

Алгебра Линденбаума

Теорема

Пусть $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \vdash \beta$ и $\beta \vdash \alpha$. Тогда (\approx) — отношение эквивалентности.

Доказательство.

Надо доказать, что для любых α, β, γ :

1. $\alpha \approx \alpha$ (очевидно, $\alpha \vdash \alpha$);
2. $\alpha \approx \beta$ влечёт $\beta \approx \alpha$ (очевидно из определения);
3. $\alpha \approx \beta$ и $\beta \approx \gamma$ влечёт $\alpha \approx \gamma$:
из посылок следует $\alpha \vdash \beta$ и $\beta \vdash \gamma$, соединив доказательства, получим $\alpha \vdash \gamma$.

L/\approx — частично-упорядоченное множество. Элементы будем обозначать $[\alpha]$. □

Теорема

$\alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $[\alpha] \leq [\beta]$.

\mathcal{L} — решётка.

Покажем $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \& \beta]$. То есть, $[\alpha \& \beta]$ — наибольшая нижняя грань α и β .

- ▶ (*... нижняя грань*) $[\alpha \& \beta] \leq [\alpha]$: заметим, что $\alpha \& \beta \vdash \alpha$.
- ▶ (*наибольшая ...*) Если $[\sigma] \leq [\alpha]$ и $[\sigma] \leq [\beta]$, то $[\sigma] \leq [\alpha \& \beta]$:

Рассмотрим вывод в контексте σ :

(1..a)	α	из $[\sigma] \leq [\alpha]$
(a + 1..b)	β	из $[\sigma] \leq [\beta]$
(b + 1)	$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \& \beta$	Сх. акс
(b + 2)	$\beta \rightarrow \alpha \& \beta$	М.Р. a, b + 1
(b + 3)	$\alpha \& \beta$	М.Р. b, b + 2

Отсюда $\sigma \vdash \alpha \& \beta$.

Утверждение $[\alpha] + [\beta] = [\alpha \vee \beta]$ показывается аналогично.

\mathcal{L} — импликативная решётка с 0, согласованная с ИИВ

- ▶ (импликативная ...) Покажем $[\alpha] \rightarrow [\beta] = [\alpha \rightarrow \beta]$:
в самом деле, $[\alpha] \rightarrow [\beta] = \text{наиб } \{[\sigma] \mid [\alpha \& \sigma] \leq [\beta]\}$.
Покажем требуемое двумя включениями:
 1. $\alpha \& (\alpha \rightarrow \beta) \vdash \beta$ (карринг + транзитивность импликации)
 2. Если $\alpha \& \sigma \vdash \beta$, то $\sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ (карринг + теорема о дедукции)
- ▶ (... с нулём ...) Покажем, что $0 = [A \& \neg A]$:
в самом деле, $A \& \neg A \vdash \sigma$ при любом σ .
- ▶ (... согласованная с ИИВ)
 1. Из доказательства видно, что $[\alpha \& \beta] = [\alpha] \cdot [\beta]$,
 $[\alpha \vee \beta] = [\alpha] + [\beta]$, $[\alpha \rightarrow \beta] = [\alpha] \rightarrow [\beta]$, $[A \& \neg A] = 0$.
 2. $[A \rightarrow A] = [A] \rightarrow [A] = 1$ по свойствам алгебры Гейтинга
 3. $[\neg \alpha] = [\alpha \rightarrow A \& \neg A] = [\alpha] \rightarrow 0 = \sim [\alpha]$

$\Gamma(\mathcal{L})$ — алгебра Гейтинга, согласованная с ИИВ.

Надо учитывать существование нового элемента ω .

Например, импликация/псевдодополнение:

$[\alpha] \rightarrow [\beta] = \text{наиб } \{s \mid [\alpha] \cdot s \leq [\beta]\}.$

- ▶ (... нижняя грань) $[\alpha] \cdot [\alpha \rightarrow \beta] \leq [\beta]$ — аналогично случаю для \mathcal{L}
- ▶ (наибольшая ...) Если $[\alpha] \cdot s \leq [\beta]$, то
 - ▶ $s = [\sigma]$, то есть $s \neq \omega$ — аналогично случаю для \mathcal{L} ;
 - ▶ $s = \omega$, тогда $[\alpha] \cdot \omega \leq [\beta]$. Но $[\alpha] \neq \omega$ — либо $[\alpha] < \omega$, либо $[\alpha] = 1$. В обоих случаях $[\alpha] \cdot 1 \leq [\beta]$. Отсюда s не наибольший.

Исчисление предикатов

Ограничения языка исчисления высказываний

Каждый человек смертен	Сократ есть человек
<hr/>	
Сократ смертен	

Цель: увеличить формализованную часть метаязыка.

Мы неформально знакомы с **предикатами** ($P : D \rightarrow V$) и **кванторами** ($\forall x. H(x) \rightarrow S(x)$).

$\forall x. H(x) \rightarrow S(x)$	$H(\text{Сократ})$
<hr/>	
$S(\text{Сократ})$	

Начнём с примера

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

1. Предметные (здесь: числовые) выражения
 - 1.1 Предметные переменные (x).
 - 1.2 Одно- и двухместные функциональные символы «синус», «возведение в квадрат» и «сложение».
 - 1.3 Нульместные функциональные символы «ноль» (0) и «один» (1).
2. Логические выражения
 - 2.1 Предикатные символы «равно» и «больше»

Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метAPEReменная θ .
 - ▶ Предметные переменные: a, b, c, \dots , метAPEReменные x, y .
 - ▶ Функциональные выражения: $f(\theta_1, \dots, \theta_n)$, метAPEReменные f, g, \dots
 - ▶ Примеры: $r, q(p(x, s), r)$.
3. Логические выражения: метAPEReменные $\alpha, \beta, \gamma, \dots$.
 - ▶ Предикатные выражения: $P(\theta_1, \dots, \theta_n)$, метAPEReменная P .
Имена: A, B, C, \dots
 - ▶ Связки: $(\varphi \vee \psi), (\varphi \& \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\neg \varphi)$.
 - ▶ Кванторы: $(\forall x. \varphi)$ и $(\exists x. \varphi)$.

Сокращения записи, метаязык

1. Метаварьиные:

- ▶ ψ, ϕ, π, \dots — формулы
- ▶ P, Q, \dots — предикатные символы
- ▶ θ, \dots — термы
- ▶ f, g, \dots — функциональные символы
- ▶ x, y, \dots — предметные переменные

2. Скобки — как в И.В.; квантор — жадный:

$$\underbrace{(\forall a. A \vee B \vee C \rightarrow \exists b. \underbrace{D \& \neg E}_{\exists b. \dots}) \& F}_{\forall a. \dots}$$

3. Дополнительные обозначения при необходимости:

- ▶ $(\theta_1 = \theta_2)$ вместо $E(\theta_1, \theta_2)$
- ▶ $(\theta_1 + \theta_2)$ вместо $p(\theta_1, \theta_2)$
- ▶ 0 вместо z
- ▶ \dots

Теория моделей: два типа значений

Напомним формулу:

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:

$$\forall x. E(f(x), z) \vee G(p(q(s(x)), o), o)$$

$$\forall x. \textcolor{blue}{E}(f(x), z) \vee \textcolor{blue}{G}(p(q(s(x)), o), o)$$

$$\forall x. \textcolor{blue}{E}(f(x), z) \vee \textcolor{blue}{G}(p(q(s(x)), o), o)$$

$$\forall \textcolor{red}{x}. \textcolor{blue}{E}(f(\textcolor{red}{x}), z) \vee \textcolor{blue}{G}(p(q(s(\textcolor{red}{x})), o), o)$$

$$\forall \textcolor{red}{x}. \textcolor{blue}{E}(\textcolor{red}{f}(\textcolor{red}{x}), \textcolor{red}{z}) \vee \textcolor{blue}{G}(\textcolor{red}{p}(\textcolor{red}{q}(\textcolor{red}{s}(\textcolor{red}{x})), \textcolor{red}{o}), \textcolor{red}{o})$$

1. Истинностные (логические) значения:

1.1 предикаты (в том числе пропозициональные переменные = нульместные предикаты);

1.2 логические связки и кванторы.

2. Предметные значения:

2.1 предметные переменные;

2.2 функциональные символы (в том числе константы = нульместные функциональные символы)

Оценка исчисления предикатов

Определение

Оценка — упорядоченная четвёрка $\langle D, F, P, E \rangle$, где:

1. D — предметное множество;
2. F — оценка для функциональных символов; пусть f_n — n -местный функциональный символ:

$$F_{f_n} : D^n \rightarrow D$$

3. P — оценка для предикатных символов; пусть T_n — n -местный предикатный символ:

$$P_{T_n} : D^n \rightarrow V \quad V = \{И, Л\}$$

4. E — оценка для предметных переменных.

$$E(x) \in D$$

Оценка формулы

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$\llbracket \phi \rrbracket \in V, \quad \llbracket Q(x, f(x)) \vee R \rrbracket^{x:=1, f(t):=t^2, R:=И} = И$$

1. Правила для связок \vee , $\&$, \neg , \rightarrow остаются прежние;
2. $\llbracket f_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \rrbracket = F_{f_n}(\llbracket \theta_1 \rrbracket, \llbracket \theta_2 \rrbracket, \dots, \llbracket \theta_n \rrbracket)$
3. $\llbracket P_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \rrbracket = P_{T_n}(\llbracket \theta_1 \rrbracket, \llbracket \theta_2 \rrbracket, \dots, \llbracket \theta_n \rrbracket)$
- 4.

$$\llbracket \forall x. \phi \rrbracket = \begin{cases} И, & \text{если } \llbracket \phi \rrbracket^{x:=t} = И \text{ при всех } t \in D \\ Л, & \text{если найдётся } t \in D, \text{ что } \llbracket \phi \rrbracket^{x:=t} = Л \end{cases}$$

5.

$$\llbracket \exists x. \phi \rrbracket = \begin{cases} И, & \text{если найдётся } t \in D, \text{ что } \llbracket \phi \rrbracket^{x:=t} = И \\ Л, & \text{если } \llbracket \phi \rrbracket^{x:=t} = Л \text{ при всех } t \in D \end{cases}$$

Пример (очевидная интерпретация)

Оценим:

$$\llbracket \forall a. \exists b. \neg a + 1 = b \rrbracket$$

Зададим оценку:

- ▶ $D := \mathbb{N}$;
- ▶ $F_1 := 1$, $F_{(+)}$ — сложение в \mathbb{N} ;
- ▶ $P_{(=)}$ — равенство в \mathbb{N} .

Фиксируем $a \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$\llbracket a + 1 = b \rrbracket^{b:=a} = \perp$$

поэтому при любом $a \in \mathbb{N}$:

$$\llbracket \exists b. \neg a + 1 = b \rrbracket = \top$$

Итого:

$$\llbracket \forall a. \exists b. \neg a + 1 = b \rrbracket = \top$$

Пример (странная интерпретация)

$$\llbracket \forall a. \exists b. \neg a + 1 = b \rrbracket$$

Зададим интерпретацию:

- ▶ $D := \{\square\};$
- ▶ $F_{(1)} := \square, F_{(+)}(a, b) := \square;$
- ▶ $P_{(=)}(a, b) := \text{И}.$

Тогда:

$$\llbracket a + 1 = b \rrbracket^{a \in D, b \in D} = \text{И}$$

Итого:

$$\llbracket \forall a. \exists b. \neg a + 1 = b \rrbracket = \text{Л}$$

Общезначимость

Определение

Формула исчисления предикатов общезначима, если истинна при любой оценке:

$$\models \phi$$

То есть истинна при любых D , F , P и E .

Пример: общезначимая формула

Теорема

$$\llbracket \forall x. Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x)) \rrbracket$$

Доказательство.

Фиксируем D, F, P, E . Пусть $x \in D$. Обозначим $P_Q(F_f(E_x))$ за t . Ясно, что $t \in V$. Разберём случаи.

- ▶ Если $t = \text{И}$, то $\llbracket Q(f(x)) \rrbracket^{Q(f(x)):=t} = \text{И}$, потому $\llbracket Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x)) \rrbracket^{Q(f(x)):=t} = \text{И}$
- ▶ Если $t = \text{Л}$, то $\llbracket \neg Q(f(x)) \rrbracket^{Q(f(x)):=t} = \text{И}$, потому всё равно $\llbracket Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x)) \rrbracket^{Q(f(x)):=t} = \text{И}$



Свободные вхождения

Определение

Вхождение подформулы в формулу — это позиция первого символа этой подформулы в формуле.

Вхождения x в формулу: $(\forall x.A(x) \vee \exists x.B(x)) \vee C(x)$

Определение

Рассмотрим формулу $\forall x.\psi$ (или $\exists x.\psi$). Здесь переменная x связана в ψ . Все вхождения переменной x в ψ — связанные.

Определение

Вхождение x в ψ свободное, если не находится в области действия никакого квантора по x . Переменная входит свободно в ψ , если имеет хотя бы одно свободное вхождение.

$FV(\psi), FV(\Gamma)$ — множества свободных переменных в ψ , в Γ

Пример

$\exists y.(\forall x.P(x)) \vee P(x) \vee Q(y)$

Подстановка, свобода для подстановки

$$\psi[x := \theta] := \begin{cases} \psi, & \psi \equiv y, y \neq x \\ \psi, & \psi \equiv \forall x.\pi \text{ или } \psi \equiv \exists x.\pi \\ \pi[x := \theta] \star \rho[x := \theta], & \psi \equiv \pi \star \rho \\ \theta, & \psi \equiv x \\ \forall y.\pi[x := \theta], & \psi \equiv \forall y.\pi \text{ и } y \neq x \\ \exists y.\pi[x := \theta], & \psi \equiv \exists y.\pi \text{ и } y \neq x \end{cases}$$

Определение

Терм θ свободен для подстановки вместо x в ψ ($\psi[x := \theta]$), если ни одно свободное вхождение переменных в θ не станет связанным после подстановки.

Свобода есть	Свободы нет
$(\forall x.P(y))[y := z]$	$(\forall x.P(y))[y := x]$
$(\forall y.\forall x.P(x))[x := y]$	$(\forall y.\forall x.P(t))[t := y]$

Теория доказательств

Рассмотрим язык исчисления предикатов. Возьмём все схемы аксиом классического исчисления высказываний и добавим ещё две схемы аксиом (здесь везде θ свободен для подстановки вместо x в φ):

$$11. \quad (\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta]$$

$$12. \quad \varphi[x := \theta] \rightarrow \exists x.\varphi$$

Добавим ещё два правила вывода (здесь везде x не входит свободно в φ):

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \forall x.\psi} \quad \text{Правило для } \forall$$

$$\frac{\psi \rightarrow \varphi}{(\exists x.\psi) \rightarrow \varphi} \quad \text{Правило для } \exists$$

Определение

Доказуемость, выводимость, полнота, корректность — аналогично исчислению высказываний.

Важность ограничений на схемы аксиом и правила вывода

- ▶ Рассмотрим формулу
 $(\forall x. \exists y. \neg x = y) \rightarrow ((\exists y. \neg x = y)[x := y])$
- ▶ Соответствует 11 схеме

$$(\forall x. \varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta] \quad \varphi \equiv \exists y. \neg x = y \quad \theta \equiv y$$

- ▶ Но нарушается свобода для подстановки

$$(\exists y. \neg x = y)[x := y] \equiv (\exists y. \neg y = y)$$

- ▶ Пусть $D = \mathbb{N}$ и $(=)$ есть равенство на \mathbb{N} . Тогда

$$\llbracket \exists y. \neg x = y \rrbracket = \text{И} \quad \llbracket (\exists y. \neg x = y)[x := y] \rrbracket = \text{Л}$$

- ▶ $\not\models (\forall x. \exists y. \neg x = y) \rightarrow ((\exists y. \neg x = y)[x := y])$

Теорема о дедукции для исчисления предикатов

Теорема

Если $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, то $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. Если $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из α , то $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

Доказательство.

(\Rightarrow) — как в КИВ (\Leftarrow) — та же схема, два новых случая.

Перестроим: $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \equiv \beta$ в $\alpha \rightarrow \delta_1, \alpha \rightarrow \delta_2, \dots, \alpha \rightarrow \delta_n$.

Дополним: обоснуем $\alpha \rightarrow \delta_n$, если предыдущие уже обоснованы.

Два новых похожих случая: правила для \forall и \exists . Рассмотрим \forall .

Доказываем $(n) \alpha \rightarrow \psi \rightarrow \forall x.\varphi$ (правило для \forall), значит, доказано $(k) \alpha \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$.

$(n - 0.9) \dots (n - 0.8) \quad (\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\alpha \& \psi) \rightarrow \varphi$

$(n - 0.6) \quad (\alpha \& \psi) \rightarrow \varphi$

$(n - 0.4) \quad (\alpha \& \psi) \rightarrow \forall x.\varphi$

$(n - 0.3) \dots (n - 0.2) \quad ((\alpha \& \psi) \rightarrow \forall x.\varphi) \rightarrow (\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \forall x.\varphi)$

$(n) \quad \alpha \rightarrow \psi \rightarrow \forall x.\varphi$

Т. о п

М.Р.

Прави

Т. о п

М.Р.

Следование

Определение

$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \models \alpha$, если выполнено два условия:

1. α выполнено всегда, когда выполнено $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$;
2. α не использует кванторов по переменным, входящим свободно в $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$.

Теорема

Если $\Gamma \vdash \alpha$ и в доказательстве не используются кванторы по свободным переменным из Γ , то $\Gamma \models \alpha$

Важность второго условия

Пример

Покажем, что $\Gamma \models \alpha$ ведёт себя неестественно, если в α используются кванторы по переменным, входящим свободно в Γ .

Легко показать, что $P(x) \vdash \forall x.P(x)$.

- | | | |
|-----|---|---------------------------|
| (1) | $P(x)$ | Гипотеза |
| (2) | $P(x) \rightarrow (A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow P(x)$ | Сх. акс. 1 |
| (3) | $(A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow P(x)$ | М.Р. 1, 2 |
| (4) | $(A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow \forall x.P(x)$ | Правило для \forall , 3 |
| (5) | $(A \rightarrow A \rightarrow A)$ | Сх. акс. 1 |
| (6) | $\forall x.P(x)$ | М.Р. 5, 4 |

Пусть $D = \mathbb{Z}$ и $P(x) = x > 0$. Тогда не будет выполнено $P(x) \models \forall x.P(x)$.

Корректность

Теорема

Если θ свободен для подстановки вместо x в φ , то

$$\llbracket \varphi \rrbracket^{x := \llbracket \theta \rrbracket} = \llbracket \varphi[x := \theta] \rrbracket$$

Доказательство (индукция по структуре φ).

- ▶ База: φ не имеет кванторов. Очевидно.
- ▶ Переход: пусть справедливо для ψ . Покажем для $\varphi = \forall u. \psi$.

- ▶ $x = u$ либо $x \notin FV(\psi)$. Тогда:

$$\llbracket \forall u. \psi \rrbracket^{x := \llbracket \theta \rrbracket} = \llbracket \forall u. \psi \rrbracket = \llbracket (\forall u. \psi)[x := \theta] \rrbracket$$

- ▶ $x \neq u$. Тогда: $\llbracket \forall u. \psi \rrbracket^{x := \llbracket \theta \rrbracket} = \llbracket \psi \rrbracket^{y \in D; x := \llbracket \theta \rrbracket} = \dots$

Свобода для подстановки: $y \notin \theta$.

$$\dots = \llbracket \psi \rrbracket^{x := \llbracket \theta \rrbracket; y \in D} = \dots$$

Индукционное предположение.

$$\dots = \llbracket \psi[x := \theta] \rrbracket^{y \in D} = \llbracket \forall u. (\psi[x := \theta]) \rrbracket = \dots$$

Но $\forall u. (\psi[x := \theta]) \equiv (\forall u. \psi)[x := \theta]$ (как текст). Отсюда:

$$\dots = \llbracket (\forall u. \psi)[x := \theta] \rrbracket$$

Корректность

Теорема

Если $\Gamma \vdash \alpha$ и в доказательстве не используются кванторы по свободным переменным из $FV(\Gamma)$, то $\Gamma \models \alpha$

Доказательство.

Фиксируем D, F, P . Индукция по длине доказательства α : при любом E выполнено $\Gamma \models \alpha$ при длине доказательства n , покажем для $n + 1$.

- ▶ Схемы аксиом (1)..(10), правило M.P.: аналогично И.В.
- ▶ Схемы (11) и (12), например, схема $(\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta]$:

$$\llbracket (\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta] \rrbracket = \llbracket ((\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi)[x := \theta] \rrbracket = \llbracket ((\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi) \rrbracket^{x:=\theta}$$

- ▶ Правила для кванторов: например, введение \forall :
Пусть $\llbracket \psi \rightarrow \varphi \rrbracket = \text{И}$. Причём $x \notin FV(\Gamma)$ и $x \notin FV(\psi)$. То есть, при любом x выполнено $\llbracket \psi \rightarrow \varphi \rrbracket^{x:=x} = \text{И}$. Тогда $\llbracket \psi \rightarrow (\forall x.\varphi) \rrbracket = \text{И}$.

