מבוא למערכות מחשב

תרגול מספר 1

נושאי התרגול

מספרים שלמים:

- שיטת הפוזיציה לייצוג מספרים בבסיס 10 ובבסיס k
- מעבר מבסיס k כלשהו לבסיס 10 ולהיפך
- מעבר ישיר בין בסיסים 2, 4, 8, 16

מספרים לא שלמים

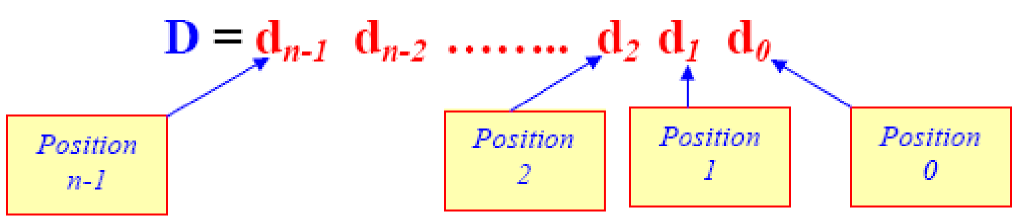
- שיטת הפוזיציה לייצוג מספרים לא שלמים בבסיס 10 ובבסיס k
- מעבר מבסיס k כלשהו לבסיס 10 ולהיפך
- מעבר ישיר בין בסיסים 2, 4, 8, 16

מספרים שלמים

שיטת הפוזיציה לייצוג מספרים בבסיס 10 ובבסיס k, מעבר מבסיס k כלשהו לבסיס 10 ולהיפך, מעבר ישיר בין בסיסים 2, 4, 8, 16

שיטת הפוזיציה לייצוג מספרים בבסיס 10

- נגדיר מספר סופי וקטן של סימנים: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- ערך הספרה נקבע לפי מיקומה
  - באנגלית מיקום זה position ומכאן השם שיטת הפוזיציה
- כך נוכל לייצג אינסוף מספרים
- מספר ייוצג כך:



שיטת הפוזיציה לייצוג מספרים בבסיס 10

- למספר D יש n ספרות ולכל ספרה יש מיקום השייך לה
- למיקום של כל סיפרה יש ערך קבוע
- נציין את הערך של הספרה במקום ה-i-י כ-w_i ונקבל:

$$D = d_{n-1}\ w_{n-1} + d_{n-2}\ w_{n-2} + \ldots\ldots + d_1\, w_1 + d_0\, w_0$$

- הערך w בבסיס 10 הוא: 10^i
  - המשקל של האיבר הימני ביותר הוא: $1 = 10^0$, זה שאחריו: $10 = 10^1$, זה שאחריו: $100 = 10^2$ וכן הלאה

שיטת הפוזיציה לייצוג מספרים בבסיס 10

- נבחן את המספר 4,759 בהתאם לשיטת הפוזיציה:

$$4{,}759 = 4 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 9 \times 10^0$$
$$= 4{,}000 + 700 + 50 + 9 = 4{,}759$$

- תרגיל לכיתה (בזוגות): כנ"ל לגבי המספר 10,321

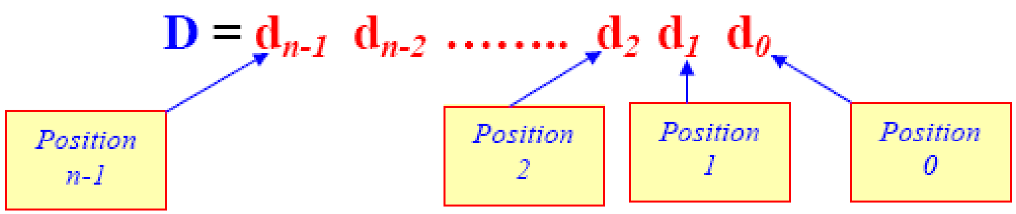
שיטת הפוזיציה לייצוג מספרים בבסיס r

- השימוש ב-10 סימנים לייצוג מספרים הוא שרירותי. באותה מידה היינו יכולים להשתמש ב-5 או ב-20 סימנים
  - שיטת ספירה עם 20 סימנים הייתה נהוגה בקרב בני המאיה ובצרפת הקדומה

- איך נייצג מספרים עם מספר סימנים, r, שונה מ-10?
- מספר הסימנים קובע את מספר וזהות הספרות: r סימנים עם הספרות: $\{0,1,2,\cdots,r-2,r-1\}$

שיטת הפוזיציה לייצוג מספרים בבסיס r

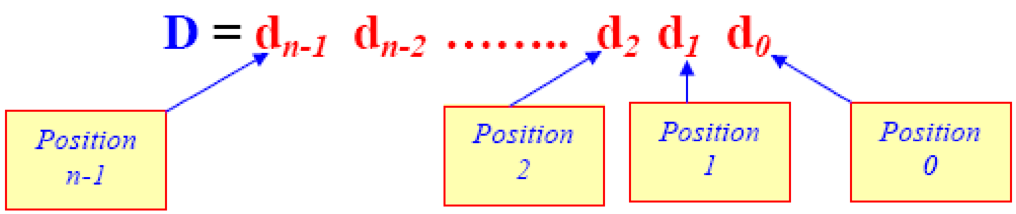
- כל ספרה יכולה להופיע בכל מקום במספר D:



- המשקל של ספרה במקום ה-i-י הוא: r^i
- המספר D בבסיס r ייכתב כך: $(D)_r$. למשל: $(125)_7$ או $(78)_{16}$

שיטת הפוזיציה לייצוג מספרים בבסיס r

- כל ספרה יכולה להופיע בכל מקום במספר D:



- ולכן:

$$(\boldsymbol{D})_r = \boldsymbol{d}_{n-1} \cdot \boldsymbol{r}^{n-1} + \boldsymbol{d}_{n-2} \cdot \boldsymbol{r}^{n-2} + \cdots + \boldsymbol{d}_1 \cdot \boldsymbol{r}^1 + \boldsymbol{d}_0 \cdot \boldsymbol{r}^0$$

המרת מספר מבסיס r לבסיס 10

- תרגיל כיתה (בזוגות): המירו את המספרים הבאים לבסיס 10:

$[15]_6$

$[1847]_9$

$[1011]_2$

$[1011]_3$

$[1011]_5$

המרת מספר מבסיס r לבסיס 10

- תרגיל כיתה (בזוגות): המירו את המספרים הבאים לבסיס 10:

$$[15]_6 = 1 \times 6^1 + 5 \times 6^0 = 6 + 5 = 11$$

$$[1847]_9 = 1 \times 9^3 + 8 \times 9^2 + 4 \times 9^1 + 7 \times 9^0$$

$$= 1 \times 729 + 8 \times 81 + 4 \times 9 + 7 \times 1 = 729 + 648 + 36 + 7 = 1420$$

$$[1011]_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 1 \times 8 + 0 \times 4 + 1 \times 2 + 1 \times 1$$

$$= 8 + 0 + 2 + 1 = 11$$

$$[1011]_3 = 1 \times 3^3 + 0 \times 3^2 + 1 \times 3^1 + 1 \times 3^0$$

$$= 1 \times 27 + 0 \times 9 + 1 \times 3 + 1 \times 1 = 27 + 0 + 3 + 1 = 31$$

$$[1011]_5 = 1 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 1 \times 5^1 + 1 \times 5^0$$

$$= 1 \times 125 + 0 \times 25 + 1 \times 5 + 1 \times 1 = 125 + 0 + 5 + 1 = 131$$

ייצוג בסיסים גדולים מ-10

- נזדקק ליותר סימנים. מקובל להשתמש באותיות ה-ABC
- בבסיס 16 יהיו 16 סימנים: $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F\}$
- נמיר את המספרים הבאים לבסיס 10:

$$[15]_{16}$$
$$[1FE]_{16}$$

ייצוג בסיסים גדולים מ-10

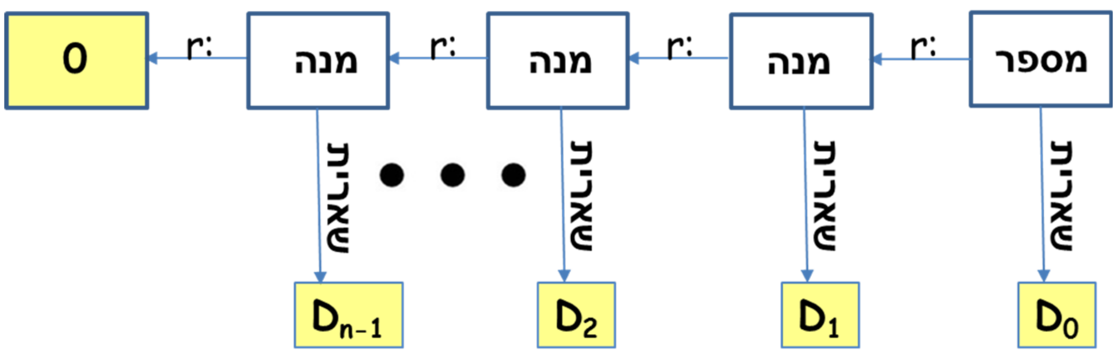
- פתרון:

$$[15]_{16} = 1 \times 16^1 + 5 \times 16^0 = 1 \times 16 + 5 \times 1 = 16 + 5 = 21$$

$$[1FE]_{16} = 1 \times 16^2 + F \times 16^1 + E \times 16^0$$
$$= 1 \times 16^2 + 15 \times 16^1 + 14 \times 16^0 = 1 \times 256 + 15 \times 16 + 14 \times 1$$
$$= 256 + 240 + 14 = 510$$

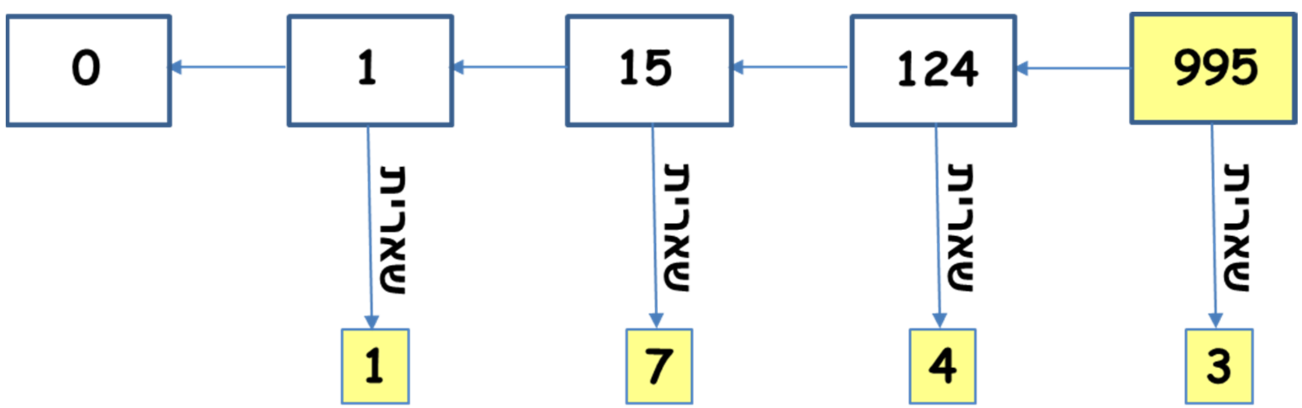
מעבר מבסיס 10 לבסיס r

- טכניקה
  1) נחלק ב-r ונעקוב אחר השארית. השארית תהיה בין 0 ל-(r-1) מאחר ואנחנו בבסיס r
  2) השארית היא הספרה המבוקשת מימין לשמאל
  3) אם תוצאת החילוק גדולה מ-0, נחזור ל-1. אחרת נפסיק.



מעבר מבסיס 10 לבסיס r

- דוגמא- איך מוצג 995 בבסיס 8:



מעבר מבסיס 10 לבסיס r

- תרגיל כיתה (בזוגות):

  - המירו את המספר 3473 לבסיס 7
  - המירו את המספר 2892 לבסיס 16

מעבר מבסיס 10 לבסיס r

- תרגיל כיתה (בזוגות):

  - המירו את המספר 3473 לבסיס 7
  - המירו את המספר 2892 לבסיס 16

- תשובה:
  - בבסיס 7 המספר הוא 13061
  - בבסיס 16 המספר הוא: B4C

מעבר ישיר בין הבסיסים 2 ו-4

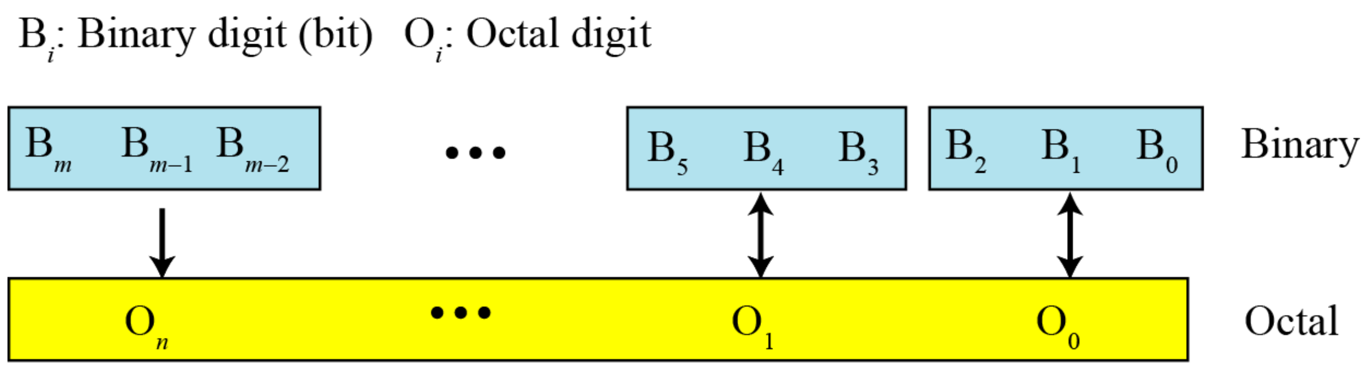
- שתי ספרות בבסיס 2 = ספרה אחת בבסיס 4

$$
\begin{array}{c|c}
10 & 11_2 \\
2 & 3_4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c}
1 & 0_4 \\
01 & 00_2
\end{array}
$$

מעבר ישיר בין הבסיסים 2 ו-8

- נמיר כל ספרה בבסיס 8 ל-3 ספרות בינאריות מתאימות ולהיפך



מעבר ישיר בין הבסיסים 2 ו-8

- תרגיל כיתה:

המירו את המספר הבא, הנתון בבסיס 2, למספר בבסיס 8:

$[1011100101011111110]_2$

מעבר ישיר בין הבסיסים 2 ו-8

- פתרון:

נחלק את המספר $[1011100101011111110]_2$ ליחידות של ארבע ספרות מימין לשמאל:

1 011 100 101 011 111 110

נמיר כל שלוש ספרות בינאריות לספרה המתאימה לה בבסיס 8:

1 011 100 101 011 111 110

1 3 4 5 3 7 6

מעבר ישיר בין הבסיסים 2 ו-8

- תרגיל כיתה:

המירו את המספר הבא, הנתון בבסיס 8, למספר בבסיס 2:

$$[7326]_8$$

מעבר ישיר בין הבסיסים 2 ו-8

- פתרון:

נמיר כל אחת מן הסיפרות בבסיס 8 לשלוש ספרות בינאריות באופן הבא: $[7326]_8$

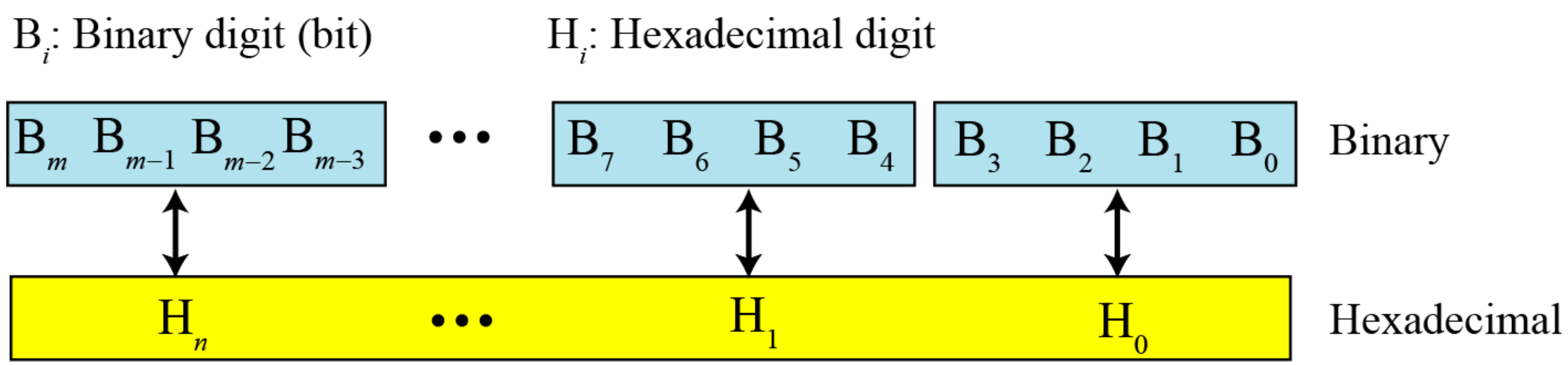
- נמיר את הספרה 6 בבסיס 8 לארבע הספרות הבינאריות: 110
- נמיר את הספרה 2 בבסיס 8 לארבע הספרות הבינאריות: 010
- נמיר את הספרה 3 בבסיס 8 לארבע הספרות הבינאריות: 011
- נמיר את הספרה 7 בבסיס 8 לארבע הספרות הבינאריות: 111

נקבל, אם כן:

7	3	2	6
111	011	010	110

מעבר ישיר בין הבסיסים 2 ו-16

- נמיר כל ספרה בבסיס 16 ל-4 ספרות בינאריות מתאימות ולהיפך



מעבר ישיר בין הבסיסים 2 ו-16

- דוגמה:

נמיר את המספר $[110011100010]_2$ לבסיס הקסדצימלי

פתרון:

– נחלק את המספר בבסיס 2 ליחידות של ארבע ספרות מימין לשמאל

1100 1110 0010

– נמיר כל ארבע ספרות בינאריות לספרה בבסיס 16 המתאימה לה

1100	1110	0010
C	E	2

מעבר ישיר בין הבסיסים 2 ו-16

- דוגמה:

נמיר את המספר $[4D3]_{16}$ לבסיס 2

פתרון:

– נמיר כל אחת מן הספרות ההקסצימליות לארבע ספרות בינאריות. כך:
  - נמיר את הספרה ההקסדצימלית 3 לארבע הספרות הבינאריות: 0011
  - נמיר את הספרה ההקסדצימלית D לארבע הספרות הבינאריות: 1101
  - נמיר את הספרה ההקסדצימלית 4 לארבע הספרות הבינאריות: 0100

– נחבר את כל הספרות ונשמיט אפסים מובילים ונקבל:

4	D	3
100	1101	0011

מעבר ישיר בין הבסיסים 2 ו-16

- תרגיל כיתה:

המירו את המספר הבא, הנתון בבסיס 2, למספר בבסיס 16:

$$[1011100101011111110]_2$$

מעבר ישיר בין הבסיסים 2 ו-16

- פתרון:

נחלק את המספר: $[10111001010111111110]_2$ ליחידות של ארבע ספרות מימין לשמאל:

101 1100 1010 1111 1110

נמיר כל ארבע ספרות בינאריות לספרה המתאימה לה בבסיס 16:

101 1100 1010 1111 1110

5 C A F E

מעבר ישיר בין הבסיסים 2 ו-16

- תרגיל כיתה:

המירו את המספר הבא, הנתון בבסיס 16, למספר בבסיס 2:

$$[FEAD]_{16}$$

מעבר ישיר בין הבסיסים 2 ו-16

- פתרון:

נמיר כל אחת מן הספרות בבסיס 16 לארבע ספרות בינאריות באופן הבא:

- **נמיר את הספרה D בבסיס 16 לארבע הספרות הבינאריות: 1101**
- **נמיר את הספרה A בבסיס 16 לארבע הספרות הבינאריות: 1010**
- **נמיר את הספרה E בבסיס 16 לארבע הספרות הבינאריות: 1110**
- **נמיר את הספרה F בבסיס 16 לארבע הספרות הבינאריות: 1111**

נקבל, אם כן:

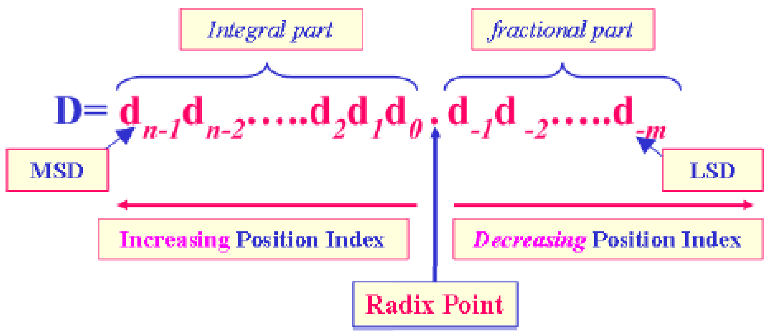
F	E	A	D
1111	1110	1010	1101

מספרים לא שלמים

שיטת הפוזיציה לייצוג מספרים בבסיס 10 ובבסיס k, מעבר מבסיס k כלשהו לבסיס 10 ולהיפך, מעבר ישיר בין בסיסים 2, 4, 8, 16

הרחבת שיטת הפוזיציה למספרים רציונליים

- למספר D יש n ספרות בחלקו השלם ו-m ספרות בחלקו הלא שלם



$$D = \sum_{i=-m}^{n-1} d_i \, r^i$$

- אינדקס המקום חיובי משמאל לסימן הנקודה ושלילי מימין לה
- המשקל של ספרה במקום ה-i-י הוא: r^i

הרחבת שיטת הפוזיציה למספרים רציונליים

- בבסיס 10:

$$
\begin{array}{llcr}
14782.639_{10} \Rightarrow & 1 \times 10^{4} & = & 10000 \\
 & 4 \times 10^{3} & = & 4000 \\
 & 7 \times 10^{2} & = & 700 \\
 & 8 \times 10^{1} & = & 80 \\
 & 2 \times 10^{0} & = & 2 \\
\hline
 & 6 \times 10^{-1} & = & 0.6 \\
 & 3 \times 10^{-2} & = & 0.03 \\
 & 9 \times 10^{-3} & = & 0.009 \\
\hline
 & & & 14782.639
\end{array}
$$

הרחבת שיטת הפוזיציה למספרים רציונליים

- בבסיס 2:

$$[1001110.101_2] \Rightarrow \begin{array}{lcr} 1 \times 2^6 & = & 64 \\ 0 \times 2^5 & = & 0 \\ 0 \times 2^4 & = & 0 \\ 1 \times 2^3 & = & 8 \\ 1 \times 2^2 & = & 4 \\ 1 \times 2^1 & = & 2 \\ 0 \times 2^0 & = & 0 \\ \hline 1 \times 2^{-1} & = & 0.5 \\ 0 \times 2^{-2} & = & 0 \\ 1 \times 2^{-3} & = & 0.125 \\ \hline & & 78.625 \end{array}$$

הרחבת שיטת הפוזיציה למספרים רציונליים

- בבסיס 16:

$$
[37E.AC3]_{16} \Rightarrow
\begin{array}{rcr}
3 \times 16^{2} & = & 768 \\
7 \times 16^{1} & = & 112 \\
E \times 16^{0} & = & 14 \\
\hline
A \times 16^{-1} & = & 0.625 \\
C \times 16^{-2} & = & 0.047 \\
3 \times 16^{-3} & = & 0.001 \\
\hline
 & & 894.673
\end{array}
$$

הרחבת שיטת הפוזיציה למספרים רציונליים

- המרה מבסיס 10 לבסיס 2:
- נכפיל בבסיס במקום לחלק

$[0.84375]_{10}$ =>

```
0.84375 x 2  =  1 + 0.6875
0.6875  x 2  =  1 + 0.375
0.375   x 2  =  0 + 0.75
0.75    x 2  =  1 + 0.5
0.5     x 2  =  1 + 0
```

המספר המתקבל הוא: $[0.11011]_2$

הרחבת שיטת הפוזיציה למספרים רציונליים

- המרה מבסיס 10 לבסיס 16:

$[0.78125]_{10}$ =>

$0.78125 \times 16 =$	$12 + 0.5$	(C)
$0.5 \times 16 =$	$8 + 0$	(8)

המספר המתקבל הוא: $[0.C8]_{16}$

הרחבת שיטת הפוזיציה למספרים רציונליים

- המרה ישירה מבסיס 2 לבסיס 8:

נחלק את המספר לשניים: מימין ומשמאל לסימן הנקודה ונבצע המרה ישירה של כל אחד מן החלקים

1101	1001	0111	1110	.	1101
D	9	7	E	.	B

(00)1	101	100	101	111	110	.	110	1(00)
1	5	4	5	7	6	.	6	4