Теорема о непротиворечивости формальной арифметики

Два вида индукции

Определение (принцип математической индукции)

Какое бы ни было $\varphi(x)$, если $\varphi(0)$ и при всех x выполнено $\varphi(x) \to \varphi(x')$, то при всех x выполнено и само $\varphi(x)$.

Определение (принцип полной математической индукции)

Какое бы ни было $\psi(x)$, если $\psi(0)$ и при всех x выполнено $(\forall t.t \le x \to \psi(t)) \to \psi(x')$, то при всех x выполнено и само $\psi(x)$.

Теорема

Принципы математической индукции эквивалентны

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ взяв $\varphi := \psi$, имеем выполненность $\varphi(x) \to \varphi(x')$, значит, $\forall x.\psi(x)$.
$(\Leftarrow)$ возьмём $\psi(x) := \forall t.t \le x \to \varphi(t)$. $\square$

Наследственные множества

Определение

Назовём вполне упорядоченное отношением $(\in)$ множество S наследственным подмножеством A, если $\forall x. x \in A \to (\forall t. t \in x \to t \in S) \to x \in S$.

Теорема

Единственным наследственным подмножеством вполне упорядоченного множества является оно само.

Доказательство.

Пусть $B \subseteq A$ — наследственное и $B \neq A$. Тогда существует $a = \min(A \setminus B)$. Тогда $(\forall t. t \in a \to t \in B) \to a \in B$ по наследственности B, и выполнено $\forall t. t \in a \to t \in B$ (по минимальности a). Значит, $a \in B$. $\square$

Трансфинитная индукция

Теорема (Принцип «полной» трансфинитной индукции)

Если для $\varphi(x)$ (некоторого утверждения теории множеств) и некоторого ординала ε выполнено $\forall x.x \in \varepsilon \to (\forall t.t \in x \to \varphi(t)) \to \varphi(x)$, то $\forall x.x \in \varepsilon \to \varphi(x)$.

Доказательство.

Рассмотрим $S = \{x \in \varepsilon \mid \varphi(x)\}$. Тогда $x \in S$ равносильно $\varphi(x)$. Тогда перепишем: $\forall e.e \in \varepsilon \to (\forall x.x \in e \to x \in S) \to e \in S$. Отсюда по теореме о наследственных множествах $S = \varepsilon$. □

Альтернативная формулировка

Теорема

Для ординала ε подмножество $S \in \varepsilon$ — наследственное, если одновременно:
Если $x \in \varepsilon$ и $x = \varnothing$, то $x \in S$;
Если $x \in \varepsilon$ и существует y: $y' = x$, то $y \in S \to x \in S$;
Если $x \in \varepsilon$ и x — предельный, то $(\forall t. t \in x \to t \in S) \to (x \in S)$.

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ очевидно. Докажем $(\Leftarrow)$: пусть S не наследственное:
$E := \{e \in \varepsilon \mid (\forall t. t \in e \to t \in S) \,\&\, e \notin S\}$ и $E \neq \varnothing$. Тогда пусть $e = \min E$.

1. $e = \varnothing$ или предельный. Тогда $(\forall t. t \in e \to t \in S) \to (e \in S)$.
2. $e = y'$. Тогда $y \in \varepsilon$ (ε — ординал) и $(\forall t. t \in y \to t \in S) \to (y \in S)$ (так как e минимальный, для которого S не наследственное). По условию, $(y \in S) \to (e \in S)$, отсюда $(\forall t. t \in e \to t \in S) \to (e \in S)$.

Исчисление S_∞

1. Язык: связки $\neg$, $\vee$, $\forall$, $=$; нелогические символы: $(+)$,$(\cdot)$,$(')$,0; переменные: x.
2. Аксиомы: все истинные формулы вида $\theta_1 = \theta_2$; все истинные отрицания формул вида $\neg\theta_1 = \theta_2$ (θ_i — термы без переменных).
3. Структурные (слабые) правила:

$$\frac{\zeta \vee \alpha \vee \beta \vee \delta}{\zeta \vee \beta \vee \alpha \vee \delta} \qquad \frac{\alpha \vee \alpha \vee \delta}{\alpha \vee \delta}$$

сильные правила

$$\frac{\delta}{\alpha \vee \delta} \quad \frac{\neg\alpha \vee \delta \quad \neg\beta \vee \delta}{\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta} \quad \frac{\alpha \vee \delta}{\neg\neg\alpha \vee \delta} \quad \frac{\neg\alpha[x := \theta] \vee \delta}{(\neg\forall x.\alpha) \vee \delta}$$

и ещё два правила ...

Ещё правила S_∞

бесконечная индукция

$$\frac{\alpha[x := \overline{0}] \vee \delta \quad \alpha[x := \overline{1}] \vee \delta \quad \alpha[x := \overline{2}] \vee \delta \quad \dots}{(\forall x.\alpha) \vee \delta}$$

сечение

$$\frac{\zeta \vee \alpha \qquad \neg\alpha \vee \delta}{\zeta \vee \delta}$$

Здесь:

α — секущая формула

Число связок в $\neg\alpha$ — степень сечения.

Дерево доказательства

1. Доказательства образуют деревья.
2. Каждой формуле в дереве сопоставим порядковое число (ординал).
3. Порядковое число заключения любого неструктурного правила строго больше порядкового числа его посылок (больше или равно в случае структурного правила).

$$\dfrac{\dfrac{(\neg 1 = 0)_1 \quad (\neg 2 = 0)_2 \quad (\neg 3 = 0)_4 \quad (\neg 4 = 0)_8 \ldots}{(\forall x. \neg x' = 0)_\omega}}{(\neg\neg\forall x. \neg x' = 0)_{\omega+1}}$$

4. Существует конечная максимальная степень сечения в дереве (назовём её степенью вывода).

Любая теорема Ф.А. — теорема S_∞

Теорема

Если $\vdash_{\text{фа}} \alpha$, *то* $\vdash_\infty |\alpha|_\infty$

Пример

Обратное неверно:

$$\frac{\neg\omega(\overline{0},\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}) \qquad \neg\omega(\overline{1},\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}) \qquad \neg\omega(\overline{2},\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}) \qquad \dots}{\forall x.\neg\omega(x,\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})}$$

Теорема

Если Ф.А. противоречива, то противоречива и S_∞

Обратимость правил де Моргана, отрицания, бесконечной индукции

Теорема

$$\frac{\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta}{\neg\alpha \vee \delta \quad \neg\beta \vee \delta} \quad \frac{\neg\neg\alpha \vee \delta}{\alpha \vee \delta} \quad \frac{(\forall x.\alpha) \vee \delta}{\alpha[x := \overline{0}] \vee \delta \quad \alpha[x := \overline{1}] \vee \delta \quad \alpha[x := \overline{2}] \vee \delta}$$

Доказательство.

Например, формула вида $\neg\neg\alpha \vee \delta$.

Проследим историю $\neg\neg\alpha$; она могла быть получена:

1. ослаблением — заменим $\neg\neg\alpha$ на α в этом узле и последующих.
2. отрицанием — выбросим правило, заменим $\neg\neg\alpha$ на

$$\begin{tikzcd}
\delta(0) \arrow[d] & & \alpha \vee \delta(2) \arrow[d] \arrow[ddl, bend right] \\
\neg\neg\alpha \vee \delta(0) \arrow[dr] & & \neg\neg\alpha \vee \delta(2) \arrow[dl] & \arrow[dll] \\
& \neg\neg\alpha \vee \forall x.\delta(x) &
\end{tikzcd}$$

Устранение сечений

Теорема

Если α имеет вывод степени $m > 0$ порядка t, то можно найти вывод степени строго меньшей m с порядком 2^t.

Доказательство.

Трансфинитная индукция. Пусть для всех деревьев порядка $t_1 < t$ условие выполнено. Покажем, что оно выполнено для порядка t. Рассмотрим заключительное правило. Это может быть...

1. Не сечение.
2. Сечение, секущая формула — элементарная.
3. Сечение, секущая формула — $\neg\alpha$.
4. Сечение, секущая формула — $\alpha \vee \beta$.
5. Сечение, секущая формула — $\forall x.\alpha$.

□

Случай 1. Не сечение

$$\frac{(\pi_0)_{t_0} \quad (\pi_1)_{t_1} \quad (\pi_2)t_2 \quad \dots}{(\alpha)_t}$$

Заменим доказательства посылок $(\pi_i)_{t_i}$ на $(\pi'_i)_{2^{t_i}}$ по индукционному предположению.

1. Поскольку степени посылок $m'_i < m_i$, то $\max m'_i < \max m_i$.
2. Поскольку $t_i \leq t$, то $2^{t_i} \leq 2^t$.

Случай 5. Сечение с формулой вида $\forall x.\alpha$

$$\frac{\zeta \vee \forall x.\alpha \qquad (\neg\forall x.\alpha) \vee \delta}{\zeta \vee \delta}$$

Причём степень и порядок выводов компонент, соответственно, (m_1, t_1) и (m_2, t_2).

1. По индукции, вывод $\zeta \vee \forall x.\alpha$ можно упростить до $(m_1', 2^{t_1})$.
2. По обратимости, можно построить вывод $\zeta \vee \alpha[x := \theta]$ за $(m_1', 2^{t_1})$.
3. В формуле $(\neg\forall x.\alpha) \vee \delta$ формула $\neg\forall x.\alpha$ получена либо ослаблением, либо квантификацией из $\neg\alpha[x := \theta_k] \vee \delta_k$.
    3.1 Каждое правило квантификации заменим на:

    $$\frac{\zeta \vee \alpha[x := \theta_k] \qquad (\neg\alpha[x := \theta_k]) \vee \delta_k}{\zeta \vee \delta_k}$$

    3.2 Остальные вхождения $\neg\forall x.\alpha$ заменим на ζ (в правилах ослабления).
4. В получившемся дереве меньше степень — так как в $\neg\alpha[x := \theta]$ меньше связок, чем в $\neg\forall x.\alpha$.

Случай 5. Как перестроим доказательство

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & & \delta_l \arrow[dd] & \\
\dots \arrow[ddd] \arrow[dr, bend right] & & & \neg\alpha[x := \theta] \vee \delta_k \arrow[dl, bend right] \arrow[d] & & & \\
 & \zeta \vee \alpha[x := \theta] \arrow[dr] & & & & (\neg\forall x.\alpha) \vee \delta_l \arrow[ddl, dashed] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & & \zeta \vee \delta_k & (\neg\forall x.\alpha) \vee \delta_k \arrow[l, Rightarrow] \arrow[dr, dashed] & & & \zeta \vee \delta_l \\
\zeta \vee \forall x.\alpha \arrow[ddr] & & & & (\neg\forall x.\alpha) \vee \delta \arrow[d, Rightarrow] \arrow[ddlll] & & \\
 & & & & \zeta \vee \delta & & \\
 & \zeta \vee \delta & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Теорема об устранении сечений

Определение

Итерационная экспонента

$$(a\uparrow)^m(t) = \begin{cases} t, & m = 0 \\ a^{(a\uparrow)^{m-1}(t)}, & m > 0 \end{cases}$$

Теорема

Если $\vdash_\infty \sigma$ *степени* m *порядка* t*, то найдётся доказательство без сечений порядка* $(2\uparrow)^m(t)$

Доказательство.

В силу конечности m воспользуемся индукцией по m и теоремой об уменьшении степени. $\square$

Порядок трансфинитной индукции

Определение

ε_0 — *неподвижная точка* $\varepsilon_0 = \omega^{\varepsilon_0}$

Иначе говоря, $\varepsilon_0 = \{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, (\omega\uparrow)^3(\omega), (\omega\uparrow)^4(\omega), \dots\}$.

Очевидно, что теорема об устранении сечений может быть доказана трансфинитной индукцией до ординала ε_0 (максимальный порядок дерева вывода, при правильной нумерации вершин).

Непротиворечивость формальной арифметики

Теорема

Система S_∞ непротиворечива

Доказательство.

Рассмотрим формулу $\neg 0 = 0$. Если эта формула выводима в S_∞, то она выводима и в S_∞ без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило Де-Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции $(\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta)$.
2. Отрицание? Нет двойного отрицания $(\neg\neg\alpha \vee \delta)$.
3. Бесконечная индукция или квантификация? Нет квантора.
4. Ослабление? Нет дизъюнкции $(\alpha \vee \delta)$.

То есть, неизбежно, $\neg 0 = 0$ — аксиома, что также неверно. $\square$