

# **Конспект по дифференциальным уравнениям и динамическим системам**

Лектор: Пилюгин Сергей Юрьевич

Автор: Артемий Дружинин

Факультет МКИ СПбГУ

Весенний семестр 2026

# 1. Продолжение общей теории дифференциальных уравнений.

Лекция от 17.02.2026

## 1.1. Еще раз об интегралах.

Пусть есть уравнение  $\dot{x} = f(t, x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C$ ,  $f \in \text{Lip}_{x, \text{loc}}(G)$

**Определение.** Пусть  $u : H \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $H \subset G$  - область и  $u \in C^1(H)$ , тогда  $u$  называется **интегралом** уравнения  $\dot{x} = f(t, x)$ , если для любого решения  $x(t)$ ,  $t \in (a, b)$  такого что  $(t, x(t)) \in H$  выполнено:

$$u(t, x(t)) \equiv \text{const}$$

**Определение.** Пусть есть  $n$  интегралов  $u_1(t, x), \dots, u_n(t, x)$  составим вектор  $U(t, x) = \begin{pmatrix} u_1(t, x) \\ \dots \\ u_n(t, x) \end{pmatrix}$ , тогда интегралы называются **функционально независимыми**, если

$$\text{rank } \frac{\partial U}{\partial x} = \text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \equiv n$$

**Теорема.** (об интегралах)

Пусть  $u_1(t, x), \dots, u_n(t, x)$  - функционально независимые интегралы в  $H$ , тогда если:

$\forall (t_0, x_0) \in H$  существуют:  $(a, b) \ni t_0$ ,  $V$  - открытое в  $\mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in V$  и  $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$   $y \in C^1(a, b)$ , выполнено:

1.  $y(t_0) = x_0$
2. если  $(t, x) \in (a, b) \times V$ , то  $U(t, x) = U(t_0, x_0) \iff x = y(t)$
3.  $y(t)$  - решение задачи Коши с начальными условиями в  $(t_0, x_0)$

**Доказательство:** Рассмотрим функцию  $W(t, x) = U(t, x) - U(t_0, x_0)$ , тогда  $W \in C^1$ .

$$\det \frac{\partial W}{\partial x}(t_0, x_0) \neq 0$$

А тогда существует единственная неявная функция  $x$  равная  $y(t)$  в окрестности точки  $(t_0, x_0)$ , такая что  $W(t, x) = 0$ . По определению интеграла  $U(t, x(t, t_0, x_0)) = U(t, x)$  ну и по единственности неявной функции  $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ . □

**Теорема.** (о существовании системы функционально независимых интегралов)

Пусть  $f, \frac{\partial f}{\partial x} \in C(H) \implies \forall (t_0, x_0) \in H \exists G$  - окрестность  $(t_0, x_0)$  что:

1. в  $G$  существует  $n$  функционально независимых интегралов  $u_1(t, x), \dots, u_n(t, x)$
2.  $\forall u(t, x)$  - интеграла в  $G$  существует  $g \in C^1(G) : u(t, x) = g(u_1(t, x), \dots, u_n(t, x))$

**Доказательство:** По теореме о топологическом выпрямлении существует диффеоморфизм выпрямления  $h : G \rightarrow h(G)$  такой что

$$h(t, x) = (t, h_1(t, x), \dots, h_n(t, x))$$

Тогда заметим, что  $h_1(t, x), \dots, h_n(t, x)$  - функционально независимые интегралы в  $G$  (они интегралы так как переводят интегральные кривые в прямые параллельные  $t$ ). Для этого рассмотрим матрицу  $\frac{\partial h}{\partial (t, x)}$  и поймем что её  $\det$  не ноль (так как якобиан  $h$  не ноль).

Осталось показать, что любой другой интеграл  $u(t, x)$  в  $G$  может быть представлен в виде функции от  $h_1(t, x), \dots, h_n(t, x)$ . Покажем что  $v(t, y) = u(h^{-1}(t, y))$  не зависит от  $t$ . Зафиксируем произвольную точку  $(t_0, y_0)$  и рассмотрим интегральную кривую проходящую через  $(t_0, x_0) = h^{-1}(t_0, y_0)$ , заметим что в координатах  $y$  эта кривая становится прямой. Тогда по свойству интеграла  $v$  постоянна на этой прямой, а значит не зависит от  $t$ .

$u(t, x) = u(h^{-1}(t, h(t, x))) = v(t, h(t, x))$  - зависит только от  $h_i$ .

□

Случай автономных систем рассмотрим в виде теоремы без доказательства:

**Теорема.** Пусть  $\dot{x} = f(x)$  - автономная система,  $f \in C^1$ ,  $x_0$  - не точка покоя, тогда:

1.  $\exists W \ni x_0$  - окрестность  $x_0$ , в которой существует  $n$  функционально независимых интегралов  $u_1(x), \dots, u_n(x)$
2.  $\forall u(x)$  - интеграла в  $W$ , существует  $g \in C^1(W) : u(x) = g(u_1(x), \dots, u_n(x))$

(возможен пропуск утверждения)

## 2. Устойчивость.

### 2.1. Основные определения и свойства.

Рассмотрим нормальную систему диф уравнений  $\dot{x} = f(t, x)$ ,  $f \in C$ ,  $I(t, \xi)$  - максимальный промежуток для решения  $x(t, \tau, \xi)$

**Определение.**  $x(t, \tau, \xi_0)$  - решение,  $I(t, \xi_0) \supset [\tau, \infty)$ , **устойчиво по Ляпунову**, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ :

1.  $\forall \xi, |\xi - \xi_0| \Rightarrow I(t, \xi_0) \supset [\tau, \infty)$
2.  $|x(t, \tau, \xi) - x(t, \tau, \xi_0)| < \varepsilon, t \geq \tau$

Решение **неустойчиво** если оно не устойчиво.

**Определение.** Решение  $x(t, \tau, \xi_0)$  **асимптотически устойчиво**, если оно устойчиво по Ляпунову и

$$\exists \delta > 0 \forall \xi, |\xi - \xi_0| < \delta, \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, \tau, \xi) - x(t, \tau, \xi_0)| = 0$$

Пусть  $(M, d)$  - метрическое пространство,  $F = \{f_k : M \rightarrow M, k \geq 0\}$ ,  $f_k \in C(M)$   
 $x_0 \in M$ ,  $O^+(x_0, F) = \{x_k \in M : k \geq 0\} : x_k = f_k(x_0)$

**Определение.**  $O^+(x_0, F)$  - **устойчивое по Ляпунову** множество, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall y_0 \in M, d(x_0, y_0) < \delta \Rightarrow O^+(y_0, F) = \{y_k\}, d(x_k, y_k) < \varepsilon, k \geq 0$$

**Определение.**  $O^+(x_0, F)$  - **асимптотически устойчивое** множество, если оно устойчивое по Ляпунову и

$$\exists \delta > 0 \forall y_0 \in M, d(x_0, y_0) < \delta \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, y_k) = 0$$

### 2.2. Линейная устойчивость.

Пусть  $M = \mathbb{R}^n$ ,  $F = \{A_k, k \geq 0\}$ , где  $A_k$  - матрица,  $f_k(x) = A_k x + g_k$ , рассматривается однородная задача  $g_k \equiv 0$ .

Определим  $O^+(x_0, \{A_k\}) = \{x_k\}$ , где  $x_{k+1} = A_k x_k$ ,  $x_k = A_{k-1} \cdot \dots \cdot A_0 x_0$ ,  $A_{k-1} \cdot \dots \cdot A_0 = \Phi_k$

**Теорема.** Пусть  $\Phi_k, k \geq 0$  - оператор, тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $\forall x_0 O^+(x_0, \{A_k\})$  - устойчивое по Ляпунову множество
2.  $O^+(0, \{A_k\})$  - устойчивое по Ляпунову множество
3.  $\exists M > 0 : |\Phi_k x_0| < M$  для всех  $k \geq 0$

Доказательство:

(1)  $\implies$  (2) - очевидно

(2)  $\implies$  (3)

Возьмем  $\varepsilon = 1$ , тогда  $\exists \delta > 0$  такое что  $\forall y_0, |y_0| < \delta \implies |y_k| = |\Phi_k y_0| < 1$ .

Возьмем  $x_0, |x_0| = 1$ , тогда для  $y_0 = \frac{\delta}{2} x_0$  имеем  $|\Phi_k y_0| < 1$ , значит  $|\Phi_k x_0| = \frac{2}{\delta} |\Phi_k y_0| < \frac{2}{\delta} = M$ .

(3)  $\implies$  (1)

Пусть  $x_0 : |y_0 - x_0| < \delta$ . Тогда  $|y_k - x_k| = |\Phi_k(y_0 - x_0)| < M\delta$ , что и требовалось.  $\square$

Теперь рассмотрим аналогичную теорему для асимптотической устойчивости:

**Теорема.** Пусть  $\Phi_k, k \geq 0$  - оператор, тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $\forall x_0 O^+(x_0, \{A_k\})$  - асимптотически устойчивое множество
2.  $O^+(0, \{A_k\})$  - асимптотически устойчивое множество
3.  $\|\Phi_k\| \longrightarrow 0$  при  $k \longrightarrow \infty$

Доказательство:

(1)  $\implies$  (2) - очевидно

(2)  $\implies$  (3)

Возьмем  $\varepsilon = 1$ , тогда  $\exists \delta > 0$  такое что  $\forall y_0, |y_0| < \delta \implies |y_k| = |\Phi_k y_0| < 1$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\Phi_k y_0| = 0$ .

Возьмем  $x_0, |x_0| = 1$ , тогда для  $y_0 = \frac{\delta}{2} x_0$  имеем  $|\Phi_k y_0| < 1$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\Phi_k y_0| = 0$ , значит  $\|\Phi_k\| = \sup_{|x_0|=1} |\Phi_k x_0| = \frac{2}{\delta} \sup_{|y_0|=\frac{\delta}{2}} |\Phi_k y_0| \longrightarrow 0$ .

(3)  $\implies$  (1)

Фиксируем  $\varepsilon > 0$ , пусть  $x_0 : |y_0 - x_0| < \delta$ . Тогда  $|y_k - x_k| = |\Phi_k(y_0 - x_0)| \leq \|\Phi_k\| |y_0 - x_0| \leq M\delta$ , выберем  $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ , получим  $M\delta = \varepsilon$  а значит  $|y_k - x_k| \longrightarrow 0$ .  $\square$