

Теорема о полноте исчисления предикатов

# Общая идея доказательства

1. Надо справиться со слишком большим количеством вариантов. Модель задаётся как  $\langle D, F, P, X \rangle$ .
2. Для оценки в модели важно только какие формулы истинны. Модели  $\mathcal{M}_1$  и  $\mathcal{M}_2$  «похожи», если  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}_1} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}_2}$  при всех  $\varphi$ .
3. Поступим так:
  - 3.1 построим эталонное множество моделей  $\mathfrak{M}$ , каждая модель соответствует списку истинных формул, *но им не является*;
  - 3.2 докажем полноту  $\mathfrak{M}$ : если каждая  $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$  предполагает  $\mathcal{M} \models \varphi$ , то  $\vdash \varphi$ ;
  - 3.3 заметим, что если  $\vdash \varphi$ , то каждая  $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$  предполагает  $\mathcal{M} \models \varphi$ .
4. В ходе доказательства нас ждёт множество технических препятствий.

# Непротиворечивое множество формул

## Определение

$\Gamma$  — непротиворечивое множество формул, если  $\Gamma \not\vdash \alpha \ \& \ \neg\alpha$  для любого  $\alpha$

Примеры:

▶ непротиворечиво:

▶  $\Gamma = \{A \rightarrow B \rightarrow A\}$

▶  $\Gamma = \{P(x, y) \rightarrow \neg P(x, y), \forall x. \forall y. \neg P(x, y)\};$

▶ противоречиво:

▶  $\Gamma = \{P \rightarrow \neg P, \neg P \rightarrow P\}$

так как  $P \rightarrow \neg P, \neg P \rightarrow P \vdash \neg P \ \& \ \neg\neg P$

▶ пусть  $D = \mathbb{Z}$  и  $P(x) \equiv (x > 0)$ , аналогом для этой модели будет  $\Gamma = \{P(1), P(2), P(3), \dots\}$

# Полное непротиворечивое множество формул

## Определение

$\Gamma$  — полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул, если:

1.  $\Gamma$  содержит только замкнутые бескванторные формулы;
2. если  $\alpha$  — некоторая замкнутая бескванторная формула, то либо  $\alpha \in \Gamma$ , либо  $\neg\alpha \in \Gamma$ .

## Определение

$\Gamma$  — полное непротиворечивое множество замкнутых формул, если:

1.  $\Gamma$  содержит только замкнутые формулы;
2. если  $\alpha$  — некоторая замкнутая формула, то либо  $\alpha \in \Gamma$ , либо  $\neg\alpha \in \Gamma$ .

# Пополнение непротиворечивого множества формул

## Теорема

*Пусть  $\Gamma$  — непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул. Тогда, какова бы ни была замкнутая (бескванторная) формула  $\varphi$ , хотя бы  $\Gamma \cup \{\varphi\}$  или  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  — непротиворечиво*

## Доказательство.

Пусть это не так и найдутся такие  $\Gamma$ ,  $\varphi$  и  $\alpha$ , что

$$\begin{aligned}\Gamma, \varphi &\vdash \alpha \ \& \ \neg\alpha \\ \Gamma, \neg\varphi &\vdash \alpha \ \& \ \neg\alpha\end{aligned}$$

Тогда по лемме об исключении гипотезы

$$\Gamma \vdash \alpha \ \& \ \neg\alpha$$

То есть  $\Gamma$  не является непротиворечивым. Противоречие.



# Дополнение непротиворечивого множества формул до полного

## Теорема

*Пусть  $\Gamma$  — непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул. Тогда найдётся полное непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул  $\Delta$ , что  $\Gamma \subseteq \Delta$*

## Доказательство.

1. Занумеруем все формулы (их счётное количество):

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots$$

2. Построим семейство множеств  $\{\Gamma_i\}$ :

$$\Gamma_0 = \Gamma \qquad \Gamma_{i+1} = \begin{cases} \Gamma_i \cup \{\varphi_i\}, & \text{если } \Gamma_i \cup \{\varphi_i\} \text{ непротиворечиво} \\ \Gamma_i \cup \{\neg\varphi_i\}, & \text{иначе} \end{cases}$$

3. Итоговое множество

$$\Delta = \bigcup_i \Gamma_i$$

## Дополнение. . . (завершение доказательства)

4.  $\Delta$  непротиворечиво:

4.1 Пусть  $\Delta$  противоречиво, то есть

$$\Delta \vdash \alpha \ \& \ \neg\alpha$$

4.2 Доказательство конечной длины и использует конечное количество гипотез  $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\} \subset \Delta$ , то есть

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \vdash \alpha \ \& \ \neg\alpha$$

4.3 Пусть  $\delta_i \in \Gamma_{d_i}$ , тогда

$$\Gamma_{d_1} \cup \Gamma_{d_2} \cup \dots \cup \Gamma_{d_n} \vdash \alpha \ \& \ \neg\alpha$$

4.4 Но  $\Gamma_{d_1} \cup \Gamma_{d_2} \cup \dots \cup \Gamma_{d_n} = \Gamma_{\max(d_1, d_2, \dots, d_n)}$ , которое непротиворечиво, и потому

$$\Gamma_{d_1} \cup \Gamma_{d_2} \cup \dots \cup \Gamma_{d_n} \not\vdash \alpha \ \& \ \neg\alpha$$



# Модель для множества формул

## Определение

*Моделью для множества формул  $F$  назовём такую модель  $\mathcal{M}$ , что при всяком  $\varphi \in F$  выполнено  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}} = \mathcal{I}$ .*

*Альтернативное обозначение:  $\mathcal{M} \models \varphi$ .*



# Модели для непротиворечивых множеств замкнутых бескванторных формул

## Теорема

*Любое непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул имеет модель.*

# Конструкция для модели

## Определение

Пусть  $M$  — полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул. Тогда модель  $M$  задаётся так:

1.  $D$  — множество всевозможных предметных выражений без предметных переменных и дополнительная строка “ошибка!”
2.  $\llbracket f(\theta_1, \dots, \theta_n) \rrbracket = “f(” \uplus \llbracket \theta_1 \rrbracket \uplus “,” \uplus \dots \uplus “,” \uplus \llbracket \theta_n \rrbracket \uplus “)”$
3.  $\llbracket P(\theta_1, \dots, \theta_n) \rrbracket = \begin{cases} И, & \text{если } P(\theta_1, \dots, \theta_n) \in M \\ Л, & \text{иначе} \end{cases}$
4.  $\llbracket x \rrbracket = “ошибка!”$ , так как формулы замкнуты.

# Доказательство корректности

## Лемма

Пусть  $\varphi$  — бескванторная формула, тогда  $\mathcal{M} \models \varphi$  тогда и только тогда, когда  $\varphi \in M$ .

Доказательство (индукция по длине формулы  $\varphi$ ).

1. База.  $\varphi$  — предикат. Требуемое очевидно по определению  $\mathcal{M}$ .
2. Переход. Пусть  $\varphi = \alpha \star \beta$  (или  $\varphi = \neg \alpha$ ), причём  $\mathcal{M} \models \alpha$  ( $\mathcal{M} \models \beta$ ) тогда и только тогда, когда  $\alpha \in M$  ( $\beta \in M$ ). Тогда покажем требуемое для каждой связки в отдельности. А именно, для каждой связки покажем два утверждения:
  - 2.1 если  $\mathcal{M} \models \alpha \star \beta$ , то  $\alpha \star \beta \in M$ .
  - 2.2 если  $\mathcal{M} \not\models \alpha \star \beta$ , то  $\alpha \star \beta \notin M$ .



## Доказательство утверждений для связок

Если  $\varphi = \alpha \rightarrow \beta$  и для любой формулы  $\zeta$ , более короткой, чем  $\varphi$ , выполнено  $\mathcal{M} \models \zeta$  тогда и только тогда, когда  $\zeta \in M$ , тогда:

1. если  $\mathcal{M} \models \alpha \rightarrow \beta$ , то  $\alpha \rightarrow \beta \in M$ ;
2. если  $\mathcal{M} \not\models \alpha \rightarrow \beta$ , то  $\alpha \rightarrow \beta \notin M$ .

### Доказательство (разбором случаев).

1.  $\mathcal{M} \models \alpha \rightarrow \beta$ :  $\llbracket \alpha \rrbracket = \text{Л}$ . Тогда по предположению  $\alpha \notin M$ , потому по полноте  $\neg \alpha \in M$ . И, поскольку в ИВ  $\neg \alpha \vdash \alpha \rightarrow \beta$ , то  $M \vdash \alpha \rightarrow \beta$ . Значит,  $\alpha \rightarrow \beta \in M$ , иначе по полноте  $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \in M$ , что делает  $M$  противоречивым.
2.  $\mathcal{M} \models \alpha \rightarrow \beta$ :  $\llbracket \alpha \rrbracket = \text{И}$  и  $\llbracket \beta \rrbracket = \text{И}$ . Рассуждая аналогично, используя  $\alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$ , приходим к  $\alpha \rightarrow \beta \in M$ .
3.  $\mathcal{M} \not\models \alpha \rightarrow \beta$ . Тогда  $\llbracket \alpha \rrbracket = \text{И}$ ,  $\llbracket \beta \rrbracket = \text{Л}$ , то есть  $\alpha \in M$  и  $\neg \beta \in M$ . Также,  $\alpha, \neg \beta \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$ , отсюда  $M \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$ . Предположим, что  $\alpha \rightarrow \beta \in M$ , то  $M \vdash \alpha \rightarrow \beta$  — отсюда  $\alpha \rightarrow \beta \in M$ .



# Доказательство теоремы о существовании модели

## Доказательство.

Пусть  $M$  — непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул.

По теореме о пополнении существует  $M'$  — полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул, что  $M \subseteq M'$ .

По лемме  $M'$  имеет модель, эта модель подойдёт для  $M$ .

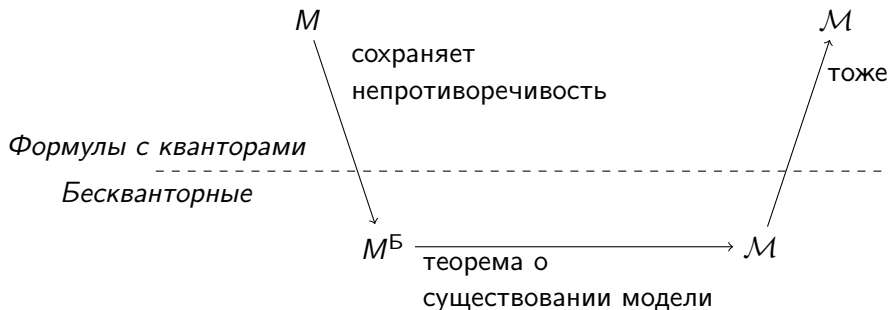


# Формулировка и схема доказательства теоремы Гёделя о полноте

## Теорема (Гёделя о полноте исчисления предикатов)

*Если  $M$  — непротиворечивое множество замкнутых формул, то оно имеет модель.*

Схема доказательства.



# Поверхностные кванторы (предварённая форма)

## Определение

*Формула  $\varphi$  имеет поверхностные кванторы (находится в предварённой форме), если соответствует грамматике*

$$\varphi ::= \forall x.\varphi \mid \exists x.\varphi \mid \tau$$

*где  $\tau$  — формула без кванторов*

## Теорема

*Для любой замкнутой формулы  $\psi$  найдётся такая формула  $\varphi$  с поверхностными кванторами, что  $\vdash \psi \rightarrow \varphi$  и  $\vdash \varphi \rightarrow \psi$*

## Доказательство.

Индукция по структуре, применение теорем о перемещении кванторов.



## Построение $M^*$

- ▶ Пусть  $M$  — полное непротиворечивое множество замкнутых формул с поверхностными кванторами (очевидно, счётное). Построим семейство непротиворечивых множеств замкнутых формул  $M_k$ .
- ▶ Пусть  $d_i^k$  — семейство *свежих* констант, в  $M$  не встречающихся.
- ▶ Индуктивно построим  $M_k$ :
  - ▶ База:  $M_0 = M$
  - ▶ Переход: положим  $M_{k+1} = M_k \cup S$ , где множество  $S$  получается перебором всех формул  $\varphi_i \in M_k$ .
    1.  $\varphi_i$  — формула без кванторов, пропустим;
    2.  $\varphi_i = \forall x. \psi$  — добавим к  $S$  все формулы вида  $\psi[x := \theta]$ , где  $\theta$  — всевозможные замкнутые термы, использующие символы из  $M_k$ ;
    3.  $\varphi_i = \exists x. \psi$  — добавим к  $S$  формулу  $\psi[x := d_i^{k+1}]$ , где  $d_i^{k+1}$  — некоторая свежая, ранее не использовавшаяся в  $M_k$ , константа.



# Непротиворечивость $M_k$

## Лемма

*Если  $M$  непротиворечиво, то каждое множество из  $M_k$  — непротиворечиво*

## Доказательство.

Доказательство по индукции, база очевидна ( $M_0 = M$ ).

Переход:

- ▶ пусть  $M_k$  непротиворечиво, но  $M_{k+1}$  — противоречиво:  
 $M_k, M_{k+1} \setminus M_k \vdash A \ \& \ \neg A$ .
- ▶ Тогда (т.к. доказательство конечной длины):  
 $M_k, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \vdash A \ \& \ \neg A$ , где  $\gamma_i \in M_{k+1} \setminus M_k$ .
- ▶ По теореме о дедукции:  
 $M_k \vdash \gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \gamma_n \rightarrow A \ \& \ \neg A$ .
- ▶ Научимся выкидывать первую посылку:  
 $M_k \vdash \gamma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \gamma_n \rightarrow A \ \& \ \neg A$ .
- ▶ И по индукции придём к противоречию:  $M_k \vdash A \ \& \ \neg A$ .



# Устранение посылки

## Лемма

Если  $M_k \vdash \gamma \rightarrow W$  и  $\gamma \in M_{k+1} \setminus M_k$ , то  $M_k \vdash W$ .

## Доказательство.

Покажем, как дополнить доказательство до  $M_k \vdash W$ , в зависимости от происхождения  $\gamma$ :

- Случай  $\forall x.\varphi$ :  $\gamma = \varphi[x := \theta]$ . Допишем в конец доказательства:

$\forall x.\varphi$	(гипотеза)
$(\forall x.\varphi) \rightarrow (\varphi[x := \theta])$	(сх. акс. 11)
$\gamma$	(M.P.)
$W$	(M.P.)



## Случай $\exists x.\varphi$

- ▶  $\gamma = \varphi[x := d_i^{k+1}]$
- ▶ Перестроим доказательство  $M_k \vdash \gamma \rightarrow W$ : заменим во всём доказательстве  $d_i^{k+1}$  на  $y$ . Коллизий нет: под квантором  $d_i^{k+1}$  не стоит, переменной не является.
- ▶ Получим доказательство  $M_k \vdash \gamma[d_i^{k+1} := y] \rightarrow W$  и дополним его:

$$\varphi[x := y] \rightarrow W$$

$$(\exists y.\varphi[x := y]) \rightarrow W$$

$$(\exists x.\varphi) \rightarrow (\exists y.\varphi[x := y])$$

...

$$(\exists x.\varphi) \rightarrow W$$

$$\exists x.\varphi$$

$$W$$

$$\varphi[x := d_i^{k+1}][d_i^{k+1} := y]$$

$y$  не входит в  $W$

доказуемо (упражнение)

доказуемо как  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \vdash \alpha \rightarrow \gamma$

гипотеза



# Построение $M^B$

## Определение

$$M^* = \bigcup_k M_k$$

## Теорема

$M^*$  непротиворечиво.

## Доказательство.

От противного: доказательство противоречия конечной длины, гипотезы лежат в максимальном  $M_k$ , тогда  $M_k$  противоречив. □

## Определение

$M^B$  — множество всех бескванторных формул из  $M^*$ .

По непротиворечивому множеству  $M$  можем построить  $M^B$  и для него построить модель  $\mathcal{M}$ . Покажем, что эта модель годится для  $M^*$  (и для  $M$ , так как  $M \subset M^*$ ).

# Модель для $M^*$

## Лемма

$\mathcal{M}$  есть модель для  $M^*$ .

## Доказательство.

Покажем, что при  $\varphi \in M^*$  выполнено  $\mathcal{M} \models \varphi$ . Докажем индукцией по количеству кванторов в  $\varphi$ .

- ▶ База:  $\varphi$  без кванторов. Тогда  $\varphi \in M^B$ , откуда  $\mathcal{M} \models \varphi$  по построению  $\mathcal{M}$ .
- ▶ Переход: пусть утверждение выполнено для всех формул с  $n$  кванторами. Покажем, что это выполнено и для  $n + 1$  кванторов.
  - ▶ Рассмотрим  $\varphi = \exists x.\psi$ , случай квантор всеобщности — аналогично.
  - ▶ Раз  $\exists x.\psi \in M^*$ , то существует  $k$ , что  $\exists x.\psi \in M_k$ .
  - ▶ Значит,  $\psi[x := d_i^{k+1}] \in M_{k+1}$ .
  - ▶ По индукционному предположению,  $\mathcal{M} \models \psi[x := d_i^{k+1}]$  — в формуле  $n$  кванторов.
  - ▶ Но тогда  $\llbracket \psi \rrbracket^{x := \llbracket d_i^{k+1} \rrbracket} = \text{И}$ .
  - ▶ Отсюда  $\mathcal{M} \models \exists x.\psi$ .

# Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов

## Теорема (Гёделя о полноте исчисления предикатов)

*Если  $M$  — замкнутое непротиворечивое множество формул, то оно имеет модель.*

### Доказательство.

- ▶ Построим по  $M$  множество формул с поверхностными кванторами  $M'$ .
- ▶ По  $M'$  построим непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул  $M^B$  ( $M^B \subseteq M^*$ , теорема о непротиворечивости  $M^*$ ).
- ▶ Дополним его до полного, построим для него модель  $\mathcal{M}$  (теорема о существовании модели).
- ▶  $\mathcal{M}$  будет моделью и для  $M'$  ( $M' \subseteq M^*$ , лемма о модели для  $M^*$ ), и, очевидно, для  $M$ .



# Полнота исчисления предикатов

## Следствие (из теоремы Гёделя о полноте)

*Исчисление предикатов полно.*

### Доказательство.

- ▶ Пусть это не так, и существует формула  $\varphi$ , что  $\models \varphi$ , но  $\nvdash \varphi$ .
- ▶ Тогда рассмотрим  $M = \{\neg\varphi\}$ .
- ▶  $M$  непротиворечиво: если  $\neg\varphi \vdash A \ \& \ \neg A$ , то  $\vdash \varphi$  (упражнение).
- ▶ Значит, у  $M$  есть модель  $\mathcal{M}$ , и  $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ .
- ▶ Значит,  $\llbracket \neg\varphi \rrbracket = \text{И}$ , поэтому  $\llbracket \varphi \rrbracket = \text{Л}$ , поэтому  $\nmodels \varphi$ . Противоречие.



# Непротиворечивость исчисления предикатов

## Теорема

*Если у множества формул  $M$  есть модель  $\mathcal{M}$ , оно непротиворечиво.*

## Доказательство.

Пусть противоречиво:  $M \vdash A \ \& \ \neg A$ , в доказательстве использованы гипотезы  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ . Тогда

$\vdash \delta_1 \rightarrow \delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \delta_n \rightarrow A \ \& \ \neg A$ , то есть

$\llbracket \delta_1 \rightarrow \delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \delta_n \rightarrow A \ \& \ \neg A \rrbracket = \text{И}$  (корректность). Поскольку все  $\llbracket \delta_i \rrbracket_{\mathcal{M}} = \text{И}$ , то и  $\llbracket A \ \& \ \neg A \rrbracket_{\mathcal{M}} = \text{И}$  (анализ таблицы истинности импликации). Однако  $\llbracket A \ \& \ \neg A \rrbracket = \text{Л}$ .

Противоречие. □

## Следствие

*Исчисление предикатов непротиворечиво*

## Доказательство.

Рассмотрим  $M = \emptyset$  и любую классическую модель. □

Доказательства опираются на непротиворечивость метатеории.