

О равенствах

С целью уменьшения нагрузки на символ (=) договоримся об альтернативных символах:

символ	использование
(=)	<ul style="list-style-type: none">▶ равенство в предметных языках▶ равенство чисел, значений в метаязыке (при наличии традиции):$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
(:=)	<ul style="list-style-type: none">▶ введение обозначений: пусть $\Xi := \{x_1, x_2, x_3\}$▶ указание значений для модели: $\llbracket A \rightarrow A \rrbracket^{A:=I}$
(≡)	<ul style="list-style-type: none">▶ Равенство строк после подстановки метаварiableных: пусть дано доказательство $\delta_1, \dots, \delta_n$, причём $\delta_n \equiv \alpha \rightarrow \beta$

Интуиционистская логика

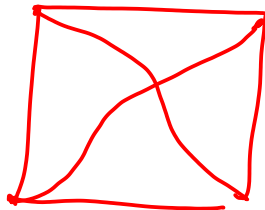
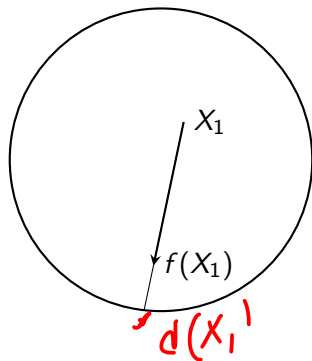
Доказательства чистого существования

Теорема (Брауэра о неподвижной точке)

Любое непрерывное отображение f шара в \mathbb{R}^n на себя имеет неподвижную точку

Доказательство.

Не существует непрерывного отображения шара на границу (без доказательства),
однако:



Один из примеров подробно

Теорема

Существует пара иррациональных чисел a и b , такая, что a^b — рационально.

Один из примеров подробно

Теорема

Существует пара иррациональных чисел a и b , такая, что a^b — рационально.

- ▶ $2^5, 3^3, 7^{10}, \sqrt{2}^2$ — рациональны;
- ▶ $2^{\sqrt{2}}, e^{\pi}$ — иррациональны (как это доказать?);

Один из примеров подробно

Теорема

Существует пара иррациональных чисел a и b , такая, что a^b — рационально.

Доказательство.

Рассмотрим $a = b = \sqrt{2}$ и рассмотрим a^b . Возможны два варианта:

1. $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ — рационально;
2. $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ — иррационально; отлично, тогда возьмём $a_1 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ и получим

$$a_1^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

$$P = \{x \mid x \neq x^2\}$$



Интуиционизм

“Over de Grondslagen der Wiskunde” (Брайэр, 1907 г.)

Основные положения:

1. Математика не формальна.
2. Математика независима от окружающего мира.
3. Математика не зависит от логики — это логика зависит от математики.

ВНК-интерпретация логических связей

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

ВНК-интерпретация логических связок

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α , β — некоторые конструкции, тогда:

ВНК-интерпретация логических связей

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α , β — некоторые конструкции, тогда:

- ▶ $\alpha \& \beta$ построено, если построены α и β

ВНК-интерпретация логических связей

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α , β — некоторые конструкции, тогда:

- ▶ $\alpha \& \beta$ построено, если построены α и β
- ▶ $\alpha \vee \beta$ построено, если построено α или β , и мы знаем, что именно

ВНК-интерпретация логических связей

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α , β — некоторые конструкции, тогда:

- ▶ $\alpha \& \beta$ построено, если построены α и β
- ▶ $\alpha \vee \beta$ построено, если построено α или β , и мы знаем, что именно
- ▶ $\alpha \rightarrow \beta$ построено, если есть способ перестроения α в β

ВНК-интерпретация логических связей

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α , β — некоторые конструкции, тогда:

- ▶ $\alpha \& \beta$ построено, если построены α и β
- ▶ $\alpha \vee \beta$ построено, если построено α или β , и мы знаем, что именно
- ▶ $\alpha \rightarrow \beta$ построено, если есть способ перестроения α в β
- ▶ \perp — конструкция, не имеющая построения

ВНК-интерпретация логических связей

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α, β — некоторые конструкции, тогда:

- ▶ $\alpha \& \beta$ построено, если построены α и β
- ▶ $\alpha \vee \beta$ построено, если построено α или β , и мы знаем, что именно
- ▶ $\alpha \rightarrow \beta$ построено, если есть способ перестроения α в β
- ▶ \perp — конструкция, не имеющая построения
- ▶ $\neg\alpha$ построено, если построено $\alpha \rightarrow \perp$

Дизъюнкция

Конструкция $\alpha \vee \neg\alpha$ не имеет построения в общем случае. Что может быть построено: α или $\neg\alpha$?

Дизъюнкция

Конструкция $\alpha \vee \neg\alpha$ не имеет построения в общем случае. Что может быть построено: α или $\neg\alpha$?

Возьмём за α нерешённую проблему, например, $P = NP$

Дизъюнкция

Конструкция $\alpha \vee \neg\alpha$ не имеет построения в общем случае. Что может быть построено: α или $\neg\alpha$?

Возьмём за α нерешённую проблему, например, $P = NP$

Авторам в данный момент не известно, выполнено $P = NP$ или же $P \neq NP$.

Отличия импликации

Высказывание общезначимо в И.В. и не выполнено в ВНК-интерпретации:

$$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$$

Отличия импликации

Высказывание общезначимо в И.В. и не выполнено в ВНК-интерпретации:

$$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$$

Давайте дадим следующий смысл пропозициональным переменным:

- ▶ A — 16.09.2023 в Санкт-Петербурге идёт дождь;
- ▶ B — 16.09.2023 в Санкт-Петербурге светит солнце;
- ▶ C — во 2 семестре староста группы 3239 получил «отлично» по матанализу.

Отличия импликации

Высказывание общезначимо в И.В. и не выполнено в ВНК-интерпретации:

$$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$$

Давайте дадим следующий смысл пропозициональным переменным:

- ▶ A — 16.09.2023 в Санкт-Петербурге идёт дождь;
- ▶ B — 16.09.2023 в Санкт-Петербурге светит солнце;
- ▶ C — во 2 семестре староста группы 3239 получил «отлично» по матанализу.

Импликацию можно понимать как «формальную» и как «материальную».

- ▶ Материальная импликация $A \rightarrow B$ — надо посмотреть в окно.

Отличия импликации

Высказывание общезначимо в И.В. и не выполнено в ВНК-интерпретации:

$$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$$

Давайте дадим следующий смысл пропозициональным переменным:

- ▶ A — 16.09.2023 в Санкт-Петербурге идёт дождь;
- ▶ B — 16.09.2023 в Санкт-Петербурге светит солнце;
- ▶ C — во 2 семестре староста группы 3239 получил «отлично» по матанализу.

Импликацию можно понимать как «формальную» и как «материальную».

- ▶ Материальная импликация $A \rightarrow B$ — надо посмотреть в окно.
- ▶ Формальная импликация $A \rightarrow B$ места не имеет (причинно-следственной связи нет).

Формализация

Формализация интуиционистской логики возможна, но интуитивное понимание — основное.

Определение

Аксиоматика интуиционистского исчисления высказываний в гильбертовском стиле: аксиоматика КИВ, в которой 10 схема аксиом

$$(10) \quad \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$$

заменена на

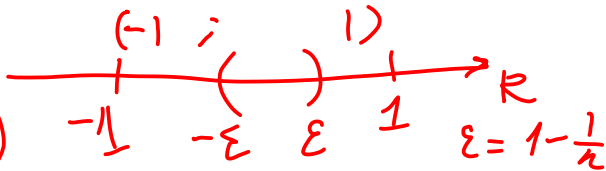
$$(10и) \quad \alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$$

Немного об общей топологии.

Топологическое пространство

Определение

$B_n = (-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})$



Топологическим пространством называется упорядоченная пара $\langle X, \Omega \rangle$, где X — некоторое множество, а $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$, причём:

1. $\emptyset, X \in \Omega$
2. если $A_1, \dots, A_n \in \Omega$, то $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \Omega$;
3. если $\{A_\alpha\}$ — семейство множеств из Ω , то и $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \Omega$.

Множество Ω называется топологией. Элементы Ω называются открытыми множествами.



Определение

\mathcal{B} — база топологического пространства $\langle X, \Omega \rangle$ ($\mathcal{B} \subseteq \Omega$), если всевозможные объединения множеств (в т.ч. пустые) из \mathcal{B} дают Ω .

$$\bigcap A_n = [-1; 1]$$

$$\begin{aligned} 1 &\in \bigcap A_n \\ -1 &\in \bigcap A_n \end{aligned}$$

$$\{-1, 1\} \subseteq A_n$$

Примеры топологических пространств

Определение

Евклидово пространство (евклидова топология) на \mathbb{R} : база топологии $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

Определение

Дискретная топология: $\langle X, \mathcal{P}(X) \rangle$ — все множества открыты.

Определение

Топология стрелки: $\langle \mathbb{R}, \{(x, +\infty) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\} \rangle$ — открыты все положительные лучи.

Метрические пространства

Определение

Метрикой на X назовём множество, на котором определена функция расстояния $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1. $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (неравенство треугольника)

Определение

Открытым ε -шаром с центром в точке $x \in X$ назовём

$$O_\varepsilon(x) = \{t \in X \mid d(x, t) < \varepsilon\}.$$

Определение

Если X — некоторое множество и d — метрика на X , то будем говорить, что топологическое пространство, задаваемое базой $\mathcal{B} = \{O_\varepsilon(x) \mid \varepsilon \in \mathbb{R}^+, x \in X\}$, порождено метрикой d .

Непрерывность

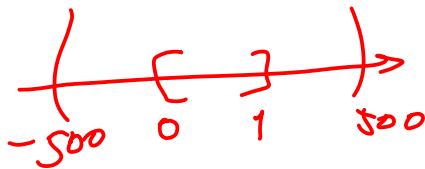
Определение

Функция $f : X \rightarrow Y$ непрерывна, если прообраз любого открытого множества открыт.

Пример

Функция $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ всегда непрерывна (при дискретной топологии на \mathbb{N}), поскольку любое множество в \mathbb{N} открыто.

Компактность



Определение

Будем говорить, что множество компактно, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие

Пример

Множество $\{0, 1\}$ в дискретной топологии компактно.

$$\begin{aligned} \{0, 1\} &= \overset{x}{\{0\}} \cup \overset{y}{\{1\}} \\ &\cup \overset{z}{\emptyset} \cup \overset{\tau}{\{0, 1\}} \end{aligned}$$

Handwritten notes above the sets: x above $\{0\}$, y above $\{1\}$, z above \emptyset , and τ above $\{0, 1\}$. There are also checkmarks \checkmark above $\{0\}$ and $\{1\}$.

Пример

Интервал $(0, 1)$ в \mathbb{R} не компактен — например, рассмотрим покрытие $\{(\epsilon, 1) \mid \epsilon \in (0, 1)\}$



$$x, y, z, \tau \cap \{0, 1\}$$

Handwritten text with a circled \emptyset below it.

Подпространства и связные множества



Определение

Пространство $\langle X_1, \Omega_1 \rangle$ — подпространство пространства $\langle X, \Omega \rangle$, если $X_1 \subseteq X$ и $\Omega_1 = \{A \cap X_1 \mid A \in \Omega\}$.

Пример

$[0, 1]$ с евклидовой топологией на отрезке — подпространство \mathbb{R} . $[0, 0.5)$ открыто в $[0, 1]$, так как $[0, 0.5) = \underline{(-0.5, 0.5)} \cap [0, 1]$.

Определение

Пространство $\langle X, \Omega \rangle$ связно, если нет $A, B \in \Omega$, что $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$ и $A, B \neq \emptyset$.

Пример



$$(0, 2) \cap X = (0, 1] \cup (1, 3)$$

Пространство $(0, 1] \cup [2, 3)$ в \mathbb{R} несвязно: возьмём $A = (0, 1]$ и $B = [2, 3)$.

Дискретное топологическое пространство $\langle X, \mathcal{P}(X) \rangle$ несвязно при $|X| > 1$: пусть $a \in X$, тогда $A = \{a\}$ и $B = X \setminus A$.

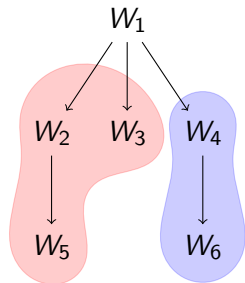
Топология на деревьях

Определение

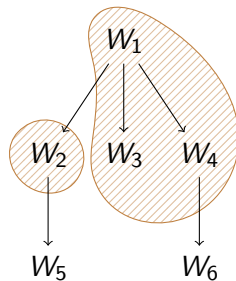
Пусть некоторый лес задан конечным множеством вершин V и отношением (\preceq) , связывающим предков и потомков ($a \preceq b$, если b — потомок a). Тогда подмножество его вершин $X \subseteq V$ назовём открытым, если из $a \in X$ и $a \preceq b$ следует, что $b \in X$.

Пример

Открыты



Не открыты



Связность деревьев

Лин. связность:
точки можно \Rightarrow дугой
соединить путём



Лемма

Лес связан (является одним деревом) тогда и только тогда, когда соответствующее ему топологическое пространство связно.

Доказательство.

1. Лес связан: пусть не так и найдутся открытые непустые A, B , что $A \cup B = V$ и $A \cap B = \emptyset$. Пусть $v \in V$ — корень дерева и пусть $v \in A$ (для определённости). Тогда $A = \{x \mid v \preceq x\}$ и $B = \emptyset$.
2. Пусть лес топологически связан, но есть несколько разных корней v_1, v_2, \dots, v_k . Возьмём $A_i = \{x \mid v_i \preceq x\}$. Тогда все A_i открыты, непусты, дизъюнкты и $V = \cup A_i$.



□

Пишем скобки или нет?

Вы как пишете: $\sin x$ или $\sin(x)$?

Пишем скобки или нет?

Вы как пишете: $\sin x$ или $\sin(x)$?

```
int main () {  
    return sizeof 0;  
}
```

Пишем скобки или нет?

Вы как пишете: $\sin x$ или $\sin(x)$?

```
int main () {  
    return sizeof 0;  
}
```

Соглашение о записи:

$$\text{sizeof } \emptyset = \text{sizeof}(\emptyset) = 0$$

но:

$$\text{sizeof}\{\emptyset\} = \text{sizeof}(\{\emptyset\}) = 1$$

Минимальные и максимальные элементы

$$\sup(0, 1) = 1$$
$$\sup \mathbb{R} = +\infty \quad (?)$$

Определение

Множество нижних граней $X \subseteq \mathcal{U}$: $\text{lwb}_{\mathcal{U}} X = \{y \in \mathcal{U} \mid y \preceq x \text{ при всех } x \in X\}$.

Множество верхних граней $X \subseteq \mathcal{U}$: $\text{upb}_{\mathcal{U}} X = \{y \in \mathcal{U} \mid x \preceq y \text{ при всех } x \in X\}$.

Определение

минимальный ($m \in X$): нет меньшего

при всех $y \in X$, $y \preceq m$ влечёт $y = m$

максимальный ($m \in X$): нет большего

при всех $y \in X$, $m \preceq y$ влечёт $y = m$

наименьший ($m \in X$): меньше всех

при всех $y \in X$ выполнено $m \preceq y$

наибольший ($m \in X$): больше всех

при всех $y \in X$ выполнено $y \preceq m$

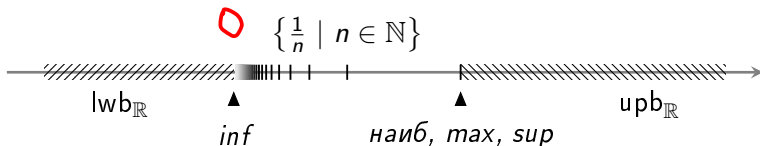
инфимум: наибольшая нижняя грань

$\inf_{\mathcal{U}} X = \text{наиб}(\text{lwb}_{\mathcal{U}} X)$

супремум: наименьшая верхняя грань

$\sup_{\mathcal{U}} X = \text{наим}(\text{upb}_{\mathcal{U}} X)$

Пример



Пример: делимость

На \mathbb{N} положим $a \preceq b$, если $b \dot{\vdots} a$.

Пример

Множество $\{2, 3, 6\}$

$$x \preceq 2$$

$$2 \dot{\vdots} x$$

Минимальные: 2, 3

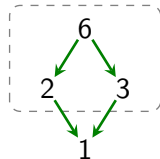
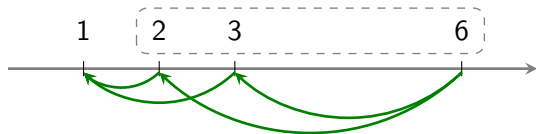
$2 \dot{\vdots} x$ влечёт $x = 1$ или $x = 2$, то же про 3

Наименьший: отсутствует

$2 \not\preceq 3$ и $3 \not\preceq 2$

Инфимум: \wedge 1

$1 \preceq x$ при всех $x \in \mathbb{N}$



Пример: делимость

На \mathbb{N} положим $a \preceq b$, если $b \div a$.

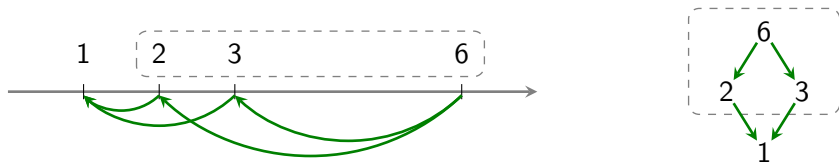
Пример

Множество $\{2, 3, 6\}$

Минимальные: 2, 3 $2 \div x$ влечёт $x = 1$ или $x = 2$, то же про 3

Наименьший: отсутствует $2 \nprec 3$ и $3 \nprec 2$

Инфимум: 1 $1 \preceq x$ при всех $x \in \mathbb{N}$



Пример

Рассмотрим $X = \{1; 1.4; 1.41; 1.414; 1.4142; \dots\}$ — множество десятичных приближений $\sqrt{2}$, $\preceq = \leq$. Тогда $\text{urb}_{\mathbb{Q}} X$ состоит из рациональных чисел, больших $\sqrt{2}$. При этом $\sqrt{2} \notin \text{urb}_{\mathbb{Q}} X$, а значит $\sup_{\mathbb{Q}} X$ не определён.

Пример: внутренность множества

Определение (внутренность множества)

Рассмотрим $\langle X, \Omega \rangle$ и возьмём (\subseteq) как отношение частичного порядка на $\mathcal{P}(X)$.

Тогда $A^\circ := \inf_{\Omega}(\{A\})$.

$$T \subseteq A$$

$$T \leq A \\ T \in \text{lwb}_{\Omega} \{A\}$$

Теорема

A° определена для любого A .

Доказательство.

Пусть $V = \text{lwb}_{\Omega}\{A\} = \{Q \in \Omega \mid Q \subseteq A\}$. Тогда $\inf_{\Omega}\{A\} = \bigcup V$.

Напомним, $\inf_{\mathcal{U}} T = \text{наиб}(\text{lwb}_{\mathcal{U}} T)$.

1. Покажем принадлежность: $\bigcup V \subseteq A$ и $\bigcup V \in \Omega$ как объединение открытых.
2. Покажем, что все из V меньше или равны: пусть $X \in V$, то есть $V = \{X, \dots\}$, тогда $X \subseteq X \cup \dots$, тогда $X \subseteq \bigcup V$.



Решётка

Определение

Решёткой называется упорядоченная пара: $\langle X, (\preceq) \rangle$, где X — некоторое множество, а (\preceq) — частичный порядок на X , такой, что для любых $a, b \in X$ определены $a + b = \sup\{a, b\}$ и $a \cdot b = \inf\{a, b\}$.

То есть, $a + b$ — наименьший элемент c , что $a \preceq c$ и $b \preceq c$.

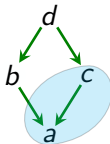
Пример

$\langle \Omega, (\subseteq) \rangle$ — решётка. $\langle \mathbb{N} \setminus \{1\}, (:) \rangle$ — не решётка.

Псевдодополнение

Псевдодополнением $a \rightarrow b$ называется наибольший из $\{x \mid a \cdot x \preceq b\}$.

Пример



$$a \cdot b = a$$

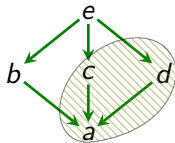
$$b \cdot b = b$$

$$c \cdot b = a$$

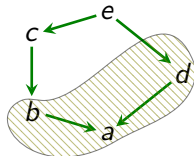
$$d \cdot b = b$$

Здесь $b \rightarrow c = \text{наиб}\{x \mid b \cdot x \preceq c\} = \text{наиб}\{a, c\} = c$

Пример (нет псевдодополнения: алмаз и пентагон)



$$b \rightarrow c = \text{наиб}\{a, c, d\}$$



$$c \rightarrow b = \text{наиб}\{a, b, d\}$$

Особые решётки

Определение

Дистрибутивной решёткой называется такая, что для любых a, b, c выполнено $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Определение

Импликативная решётка — такая, в которой для любых элементов есть псевдодополнение.

Лемма

Любая импликативная решётка — дистрибутивна.

Ноль и один

$$a \cdot b = \inf \{a, b\}$$

наиб $x: x \leq a, x \leq b$

Определение

0 — наименьший элемент решётки, а 1 — наибольший элемент решётки

Лемма

В любой импликативной решётке $\langle X, (\preceq) \rangle$ есть 1

Доказательство.

Рассмотрим $a \rightarrow a$, тогда $a \rightarrow a = \text{наиб}\{c \mid a \cdot c \preceq a\} = \text{наиб}X = 1$. □

Определение

Импликативная решётка с 0 — псевдобулева алгебра (алгебра Гейтинга). В такой решётке определено $\sim a := a \rightarrow 0$

Определение

Булева алгебра — псевдобулева алгебра, в которой $a + \sim a = 1$ для всех a .

Булева алгебра является булевой алгеброй в смысле решёток

Доказательство.

Символы булевой алгебры: $(\&), (\vee), (\neg), \text{Л}, \text{И}$.

Символы решёток: $(+), (\cdot), (\rightarrow), (\sim), 0, 1$

Упорядочивание: $\text{Л} \leq \text{И}$.

1. $a \& b = \min(a, b)$, $a \vee b = \max(a, b)$ (анализ таблицы истинности), отсюда $a \cdot b = a \& b$ и $a + b = a \vee b$.

2. $a \rightarrow b = \neg a \vee b$, так как:

$$a \rightarrow b = \text{наиб}\{c \mid c \& a \leq b\} = \begin{cases} \neg a, & b = \text{Л} \\ \text{И}, & b = \text{И} \end{cases}$$

3. $0 = \min\{\text{И}, \text{Л}\} = \text{Л}$, $1 = \max\{\text{И}, \text{Л}\} = \text{И}$, $\sim a = a \rightarrow 0 = \neg a \vee \text{Л} = \neg a$.

Заметим, что $a + \sim a = a \vee \neg a = \text{И}$.

Итого: булева алгебра — импликативная решётка с 0 и с $a + \sim a = 1$.



Множества и топологии как решётки

Лемма

$\langle \mathcal{P}(X), (\subseteq) \rangle$ — булева алгебра.

Доказательство.

$a \rightarrow b = \text{наиб}\{c \subseteq X \mid a \cap c \subseteq b\}$. Т.е. наибольшее, не содержащее точек из $a \setminus b$.

Т.е. $X \setminus (a \setminus b)$. То есть $(X \setminus a) \cup b$.

$$a + \sim a = a \cup (X \setminus a) \cup \emptyset = X$$

□

Лемма

$\langle \Omega, (\subseteq) \rangle$ — псевдобулева алгебра.

Доказательство.

$a \rightarrow b = \text{наиб}\{c \in \Omega \mid a \cap c \subseteq b\}$. Т.е. наибольшее открытое, не содержащее точек из $a \setminus b$. То есть, $(X \setminus (a \setminus b))^\circ$. То есть, $((X \setminus a) \cup b)^\circ$.

□



Решётки и исчисление высказываний

Определение

Пусть некоторое исчисление высказываний оценивается значениями из некоторой решётки. Назовём оценку согласованной с исчислением, если $\llbracket \alpha \& \beta \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket \cdot \llbracket \beta \rrbracket$, $\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket + \llbracket \beta \rrbracket$, $\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket \rightarrow \llbracket \beta \rrbracket$, $\llbracket \neg \alpha \rrbracket = \sim \llbracket \alpha \rrbracket$, $\llbracket A \& \neg A \rrbracket = 0$, $\llbracket A \rightarrow A \rrbracket = 1$.

Теорема

Любая псевдобулева алгебра, являющаяся согласованной оценкой интуиционистского исчисления высказываний, является его корректной моделью: если $\vdash \alpha$, то $\llbracket \alpha \rrbracket = 1$.

$$\llbracket A \vee \neg A \rrbracket$$

$$a + \sim a = 1$$

Теорема

Любая булева алгебра, являющаяся согласованной оценкой классического исчисления высказываний, является его корректной моделью: если $\vdash \alpha$, то $\llbracket \alpha \rrbracket = 1$