \equiv 0$, то есть $M_i^{r_i}$ - тривиальный модуль, что невозможно.

$$M_i^{r_i} \xrightarrow{\bigoplus \varphi_t} \bigoplus N_t^{s_t} \xrightarrow{pr_i} M_i^{r_i}$$

Поэтому M_i изоморфен одному из N_j. Удалив эти модули, получаем два разложения для V с меньшим количеством неприводимых, и так далее. $\square$

Определение. R - кольцо с $(+, \cdot)$ и одновременно векторное пространство с $+$ над полем K, причем

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y), \forall x, y \in R, \lambda \in K$$

Тогда R называется ***K*-алгеброй**

Предложение. Пусть L - простой идеал кольца R, M - простой модуль над R
Тогда если $L \not\simeq M$ то $LM = 0$

Доказательство: Пусть $m \in M$, проверим что $Lm = 0$:
Рассмотрим гомоморфзим $\varphi : L \to M, \ \varphi(l) = lm$ - он нулевой по лемме Шура $\square$

Замечание. $k[G]$ - k-алгебра и R-модуль, тогда

$$R = k[G] = L_1^{r_1} \oplus L_2^{r_2} \ldots \oplus L_m^{r_m}, \ L_i - \text{простые неизоморфные идеалы}$$

По предложению $L_i^{r_i} L_j^{r_j} = L_i L_j = 0$

$$\text{Пусть } 1 = e_1 + e_2 + \ldots + e_m, \ e_i \in L_i^{r_i}, \ e_i e_j = 0, \text{при } i \neq j$$

$$e_i^2 = e_i \left(e_i + \sum_{j \neq i} e_j \right) = e_i \cdot 1 = e_i$$

То есть e_i - **идемпотент**. Кроме того, очевидно, что e_i - центральный элемент, так как $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$, а значит e_i коммутирует с любым элементом.
Если $a_1 e_1 + \ldots + a_m e_m = 0$, то $a_i = 0$ для всех i, значит $m \leq \dim_k Z(k[G])$.

Теорема. Любой простой G-модуль изоморфен какому-то идеалу L_i

Доказательство: Для какого-то i, $L_i M \neq 0$, значит они изоморфны по предложению, так как L_i - простой идеал, а M - простой модуль □

Для $g \in G$ рассмотрим $K_g = \{hgh^-1, h \in G\}$ (класс сопряженностим). Обозначим $\hat{K}_g = \sum_{b \in K_g} b$

Теорема. $\left\{\hat{K}_g\right\}_{g \in I}$ составляют базис $Z(k[G])$, где I - множество представителей классов сопряженности в G.

Доказательство: Очевидно, что $\hat{K}_g$ - центральный элемент, так как он коммутирует с любым элементом $h \in G$, так как $h\hat{K}_g h^{-1} = \hat{K}_g$.
Пусть $z \in Z(k[G])$, тогда $z = \sum_{g \in G} a_g g = \sum_{g \in G} a_g \tau g \tau^{-1}$ для любого $\tau \in G$.
Значит $a_g = a_{\tau g \tau^{-1}}$. Поймем, что для элементов из одного класса K_g константы a_g будут одинаковыми, поэтому сумма преобразуется в линейную комбинацию $\hat{K}_g$ для $g \in I$.
Наконец, докажем линейную независимость: фиксируем класс сопряженности K_h, любой элемент $x \in K_h$ содержится в $a_h \hat{K}_h$ единственным образом и не содержится в $a_g \hat{K}_g$ для $g \neq h$, значит x содержится в линейной комбинации $\sum_{g \in I} a_g \hat{K}_g$ единственным образом, значит если эта линейная комбинация нулевая, то $a_g = 0 \ \forall g \in I$, так как элементы G - базис $k[G]$. □

Лекция от 18.02.2026

Из прошлого: в $k[G]$ возьмем $e_1, \ldots, e_m :\ 1 = e_1 + \ldots + e_m,\ e_i e_j = 0$ при $i \neq j$. Тогда:

$$k[G] = k[G]e_1 + \ldots + k[G]e_m$$

1.2. Представления.

Определение. Пусть V - $k[G]$-модуль, $\dim V = 1$, $V =< v >,\ v \neq 0$.
Будем рассматривать следующие гомоморфизмы: $\chi : G \to k^*$, что:

$$\chi(g_1 g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2)$$

Причем:

$$gv = \chi(g)v$$
$$(g_1 g_2)v = g_1(g_2 v)$$

То есть χ можно понимать как действие G на V.
Такие гомоморфизмы называются **одномерными представлениями**
В общем случае **представления** - это буквально $k[G]$-модули, в таком случае $\chi : G \to GL(V)$, то есть сопостовляет элементу линейный оператор, одномерность же означает, что

$\dim V = 1$ и операторы представляются в виде элементов поля.
Степень представления G на V - это $\dim V$.

Замечание. Пусть $V \simeq V'$, причем F - изоморфзим. Тогда:

$$F(gv) = gF(v) = F(\chi(g)v) = \chi'(g)F(v) \Longrightarrow \chi = \chi'$$

Тогда далее будем рассматривать изоморфные классы одномерных представлений.

Пример. Если G - циклическая группа, то $G =< g >,\ \ \chi(g) = z$, где $z^n = 1$, значит G имеет ровно n одномерных представлений $\varphi_i : g \mapsto g^i$. Тогда они образуют циклическую группу того же порядка, то есть изоморфную G.

Определение. Группу одномерных представлений группы G (обозначим за $X_1(G)$) будем называть группой **одномерных характеров**, в случае циклической группы она совпадает с G.

Посчитаем группу одномерных характеров конечной абелевой группы:

Пример. Пусть $G -$ конечная абелева, $G \simeq C_{n_1} \times ... \times C_{n_k}$ где C_i - циклические, тогда:

$$X_1(G) = X_1\left(C_{n_1}\right) \times ... \times X_1\left(C_{n_k}\right) \simeq C_{n_1} \times ... \times C_{n_k} \simeq G$$

Теперь посчитаем $X_1(G)$ для некоторых неабелевых групп:

Теорема. (вроде без доказательства) Пусть $G = S_n$, тогда определим $U =< e_1, ..., e_n >$, $V = \{\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n,\ \ \sum \lambda_i = 0\}$. Тогда V - неприводимый S_n-модуль (или, что эквивалентно, неприводимое представление S_n на V).

Пример. Пусть $G = S_3$, у нее 3 неприводимых представления: два одномерных и одно двумерное.

Доказательство:
рассмотрим циклические типы (разные элементы в типе являются сопряженными):
1. $\{\mathrm{id}\}$
2. $\{(12), (23), (13)\}$
3. $\{(123), (132)\}$

Сразу имеем два одномерных представления - это домножение на 1 и на -1 (соответственно 1 и 2 циклический тип) а также представление W_3 на V из теоремы, оно неприводимо, так как если есть неприводимый подмодуль U, то он не может быть одномерным, так как S_3 действует на V без неподвижных векторов, значит $\dim U = 2$, значит $U = V$.

$\square$

Пример. Теперь $G = S_4$, у нее 5 неприводимых представлений: 2 одномерных, 2 трёхмерных и одно двумерное.

Доказательство:
опять рассмотрим цикличесские типы:
1. $\{(1)(2)(3)(4)\} \coloneqq \mathrm{id}$
2. $\{(12)(3)(4)\}$
3. $\{(12)(34)\}$
4. $\{(123)(4)\}$
5. $\{(1234)\}$

Сразу имеем два одномерных представления. Если есть эпиморфизм $\pi : S_4 \to S_3$, то можем получить двумерное неприводимое представление для S_3, определим действие S_4 на V следующим образом: $gv \coloneqq \pi(g)v$
Посмотрим на подгруппы S_4:
- $S_4 \supset S_3 = \{b \in S_4, b(4) = 4\}$
- $S_4 \lhd V_4 = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ - группа Клейна.

$S_3 \cap V_4 = \{\mathrm{id}\}$, заметим что $S_3 V_4 = S_4$, значит имеем необходимый эпиморфизм

$$\pi : S_4 \to S_4/V_4 \simeq S_3$$

Поймем почему больше одномерных представлений нет: заметим, что для характера $\chi : G \to k^*$, $\chi(ghg^{-1}h^{-1}) = \chi(g)\chi(h)\chi(g^{-1})\chi(h^{-1}) = 1$, то есть χ тривиален на коммутаторах. А тогда можем вместо S_4 взять $S_4/[S_4 : S_4] = S_4/A_4$ - в этой группе всего 2 элемента, значит наши два одномерных представления - единственные.
Рассмотрим вращения куба - можем вращать относительно центров граней, ребер и диагоналей, получаем всего $9 + 6 + 8 + 1 = 24$ вращения, где последнее - id, причем каждое вращение дает различную перестановку главных диагоналей, то есть группа вращений изоморфна S_4, тогда S_4 действует на $V = \left\{\sum_{i=1}^4 \lambda_i e_i,\ \ \sum \lambda_i = 0\right\}$ как группа вращений, что дает пятое трехмерное представление (четвертое имеем из самой V).

Определение. Пусть V - G-модуль, тогда **характером** φ - представления G на V называется функция $\chi_V : G \to k,\ \ \chi_V(g) = \mathrm{Tr}(\varphi g)$

Замечание. Характеры у изоморфных представлений совпадают.

Так, для завершения доказательства покажем что трёхмерные представления неизоморфны, приведя два конкретных элемента, характеры которых не совпадают: $\square$