Математическая логика

КТ ИТМО, осень 2023 года

Что такое «правильное рассуждение»?

Логика. Аристотель: 384-322 гг. до н.э.

Математический анализ

Формализация матанализа

- Ньютон, Лейбниц — неформальная идея
- Коши — последовательности вместо бесконечно-малых, пределы
- Вейерштрасс — вещественные числа
- Кантор — теория множеств

Наивная теория множеств

Парадокс брадобрея (Рассела)

- На некотором острове живёт брадобрей, который бреет всех, кто не бреется сам. Бреется ли сам брадобрей?
- Если
$$X = \{x \mid x \notin x\}$$
то что можно сказать про
$$X \in X$$
-
    - Пусть $X \in X$. Тогда $X : X \notin X$
    - Пусть $X \notin X$. Тогда X должен принадлежать X
- Не совсем парадокс: откуда мы знаем, что X существует? А откуда мы знаем, что вещественные числа существуют?

Программа Гильберта

Высказывание

Высказывание — это строка, сформированная по следующим правилам.

- Атомарное высказывание — пропозициональная переменная: A, B', C_{1234}
- Составное высказывание: если α и β — высказывания, то высказываниями являются:
  - Отрицание: $(\neg\alpha)$
  - Конъюнкция: $(\alpha \mathbin{\&} \beta)$ *или* $(\alpha \wedge \beta)$
  - Дизъюнкция: $(\alpha \vee \beta)$
  - Импликация: $(\alpha \rightarrow \beta)$ *или* $(\alpha \supset \beta)$

Пример:

$$(((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C)) \vee (C \rightarrow A))$$

Соглашения о записи (метаязык)

- Метапеременные:
  $$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$$
  Если α — высказывание, то $(\neg\alpha)$ — высказывание
- Метапеременные для пропозициональных переменных:
  $$X, Y_n, Z'$$
  Пусть дана пропозициональная переменная X, тогда $(X \mathbin{\&} (\neg X))$ — высказывание

Способы упростить запись

- Приоритет связок: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация
- Ассоциативность: левая для конъюнкции и дизъюнкции, правая для импликации

Пример:

$$((((A \to B) \,\&\, Q) \vee (((\neg B) \to B) \to C)) \vee (C \to (C \to A)))$$

можем записать так:

$$(A \to B) \,\&\, Q \vee ((\neg B \to B) \to C) \vee (C \to C \to A)$$

Теория моделей

Оценка высказываний: как их понимать?

Неформальный пример: $(A \to B) \to (B \to A)$

Давайте попробуем оценить высказывание $(A \to B) \to (B \to A)$.

Если из A следует B, то из B следует A.

Наверное, в общем случае это неверно. Например, пусть:

1. A означает «у меня есть кот»;
2. B означает «у меня есть животное».

Тогда:

1. $A \to B$ выполнена всегда;
2. $B \to A$ может не выполняться: скажем, у меня есть собака, но нет кота.

Оценка высказываний

Высказывание $(A \to B) \to (B \to A)$ ложно, если, например:

- A — «у меня есть кот»;
- B — «у меня есть животное»;
- у меня есть собака, но нет кота.

Иначе: A ложно, B истинно, тогда высказывание ложно.

Чтобы задать оценку высказываний:

- Зафиксируем множество истинностных значений $V = \{И, Л\}$
- Определим функцию оценки переменных (*интерпретацию*) $f : P \to V$ (P — множество пропозициональных переменных).

Если $[\![A]\!] = Л$ и $[\![B]\!] = И$, то $[\![(A \to B) \to (B \to A)]\!] = Л$

Указание функции оценки (метаязык)

- Синтаксис для указания функции оценки переменных

$$[\![\alpha]\!]^{X_1:=v_1,\ \dots,\ X_n:=v_n}$$

- Это всё метаязык — потому полагаемся на здравый смысл

$$[\![A \,\&\, B \,\&\, (C \to C)]\!]^{A:=\text{И},\ B:=[\![\neg A]\!]}$$

Оценим высказывания рекурсивно

- Переменные

$$[\![X]\!] = f(X) \qquad [\![X]\!]^{X:=a} = a$$

- Отрицание

$$[\![\neg\alpha]\!] = \begin{cases} Л, & \text{если } [\![\alpha]\!] = И \\ И, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Конъюнкция

$$[\![\alpha \mathbin{\&} \beta]\!] = \begin{cases} И, & \text{если } [\![\alpha]\!] = [\![\beta]\!] = И \\ Л, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Дизъюнкция

$$[\![\alpha \vee \beta]\!] = \begin{cases} Л, & \text{если } [\![\alpha]\!] = [\![\beta]\!] = Л \\ И, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Импликация

$$[\![\alpha \rightarrow \beta]\!] = \begin{cases} Л, & \text{если } [\![\alpha]\!] = И,\ [\![\beta]\!] = Л \\ И, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тавтологии

Если α истинна при любой оценке переменных, то она *общезначима* (является *тавтологией*):

$$\models \alpha$$

Выражение $A \rightarrow A$ — тавтология. Переберём все возможные значения единственной переменной A:

$$[\![A \rightarrow A]\!]^{A:=\text{И}} = \text{И}$$
$$[\![A \rightarrow A]\!]^{A:=\text{Л}} = \text{И}$$

Выражение $A \rightarrow \neg A$ тавтологией не является:

$$[\![A \rightarrow \neg A]\!]^{A:=\text{И}} = \text{Л}$$

Ещё определения

- Если α истинна при любой оценке переменных, при которой истинны высказывания $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, будем говорить, что α — *следствие* этих высказываний:

$$\gamma_1, \ldots, \gamma_n \models \alpha$$

- Истинна при какой-нибудь оценке — *выполнима*.
- Не истинна ни при какой оценке — *невыполнима*.
- Не истинна при какой-нибудь оценке — *опровержима*.

Теория доказательств

- Из чего состоит доказательство (неформально):
  1. Аксиомы — утверждения, от которых отталкиваемся.
  2. Правила вывода — способы делать умозаключения, переходить от одних утверждений к другим.
- Давайте определим формально, что такое аксиомы и правила вывода, и затем дадим формальное определение доказательству как таковому.

Схемы высказываний: определение

Определение (схема высказывания)

Строка, строящаяся по правилам для построения высказываний, с одним отличием — вместо пропозициональных переменных можно указывать маленькие греческие буквы.

По-простому: схемы высказываний — высказывания с метапеременными

Пример

- $(A \rightarrow \alpha) \vee (\beta \rightarrow B)$
- $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$
- $A \vee B \,\&\, A$

Схемы высказываний: определение

Определение

Будем говорить, что высказывание σ строится (иначе: задаётся) по схеме Ш, если существует такая замена метапеременных $ч_1$, $ч_2$, ..., $ч_n$ в высказывании на какие-либо выражения φ_1, φ_2, ..., φ_n, что после её проведения получается высказывание σ:

$$\sigma = Ш[ч_1 := \varphi_1][ч_2 := \varphi_2]...[ч_n := \varphi_n]$$

Заметьте, здесь $ч_i$ — мета-метапеременные для метапеременных, а Ш — мета-метапеременная для схем.

Схемы высказываний: примеры

Схема

$$A \to \alpha \vee B \vee \alpha$$

задаёт, к примеру, следующие высказывания:

- $A \to X \vee B \vee X$, при $\alpha := X$.
- $A \to (M \to N) \vee B \vee (M \to N)$, при $\alpha := M \to N$.

и НЕ задаёт следующие высказывания:

- $A \to X \vee B \vee Y$ — все вхождения α должны заменяться одинаково во всём выражении.
- $(A \to (M \to N) \vee B \vee M) \to N$ — структура скобок должна сохраняться.

Аксиомы исчисления высказываний

Определение

Назовём следующие схемы высказываний схемами аксиом исчисления высказываний:

(1) $\alpha \to \beta \to \alpha$

(2) $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$

(3) $\alpha \to \beta \to \alpha \& \beta$

(4) $\alpha \& \beta \to \alpha$

(5) $\alpha \& \beta \to \beta$

(6) $\alpha \to \alpha \vee \beta$

(7) $\beta \to \alpha \vee \beta$

(8) $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$

(9) $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$

(10) $\neg\neg\alpha \to \alpha$

Все высказывания, которые задаются схемами аксиом, назовём аксиомами исчисления высказываний.

Правило вывода Modus Ponens

Первый, упомянувший правило — Теофраст (древнегреческий философ, IV-III век до н.э.).

Переход по следствию: «сейчас сентябрь; если сейчас сентябрь, то сейчас осень; следовательно, сейчас осень».

Если имеет место α и $\alpha \rightarrow \beta$, то имеет место β.

$$\frac{\alpha \quad \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

Доказательство

Определение (доказательство в исчислении высказываний)

Доказательством (выводом) назовём конечную последовательность высказываний $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$*, причём каждое* δ_i *либо:*

- *является аксиомой — существует замена метапеременных для какой-либо схемы аксиом, позволяющая получить формулу* δ_i*, либо*
- *получается из* $\delta_1, \ldots, \delta_{i-1}$ *по правилу Modus Ponens — существуют такие индексы* $j < i$ *и* $k < i$*, что* $\delta_k \equiv \delta_j \to \delta_i$*.*

Пример:

$A \to (A \to A)$,
$(A \to (A \to A)) \to (A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)$,
$(A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)$,
$A \to ((A \to A) \to A)$,
$A \to A$

Доказательство подробнее

Почему это доказательство? То же подробнее:

(1) $A \to (A \to A)$

$\alpha \to \beta \to \alpha \ [\alpha, \beta := A]$

(2) $(A \to (A \to A)) \to (A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)$

$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma) \ [\alpha, \gamma := A; \beta := A \to A]$

(3) $(A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)$

$$\dfrac{A \to (A \to A) \quad (A \to (A \to A)) \to (A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to}{(A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)}$$

(4) $A \to ((A \to A) \to A)$

$\alpha \to \beta \to \alpha \ [\alpha := A, \beta := A \to A]$

(5) $A \to A$

$$\dfrac{A \to ((A \to A) \to A) \quad (A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)}{A \to A}$$

Дополнительные определения

Определение (доказательство формулы α)

— такое доказательство (вывод) $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, что $\alpha \equiv \delta_n$. Формула α доказуема (выводима), если существует её доказательство. Обозначение:

$$\vdash \alpha$$

Определение (вывод формулы α из гипотез $\gamma_1, \dots, \gamma_k$)

— такая последовательность $\delta_1, \dots, \delta_n$, причём каждое δ_i либо:

- *является аксиомой;*
- *либо получается по правилу Modus Ponens из предыдущих;*
- *либо является одной из гипотез: существует $t : \delta_i \equiv \gamma_t$.*

Формула α выводима из гипотез $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, если существует её вывод. Обозначение:

$$\gamma_1, \dots, \gamma_k \vdash \alpha$$

Корректность и полнота

Определение (корректность теории)

Теория корректна, если любое доказуемое в ней утверждение общезначимо. То есть, $\vdash \alpha$ *влечёт* $\models \alpha$.

Определение (полнота теории)

Теория полна, если любое общезначимое в ней утверждение доказуемо. То есть, $\models \alpha$ *влечёт* $\vdash \alpha$.

Корректность исчисления высказываний

Лемма (корректность)

Если $\vdash \alpha$, *то* $\models \alpha$

Доказательство.

Индукция по длине вывода n. Для каждого высказывания δ_n из вывода разбор случаев:

1. Аксиома — убедиться, что все аксиомы общезначимы.
2. Modus Ponens j, k — убедиться, что если $\models \delta_j$ и $\models \delta_j \rightarrow \delta_n$, то $\models \delta_n$.

□

Общезначимость схемы аксиом №9

Общезначимость схемы аксиом — истинность каждой аксиомы, задаваемой данной схемой, при любой оценке:

$$[\![(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha]\!] = \text{И}$$

Построим таблицу истинности формулы в зависимости от оценки α и β:

$[\![\alpha]\!]$	$[\![\beta]\!]$	$[\![\neg\alpha]\!]$	$[\![\alpha \to \beta]\!]$	$[\![\alpha \to \neg\beta]\!]$	$[\![(\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha]\!]$	$[\![(\alpha \to \beta) \to (\alpha$ -
Л	Л	И	И	И	И	И
Л	И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	Л	И
И	И	Л	И	Л	И	И

Общезначимость заключения правила Modus Ponens

Пусть в выводе есть формулы δ_j, $\delta_k = \delta_j \rightarrow \delta_n$, δ_n (причём $j < n$ и $k < n$).

Фиксируем какую-нибудь оценку. По индукционному предположению, δ_j и $\delta_j \rightarrow \delta_n$ общезначимы. Поэтому при данной оценке $[\![\delta_j]\!] =$ И и $[\![\delta_j \rightarrow \delta_n]\!] =$ И.

Построим таблицу истинности для импликации:

$[\![\delta_j]\!]$	$[\![\delta_n]\!]$	$[\![\delta_j \rightarrow \delta_n]\!]$
Л	Л	И
Л	И	И
И	Л	Л
И	И	И

Из таблицы видно, что $[\![\delta_n]\!] =$ Л только если $[\![\delta_j \rightarrow \delta_n]\!] =$ Л или $[\![\delta_j]\!] =$ Л. Значит, это невозможно, и $[\![\delta_n]\!] =$ И