

Теория чисел и основные алгебраические структуры

- \mathbb{Z} - целые числа $+$ $-$ \cdot $>$
- \mathbb{N} - натуральные числа
- \mathbb{R} - вещественные числа

Аксиома индукции. $A \subset \mathbb{N}; A \neq \emptyset \Rightarrow$ в A есть наименьший элемент

Th. о делении с остатком

$$\begin{cases} a, b \in \mathbb{Z} \\ b \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \exists! q, r \in \mathbb{Z} : a = b \cdot q + r, 0 \leq r < |b|$$

Доказательство

- Существование

1. $a > 0, b > 0$ fix b

Пусть не так, есть плохие a (множество плохих $a \neq \emptyset$)

Пусть a_0 - наименьшее плохое, значит $a_0 - 1$ - хорошее, можно разделить с остатком

$$a_0 - 1 = b \cdot q + r, 0 \leq r < b, \text{ тогда}$$

$$a_0 = (b \cdot q + r) + 1, r + 1 < b$$

$$a_0 = b \cdot (q + 1), \text{ т.е. } a_0 - \text{хорошее}$$

2. $a < 0, b > 0$

$$-a = b \cdot q + r, 0 \leq r < b$$

$$a = -b \cdot q - r$$

2.1. $r = 0$

$$a = b \cdot (-q) + 0$$

2.2. $r > 0$

$$a = b \cdot (-q) - b + b - r = b \cdot (-q - 1) + b - r, 0 < r < b \Rightarrow 0 < b - r < b$$

3. $b < 0, -b > 0$

$$a = -b \cdot q + r = b \cdot (-q) + r, 0 \leq r < b$$

- Единственность

Пусть q, q', r, r'

$$a = b \cdot q + r$$

$$a = b \cdot q' + r'$$

$$a - a = b \cdot q + r - b \cdot q' - r'$$

$$0 = b \cdot (q - q') + (r - r')$$

$$r' - r = b \cdot (q - q'), q \neq q', |q - q'| \geq 1$$

$$|b \cdot (q - q')| \geq |b|$$

$$r', r \in [0; |b| - 1]$$

$$|r - r'| < |b| - 1 \text{ Противоречие } \Rightarrow q = q', r = r'$$

Def. $a, b \in \mathbb{Z}, a : b(b|a)$, если $\exists c \in \mathbb{Z} : a = bc$

Rem. $0 : 0 \forall x \in \mathbb{Z} 0 = 0 \cdot x$

Основные свойства делимости:

1. $0 : a$

2. $a : 1$
3. $a, b : c \Rightarrow a + b : c$
4. $a, k : c \Rightarrow k \cdot a : c$
5. $a : a$
6. $a : b, b : a \Rightarrow a = \pm b$
7. $a : b, b : c \Rightarrow a : c$
8. $ac : bc, c \neq 0 \Rightarrow a : b$

Доказательство

3. $a : c \Rightarrow \exists q_a : a = q_a \cdot c$
 $b : c \Rightarrow \exists q_b : b = q_b \cdot c$
 $a + b = (q_a + q_b) \cdot c$
6. $a = bx$
 $b = ay$
 $a = a y x$
 $a = a(xy) \Rightarrow \begin{cases} a = 0, b \neq 0 \\ a \neq 0, xy = 1 \Rightarrow x, y = \pm 1, a = \pm b \end{cases}$
8. $ac : bc, c \neq 0$
 $ac = bc \cdot x$
 $c \cdot a = c \cdot bx \Rightarrow a = bx \ (a : b)$

Задача: при каких $a, b, c \in \mathbb{Z}$ уравнение $ax + by = c$ имеет решение в целых числах (\Leftrightarrow из чего состоит $< a, b > ? \ c \in < a, b > ?$)

Def. Идеалом называется подмножество $I \subset \mathbb{Z}$:

1. $I \neq \emptyset$
2. $a, b \in I \Rightarrow a + b \in I$
3. $a \in I, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \cdot k \in I$

Ex. 1 $c \in \mathbb{Z}$

$< c > = \{n \cdot c\} = \{x \in \mathbb{Z} | x : c\}$ - идеал, порожденный c - главный идеал

Ex. 2 $c_1, c_2 \dots c_k \in \mathbb{Z}$

$< c_1, c_2 \dots c_k > = \{n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_k c_k | n_i \in \mathbb{Z}\}$

Th. в \mathbb{Z} любой идеал - главный

Доказательство

I - идеал в \mathbb{Z} , хотим $b \in \mathbb{Z}, I = < b >$

1. $I = \{0\} = < 0 >$
2. $\exists a \in I, a \neq 0 \Rightarrow a \in I, a \in \mathbb{N}$. Рассмотрим наименьший натуральный $b \in I$
Докажем $I = < b >$
 $< b > \subset I, b \in I, k \cdot b \in I$
 $a \in I$ делим с остатком
 $a = bq + r, 0 \leq r < b$
 $r = a - bq \ b \in I \Rightarrow -bq \in I \Rightarrow a - bq \in I \Rightarrow r \in I$
 $r \in \mathbb{N}$ - противоречие (b - наименьшее) $\Rightarrow r \notin \mathbb{N} \Rightarrow r = 0$

В частности $\forall a, b \in \mathbb{Z} \exists d : \langle a, b \rangle = \langle d \rangle$

Def. $a, b \in \mathbb{Z}$ НОД(a, b) = $\gcd(a, b) = (a, b)$ - такое $d \in \mathbb{Z}$, что:

1. $a : d, b : d$
2. $\forall d' : a : d', b : d' \Rightarrow d : d'$

Rem. НОД определен однозначно с точностью до знака

Доказательство

$$\begin{cases} d_1 = (a, b) \Rightarrow a : d_1, b : d_1, d_2 : d_1 \\ d_2 = (a, b) \Rightarrow a : d_2, b : d_2, d_1 : d_2 \end{cases} \Rightarrow d_1 = \pm d_2$$

Th. $a, b \in \mathbb{Z}$

1. $\exists (a, b) = d$
2. $\exists x, y \in \mathbb{Z} : ax + by = d$ - линейное представление НОДа
3. $ax + by = c$ имеет решение $\Leftrightarrow c : d$

Доказательство 1

Рассмотрим $I = \langle a, b \rangle$ - по предыдущей теореме он главный
 $\langle d \rangle = \langle a, b \rangle$

$d = d \cdot 1 \in I \Rightarrow d \in \langle a, b \rangle$, т.е. $\exists x, y : ax + by = d$

$d = (a, b) \begin{cases} a : d' \Rightarrow ax : d'b : d' \Rightarrow by : d' \\ b : d' \end{cases} \Rightarrow d : d'$

$a = a \cdot 1 + b \cdot 0 \in \langle a, b \rangle = \langle d \rangle \Leftrightarrow a : d$

Аналогично $b : d$

Доказательство 3

$$\Rightarrow: c = ax + by \begin{cases} a : (a, b) \\ b : (a, b) \end{cases} \Rightarrow c = ax + by : (a, b)$$

\Leftarrow : Пусть $c : (a, b) = d$, т.е. $c = d \cdot k, k \in \mathbb{Z}$

$$ax + by = d$$

$$a_{new} = ak, b_{new} = bk$$

$$a_{new}x + b_{new}y = dk$$

Lem. $(a, b) = (a, b - a)$

$$\begin{cases} a, b : d \Rightarrow b - a : d \\ a, b - a : d \Rightarrow b = a + (b - a) : d \end{cases} \Rightarrow \text{одинаковые общие делители}$$

Следствие: $b = aq + r \Rightarrow (a, b) = (a, r)$. Доказывается аналогично лемме

Алгоритм Евклида:

1. $a = bq + r_1$
 $b = r_1q + r_2$
 \dots
2. $(a, b) = (r_1, b) = (r_1, r_2) \dots, \exists i \in \mathbb{N} : r_i = 0$
3. $(a, b) = \dots = (r_k, r_k + 1) = (r_k, 0) = r_k$

Rem. $a_1, a_2 \dots a_k \in \mathbb{Z}$

$\exists (a_1, a_2 \dots a_k) = d \exists x_1 \dots x_k \in \mathbb{Z} :$

$$d = x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_ka_k$$

Доказательство

Рассмотрим идеал $\langle a_1, a_2 \dots a_k \rangle \ni d : \langle d \rangle = \langle a_1 \dots a_k \rangle$. Далее все как при $k = 2$

Def. $a, b \in \mathbb{Z}$ называются взаимнопростыми, если $(a, b) = 1$

Lm. a, b - взаимнопросты $\Leftrightarrow \exists x, y : ax + by = 1$

Доказательство

$$\Rightarrow (a, b) = 1 \Rightarrow \exists x, y : ax + by = 1$$

$$\Leftarrow ax + by = 1 \Rightarrow 1 : (a, b) \quad (a, b) = 1$$

Lm. об отбрасывании взаимнопростого множителя

$$a, b, c \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} ab : c \\ (a, c) = 1 \end{cases} \Rightarrow b : c$$

Доказательство

$$ab = cx$$

$$ay + cz = 1 \Rightarrow aby + cbz = b : c$$

Def. $p \in \mathbb{Z}$. p называется простым, если

$$1. \quad |p| > 1$$

$$2. \quad p \neq xy \quad |x|, |y| < |p|$$

Ясно, что это равносильно тому, что p имеет ровно 4 делителя $(\pm 1, \pm p)$

$$\textbf{Lm.} \quad p - \text{простое} \Leftrightarrow ab : p \Rightarrow \begin{cases} a : p \\ b : p \end{cases}, |p| > 1$$

Доказательство

$$\Leftarrow p = xy \Rightarrow xy : p \Rightarrow \begin{cases} x : p \\ y : p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| \geq p \\ |y| \geq p \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Пусть } p - \text{простое, } ab : p$$

$$\begin{cases} (a, p) = 1 \Rightarrow b : p \\ (a, p) = p \Rightarrow a : p \end{cases}$$

Основная теорема арифметики

$$x \in \mathbb{Z}, x \neq 0$$

$$1. \quad \exists p_1, p_2 \dots p_k - \text{простые} > 0$$

$$\varepsilon = \text{sgn}(n)$$

$$a_1, a_2 \dots a_k \in \mathbb{N}$$

$$x = \varepsilon p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}, p_i \neq p_j$$

$$2. \quad \text{Это разложение единственное с точностью до порядка сомножителей}$$

$$x = \varepsilon_1 p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$$

$$x = \varepsilon_2 q_1^{b_1} q_2^{b_2} \dots q_l^{b_l}$$

$$p_i, q_i > 0, \text{ тогда } \varepsilon_1 = \varepsilon_2, k = l$$

$$\exists \{i_1, i_2 \dots i_k\} = \{1, 2 \dots k\} :$$

$$p_{i_1} = q_1 \quad a_{i_1} = b_1, p_{i_2} = q_2 \quad a_{i_2} = b_2$$

Доказательство

Будем доказывать единственность и существование разложения $n = p_1 p_2 \dots p_s, p_i$ - простые, $n \in \mathbb{N}$

1. Существование:

Пусть есть плохие n (множество плохих непусто)

n_0 - наименьшее плохое

- n_0 - простое

$$p_1 = n_0, s = 1$$

$$n_0 = p_1 \text{ ??} \Rightarrow n_0 - \text{хорошее}$$

- n_0 - составное $\Rightarrow n_0 = n_1 n_2$ $n_1, n_2 < n_0$

$$n_1, n_2 - \text{хорошие} \Leftrightarrow \begin{cases} n_1 = p_1 p_2 \cdots p_k, p_i - \text{простое} \\ n_2 = q_1 q_2 \cdots q_s, q_i - \text{простое} \end{cases} \Rightarrow n_0 = n_1 n_2 = p_1 p_2 \cdots p_k q_1 q_2 \cdots q_s \Rightarrow n_0 - \text{хорошее}$$

2. Единственность:

Пусть есть плохие n

n_0 - наименьшее из плохих

$$\begin{cases} n_0 = p_1 p_2 \cdots p_k \\ n_0 = q_1 q_2 \cdots q_s \end{cases} \quad p_i, q_i - \text{простые}$$

$$p_1 p_2 \cdots p_k = n_0 : q_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} p_1 : q_1 \\ p_2 \cdots p_k : q_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} p_1 : q_1 \\ p_2 : q_1 \\ p_3 \cdots p_k : q_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{bmatrix} p_1 : q_1 \\ p_2 : q_1 \\ \cdots \\ p_k : q_1 \end{bmatrix}$$

$$\exists p_i : q_1$$

$$p_i, q_1 > 0 \quad q_1 \neq 1 \Rightarrow q_1 = p_i$$

Итак: $\exists i : p_i = q_1 \Rightarrow p_1 p_2 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_k = q_2 q_3 \cdots q_s = n_1$, $n_1 < n_0 \Rightarrow n_1$ - хорошее \Rightarrow разложения $p_1 p_2 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_k$ и $q_2 q_3 \cdots q_s$ совпадают ??

$n = \varepsilon p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ - каноническое разложение

$n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(n)}$, почти все $v_p(n) = 0$

$v_p(n)$ - степень вхождения p в n

Свойства степени вхождения:

$$1. \quad v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$$

$$2. \quad v_p(a+b) \geq \min(v_p(a), v_p(b))$$

если $v_p(a) \neq v_p(b)$, то $v_p(a+b) = \min(v_p(a), v_p(b))$

Rem. $v_p(a)$ - это такое n , что $a : p^n, a \not: p^{n+1}$

Доказательство

1. Напишем разложения:

$$a = p^{v_p(a)} \cdot \prod_{q \neq p} q^{v_q(a)}$$

$$b = p^{v_p(b)} \cdot \prod_{q \neq p} q^{v_q(b)}$$

$$ab = p^{v_p(a)+v_p(b)} \cdot \prod_{q \neq p} q^{v_q(a)+v_q(b)}$$

$$a = p^n x, \quad b = p^m y$$

НУО $n \geq m$

$$a+b = p^m p^{n-m} x + p^m y = p^m (p^{n-m} x + y) : p^m = p^{\min(n,m)}$$

$$n \neq m \quad p^{n-m} x : p \Rightarrow p^{n-m} x + y \not: p \Rightarrow p^m (p^{n-m} x + y) \not: p^{m+1}$$

$$m = v_p(a+b)$$

Следствия из ОТА

Утверждение: $a = \prod_{p_i \in \mathbb{P}} p_i^{a_i}$, $b = \prod_{p_i \in \mathbb{P}} p_i^{b_i}$

Тогда

1. $a : b \Leftrightarrow a_i \geq b_i \forall i$
2. $\exists c : a = c^k \Leftrightarrow a_i : k \forall i$
3. Число a имеет $\tau(a) = \prod (a_i + 1)$ натуральных делителей

Доказательство

1. $a = bx, x = \prod p_i^{x_i}$
 $\prod p_i^{a_i} = \prod p_i^{b_i} \cdot \prod p_i^{x_i} = \prod p_i^{b_i + x_i} \Leftrightarrow a_i = b_i + x_i \forall i \Leftrightarrow a_i \geq b_i \forall i$
2. Упражнение

$$3. \quad \begin{aligned} & b_1 \in \{0, 1 \dots a_1\} \\ |\{ \text{делители } a \}| &= |\{p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_s^{b_s} \mid b_2 \in \{0, 1 \dots a_2\} \dots \}| = |\{(b_1 \dots b_s) \mid b_i \leq a_i\}| = |\{0 \dots a_1\} \times \{0 \dots a_2\} \times \dots \times \\ & \quad b_s \in \{0, 1 \dots a_s\} \\ \{0 \dots a_s\}| &= (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_s + 1) \end{aligned}$$

Def. c - наименьшее общее кратное a, b
 $a, b, c \in \mathbb{Z}$ если

1. $c : a, c : b$
2. $c' : a, c' : b \Rightarrow c' : c$

Утверждение $a = \prod p_i^{a_i}, b = \prod p_i^{b_i}$
 $(a, b) = \prod p_i^{\min(a_i, b_i)}$
 $\exists [a, b] = \prod p_i^{\max(a_i, b_i)}$

Доказательство

1. $\min(a_i, b_i) \leq a_i$
 $\leq b_i$
 $\prod p_i^{a_i} : \prod p_i^{\min(a_i, b_i)}$, т.е. $a, b : \prod p_i^{\min(a_i, b_i)}$
 $a, b : \prod p_i^{c_i} \forall i \begin{matrix} c_i \leq a_i \\ c_i \leq b_i \end{matrix} \Rightarrow c_i \leq \min(a_i, b_i) \Rightarrow \prod p_i^{\min(a_i, b_i)} : \prod p_i^{c_i}$
2. НОК - аналогично

Отступление

Решаем диофантовы уравнения

$x^2 - y^2 = 100 \quad (x - y)(x + y) = 2^2 \cdot 5^2 \Rightarrow$ знаем $(x - y), (x + y)$ (находим их из разложения 100) \Rightarrow находим x, y

Отступление от теории чисел

Основные алгебраические структуры

Def. Группой называется пара $(G, *)$, где G - множество, $*$ - бинарная операция на G , такая, что:

1. $(a * b) * c = a * (b * c)$ - ассоциативность
2. $\exists e : a * e = e * a = a, e$ - нейтральный элемент
3. $\forall a \in G \exists a^{-1} : a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

Если $a * b = b * a$ (коммутативность), то G - абелева (коммутативная) группа

Rem. Простейшие свойства группы

1. Нейтральный элемент единственный
2. Обратный элемент единственный
3. $a, b \in G$
 - $a * x = b * x \Rightarrow a = b$ - свойство сокращения
 - Уравнения $a * x = b$ и $x * a = b$ имеют единственное решение

Доказательство (?)

- $a * x = b * x$
 $(a * x) * x^{-1} = (b * x) * x^{-1}$
 $a * (x * x^{-1}) = b * (x * x^{-1})$
 $a * e = b * e$
 $a = b$
- $a * x = b$
 $a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * b$
 $(a^{-1} * a) * x = a^{-1} * b$
 $e * x = a^{-1} * b$
 $x = a^{-1} * b$
- $x * a = b$
 \dots
 $x = b * a^{-1}$

Главный пример ассоциативной, но не коммутативной операции – композиция

$f : A \rightarrow B$

$$\{(a, f(a)) \mid \begin{matrix} a \in A \\ f(a) \in B \end{matrix}\}$$

$g : B \rightarrow C$

$b \in B; g(b) \in C$

$a \rightarrow f(a) \rightarrow g(f(a)) \in C$

$g \circ f : A \rightarrow C$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in A$

Rem. Если $C \neq A$, то $f \circ g$ не существует

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$

$h \circ (g \circ f) : A \rightarrow D$

$(h \circ g) \circ f : A \rightarrow D$

и $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

$\forall a \in A \quad (h \circ (g \circ f))(a) = h(g \circ f)(a) = h(g(f(a))) = ((h \circ g) \circ f)(a)$

Def. M – множество

$End(M) = \{f : M \rightarrow M\}$

Тогда на $End(M)$ определена бинарная ассоциативная операция \circ

$f, g : M \rightarrow M; f \circ g : M \rightarrow M \rightarrow M$

$End(M)$ замкнуто относительно композиции

Аксиомы:

1. Ассоциативность есть

2. $id_m(x) = x \forall x \in M$

$$(f \circ id_m)(x) = f(id_m(x)) = f(x)$$

$$(id \circ f)(x) = id(f(x)) = f(x)$$

Т.е. $f \circ id = f$ и $id \circ f = f$

id_m – нейтральный элемент

Rem. Если в определение группы взять только аксиомы 1 и 2, то G – моноид. $End(M)$ – моноид

$$fix f(x) = a$$

$$g(f(x)) = f(a) = fix$$

$$g \circ f \neq id_m \forall g$$

Th. $f : M \rightarrow M$ имеет обратное $\Leftrightarrow f$ – биекция

Т.е. $\forall y \in M f(x) = y$ имеет единственно решение

$$f^{-1}(y) = x$$

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(y) = x$$

$$f \circ f^{-1}(y) = f(x) = y$$

$$\begin{cases} f^{-1} \circ f = id \\ f \circ f^{-1} = id \end{cases} \Rightarrow f^{-1} \text{ – биекция}$$

Def. M – множество

$$S(M) \subset End(M)$$

$$S(M) = \{f \in End(M) | f \text{ – биекция}\}$$

$S(M)$ – симметрическая группа на множестве M , группа относительно \circ

Rem. id – биекция; $id^{-1} = id$

$$M = \{1, 2 \dots n\}$$

$S(M) = S_n$ – симметричная группа (группа перестановок)

Def. Кольцом называется тройка $(R, +, \cdot)$, где

R – множество

$+, \cdot$ – бинарные операции на R ($|R| > 1$)

Такие, что:

1. $(R, +)$ – абелева группа

$$\bullet a + b = b + a$$

$$\bullet (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$\bullet \exists 0 : a + 0 = a$$

$$\bullet \forall a \exists (-a) : a + (-a) = 0$$

5. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ – дистрибутивность
 $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

6. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ – у нас выполняется всегда

$$7. \exists 1 : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

$$8. a \cdot b = b \cdot a$$

$$9. \forall a \in R, a \neq 0 \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = 1$$

Если выполняется 1-6, это ассоциативное кольцо

Если выполняется 1-7, это ассоциативное кольцо с 1

Если выполняется 1-6 и 8, это (ассоциативное) коммутативное кольцо

Если выполняется 1-8, это (ассоциативное) коммутативное кольцо с 1

Если выполняется 1-9, это поле

Если выполняется 1-7 и 9, это тело

Простейшие свойства колец:

1. $a \cdot 0 = 0$
2. $a \cdot (-1) = -a$

Rem. R – поле $\Rightarrow \forall a, b \neq 0 \ a : b$

$$a = b \cdot \frac{a}{b} = b \cdot (a \cdot b^{-1})$$

Значит бессмысленны понятия простых, разложения на простые

Кольца вычетов

$M, \{(a, b)\} \subset M \times M$ – отношения на множестве M
 aRb

- $aRb \Rightarrow bRa$ – симметричность
- $aRb, bRc \Rightarrow aRc$ – транзитивность
- aRa – рефлексивность

Если выполняются все 3 пункта, то это отношения эквивалентности

R – отношения эквивалентности

$a \in M$

$\bar{a} = \{b \in M | aRb\}$ – класс Эквивалентности a

Th. Любые два класса эквивалентности \bar{a}, \bar{b} :
$$\begin{cases} \bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset \\ \bar{a} = \bar{b} \end{cases}$$

В итоге $M = \bigcup \bar{a}$ – разбиение на классы

Def. $a, b, n \in \mathbb{Z}$ a сравнимо с b по модулю n , если $(a - b) : n$ обозначается $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow \mathbb{Z}$ разбивается на классы эквивалентности. Обозначение: R – отношение, M/R – множество классов эквивалентности, \sim – эквивалентность M/\sim – множество классов эквивалентности – фактормножество

Доказательство

P: $a - a = 0 : n \Rightarrow a \equiv a$

C: $a \equiv b \Rightarrow a - b : n \Rightarrow b - a : n \Rightarrow b \equiv a$

T: $\begin{cases} a \equiv b \\ b \equiv c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b : n \\ b - c : n \end{cases} \Rightarrow a - c = (a - b) + (b - c) : n \Rightarrow a \equiv c$

Rem. $a \equiv b \Leftrightarrow a$ и b имеют одинаковые остатки от деления на n

Доказательство

\Leftarrow Упражнение

$$\Rightarrow \begin{cases} a = q_a \cdot n + r \\ b = q_b \cdot n + r \end{cases} \Rightarrow a - b = n(q_a - q_b) + 0 \Rightarrow a \equiv b$$

$$(r_1 - r_2 \neq 0 \Rightarrow 0 < |r_1 - r_2| < n; r_1 - r_2 \not\equiv 0)$$

Элементы \mathbb{Z}/\equiv – вычеты (классы вычетов) по модулю n

$$\bar{3} = \{3; 3 \pm n; 3 \pm 2n \dots\}$$

Из Rem $\Rightarrow |\mathbb{Z}/\equiv| = n$

$$\mathbb{Z}/\equiv = \{\bar{0}; \bar{1} \dots \bar{n-1}\}$$

Обозначается $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Свойства сравнений:

$$\begin{cases} a \equiv b \\ c \equiv d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c \equiv b + d \\ ac \equiv bd \end{cases}$$

Доказательство

1. $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d) : n$
2. $ac \equiv bc$, т.к. $ac - bc = c(a - b) : n$
 $ad \equiv bd$, т.к. $ad - bd = d(a - b) : n$

По транзитивности $ac \equiv bc \equiv bd$

$$a \equiv b \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b} \text{ в } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Каноническое отображение:

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$a \mapsto \bar{a} = \{a + nk | k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2} \dots \overline{n-1}\}$$

$$\begin{cases} a \equiv b \\ c \equiv d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c \equiv b + d \\ ac \equiv bd \end{cases}$$

Эти свойства позволяют перенести на $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ структуру кольца:

$$\bar{a} + \bar{b} := \overline{a + b}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$$

Зачем для этого свойства?

Пусть x, y – классы

$$\begin{aligned} \text{Строим } x + y : \text{выбираем } a : \bar{a} = x \\ b : \bar{b} = y \quad x + y := \overline{a + b} \end{aligned}$$

Нужно показать, что результат не зависит от выбора a и b

$$\begin{cases} \bar{a} = \bar{c} \\ \bar{b} = \bar{d} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv c \\ b \equiv d \end{cases} \Rightarrow a + c \equiv c + d \Leftrightarrow \overline{a + b} = \overline{c + d}$$

С умножением аналогично

Th. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ – коммутативное ассоциативное кольцо с 1

Доказательство

Надо проверить 8 аксиом, очев

$$\text{Пусть } v \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad f(x) = bx$$

$$f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Как устроена?

В \mathbb{Q} : $f(x) = bx$ – биекция ($b \neq 0$)

В \mathbb{Z} : $f(x) = bx$ – инъекция, но не сюръекция

- $bx = by \Rightarrow x = y$
- Не все числа вида bx

Утверждение f – биекция $\Leftrightarrow (a, n) = 1$; $\bar{a} = b$, иначе это даже не инъекция

Доказательство

- $(b, n) = 1 \Rightarrow \exists y, z : by + nz = 1$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1} \dots \overline{n-1}\} \quad b = \bar{a}$$

$$\text{Значения } f : \overline{0a}, \overline{1a} \dots \overline{(n-1)a}$$

$$\text{Заметим, что если } \overline{ka} = \overline{la}, \text{ т.е. } ka \equiv la, \text{ то } \begin{cases} (k-l)a : n \\ (a, n) = 1 \end{cases} \Rightarrow k-l : n \Rightarrow \bar{k} = \bar{l}$$

Таким образом f – инъективно $\Rightarrow \overline{0a}, \overline{1a} \dots \overline{(n-1)a}$ – попарно различные классы \Rightarrow это $\{\bar{0}, \bar{1} \dots \overline{n-1}\} \Rightarrow f$ – сюръекция

Упражнение: доказать сюръективность напрямую через $ay + bz = 1$

- Пусть $(a, n) = d \neq 1$

$$a = dz; \quad n = dy$$

Положим $x = \bar{y} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Тогда $f(x) = vx = \overline{dz} \cdot \bar{y} = \overline{dzy} = \overline{dy} \cdot \bar{z} = 0 \cdot \bar{z} = 0$ и $f(0) = 0$

$x \neq \bar{0} = \{0 + nk | k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow f - \text{неинъективна}$

Следствие p – простое, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ – поле

Доказательство

Пусть $\bar{a} \neq \bar{0}$, т.е. $a \not\equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow (a, p) = 1$, т.е. $x \rightarrow \bar{a} \cdot x$ сюръективно

то есть $\exists b \in \mathbb{Z} : \bar{a} \cdot \bar{b} = 1 \Rightarrow \bar{b} = \bar{a}^{-1}$, т.е. $y \cdot \bar{a}$ есть обратный $\Rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ – поле

Как найти этот обратный?

$\bar{a} \cdot \bar{x} = \bar{1}$; $ax \equiv 1 \Leftrightarrow ax = 1 + py \Leftrightarrow ax - py = 1$ – линейное представление НОДа, т.е. x, y существуют

Пусть n – составное: $n = pq$; $p, q > 1$

$$\bar{p} \cdot \bar{q} = \bar{0}$$

$\bar{p}, \bar{q} \neq \bar{0}$ – кольцо с делителями нуля

Def. Область целостности – кольцо без делителей нуля

Lem.

1. Любое поле – область целостности
2. В области целостности $\begin{cases} ab = ac \\ a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow b = c$

Доказательство

1. K – поле; $a, b \in K : ab = 0$

Пусть $a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1}$

$$a^{-1} \cdot ab = a^{-1} \cdot 0 = 0, \text{ т.е. } b = 0$$

$$\text{Итак } ab = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

2. $ab = ac$; $a \neq 0 \Rightarrow ab - ac = 0 \Rightarrow a(b - c) = 0 \Rightarrow b - c = 0 \Rightarrow b = c$

Rem. $\mathbb{Z}/0\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

$$ax + by = c; \quad (a, b) = 1$$

$$ax = c - by$$

$$ax \equiv c$$

$$\bar{a} \cdot \bar{x} = \bar{c} \text{ в } \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$$

$$\exists! \bar{x}_0 : (\bar{a}, \bar{b}) = 1$$

$$ax \equiv c \Leftrightarrow x \equiv x_0, \text{ т.е. } x = x_0 + bk, k \in \mathbb{Z}$$

Тогда $y = \dots$

$$\text{Утверждение } \begin{cases} (m, n) = 1 \\ a, b \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$1. \exists x \in \mathbb{Z} : \begin{cases} \bar{x} = \bar{a} \text{ в } \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\ \bar{x} = \bar{b} \text{ в } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - a : m \\ x - b : n \end{cases}$$

2. Пусть x_0 – такое, тогда все x , удовлетворяющие условию, это \bar{x}_0 в $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$

Доказательство

$$1. x - a : m, \text{ т.е. } \begin{cases} x - a = my \\ x - b = nz \end{cases}$$

$my + a = x = nz + b \Rightarrow my - nz = b - a$ – имеет решение, т.к. $(m, n) = 1 \Rightarrow \exists$ соответствующие x, y

2. В $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ $\bar{x} = \bar{a} = \bar{x}_0$

В $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $\bar{x} = \bar{b} = \bar{x}_0$

$$\text{Т.е. } \begin{cases} x \equiv x_0 \pmod{m} \\ x \equiv x_0 \pmod{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 : m \\ x - x_0 : n \\ (a, b) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x - x_0 : mn \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{x}_0 \text{ в } \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$$

Смысл: каждой паре остатков по модулю m и по модулю n соответствует единственный остаток по модулю mn

$m = 3; n = 5$

	0	1	2	3	4
0	0	6	12	3	9
1	10	1	7	13	4
2	5	11	2	8	14

Биекция между $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

Отступление: произведение групп и колец

Def. R_1, R_2 – кольца

Их произведение – это $(R_1 \times R_2, +, \cdot)$, где $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$

Утверждение это и правда кольцо (аксиомы наследуются)

Доказательство

Очев

Rem. $R_1 \times R_2$ – не область целостности $(1, 0) \cdot (0, 1) = (0, 0)$

с группами аналогично:

G_1, G_2 – группы $\Rightarrow G_1 \times G_2$ – группа

$(g_1, g_2) \cdot (g'_1, g'_2) = (g_1 g'_1, g_2 g'_2)$

Хотим сказать

$(m, n) > 1 \Rightarrow \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ – это одно и то же

Def. R_1, R_2 – кольца

Изоморфизм между R_1 и R_2 – биекция

$f : R_1 \rightarrow R_2$ такая, что

$$1. f(a + b) = f(a) + f(b)$$

$$2. f(ab) = f(a)f(b)$$

$$3. f(1) = 1$$

R_1 и R_2 изоморфны, если существует изоморфизм

G_1, G_2 – группы

Изоморфизм $f : G_1 \rightarrow G_2$ – биекция:

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in G_1$$

G_1 и G_2 изоморфны, если \exists изоморфизм $f : G_1 \rightarrow G_2$

$G_1 \cong G_2$. Аналогично $R_1 \cong R_2$ (R_1, R_2 – кольца)

Rem. e_1, e_2 – нейтральные элементы в G_1, G_2 ; f – изоморфизм $\Rightarrow f(e_1) = e_2$

$$e_1 \cdot e_1 = e_1$$

$$\begin{cases} f(e_1 \cdot e_1) = f(e_1) \\ f(e_1 \cdot e_1) = f(e_1) \cdot f(e_1) \end{cases} \Rightarrow f(e_1) \cdot f(e_1) = f(e_1) \cdot e_2 \Rightarrow f(e_1) = e_2$$

Аналогично $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$

Rem2. Здесь биективность не важна

Def. Гомоморфизм отображение $f : G_1 \rightarrow G_2 : f(xy) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in G_1$

Def. Гомоморфизм колец: $f : R_1 \rightarrow R_2$

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in R_1$$

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Def. Гомоморфизм колец с 1: требуем еще $f(1_{R_1}) = 1_{R_2}$

Def. Изоморфизм между множествами $f : M_1 \rightarrow M_2$ – биекция

$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad f(x) = kx \quad x \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} k(x+y) = kx + ky \\ k(xy) \neq kx \cdot ky \end{cases} \Rightarrow f$ – не гомоморфизм колец ($k \neq 1$), но гомоморфизм групп

А если $k = \pm 1 \Rightarrow$ изоморфизм

G – группа $f : G \rightarrow G \quad f(g) = g^{-1}$ – биекция \Rightarrow изоморфизм, если G – абелева

$\begin{cases} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = e^x \\ e^{x+y} = e^x \cdot e^y \end{cases} \Rightarrow f$ – гомоморфизм, но точнее это $f : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$, но не изоморфизм

$g : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \cdot)$ – изоморфизм

$g(x) = e^x$

Th. Китайская теорема об остатках

1. $(m, n) = 1 \quad Z/mnZ \cong Z/mZ \times Z/nZ$
2. $m_1, m_2 \dots m_k \in Z \quad (m_i, m_j) = 1$
 $Z/m_1 m_2 \dots m_k Z \cong Z/m_1 Z \times \dots \times Z/m_k Z$
3. $\forall a_1, a_2 \dots a_n \in Z; \quad m_1, m_2 \dots m_n \in Z : (m_i, m_j) = 1$
 $\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \vdots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$ – имеет решение в Z , единственное по модулю $m_1 m_2 \dots m_n$

Доказательство

Индукция по k . База $k = 2$

- База: строим $\varphi : Z/mnZ \rightarrow Z/mZ \times Z/nZ$

$$\overline{a_{mn}} \rightarrow (\overline{a_m}, \overline{a_n})$$

$$(\overline{a_{mn}} = \overline{b_{nm}} \Rightarrow \overline{a_m} = \overline{b_m})$$

φ – гомоморфизм:

$$\varphi(x+y) = \varphi(\overline{a_{mn}} + \overline{b_{mn}}) = \varphi(\overline{a+b_{mn}}) = (\overline{a+b_m}, \overline{a+b_n}) = (\overline{a_m} + \overline{b_m}, \overline{a_n} + \overline{b_n}) = (\overline{a_m}, \overline{a_n}) + (\overline{b_m}, \overline{b_n}) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

φ – биекция (смотри утверждение перед табличкой 3×5)

$$\forall a, b \exists x : \begin{cases} x \equiv a \pmod{m} \\ x \equiv b \pmod{n} \end{cases} \quad \text{и все такие } x \text{ имеют вид } x = x_0 + kmn$$

- Переход $k \rightarrow k+1$

$m_1, m_2 \dots m_{k+1}$ попарно взаимнопросты $\Rightarrow (m_1 m_2 \dots m_k, m_{k+1}) = 1 \Rightarrow$ по базе

$$Z/m_1 m_2 \dots m_{k+1} Z \cong Z/m_1 m_2 \dots m_k Z \times Z/m_{k+1} Z$$

По индукционному предположению $Z/m_1 \dots m_k \cong Z/m_1 Z \times \dots \times Z/m_k Z$

$$\text{Итого } Z/m_1 \dots m_{k+1} Z \cong Z/m_1 \dots m_k Z \times Z/m_{k+1} Z \cong (Z/m_1 Z \times Z/m_2 Z \times \dots \times Z/m_k Z) \times Z/m_{k+1} Z \cong Z/m_1 Z \times \dots \times Z/m_k Z \times Z/m_{k+1} Z$$

Rem. $(A \times B) \times C \neq A \times B \times C$

$$((a, b), c) \rightarrow (a, b, c)$$

- φ – сюръективно, т.е. $\forall y_1 \dots y_n \quad y_i \in Z/m_i Z$
 $\exists z \in Z/m_1 \dots m_n Z : \varphi(z) = (y_1, y_2 \dots y_n)$

Возьмем $y_i = \overline{a_i}$ $a_i \in Z$ $z = \overline{x m_1} \cdots m_n \Rightarrow \begin{cases} \overline{x m_1} = y_1 \\ \overline{x m_2} = y_2 \\ \dots \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \dots \end{cases}$

Единственность x по модулю $m_1 \cdots m_n$ – инъективность φ

"Явная формула" для φ^{-1}

Найдем $\varphi^{-1}(1_{m_1}, 0_{m_2} \cdots 0_{m_k})$ это \overline{a} : $a - 1 : m_1$
 $a : m_2, \dots, m_k \Leftrightarrow a : m_2 \cdots m_k$

$a = m_2 \cdots m_k \cdot y$; $m_2 \cdots m_k \cdot y - 1 = m_1 x$

$m_2 \cdots m_k \cdot y - m_1 x = 1$. Далее ищем y

$a = a_1$ $\varphi(\overline{a_1}) = (1, 0 \cdots 0)$

Аналогично находим $\varphi(\overline{a_i}) = (0, 0 \cdots 1_{m_i} \cdots 0)$

Теперь $\forall \overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_k}$ ($b_i \in Z/m_i Z$)

$\varphi(\overline{a_1 b_1} + \overline{a_2 b_2} + \cdots + \overline{a_k b_k}) = \varphi(\overline{b a_1}) + \varphi(\overline{b_2 a_2}) + \cdots + \varphi(\overline{b_k a_k}) = b_1 \varphi(\overline{a_1}) + b_2 \varphi(\overline{a_2}) + \cdots + b_k \varphi(\overline{a_k}) = b_1(1, 0 \cdots 0) + b_2(0, 1, 0 \cdots 0) + \cdots + b_k(0 \cdots 0, 1)$

Rem. $\varphi(3x) = \varphi(\overline{x} + \overline{x} + \overline{x}) = 3\varphi(\overline{x})$

Def. G – группа. $a \in G$, порядок a – $\min k \in N : a^k = e$. Если такого k нет, то порядок $= \infty$. Обозначение: $\text{ord}(a)$

Lm.

1. $\text{ord}(a)$ – количество различных элементов в последовательности $(e, a, a^2, a^3 \cdots)$
2. $\text{ord}(a) = \infty \Rightarrow$ все элементы различны
3. $\text{ord}(a) = k \in N$, тогда $a^m = a^n \Leftrightarrow m \equiv n \pmod{k}$

Доказательство

1. 2, 3 \Rightarrow 1 – упражнение

2. $\text{ord}(a) = \infty$ $a^m = a^n$, НУО $m > 0$

$a^m \cdot a^{m-n} = a^n \cdot e \Rightarrow a^{m-n} = e$; $m - n \in N$, но $\text{ord}(a) = \infty$???

3. $\text{ord}(a) = k$ $m, n \in N$

$m = q_m \cdot k + r_m$; $n = q_n \cdot k + r_n$

$$\begin{cases} a^m = a^{q_m \cdot k + r_m} = (a^k)^{q_m} \cdot a^{r_m} = a^{r_m} \\ a^n = a^{r_n} \\ r_m = r_n \end{cases} \Rightarrow a^m = a^n \Rightarrow a^{r_m} = a^{r_n} \Rightarrow a^{r_m - r_n} = e \text{ ???}$$

Th. Теорема Лагранжа

G – группа, $|G| = n$ ($|G|$ – порядок группы)

$a \in G$; $\text{ord}(a) = k \Rightarrow n : k$

Доказательство

Нарисуем оргграф $\forall x \in G : x \rightarrow ax$

$\forall x \rightarrow$ цикл $x \rightarrow ax \rightarrow a^2 x \rightarrow \cdots \rightarrow a^k x = x$

Все элементы G разбились на циклы длины $k \Rightarrow n : k$

Следствие: малая теорема Ферма

$G = (Z/pZ)^*$; $|(Z/pZ)^*| = p - 1$

$\text{ord}(\overline{a}) = k \Leftrightarrow \overline{a}^k = \overline{1}$; $p - 1 : k$

$a^{p-1} = (\overline{a}^k)^{\overline{1}} = 1$

В Z/pZ $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$ $a \not\equiv 0 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Leftrightarrow a^{p-1} - 1 : p$

Th. Переформулировка теоремы Лагранжа

G – конечная $\Rightarrow a^{|G|} = e$

$e, a, a^2 \dots$ преиодична с периодом $|G|$, но возможно это не наименьший период
 $G = (Z/pZ)^* \Rightarrow a^{p-1} = 1$ в $Z/pZ \Leftrightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \ (\forall a \not\equiv p)$

Или $a \in Z; a^p - a : p \Leftrightarrow a(a^{p-1} - 1) : p \Leftrightarrow \begin{cases} a : p \\ a^{p-1} - 1 : p \end{cases}$

Что с произвольным n ? Хотим $a^k \equiv 1 \pmod{n}$

$(a, n) \neq 1 \Rightarrow (a^k, n) \neq 1 \Rightarrow a^k \not\equiv 1 \pmod{n} \ (\forall k > 0) \Rightarrow$ вопрос имеет смысл только для $(a, n) = 1 \Rightarrow \bar{a}$ – обратим в Z/nZ

По теореме Лагранжа $b \in (Z/nZ)^* \Rightarrow b^{|(Z/nZ)^*|} = 1$

Переформулировка: $(a, n) = 1 \Rightarrow a^{|(Z/nZ)^*|} \equiv 1 \pmod{n}$ – теорема Эйлера

Def. Функция Эйлера $\varphi(n) = |(Z/nZ)^*|$

Rem. $\varphi(n) = \{x \in \{0, 1 \dots n-1\} | (x, n) = 1\}$

Ex. p – простое. Знаем $(Z/pZ)^* = (Z/pZ) \setminus \{0\}$

$\varphi(p) = p - 1$

Как найти $\varphi(n)$? $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots$

Rem1. p – простое $\Rightarrow \varphi(p^k) = \{x \in \{0, 1 \dots p^k - 1\} | (p^k, x) = 1\} = \{x = 0 \dots p^k - 1 | x \not\equiv p\} = p^k - \{x = 0 \dots p^k - 1 | x \equiv p\} = p^k - \frac{p^k}{p} = p^k - p^{k-1}$

Rem2. Мультипликативность φ

$m, n \in N \ (m, n) = 1 \Rightarrow \varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$

φ – мультипликативная функция

Remrem. $\tau(n)$ – количество делителей, $\sigma(n)$ – сумма делителей. Обе эти функции тоже мультипликативны (упражнение)

Явная формула для функции Эйлера

$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}) = \varphi(p_1^{a_1}) \dots \varphi(p_k^{a_k}) = (p_1^{a_1} - p_1^{a_1-1}) \dots (p_k^{a_k} - p_k^{a_k-1}) = p_1^{a_1} (1 - \frac{1}{p_1}) \dots p_k^{a_k} (1 - \frac{1}{p_k}) = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} (1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_k}) = n (1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_k}) = n \prod_{p \in P: p|n} (1 - \frac{1}{p})$$

Ex. $\varphi(600) = 600 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 160$

Rem. $a^{\varphi(n)} = 1 \ (\forall a \in (Z/nZ)^*)$

$n : p, q \Rightarrow$ показатель $\varphi(n)$ можно улучшить

$n = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow \varphi(n) = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$

По теореме Эйлера $(a, 105) = 1 \Rightarrow a^{48} \equiv 1 \pmod{105}$

$$\begin{aligned} \text{На самом деле (применим МТФ)} \ (a, 105) = 1 \Rightarrow a \not\equiv 3, 5, 7 \Rightarrow \begin{cases} a^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ a^4 \equiv 1 \pmod{5} \\ a^6 \equiv 1 \pmod{7} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a^{12} \equiv 1 \pmod{3} \\ a^{12} \equiv 1 \pmod{5} \\ a^{12} \equiv 1 \pmod{7} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow a^{12} \equiv 1 \pmod{105} \end{aligned}$$

Доказательство мультипликативности

Знаем: $(m, n) = 1 \Rightarrow Z/mnZ \cong Z/mZ \times Z/nZ \Rightarrow \varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

φ – изоморфизм. x – обратим $\Leftrightarrow \varphi(n)$ – обратим

x – обратим $\Leftrightarrow \exists y : x \cdot y = 1. \varphi(xy) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) = 1 = \varphi(1) \Rightarrow \varphi$ – обратим

Обратно: $\varphi(x)$ – обратим. $\varphi(x) \cdot z = 1 \Rightarrow \varphi^{-1}(\varphi(x) \cdot z) = \varphi^{-1}(1). \varphi^{-1}(\varphi(x)) \cdot \varphi^{-1}(z) = \varphi^{-1}(1) \Rightarrow x$ – обратим

Следствие: $(Z/mnZ)^* = (Z/mZ \times Z/nZ)^*$

Утверждение. R_1, R_2 – кольца. $(R_1 \times R_2)^* = R_1^* \times R_2^*$

Доказательство

$$\begin{aligned} (r_1, r_2) \in R_1 \times R_2 \text{ – обратим} &\Leftrightarrow \exists (s_1, s_2) : (r_1, r_2)(s_1, s_2) = 1_{R_1 \times R_2} \Leftrightarrow (r_1 s_1, r_2 s_2) = (1_{R_1}, 1_{R_2}) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists s_1 : r_1 s_1 = 1 \\ \exists s_2 : r_2 s_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 \in R_1^* \\ r_2 \in R_2^* \end{cases} \end{aligned}$$

Следствие: $|(Z/mZ \times Z/nZ)^*| = |(Z/mZ)^* \times (Z/nZ)^*| = |(Z/mZ)^*| \cdot |(Z/nZ)^*|$

Итого: $\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$

Вопрос: $p \in P$. \exists ли $\bar{a} \in Z/pZ : \{\bar{a}, \bar{a}^2 \dots\} = \{\bar{1}, \bar{2} \dots \overline{p-1}\}$

Def. (G, \cdot) – группа; $a \in G$

$\langle a \rangle = \{a^k | k \in Z\}$ – группа, порожденная элементом a

Утверждение. Это действительно группа (относительно \cdot)

Доказательство

- Замкнутость. $x, y \in \langle a \rangle$
 $x = a^e; y = a^m \Rightarrow xy = a^{e+m} \in \langle a \rangle$
- Ассоциативность – очев
- $\exists e \in G; e = a^0 \in \langle a \rangle$
- $x \in \langle a \rangle \Rightarrow x = a^k \Rightarrow x^{-1} = a^{-k} \in \langle a \rangle$

$\langle a \rangle$ – подгруппа в G . Может быть $\langle a \rangle = G$ или $\langle a \rangle \neq G$

Def. Если $\exists a \in G : \langle a \rangle = G \Rightarrow G$ называется циклической

Th. G – циклическая

1. $|G| = \infty \Rightarrow G \cong (Z, +)$
2. $|G| = n < \infty \Rightarrow G \cong (Z/nZ, +)$

Доказательство

$G = \langle a \rangle$. Знаем: $\text{ord}(a) = k \Rightarrow$ в $\langle a \rangle$ k элементов. Иначе ($\text{ord}(a) = \infty$) \Rightarrow все $\{a^k | k \in Z\}$ попарно различны

1. Строим гомоморфизм
 $\varphi Z \rightarrow G; k \rightarrow a^k$
 Это биекция (см. выше) и $\varphi(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ – точно гомоморфизм
2. ($k = n$) $\text{ord}(a) = n$. $\langle a \rangle = \{e, a, a^2 \dots a^{n-1}\}$
 $(a^n = e; a^{-1} = a^{n-1})$
 $\varphi : Z/nZ \rightarrow \langle a \rangle; \bar{p} \rightarrow a^p$ – биекция и гомоморфизм (упражнение)
 Корректность: $q : \bar{p} = \bar{q} \Rightarrow p - q : n$
 $p = q + ln \Rightarrow a^p = a^{q+ln} = a^q \cdot (a^n)^l = a^q \Rightarrow a^p = a^q$

Ex. $(Z/3Z)^* = \langle 2 \rangle : \bar{2}^2 = 1$ ($\text{ord}(\bar{2}) = 2$)

Изоморфизм: $(Z/2Z, +) \rightarrow (Z/3Z, \cdot)$

$\bar{0}_2 \leftrightarrow \bar{1}_3$

$\bar{1}_2 \leftrightarrow \bar{2}_3$

$(Z/5Z)^* = \{1, 2, 3, 4\} = \langle \bar{2} \rangle$ ($\text{ord}(2) = 4$). Поэтому $(Z/5Z)^* \cong (Z/4Z, +)$

Th. $p \in P \Rightarrow (Z/pZ)^*$ – циклическая

Следствие. $(Z/pZ)^* \cong (Z/(p-1)Z, +)$

$\exists a \in Z : \langle \bar{a} \rangle = \{1, 2 \dots p-1\}$

a называется первообразным корнем по модулю p

a – первообразный корень $\text{mod } p \Leftrightarrow \text{ord}(\bar{a}) = p-1$, т.е. $|\langle \bar{a} \rangle| = p-1 = |(Z/pZ)^*|$

Lm. G – группа $|G| = N$. $f : G \rightarrow G : f(a) = a^k$

Тогда f_k – биекция $\Leftrightarrow (k, N) = 1$

Доказательство

Только \Leftarrow :

$(k, N) = 1 \Rightarrow \exists x, y : xk + yN = 1 \Rightarrow \forall a \in G; a = a^1 = a^{xk+yN} = (a^k)^x \cdot (a^N)^y$ по переформулировке теоремы
Лагранжа $= (a^k)^x \Rightarrow f_x$ – обратное к f_k

Алгоритм RSA (шифрование с открытым ключом)

Алиса (А) хочет получать сообщения от Боба (В)

А придумывает p, q – простые (достаточно большие) $N = pq$

$\varphi(N) = (p-1)(q-1)$. А выбирает $x : (x, \varphi(N)) = 1$ и $y : (x-y) \equiv 1 \pmod{\varphi(N)}$

Тогда как в Лм. $f_x(a) = a^x; f_y(a) = a^y$ – взаимно обратные отображения

А сообщает В x

В хочет послать А сообщение. $a \in (Z/NZ)^*$

Шифрование: $a \rightarrow a^x = b$ и посылает А

А получает $b = a^x$, вычисляет $b^y = a$

Что нужно чтобы дешифровать b ? Надо знать y

N, x известны всем. $xy \equiv 1 \pmod{\varphi(N)}$

$yx + \varphi(N)z = 1$ – линейное Диофантово уравнение. Легко решается зная $x, \varphi(N)$

Нужно сделать так, чтобы $\varphi(N)$ было сложно узнать

Вопрос: как найти большие простые числа?

p – большое натуральное число. Как проверить, что p – простое?

Рассмотрим $n \in \mathbb{N}$. $n-1 = p_1^{a_1} \dots p_s^{a_s}$, т.е. $n = \prod p_i^{a_i} + 1$. Простое ли n ?

Th. Тест Люка

Пусть $n = \prod p_i^{a_i} + 1, a \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n} \\ a^{\frac{n-1}{p_i}} \not\equiv 1 \pmod{n} \end{cases} \Rightarrow n - \text{простое}$$

Доказательство

В $(Z/mZ)^*$ $\text{ord}(a) = ?$

$$\begin{cases} a^{n-1} \equiv 1 \Leftrightarrow n-1 : \text{ord}(a) \\ a^{\frac{n-1}{p_i}} \not\equiv 1 \Leftrightarrow \frac{n-1}{p_i} \not: \text{ord}(a) \end{cases} \Rightarrow n-1 = \text{ord}(a) \Rightarrow |(Z/nZ)^*| \geq |<a>| = n-1$$

$\varphi(n) \geq n-1 \Leftrightarrow 1, 2 \dots n-1$ взаимнопросты с $n \Rightarrow n$ – простое

Вопрос: какая доля $a \in \{1, 2 \dots n\}$ удовлетворяет условию Люка, если n – простое?

$a \in \{1 \dots n-1\} \Rightarrow \bar{a} \in (Z/nZ)^*$. Какова вероятность: $\text{ord}(\bar{a}) = n-1$?

Знаем: n – простое $\Rightarrow (Z/nZ)^*$ – циклическая. $(Z/nZ)^* = \langle b \rangle$ $\text{ord}(b) = n-1$

$\forall a \in (Z/nZ)^* \exists k : b^k = a; k \in \{1, 2 \dots n-1\}$

Утверждение: $\text{ord}(a) = n-1 \Leftrightarrow (k, n-1) = 1$

Следствие: Доля подходящих под тест Люка $a = \frac{\varphi(n-1)}{n-1} = p \in [0; 1]$

Делаем тест Люка s раз $\Rightarrow \begin{cases} \text{попадетс} \text{я хорошее } a \Rightarrow n - \text{простое} \\ \text{все время плохие } a \Rightarrow (1-p)^s \rightarrow 0 \end{cases}$

Lm. $\text{ord}(x) = n \Rightarrow \text{ord}(x^k) = \frac{n}{(n,k)}$ (утверждение: частный случай)

$$(n, k) = d \Rightarrow \begin{cases} n = dn_1 \\ k = dk_1 \end{cases} \Rightarrow (x^k)^{\frac{n}{(n,k)}} = (x^{dk_1})^{n_1} = 1^{n_1} = 1$$

Пусть $(x^k)^l = 1; x^{kl} = 1 \Leftrightarrow kl : \text{ord}(x) \Leftrightarrow dk_1 l : dn_1 \Leftrightarrow k_1 b : n_1 \Leftrightarrow l : n_1$, т.е. $n_1 = \min(l)$

Нестойкость простых из теста Люка

Пусть p, q – простые получены тестом Люка, т.е. у $p-1$ и $q-1$ маленькие простые множители

$N = pq$. Как зная все разложить N ?

$$a \in N; \begin{cases} \text{ord}_p(a) = p_1^{b_1} \dots p_k^{b_k} \\ \text{ord}_q(a) = p_1^{c_1} \dots p_k^{c_k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \min(x|x! : \text{ord}_p(a)) \\ B = \min(x|x! : \text{ord}_q(a)) \end{cases} \Rightarrow A, B \text{ не очень большие, скорее всего } A \neq B$$

Враг считает $d_k = (a^{k!} - 1, n)$. НУО $A < B$. Тогда $d_A = p$; $a := \frac{N}{b}$. Взломано

Тест Ферма:

$n \in \mathbb{Z}$; $a \in \{1 \dots n-1\}$. n тестируем, a – случайное

$a^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n} \Rightarrow n$ – составное

$a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n} \Rightarrow n$ – может быть простое

($n = 15$; $n-1 = 14$; $4^{14} \equiv 1 \pmod{15}$), но 15 не простое)

a – свидетель простоты \pmod{n} , если $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$

Утверждение: (упражнение) если не все числа $\{1 \dots n-1\}$ – свидетели, то свидетелей \leq половины

a – свидетель, b не свидетель $\Rightarrow ab$ не свидетель. В этом случае за s тестов $p(\text{неудачи}) \leq (\frac{1}{2})^s \rightarrow 0$

Проблема: $\exists n$ – составные : $\forall a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ – свидетель простоты

Это числа Кармайкла. Наименьшее такое число $n = 561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$

$$a \in \{3, 11, 17\}; \begin{cases} a^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ a^{10} \equiv 1 \pmod{11} \\ a^{16} \equiv 1 \pmod{17} \end{cases} \Rightarrow a \equiv 1 \pmod{561} \Rightarrow a^{560} \equiv 1 \pmod{561}, \text{ но } 561 \text{ не простое}$$

Тест Рабина-Миллера:

$p \in \mathbb{Z}$; $p-1 = 2^m \cdot l$; $l \not\equiv 2$

$a \in \mathbb{Z}$; $a \not\equiv p$. Рассмотрим в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ последовательность $\bar{a}^l, \bar{a}^{2l} \dots \bar{a}^{2^{m-1}l} = \bar{a}^{p-1} = 1$

Утверждение: Если p – простое, то $\begin{cases} \bar{a}^l = 1 \\ \exists k : \bar{a}^{2^k l} = -1 \end{cases} (*)$

Доказательство

Пусть $a^l \neq 1$; $a^{p-1} = 1 \Rightarrow \exists k : \bar{a}^{2^k l} \neq 1$; $\bar{a}^{2^{k+1}l} = 1$

$$\Rightarrow \text{в } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \ x \neq 1; \ x^2 = 1 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \\ x+1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1$$

* – условия Рабина-Миллера для числа a

Знаем: $\exists a \not\equiv p$. Рабин-Миллер для a не выполнен $\Rightarrow p$ – составные

Th. Если все $a = 1, 2 \dots \sqrt[p]{p}$ свидетели Рабина-Миллера $\Rightarrow p$ – простое

Th. Если все $a = 1, 2 \dots c \cdot \log^2 p$ свидетели $\Rightarrow p$ – простое. (следует из гипотезы Римана)

Th. n – составное \Rightarrow свидетелей Рабина-Миллера $\leq \frac{\varphi(n)}{4}$

Следствие: делаем s ходов. $p(\text{неудачи}) = (\frac{1}{4})^s \rightarrow 0$

Квадратичные вычеты

$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Как решать уравнения в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

1. Линейные $\bar{a}x = \bar{b} \Leftrightarrow ax \equiv b \pmod{p} \Leftrightarrow ax - py = b$

2. Квадратные $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$

$x^2 + sx + q = 0$. Если $p \neq 2$, то

$$(x + \frac{s}{2})^2 + (q - \frac{s^2}{4}) = 0 \Leftrightarrow y^2 = k, \text{ где } y = x + \frac{s}{2}; \quad -k = q - \frac{s^2}{4}$$

Как понять, что $\exists y : y^2 \equiv k \pmod{p}$ в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Или для каких $p \exists y : (y^2 - k : p)$

Если такой y существует, k называется квадратичным вычетом по модулю p . ($k \neq 0$)

$$\text{Символ Лежандра } \left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & a - \text{квадратичные вычет} \\ -1, & a - \text{не квадратичные вычет} \\ 0, & a : p \end{cases}$$

Утверждение: \exists ровно $\frac{p-1}{2}$ квадратичных вычетов и $\frac{p-1}{2}$ квадратичных неравенства

Доказательство

$$1, 2 \dots p-1$$

$$1^2, 2^2 \dots (p-1)^2$$

Сколько различных вычетов во второй строке? Заметим: $x^2 = y^2 \Rightarrow (x-y)(x+y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases} \Rightarrow$
при возведении в квадрат вычеты склеиваются, попадая \Rightarrow ровно $\frac{p-1}{2}$ квадратов $\Rightarrow p-1 - \frac{p-1}{2} = \frac{p-1}{2}$
не квадратов

$$\text{Мультипликативность: } \forall a, b. \left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right)$$

Доказательство

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = 0 \Leftrightarrow ab : p \Leftrightarrow \begin{cases} a : p \\ b : p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{a}{p}\right) = 0 \\ \left(\frac{b}{p}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = x^2 \\ b = y^2 \end{cases} \Rightarrow ab = (xy)^2 \Rightarrow \left(\frac{ab}{p}\right) = 1$$

$$\left(\frac{a}{p}\right) = 1; \left(\frac{b}{p}\right) = 1 \Rightarrow \exists x : a = x^2; b \neq y^2 \forall y$$

$$\text{Пусть } \begin{cases} ab = z^2 \\ a = x^2 \end{cases} \Rightarrow b = \left(\frac{z}{x}\right)^2 \text{ ???}$$

$$\left(\frac{a}{p}\right) = -1; \left(\frac{b}{p}\right) = -1$$

$b_1, b_2 \dots b_{\frac{p-1}{2}}$ – квадраты, все остальные не квадраты

Идем $ab_1, ab_2 \dots ab_{\frac{p-1}{2}}$ – не квадраты (все, т.к. их $\frac{p-1}{2}$) \Rightarrow все остальные квадраты

$$\{ab_1, ab_2 \dots ab_{p-1}\} = \{1, 2 \dots p-1\}$$

Утверждение: Квадратичный закон взаимности

$$\text{Если } p, q - \text{нечетные простые} \Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \dots \frac{q-1}{2}}$$

R – коммутативное кольцо с 1

$f(x) = 3x^2 + 2x$ имеет смысл в любом кольце с 1, т.к. $f(x) = (1+1+1) \cdot x \cdot x + (1+1) \cdot x$

Ех. $g, f : Z/pZ \rightarrow Z/pZ$

$$\begin{cases} f(x) = x \\ g(x) = x^p \end{cases} \Rightarrow \text{по МТФ одна и та же функция, но многочлены различные}$$

$$x^2 + 2x + 5 \rightarrow (1, 2, 5)$$

Формальные степенные ряды

Def. Пусть R – коммутативное кольцо с 1. Кольцом формальных степенных рядов $R[[x]]$ называется множество $f : Z_{\geq 0} \rightarrow R; \{a_0, a_1, a_2 \dots | a_i \in R\}$ с операциями $+, \cdot$

Ряд: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$

$$(a_0, a_1, a_2 \dots) + (b_0, b_1, b_2 \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2 \dots)$$

$(a_i) \cdot (b_i) = (c_i)_{i=0}^\infty$; $c_i = \sum_{k=0}^i a_k b_{i-k}$ – правило свертки

Th. $R[[x]]$ – коммутативное кольцо с 1

Доказательство

Очев – аксиомы сложения: $(0, 0 \dots) = 0_{R[[x]]}$

$1_{R[[x]]} = (1, 0, 0 \dots)$

$(a + b) \cdot c$ – очев (покоординатно)

$$ab = ba : (ab)_i = \sum_{k=0}^i a_k b_{i-k} = \sum_{l=0}^i a_{i-l} b_l = \sum_{l=0}^i b_l a_{i-l} = (ba)_i$$

Ассоциативность: $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$; $f, g, h \in R[[x]]$

$f = (a_0, a_1, a_2 \dots a_i \dots)$; $f_i = a_i$

$$\begin{aligned} ((f \cdot g) \cdot h)_n &= \sum_{k=0}^n (fg)_k h_{n-k} = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^k f_i g_{k-i} \right) h_{n-k} = \sum_{k=0 \dots n; i=0 \dots k} f_i g_{k-i} h_{n-k} = \sum_{p,q,r \geq 0; p+q+r=n} (f_p g_q) h_r = \\ &= \sum_{p,q,r \geq 0; p+q+r=n} f_p (g_q h_r) = \sum_{p,q,r \geq 0; p+q \leq n} f_p (g_q h_{n-p-q}) = \sum_{r=0}^n f_p \left(\sum_{q=0}^p g_q h_{(n-p)-q} \right) = \sum f_p (gh)_{n-p} = (f(gh))_n \end{aligned}$$

Lem. \exists инъективный гомоморфизм колец

$$\begin{aligned} i : R &\rightarrow R[[x]] \\ a &\rightarrow (a, 0, 0 \dots) \end{aligned}$$

Доказательство

$$\text{Нужно доказать } \begin{cases} \text{инъективность} \\ i(x+y) = i(x) + i(y) \\ i(xy) = i(x) \cdot i(y) \\ i(1) = 1 \end{cases} \quad - \text{ все очев}$$

В умножении $(a, 0, 0 \dots) \cdot (b, 0, 0 \dots) = (ab, 0, 0 \dots)$

Def. $x = (0, 1, 0, 0 \dots)$

$$\text{Lem. } a \in R \begin{cases} ax = (0, a, 0, 0 \dots) \\ x^2 = (0, 0, 1, 0, 0 \dots) \\ x^k = (0, 0, 0 \dots 1, 0, 0 \dots) \end{cases}$$

$(a_0, a_1, a_2 \dots a_k, 0, 0 \dots) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_k x^k$ – следствие из леммы и правила сложения

Def. $f \in R[[x]]$ называется многочленом, если $\exists N : \forall n > N \ f_n = 0$

Обозначение: множество многочленов обозначается $R[x]$

Lem. $R[x]$ – подкольцо в $R[[x]]$

Доказательство

$0, 1 \in R[x]$ – очев

$(a_n) \in R[x] \Rightarrow (-a_n) \in R[x]$ – тоже очев

$$\begin{aligned} (b_i), (a_i) \in R[x] \Rightarrow (b_i + a_i) \in R[x] &\begin{cases} \exists N_1 : a_n = 0; \ n > N_1 \\ \exists N_2 : b_n = 0; \ n > N_2 \end{cases} \Rightarrow (a+b)_n = 0; \ n > \max(N_1; N_2) \ (a \cdot b)_n = 0 = \\ = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}; \ n > N_1, N_2 \Rightarrow &\begin{cases} i > N_1 \\ n-i > N_2 \end{cases} \Rightarrow a_i b_{n-i} = 0 \ \forall i \Rightarrow (ab)_n = 0 \end{aligned}$$

Th. S – коммутативное кольцо; $f : R \rightarrow S$ – гомоморфизм (e.g. $R = S$; $f = id$); $s \in S$. Тогда $\exists! f_s : R[x] \rightarrow S$ продолжающий f

$$f_s|_R = f; \quad f_s \circ i = f; \quad f_s(x) = s$$

Доказательство

$$g \in R[x] \Rightarrow g = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$\text{Положим } f_s(g) = f(a_0) + f(a_1)s + f(a_2)s^2 + \dots + f(a_n)s^n$$

$$f_s(gh) = f_s(g) \cdot f_s(h) - \text{муторная проверка}$$

Сложение – очев проверка

Единственность – очев

Rem. f_s называется гомоморфизм эвалюации

Rem. $R = S$; $f \rightarrow f(s)$ – значение многочлена в точке S

$f \in R[x]$; $P(f) : R \rightarrow R : a \rightarrow f(a)$ – полиномиальная функция, заданная f

Знаем: может быть такое, что $f_1 \neq f_2$, но $P(f_1) = P(f_2)$ (e.g. x^p и x в Z/pZ)

$$\text{Степень многочлена: } f = \sum_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} a_i x^i$$

$$\deg(f) = \max\{i | a_i \neq 0\}; f \neq 0$$

$$\deg(0) = -\infty$$

Свойства степени:

$$1. \deg(f + g) \leq \max(\deg(f), \deg(g))$$

$$\deg(f + g) = \max(\deg(f), \deg(g)) \text{ если } \deg(f) \neq \deg(g)$$

$$2. \deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$$

$$f = \sum a_i x^i; g = \sum b_j x^j$$

Тогда $(fg)_s = 0$ при $s > n + m$

$$(fg)_{n+m} = a_{n+m}b_0 + a_{n+m-1}b_1 + \dots + a_nb_m + a_{n-1}b_{m+1} \dots = a_nb_m$$

Итого: $(fg)_{n+m} = a_nb_m \neq 0 \Rightarrow \deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$ – но верно только если R – область целостности, т.к. нет делителей нуля

Далее R – область целостности, еще лучше: $R = K$ – поле

Следствие: R – область целостности $\Rightarrow R[x]$ – область целостности

Th. О делении с остатком

K – поле, $f, g \in K[x] (g \neq 0)$, тогда $\exists! q, r \in K[x] : f = gq + r; \deg(r) < \deg(g)$

Def. a – корень f , если $f(a) = 0$

Th. Теорема Безу: остаток от деления f на $(x - a)$ равен $f(a)$. В частности a – корень $f \Leftrightarrow f : x - a$

Доказательство

По теореме о делении с остатком

$$f = (x - a)q + r; \deg(r) < \deg(x - a) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \deg(r) = 0 \\ r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow r = c \in K$$

$$f(x) = (x - a)q(x) + k$$

$$f(a) = (a - a)q(a) + k = k$$

TODO

$$f = ax^n + f_1; f \circ \deg(f_1) < n$$

$$g = bx^m + g_1; \deg(g_1) < m$$

$$\tilde{f} = f - \frac{a}{b}x^{n-m}g = ax^n + f_1 - ax^n - \frac{a}{b}x^{n-m}g_1 = f_1 - \frac{a}{b}x^{n-m}g_1$$

$$\deg(\tilde{f}) < n \text{ по и.п. } \exists \tilde{q}, \tilde{r} : \tilde{f} = g \cdot \tilde{q} + \tilde{r}; \deg(\tilde{r}) < \deg(g)$$

$$\text{Тогда } f = \tilde{f} + \frac{a}{b}x^{n-m}g = g(\tilde{q} + \frac{a}{b}x^{n-m}) + \tilde{r}$$

$$\text{Положим } q = \tilde{q} + \frac{a}{b}x^{n-m}; r = \tilde{r}$$

Th. k – поле, $f \in k[x]$, $\deg(f) = n \in \mathbb{Z} \Rightarrow f$ имеет не более n корней

Доказательство

Индукция по n . База $n = 1$ – очев

$$n \rightarrow n + 1. \deg(f) = n + 1$$

1. У f 0 корней. $0 \leq n + 1$

2. У f есть корень $a \Rightarrow f = (x - a)\tilde{f}$

$$b - \text{корень } f \Leftrightarrow (b - a)\tilde{f}(b) = a \Leftrightarrow \begin{cases} b - a = 0 \\ \tilde{f}(b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ b - \text{корень?} \end{cases}$$

По и.п. $\deg(\tilde{f}) = n$. У \tilde{f} не больше n корней, у $f \leq n + 1$ корня

Th. О формальном и функциональном равенстве

1. k – поле. $f, g \in k[x]$; $a_1 \dots a_n \in k$; $n > \max(\deg(f), \deg(g))$

$$f(a_i) = g(a_i) \forall i \Leftrightarrow f = g$$

2. k – бесконечно, $f(a) = g(a) \forall a \in k \Rightarrow f = g$

$$1 \Rightarrow 2 : \text{возьмем любые } a_1 \dots a_n \in k : n > \max(\deg(f), \deg(g))$$

Доказательство

1. $h := f - g$; $\deg(h) \leq \max(\deg(f), \deg(g)) < n$

При этом $h(a_i) = f(a_i) - g(a_i) = 0$; $a_1 \dots a_n$ – корни h , $n > \deg(h) \Rightarrow h = 0 \Leftrightarrow f = g$

Rem. $f, g \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$; $\deg(f), \deg(g) < p \Rightarrow$ по предыдущей теореме $f \neq g$ как функции
 $|\{f | \deg f < p\}| = |\{a_0 + a_1x + \dots + a_{p-1}x^{p-1}\}| = p^p$

$$\text{Функций: } \begin{cases} f(0) = b_0 \\ f(1) = b_1 \\ \vdots \\ f(p-1) = b_{p-1} \end{cases} \Rightarrow \text{всего } p^p$$

Lm. $a_1, a_2 \dots a_k$ – корни $f : a_i \neq a_j \Rightarrow f \div (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_k)$

Интерполяция

Def. k – поле. Интерполяционные данные

x	$x_1 \dots x_n \in k$	$x_i \neq x_j$
$f(x)$	$y_1 \dots y_n \in k$	

Интерполяционная задача: построить $f \in k[x]$ такую, что $f(x_i) = y_i \forall i$

Th.

1. \forall интерполяционная задача имеет решение

2. Оно единственно при ограничении $\deg(f) < n$ (а вообще бесконечно много)

Доказательство

2. Пусть f_1, f_2 – два решения. $\deg(f_i) < n$

По теореме о формальном и функциональном равенстве $f_1 = f_2$ ($f_1(x_i) = y_i = f_2(x_i)$)

1. Рассмотрим $L_i(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$

$$L_i = \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

$$L_i(x_i) = 1; \text{ при } i \neq j \quad L_i(x_j) = 0$$

$$\deg(L_i) = n - 1$$

$$\text{Положим } f = \sum y_i L_i$$

$$\forall k \quad f(x_k) = \sum y_i L_i(x_k) = y_k L_k(x_k) + \sum y_i L_i(x_k) = y_k$$

$$\text{Итог: } f = \sum_{i=1}^n \frac{y_i \prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} - \text{интерполяционная формула Лагранжа}$$

Rem. Это все КТО:

$$\text{Интерполяционная задача} \Leftrightarrow \begin{cases} f \equiv y_1 \pmod{x - x_1} \\ \vdots \\ f \equiv y_n \pmod{x - x_n} \end{cases}$$

Вернемся к теории чисел

Th. $(Z/pZ)^* = \langle a \rangle$. $\exists a : \{\bar{a}, \bar{a}^2, \bar{a}^3 \dots\} = \{\bar{1}, \bar{2} \dots\}$. a – первообразный корень по модулю p

Надо доказать: $\exists a \in (Z/pZ)^* : \text{ord}(a) = p - 1$

LmA. $\forall n \in N \sum_{d|n} \varphi(d) = n$

Доказательство LmA:

$$\{1, 2, \dots, n\} = A_{d_1} \cup A_{d_2} \dots; A_d = \{x \leq n | (x, n) = d\}$$

$$|A_d| = |\{dy \leq d \cdot \frac{n}{d} | (dy, d \frac{n}{d}) = d\}| = |\{y \leq \frac{n}{d} | (y, \frac{n}{d}) = 1\}| = \varphi(\frac{n}{d})$$

$$\text{Тогда } n = |\{1 \dots n\}| = \sum_{d|n} |A_d| = \sum_{d|n} \varphi(\frac{n}{d}) = \sum_{x|n} \varphi(x)$$

LmB. $\forall d$ – делителя n в $(Z/pZ)^*$ есть либо 0, либо $\varphi(d)$ элементов порядка d

Доказательство LmB:

Пусть $a \in (Z/pZ)^* : \text{ord}(a) = d$

$a^d = 1$; $1, a, a^2 \dots a^{d-1}$ попарно различны

Заметим: $\text{ord}(b) = d \Rightarrow b^d = 1 \Rightarrow b \in \{1, a, a^2 \dots a^{d-1}\}$, так как иначе у многочлена $x^d - 1$ d корней в Z/pZ
 $b = a^k$; $\text{ord}(b) = d$; $b^l \neq 1$ при $l < d \Leftrightarrow a^{kl} \neq 1$ при $l < d \Leftrightarrow kl \not\equiv 0 \pmod{d}$ при $l < d \Leftrightarrow (k, d) = 1 - \varphi(d)$ вариантов

Доказательство (Th.)

Докажем: d – делитель $p - 1 \Rightarrow$ в $(Z/pZ)^*$ ровно $\varphi(d)$ элементов порядка d (в частности $d = p - 1 \Rightarrow$ есть элементы порядка $p - 1$)

По LmA. $p - 1 = \sum_{d|p-1} \varphi(d)$, но $p - 1 = |(Z/pZ)^*| = |\bigcup_{d|p-1} B_d| = \sum |B_d|$, где $B_d = \{a | \text{ord}(a) = d\}$

$$p - 1 = \sum_{d|p-1} |B_d| = \sum_{d|p-1} \varphi(d) \Rightarrow |B_d| = \varphi(d). \text{ В частности } |B_{p-1}| = \varphi(p - 1) > 0$$

Хотим ОТА для многочленов ...

Def. Область целостности R называется евклидовым кольцом, если $\exists \varphi : R \setminus \{0\} \rightarrow Z_{\geq 0}$ (евклидова норма),

такая, что $\forall a, b \in R, b \neq 0 \exists q, r : a = bq + r \begin{cases} \varphi(r) < \varphi(b) \\ r = 0 \end{cases}$

Смысл. В евклидовом кольце можно делать алгоритм евклида (понижая φ)

Def. R – область целостности. R – евклидово, если $\exists \varphi : R \setminus \{0\} \rightarrow Z_{\geq 0}$ – евклидова норма

$$\forall a, b \in R, b \neq 0; \exists q, r : a = b \cdot q + r \begin{cases} r = 0 \\ \varphi(r) < \varphi(b) \end{cases}$$

Th. В евклидовом кольце любой идеал главный

Доказательство

I – идеал в R ; $I \neq \{0\}$ (иначе $I = \langle 0 \rangle$)

Рассмотрим $i \in I : \varphi(i)$ – минимальна

$$\text{Тогда } \forall a \in I \ a = q \cdot i + r \begin{cases} \varphi(r) < \varphi(i) \\ r = 0 \end{cases}$$

Но $r = a - q \cdot i \in I \Rightarrow \varphi(r) \geq \varphi(i) \Rightarrow r = 0$, т.е. $a = qi \forall a \in I$, т.е. $I \in \langle i \rangle \Rightarrow I = \langle i \rangle$

Def. Область целостности в которой любой идеал главный, называется областью главных идеалов (ОГИ)

Д-ли: \forall евклидово кольцо

Rem. Обратное неверно (сложно)

Ex. Пусть $R = Z[x]$, тогда R – не ОГИ

$I = \langle 2, x \rangle = \{f \in Z[x] | f(0) : 2\}$ – идеал

$I \neq \langle f \rangle$, т.к. $\begin{cases} 2 \vdots f \\ x \vdots f \end{cases} \Rightarrow f = \pm 1$, но $\pm 1 \in I!!!$ $(2, x) = 1$, но $\nexists g, h : 2 \cdot g + x \cdot h = 1$
 $R = Q[x], R[x], Z/pZ[x]$ – все ок, т.к. это поля $\Rightarrow K[x]$ евклидово \Rightarrow ОГИ

Def. R – область целостности, $a \vdots b$, если $\exists c : a = bc$

Rem. $a \vdots c, c \neq 0 \Rightarrow$ частное в определении однозначно (т.к. в области целостности верен закон сохранения)
 $Z/4Z, 2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot 3???$

Def. $a \in R \Rightarrow a$ называется неразложимым, если

1. $a \neq 0, a \notin R^*$
2. $a = bc \Rightarrow \begin{cases} b \in R^* \\ c \in R^* \end{cases}$

Def. a, b называются ассоциированными ($a \sim b$), если выполнено одно из определений

1. $a \vdots b, b \vdots a$
2. $a = b\varepsilon; \varepsilon \in R^*$

Rem. В $Z a \sim b \Leftrightarrow |a| = |b|$

Rem. Это отношение эквивалентности (очев из первого определения)

Упражнение: $3 \Rightarrow 1, 2$ у a, b одинаковые делители

$3'$: у a, b одинаковые кратные

Def. Область целостности R называется факториальной, если любой $a \in R \setminus \{0\}$ представляется в виде произведения не разложимых единственным образом с точностью до порядка множителей и ассоциированности

Ex. $a = p_1 p_2 p_3; p_1, p_2, p_3$ – неразложимые. $\varepsilon, \mu, \alpha \in R^*$

$a = (\varepsilon p_2 \mu)(\alpha p_3 \mu^{-1} \alpha^{-1})(\varepsilon^{-1} \alpha p_1)$; $\varepsilon p_2 \mu \sim p_2$ – неразложимый (упр) и т.д.

Th. ОГИ – факториальна

Ключевые свойства:

1. $\begin{cases} (a, b) = 1 \\ ac \vdots b \end{cases} \Rightarrow c \vdots b$
2. p – неразложимый
 $ab \vdots p \Rightarrow \begin{cases} a \vdots p \\ b \vdots p \end{cases} \Rightarrow$ единственность разложения

Доказательство

Единственность доказывается по той же схеме, что и в Z

Существование – неочев /без доказательства/

У нас $R = K[x]$ – существование разложения очевидна (индукция по $\deg(f)$)

Что значит в $K[x] f \sim g? f = \varepsilon g, \varepsilon \in K[x]^*$

Lem. $K[x]^* = K \setminus \{0\}$. $\deg(f) > 0, \forall g \deg(fg) \geq \deg(f) > 0$ или $fg = 0 (fg \neq 1)$

Поэтому $f \sim g \Leftrightarrow \exists k \in K^* : f = kg$

$\deg(f) = 0, f = k \sim 1$, для f разложение пустое ($\deg(f) > 0$ – непустое)

Def. f называется уникальным, если $\exists n = \deg(f) : f = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$

В \forall классе ассоциативности $\exists!$ уникальный многочлен

Итого: $\forall f \in K[x] \exists! a \in K, p_1, p_2 \dots p_l$ – уникальные неразложимые: $f = ap_1 p_2 \dots p_l$

$p_1, p_2 \dots p_l$ – единственные с точностью до перестановки множителей

Производная

Def. R – коммутативное кольцо: $D : R \rightarrow R$ называется дифференцированием, если

1. $\forall f, g \in R \ D(f + g) = D(f) + D(g)$
2. $\forall f, g \in R \ D(f \cdot g) = f \cdot D(g) + g \cdot D(f)$ – правило Лейбница

Def. R – кольцо, $f \in R[x] : f = \sum a_n x^n$ тогда по определению $D(f) = f' = \sum n a_n x^{n-1}$ ($n \cdot a_n = a_n + a_n + \dots + a_n$ (n раз))

Def. $f \in R[x]$. Положим $D(f)(x) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}|_{x=y}$

Упражнение: $def1 \Leftrightarrow def2$

$$\frac{ax^n - ay^n}{x-y} = a \frac{(x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})}{x-y} \Big|_{x=y} = na \cdot y^{n-1}$$

Def./Th. K – бесконечное поле $f \in K[x]$, $a \in K$, $\exists q, r : f = (x-a)^2 \cdot q + r$ ($\deg(r) < 2$)
 $f = (x-a)^2 \cdot q(x) + k(x-a) + m_a$ ($x=a$; $m_a = f(a)$)

Утв. отображение $a \rightarrow K_a$ – полиномиальная функция, соответствующий многочлен называется производной (а и менно f' из Def1. задает эту функцию)

Утв. $f = (x-a)^2 q_f(x) + f'(a)(x-a) + f(a)$; $g = (x-a)^2 q_g(x) + g'(a)(x-a) + g(a)$

Сложим: $f + g = (x-a)^2 (q_f + q_g) + (f'(a) + g'(a))(x-a) + f(a) + g(a)$

$f \cdot g = (x-a)^2 ((x-a)^2 q_f q_g + q_f g'(a)(x-a) + q_g f'(a)(x-a) + f'(a)g'(a) + (f'(a)g(a) + f(a)g'(a))(x-a) + f(a)g(a))$,

но коэффициенты при $x-a$ равен $(fg)'(a)$

Пусть K – поле, $f \in K[x]$; a – корень f

a – корень кратности l , если $V_{(x-a)}(f) = l$, т.е. $f : (x-a)^l$, $f \not\vdash (x-a)^{l+1}$, $f = (x-a)^l \tilde{f} : \tilde{f}(a) \neq 0$

a – кратный корень, если $l > 1$ (иначе простой)

Th. $f \in K[x]$, a – корень кратности l ($l \geq 1$), тогда

1. a – корень кратности $\geq l-1$ в многочлене f'
2. Если $1 + 1 + \dots + 1 \neq 0$ в $K \Rightarrow a$ – корень кратности $= l-1$ в f'
3. a – кратный корень $f \Leftrightarrow a$ – корень $\gcd(f, f')$

Доказательство

1. $f = (x-a)^l \tilde{f}$; $\tilde{f}(a) \neq 0$

$f' = ((x-a)^l)' \tilde{f} + (x-a)^l \tilde{f}' = l(x-a)^{l-1} \tilde{f} + (x-a)^l \tilde{f}' = (x-a)^{l-1} (l \tilde{f} + (x-a) \tilde{f}') \Rightarrow a$ – корень кратности хотя бы $l-1$

2. $1 \cdot l \neq 0$ в K , т.е. $l \neq 0$ в $K \Rightarrow l \tilde{f} \neq 0 \Rightarrow (l \tilde{f} + (x-a) \tilde{f}')(a) \neq 0$

т.е. $f' = (x-a)^{l-1} g$, $g(a) \neq 0 \Rightarrow$ кратность ровно $l-1$

Ех. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \ f = x^p$, 0 – корень кратности p

$f' = px^{p-1} = 0$ – корень кратности $\infty \ 0 : x^n \forall n$