Конспект по функциональному анализу

Лектор: Пеллер Владимир Всеволодович

Автор: Артемий Дружинин

Факультет МКН СПБГУ

Весенний семестр 2026

1. Банаховы пространства.

Лекция от 16.02.2026

1.1. Основные определения и свойства.

Определение. Векторное нормированное (с определенной нормой) пространство X над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ **банахово**, если оно еще и полно.

Определение. Банахово пространство Y является **пополнением** пространства X, если X является плотным подпространством Y ($\mathrm{Cl}(X) = Y$) и вложение изометрично (сохраняющее расстояния).

О пополнении можно думать слудующим образом:
Рассмотрим множество $\tilde{X}$ фундаментальных последовательностей в X, будем писать что $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, если $\lim_{n \longrightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0$. Тогда $\tilde{X} / \sim$ с с нормой:

$$\|\{x_n\}\| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \|x_n\|$$

Будет пополнением X.

Замечание. Пополнение пространства X единственно (с точностью до изометрии).

Определение. Пусть $\| \cdot \|_1$ и $\| \cdot \|_2$ - две нормы на векторном пространстве X. Тогда эти нормы **эквивалентны**, если существуют константы $C_1, C_2 > 0$, такие что для всех $x \in X$ выполняются неравенства:

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1$$

Замечание. Если две нормы эквивалентны они задают гомеоморфные топологии (открытый шар в первой норме содержится в шаре второй нормы с радиусом домноженным на C_2 и содержит шар во второй норме с радиусом домноженным C_1).

Теорема. В конечномерном векторном пространстве X все нормы эквивалентны.

Доказательство: Пусть $\dim(X) = n$ и $e_1, e_2, ..., e_n$ - базис в X, $\|\cdot\|$ - норма на X. Введем новую норму: пусть $x \in X,\ x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$, тогда

$$|x| = \sqrt{\sum |a_i|^2}$$

Докажем что $\|\cdot\|$ и $|\cdot|$ эквивалентны.
$\|x\| \le \sum|\alpha_i| \cdot \|e_i\| \le M \sum|\alpha_i| \le \sqrt{n} M \sqrt{\sum|\alpha_i|^2} = \sqrt{n} M |x|$, где $M = \max\|e_i\|$.
Отображение $x \mapsto \varphi(x) = \|x\|$ непрерывно в норме $\|\cdot\|$, так как из условия $|x_k - x| \longrightarrow 0$ следует:

$$|\ \|x_k\| - \|x\|\ | \le \|x_k - x\| \le \sqrt{n} M |x_k - x| \longrightarrow 0$$

Рассмотрим сферу S в норме $|\cdot|$, она компактна, тогда есть такое ε

$$\varepsilon = \min_S \varphi(x) > 0$$

Тогда $\frac{1}{|x|} x \in S \Longrightarrow \|\frac{1}{|x|} x\| \ge \varepsilon$ то есть $\|x\| \ge \varepsilon |x|$.
Итого имеем $\varepsilon|x| \le \|x\| \le \sqrt{n} M |x|$, что дает эквивалентность норм. □

1.2. Нормированные пространства.

Лемма. (о почти перпендикуляре) Пусть X - нормированное пространство, F - его собственное подпространство, тогда

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in X,\quad \|x\| = 1,\ d(x, F) > 1 - \varepsilon$$

Доказательство: Фиксируем $\varepsilon > 0$, пусть $x \in X, x \notin F$, тогда так как F - замкнуто, $d(x, F) = \delta > 0$.
Зафиксируем $\tau > 0$ и выберем $\alpha \in F$, чтобы было выполнено:

$$\delta \le \|x - \alpha\| \le \delta + \tau$$

$$\text{Положим}\quad y = \frac{x - \alpha}{\delta + \tau} \quad \text{и заметим что } 1 \ge \|y\|$$

Также заметим:

$$d(y, F) = \inf_{f \in F} \|y - f\| = \inf_{f \in F} \frac{1}{\delta + \tau} \|x - \alpha - (\delta + \tau) f\| \ge \frac{\delta}{\delta + \tau}$$

(так как $z = \alpha + (\delta + \tau) f$ лежит в F, расстояние между z и x не меньше чем δ)

Так как F - линейное пространство:

$$d(ky, F) = \min_{f \in F} \|ky - f\| = \min_{f \in F} \|ky - kf\| = k d(y, F)$$

Чтобы получить вектор с нормой 1, положим $k = \frac{1}{\|y\|} \ge 1$, тогда

$$d(ky, F) \geq k\frac{\delta}{\delta + \tau} \geq 1 \cdot \frac{\delta}{\delta + \tau} = \frac{\delta}{\delta + \tau}$$

Осталось устремить τ к нулю и получить нужную оценку для фиксированного ε. □

Теорема. Пусть X - нормированное пространство, следующие утверждение равносильны:
1. $\dim X < \infty$
2. У всякого ограниченного подмножества X замыкание компактно.

Доказательство:
(1) $\Longrightarrow$ (2): Это верно, так как X - евклидово пространство, а в евклидовом пространстве всякое ограниченное замкнутое множество компактно.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Предположим что $\dim X = \infty$, по лемме о почти перепендикуляре построим последовательность веткоров $\{x_n\}$ таких что

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{и} \quad d(x_n,\ \operatorname{span}(x_1, ..., x_{n-1})) > \frac{1}{2} \quad (\text{span - линнейная оболочка})$$

Но тогда $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ для любых m и n, из чего следует что из $\{x_n\}$ нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность, значит замыкание $\{x_n\}$ не компактно (так как в метрических пространствах секвенциальная компактность и обычная эквивалентны). □

1.3. Линеные операторы.

Теорема. Пусть X, Y - нормированные пространства, $T : X \to Y$ - линейный оператор, тогда следующие утверждения равносильны:
1. T непрерывный
2. T непрерывный в нуле
3. $T(B_x)$ - ограниченое множество (где $B_x = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$)

Доказательство:
1) $\Longrightarrow$ 2): Очевидно, так как непрерывность в точке - это часть определения непрерывности.

2) $\Longrightarrow$ 3): Рассмотрим открытый единичный шар $U = \{y \in Y : \|y\| < 1\}$. Непрерывность в нуле означает, что для некоторого $\delta > 0$ выполнено:

$$\|x\| < \delta \Longrightarrow \|Tx\| < 1 \Longrightarrow Tx \in U$$

Пусть $z \in B_x$ то есть $\|z\| \leq 1$, тогда $\|\delta z\| \leq \delta$, значит $T(\delta z) \in U$, значит $\|Tz\| \leq \frac{1}{\delta}$ - что и требовалось.

3) $\Longrightarrow$ 1): Пусть $M = \sup_{z \in B_x} \|Tz\|$, тогда по линейности для любого $x \in X$ выполнено $\|Tx\| \leq M\|x\|$. Если $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$, то:

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq M\|x_n - x\| \longrightarrow 0$$

Значит T непрерывный. □

Определение. Пусть $T : X \to Y$ - непрерывный линейный оператор между нормированными пространствами. Тогда **нормой** оператора T называется число:

$$\|T\| = \sup_{x \leq 1} \|Tx\| = \sup_{x=1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \min_{M \geq 0} (\|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in X)$$

Таким образом, имеем нормированое пространство непрерывных линейных операторов, будем обозначать его как $L(X, Y)$ или $B(X, Y)$.

Предложение. Если Y - банахово пространство, то $L(X, Y)$ - банахово пространство.

Доказательство: Докажем полноту: пусть $\{T_n\}$ - фундаментальная последовательность в $L(X, Y)$, тогда для любого $x \in X$ последовательность $\{T_n x\}$ - фундаментальная в Y, так как

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| \longrightarrow 0$$

Тогда по фундаментальности существует $y_x \in Y$, такой что $T_n x \longrightarrow y_x$. Положим $Tx = y_x$.
Покажем, что T - непрерывный линейный оператор.
Он очевидно линейный, так как предельный переход сохраняет линейные операции.

$$\|Tx\| = \|\lim_{n \longrightarrow \infty} T_n x\| \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \|T_n x\| \leq M\|x\|$$

$$\text{(где } M = \lim_{n \longrightarrow \infty} \|T_n\|, \text{ который существует так как } \{\text{T\_n}\} \text{ - фундаментальная)}$$

Таким образом, T также и непрерывен (по теореме). Наконец:

$$\|T_n - T\| = \lim_{m \longrightarrow \infty} \|T_n - T_m\| \leq \lim_{m \longrightarrow \infty} \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| \longrightarrow 0$$

Значит T является пределом $\{T_n\}$, что завершает доказательство полноты $L(X, Y)$. $\square$

Определение. Пусть $\{T_n\} \in B(X, Y)$, будем говорить что T_n сходится к T **поточечно сильно**, если для любого $x \in X$ выполнено $T_n x \longrightarrow Tx$.