Конспект по комплексному анализу

Лектор: Белов Юрий Сергеевич

Автор: Артемий Дружинин

Факультет МКН СПБГУ

Весенний семестр 2026

Лекция от 12.02.2026

(still in progress)

Доказательство:

Лекция от 19.02.2026

Продолжаем доказывать теорему о том что f - аналитична в $G \iff f$ - голоморфна в G.
Осталось доказать, что если $f(z)dz$ - замкнута $\implies f$ - голоморфна:
Пусть $B_r(a)$ - шар, замыкание которого в $G,\ \ w, z \in B_r$:

$$g_w(z) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$$

g голоморфна. Также g ограничена в окрестности w. По лемме об устранении особенности $g(z)dz$ - замкнута в B_r.

$$0 = \int_{\gamma_r} g(z)dz = \int_{\gamma_r} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} dw \implies$$
$$\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{z - w} dw = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - w} dw = f(z) \int_{\gamma_r} \frac{dw}{z - w}$$

Заметим, что $|w - a| > z - a$, тогда:

$$\frac{1}{z - w} = \frac{1}{(z - a) - (w - a)} = -\frac{1}{w - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - a}{v - a}} = \frac{1}{w - a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{w - a} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(w - a)^{n+1}}$$

Тогда интеграл:

$$\int_{\gamma_r} \frac{dw}{z - w} = -\int_{\gamma_r} \frac{dw}{(w - a)^n} = -\int_0^{2\pi} \frac{d(re^{it})}{r^n e^{it}} = -i \int_0^{2\pi} r^{1-n} \cdot e^{i(1-n)t} dt = -2\pi i \implies$$
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Разложим в степенной ряд:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw \right] \cdot (z - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - a)^n,\ \text{ где } \ C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Тогда f - голоморфна. $\square$

Замечание. Можно заметить что радиус сходимости ряда $\geq d(a, \partial G)$, то есть, радиус сходимости напярмую зависит от размера области аналитичности.

Пример. Рассмотрим функцию $\frac{1}{1+z^2}$ - ее радиус сходимости равен 1 в точке 0, также мы не можем взять шар в котором она аналитична радиуса больше 1, т.к. она устремляется в бесконечность в точках $i, -i$

Теорема. (Морера) Пусть $G \in \mathbb{C}$ - открытая область, тогда следующие условия равносильны:
1. f - аналитична G
2. f - голоморфна в G
3. форма $f(z)dz$ - локально точна

В этот самый момент до меня дошло, что конспект 2023 годда Магина и Семидетнова в точности до тривиальных примеров и замечаний повторяет текущий курс, в связи с этим больше не вижу смысла продолжать.

ссылка на конспект