

# **Конспект по функциональному анализу**

Лектор: Пеллер Владимир Всееволодович

Автор: Артемий Дружинин

Факультет МКН СПБГУ

Весенний семестр 2026

# 1. Банаховы пространства.

Лекция от 16.02.2026

## 1.1. Основные определения и свойства.

**Определение.** Векторное нормированное (с определенной нормой) пространство  $X$  над  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$  **банахово**, если оно еще и полно.

**Определение.** Банахово пространство  $Y$  является **пополнением** пространства  $X$ , если  $X$  является плотным подпространством  $Y$  ( $\text{Cl}(X) = Y$ ) и вложение изометрично (сохраняющее расстояния).

О пополнении можно думать следующим образом:

Рассмотрим множество  $\tilde{X}$  фундаментальных последовательностей в  $X$ , будем писать что  $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0$ . Тогда  $\tilde{X} / \sim$  с нормой:

$$\|\{x_n\}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$$

Будет пополнением  $X$ .

**Замечание.** Пополнение пространства  $X$  единственно (с точностью до изометрии).

**Определение.** Пусть  $\|\cdot\|_1$  и  $\|\cdot\|_2$  - две нормы на векторном пространстве  $X$ . Тогда эти нормы **эквивалентны**, если существуют константы  $C_1, C_2 > 0$ , такие что для всех  $x \in X$  выполняются неравенства:

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1$$

**Замечание.** Если две нормы эквивалентны они задают гомеоморфные топологии (открытый шар в первой норме содержится в шаре второй нормы с радиусом домноженным на  $C_2$  и содержит шар во второй норме с радиусом домноженным  $C_1$ ).

**Теорема.** В конечномерном векторном пространстве  $X$  все нормы эквивалентны.

**Доказательство:** Пусть  $\dim(X) = n$  и  $e_1, e_2, \dots, e_n$  - базис в  $X$ ,  $\|\cdot\|$  - норма на  $X$ . Введем новую норму: пусть  $x \in X$ ,  $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ , тогда

$$|x| = \sqrt{\sum |a_i|^2}$$

Докажем что  $\|\cdot\|$  и  $|\cdot|$  эквивалентны.

$$\|x\| \leq \sum |\alpha_i| \cdot \|e_i\| \leq M \sum |\alpha_i| \leq \sqrt{n}M \sqrt{\sum |\alpha_i|^2} = \sqrt{n}M|x|, \text{ где } M = \max \|e_i\|.$$

Отображение  $x \mapsto \varphi(x) = \|x\|$  непрерывно в норме  $\|\cdot\|$ , так как из условия  $|x_k - x| \rightarrow 0$  следует:

$$|\|x_k\| - \|x\|| \leq \|x_k - x\| \leq \sqrt{n}M|x_k - x| \rightarrow 0$$

Рассмотрим сферу  $S$  в норме  $|\cdot|$ , она компактна, тогда есть такое  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \min_S \varphi(x) > 0$$

Тогда  $\frac{1}{|x|}x \in S \Rightarrow \|\frac{1}{|x|}x\| \geq \varepsilon$  то есть  $\|x\| \geq \varepsilon|x|$ .

Итого имеем  $\varepsilon|x| \leq \|x\| \leq \sqrt{n}M|x|$ , что дает эквивалентность норм.

□

## 1.2. Нормированные пространства.

**Лемма.** (о почти перпендикуляре) Пусть  $X$  - нормированное пространство,  $F$  - его собственное подпространство, тогда

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X, \|x\| = 1, d(x, F) > 1 - \varepsilon$$

**Доказательство:** Фиксируем  $\varepsilon > 0$ , пусть  $x \in X, x \notin F$ , тогда так как  $F$  - замкнуто,  $d(x, F) = \delta > 0$ .

Зафиксируем  $\tau > 0$  и выберем  $\alpha \in F$ , чтобы было выполнено:

$$\delta \leq \|x - \alpha\| \leq \delta + \tau$$

Положим  $y = \frac{x - \alpha}{\delta + \tau}$  и заметим что  $1 \geq \|y\|$

Также заметим:

$$d(y, F) = \inf_{f \in F} \|y - f\| = \inf_{f \in F} \frac{1}{\delta + \tau} \|x - \alpha - (\delta + \tau)f\| \geq \frac{\delta}{\delta + \tau}$$

(так как  $z = \alpha + (\delta + \tau)f$  лежит в  $F$ , расстояние между  $z$  и  $x$  не меньше чем  $\delta$ )

Так как  $F$  - линейное пространство:

$$d(ky, F) = \min_{f \in F} \|ky - f\| = \min_{f \in F} \|ky - kf\| = kd(y, F)$$

Чтобы получить вектор с нормой 1, положим  $k = \frac{1}{\|y\|} \geq 1$ , тогда

$$d(ky, F) \geq k \frac{\delta}{\delta + \tau} \geq 1 \cdot \frac{\delta}{\delta + \tau} = \frac{\delta}{\delta + \tau}$$

Осталось устремить  $\tau$  к нулю и получить нужную оценку для фиксированного  $\varepsilon$ .  $\square$

**Теорема.** Пусть  $X$  - нормированное пространство, следующие утверждение равносильны:

1.  $\dim X < \infty$
2. У всякого ограниченного подмножества  $X$  замыкание компактно.

*Доказательство:*

(1)  $\Rightarrow$  (2): Это верно, так как  $X$  - евклидово пространство, а в евклидовом пространстве всякое ограниченное замкнутое множество компактно.

(2)  $\Rightarrow$  (1): Предположим что  $\dim X = \infty$ , по лемме о почти перпендикуляре построим последовательность векторов  $\{x_n\}$  таких что

$$\|x_n\| = 1 \text{ и } d(x_n, \operatorname{span}(x_1, \dots, x_{n-1})) > \frac{1}{2} \quad (\operatorname{span} - \text{линейная оболочка})$$

Но тогда  $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$  для любых  $m$  и  $n$ , из чего следует что из  $\{x_n\}$  нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность, значит замыкание  $\{x_n\}$  не компактно (так как в метрических пространствах секвенциальная компактность и обычная эквивалентны).  $\square$

### 1.3. Линейные операторы.

**Теорема.** Пусть  $X, Y$  - нормированные пространства,  $T : X \rightarrow Y$  - линейный оператор, тогда следующие утверждения равносильны:

1.  $T$  непрерывный
2.  $T$  непрерывный в нуле
3.  $T(B_x)$  - ограниченное множество (где  $B_x = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ )

*Доказательство:*

1)  $\Rightarrow$  2): Очевидно, так как непрерывность в точке - это часть определения непрерывности.

2)  $\Rightarrow$  3): Рассмотрим открытый единичный шар  $U = \{y \in Y : \|y\| < 1\}$ . Непрерывность в нуле означает, что для некоторого  $\delta > 0$  выполнено:

$$\|x\| < \delta \Rightarrow \|Tx\| < 1 \Rightarrow Tx \in U$$

Пусть  $z \in B_x$  то есть  $\|z\| \leq 1$ , тогда  $\|\delta z\| \leq \delta$ , значит  $T(\delta z) \in U$ , значит  $\|Tz\| \leq \frac{1}{\delta}$  - что и требовалось.

3)  $\Rightarrow$  1): Пусть  $M = \sup_{z \in B_x} \|Tz\|$ , тогда по линейности для любого  $x \in X$  выполнено  $\|Tx\| \leq M\|x\|$ . Если  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ , то:

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq M\|x_n - x\| \rightarrow 0$$

Значит  $T$  непрерывный.  $\square$

**Определение.** Пусть  $T : X \rightarrow Y$  - непрерывный линейный оператор между нормированными пространствами. Тогда **нормой** оператора  $T$  называется число:

$$\|T\| = \sup_{x \leq 1} \|Tx\| = \sup_{x=1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \min_{M \geq 0} (\|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in X)$$

Таким образом, имеем нормированное пространство непрерывных линейных операторов, будем обозначать его как  $L(X, Y)$  или  $B(X, Y)$ .

**Предложение.** Если  $Y$  - банахово пространство, то  $L(X, Y)$  - банахово пространство.

**Доказательство:** Докажем полноту: пусть  $\{T_n\}$  - фундаментальная последовательность в  $L(X, Y)$ , тогда для любого  $x \in X$  последовательность  $\{T_n x\}$  - фундаментальная в  $Y$ , так как

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| \rightarrow 0$$

Тогда по фундаментальности существует  $y_x \in Y$ , такой что  $T_n x \rightarrow y_x$ . Положим  $Tx = y_x$ . Покажем, что  $T$  - непрерывный линейный оператор.

Он очевидно линейный, так как предельный переход сохраняет линейные операции.

$$\|Tx\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x \right\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| \leq M\|x\|$$

(где  $M = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$ , который существует так как  $\{T_n\}$  - фундаментальная)

Таким образом,  $T$  также и непрерывен (по теореме). Наконец:

$$\|T_n - T\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_n - T_m\| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| \rightarrow 0$$

Значит  $T$  является пределом  $\{T_n\}$ , что завершает доказательство полноты  $L(X, Y)$ .  $\square$

**Определение.** Пусть  $\{T_n\} \in B(X, Y)$ , будем говорить что  $T_n$  сходится к  $T$  **поточечно сильно**, если для любого  $x \in X$  выполнено  $T_n x \rightarrow Tx$ .