Первообразная и неопределенный интеграл

Definition 0.1. Первообразная функция

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}; \quad F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
F – первообразная функция f, если F дифференцируема на $\langle a, b\rangle$ и $F'(x) = f(x)$ при всех $x \in \langle a, b\rangle$

Example 0.1.

$f(x) = \cos x$
$F(x) = \sin x$

Proposition 0.1.

Не всякая функция имеет первообразную

Example 0.2.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 0] \\ 1, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

Proposition 0.2.

Непрерывная на $\langle a, b\rangle$ функция имеет первообразную

Theorem 0.1.

$f, F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, F$ – первообразная f. Тогда

1. $F + C$ – первообразная f
2. Если Φ – первообразная f, то $\Phi = F + C$ для некоторой константы C

Доказательство:

1. $(F + C)' = F' = f$
2. $\Phi' = f = F'$
   $g = \Phi - F$
   $g' = 0 \Rightarrow g = C \Rightarrow \Phi = F + C$

Definition 0.2. Неопределенный интеграл

Неопределенный интеграл – множество первообразных функции f
Обозначение: $\int f(x)dx$

Remark 0.1.

Для доказательства равенства $\int f(x)dx = F(x) + C$ достаточно проверить, что $F'(x) = f(x)$

Действия с множествами функций:

A и B – множества функций $\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

$\lambda \in \mathbb{R},\ h : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

1. $A + B = \{f + g : f \in A,\ g \in B\}$
2. $\lambda A = \{\lambda f : f \in A\}$
3. $A + h = \{f + h : f \in A\}$
4. $(A)' = \{f' : f \in A\}$

Example 0.3.

$(\int f(x)dx)' = \{f\}$

Таблица интегралов:

1. $\int adx = ax + C$
2. $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C,\ p \neq -1$
3. $\in \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;\ a > 0,\ a \neq 1$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

Theorem 0.2. Линейность интеграла

$f, g : \langle a, b\rangle \Rightarrow \mathbb{R}$ имеют первообразные
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, не равные нулю одновременно
Тогда $\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$

Доказательство:

F и G – первообразные

Правая часть $= \{\alpha F(x) + \beta G(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$

$(\alpha F(x) + \beta G(x) + C)' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$

Theorem 0.3. Замена переменной в интеграле

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R},\ F$ – первообразная
$\varphi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$ – дифференцируемая функция
Тогда $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C$

Доказательство:

$(F(\varphi(x)) + C)' = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$

Remark 0.2.

$y = \varphi(x);\quad dy = \varphi'(x)dx$
$\frac{dy}{dx} = y'$
$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(y)dy = F(y) + C = F(\varphi(x)) + C$

Example 0.4.

1. $\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \ln|y| + c = \ln|x^2+1| + C$
   Здесь $y = \varphi(x) = x^2 + 1$
2. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dy}{\sin y\cos y} = \int \frac{dy}{\operatorname{tg} y\cos^2 y} = \int \frac{(\operatorname{tg} y)'}{tgy}dy = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C =$
   $= \ln|\operatorname{tg} y| + C = \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C$
   Здесь $y = \frac{x}{2}$ и $z = \operatorname{tg} y$
3. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{3t^2dt}{1+t} = 3\int \frac{t^2-1+1}{t+1}dt = 3\int(t-1+\frac{1}{t+1})dt = 3(\int tdt - \int dt + \int \frac{dt}{t+1}) =$
   $= 3t^2 - 3t + 3\int \frac{d(t+1)}{t+1} = 3t^2 - 3t + 3\ln|t+1| + C$

Theorem 0.4. Интегрирование по частям

$f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируемые
Если $f'g$ имеет первообразную, то $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

Доказательство:

H – первообразная функции $f'g$

$(fg - H + C)' = (fg)' - H' = f'g + fg' - f'g = fg'$

Notation 0.1. Традиционная запись формулы

$\int udv = uv - \int vdu$
$\begin{cases} du = u'(x)dx \\ dv = v'(x)dx \end{cases}$

Example 0.5.

1. $\int \ln xdx = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$
   Здесь $u = \ln x,\ v = x$ и $du = (\ln x)'dx = \frac{dx}{x}$
2. $\int x^2e^xdx = \int x^2de^x = x^2e^x - \int 2xe^xdx = x^2e^x - 2\int xde^x = x^2e^x - 2(xe^x - \int e^xdx) =$
   $= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$
   Здесь сначала берем $u = x^2, v = e^x$, а потом $u = x, v = e^x$

Площадь

Definition 0.3. Площадь

F – семейство всех ограниченных подмножеств плоскости
Прямоугольник $\langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle$, площадь прямоугольника $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$
Площадь $S : F \to [0, +\infty)$

1. $S(\langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$
2. $S(E) = S(E_1) + S(E_2)$, если $E = E_1 \bigcup E_2,\ E_1 \bigcap E_2 = \varnothing$

Theorem 0.5. Свойство

Если $\tilde{E} \subset E$, то $S(\tilde{E}) \le S(E)$

Доказательство:

$E = \tilde{E} \bigcup (E \setminus \tilde{E})$

$S(E) = S(\tilde{E}) + S(E \setminus \tilde{E}) \ge S(\tilde{E})$

Definition 0.4.

$\sigma : F \to [0, +\infty)$

1. $\sigma(\langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$
2. $\sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$, если E_- и E_+ множества, получающиеся в результате разбиения E вертикальной (горизонтальной) прямой
3. Если $\tilde{E} \subset E$, тое $\sigma(\tilde{E}) \le \sigma(E)$

Remark 0.3. Свойство

Формула 2) верна и если $E_- \bigcap E_+ \ne \varnothing$
Например, линию разбиения можно считать относящейся и к левой (верхней), и к правой (нижней) части

Доказательство:

$e = E_- \bigcap E_+$, $\sigma(e) = 0$

$\sigma(E_+) = \sigma(E_+ \setminus e) + \sigma(e \bigcap E_+) = \sigma(E_+ \setminus e)$

$\sigma(E_-) + \sigma(E_+) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+ \setminus e) = \sigma(E_- \bigcup (E_+ \setminus e)) = \sigma(E_- \bigcup E_+) = \sigma(E)$

Example 0.6. Примеры площадей $E \in F$

- Рассмотрим покрытие E конечным числом прямоугольников P_i (т.е. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i \supset E$)

  $\sigma_1(E) = \inf\{\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(P_i) : \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i \supset E\}$
- Рассмотрим покрытие E последовательностью прямоугольников P_i (т.е. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i \supset E$)

  $\sigma_2(E) = \inf\{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sigma(P_i) : \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i \supset E\}$
- Ясно, что $\sigma_1(E) \geq \sigma_2(E)$

  Но, если $E = ([0,1] \bigcap \mathbb{Q}) \times ([0,1] \bigcap \mathbb{Q})$, то $\begin{cases} \sigma_1(E) = 1 \\ \sigma_2(E) = 0 \end{cases}$

Theorem 0.6.

1. σ_1 – площадь
2. σ_1 не меняется при параллельном переносе

Доказательство:

1)

1. $\sigma_1(\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle) = (b-a)(d-c)$
   Поскольку $[a,b] \times [c,d]$ – покрытие P, $\sigma_1(P) \leq (b-a)(d-c)$
   В обратную сторону красиво доказано АИ. Там рисуночки, посмотрите!
2. $E = E_- \bigcup E_+ \Rightarrow \sigma_1(E) = \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$

   $\leq$: Если $P_1^+, \dots P_m^+$ – покрытие E_+, для которого $\sum\limits_{i=1}^{m} \sigma(P_i^+) < \sigma_1(E_+) + \varepsilon$

   А $P_1^-, \dots P_n^-$ – покрытие E_-, для которого $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(P_i^-) < \sigma_1(E_-) + \varepsilon$, то

   $P_1^-, P_2^-, \dots P_n^-, P_1^+, P_2^+, \dots P_m^+$ – покрытие E, для которого

   $\sigma_1(E) \leq \sum\limits_{i=1}^{n+m} \sigma(P_i) < \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+) + 2\varepsilon \Rightarrow \sigma_1(E) < \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+) + 2\varepsilon$

   $\geq$: Пусть $P_1, P_2, \dots P_n$ – покрытие E
   Разобьем P_i на P_i^- и P_i^+
   $\sigma(P_i) = \sigma(P_i^-) + \sigma(P_i^+)$
   $P_1^\pm, P_2^\pm, \dots P_n^\pm$ – покрытие $E^\pm$
   $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(P_i^\pm) \geq \sigma_1(E^\pm)$
   $\sum\limits_{i=1}^{n} (\sigma(P_i^-) + \sigma(P_i^+)) \geq \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$
3. $\tilde{E} \subset E \Rightarrow \sigma_1(\tilde{E}) \leq \sigma_1(E)$
   Если $\bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i \supset E$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i \supset \tilde{E} \Rightarrow$ класс покрытий $\tilde{E}$ шире, чем класс покрытий E

2)

Пусть $\tilde{E}$ – параллельный перенос E на вектор $\overrightarrow{v}$

$P_1, P_2, \dots P_n$ – покрытие E. Пусть $\tilde{P}_i$ – параллельный перенос P_i на вектор $\overrightarrow{v}$

Тогда $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \dots \tilde{P}_n$ – покрытие $\tilde{E}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(P_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(\tilde{P}_i)$