Задача 1)

Используя перенос новой СК в узловую, сделаем поворот, вернёмся к начальной системе координат, это корректно, т.к. перенос не влияет на поворот.

Тогда $M = T^{-1} R_\varphi T$, где $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{pmatrix}$

$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$ $R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 2)

Чтобы реализовать поворот, совместим l с осью z, перенесём СК из A в исходную СК, сделаем поворот и вернём СК обратно.

Тогда $R_z(\varphi) = Q^{-1} \times R'_z(\varphi) \times Q$

$Q = R_\partial \times T(-a,-b,-c)$ T — параллельный перенос

R_∂ — совмещение l с z, $R'_z(\varphi)$ поворот в исходной СК. $T(-a,-b,-c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & -c & 1 \end{pmatrix}$,

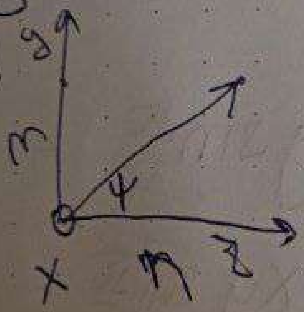
аналогично $T(a,b,c)$

$R'(z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$Q^{-1} = T(a, b, c) \times R_\partial^{-1}$

Осталось понять как выразить R_∂. Известно, что хватает двух поворотов относительно осей, чтобы совместить 2 СК с одним центром. Сделаем это следующим образом: сначала повернём l вокруг x, чтобы она попала в XOZ, далее вокруг y переведём l в z $\quad l(l, m, n)$

1)

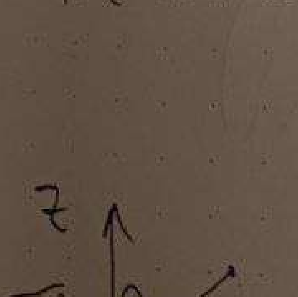


$$\sin\Psi = \frac{m}{\sqrt{n^2+m^2}}$$

$$\cos\Psi = \frac{n}{\sqrt{n^2+m^2}}$$

$R_\partial = R_y(\Theta) \times R_x(-\Psi)$ т.к. по часовой Ψ

$$R_x(-\Psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Psi & -\sin\Psi & 0 \\ 0 & \sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\sin\Theta = \frac{l}{1}$$

$$\cos\Theta = \sqrt{1-l^2}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\overset{-1}{R_y} = R_x(\psi) \times R_y(-\theta)$ выр-ся аналогично.

Задача 8)

$q_1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + x \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$q_2 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + y \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\cos\psi + V \sin\psi = q_1 q_2$

$\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + x \sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} + y \sin\frac{\pi}{4}\right) =$

$= \cos^2\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{4} \cdot (x+y) + xy \sin^2\frac{\pi}{4} =$

$\cos^2\frac{\pi}{4} + \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin^2\frac{\pi}{4} =$

$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \psi = \frac{\pi}{3} \quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$