

Теоремы об исчислении высказываний.

Напоминание: истинность

- ▶ Если α истинна при любой оценке переменных, то α общезначима:

$$\models \alpha$$

- ▶ Если α истинна при любой оценке переменных, при которой истинны высказывания $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, будем говорить, что α — *следствие* этих высказываний:

$$\gamma_1, \dots, \gamma_n \models \alpha$$

- ▶ Истинна при какой-нибудь оценке — *выполнима*.
- ▶ Не истинна ни при какой оценке — *невыполнима*.
- ▶ Не истинна при какой-нибудь оценке — *опровержима*.

Выводимость из гипотез

Определение (доказательство формулы α)

— такое доказательство (вывод) $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, что $\alpha \equiv \delta_n$.

Формула α доказуема (выводима), если существует её доказательство. Обозначение:

$$\vdash \alpha$$

Определение (вывод формулы α из гипотез $\gamma_1, \dots, \gamma_k$)

— такая последовательность $\delta_1, \dots, \delta_n$, причём каждое δ_i либо:

- ▶ является аксиомой;
- ▶ либо получается по правилу *Modus Ponens* из предыдущих;
- ▶ либо является одной из гипотез: существует $t : \delta_i \equiv \gamma_t$.

Формула α выводима из гипотез $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, если существует её вывод. Обозначение:

$$\gamma_1, \dots, \gamma_k \vdash \alpha$$

Корректность и полнота

Определение (корректность теории)

Теория корректна, если любое доказуемое в ней утверждение общезначимо. То есть, $\vdash \alpha$ влечёт $\models \alpha$.

Определение (полнота теории)

Теория семантически полна, если любое общезначимое в ней утверждение доказуемо. То есть, $\models \alpha$ влечёт $\vdash \alpha$.

Корректность исчисления высказываний

Теорема (корректность)

Если $\vdash \alpha$, то $\models \alpha$

Доказательство.

Индукция по длине вывода n .

- ▶ База, $n = 1$ — частный случай перехода (без правила Modus Ponens)
- ▶ Переход. Пусть для любого доказательства длины n формула δ_n общезначима. Тогда рассмотрим обоснование δ_{n+1} и разберём случаи:
 1. Аксиома — убедиться, что все аксиомы общезначимы.
 2. Modus Ponens j, k — убедиться, что если $\models \delta_j$ и $\models \delta_j \rightarrow \delta_{n+1}$, то $\models \delta_{n+1}$.



Общезначимость схемы аксиом №9

Общезначимость схемы аксиом — истинность каждой аксиомы, задаваемой данной схемой, при любой оценке:

$$\llbracket (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha \rrbracket = \text{И}$$

Построим таблицу истинности формулы в зависимости от оценки α и β :

$\llbracket \alpha \rrbracket$	$\llbracket \beta \rrbracket$	$\llbracket \neg\alpha \rrbracket$	$\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket$	$\llbracket \alpha \rightarrow \neg\beta \rrbracket$	$\llbracket (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha \rrbracket$	$\llbracket (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha \rrbracket$
Л	Л	И	И	И	И	И
Л	И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	Л	И
И	И	Л	И	Л	И	И

Общезначимость заключения правила Modus Ponens

Пусть в выводе есть формулы δ_j , $\delta_k \equiv \delta_j \rightarrow \delta_{n+1}$, δ_{n+1} (причём $j < n + 1$ и $k < n + 1$).

Фиксируем какую-нибудь оценку. По индукционному предположению, δ_j и $\delta_j \rightarrow \delta_{n+1}$ общезначимы. Поэтому при данной оценке $\llbracket \delta_j \rrbracket \equiv \text{И}$ и $\llbracket \delta_j \rightarrow \delta_{n+1} \rrbracket \equiv \text{И}$.

Построим таблицу истинности для импликации:

$\llbracket \delta_j \rrbracket$	$\llbracket \delta_{n+1} \rrbracket$	$\llbracket \delta_j \rightarrow \delta_{n+1} \rrbracket$
Л	Л	И
Л	И	И
И	Л	Л
И	И	И

Из таблицы видно, что $\llbracket \delta_{n+1} \rrbracket = \text{Л}$ только если $\llbracket \delta_j \rightarrow \delta_{n+1} \rrbracket = \text{Л}$ или $\llbracket \delta_j \rrbracket = \text{Л}$. Значит, это невозможно, и $\llbracket \delta_{n+1} \rrbracket = \text{И}$

Контекст, метаязык

Будем обозначать большими греческими буквами середины алфавита, возможно с индексами, $(\Gamma, \Delta_1, \dots)$ списки формул. Будем использовать, где удобно:

$$\Gamma \vdash \alpha$$

Списки можно указывать через запятую:

$$\Gamma, \Delta, \zeta \vdash \alpha$$

это означает то же, что и

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, \zeta \vdash \alpha$$

если

$$\Gamma := \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}, \quad \Delta := \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$$

Теорема о дедукции

Theorem (О дедукции, Жак Эрбран, 1930)

$\Gamma, \alpha \vdash \beta$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено
 $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Доказательство «в две стороны», сперва «справа налево».
Пусть $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, покажем $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

То есть по условию существует вывод:

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \alpha \rightarrow \beta$$

Тогда следующая последовательность — тоже вывод:

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \alpha \rightarrow \beta, \alpha, \beta$$

Доказательство: $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ влечёт $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

№ п/п	формула	пояснение
(1)	δ_1	в соответствии с исходным доказательством
	\dots	
$(n-1)$	δ_{n-1}	в соответствии с исходным доказательством
(n)	$\alpha \rightarrow \beta$	в соответствии с исходным доказательством
$(n+1)$	α	гипотеза
$(n+2)$	β	Modus Ponens $n+1, n$

Вывод $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ предоставлен, первая часть теоремы доказана.

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Пусть даны формулы вывода

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \beta$$

Аналогично предыдущему пункту, перестроим вывод.

Построим «черновик» вывода, приписав α слева к каждой формуле:

$$\alpha \rightarrow \delta_1, \alpha \rightarrow \delta_2, \dots, \alpha \rightarrow \delta_{n-1}, \alpha \rightarrow \beta$$

Данная последовательность формул не обязательно вывод:

$$\Gamma := \emptyset, \alpha := A$$

$$\delta_1 := A \rightarrow B \rightarrow A$$

припишем A слева — вывод не получим:

$$\alpha \rightarrow \delta_1 \equiv A \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow A)$$

Последовательности, странная нумерация

Определение (конечная последовательность)

Функция $\delta : 1 \dots n \rightarrow \mathcal{F}$

Определение (конечная последовательность, индексированная дробными числами)

Функция $\zeta : I \rightarrow \mathcal{F}$, где $I \subset \mathbb{Q}$ и $|I| \in \mathbb{N}$

Пример (странный мотивационный пример: язык Фокал)

Программа		Вывод	
10.1	t n,!	=	0.0000
10.15	s n = n+1	=	1.0000
10.17	i (n-3) 10.1,11.0,11.0	=	2.0000
11.0	t "That's all"	That's all	

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Доказательство.

(индукция по длине вывода). Если $\delta_1, \dots, \delta_n$ — вывод $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, то найдётся вывод ζ_k для $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, причём $\zeta_1 \equiv \alpha \rightarrow \delta_1, \dots, \zeta_n \equiv \alpha \rightarrow \delta_n$.

- ▶ База ($n = 1$): частный случай перехода (без М.Р.).
- ▶ Переход. Пусть $\delta_1, \dots, \delta_{n+1}$ — исходный вывод. И пусть (по индукционному предположению) уже по начальному фрагменту $\delta_1, \dots, \delta_n$ построен вывод ζ_k утверждения $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \delta_n$.

Но δ_{n+1} как-то был обоснован — разберём случаи:

1. δ_{n+1} — аксиома или $\delta_{n+1} \in \Gamma$
2. $\delta_{n+1} \equiv \alpha$
3. δ_{n+1} — Modus Ponens из δ_j и $\delta_k \equiv \delta_j \rightarrow \delta_{n+1}$.

В каждом из случаев можно дополнить черновик до полноценного вывода.



Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, случай аксиомы

№ п/п	новый вывод	пояснение
	...	
(1)	$\alpha \rightarrow \delta_1$	
	...	
(2)	$\alpha \rightarrow \delta_2$	
	...	
(n)	$\alpha \rightarrow \delta_n$	
	$\alpha \rightarrow \delta_{n+1}$	δ_{n+1} — аксиома, либо $\delta_{n+1} \in \Gamma$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, случай аксиомы

№ п/п	новый вывод	пояснение
	...	
(1)	$\alpha \rightarrow \delta_1$	
	...	
(2)	$\alpha \rightarrow \delta_2$	
	...	
$(n + 0.3)$	$\delta_{n+1} \rightarrow \alpha \rightarrow \delta_{n+1}$	схема аксиом 1
$(n + 0.6)$	δ_{n+1}	аксиома, либо $\delta_{n+1} \in \Gamma$
$(n + 1)$	$\alpha \rightarrow \delta_{n+1}$	M.P. $n + 0.6, n + 0.3$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, случай $\delta_i \equiv \alpha$

№ п/п	НОВЫЙ ВЫВОД	ПОЯС
	...	
(1)	$\alpha \rightarrow \delta_1$	
	...	
(2)	$\alpha \rightarrow \delta_2$	
	...	
(n + 0.2)	$\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$	Сх. а
(n + 0.4)	$(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$	Сх. а
(n + 0.6)	$(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$	М.Р.
(n + 0.8)	$\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$	Сх. а
(n + 1)	$\alpha \rightarrow \alpha$	М.Р.

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, случай
Modus Ponens

№ п/п	НОВЫЙ ВЫВОД	ПОЯСНЕНИЕ
	...	
(1)	$\alpha \rightarrow \delta_1$	
	...	
(2)	$\alpha \rightarrow \delta_2$	
	...	
(j)	$\alpha \rightarrow \delta_j$	
	...	
(k)	$\alpha \rightarrow \delta_j \rightarrow \delta_{n+1}$	
	...	
(n + 0.3)	$(\alpha \rightarrow \delta_j) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta_j \rightarrow \delta_{n+1}) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta_{n+1})$	Сх. акс. 2
(n + 0.6)	$(\alpha \rightarrow \delta_j \rightarrow \delta_{n+1}) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta_{n+1})$	М.Р. j, n + 0.3
(n + 1)	$\alpha \rightarrow \delta_{n+1}$	М.Р. k, n + 0.6

Некоторые полезные правила

Лемма (Правило контрапозиции)

Каковы бы ни были формулы α и β , справедливо, что $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$.

Лемма (правило исключённого третьего)

Какова бы ни была формула α , $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$.

Лемма (об исключении допущения)

Пусть справедливо $\Gamma, \rho \vdash \alpha$ и $\Gamma, \neg\rho \vdash \alpha$. Тогда также справедливо $\Gamma \vdash \alpha$.

Доказательство.

Доказывается с использованием лемм, указанных выше.



Теорема о полноте исчисления высказываний

Теорема

Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$.

Специальное обозначение

Определение (условное отрицание)

Зададим некоторую оценку переменных, такую, что $\llbracket \alpha \rrbracket = x$. Тогда условным отрицанием формулы α назовём следующую формулу $\langle \alpha \rangle$:

$$\langle \alpha \rangle = \begin{cases} \alpha, & x = \text{И} \\ \neg \alpha, & x = \text{Л} \end{cases}$$

Аналогично записи для оценок, будем указывать оценку переменных, если это потребуется / будет неочевидно из контекста:

$$\langle \neg X \rangle^{x:=\text{Л}} = \neg X \qquad \langle \neg X \rangle^{x:=\text{И}} = \neg \neg X$$

Также, если $\Gamma := \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, то за $\langle \Gamma \rangle$ обозначим $\langle \gamma_1 \rangle, \langle \gamma_2 \rangle, \dots, \langle \gamma_n \rangle$.

Таблицы истинности и высказывания

Рассмотрим связку «импликация» и её таблицу истинности:

$\llbracket A \rrbracket$	$\llbracket B \rrbracket$	$\llbracket A \rightarrow B \rrbracket$	формула
Л	Л	И	$\neg A, \neg B \vdash A \rightarrow B$
Л	И	И	$\neg A, B \vdash A \rightarrow B$
И	Л	Л	$A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
И	И	И	$A, B \vdash A \rightarrow B$

Заметим, что с помощью условного отрицания данную таблицу можно записать в одну строку:

$$\langle\langle A \rangle\rangle, \langle\langle B \rangle\rangle \vdash \langle\langle A \rightarrow B \rangle\rangle$$

Полнота исчисления высказываний

Теорема (О полноте исчисления высказываний)

Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$

1. Построим таблицы истинности для каждой связки (\star) и докажем в них каждую строку:

$$\models \varphi, \models \psi \vdash \models \varphi \star \psi$$

2. Построим таблицу истинности для α и докажем в ней каждую строку:

$$\models \Xi \vdash \models \alpha$$

3. Если формула общезначима, то в ней все строки будут иметь вид $\models \Xi \vdash \alpha$, потому от гипотез мы сможем избавиться и получить требуемое $\vdash \alpha$.

Шаг 1. Лемма о связках

Запись

$$(\lceil\varphi\rceil), (\lceil\psi\rceil) \vdash \lceil\varphi \star \psi\rceil$$

сводится к 14 утверждениям:

$$\neg\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \& \psi)$$

$$\neg\varphi, \psi \vdash \neg(\varphi \& \psi)$$

$$\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \& \psi)$$

$$\varphi, \psi \vdash (\varphi \& \psi)$$

$$\neg\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$$

$$\neg\varphi, \psi \vdash (\varphi \vee \psi)$$

$$\varphi, \neg\psi \vdash (\varphi \vee \psi)$$

$$\varphi, \psi \vdash (\varphi \vee \psi)$$

$$\neg\varphi, \neg\psi \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$$

$$\neg\varphi, \psi \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$$

$$\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi)$$

$$\varphi, \psi \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$$

$$\varphi \vdash \neg\neg\varphi$$

$$\neg\varphi \vdash \neg\varphi$$

Шаг 2. Обобщение на любую формулу

Лемма (Условное отрицание формул)

Пусть пропозициональные переменные $\Xi := \{X_1, \dots, X_n\}$ — все переменные, которые используются в формуле α . И пусть задана некоторая оценка переменных.

Тогда, $\langle \Xi \rangle \vdash \langle \alpha \rangle$

Доказательство.

Индукция по длине формулы α .

- ▶ База: формула α — атомарная, т.е. $\alpha \equiv X_i$. Тогда при любом Ξ выполнено $\langle \Xi \rangle^{X_i := \text{И}} \vdash X_i$ и $\langle \Xi \rangle^{X_i := \text{Л}} \vdash \neg X_i$.
- ▶ Переход: $\alpha \equiv \varphi \star \psi$, причём $\langle \Xi \rangle \vdash \langle \varphi \rangle$ и $\langle \Xi \rangle \vdash \langle \psi \rangle$

Тогда построим вывод:

$(1) \dots (n)$	$\langle \varphi \rangle$	индукционное предположение
$(n + 1) \dots (k)$	$\langle \psi \rangle$	индукционное предположение
$(k + 1) \dots (l)$	$\langle \varphi \star \psi \rangle$	лемма о связках: $\langle \varphi \rangle$ и $\langle \psi \rangle$ доказаны в значит, их можно использовать как гипотезы



Шаг 3. Избавляемся от гипотез

Лемма

Пусть при всех оценках переменных $\langle \Xi \rangle \vdash \alpha$, тогда $\vdash \alpha$.

Доказательство.

Индукция по количеству переменных n .

- ▶ База: $n = 0$. Тогда $\vdash \alpha$ есть из условия.
- ▶ Переход: пусть $\langle X_1, X_2, \dots, X_{n+1} \rangle \vdash \alpha$. Рассмотрим 2^n пар выводов:

$$\frac{\langle X_1, X_2, \dots, X_n \rangle, \neg X_{n+1} \vdash \alpha \quad \langle X_1, X_2, \dots, X_n \rangle, X_{n+1} \vdash \alpha}{\langle X_1, X_2, \dots, X_n \rangle \vdash \alpha}$$

При этом, $\langle X_1, X_2, \dots, X_n \rangle \vdash \alpha$ при всех оценках переменных X_1, \dots, X_n . Значит, $\vdash \alpha$ по индукционному предположению. □

Заключительные замечания

Теорема о полноте — конструктивна. Получающийся вывод — экспоненциальный по длине.

Несложно по изложенному доказательству разработать программу, строящую вывод.

Вывод для формулы с 3 переменными — порядка 3 тысяч строк.