Конспект по алгебре

Лектор: Сивацкий Александр Станиславович

Автор: Артемий Дружинин

Факультет МКН СПБГУ

Весенний семестр 2026

1. Теория представлений конечных групп.

Лекция от 11.02.2026

Вспомним несколько важных определений и теорем из предыдущего семестра:

Теорема. (Машке) Пусть k - поле, G - конечная группа, $\operatorname{char} k \nmid |G|$, V - $k[G]$-модуль, тогда найдется подмодуль U, такой что $V = U \oplus W$ для некоторого подмодуля W.

Определение. Неприводимый G-модуль - простой $k[G]$-модуль.

Определение. Модуль называется **неразложимым**, если он не является прямой суммой двух ненулевых подмодулей.

Везде далее V - конечномерное векторное пространство над полем k и $\operatorname{char} k \nmid |G|$

Хотим доказать, что разложение в прямую сумму неприводимых существует и единственно, существование очевидно из леммы Машке, а единственность - из следующей леммы.

Лемма. (Шура) Пусть M, N - простые модули над кольцом R
1. $\forall$ гомоморфизм $\varphi : M \to N$ либо изоморфизм либо нулевой.
2. $\operatorname{End}_R(M)$ - тело (т.е. кольцо с делением).

Доказательство:
1. Пусть φ не изоморфизм, тогда $\ker(\varphi)$ - модуль, $\neq \{0\}$, так как M простой, то $\ker(\varphi) = M$, значит φ - нулевой гомоморфизм.
   Если же φ не нулевой, то $\operatorname{Im}(\varphi) \neq \{0\}$, значит $\operatorname{Im}(\varphi) = N$, значит φ - эпиморфизм, а так как M простой, то $\ker(\varphi) = \{0\}$, значит φ - изоморфизм.
2. Действительно, любой ненулевой элемент - изоморфизм, а значит обратим.

□

Теорема. Пусть V - приводимый модуль над G, тогда V можно разложить на прямую сумму неприводимых над G:

$$V = V_1 \oplus V_2 \ldots \oplus V_n$$

Такое разложение единственно до перестановок и изоморфности отдельных модулей.

Доказательство: Пусть есть два различных разложения:

$$V \simeq M_1^{r_1} \oplus M_2^{r_2} \ldots \oplus M_k^{r_k} \quad \text{и} \quad V \simeq N_1^{s_1} \oplus N_2^{s_2} \ldots \oplus N_l^{s_l}$$

Пусть $M_i \not\simeq N_j$ для любого j. Тогда гомоморфизм φ_j, определенный как композиция вложения и проекции (на диаграмме), по лемме Шура тривиален.

$$\begin{tikzcd} M_i^{r_i} \arrow[r, "in"] \arrow[rr, bend right, "\varphi_j"'] & \bigoplus N_t^{s_t} \arrow[r, "pr_j"] & N_j^{s_j} \end{tikzcd}$$

Поймем, что через эти гомоморфизмы можно разложить вложение $M_i^{r_i}$ в $V = \bigoplus N_t^{s_t}$, что в композиции с проекцией на себя дает $\mathrm{id}_{M_i^{r_i}} \equiv 0$, то есть $M_i^{r_i}$ - тривиальный модуль, что невозможно.

$$M_i^{r_i} \xrightarrow{\bigoplus \varphi_t} \bigoplus N_t^{s_t} \xrightarrow{pr_i} M_i^{r_i}$$

Поэтому M_i изоморфен одному из N_j. Удалив эти модули, получаем два разложения для V с меньшим количеством неприводимых, и так далее. $\square$

Определение. R - кольцо, U - векторное пространство над полем K, причем

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y), \forall x, y \in R, \lambda \in K$$

Тогда R называется ***K*-алгеброй**

Предложение. Пусть L - простой идеал R, M - простой модуль над R
Тогда если $L \not\cong M$ то $LM = 0$

Доказательство: Пусть $m \in M$, проверим что $Lm = 0$:
Рассмотрим гомоморфзим $\varphi : L \to M,\ \varphi(l) = lm$ - он нулевой по лемме Шура $\square$

Замечание. $k[G]$ - k-алгебра и R-модуль, тогда

$$R = k[G] = L_1^{r_1} \oplus L_2^{r_2} \ldots \oplus L_m^{r_m},\ L_i - \text{простые неизоморфные идеалы}$$

По предложению $L_i^{r_i} L_j^{r_j} = L_i L_j = 0$

$$\text{Пусть } 1 = e_1 + e_2 + \ldots + e_m,\ e_i \in L_i^{r_i},\ e_i e_j = 0, \text{при } i \neq j$$

$$e_i^2 = e_i \left(e_i + \sum_{j \neq i} e_j \right) = e_i \cdot 1 = e_i$$

То есть e_i - **идемпотент**. Кроме того, очевидно, что e_i - центральный элемент, так как $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$, а значит e_i коммутирует с любым элементом.
Если $a_1 e_1 + \ldots + a_m e_m = 0$, то $a_i = 0$ для всех i, значит $m \leq \dim_k Z(k[G])$.

Теорема. Любой простой G-модуль изоморфен какому-то идеалу L_i

Доказательство: Для какого-то i, $L_i M \neq 0$, значит они изоморфны по предложению, так как L_i - простой идеал, а M - простой модуль $\square$

Для $g \in G$ рассмотрим $K_g = \{hgh^-1, h \in G\}$ (класс сопряженностим). Обозначим $\hat{K}_g = \sum_{b \in K_g} b$

Теорема. $\left\{\hat{K}_g\right\}_{g\in I}$ составляют базис $Z(k[G])$, где I - множество представителей классов сопряженности в G.

Доказательство: Очевидно, что $\hat{K}_g$ - центральный элемент, так как он коммутирует с любым элементом $h \in G$, так как $h\hat{K}_g h^{-1} = \hat{K}_g$.

Пусть $z \in Z(k[G])$, тогда $z = \sum_{g\in G} a_g g = \sum_{g\in G} a_g \tau g \tau^{-1}$ для любого $\tau \in G$.

Значит $a_g = a_{\tau g \tau^{-1}}$. Поймем, что для элементов из одного класса K_g константы a_g будут одинаковыми, поэтому сумма преобразуется в линейную комбинацию $\hat{K}_g$ для $g \in I$.

Наконец, докажем линейную независимость: фиксируем класс сопряженности K_h, любой элемент $x \in K_h$ содержится в $a_h\hat{K}_h$ единственным образом и не содержится в $a_g\hat{K}_g$ для $g \neq h$, значит x содержится в линейной комбинации $\sum_{g\in I} a_g\hat{K}_g$ единственным образом, значит если эта линейная комбинация нулевая, то $a_g = 0\ \forall g \in I$, так как элементы G - базис $k[G]$. $\square$