Конспект Шорохова Сергея
Если нашли опечатку/ошибку - пишите @le9endwp

§0. Методы математического доказательства

1. Индукция

   (a) База индукции
   (b) Индукционное предположение
   (c) Индукционный переход

   $P_1, P_2 \dots P_n$

   - 1 аксиома индукции
     $\begin{cases} \text{P}_1 \text{ - истина} \\ \forall i \; P_i \to P_{i_1} \end{cases} \Rightarrow \forall i \; P_i$ - истина
   - 2 аксиома индукции
     $\begin{cases} \text{P}_1 \text{ - истина} \\ \forall i \; P_1 \dots P_i \to P_{i+1} \end{cases} \Rightarrow \forall i \; P_i$ - истина

2. "От противного"
   $A \to B \; \overline{B} \to \overline{A}$

3. Полный перебор

4. Прямой вывод
   $A \to B \to C \to D$, от A к D

5. Контрпример

6. Комбинаторное доказательство (сведение к известной задаче)

7. Двусторонние оценки
   $\begin{cases} \text{A} \geqslant B \\ \text{B} \geqslant A \end{cases} \Rightarrow A = B$

8. Оценка + пример

9. Дедукция + рекурсия
   $A \to B \to C \to D$, от D к A

10. Принцип Дирихле
    Биективное отображение для множеств разного размера оставит "лишние"элементы в одном из них

11. Инвариант
    Ex. Доказательство баланса красно-черного дерева

12. Доказательство эквивалентных утверждений
    $A \to B \to C \to D \to A$

§1. Множества

Def. $|A|$ - мощность множества (количество элементов в множестве
$A \bigcap B = \emptyset \Rightarrow |A \bigcup B| = |A| + |B|$

- $A_1 \dots A_n$
  $\forall i \neq j \ A_i \bigcap A_j = \emptyset$
  $|\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i| = \sum\limits_{i=1}^{n} |A_i|$
- $A_1 \dots A_n$
  $|\bigtimes\limits_{i=1}^{n} A_i| = \prod\limits_{i=1}^{n} |A_i|$

Def. $|A \bigcup B| = |A| + |B| - |A \bigcap B|$ - правило включения-исплючения

Доказательство

$A = (A \backslash B) \bigcup (A \bigcap B)$
$|A| = |A \backslash B| + |A \bigcap B|$
$|B| = |B \backslash A| + |A \bigcap B|$
$|A| + |B| = |A \backslash B| + |A \bigcap B| + |B \backslash A| + |A \bigcap B| = |(A \backslash B) \bigcup (A \bigcap B) \bigcup (B \backslash A)| = |A \bigcup B| + |A \bigcap B|$

Дома обобщение для произвольного n
$|A \bigcup B \bigcup C| = |A| + |B| + |C| - |A \bigcap B| - |A \bigcap C| - |B \bigcap C| + |A \bigcap B \bigcap C|$

$L = \{A, C, G, T\}$
$|L^k| = |L|^k = 4^k$
$\begin{cases} \text{f(n)} = \text{n} \cdot f(n-1) \\ \text{f(0)} = 1 \end{cases}$ – количество перестановок
$n(n-1)\dots(n-k+1) = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = C_n^k \cdot k!$
$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i a^i b^{n-i} = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}$

Если представить $a_1, a_2 \dots a_n$ как двоичное число или из $(1+1)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i \cdot 1^i \cdot 1^{n-i} = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i$

Тогда $\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$

Дома найти $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$
Посчитаем рекуррентно:
В $a_1 \dots a_n$ a_1 либо берем, либо не берем

- Если берем, то C_{n-1}^{k-1}
- Если не берем, то C_{n-1}^{k}

Значит $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}$

Другое доказательство: $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!}(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}) = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!} \cdot \frac{n}{k(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$

Воспользоваться суммой можно из треугольника Паскаля. Его можно представить и в виде квадрата. Тогда можем посчитать C_n^i за $i(n-i+1)-(n+1)$, по формуле только $n!$ считали бы $lgn \cdot n$

Свойства:

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$
2. $C_n^i = C_n^{n-i}$
   $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-n+k)!(n-k)!}$

Задача

Пусть есть n книг и k полок. Способов разделить на полки (= поставить $k-1$ перегородок) $\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{(k-1)!} = \frac{A_{n+k-1}^{k-1}}{(k-1)!} = C_{n+k-1}^{k-1}$

Def. Отношения A, B $\rho \subset A \times B$

$a\rho b$ $\forall a \in A, b \in B$, если $(a, b) \in \rho$

Свойства:

1. $\forall a \in A$ $a\rho a$ - рефлексивность
2. $\forall a, b \in A$ $a\rho b \Rightarrow b\rho a$ - симметричность
3. $\forall a, b, c \in A$ $\begin{cases} a\rho b \\ b\rho c \end{cases} \Rightarrow a\rho c$ - транзитивность

Если выполняются все 3, то это оношение эквивалентности. Все элементы разобьются на классы эквивалентности

A, B; $f : A \to B \Leftrightarrow \forall a \in A \exists b \in B : (a, b) \in f$

Def.

Пусть A - позиции в слове, B - символы алфавита

Количество отображений - количество строк длины $|A|$

$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ - инъективность

$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b$ - сюръективность

Если $f : A \to B$ - биективно, то $|A| = |B|$, при этом количество биекций - количество перестановок

Количество инъекций - A_n^k

A, B – конечные множества

Отображение – правило, сопоставляющее $a \in A$ $b \in B$, т.е.

$f : A \to B$

$\forall x \in A$ $\exists y : f(x) = y$

$\begin{matrix} (x, f(x)) \\ x \in A; y = f(x) \in B \end{matrix}$ – график отображений

$|B|^{|A|}$ – количество отображений

$Im(M) = \{f(x) | x \in M\}$ – образ M

Виды отображений:

- Инъективные

  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

  $|Im(A)| = |A|$

  На $|B|$ позиций $|A|$ элементов

  $A_{|B|}^{|A|}$ – количество отображений

- Сюръективные

  $\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$

  $Im(A) = B$

  $\forall y \in B$; $P_y = \{x | f(x) = y\} \neq \varnothing$

  $Im(P_y) = \{y\}$

  $\hat{S}(n, k)$ – количество сюръективных отображений $A \to B, |A| = n, |B| = k$

$k^n = \sum\limits_{i=0}^{k} (\hat{S}(n, i) \cdot C_k^i)$

$\begin{cases} f_0, f_1 \dots ; g_0, g_1 \dots \\ f_k = \sum\limits_i C_k^i g_i \end{cases} \Rightarrow g_i = \sum\limits_i^k (-1)^{k-i} C_k^i f_i$, если докажем, получим $\hat{S}(n, k) = \sum (-1)^{k-i} C_k^i k^i$

Доказательство

TODO, из-за отсутствия практик пока не доказываем
$\frac{\hat{S}(n,k)}{k!} = S(n,k)$ – число Стирлинга первого рода
k предметов (множество X), n ящиков (множество Y)

X	Y	Произвольно	$\leqslant 1$	$\geqslant 1$
Различимы	Различимы	k^n	A_k^n	$\hat{S}(n,k)$
Неразличимы	Различимы	C_{n+k}^k	C_k^n	C_{k-1}^{n-1}
Различимы	Неразличимы	$B(n,k)$	$0, k > n$ $1, k \leqslant n$	$S(n,k)$

$B(n,k) = \sum_i^n S(i,k)$

Рекуррентные соотношения

$f_{n+m} = a_0 f_n + a_1 f_{n+1} + \dots a_{m-1} f_{n+m-1}$
$f_0 \dots f_{n-1}$
Прогой рекурсия удобно преображается в динамику (без проги нет)

Числа Фиббоначи: $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$
$f_0 = 0 \ f_1 = 1$
Явная формула (сложно): $\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$

Доказательство

База $n = 0, 1$ – верно
Переход $n \to n+1$
$f_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1) - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1))$
$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4}$

$f_n = \lambda^n; \ \lambda \neq 0$
$\lambda^{n+m} = a_0 \lambda^n \dots a_{m-1} \lambda^{n+m-1}$
$\lambda^m = a_0 + \dots + a_{m-1} \lambda^{m-1}$
$\lambda_{1 \dots n} =$
$f_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \dots c_m \lambda_m^n$ – характеристическое уравнение

На примере чисел Фиббоначи
$\lambda^2 = \lambda + 1$
$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$
$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$
$f_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$
$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1 \end{cases}$
$c_2 = -c_1$
$c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1$
$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}; \ c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Корней не всегда n
Для $f_{n+2} = 4f_{n+1} - 4f_n$ неправда (корни кратные)
Что делать?
Дифференцируем!

$(n+m)\lambda^{n+m-1} = a_0 n \lambda^{n-1} \dots a_{m-1}(n+m-1)\lambda^{n+m-2}$
$c_1 \lambda_1^n + c_2 n \lambda_2^{n-1}$ – может быть решением
$\lambda_{1,2} = 2$

$c_1 2^n + c_2 2^{n-1} n$

$\begin{cases} c_1 + 0 = 0 \\ c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 2^0 \cdot 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases}$

Ответ: $2^{n-1} \cdot n$

А что если корней нет вовсе?
$f_{n+2} = 4f_{n+1} - 5f_n$
$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$
$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2^2 - 5} = 2 \pm i$
Корни вида $c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ будут удовлетворять равенству, но в комплексных числах
Из $f_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ мнимая часть будет $= 0$

$a \pm bi = 2(\cos\alpha + i\sin\alpha) = r \cdot e^{i\alpha}$
$c_1 2^n \cos\alpha^2 + c_2 2^n \sin\alpha^2$

$\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{2} + \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{2} = \cos\alpha$

$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = (e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha} = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$

$c_1 \cos n\alpha + c_2 \sin n\alpha$
$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2^2 - 5} = 2 \pm i = \sqrt{5}(\frac{2}{\sqrt{5}} \pm \frac{i}{\sqrt{5}})$
$\alpha = a2\cos\frac{2}{\sqrt{5}}$
$c_1 \cos n\alpha + c_2 \sin n\alpha$

$f_n = a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2} + 2^n$
$\lambda_{1,2}$
$f_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + K(n)$
$K(n) - K(n-1) \cdot a_1 - K(n-2) \cdot a_2 = 2^n$
$K(n) = W \cdot 2^n$
$W \cdot 2^n - W \cdot 2^{n-1} \cdot a_1 - W \cdot 2^{n-2} \cdot a_2 = 2^n$
$4W - 2a_1 W - a_2 W = 4$

Теория вероятностей

Классическая вероятность

$P(\omega_i) = P_i$
$P_i = \frac{|\text{успех}|}{\Omega}$
Свойства:

1. $\sum P_i = 1;\ P(\Omega) = 1$
2. $A, B : A \bigcap B = \varnothing;\ P(A \bigcup B) = P(A) + P(B)$
3. $P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$
4. $A \subseteq B;\ P(A) \leqslant P(B)$
5. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

Def. Случайность – разультат конкретных воздействий, влияние которых мы не можем объяснить

Частотный способ определения вероятности

На определенном периоде считаем вероятность, на следующем периоде (их много) ситуация $\sim$ та же
Def. Условная вероятность: $P(A|B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)};\ P \neq 0$
Def. A не зависит от B если $P(A|B) = P(A)$
Def. Незавитсимость совокупности: $P(A_{i_1} \dots A_{i_k}) = \prod P(A_{i_j})$

Общее определение вероятности

Ω – множетсво элементарных исходов
F – множество событий
$P : F \to R$ – функция вероятности
$F \subset 2^\Omega$

1. $\Omega \in F$
2. $\omega \in F \Rightarrow \Omega \backslash \omega = \overline{\omega} \in F$
3. $\omega_1, \omega_2 \in F \Rightarrow \omega_1 \bigcup \omega_2 \in F$

3'. $\omega_1 \dots \omega_n \dots \in F \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \omega_i \in F$

Если выполняются 1-3 – это алгебра
Если выполняются 1, 2, 3' – это σ-алгебра

4. $P(\Omega) = 1$
5. $P(\omega) \geqslant 0$
6. $P(\bigcup \omega_i) = \sum P_i$, если $\omega_i \bigcap \omega_j = 0$

Как следствие:

- $\omega \bigcup \overline{\omega} = \Omega$
- $1 = P(\omega \bigcup \overline{\omega}) = P(\omega) + P(\overline{\omega})$
- $P(0) = 0$

Def. (Ω, F, P) – вероятностное пространство

Def. Формула полной вероятности
Пусть $\Omega = \Omega_1 \prod \Omega_2 \dots \prod \Omega_n$
$P(A) = P(A|\Omega_1) \cdot P(\Omega_1) + \dots + P(A|\Omega_n) \cdot P(\Omega_n)$
$A = A \bigcap \Omega = (A \bigcap \Omega_1) \bigcup \dots \bigcup (A \bigcap \Omega_n)$
$P(A|\Omega_1) = \frac{P(A \bigcap \Omega_1)}{P(\Omega_1)}$

Th. Теорема (формула) Байеса
A, B
$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$

Для x_i:
p – успех; $1 - p$ – неудача
$M_n(k) = P($ровно k успехов$)$
$x_1 \dots x_n$
$M_n(K) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
$M_n(0), M_n(1), \dots M_n(n)$

$M_n(a,b) = \sum\limits_{k=a}^{b} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$\frac{M_n(k)}{M_n(k+1)} = \frac{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}} = \frac{1-p}{p} \cdot \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}} = \frac{1-p}{p} \cdot \frac{k+1}{n-k}$

$\frac{(1-p)(k+1)}{p(n-k)} > 1$

$(1-p)(k+1) > pn - pk$

$1 - p + k - kp > pn - pk$

$1 - p + k > pn$

$k > pn - (1-p)$

Th. Теорема Пуассона

$\lambda = np$

$\lambda = const$ при $n \to \infty$

$M_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Почему?

$M_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{k!} \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n}) \ldots (1-\frac{k-1}{n}) \cdot$
$\cdot n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Здесь используется $(1-p)^{n-k} = (1-\frac{\lambda}{n})^{n-k} = \frac{(1-\frac{\lambda}{n})^n}{(1-\frac{\lambda}{n})^k} \to e^{-\lambda}$

Th. Локальная теорема Муавра-Лапласа

$P_n(k);\ x_n = \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}$. Пусть при $\substack{n \to \\ k \to} \infty;\ x_k$ не ограничена

$\sqrt{np(1-p)} \cdot P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{\lambda \pi}} e^{-\frac{x_n^2}{2}}$

$k! \approx \sqrt{2\pi k}(\frac{k}{e})^k$ – формула Стирлинга

$ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + o(z^2)$

$|\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}| < c \Rightarrow k < np \pm \sqrt{np(1-p)} \cdot c$

$q = 1-p$

$k = np + \sqrt{npq} \cdot x_n$

$\frac{k}{np} = 1 + \sqrt{\frac{q}{np}} x_n \to 1$

$n - k = n - np - \sqrt{npq} x_n = nq - \sqrt{npq} x_n$

$\frac{n-k}{nq} = 1 - \sqrt{\frac{p}{nq}} x_n \to 1$

$k - n \to -\infty$

$a^b = e^{lna \cdot b}$

$\sqrt{npq} \cdot P_n(k) = \sqrt{npq} \cdot \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{n} n^n}{\sqrt{n-k}(n-k)^{n-k} \sqrt{k} k^k} p^k q^{n-k} \sqrt{npq} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\frac{np}{k})^k (\frac{nq}{n-k})^{n-k} \sqrt{\frac{np}{k}} \sqrt{\frac{nq}{n-k}} \approx$
$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\frac{k}{np})^{-k} (\frac{n-k}{nq})^{k-n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1 + \frac{\sqrt{q} x_n}{\sqrt{np}})^{-k} (1 - \frac{\sqrt{p} x_n}{\sqrt{nq}})^{k-n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-k \cdot ln(1 + \frac{\sqrt{q} x_n}{\sqrt{np}}) \cdot exp(-(n-k) \cdot ln(1 - \frac{\sqrt{p} x_n}{\sqrt{nq}}) =$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-k(\frac{\sqrt{q} x_n}{\sqrt{np}} - \frac{q x_n^2}{2np}(1 + o(1))) - (n-k)(-\frac{\sqrt{p} x_n}{\sqrt{nq}} - \frac{p x_n^2}{2nq}(1 + O(1)))) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-x_n^2(1 - (\frac{1}{2} + o(1)))) =$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x_n^2}{2} + o(x_n^2)}$

$x_n(\frac{-k\sqrt{q}}{\sqrt{np}} + \frac{(n-k)\sqrt{p}}{\sqrt{nq}}) = x_n \frac{-kq + (n-k)p}{\sqrt{npq}} = x_n \frac{np-k}{\sqrt{npq}} = -x_n^2$

$\frac{kq}{2np}(1 + o(1)) + \frac{(n-k)p}{2nq}(1 + o(1)) = \frac{1}{2}(q(1 + \ldots x_n)(1 + o(1)) + p(1 - \ldots x_n)(1 + o(1))) = \frac{1}{2}(p+q)(1 + o(1))$

$P_n(k_1, k_2)$

$a_n = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}};\ P_n = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$

$\lim((P_n(k_1, k_2) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}) \int e^{\frac{-x^2}{2}} dx) = 0$