Теорема Лёвенгейма-Сколема

Как пересчитать вещественные числа (неформально)?

1. Номер вещественного числа — первое упоминание в литературе, т.е. $\langle j, y, n, p, r, c\rangle$:
   j — гёделев номер названия научного журнала (книги);
   y — год издания;
   n — номер;
   p — страница;
   r — строка;
   c — позиция
2. Попробуете предъявить число x, не имеющее номера? Это рассуждение сразу даст номер.

Мощность модели и аксиоматизации

Определение

Пусть задана модель $\langle D, F_n, P_n \rangle$ *для некоторой теории первого порядка. Её мощностью будем считать мощность* D.

Определение

Пусть задана формальная теория с аксиомами α_n*. Её мощность — мощность множества* $\{\alpha_n\}$.

Пример

Формальная арифметика, исчисление предикатов, исчисление высказываний — счётно-аксиоматизируемые.

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — *элементарная подмодель* $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$, *если:*

1. $D' \subseteq D$, F'_n, P'_n — *сужение* F_n, P_n *(замкнутое на* D'*).*
2. $\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{M}' \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ *при* $x_i \in D'$*.*

Пример

Когда сужение M *не является элементарной подмоделью?*
$\forall x. \exists y. x \neq y$*. Истинно в* $\mathbb{N}$*. Но пусть* $D' = \{0\}$*.*

Теорема Лёвенгейма-Сколема

Теорема

Пусть T — множество всех формул теории первого порядка. Пусть теория имеет некоторую модель $\mathcal{M}$. Тогда найдётся элементарная подмодель $\mathcal{M}'$, причём $|\mathcal{M}'| = \max(\aleph_0, |T|)$.

Доказательство.

(Схема доказательства)

1. Построим D_0 — множество всех значений, которые упомянуты в языке теории.
2. Будем последовательно пополнять D_i: $D_0 \subseteq D_1 \subseteq D_2 \ldots$, следя за мощностью. $D' = \cup D_i$.
3. Покажем, что $\langle D', F_n, P_n \rangle$ — требуемая подмодель.

□

Начальный D_0

Пусть $\{f_k^0\}$ — все 0-местные функциональные символы теории.

1. $D_0 = \{[\![f_k^0]\!]\}$, если есть хотя бы один f_k^0.
2. Если таких f_k^0 нет, возьмём какое-нибудь одно значение из D.

Очевидно, $|D_0| \leq |T|$.

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k. Напомним, T — множество всех формул теории. Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.
2. φ имеет хотя бы одну свободную переменную y.
   2.1 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ бывает истинным и ложным — ничего не меняем
   2.2 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y \in D$ и $x_i \in D_k$ либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем
   2.3 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ тождественно истинен или ложен, но при $y' \in D \setminus D_k$ отличается — добавим y' к D_{k+1}. Вместе добавим всевозможные $[\![\theta(y')]\!]$.

Всего добавили не больше $|T| \cdot |D_k|$.

$|\cup D_i| \leq |T| \cdot |D_k| \cdot |\aleph_0| = \max(|T|, |\aleph_0|)$

$\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}'} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k+1$ связкой.
   - 2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.
   - 2.2 $\tau \equiv \forall y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$. Каждый x_i добавлен на каком-то шаге — максимум t. Если $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ бывает истинен и ложен при $y_t, y_f \in D$, то $y_t, y_f \in D_{t+1}$ (по построению). Поэтому, если $\mathcal{M} \not\models \forall y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$, то и $\mathcal{M}' \not\models \forall y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$. Если же $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ не меняется от y, то тем более $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}'} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.
   - 2.3 $\tau \equiv \exists y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ — аналогично.

«Парадокс» Сколема

1. Как известно, $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Однако, ZFC — теория со счётным количеством формул. Значит, существует счётная модель ZFC, то есть $|\mathbb{R}| = \aleph_0$. В чём ошибка?
2. У равенств разный смысл, первое — в предметном языке, второе — в метаязыке.

Аксиома выбора

Аксиома выбора

Аксиома (Аксиома выбора)

Из любого семейства дизъюнктных непустых множеств $\{A_i\}$ *можно выбрать непустую трансверсаль — множество* S, *что* $S \cap A_i = \{x_i\}$. *Иначе,* $S \in \times\{A_i\}$.

Теорема (Аксиома выбора)

Пусть $\{A_i\}$ *— семейство непустых множеств. Тогда существует* $f : \{A_i\} \to \cup A_i$, *причём* $\forall a.a \in \{A_i\} \to f(a) \in a$

Доказательство.

По семейству A_i рассмотрим семейство множеств $X(A_i)$:
$X(A_i) = \{\langle A_i, a\rangle \mid a \in A_i\}$, если $A_i \neq A_j$, то $X(A_i) \cap X(A_j) = \varnothing$, тогда $\exists f.f \in \times\{X(A_i)\}$. □

Обратное утверждение также легко показать.

Аксиома выбора: альтернативные формулировки

Теорема (Лемма Цорна)

Если задано $\langle M, (\preceq) \rangle$ *и для всякого линейно-упорядоченного* $S \subseteq M$ *выполнено* $upb_M S \in M$, *то в* M *существует максимальный элемент.*

Теорема (Теорема Цермело)

На любом множестве можно задать полный порядок.

Теорема

У любой сюръективной функции существует частичная обратная.

Теорема

Аксиома выбора $\Rightarrow$ *лемма Цорна: без доказательства*

Начальный отрезок

Определение

Будем говорить, что $\langle S, (\prec_S)\rangle$ *— начальный отрезок* $\langle T, (\prec_T)\rangle$*, если:*

- $S \subseteq T$*;*
- *если* $a, b \in S$*, то* $a \prec_S b$ *тогда и только тогда, когда* $a \prec_T b$*;*
- *если* $a \in S$*,* $b \in T \setminus S$*, то* $a \prec_T b$*.*

Будем записывать это как $S \prec T$*.*

Теорема

Если множество начальных отрезков X *линейно упорядочено, то в нём есть наибольший элемент.*

Доказательство.

Пусть $M = \cup\{T | \langle T, (\prec)\rangle \in X\}$ и $(\prec)_M = \cup\{(\prec) | \langle T, (\prec)\rangle \in X\}$. Раз все элементы X сравнимы, значит, любые два отношения порядка не противоречат друг другу (одно – продолжение другого). Поэтому что все множества в X — начальные отрезки

Лемма Цорна $\Rightarrow$ теорема Цермело

Пусть выполнена лемма Цорна и дано некоторое X. Покажем, что на нём можно ввести линейный порядок.

- Пусть $S = \{\langle P, (\prec)\rangle \mid P \subseteq X, (\prec)$ — полный порядок$\}$. Например, для $X = \{0, 1\}$ множество $S = \{\langle\varnothing, \varnothing\rangle, \langle\{0\}, \varnothing\rangle, \langle\{1\}, \varnothing\rangle, \langle X, 0 \prec 1\rangle, \langle X, 1 \prec 0\rangle\}$
- Введём порядок на S: положим $\langle P, (\prec_p)\rangle < \langle Q, (\prec_q)\rangle$, если $P \subseteq Q$, $a \prec_p b$ тогда и только тогда, когда $a \prec_q b$, при $a, b \in P$, $a \prec_q b$ при $a \in P, b \in Q \setminus P$.
- Заметим, что $\langle\varnothing, \varnothing\rangle < \langle\{0\}, \varnothing\rangle$, но $\langle X, 0 \prec 1\rangle$ несравним с $\langle X, 1 \prec 0\rangle$.
- Любое линейно-упорядоченное подмножество $\langle T, (<)\rangle$ (где $T \subseteq S$) имеет верхнюю грань (она же максимальный элемент): $\langle \cup T, \cup(\prec)\rangle$ (например, для $\{\langle\varnothing, \varnothing\rangle, \langle\{0\}, \varnothing\rangle, \langle X, 0 \prec 1\rangle\}$ это $\langle X, 0 \prec 1\rangle$.
- По лемме Цорна тогда есть $\langle R, \sqsubset\rangle = \max S$. Заметим, что $R = X$, потому что иначе пусть $a \in X \setminus R$. Тогда положив $M = \langle R \cup \{a\}, (\prec_R) \cup \{x \prec a \mid x \in R\}\rangle$ получим, что M тоже вполне упорядоченное (и потому $M \in S$), значит, R

Теорема Цермело $\Rightarrow$ существование обратной $\Rightarrow$ аксиома выбора

Теорема

Теорема Цермело $\Rightarrow$ у сюрьективных функций существует частичная обратная.

Доказательство.

Рассмотрим сюрьективную $f : A \to B$. Рассмотрим семейство $R_b = \{a \in A \mid f(a) = b\}$. Построим полный порядок на каждом из R_b. Тогда $f^{-1}(b) = \min R_b$. $\square$

Теорема

Существует частичная обратная у сюръективных функций $\Rightarrow$ существует трансверсаль у дизъюнктных множеств.

Доказательство.

Пусть дано семейство дизъюнктных множеств $\{A_i\}$. Рассмотрим $f : \cup A_i \to \{A_i\}$, что $f(a) = \cup\{A_i \in \{A_i\} \mid a \in A_i\}$. Поскольку A_i дизъюнктны, $f(a) = A_i$ при всех a. Тогда существует $f^{-1}(A_i) \in A_i$. Тогда $\{f^{-1}(A_i)\} \in \times\{A_i\}$. $\square$

Зачем нужна аксиома выбора?

Определение

Пределом функции f в точке x_0 по Коши называется такой y, что

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ . \exists \delta . \forall x . |x - x_0| < \delta \to |f(x) - y| < \varepsilon$$

Определение

Пределом функции f в точке x_0 по Гейне называется такой y, что для любой $x_n \to x_0$ выполнено $f(x_n) \to y$.

Предел по Гейне влечёт предел по Коши

Теорема

Пусть $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$ *по Гейне, тогда*
$\forall \varepsilon . \exists \delta . \forall x . |x_\delta - x_0| < \delta \to |f(x_\delta) - y| < \varepsilon .$

Доказательство.

Пусть не так. То есть, $\exists \varepsilon . \forall \delta . \exists x_\delta . |x_\delta - x_0| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - y| \geq \varepsilon$.
Фиксируем ε и возьмём $\delta_n = \frac{1}{n}$ и $p_n = x_{\delta_n}$. $p_n \to x_0$, так как $|x_{\frac{1}{n}} - x_0| < \frac{1}{n}$, по определению предела по Гейне $f(p_n) \to y$, но по предположению $|f(p_n) - y| \geq \varepsilon$. $\square$

Пояснение

Для применения предела по Гейне нужна p_n *— как множество.*
$\langle p_1, p_2, p_3, \dots \rangle$*?*
... Фиксируем ε *и рассмотрим*
$X_\delta = \{x_\delta \mid |x_\delta - x_0| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - y| \geq \varepsilon\}$*. Возьмём* $\delta_n = \frac{1}{n}$ *и* $x_{\frac{1}{n}} \in X_{\frac{1}{n}}$*.*
... То есть, по семейству непустых множеств $\{X_\delta\}$ *по аксиоме выбора построим* $p : \{X_\delta\} \to \cup X_\delta$*, что* $p(X_\delta) \in X_\delta$*, и построим*

Предел по Коши влечёт предел по Гейне

Теорема

Пусть $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$ *и дана* $x_n \to x_0$*. Тогда* $f(x_n) \to y$*.*

Доказательство.

Фиксируем $\varepsilon > 0$.

- (определение предела по Коши) существует δ, что $\forall x. |x - x_0| < \delta \to |f(x) - y| < \varepsilon$.
- (сходимость x_n к x_0) найдётся N, что $\forall n. n > N \to |x_n - x_0| < \delta$.
- (предыдущие два пункта) $\forall n. n > N \to |f(x_n) - y| < \varepsilon$.

□

Почему здесь не требуется аксиома выбора? Потому что нам нужен δ из единственного множества $\{\delta \in \mathbb{R} \mid \forall x. |x - x_0| < \delta \to |f(x) - y| < \varepsilon\}$. То же про N. Аксиома выбора для конечного семейства множеств доказуема в ZF.

Равенство и функции

Пример

Пусть $A_0 = \{0, 1, 3, 5\}$ *и* $A_1 = \{3, 5, 1, 0, 0, 5, 3\}$*. Верно ли, что* $A_0 = A_1$*?*
Да, так как $\forall x. x \in \{0, 1, 3, 5\} \leftrightarrow x \in \{3, 5, 1, 0, 0, 5, 3\}$*.*

Теорема

Если $f : A \to B$*, также* $a, b \in A$ *и* $a = b$*, то* $f(a) = f(b)$*.*

Доказательство.

Пусть $F \subseteq A \times B$ — график функции f.
Легко показать, что если $a = b$ и $y_1 = y_2$, то $\langle a, y_1 \rangle = \langle b, y_2 \rangle$.
По определению функции,
$\forall x. \forall y_1. \forall y_2. \langle x, y_1 \rangle \in F \,\&\, \langle x, y_2 \rangle \in F \to y_1 = y_2$.
Также, если $f(a) = y_1$, $f(b) = y_2$, то $\langle a, y_1 \rangle \in F$ и $\langle b, y_2 \rangle \in F$.
Тогда: $\langle a, y_1 \rangle = \langle b, y_1 \rangle = \langle b, y_2 \rangle = \langle a, y_2 \rangle$, то есть $f(a) = y_2 = f(b)$.

$\square$

Теорема Диаконеску

Теорема

Если рассмотреть ИИП с ZFC, то для любого P выполнено $\vdash P \vee \neg P$.

Доказательство.

Рассмотрим $\mathcal{B} = \{0, 1\}$, $A_0 = \{x \in \mathcal{B} | x = 0 \vee P\}$ и $A_1 = \{x \in \mathcal{B} | x = 1 \vee P\}$. $\{A_0, A_1\}$ — непустое семейство непустых множеств, и по акс. выбора существует $f : \{A_0, A_1\} \to \cup A_i$, что $f(A_i) \in A_i$. (Если P, то $A_0 = A_1$ и $\{A_0, A_1\} = \{\mathcal{B}\}$).

$\vdash f(A_0) \in A_0 \;\&\; f(A_1) \in A_1$	$f(A_i)$
$\vdash (f(A_0) \in \mathcal{B} \;\&\; f(A_0) = 0 \vee P) \;\&\; (f(A_1) \in \mathcal{B} \;\&\; f(A_1) = 1 \vee P)$	Опр.
$\vdash (f(A_0) = 0 \;\&\; f(A_1) = 1) \vee P$	Удал
$\vdash P \vee f(A_0) \neq f(A_1)$	Перен
$\vdash P \to A_0 = A_1$	Опре
$\vdash A_0 = A_1 \to f(A_0) = f(A_1)$	Теоре
$\vdash f(A_0) \neq f(A_1) \to \neg P$	Конт
$\vdash P \vee \neg P$	Подс

Слабые варианты аксиомы выбора

Теорема (конечного выбора)

Если $X_1 \neq \varnothing, \dots, X_n \neq \varnothing$, $X_i \cap X_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$, *то* $\times\{X_1, \dots, X_n\} \neq \varnothing$.

Доказательство.

- База: $n = 1$. Тогда $\exists x_1 . x_1 \in X_1$, поэтому $\exists x_1 . \{x_1\} \in \times\{X_1\}$.
- Переход: $\exists v . v \in \times\{X_{1,n}\} \to \exists x_{n+1} . x_{n+1} \in X_{n+1} \to v \cup \{x_{n+1}\} \in \times(X_{1,n} \cup \{X_{n+1}\})$

$\square$

Аксиома (счётного выбора)

Для счётного семейства непустых множеств существует функция, каждому из которых сопоставляющая один из своих элементов

Аксиома (зависимого выбора)

если $\forall x \in E . \exists y \in E . xRy$, *то существует последовательность* $x_n : \forall n . x_n R x_{n+1}$

Аксиома конструктивности: V=L

Определение

Универсум фон Неймана V — все наследственные фундированные множества.
Конструктивный универсум $L = \cup_a L_a$, где:

$$L_a = \begin{cases} \varnothing, & a = 0 \\ \{\{x \in L_b \mid \varphi(x, t_1, \ldots, t_k)\} \mid \varphi - \textit{формула}, t_i \in L_b\}, & a = b' \\ \bigcup_{b<a}(L_b), & a - \textit{пре} \end{cases}$$

При наличии аксиомы фундирования можно показать, что $V = \cup_a V_a$, где:

$$V_a = \begin{cases} \varnothing, & a = 0 \\ \mathcal{P}(V_b), & a = b' \\ \bigcup_{b<a}(V_b), & a - \text{предельный} \end{cases}$$

Аксиома конструктивности: $V = L$, то есть все фундированные множества задаются формулами.