

Алгебраические типы данных

Алгебра на типах данных

Множество	Мощность	Тип	Название
\emptyset	0	void	необитаемый
$\{\emptyset\}$	1	unit	одноэлементный
$\{T, F\}$	2	boolean	булевский, двухэлементный
$A \uplus B$	$ \alpha + \beta $	Either Alpha Beta	тип-сумма
$A \times B$	$ \alpha \cdot \beta $	(Alpha, Beta)	пара, декартово произведение
B^A	$ \beta ^{ \alpha }$	Alpha \rightarrow Beta	функциональный

Пример

(boolean, A \rightarrow boolean) соответствует $2 \cdot (2^A)$

Алгебраический тип данных, тип-сумма

Определение

Отмеченным объединением множеств (дизъюнктивным объединением) назовём:

$$A \uplus B := \{ \langle a, "L" \rangle \mid a \in A \} \cup \{ \langle b, "R" \rangle \mid b \in B \}$$

Алгебраический тип данных, тип-сумма

Определение

Отмеченным объединением множеств (дизъюнктивным объединением) назовём:

$$A \uplus B := \{ \langle a, "L" \rangle \mid a \in A \} \cup \{ \langle b, "R" \rangle \mid b \in B \} = \{ a_L \mid a \in A \} \cup \{ b_R \mid b \in B \}$$

Алгебраический тип данных, тип-сумма

$$\tau ::= \alpha \mid (\tau \rightarrow \tau)$$

Определение

Отмеченным объединением множеств (дизъюнктивным объединением) назовём:

$$A \uplus B := \{\langle a, "L" \rangle \mid a \in A\} \cup \{\langle b, "R" \rangle \mid b \in B\} = \{a_L \mid a \in A\} \cup \{\underline{b_R} \mid b \in B\}$$

Пример

$$\begin{aligned}\mathbb{N} \cup \mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \dots\} & \mathbb{N} \uplus \mathbb{N} &= \{1_L, 1_R, 2_L, 2_R, 3_L, 3_R, \dots\} \\ \mathbb{N} \uplus \mathbb{Z} &= \{\dots - 3_R, -2_R, -1_R, 0_R, 1_L, 1_R, 2_L, 2_R, 3_L, 3_R, \dots\}\end{aligned}$$

Алгебраический тип данных (тип-сумма) задаётся набором конструкторов, каждому конструктору сопоставляется тип параметра.

Пример

$\text{boolean} := \text{False} \mid \text{True}$

$B = \{\emptyset\} \uplus \{\emptyset\} \quad \mathcal{L} : \emptyset_L$

$\text{angle} := \underline{\text{Degrees of int}} \mid \text{Radians of real}$

$A := \mathbb{Z} \uplus \mathbb{R} \quad 180^\circ : 180_L, \pi_R$

Degrees 180, Rad. 3/4..

Примеры из языков программирования

П.

```
type angle = record
  case radians : boolean of
    true: (rads: real);
    false: (degs: integer);
  end;
```

Типичное применение:

```
union {
  short ax;
  struct {
    char al;
    char ah;
  }
};
```

C

```
struct angle {
  bool radians;
  union {
    float rads;
    int degs;
  }
};
```

AX AL | AH

Списки

- ▶ Список (целых чисел) — алгебраический тип:

```
type list = Nil | Cons of int * list
```

- ▶ Как строим значения:

```
Nil                => []  
Cons (5, Nil)      => [5]  
Cons (3, Cons (4, Cons (5, Nil))) => [3,4,5]
```

- ▶ Как используем значения:

```
let rec length l = match l with  
  Nil -> 0  
  | Cons (_,lt) -> 1 + length lt
```

Взглянем немного глубже

$Nil\ of\ ()_{unit} = \{\emptyset\}$

Надо научиться строить и разбирать тип $list = Nil \mid Cons\ of\ int * list$:

$$L = \{\emptyset\} \uplus (\mathbb{Z} \times L)$$

- Строить. Конструкторы: Nil , $Cons$ — или левая и правая инъекции (In_L , In_R).

$Nil := \underline{In_L}()$

$Cons\ a\ b := \underline{In_R} \langle a, b \rangle$

$p = Pair\ a\ b$
 $a = \pi_L p$
 $b = \pi_R p$

- Разбирать.

```
let rec length l = match l with  
  Nil -> 0  
  | Cons (lh,lt) -> 1 + length lt
```

```
match l with  
| InL p -> 0  
| InR p -> 1 + length (PrR p)
```

В самом низу — элиминатор $Case$:

$\underline{length\ l := Case\ l\ (\lambda p.0)\ (\lambda p.1 + length\ (\pi_R p))}$

Алгебраический тип как дизъюнкция

Общие соображения: ВНК-интерпретация.

Интуиционистское исчисление высказываний

$$\text{(вв)} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta \quad \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma \quad \Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma}{\Gamma \vdash \gamma} \quad \text{(угн.)}$$

Просто-типизированное лямбда исчисление — придумаем названия

$$\frac{\Gamma \vdash A : \alpha}{\Gamma \vdash \text{In}_L A : \alpha \vee \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash B : \beta}{\Gamma \vdash \text{In}_R B : \alpha \vee \beta} \quad \left| \quad \frac{\Gamma \vdash X : \alpha \vee \beta \quad \Gamma \vdash L : \alpha \rightarrow \gamma \quad \Gamma \vdash R : \beta \rightarrow \gamma}{\Gamma \vdash \text{Case } X \text{ L } R : \gamma}$$

Пример

Напомним, если $\tau = \varphi = \text{unit}$, то $\tau \vee \varphi \approx \text{bool}$.

Тогда $T^{\tau \vee \varphi} := \text{In}_L()$, $F^{\tau \vee \varphi} := \text{In}_R()$. И, например,

$\text{Not } x := \text{Case } x \text{ } (\lambda t. \text{In}_R()) \text{ } (\lambda t. \text{In}_L())$

$$2 \approx 1 + 1$$
$$B = \{\emptyset\} \cup \{\emptyset\}$$
$$\text{bool} = \text{True/False}$$

Реализация алгебраического типа

Просто-типизированное лямбда исчисление:

$$\frac{\Gamma \vdash A : \alpha}{\Gamma \vdash \text{In}_L A : \alpha \vee \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash B : \beta}{\Gamma \vdash \text{In}_R B : \alpha \vee \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash X : \alpha \vee \beta \quad \Gamma \vdash L : \alpha \rightarrow \gamma \quad \Gamma \vdash R : \beta \rightarrow \gamma}{\Gamma \vdash \text{Case } X \text{ L } R : \gamma}$$

Предлагаем такую реализацию:

$$\text{In}_L := \lambda x. \lambda t. \lambda f. t \ x, \quad \text{In}_R := \lambda x. \lambda t. \lambda f. f \ x \quad \text{Case} := \lambda x. \lambda l. \lambda r. x \ l \ r$$
$$\text{Case } (\text{In}_L X^\tau) L^{\tau \rightarrow \gamma} R \rightarrow_\beta (\text{In}_L X) L R = (\lambda t. \lambda f. t \ X) L R \rightarrow_\beta (L X)^\gamma$$

А где здесь дизъюнкция? Ожидаем, что $(\text{In}_L X^\tau) : \tau \vee \varphi$. А что на деле?

$$X : \tau \vdash \lambda t^{\tau \rightarrow \gamma}. \lambda f^{\varphi \rightarrow \gamma}. t \ X : (\tau \rightarrow \gamma) \rightarrow (\varphi \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma$$

«Если некоторое утверждение γ истинно **всегда**, когда оно следует из истинности τ и φ — то либо τ , либо φ истинно». Рассуждение не совсем формально, потому что не хватает **кванторов по утверждениям**, использующимся неявно:

$$\forall \gamma. (\tau \rightarrow \gamma) \rightarrow (\varphi \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma$$

как мы

Примеры алгебраических типов

Булевские значения:

$$T_1 := \text{In}_L() = \lambda t. \lambda f. \underline{t} () \quad F_1 := \text{In}_R() = \lambda t. \lambda f. \underline{f} () \quad \text{If}_1 := \lambda b. \lambda t. \lambda e. \underline{b} (\lambda p. \underline{t}) (\lambda p. \underline{e})$$

Ну или когда аргумент опущен за ненадобностью:

$$T := \lambda t. \lambda f. \underline{t} \quad F := \lambda t. \lambda f. \underline{f} \quad \text{If} := \lambda b. \lambda t. \lambda e. \underline{b} \ t \ e$$

Списки:

$$\text{Nil} := \text{In}_L 0 \quad \text{Cons } p \ q := \text{In}_R \langle p, q \rangle$$

Тогда $[1, 3, 5]$ превращается в $\text{Cons } 1 (\text{Cons } 3 (\text{Cons } 5 \text{ Nil}))$.

Для простоты раскроем полностью $[1] = \text{Cons } 1 \text{ Nil}$:

$$\lambda t. \lambda f. f(\lambda p. p (\lambda f. \lambda x. f \ x) (\lambda t. \lambda f. t (\lambda f. \lambda x. x)))$$

Мощность	Тип	Высказывание
0	\perp	необитаемый тип
1	$() : \text{unit}$	одноэлементный тип
$ \alpha + \beta $	$\text{Either } A^\alpha B^\beta : \alpha \vee \beta$	тип-сумма, дизъюнкция
$ \alpha \cdot \beta $	$(A^\alpha, B^\beta) : \alpha \& \beta$	тип-произведение, конъюнкция
$ \beta ^{ \alpha }$	$\lambda x^\alpha. B : \alpha \rightarrow \beta$	функциональный, импликация

Мощность множеств

Отношения

x^2

x	$f(x)$
0	0
1	1
2	4
3	9

$\subseteq \{0, 1, 2, 3\}^2$

Определение

$A \times B := \{\langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B\}$



Бинарное отношение — $R \subseteq A \times B$

Функциональное бинарное отношение (функция) R — такое, что

$\forall x. x \in A \rightarrow \exists! y. \langle x, y \rangle \in R$

R — инъективная функция, если $\forall x. \forall y. \langle x, y \rangle \in R \ \& \ \langle y, t \rangle \in R \rightarrow x = y$.

R — сюръективная функция, если $\forall y. y \in B \rightarrow \exists x. \langle x, y \rangle \in R$.

4?

Равномощные множества

Определение

Множество A равномощно B ($|A| = |B|$), если существует биекция $f : A \rightarrow B$.

Множество A имеет мощность, не превышающую мощности B ($|A| \leq |B|$), если существует инъекция $f : A \rightarrow B$.

Теорема Кантора-Бернштейна

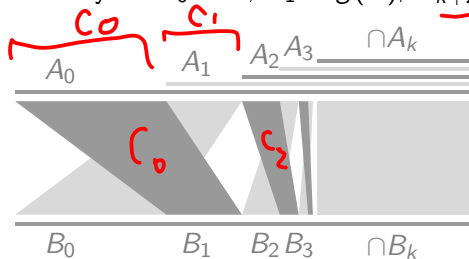
Теорема

Если $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$, то $|A| = |B|$.

Заметим, $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow A$ — инъекции, но не обязательно $g(f(x)) = x$.

Доказательство.

Избавимся от множества B : пусть $A_0 = A$; $A_1 = g(B)$; $A_{k+2} = g(f(A_k))$.



$$|A| \leq |A_2| \quad \text{то} \quad |A| = |A_2|$$

$A_2 \subset A$,

$$\begin{aligned} & \downarrow \lambda x. x+1 \\ & \mathbb{N} \setminus \{1\} \end{aligned}$$

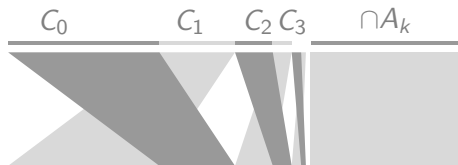
Тогда, если существует $h: A_0 \rightarrow A_1$ — биекция, то тогда $g^{-1} \circ h: A \rightarrow B$ — требуемая биекция.



Построение биекции $h : A_0 \rightarrow A_1$

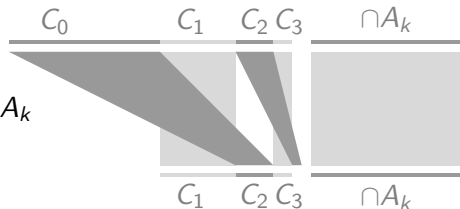
Пусть $C_k = A_k \setminus A_{k+1}$. Тогда

$$\underline{g(f(C_k))} = g(f(A_k)) \setminus g(f(A_{k+1})) = A_{k+2} \setminus A_{k+3} = C_{k+2}.$$



Тогда определим $h(x)$ следующим образом:

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \in C_{2k+1} \vee x \in \cap A_k \\ \underline{g(f(x))}, & x \in C_{2k} \end{cases}$$



A_0

A_1

Кардинальные числа



Определение

Кардинальное число — наименьший ординал, не равномощный никакому меньшему:

$$\forall x. x \in c \rightarrow |x| < |c|$$

Теорема

Конечные ординалы — кардинальные числа.

Определение

Мощность множества ($|S|$) — равномощное ему кардинальное число.

Диагональный метод

Лемма

$$|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$$

Доказательство.

Рассмотрим $a \in (0, 1)$ и десятичную запись: $0.a_0a_1a_2\dots$. Пусть существует биективная $f: \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$. По функции найдём значение σ , не являющееся образом никакого натурального числа.

n	$f(n)$	$f(n)_0$	$f(n)_1$	$f(n)_2$	$f(n)_3$	$f(n)_4$	$f(n)_5$	\dots
n_0	<u>0.3</u>	3	0	0	0	0	0	\dots
n_1	$\pi/10$	3	1	4	1	5	9	\dots
n_2	$1/7$	1	4	2	8	5	7	\dots

0,30000 (
 $\uparrow \uparrow \uparrow$ 0,3(9)
 0 1 2 " 0,4(0)

Диагональный метод

Лемма

$$|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$$

Доказательство.

Рассмотрим $a \in (0, 1)$ и десятичную запись: $0.a_0a_1a_2\dots$. Пусть существует биективная $f: \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$. По функции найдём значение σ , не являющееся образом никакого натурального числа.

n	$f(n)$	$f(n)_0$	$f(n)_1$	$f(n)_2$	$f(n)_3$	$f(n)_4$	$f(n)_5$	\dots
n_0	0.3	3	0	0	0	0	0	\dots
n_1	$\pi/10$	3	1	4	1	5	9	\dots
n_2	$1/7$	1	4	2	8	5	7	\dots
σ		8	6	7	$\dots \sigma_k = (f(n_k)_k + 5) \% 10$			

$$f(x) = \sigma \quad ?$$



Теорема Кантора

Теорема

$$|\mathcal{P}(S)| > |S|$$

Доказательство.

Пусть $S = \{a, b, c, \dots\}$

$$f(n): S \rightarrow \mathcal{P}(S)$$
$$a \rightarrow \{b, c, \dots\}$$

n	$a \in f(n)$	$b \in f(n)$	$c \in f(n)$...
a	И	Л	И	
b	Л	И	И	
c	И	И	И	
	Л	И	Л	$y \notin f(y)$

$$f(a) = \{a, c, \dots\}$$
$$f(b) = \{c, \dots\}$$
$$f(c) = \{a, b, c, \dots\}$$

Теорема Кантора

Теорема

$$|\mathcal{P}(S)| > |S|$$

Доказательство.

Пусть $S = \{a, b, c, \dots\}$

n	$a \in f(n)$	$b \in f(n)$	$c \in f(n)$	\dots
a	И	Л	И	
b	Л	И	И	
c	И	И	И	
	Л	И	Л	$y \notin f(y)$

Пусть $f : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$ — биекция. Тогда $\sigma = \{y \in S \mid y \notin f(y)\}$. Пусть $f(x) = \sigma$. Но $x \in f(x)$ тогда и только тогда, когда $x \notin \sigma$, то есть $f(x) \neq \sigma$. □

О буквах

https://en.wikipedia.org/wiki/Proto-Sinaitic_script

		/ʔ/	'alp "ox"						A A A
		/b/	bayt "house"						B B B B Б
		/g/	gaml "throwstick"						Г G Г

Иерархии \aleph_n и \beth_n

Определение

$\aleph_0 := |\omega|$; $\aleph_{k+1} := \min\{a \mid a - \text{ординал}, \aleph_k < |a|\}$

Определение

$\beth_0 := |\omega|$; $\beth_{k+1} := |\mathcal{P}(\beth_k)|$

Континуум-гипотеза (Г.Кантор, 1877): $\aleph_1 = \beth_1$ (не существует мощности, промежуточной между счётной и континуумом).

Обобщённая континуум-гипотеза: $\aleph_n = \beth_n$ при всех n .

Определение

Утверждение α противоречит аксиоматике: $\vdash \alpha$ ведёт к противоречию.

Утверждение α не зависит от аксиоматики: $\nvdash \alpha$ и $\nvdash \neg\alpha$.

$$\aleph_0 < \aleph < \aleph_1$$

\aleph_0

$$|\aleph|$$

$$|\mathbb{R}|$$

континуум

$$\notin (\overline{\mathbb{Q}})$$

Иерархии \aleph_n и \beth_n

Определение

$$\aleph_0 := |\omega|; \aleph_{k+1} := \min\{a \mid a - \text{ординал}, \aleph_k < |a|\}$$

Определение

$$\beth_0 := |\omega|; \beth_{k+1} := |\mathcal{P}(\beth_k)|$$

Континуум-гипотеза (Г.Кантор, 1877): $\aleph_1 = \beth_1$ (не существует мощности, промежуточной между счётной и континуумом).

Обобщённая континуум-гипотеза: $\aleph_n = \beth_n$ при всех n .

Определение

Утверждение α противоречит аксиоматике: $\vdash \alpha$ ведёт к противоречию.

Утверждение α не зависит от аксиоматики: $\not\vdash \alpha$ и $\not\vdash \neg\alpha$.

Теорема (О независимости континуум-гипотезы, Дж.Коэн, 1963)

Утверждение $\aleph_1 = \beth_1$ не зависит от аксиоматики ZFC.

Примеры мощностей множеств

Пример	мощность
ω	\aleph_0
ω^2, ω^ω	\aleph_0
\mathbb{R}	\beth_1
все непрерывные функции $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	\beth_1
все функции $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	\beth_2

Как пересчитать вещественные числа (неформально)?

1. Номер вещественного числа — первое упоминание в литературе, т.е.

$\langle j, y, n, p, r, c \rangle$:

j — гёделев номер названия научного журнала (книги);

y — год издания;

n — номер;

p — страница;

r — строка;

c — позиция

Как пересчитать вещественные числа (неформально)?

1. Номер вещественного числа — первое упоминание в литературе, т.е.

$\langle j, y, n, p, r, c \rangle$:

j — гёделев номер названия научного журнала (книги);

y — год издания;

n — номер;

p — страница;

r — строка;

c — позиция

2. Попробуете предъявить число x , не имеющее номера? Это рассуждение сразу даст номер.

Мощность модели и аксиоматизации

Определение

Пусть задана модель $\langle D, F_n, P_n \rangle$ для некоторой теории первого порядка. Её мощностью будем считать мощность D .

Мощность модели и аксиоматизации

Определение

Пусть задана модель $\langle D, F_n, P_n \rangle$ для некоторой теории первого порядка. Её мощностью будем считать мощность D .

Определение

Пусть задана формальная теория с аксиомами α_n . Её мощность — мощность множества $\{\alpha_n\}$.

Мощность модели и аксиоматизации

Определение

Пусть задана модель $\langle D, F_n, P_n \rangle$ для некоторой теории первого порядка. Её мощностью будем считать мощность D .

Определение

Пусть задана формальная теория с аксиомами α_n . Её мощность — мощность множества $\{\alpha_n\}$.

Пример

Формальная арифметика, исчисление предикатов, исчисление высказываний — счётно-аксиоматизируемые.

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — элементарная подмодель $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$, если:

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — элементарная подмодель $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$, если:

1. $D' \subseteq D$,

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — элементарная подмодель $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$, если:

1. $D' \subseteq D$, F'_n, P'_n — сужение F_n, P_n (замкнутое на D').

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — элементарная подмодель $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$, если:

1. $D' \subseteq D$, F'_n, P'_n — сужение F_n, P_n (замкнутое на D').
2. $\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}' \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ при $x_i \in D'$.

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — элементарная подмодель $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$, если:

1. $D' \subseteq D$, F'_n, P'_n — сужение F_n, P_n (замкнутое на D').
2. $\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}' \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ при $x_i \in D'$.

Пример

Когда сужение \mathcal{M} не является элементарной подмоделью?

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — элементарная подмодель $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$, если:

1. $D' \subseteq D$, F'_n, P'_n — сужение F_n, P_n (замкнутое на D').
2. $\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}' \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ при $x_i \in D'$.

Пример

Когда сужение \mathcal{M} не является элементарной подмоделью?

$\forall x. \exists y. x \neq y$. Истинно в \mathbb{N} .

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — элементарная подмодель $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$, если:

1. $D' \subseteq D$, F'_n, P'_n — сужение F_n, P_n (замкнутое на D').
2. $\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}' \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ при $x_i \in D'$.

Пример

Когда сужение \mathcal{M} не является элементарной подмоделью?

$\forall x. \exists y. x \neq y$. Истинно в \mathbb{N} . Но пусть $D' = \{0\}$.

Теорема Лёвенгейма-Сколема

Теорема

Пусть T — множество всех формул теории первого порядка. Пусть теория имеет некоторую модель \mathcal{M} . Тогда найдётся элементарная подмодель \mathcal{M}' , причём $|\mathcal{M}'| = \max(\aleph_0, |T|)$.

Теорема Лёвенгейма-Сколема

Теорема

Пусть T — множество всех формул теории первого порядка. Пусть теория имеет некоторую модель M . Тогда найдётся элементарная подмодель M' , причём $|M'| = \max(\aleph_0, |T|)$.

Доказательство.

(Схема доказательства)

1. Построим D_0 — множество всех значений, которые упомянуты в языке теории.

Теорема Лёвенгейма-Сколема

Теорема

Пусть T — множество всех формул теории первого порядка. Пусть теория имеет некоторую модель M . Тогда найдётся элементарная подмодель M' , причём $|M'| = \max(\aleph_0, |T|)$.

Доказательство.

(Схема доказательства)

1. Построим D_0 — множество всех значений, которые упомянуты в языке теории.
2. Будем последовательно пополнять D_i : $D_0 \subseteq D_1 \subseteq D_2 \dots$, следя за мощностью. $D' = \bigcup D_i$.
3. Покажем, что $\langle D', F_n, P_n \rangle$ — требуемая подмодель.



Начальный D_0

Пусть $\{f_k^0\}$ — все 0-местные функциональные символы теории.

Начальный D_0

Пусть $\{f_k^0\}$ — все 0-местные функциональные символы теории.

1. $D_0 = \{\llbracket f_k^0 \rrbracket\}$, если есть хотя бы один f_k^0 .

Начальный D_0

Пусть $\{f_k^0\}$ — все 0-местные функциональные символы теории.

1. $D_0 = \{\llbracket f_k^0 \rrbracket\}$, если есть хотя бы один f_k^0 .
2. Если таких f_k^0 нет, возьмём какое-нибудь одно значение из D .

Начальный D_0

Пусть $\{f_k^0\}$ — все 0-местные функциональные символы теории.

1. $D_0 = \{\llbracket f_k^0 \rrbracket\}$, если есть хотя бы один f_k^0 .
2. Если таких f_k^0 нет, возьмём какое-нибудь одно значение из D .

Начальный D_0

Пусть $\{f_k^0\}$ — все 0-местные функциональные символы теории.

1. $D_0 = \{\llbracket f_k^0 \rrbracket\}$, если есть хотя бы один f_k^0 .
2. Если таких f_k^0 нет, возьмём какое-нибудь одно значение из D .

Очевидно, $|D_0| \leq |T|$.

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k . Напомним, T — множество всех формул теории.
Рассмотрим $\varphi \in T$.

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k . Напомним, T — множество всех формул теории.
Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k . Напомним, T — множество всех формул теории.
Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.
2. φ имеет хотя бы одну свободную переменную u .

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k . Напомним, T — множество всех формул теории.
Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.
2. φ имеет хотя бы одну свободную переменную y .
 - 2.1 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ бывает истинным и ложным — ничего не меняем

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k . Напомним, T — множество всех формул теории.
Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.
2. φ имеет хотя бы одну свободную переменную y .
 - 2.1 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ бывает истинным и ложным — ничего не меняем
 - 2.2 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y \in D$ и $x_i \in D_k$ либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k . Напомним, T — множество всех формул теории.
Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.
2. φ имеет хотя бы одну свободную переменную y .
 - 2.1 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ бывает истинным и ложным — ничего не меняем
 - 2.2 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y \in D$ и $x_i \in D_k$ либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем
 - 2.3 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ тождественно истинен или ложен, но при $y' \in D \setminus D_k$ отличается — добавим y' к D_{k+1} .

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k . Напомним, T — множество всех формул теории.
Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.
2. φ имеет хотя бы одну свободную переменную y .
 - 2.1 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ бывает истинным и ложным — ничего не меняем
 - 2.2 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y \in D$ и $x_i \in D_k$ либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем
 - 2.3 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ тождественно истинен или ложен, но при $y' \in D \setminus D_k$ отличается — добавим y' к D_{k+1} . Вместе добавим всевозможные $\llbracket \theta(y') \rrbracket$.

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k . Напомним, T — множество всех формул теории.
Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.
2. φ имеет хотя бы одну свободную переменную y .
 - 2.1 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ бывает истинным и ложным — ничего не меняем
 - 2.2 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y \in D$ и $x_i \in D_k$ либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем
 - 2.3 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ тождественно истинен или ложен, но при $y' \in D \setminus D_k$ отличается — добавим y' к D_{k+1} . Вместе добавим всевозможные $\llbracket \theta(y') \rrbracket$.

Всего добавили не больше $|T| \cdot |D_k|$.

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k . Напомним, T — множество всех формул теории.
Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.
2. φ имеет хотя бы одну свободную переменную y .
 - 2.1 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ бывает истинным и ложным — ничего не меняем
 - 2.2 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y \in D$ и $x_i \in D_k$ либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем
 - 2.3 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ тождественно истинен или ложен, но при $y' \in D \setminus D_k$ отличается — добавим y' к D_{k+1} . Вместе добавим всевозможные $\llbracket \theta(y') \rrbracket$.

Всего добавили не больше $|T| \cdot |D_k|$. $|\cup D_i| \leq |T| \cdot |D_k| \cdot |\aleph_0| = \max(|T|, |\aleph_0|)$

\mathcal{M}' — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$.

\mathcal{M}' — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$.

\mathcal{M}' — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.

\mathcal{M}' — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k + 1$ связкой.

\mathcal{M}' — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k + 1$ связкой.
 - 2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.

\mathcal{M}' — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k + 1$ связкой.
 - 2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.
 - 2.2 $\tau \equiv \forall y. \varphi(y, x_1, \dots, x_n)$.

\mathcal{M}' — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k + 1$ связкой.
 - 2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.
 - 2.2 $\tau \equiv \forall y. \varphi(y, x_1, \dots, x_n)$. Каждый x_i добавлен на каком-то шаге — максимум t .

\mathcal{M}' — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k + 1$ связкой.
 - 2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.
 - 2.2 $\tau \equiv \forall y. \varphi(y, x_1, \dots, x_n)$. Каждый x_i добавлен на каком-то шаге — максимум t . Если $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ бывает истинен и ложен при $y_t, y_f \in D$, то $y_t, y_f \in D_{t+1}$ (по построению).

\mathcal{M}' — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k + 1$ связкой.
 - 2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.
 - 2.2 $\tau \equiv \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$. Каждый x_i добавлен на каком-то шаге — максимум t . Если $\varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ бывает истинен и ложен при $u_t, u_f \in D$, то $u_t, u_f \in D_{t+1}$ (по построению). Поэтому, если $\mathcal{M} \not\models \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$, то и $\mathcal{M}' \not\models \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$.

\mathcal{M}' — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k + 1$ связкой.
 - 2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.
 - 2.2 $\tau \equiv \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$. Каждый x_i добавлен на каком-то шаге — максимум t . Если $\varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ бывает истинен и ложен при $u_t, u_f \in D$, то $u_t, u_f \in D_{t+1}$ (по построению). Поэтому, если $\mathcal{M} \not\models \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$, то и $\mathcal{M}' \not\models \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$. Если же $\varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ не меняется от u , то тем более $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$.

\mathcal{M}' — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k + 1$ связкой.
 - 2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.
 - 2.2 $\tau \equiv \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$. Каждый x_i добавлен на каком-то шаге — максимум t . Если $\varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ бывает истинен и ложен при $u_t, u_f \in D$, то $u_t, u_f \in D_{t+1}$ (по построению). Поэтому, если $\mathcal{M} \not\models \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$, то и $\mathcal{M}' \not\models \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$. Если же $\varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ не меняется от u , то тем более $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$.
 - 2.3 $\tau \equiv \exists u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ — аналогично.

«Парадокс» Сколема

1. Как известно, $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

«Парадокс» Сколема

1. Как известно, $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Однако, ZFC — теория со счётным количеством формул.

«Парадокс» Сколема

1. Как известно, $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Однако, ZFC — теория со счётным количеством формул. Значит, существует счётная модель ZFC, то есть $|\mathbb{R}| = \aleph_0$.

«Парадокс» Сколема

1. Как известно, $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Однако, ZFC — теория со счётным количеством формул. Значит, существует счётная модель ZFC, то есть $|\mathbb{R}| = \aleph_0$. В чём ошибка?

«Парадокс» Сколема

1. Как известно, $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Однако, ZFC — теория со счётным количеством формул. Значит, существует счётная модель ZFC, то есть $|\mathbb{R}| = \aleph_0$. В чём ошибка?
2. У равенств разный смысл, первое — в предметном языке, второе — в метаязыке.