Конспект по дифференциальным уравнениям и динамическим системам

Лектор: Пилюгин Сергей Юрьевич

Автор: Артемий Дружинин

Факультет МКН СПБГУ

Весенний семестр 2026

1. Продолжение общей теории дифференциальных уравнений.

Лекция от 17.02.2026

1.1. Еще раз об интегралах.

Пусть есть уравнение $\dot{x} = f(t, x),\ x \in \mathbb{R}^n,\ f \in C,\ f \in \mathrm{Lip}_{x,\mathrm{loc}}(G)$

Определение. Пусть $u : H \to \mathbb{R}$, где $H \subset G$ - область и $u \in C^1(H)$, тогда u называется **интегралом** уравнения $\dot{x} = f(t, x)$, если для любого решения $x(t),\ t \in (a, b)$ такого что $(t, x(t)) \in H$ выполнено:

$$u(t, x(t)) \equiv \mathrm{const}$$

Определение. Пусть есть n интегралов $u_1(t, x), ..., u_n(t, x)$ составим вектор $U(t, x) = \begin{pmatrix} u_1(t,x) \\ ... \\ u_n(t,x) \end{pmatrix}$, тогда интегралы называются **функционально независимыми**, если

$$\mathrm{rank}\ \frac{\partial U}{\partial x} = \mathrm{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \equiv n$$

Теорема. (об интегралах)
Пусть $u_1(t, x), ..., u_n(t, x)$ - функционально независимые интегралы в H, тогда если:
$\forall (t_0, x_0) \in H$ существуют: $(a, b) \ni t_0,\ V$ - открытое в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in V$ и $y : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ $y \in C^1(a, b)$, выполнено:
1. $y(t_0) = x_0$
2. если $(t, x) \in (a, b) \times V$, то $U(t, x) = U(t_0, x_0) \Longleftrightarrow x = y(t)$
3. $y(t)$ - решение задачи Коши с начальными условиями в (t_0, x_0)

Доказательство: Рассмотрим функцию $W(t, x) = U(t, x) - U(t_0, x_0)$, тогда $W \in C^1$.

$$\det \frac{\partial W}{\partial x}(t_0, x_0) \neq 0$$

А тогда существует единственная неявная функция x равная $y(t)$ в окрестности точки (t_0, x_0), такая что $W(t, x) = 0$. По определению интеграла $U(t, x(t, t_0, x_0)) = U(t, x)$ ну и по единственности неявной функции $x(t) = x(t, t_0, x_0)$. $\square$

Теорема. (о существовании системы функционально независимых интегралов)
Пусть $f,\ \frac{\partial f}{\partial x} \in C(H) \Longrightarrow \forall (t_0, x_0) \in H\ \exists G$ - окрестность (t_0, x_0) что:
1. в G существует n функционально независимых интегралов $u_1(t, x), ..., u_n(t, x)$
2. $\forall u(t, x)$ - интерграла в G существует $g \in C^1(G) : u(t, x) = g(u_1(t, x), ..., u_n(t, x))$

Доказательство: По теореме о топологическом выпрямлении существует диффиоморфизм выпрямления $h : G \to h(G)$ такой что

$$h(t, x) = (t, h_1(t, x), ..., h_n(t, x))$$

Тогда заметим, что $h_1(t, x), ..., h_n(t, x)$ - функционально независимые интегралы в G (они интегралы так как переводят интегральные кривые в прямые параллельные t). Для этого рассмотрим матрицу $\frac{\partial h}{\partial(t,x)}$ и поймем что её det не ноль (так как якобиан h не ноль).
Осталось показать, что любой другой интеграл $u(t, x)$ в G может быть представлен в виде функции от $h_1(t, x), ..., h_n(t, x)$. Покажем что $v(t, y) = u(h^{-1}(t, y))$ не зависит от t. Зафиксируем произвольную точку (t_0, y_0) и рассмотрим интегральную кривую проходящую через $(t_0, x_0) = h^{-1}(t_0, y_0)$, заметим что в координатах y эта кривая становится прямой. Тогда по свойству интеграла v постоянна на этой прямой, а значит не завсист от t.
$u(t, x) = u(h^{-1}(t, h(t, x))) = v(t, h(t, x))$ - зависит только от h_i.

□

Случай автономных систем рассмотрим в виде теоремы без доказательства:

Теорема. Пусть $\dot{x} = f(x)$ - автономная система, $f \in C^1$, x_0 - не точка покоя, тогда:
1. $\exists W \ni x_0$ - окрестность x_0, в которой существует n функционально независимых интегралов $u_1(x), ..., u_n(x)$
2. $\forall u(x)$ - интеграла в W, существует $g \in C^1(W) : u(x) = g(u_1(x), ..., u_n(x))$

(возможен пропуск утверждения)

2. Устойчивость.

2.1. Основные определения и свойства.

Рассмотрим нормальную систему диф уравнений $\dot{x} = f(t, x)$, $f \in C$, $I(t, \xi)$ - максимальный промежуток для решения $x(t, \tau, \xi)$

Определение. $x(t, \tau, \xi_0) -$ решение, $I(t, \xi_0) \supset [\tau, \infty)$, **устойчиво по Ляпунову**, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$:
1. $\forall \xi, |\xi - \xi_0| \Longrightarrow I(t, \xi_0) \supset [\tau, \infty)$
2. $|x(t, \tau, \xi) - x(t, \tau, \xi_0)| < \varepsilon, \ t \geq \tau$

Решение **неустойчиво** если оно не устойчиво.

Определение. Решение $x(t, \tau, \xi_0)$ **асимптотически устойчиво**, если оно устойчиво по Ляпунову и

$$\exists \delta > 0 \ \forall \xi, |\xi - \xi_0| < \delta, \ \lim_{t \longrightarrow \infty} |x(t, \tau, \xi) - x(t, \tau, \xi_0)| = 0$$

Пусть (M, d) - метрическое пространство, $F = \{f_k : M \to M, k \geq 0\}$, $f_k \in C(M)$
$x_0 \in M, \ O^+(x_0, F) = \{x_k \in M : k \geq 0\} : \ x_k = f_k(x_0)$

Определение. $O^+(x_0, F)$ - **устойчивое по Ляпунову** множество, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall y_0 \in M, \ d(x_0, y_0) < \delta \Longrightarrow O^+(y_0, F) = \{y_k\}, \ d(x_k, y_k) < \varepsilon, \ k \geq 0$$

Определение. $O^+(x_0, F)$ - **асимптотически устойчивое** множество, если оно устойчивое по Ляпунову и

$$\exists \delta > 0 \ \forall y_0 \in M, \ d(x_0, y_0) < \delta \Longrightarrow \lim_{k \longrightarrow \infty} d(x_k, y_k) = 0$$

2.2. Линейная устойчивость.

Пусть $M = \mathbb{R}^n$, $F = \{A_k, k \geq 0\}$, где A_k - матрица, $f_k(x) = A_k x + g_k$, рассматривается однородная задача $g_k \equiv 0$.
Определим $O^+(x_0, \{A_k\}) = \{x_k\}$, где $x_{k+1} = A_k x_k, \ x_k = A_{k-1} \cdot \ldots \cdot A_0 x_0, \ A_{k-1} \cdot \ldots \cdot A_0 = \Phi_k$

Теорема. Пусть Φ_k, $k \geq 0$ - оператор, тогда следующие условия эквивалентны:
1. $\forall x_0 \ O^+(x_0, \{A_k\})$ - устойчивое по Ляпунову множество
2. $O^+(0, \{A_k\})$ - устойчивое по Ляпунову множество
3. $\exists M > 0 : |\Phi_k x_0| < M$ для всех $k \geq 0$

Доказательство:
$(1) \Longrightarrow (2)$ - очевидно
$(2) \Longrightarrow (3)$
Возьмем $\varepsilon = 1$, тогда $\exists \delta > 0$ такое что $\forall y_0, \quad |y_0| < \delta \Longrightarrow |y_k| = |\Phi_k y_0| < 1$.
Возьмем $x_0, \quad |x_0| = 1$, тогда для $y_0 = \frac{\delta}{2} x_0$ имеем $|\Phi_k y_0| < 1$, значит $|\Phi_k x_0| = \frac{2}{\delta} \ |\Phi_k y_0| < \frac{2}{\delta} = M$.
$(3) \Longrightarrow (1)$
Пусть $x_0 : \quad |y_0 - x_0| < \delta$. Тогда $|y_k - x_k| = |\Phi_k(y_0 - x_0)| < M\delta, \quad$ что и требовалось. □

Теперь рассмотрим аналогичную теорему для асимптотической устойчивости:

Теорема. Пусть Φ_k, $k \geq 0$ - оператор, тогда следующие условия эквивалентны:
1. $\forall x_0 \ O^+(x_0, \{A_k\})$ - асимптотически устойчивое множество
2. $O^+(0, \{A_k\})$ - асимптотически устойчивое множество
3. $\|\Phi_k\| \longrightarrow 0$ при $k \longrightarrow \infty$

Доказательство:
$(1) \Longrightarrow (2)$ - очевидно
$(2) \Longrightarrow (3)$
Возьмем $\varepsilon = 1$, тогда $\exists \delta > 0$ такое что $\forall y_0, \quad |y_0| < \delta \Longrightarrow |y_k| = |\Phi_k y_0| < 1$ и $\lim_{k \longrightarrow \infty} |\Phi_k y_0| = 0$.
Возьмем $x_0, \quad |x_0| = 1$, тогда для $y_0 = \frac{\delta}{2} x_0$ имеем $|\Phi_k y_0| < 1$ и $\lim_{k \longrightarrow \infty} |\Phi_k y_0| = 0$, значит $\|\Phi_k\| = \sup_{|x_0|=1} |\Phi_k x_0| = \frac{2}{\delta} \sup_{|y_0|=\frac{\delta}{2}} |\Phi_k y_0| \longrightarrow 0$.
$(3) \Longrightarrow (1)$
Фиксируем $\varepsilon > 0$, пусть $x_0 : \quad |y_0 - x_0| < \delta$. Тогда $|y_k - x_k| = |\Phi_k(y_0 - x_0)| \leq \|\Phi_k\| \ |y_0 - x_0| \leq M\delta, \quad$ выберем $\delta = \frac{\varepsilon}{M}, \quad$ получим $M\delta = \varepsilon$ а значит $|y_k - x_k| \longrightarrow 0$. □