

Теорема о непротиворечивости формальной арифметики

Два вида индукции

Определение (принцип математической индукции)

Какое бы ни было $\varphi(x)$, если $\varphi(0)$ и при всех x выполнено $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x')$, то при всех x выполнено и само $\varphi(x)$.

Определение (принцип полной математической индукции)

Какое бы ни было $\psi(x)$, если $\psi(0)$ и при всех x выполнено $(\forall t. t \leq x \rightarrow \psi(t)) \rightarrow \psi(x')$, то при всех x выполнено и само $\psi(x)$.

Теорема

Принципы математической индукции эквивалентны

Доказательство.

(\Rightarrow) взяв $\varphi := \psi$, имеем выполненность $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x')$, значит, $\forall x. \psi(x)$.

Два вида индукции

Определение (принцип математической индукции)

Какое бы ни было $\varphi(x)$, если $\varphi(0)$ и при всех x выполнено $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x')$, то при всех x выполнено и само $\varphi(x)$.

Определение (принцип полной математической индукции)

Какое бы ни было $\psi(x)$, если $\psi(0)$ и при всех x выполнено $(\forall t. t \leq x \rightarrow \psi(t)) \rightarrow \psi(x')$, то при всех x выполнено и само $\psi(x)$.

Теорема

Принципы математической индукции эквивалентны

Доказательство.

(\Rightarrow) взяв $\varphi := \psi$, имеем выполненность $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x')$, значит, $\forall x. \psi(x)$.

(\Leftarrow) возьмём $\psi(x) := \forall t. t \leq x \rightarrow \varphi(t)$.



Наследственные множества

Определение

Назовём вполне упорядоченное отношение (\in) множество S наследственным подмножеством A , если $\forall x. x \in A \rightarrow (\forall t. t \in x \rightarrow t \in S) \rightarrow x \in S$.

Теорема

Единственным наследственным подмножеством вполне упорядоченного множества является оно само.

Доказательство.

Пусть $B \subseteq A$ — наследственное и $B \neq A$. Тогда существует $a = \min(A \setminus B)$. Тогда $(\forall t. t \in a \rightarrow t \in B) \rightarrow a \in B$ по наследственности B , и выполнено $\forall t. t \in a \rightarrow t \in B$ (по минимальности a). Значит, $a \in B$. □

Трансфинитная индукция

Теорема (Принцип «полной» трансфинитной индукции)

Если для $\varphi(x)$ (некоторого утверждения теории множеств) и некоторого ординала ε выполнено $\forall x. x \in \varepsilon \rightarrow (\forall t. t \in x \rightarrow \varphi(t)) \rightarrow \varphi(x)$, то $\forall x. x \in \varepsilon \rightarrow \varphi(x)$.

Доказательство.

Рассмотрим $S = \{x \in \varepsilon \mid \varphi(x)\}$. Тогда $x \in S$ равносильно $\varphi(x)$. Тогда перепишем: $\forall e. e \in \varepsilon \rightarrow (\forall x. x \in e \rightarrow x \in S) \rightarrow e \in S$. Отсюда по теореме о наследственных множествах $S = \varepsilon$. □

Альтернативная формулировка

Теорема

Для ординала ε подмножество $S \in \varepsilon$ — наследственное, если одновременно:

Если $x \in \varepsilon$ и $x = \emptyset$, то $x \in S$;

Если $x \in \varepsilon$ и существует $y: y' = x$, то $y \in S \rightarrow x \in S$;

Если $x \in \varepsilon$ и x — предельный, то $(\forall t. t \in x \rightarrow t \in S) \rightarrow (x \in S)$.

Доказательство.

(\Rightarrow) очевидно.

Альтернативная формулировка

Теорема

Для ординала ε подмножество $S \in \varepsilon$ — наследственное, если одновременно:

Если $x \in \varepsilon$ и $x = \emptyset$, то $x \in S$;

Если $x \in \varepsilon$ и существует $y: y' = x$, то $y \in S \rightarrow x \in S$;

Если $x \in \varepsilon$ и x — предельный, то $(\forall t. t \in x \rightarrow t \in S) \rightarrow (x \in S)$.

Доказательство.

(\Rightarrow) очевидно. Докажем (\Leftarrow) : пусть S не наследственное:

$E := \{e \in \varepsilon \mid (\forall t. t \in e \rightarrow t \in S) \ \& \ e \notin S\}$ и $E \neq \emptyset$. Тогда пусть $e = \min E$.

1. $e = \emptyset$ или предельный. Тогда $(\forall t. t \in e \rightarrow t \in S) \rightarrow (e \in S)$.
2. $e = y'$. Тогда $y \in \varepsilon$ (ε — ординал) и $(\forall t. t \in y \rightarrow t \in S) \rightarrow (y \in S)$ (так как e минимальный, для которого S не наследственное).

Альтернативная формулировка

Теорема

Для ординала ε подмножество $S \in \varepsilon$ — наследственное, если одновременно:

Если $x \in \varepsilon$ и $x = \emptyset$, то $x \in S$;

Если $x \in \varepsilon$ и существует $y: y' = x$, то $y \in S \rightarrow x \in S$;

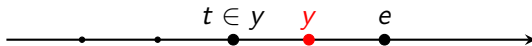
Если $x \in \varepsilon$ и x — предельный, то $(\forall t. t \in x \rightarrow t \in S) \rightarrow (x \in S)$.

Доказательство.

(\Rightarrow) очевидно. Докажем (\Leftarrow) : пусть S не наследственное:

$E := \{e \in \varepsilon \mid (\forall t. t \in e \rightarrow t \in S) \ \& \ e \notin S\}$ и $E \neq \emptyset$. Тогда пусть $e = \min E$.

1. $e = \emptyset$ или предельный. Тогда $(\forall t. t \in e \rightarrow t \in S) \rightarrow (e \in S)$.
2. $e = y'$. Тогда $y \in \varepsilon$ (ε — ординал) и $(\forall t. t \in y \rightarrow t \in S) \rightarrow (y \in S)$ (так как e минимальный, для которого S не наследственное). По условию, $(y \in S) \rightarrow (e \in S)$, отсюда $(\forall t. t \in e \rightarrow t \in S) \rightarrow (e \in S)$.



Исчисление S_∞

1. Язык: связки $\neg, \vee, \forall, =$; нелогические символы: $(+), (\cdot), ('), 0$; переменные: x .
2. Аксиомы: все истинные формулы вида $\theta_1 = \theta_2$; все истинные отрицания формул вида $\neg\theta_1 = \theta_2$ (θ_i — термы без переменных).
3. Структурные (слабые) правила:

$$\frac{\zeta \vee \alpha \vee \beta \vee \delta}{\zeta \vee \beta \vee \alpha \vee \delta} \quad \frac{\alpha \vee \alpha \vee \delta}{\alpha \vee \delta}$$

сильные правила

$$\frac{\delta}{\alpha \vee \delta} \quad \frac{\neg\alpha \vee \delta \quad \neg\beta \vee \delta}{\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta} \quad \frac{\alpha \vee \delta}{\neg\neg\alpha \vee \delta} \quad \frac{\neg\alpha[x := \theta] \vee \delta}{(\neg\forall x.\alpha) \vee \delta}$$

и ещё два правила ...

Ещё правила S_∞

бесконечная индукция

$$\frac{\alpha[x := \bar{0}] \vee \delta \quad \alpha[x := \bar{1}] \vee \delta \quad \alpha[x := \bar{2}] \vee \delta \quad \dots}{(\forall x. \alpha) \vee \delta}$$

сечение

$$\frac{\zeta \vee \alpha \quad \neg \alpha \vee \delta}{\zeta \vee \delta}$$

Здесь:

α — секущая формула

Число связок в $\neg \alpha$ — степень сечения.

Дерево доказательства

1. Доказательства образуют деревья.
2. Каждой формуле в дереве сопоставим порядковое число (ординал).
3. Порядковое число заключения любого неструктурного правила строго больше порядкового числа его посылок (больше или равно в случае структурного правила).

$$\frac{(\neg 1 = 0)_1 \quad (\neg 2 = 0)_2 \quad (\neg 3 = 0)_4 \quad (\neg 4 = 0)_8 \dots}{(\forall x. \neg x' = 0)_\omega}$$
$$\frac{(\forall x. \neg x' = 0)_\omega}{(\neg \neg \forall x. \neg x' = 0)_{\omega+1}}$$

4. Существует конечная максимальная степень сечения в дереве (назовём её степенью вывода).

Любая теорема Ф.А. — теорема S_∞

Теорема

Если $\vdash_{\text{фа}} \alpha$, то $\vdash_\infty |\alpha|_\infty$

Пример

Обратное неверно:

$$\frac{\neg\omega(\bar{0}, \overline{\ulcorner\sigma\urcorner}) \quad \neg\omega(\bar{1}, \overline{\ulcorner\sigma\urcorner}) \quad \neg\omega(\bar{2}, \overline{\ulcorner\sigma\urcorner}) \quad \dots}{\forall x. \neg\omega(x, \overline{\ulcorner\sigma\urcorner})}$$

Теорема

Если Ф.А. противоречива, то противоречива и S_∞

Обратимость правил де Моргана, отрицания, бесконечной индукции

Теорема

$$\frac{\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta}{\neg\alpha \vee \delta \quad \neg\beta \vee \delta} \quad \frac{\neg\neg\alpha \vee \delta}{\alpha \vee \delta} \quad \frac{(\forall x.\alpha) \vee \delta}{\alpha[x := \bar{0}] \vee \delta \quad \alpha[x := \bar{1}] \vee \delta \quad \alpha[x := \bar{2}] \vee \delta \quad \dots}$$

Доказательство.

Например, формула вида $\neg\neg\alpha \vee \delta$.

Обратимость правил де Моргана, отрицания, бесконечной индукции

Теорема

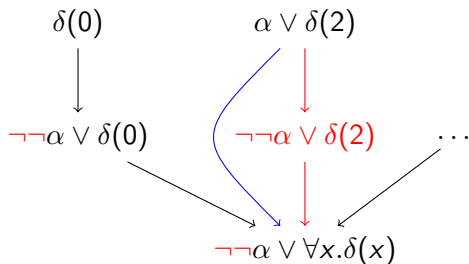
$$\frac{\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta}{\neg\alpha \vee \delta \quad \neg\beta \vee \delta} \quad \frac{\neg\neg\alpha \vee \delta}{\alpha \vee \delta} \quad \frac{(\forall x.\alpha) \vee \delta}{\alpha[x := \bar{0}] \vee \delta \quad \alpha[x := \bar{1}] \vee \delta \quad \alpha[x := \bar{2}] \vee \delta \quad \dots}$$

Доказательство.

Например, формула вида $\neg\neg\alpha \vee \delta$.

Проследим историю $\neg\neg\alpha$; она могла быть получена:

1. ослаблением — заменим $\neg\neg\alpha$ на α в этом узле и последующих.
2. отрицанием — выбросим правило, заменим $\neg\neg\alpha$ на α в последующих.



Устранение сечений

Теорема

Если α имеет вывод степени $m > 0$ порядка t , то можно найти вывод степени строго меньшей m с порядком 2^t .

Доказательство.

Трансфинитная индукция. Пусть для всех деревьев порядка $t_1 < t$ условие выполнено. Покажем, что оно выполнено для порядка t . Рассмотрим заключительное правило. Это может быть...

1. Не сечение.
2. Сечение, секущая формула — элементарная.
3. Сечение, секущая формула — $\neg\alpha$.
4. Сечение, секущая формула — $\alpha \vee \beta$.
5. Сечение, секущая формула — $\forall x.\alpha$.



Случай 1. Не сечение

$$\frac{(\pi_0)_{t_0} \quad (\pi_1)_{t_1} \quad (\pi_2)_{t_2} \quad \dots}{(\alpha)_t}$$

Заменяем доказательства посылок $(\pi_i)_{t_i}$ на $(\pi'_i)_{2^{t_i}}$ по индукционному предположению.

1. Поскольку степени посылок $m'_i < m_i$, то $\max m'_i < \max m_i$.
2. Поскольку $t_i \leq t$, то $2^{t_i} \leq 2^t$.

Случай 5. Сечение с формулой вида $\forall x.\alpha$

$$\frac{\zeta \vee \forall x.\alpha \quad (\neg \forall x.\alpha) \vee \delta}{\zeta \vee \delta}$$

Причём степень и порядок выводов компонент, соответственно, (m_1, t_1) и (m_2, t_2) .

1. По индукции, вывод $\zeta \vee \forall x.\alpha$ можно упростить до $(m'_1, 2^{t_1})$.
2. По обратимости, можно построить вывод $\zeta \vee \alpha[x := \theta]$ за $(m'_1, 2^{t_1})$.
3. В формуле $(\neg \forall x.\alpha) \vee \delta$ формула $\neg \forall x.\alpha$ получена либо ослаблением, либо квантификацией из $\neg \alpha[x := \theta_k] \vee \delta_k$.

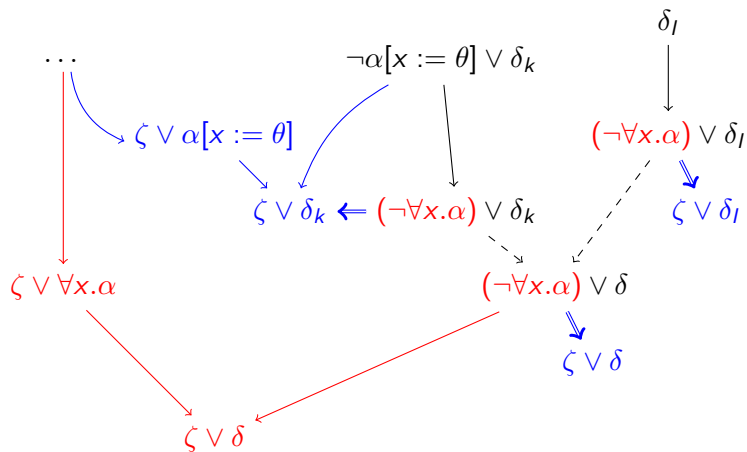
3.1 Каждое правило квантификации заменим на:

$$\frac{\zeta \vee \alpha[x := \theta_k] \quad (\neg \alpha[x := \theta_k]) \vee \delta_k}{\zeta \vee \delta_k}$$

3.2 Остальные вхождения $\neg \forall x.\alpha$ заменим на ζ (в правилах ослабления).

4. В получившемся дереве меньше степень — так как в $\neg \alpha[x := \theta]$ меньше связок, чем в $\neg \forall x.\alpha$.

Случай 5. Как перестроим доказательство



Теорема об устранении сечений

Определение

Итерационная экспонента

$$(a \uparrow)^m(t) = \begin{cases} t, & m = 0 \\ a^{(a \uparrow)^{m-1}(t)}, & m > 0 \end{cases}$$

Теорема

Если $\vdash_{\infty} \sigma$ степени m порядка t , то найдётся доказательство без сечений порядка $(2 \uparrow)^m(t)$

Доказательство.

В силу конечности m воспользуемся индукцией по m и теоремой об уменьшении степени.



Порядок трансфинитной индукции

Определение

ε_0 — неподвижная точка $\varepsilon_0 = \omega^{\varepsilon_0}$

Иначе говоря, $\varepsilon_0 = \{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, (\omega \uparrow)^3(\omega), (\omega \uparrow)^4(\omega), \dots\}$.

Очевидно, что теорема об устранении сечений может быть доказана трансфинитной индукцией до ординала ε_0 (максимальный порядок дерева вывода, при правильной нумерации вершин).

Непротиворечивость формальной арифметики

Теорема

Система S_{∞} непротиворечива

Доказательство.

Непротиворечивость формальной арифметики

Теорема

Система S_{∞} непротиворечива

Доказательство.

Рассмотрим формулу $\neg 0 = 0$. Если эта формула выводима в S_{∞} , то она выводима и в S_{∞} без сечений. Тогда какое заключительное правило?

Непротиворечивость формальной арифметики

Теорема

Система S_∞ непротиворечива

Доказательство.

Рассмотрим формулу $\neg 0 = 0$. Если эта формула выводима в S_∞ , то она выводима и в S_∞ без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило Де-Моргана?

Непротиворечивость формальной арифметики

Теорема

Система S_∞ непротиворечива

Доказательство.

Рассмотрим формулу $\neg 0 = 0$. Если эта формула выводима в S_∞ , то она выводима и в S_∞ без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило Де-Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции $(\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta)$.

Непротиворечивость формальной арифметики

Теорема

Система S_∞ непротиворечива

Доказательство.

Рассмотрим формулу $\neg 0 = 0$. Если эта формула выводима в S_∞ , то она выводима и в S_∞ без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило Де-Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции ($\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta$).
2. Отрицание?

Непротиворечивость формальной арифметики

Теорема

Система S_∞ непротиворечива

Доказательство.

Рассмотрим формулу $\neg 0 = 0$. Если эта формула выводима в S_∞ , то она выводима и в S_∞ без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило Де-Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции ($\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta$).
2. Отрицание? Нет двойного отрицания ($\neg\neg\alpha \vee \delta$).

Непротиворечивость формальной арифметики

Теорема

Система S_∞ непротиворечива

Доказательство.

Рассмотрим формулу $\neg 0 = 0$. Если эта формула выводима в S_∞ , то она выводима и в S_∞ без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило Де-Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции ($\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta$).
2. Отрицание? Нет двойного отрицания ($\neg\neg\alpha \vee \delta$).
3. Бесконечная индукция или квантификация?

Непротиворечивость формальной арифметики

Теорема

Система S_∞ непротиворечива

Доказательство.

Рассмотрим формулу $\neg 0 = 0$. Если эта формула выводима в S_∞ , то она выводима и в S_∞ без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило Де-Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции ($\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta$).
2. Отрицание? Нет двойного отрицания ($\neg\neg\alpha \vee \delta$).
3. Бесконечная индукция или квантификация? Нет квантора.

Непротиворечивость формальной арифметики

Теорема

Система S_∞ непротиворечива

Доказательство.

Рассмотрим формулу $\neg 0 = 0$. Если эта формула выводима в S_∞ , то она выводима и в S_∞ без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило Де-Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции ($\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta$).
2. Отрицание? Нет двойного отрицания ($\neg\neg\alpha \vee \delta$).
3. Бесконечная индукция или квантификация? Нет квантора.
4. Ослабление?

Непротиворечивость формальной арифметики

Теорема

Система S_∞ непротиворечива

Доказательство.

Рассмотрим формулу $\neg 0 = 0$. Если эта формула выводима в S_∞ , то она выводима и в S_∞ без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило Де-Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции ($\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta$).
2. Отрицание? Нет двойного отрицания ($\neg\neg\alpha \vee \delta$).
3. Бесконечная индукция или квантификация? Нет квантора.
4. Ослабление? Нет дизъюнкции ($\alpha \vee \delta$).

Непротиворечивость формальной арифметики

Теорема

Система S_∞ непротиворечива

Доказательство.

Рассмотрим формулу $\neg 0 = 0$. Если эта формула выводима в S_∞ , то она выводима и в S_∞ без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило Де-Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции ($\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta$).
2. Отрицание? Нет двойного отрицания ($\neg\neg\alpha \vee \delta$).
3. Бесконечная индукция или квантификация? Нет квантора.
4. Ослабление? Нет дизъюнкции ($\alpha \vee \delta$).

То есть, неизбежно, $\neg 0 = 0$ — аксиома, что также неверно.

