Теоремы об интуиционистском исчислении высказываний

Общие результаты об исчислениях высказываний

	К.И.В.	И.И.В. + алгебры Гейтинга	ИИВ + Кл.
корректность	да (лекция 1)	да (ДЗ III.10)	+
непротиворечивость	да (очев.)	да (из непр. КИВ)	+
полнота	да (лекция 2)	да	−
разрешимость	да (лекция 2)	да	

Алгебра Линденбаума

$A \to A \vdash B \to B$

Определение

Определим предпорядок на высказываниях: $\alpha \preceq \beta := \alpha \vdash \beta$ *в интуиционистском исчислении высказываний. Также* $\alpha \approx \beta$, *если* $\alpha \preceq \beta$ *и* $\beta \preceq \alpha$.

Определение

Пусть L *— множество всех высказываний. Тогда алгебра Линденбаума* $\mathcal{L} = L/_{\approx}$.

Антисимм:

$a \le b \;\&\; b \le a \Rightarrow a = b$

Теорема

$\mathcal{L}$ *— псевдобулева алгебра.*

Схема доказательства.

Надо показать, что $(\preceq)$ есть отношение порядка на $\mathcal{L}$, что $[\alpha \vee \beta]_{\mathcal{L}} = [\alpha]_{\mathcal{L}} + [\beta]_{\mathcal{L}}$, $[\alpha \,\&\, \beta]_{\mathcal{L}} = [\alpha]_{\mathcal{L}} \cdot [\beta]_{\mathcal{L}}$, импликация есть псевдодополнение, $[A \,\&\, \neg A]_{\mathcal{L}} = 0$, $[\alpha]_{\mathcal{L}} \to 0 = [\neg\alpha]_{\mathcal{L}}$. $\square$

Полнота псевдобулевых алгебр

$[\![\alpha]\!] \le 1$

$\exists \alpha \equiv A \to A \qquad \alpha \vdash Q \qquad Q \in \underline{1}$

Теорема

Пусть $[\![\alpha]\!] = [\alpha]_{\mathcal{L}}$. Такая оценка интуиционистского исчисления высказываний алгеброй Линденбаума является согласованной.

Теорема

Интуиционистское исчисление высказываний полно в псевдобулевых алгебрах: если $\models \alpha$ во всех псевдобулевых алгебрах, то $\vdash \alpha$.

Доказательство.

Возьмём в качестве модели исчисления алгебру Линденбаума: $[\![\alpha]\!] = [\alpha]_{\mathcal{L}}$. Пусть $\models \alpha$. Тогда $[\![\alpha]\!] = 1$ во всех псевдобулевых алгебрах, в том числе и $[\![\alpha]\!] = 1_{\mathcal{L}}$. То есть $[\alpha]_{\mathcal{L}} = [A \to A]_{\mathcal{L}}$. То есть $A \to A \approx \alpha$. Значит, в частности, $\underline{A \to A \vdash \alpha}$. Значит, $\vdash \alpha$. $\square$

Модели Крипке

ИчА

Определение

Модель Крипке $\langle \mathcal{W}, \preceq, (\Vdash) \rangle$*:*

Шкала

- $\mathcal{W}$ *— множество миров,* $(\preceq)$ *— нестрогий частичный порядок на* $\mathcal{W}$*;*
- $(\Vdash) \subseteq \mathcal{W} \times P$ *— отношение вынуждения между мирами и переменными, причём, если* $W_i \preceq W_j$ *и* $W_i \Vdash X$*, то* $W_j \Vdash X$*.*

Доопределим вынужденность:

- $W \Vdash \alpha \,\&\, \beta$, если $W \Vdash \alpha$ и $W \Vdash \beta$;
- $W \Vdash \alpha \vee \beta$, если $W \Vdash \alpha$ или $W \Vdash \beta$;
- $W \Vdash \alpha \rightarrow \beta$, если всегда при $W \preceq W_1$ и $W_1 \Vdash \alpha$ выполнено $W_1 \Vdash \beta$
- $W \Vdash \neg\alpha$, если всегда при $W \preceq W_1$ выполнено $W_1 \not\Vdash \alpha$.

Будем говорить, что $\Vdash \alpha$, если $W \Vdash \alpha$ при всех $W \in \mathcal{W}$. Будем говорить, что $\models_{K} \alpha$, если $\Vdash \alpha$ во всех моделях Крипке.

Исключённое третье

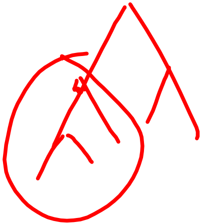
Пример

Покажем, что $\not\models_{K} A \vee \neg A$.

$$\begin{tikzcd} & W_2\ (\Vdash A) \\ W_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & W_3 \quad \neg A \end{tikzcd}$$

Тогда, $W_3 \Vdash \neg A$, *но* $W_1 \nVdash A$ *(по определению) и* $W_1 \nVdash \neg A$ *(так как* $W_1 \preceq W_2$ *и* $W_2 \Vdash A$*). Значит,* $W_1 \nVdash A \vee \neg A$.

Корректность моделей Крипке



Лемма

Если $W_1 \Vdash \alpha$ *и* $W_1 \preceq W_2$, *то* $W_2 \Vdash \alpha$

Теорема

Пусть $\langle \mathcal{W}, (\preceq), (\Vdash) \rangle$ *— некоторая модель Крипке. Тогда она есть корректная модель интуиционистского исчисления высказываний.*

Доказательство.

Доказательство для древовидного $(\preceq)$, обобщение на произвольный порядок легко построить.
Заметим, что $V(\alpha) := \{w \in \mathcal{W} \mid w \Vdash \alpha\}$ открыто в топологии для деревьев.
Значит, положив $V = \{\ S \mid S \subseteq \mathcal{W} \ \ \& \ \ S$ — открыто $\}$ и $[\![\alpha]\!] = V(\alpha)$, получим алгебру Гейтинга. $\square$

Табличные модели

$f_\neg$

¬	¬A
И	Л
Л	И

Определение

Пусть задано V, значение $T \in V$ («истина»), функция $f_P : P \to V$, функции $f_\&, f_\vee, f_\to : V \times V \to V$, функция $f_\neg : V \to V$.
Тогда оценка $[\![X]\!] = f_P(X)$, $[\![\alpha \star \beta]\!] = f_\star([\![\alpha]\!], [\![\beta]\!])$, $[\![\neg\alpha]\!] = f_\neg([\![\alpha]\!])$ — табличная.
Если $\vdash \alpha$ влечёт $[\![\alpha]\!] = T$ при всех оценках пропозициональных переменных f_P, то $\mathcal{M} := \langle V, T, f_\&, f_\vee, f_\to, f_\neg \rangle$ — табличная модель.

Определение

Табличная модель конечна, если V конечно.

Теорема

Не существует полной конечной табличной модели для интуиционистского исчисления высказываний

Доказательство нетабличности: α_n

Пусть существует полная конечная табличная модель $\mathcal{M}$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. То есть, если $\models_{\mathcal{M}} \alpha$, то $\vdash \alpha$.
Рассмотрим

$$\alpha_n = \bigvee_{1 \le p < q \le n+1} A_p \to A_q$$

$(A_1 \to A_2) \vee (A_1 \to A_3) \vee (A_2 \to A_3)$

Рассмотрим оценку $f_P : \{A_1 \dots A_{n+1}\} \to \{v_1 \dots v_n\}$. По принципу Дирихле существуют $p \neq q$, что $[\![A_p]\!] = [\![A_q]\!]$. Значит,

$$[\![A_p \to A_q]\!] = f_\to([\![A_p]\!], [\![A_q]\!]) = f_\to(v, v)$$

С другой стороны, $\vdash X \to X$ — поэтому $f_\to([\![X]\!], [\![X]\!]) = T$, значит,

$$[\![A_p \to A_q]\!] = f_\to(v, v) = f_\to([\![X]\!], [\![X]\!]) = T$$

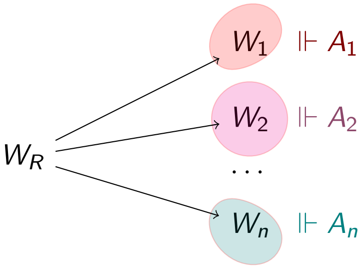
Аналогично, $\vdash \sigma \vee (X \to X) \vee \tau$, отсюда $[\![\alpha_n]\!] = [\![\sigma \vee (X \to X) \vee \tau]\!] = T$.

Доказательство нетабличности: противоречие

$A_n \to S$

$\bigvee A_p \to A_q \qquad p < q$

Однако, в такой модели $\not\Vdash \alpha_n$:



Если $q > 1$, то $W_1 \not\Vdash A_q$ и $W_1 \not\Vdash A_1 \to A_q$

Если $q > 2$, то $W_2 \not\Vdash A_q$ и $W_2 \not\Vdash A_2 \to A_q$

$W_n \not\Vdash A_{n+1}$; $W_n \not\Vdash A_n \to A_{n+1}$

Если $p < q$, то $W_p \not\Vdash A_q$ и $W_p \not\Vdash A_p \to A_q$

Если $p < q$, то $W_p \not\Vdash A_p \to A_q$, то есть $W_R \not\Vdash A_p \to A_q$.
Отсюда: $W_R \not\Vdash \bigvee_{p<q} A_p \to A_q$, $W_R \not\Vdash \alpha_n$, потому $\not\models \alpha_n$ и $\not\vdash \alpha_n$.

Дизъюнктивность ИИВ

Определение

Исчисление дизъюнктивно, если при любых α *и* β *из* $\vdash \alpha \vee \beta$ *следует* $\vdash \alpha$ *или* $\vdash \beta$.

Определение

Решётка гёделева, если $a + b = 1$ *влечёт* $a = 1$ *или* $b = 1$.

Теорема

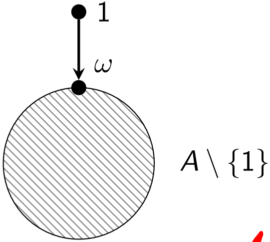
Интуиционистское исчисление высказываний дизъюнктивно

«Гёделевизация» (операция $\Gamma(\mathcal{A})$)

Определение

Для алгебры Гейтинга $\mathcal{A} = \langle A, (\preceq)\rangle$ *определим операцию «гёделевизации»:* $\Gamma(\mathcal{A}) = \langle A \cup \{\omega\}, (\preceq_{\Gamma(\mathcal{A})})\rangle$, *где отношение* $(\preceq_{\Gamma(\mathcal{A})})$ — *минимальное отношение порядка, удовлетворяющее условиям:*

- $a \preceq_{\Gamma(\mathcal{A})} b$, *если* $a \preceq_{\mathcal{A}} b$ *и* $a, b \notin \{\omega, 1\}$;
- $a \preceq_{\Gamma(\mathcal{A})} \omega$, *если* $a \neq 1$;
- $\omega \preceq_{\Gamma(\mathcal{A})} 1$



$\omega \in$ В.Г.$\{a\ b\}$

Теорема

$\Gamma(\mathcal{A})$ — *гёделева алгебра.*

Доказательство.

Проверка определения алгебры Гейтинга и наблюдение: если $a \preceq \omega$ и $b \preceq \omega$, то $a + b \preceq \omega$. $\square$

Оценка $\Gamma(\mathcal{L})$

Теорема

Рассмотрим оценку $\llbracket\alpha\rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = \llbracket\alpha\rrbracket_{\mathcal{L}}$. *Тогда она является согласованной с ИИВ.*

Индукция по структуре формулы и перебор операций. Рассмотрим $(\&)$.
Неформально: почти везде $\llbracket\alpha\rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} \cdot \llbracket\beta\rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = \llbracket\alpha\rrbracket_{\mathcal{L}} \cdot \llbracket\beta\rrbracket_{\mathcal{L}}$, поскольку $\llbracket\sigma\rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} \neq \omega$,

... но нет ли случаев, когда
$\omega = \text{наиб}\{x \mid x \preceq \llbracket\alpha\rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} \mathbin{\&} x \preceq \llbracket\beta\rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})}\}$?

$$\begin{tikzcd}
\llbracket\alpha\rrbracket \arrow[dr] \arrow[ddr] & & \llbracket\beta\rrbracket \arrow[dl] \arrow[ddl] \\
& \omega \arrow[d] & \\
& \llbracket\alpha \mathbin{\&} \beta\rrbracket &
\end{tikzcd}$$

Чтобы убедиться, что всегда $\llbracket\alpha \mathbin{\&} \beta\rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = \llbracket\alpha\rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} \cdot \llbracket\beta\rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})}$, надо показать:

- $[\alpha \mathbin{\&} \beta]$ — из множества нижних граней: $\alpha \mathbin{\&} \beta \vdash \alpha$ и $\alpha \mathbin{\&} \beta \vdash \beta$;
- $[\alpha \mathbin{\&} \beta]$ — наибольшая нижняя грань: $x \preceq [\alpha]$ и $x \preceq [\beta]$ влечёт $x \preceq [\alpha \mathbin{\&} \beta]$
  Разбор случаев ($x \in \mathcal{L}$, $x = \omega$). $\omega \preceq [\alpha]$ и $\omega \preceq [\beta]$ влечёт $[\alpha] = [\beta] = 1$, отсюда
  $[\alpha \mathbin{\&} \beta] = [\alpha] \cdot [\beta] = 1$

Гомоморфизм алгебр

Определение

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ *— алгебры Гейтинга. Тогда* $g : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *— гомоморфизм, если* $g(a \star b) = g(a) \star g(b)$, $g(0_{\mathcal{A}}) = 0_{\mathcal{B}}$ *и* $g(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$.

Определение

Будем говорить, что оценка $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{A}}$ *согласована с* $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{B}}$ *и гомоморфизмом* g*, если* $g(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ *и* $g([\![\alpha]\!]_{\mathcal{A}}) = [\![\alpha]\!]_{\mathcal{B}}$.

Доказательство дизъюнктивности ИИВ

Определение ($\mathcal{G} : \Gamma(\mathcal{L}) \to \mathcal{L}$)

$$\mathcal{G}(a) = \begin{cases} a, & a \neq \omega \\ 1, & a = \omega \end{cases}$$

Лемма

$\mathcal{G}$ — гомоморфизм $\Gamma(\mathcal{L})$ и $\mathcal{L}$, причём оценка $[\![\cdot]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})}$ согласована с $\mathcal{G}$ и $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{L}}$.

Теорема

Если $\vdash \alpha \vee \beta$, то либо $\vdash \alpha$, либо $\vdash \beta$.

Доказательство.

Пусть $\vdash \alpha \vee \beta$. Тогда $[\![\alpha \vee \beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$ (так как данная оценка согласована с ИИВ).
Тогда $[\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$ или $[\![\beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$ (так как $\Gamma(\mathcal{L})$ гёделева).
Пусть $[\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$, тогда $\mathcal{G}([\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})}) = [\![\alpha]\!]_{\mathcal{L}} = 1$, тогда $\vdash \alpha$ (по полноте $\mathcal{L}$). $\square$

Построение дистрибутивных подрешёток

Определение

Решётка $\mathcal{L}' = \langle L', \preceq \rangle$ *— подрешётка решётки* $\mathcal{L} = \langle L, \preceq \rangle$, *если* $L' \subseteq L$, $(\preceq') \subseteq (\preceq)$ *и при* $a, b \in L'$ *выполнено* $a +_{\mathcal{L}'} b = a +_{\mathcal{L}} b$ *и* $a \cdot_{\mathcal{L}'} b = a \cdot_{\mathcal{L}} b$.

Лемма

Существует дистрибутивная подрешётка $\mathcal{L}'$, *содержащая* $a_1, \ldots, a_n$, *что* $|L'| \leq 2^{2^n}$.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{L}' = \langle \{\varphi(a_1, \ldots, a_n) \mid \varphi \text{ составлено из } (+) \text{ и } (\cdot)\}, (\preceq) \rangle$. Заметим, что если $p, q \in L'$, то $p \star_{\mathcal{L}} q \in L'$ (так как $\varphi_p(\overrightarrow{a}) \star \varphi_q(\overrightarrow{a}) = \psi(\overrightarrow{a})$). Также ясно, что если $\sup_L\{p, q\} \in L'$ (или $\inf_L\{p, q\} \in L'$), то $p \star_{\mathcal{L}} q = p \star_{\mathcal{L}'} q$. Значит, $\mathcal{L}'$ также дистрибутивна. Построим «ДНФ»:

$$\varphi(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{\text{Кн} \in \text{ДНФ}(\varphi)} \prod_{i \in \text{Кн}} a_i$$

$(a_1 \cdot a_3 \cdot a_7)$

Всего не больше 2^n возможных компонент и 2^{2^n} возможных формул $\varphi(\overrightarrow{a})$. $\square$

Разрешимость ИИВ

Теорема

Если $\not\vdash \alpha$ *в ИИВ, то существует* $\mathcal{G}$*, что* $\mathcal{G} \not\models \alpha$*, причём* $|\mathcal{G}| \le 2^{2^{|\alpha|+2}}$.

Доказательство.

$[\![\alpha]\!] \neq 1$

Если $\not\vdash \alpha$, то по полноте найдётся алгебра Гейтинга $\mathcal{H}$, что $\mathcal{H} \not\models \alpha$.
Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — подформулы α. Пусть $\mathcal{G}$ — дистрибутивная подрешётка $\mathcal{H}$, построенная по $[\![\varphi_1]\!], \dots, [\![\varphi_n]\!]$, 0 и 1.
Очевидно, что $\mathcal{G}$ — алгебра Гейтинга, и можно показать, что $\mathcal{G} \not\models \alpha$ (псевдодополнения не обязаны сохраниться). Тогда по лемме, $|\mathcal{G}| \le 2^{2^{n+2}}$. □

Теорема

ИИВ разрешимо.

Доказательство.

По формуле α построим все возможные алгебры Гейтинга $\mathcal{G}$ размера не больше $2^{2^{|\alpha|+2}}$, если $\mathcal{G} \models \alpha$, то $\vdash \alpha$. □