

# **Конспект по алгебре**

Лектор: Сивацкий Александр Станиславович

Автор: Артемий Дружинин

Факультет МКН СПбГУ

Весенний семестр 2026

# 1. Теория представлений конечных групп.

## Лекция от 11.02.2026

---

Вспомним несколько важных определений и теорем из предыдущего семестра:

**Теорема.** (Машке) Пусть  $k$  - поле,  $G$  - конечная группа,  $\text{char } k \nmid |G|$ ,  $V$  -  $k[G]$ -модуль, тогда найдется подмодуль  $U$ , такой что  $V = U \oplus W$  для некоторого подмодуля  $W$ .

**Определение.** Неприводимый  $G$ -модуль - простой  $k[G]$ -модуль.

**Определение.** Модуль называется **неразложимым**, если он не является прямой суммой двух ненулевых подмодулей.

Везде далее  $V$  - конечномерное векторное пространство над полем  $K$  и  $\text{char } K \nmid |G|$

Хотим доказать, что разложение в прямую сумму неприводимых существует и единственно, существование очевидно из леммы Машке, а единственность - из следующей леммы.

**Лемма.** (Шура) Пусть  $M, N$  - простые модули над кольцом  $R$

1.  $\forall$  гомоморфизм  $\varphi : M \rightarrow N$  либо изоморфизм либо нулевой.
2.  $\text{End}_R(M)$  - тело (т.е. кольцо с делением).

*Доказательство:*

1. Пусть  $\varphi$  не изоморфизм, тогда  $\ker(\varphi)$  - модуль,  $\neq \{0\}$ , так как  $M$  простой, то  $\ker(\varphi) = M$ , значит  $\varphi$  - нулевой гомоморфизм.  
Если же  $\varphi$  не нулевой, то  $\text{Im}(\varphi) \neq \{0\}$ , значит  $\text{Im}(\varphi) = N$ , значит  $\varphi$  - эпиморфизм, а так как  $M$  простой, то  $\ker(\varphi) = \{0\}$ , значит  $\varphi$  - изоморфизм.
2. Действительно, любой ненулевой элемент - изоморфизм, а значит обратим.

□

**Теорема.** Пусть  $V$  - приводимый модуль над  $G$ , тогда  $V$  можно разложить на прямую сумму неприводимых над  $G$ :

$$V = V_1 \oplus V_2 \dots \oplus V_n$$

Такое разложение единственно до перестановок и изоморфности отдельных модулей.

*Доказательство:* Пусть есть два различных разложения:

$$V \simeq M_1^{r_1} \oplus M_2^{r_2} \dots \oplus M_k^{r_k} \text{ и } V \simeq N_1^{s_1} \oplus N_2^{s_2} \dots \oplus N_l^{s_l}$$

Пусть  $M_i \not\simeq N_j$  для любого  $j$ . Тогда гомоморфизм  $\varphi_j$ , определенный как композиция вложения и проекции (на диаграмме), по лемме Шура тривиален.

$$\begin{array}{ccccc} M_i^{r_i} & \xrightarrow{\text{in}} & \bigoplus N_t^{s_t} & \xrightarrow{pr_j} & N_j^{s_j} \\ & & & \searrow & \\ & & & \varphi_j & \end{array}$$

Поймем, что через эти гомоморфизмы можно разложить вложение  $M_i^{r_i}$  в  $V = \bigoplus N_t^{s_t}$ , что в композиции с проекцией на себя дает  $\text{id}_{M_i^{r_i}} \equiv 0$ , то есть  $M_i^{r_i}$  - тривиальный модуль, что невозможно.

$$M_i^{r_i} \xrightarrow{\bigoplus \varphi_t} \bigoplus N_t^{s_t} \xrightarrow{pr_i} M_i^{r_i}$$

Поэтому  $M_i$  изоморфен одному из  $N_j$ . Удалив эти модули, получаем два разложения для  $V$  с меньшим количеством неприводимых, и так далее.  $\square$

**Определение.**  $R$  - кольцо,  $U$  - векторное пространство над полем  $K$ , причем

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y), \forall x, y \in R, \lambda \in K$$

Тогда  $R$  называется  **$K$ -алгеброй**

**Предложение.** Пусть  $L$  - простой идеал  $R$ ,  $M$  - простой модуль над  $R$   
Тогда если  $L \not\simeq M$  то  $LM = 0$

*Доказательство:* Пусть  $m \in M$ , проверим что  $Lm = 0$ :

Рассмотрим гомоморфизм  $\varphi : L \rightarrow M$ ,  $\varphi(l) = lm$  - он нулевой по лемме Шура  $\square$

**Замечание.**  $k[G]$  -  $k$ -алгебра и  $R$ -модуль, тогда

$$R = k[G] = L_1^{r_1} \oplus L_2^{r_2} \dots \oplus L_m^{r_m}, \quad L_i - \text{простые неизоморфные идеалы}$$

По предложению  $L_i^{r_i} L_j^{r_j} = L_i L_j = 0$

Пусть  $1 = e_1 + e_2 + \dots + e_m$ ,  $e_i \in L_i^{r_i}$ ,  $e_i e_j = 0$ , при  $i \neq j$

$$e_i^2 = e_i \left( e_i + \sum_{j \neq i} e_j \right) = e_i \cdot 1 = e_i$$

То есть  $e_i$  - **идемпотент**. Кроме того, очевидно, что  $e_i$  - центральный элемент, так как  $e_i e_j = 0$  при  $i \neq j$ , а значит  $e_i$  коммутирует с любым элементом.

Если  $a_1 e_1 + \dots + a_m e_m = 0$ , то  $a_i = 0$  для всех  $i$ , значит  $m \leq \dim_k Z(k[G])$ .

**Теорема.** Любой простой  $G$ -модуль изоморфен какому-то идеалу  $L_i$

*Доказательство:* Для какого-то  $i$ ,  $L_i M \neq 0$ , значит они изоморфны по предложению, так как  $L_i$  - простой идеал, а  $M$  - простой модуль  $\square$

Для  $g \in G$  рассмотрим  $K_g = \{hgh^{-1}, h \in G\}$  (класс сопряженности). Обозначим  $\hat{K}_g = \sum_{b \in K_g} b$

**Теорема.**  $\{\hat{K}_g\}_{g \in I}$  составляют базис  $Z(k[G])$ , где  $I$  - множество представителей классов сопряженности в  $G$ .

*Доказательство:* Очевидно, что  $\hat{K}_g$  - центральный элемент, так как он коммутирует с любым элементом  $h \in G$ , так как  $h\hat{K}_g h^{-1} = \hat{K}_g$ .

Пусть  $z \in Z(k[G])$ , тогда  $z = \sum_{g \in G} a_g g = \sum_{g \in G} a_g \tau g \tau^{-1}$  для любого  $\tau \in G$ .

Значит  $a_g = a_{\tau g \tau^{-1}}$ . Поймем, что для элементов из одного класса  $K_g$  константы  $a_g$  будут одинаковыми, поэтому сумма преобразуется в линейную комбинацию  $\hat{K}_g$  для  $g \in I$ .

Наконец, докажем линейную независимость: фиксируем класс сопряженности  $K_h$ , любой элемент  $x \in K_h$  содержится в  $a_h \hat{K}_h$  единственным образом и не содержится в  $a_g \hat{K}_g$  для  $g \neq h$ , значит  $x$  содержится в линейной комбинации  $\sum_{g \in I} a_g \hat{K}_g$  единственным образом, значит если эта линейная комбинация нулевая, то  $a_g = 0 \forall g \in I$ , так как элементы  $G$  - базис  $k[G]$ .  $\square$