Конспект Шорохова Сергея
Если нашли опечатку/ошибку - пишите @le9endwp

Глава 1. Введение
§1. Множества и их отношения

Def. Множество - набор каких-то элементов, т.е. либо $x \in A$, либо $x \notin A (\forall x)$
Def. A, B - множества. $A \subset B$ - A подмножество B, т.е. $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$
Def. $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$
Def. $\varnothing$ - пустое множество, т.е. $\forall x, x \notin \varnothing$
Rem. $\forall A \varnothing \subset A$
Def. $\begin{cases} A \subset B \\ A \neq B \end{cases} \Leftrightarrow A \subsetneq B \Leftrightarrow$ A - собственное подмножество
Операции:

- Пересечение $A \bigcap B = \{x| \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases} \}$
- Объединение $A \bigcup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}$
- Разность $A \backslash B = \{x| \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \}$
- Симметрическая разность $A \triangle B = (A \backslash B) \bigcup (B \backslash A)$

Способы задания множеств:

- Перечисление
- Неполное перечисление
- Словесно
- С помощью функции

Канонические обозначения:

- $\mathbb{N}$ - натуральные числа
- $\mathbb{Z}$ - целые числа
- $\mathbb{Q}$ - рациональные числа
- $\mathbb{R}$ - вещественные числа
- $\mathbb{C}$ - комплексные числа
- $\mathbb{P}$ - простые числа

Def. $< a, b > (a \in A, b \in B)$ - упорядоченная пара
$< a, b > = < p, q > \Leftrightarrow \begin{cases} a = p \\ b = q \end{cases}$
Def. $< a_1, a_2 \cdots a_n > (a_k \in A_k \forall k)$ - кортеж (упорядоченная n-ка)
$< a_1 \cdots a_n > = < b_1 \cdots b_n > \Leftrightarrow a_k = b_k \forall k$
Def. Декартово произведение $A \times B = \{< a, b > | a \in A, b \in B\}$
Правила Д'Моргана:

1. $A \backslash (\bigcap\limits_{\alpha \in I} B_) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} (A \backslash B_\alpha)$
2. $A \backslash (\bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (A \backslash B_\alpha)$

Доказательство 2

$$x \in A \backslash (\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_\alpha, \forall \alpha \in I \end{cases} \Leftrightarrow x \in A \backslash B_\alpha, \forall \alpha \in I \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \backslash B_\alpha)$$

Теорема

- $A \bigcup (\bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (A \bigcup B_\alpha)$
- $A \bigcap (\bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} (A \bigcap B_\alpha)$

Доказательство

$$x \in A \bigcap (\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \exists \alpha \in I : x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha \in I : x \in A \bigcap B_\alpha \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \bigcap B_\alpha)$$

Def. Бинарным отношением R на $A \times B$ называется $R \subset A \times B$
$R = \{< a, b > | a \in A, b \in B\}$
$< a, b > \in R \Leftrightarrow aRb$
Def. $\sigma_R = \{a \in A | \exists b \in B :< a, b > \in R\}$ - область определения бинарных отношений
Def. $\rho_R = \{b \in B | \exists a \in A :< a, b > \in R\}$ - множество значений бинарных отношений
Def. $R^{-1} = \{< b, a > \mid < a, b > \in R\}$ - обратное отношение
Def. $R_1 \circ R_2 \subset A \times C; \begin{cases} R_1 \subset A \times B \\ R_2 \subset B \times C \end{cases}$
$R_1 \circ R_2 = \{< a, c > | \exists b \in B \begin{cases} < a, b > \in R_1 \\ < b, c > \in R_2 \end{cases} \}$
Свойства бинарных отношений:

1. R - рефлексивное, если $\forall a \in A < a, a > \in R$
2. R - иррефлексивное, если $\forall a \in A < a, a > \notin R$
3. R - симметричное, если $< a, b > \in R \Rightarrow < b, a > \in R$
4. R - антисимметричное, если $\begin{cases} < a, b > \in R \\ < b, a > \in R \end{cases} \Rightarrow a = b$
5. R - транзитивное, если $\begin{cases} < a, b > \in R \\ < b, c > \in R \end{cases} \Rightarrow < a, c > \in R$

Def. R - отношение эквивалентности, если R рефлексивно, симметрично, транзитивно
Def. R - нестрогий частичный порядок, если R - рефлексивно, антисимметрично, транзитивно
Def. R - строгий частичный порядок, если R - иррефлексивно, транзитивно
Def. $\begin{cases} < a, b > \in R \\ < a, c > \in R \end{cases} \Rightarrow b = c$, тогда R - функция f
Def. f - инъективная, если $\begin{cases} f(x_1) = a \\ f(x_2) = a \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2$
Def. f - сюрьективная, если $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$
Def. f - биективная, если f - инъективная и сюрьективная

§2. Вещественные числа

Две операции в $\mathbb{R}$

1. Сложение

   A_1 $a+b=b+a$ - коммутативность

   A_2 $(a+b)+c=a+(b+c)$ - ассоциативность

   A_3 $\exists 0\in\mathbb{R}: a+0=a; \forall a\in\mathbb{R}$ - существование нейтрального

   A_4 $\forall a\in\mathbb{R}\exists -a : a+(-a)=0$ - существование обратного

2. Умножение

   M_1 $a\cdot b=b\cdot a$- коммутативность

   M_2 $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$- ассоциативность

   M_3 $\exists 1\in\mathbb{R}: a\cdot 1=a; \forall a\in\mathbb{R}$ - существование нейтрального

   M_4 $\forall a\neq 0\in\mathbb{R}\exists a^{-1}\in\mathbb{R}: a\cdot a^{-1}=1$ - существование обратного

AM $\forall a,b,c\in\mathbb{R}(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ - дистрибутивность

Rem. Если соблюдаются все эти аксиомы, то поле
Аксиомы порядка:

- $\forall x,y\in\mathbb{R} x\le y$ или $y\le x$
- OA $a\le b\Rightarrow a+c\le b+c$
- OM $\begin{cases} a\ge 0\\ b\ge 0\end{cases}\Rightarrow 0\le a\cdot b$

Аксиома полноты:
$A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$, $A,B\subset R$
$\begin{matrix}\forall a\in A\\ \forall b\in B\end{matrix}\ a\le b\Rightarrow\exists c\in R: a\le c\le b(\forall a\in A,\forall b\in B)$
$\mathbb{Q}$ не удовлетворяет аксиоме полноты:
$A=\{x\in\mathbb{Q}|x^2<2\}$
$B=\{x\in\mathbb{Q}|x^2>2\}$
Между ними только $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$
Следствие (принцип Архимеда):
$\begin{matrix}\forall x\in\mathbb{R}\\ \forall y\in\mathbb{R}, y>0\end{matrix}\ \exists n\in\mathbb{N}: x<ny$

Доказательство

$fix\ y>0$
$A=\{x\in\mathbb{R}|\exists n: x<ny\}$
Пусть $A\neq\mathbb{R}\Rightarrow\mathbb{R}\backslash A=B\neq\varnothing$
$A\neq\varnothing$, т.к. $0\in A$
Левее ли A, чем B
Пусть $\begin{matrix}b\in B\\ a\in A\end{matrix}: b<a<ny\Rightarrow b<ny\Rightarrow b\in A$, но из $\mathbb{R}\backslash A=B\Rightarrow A\bigcap B=\varnothing\Rightarrow$
$\begin{cases}\Rightarrow\forall a\in A, b\in B, a\le b\\ A,B\subset\mathbb{R}\\ A\neq\varnothing\\ B\neq\varnothing\end{cases}\Rightarrow\exists c\in\mathbb{R}: a\le b\le c(\forall a\in A, b\in B)$
$\begin{cases}\text{c - y} < \text{c}\Rightarrow c-y\in A\Rightarrow\exists n\in\mathbb{N}: c-y<ny\Rightarrow c<(n+1)y\\ \text{c} < \text{c + y}\Rightarrow c\in B\end{cases}\Rightarrow c+y<(n+2)y\Rightarrow c+y\in A$ - противоречие $A\bigcap B=\varnothing\Rightarrow A=\mathbb{R}$
Следствие:
$\forall\varepsilon>0\ \exists n\in\mathbb{N}: \frac{1}{n}<\varepsilon$

$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow 1 < n\varepsilon$ - принцип Архимеда $x = 1, y = \varepsilon$
Аксиома индукции (метод математической индукции; принцип математической индукции)
$P_1, P_2, \cdots P_n \cdots$ - последовательньность утверждений
$$\begin{cases} \text{P}_1 \text{ - истина (база)} \\ \text{P}_n \text{ - истина} \Rightarrow P_{n+1} \text{ - истина (переход)} \end{cases} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ P_n \text{ - истина}$$
Th. Во всяком конечном множестве вещественных чисел есть наибольший и наименьший элементы
$$a = maxA \Leftrightarrow \begin{cases} a \in A \\ \forall x \in A \end{cases} x \le a$$
$$b = minA \Leftrightarrow \begin{cases} b \in A \\ \forall x \in A \end{cases} x \ge b$$

Доказательство

P_n - в множестве из n элементов есть наибольший и наименьший элементы

1. P_1 - истина, т.к. в множестве из 1 элемента он и наибольший, и наименьший
2. $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

   $A = \{a_1, a_2 \cdots a_{n+1}\}$

   $B = \{b_1, b_2 \cdots b_n\}$ - n элементов $\Rightarrow \exists maxB = \tilde{a}$

   $\tilde{a} \in B \Rightarrow \tilde{a} \in A$

   $\forall k, 1 \le k \le n\ a_k \le \tilde{a}$

   Случаи:

   - $a_k \le \tilde{a} \le a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = maxA$
   - $a_{n+1} \le \tilde{a} \Rightarrow \tilde{a} = maxA$

Def. Множество A называется ограниченным сверху, если $\exists c \in \mathbb{R} : a \le c, \forall a \in A$
Def. Множество A называется ограниченным снизу, если $\exists c \in \mathbb{R} : a \ge c, \forall a \in A$
Def. Множество A называется ограниченным, если оно ограничено и сверху, и снизу
$\exists c_1, c_2 : c_1 \le a \le c_2, \forall a \in A$
Th.

1. В любом непустом ограниченном сверху множестве целых чисел есть наибольший элемент
2. В любом непустом ограниченном снизу множестве целых чисел есть наименьший элемент
3. В любом непустом ограниченном сверху множестве натуральных чисел есть наибольший и наименьший элементы

Доказательство

$A; a \in \mathbb{Z}, \forall a \in A$
b - верхняя граница
$\forall a \in A\ a \le b$. Возьмем $\tilde{a} \in A$
$$\begin{cases} B = \{a \in A | a \ge \tilde{a}\} \\ B \text{ - конечное множество} \end{cases} \Rightarrow \exists maxB = \tilde{\tilde{a}}$$
$\tilde{\tilde{a}} = maxA$, т.к. $\tilde{a} \le \beta \in B \le \tilde{\tilde{a}}$
Def. $x \in \mathbb{R}; [x] = \lfloor x \rfloor$ - целая часть числа
$[x]$ - наибольшее целое число, не превосходящее x
Свойства:

1. $[x] \le x \le [x] + 1$
2. $x - 1 \le [x] \le x$

Доказательство

1. $[x] \leq x$ - определение

2. Пусть $x \geq [x] + 1 \in \mathbb{Z}$, тогда $[x]$ не наиболььшее, что противоречит определению

Th. $x, y \in \mathbb{R} : y > x \Rightarrow \begin{matrix} 1) \exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y \\ 2) \exists s \notin \mathbb{Q} : x < s < y \end{matrix}$

Доказательство

1. $x < y \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow$ (по следствию из принципа Архимеда) $\exists n \in N : \frac{1}{n} < y - x \Leftrightarrow \frac{1}{n} + x < y$

   $r = \frac{[nx]+1}{n} > \frac{nx}{n} = x$

   $r = \frac{[nx]+1}{n} = \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n} \leq \frac{nx}{n} + \frac{1}{n} = x + \frac{1}{n} < y$

   $x < r < y$

2. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

   $x < y \Rightarrow x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} \Rightarrow$ (по п.1) $\exists r \in \mathbb{Q} : x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2} \Rightarrow x < r + \sqrt{2} < y$

   $s = r + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

§3. Супремум и инфимум

Def. $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing, A$ - ограничено сверху
$supA$ - наименьшая (точная) верхняя граница
Def. $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing, A$ - ограничено снизу
$infA$ - наибольшая (точная) нижняя граница
Th.

1. У любого непустого ограниченного сверху множества вещественных чисел существует единственный супремум

2. У любого непустого ограниченного снизу множества вещественных чисел существует единственный инфимум

Доказательство

1. Единственность - очевидно

2. Существование:

   $A \neq \varnothing, A \subset \mathbb{R}$

   B - множество всех верхних границ

   $B \neq \varnothing, B \subset \mathbb{R}$

   $\begin{matrix} \forall a \in A \\ \forall b \in B \end{matrix} \; a \leq b$

   Тогджа по аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b (\forall a \in A, \forall b \in B)$

   $\forall a \in A \; a \leq c \Rightarrow c$ - верхняя граница $A \Rightarrow c \in B$

   $\forall b \in B \; c \leq b \Rightarrow c = minB \Rightarrow c = supA$

Следствия:

1. $\begin{cases} A \neq \varnothing \\ A \subset B \subset \mathbb{R} \\ B \text{ - ограничено сверху} \end{cases} \Rightarrow supA \leq supB$

2. $\begin{cases} A \neq \varnothing \\ A \subset B \subset \mathbb{R} \\ B \text{ - ограничено снизу} \end{cases} \Rightarrow infA \geq infB$

Доказательство

$$\begin{cases} B \neq \emptyset \\ B \subset \mathbb{R} \\ B \text{ - ограничено сверху} \end{cases} \Rightarrow \exists supB \Rightarrow \forall b \in B\ b \leq supB \Rightarrow \forall a \in A\ a \leq supB \Rightarrow \exists supA \Rightarrow supA \leq supB$$

Обозначения:

1. A не является ограниченным сверху $\Rightarrow supA = +\infty$
2. A не ограничено снизу $\Rightarrow infA = -\infty$

Th. (характеристика супремума и инфимума)

1. $a = supA \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \leq a \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x > a - \varepsilon \end{cases}$
2. $b = infA \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \geq b \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x < b + \varepsilon \end{cases}$

Доказательство

1. $\forall x \in A, x \geq b \Rightarrow b$ - нижняя граница A
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x < b + \varepsilon \Rightarrow$ все числа $> b$ не являются нижними гранциами множества $A \Rightarrow b$ - наибольшая нижняя граница $\Rightarrow b = infA$

Th. о вложенных отрезках
$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \cdots \supset [a_n; b_n] \supset \cdots$, тогда $\exists c \in \mathbb{R} : c \in [a_n; b_n] \forall n \in \mathbb{N}$
Другими словами $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [a_n; b_n] \neq \emptyset$

Доказательство

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \cdots$, $A = \{a_1, a_2 \cdots\}$
$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \cdots$, $B = \{b_1, b_2 \cdots\}$
$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset; A, B \subset R$
$\forall a_n \leq b_n$
$?a_k \leq b_m$

1. $k < m$, $a_k \leq a_m \leq b_m$
2. $k > m$. $a_k \leq b_k \leq b_m$
3. $k = m$, $a_k \leq b_m$

По аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b(\forall a \in A, \forall b \in B) \Rightarrow \forall n\ a_n \leq c \leq b_n \Rightarrow c \in [a_n; b_n] \forall n \in \mathbb{N}$
Замечания:

1. Таких точек может быть много
2. Интервалов недостаточно
3. Лучей недостаточно

Глава 2. Последовательности вещественных чисел
§1. Пределы последовательности

Def. Последовательность - функция натурального аргумента
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \Leftrightarrow \{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$
$f(1) \leftrightarrow f_1$
Как задавать последовательность?

- Формулой (форму общего члена последовательности)
- Описательно
- Рекуррентно
- График последовательности (двумерный или одномерный, но второй неудобен, если какие-то точки дублируются)

Def. x_n называется ограниченной сверху, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \leq M$
Def. y_n называется ограниченной снизу, если $\exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}\ y_n \geq m$
Def. z_n называется ограниченной, если она ограничена и сверху, и снизу $\Leftrightarrow \exists c > 0 : \forall n \in \mathbb{N}\ |z_n| < c$
Def. x_n называется монотонно возрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N}\ x_{n+1} \geq x_n$
Def. y_n строго монотонно возрастает, если $\forall n \in \mathbb{N}\ y_{n+1} > y_n$
Def. x_n монотонно убывает, если $\forall n \in \mathbb{N}\ x_{n+1} \leq x_n$
Def. y_n строго монотонно убывает, если $\forall n \in \mathbb{N}\ y_{n+1} < y_n$
Def. z_n монотонная, если она мотонно возрастает или монотонно убывает
Def. z_n строго монотонная, если она строго монотонно возрастает или строго монотонно убывает
Def.(1) (неклассическое)
$a \in \mathbb{R}$
$a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow$ вне любого интервала, содержащего точку a находится лишь конечное число членов ппоследовательности
Rem. Можно рассматривать тольько симметричные интервалы
Def.(2) (классическое)
$a \in \mathbb{R}$
$a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N\ |x_n - a| < \varepsilon$
Последнее неравенство равносильно выбору симметричного интервала, отсюда равносильность определений
$\exists N \in \mathbb{N} \Leftrightarrow N = N(\varepsilon)$
Свойства:

1. Если предел существует, то он единственный

   Доказательство

   От противного: $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b \\ a \neq b \end{cases}$

   Пусть $\varepsilon = \frac{|b-a|}{3}$, тогда окрестности будут непересекающимися $\Rightarrow$ либо вне $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ бесконечно много членов и вне $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ бесконечно много членов, либо число n - конечно, оба варианта неверны

2. Если из последовательности удалить конечное число членов, то предел не изменится
3. Если переставить члены последовательности, то предел не изменится
4. Если записать некоторые члены последовательности с конечной кратностью, то предел не изменится
5. Если добавить конечное число членов последовательности, то предел не изменится
6. Если изменить конечное число членов последовательности, то предел не изменится
7. Если последовательность имеет предел, то она ограничена

   Доказательство

Окрестность $(a-1, a+1)$

Снаружи лишь конечное число членов, в их множестве существует наибольший и наименьший элемент

Пусть $x_{\tilde{N}}$ - наибольший, а $x_{\tilde{\tilde{N}}}$ - наименьший, тогда

$M = max\{a+1, x_{\tilde{N}}\}$ и $m = min\{a-1, x_{\tilde{\tilde{N}}}\}$

Lem.

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \end{cases} \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon \\ |y_n - b| < \varepsilon \end{cases}$$

Доказательство

Для x_n $\forall\varepsilon_1 > 0$ $\exists N_1 : \forall n \geq N_1$ $|x_n - a| < \varepsilon_1$

Для y_n $\forall\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ $\exists N_2 : \forall n \geq N_2$ $|y_n - b| < \varepsilon_2$

$\varepsilon = \varepsilon_2 = \varepsilon_1$; $N = max\{N_1, N_2\}$

8. Предельный переход в неравенстве

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \\ \forall n \in \mathbb{N}; x_n \leq y_n \end{cases} \Rightarrow a \leq b$$

Доказательство

Пусть $b < a$

Возьмем $\varepsilon = \frac{|a-b|}{3}$, окрестности не пересекаются

По лемме для нашего ε $\exists N : \forall n \geq N \begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon \\ |y_n - b| < \varepsilon \end{cases}$

Рассмотрим $\begin{cases} x_N \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \\ y_N \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon) \end{cases} \Rightarrow x_N > y_N$??

Значит $a \leq b$

Rem. $\forall n$ $x_n < y_n \not\Rightarrow a < b$

Rem. Необязательно $\forall n$ $x_n \leq y_n$, можно использовать $x_n \leq y_n$ $\forall n \geq N_0$

9. Стабилизация знака

$$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0 \Rightarrow \exists N : \forall n \geq N \ x_n \cdot a > 0$$

Доказательство

Пусть $\varepsilon = \frac{|a|}{3}$

$\exists N : \forall n \geq N$ $|x_n - a| < \varepsilon$

10. Принцип двух миллиционеров (теорема о сжатой переменной)

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \\ \forall n; x_n \leq y_n \leq z_n \end{cases} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$$

Доказательство

Хотим $\varepsilon > 0$ $\exists N : n \geq N$ $|y_n - a| < \varepsilon$

$fix \varepsilon > 0$

По лемме $\exists N : \forall n \geq N \begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon \\ |z_n - a| < \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \\ a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon \end{cases}$

Возьмем $\begin{cases} a - \varepsilon < x_n \\ z_n < a + \varepsilon \\ x_n \leq y_n \leq z_n \end{cases} \Rightarrow a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow |y_n - a| < \varepsilon \Rightarrow$
$\exists \lim\limits_{n \to \infty} y_n = a$

Rem. Можно вместо $\forall n \in \mathbb{N}$ использовать $\exists N_0 : \forall n \geq N_0$

Следствие: $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} |y_n| \leq z_n \\ \lim\limits_{n \to \infty} z_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} y_n = 0$

Доказательство

$|y_n| \leq z_n \Leftrightarrow -z_n \leq y_n \leq z_n$, дальше очев

Rem. Вместо $\forall n \in \mathbb{N}$ можно $\exists N_0 : \forall n \geq N_0$

Теорема о пределе монотонной последовательности

1. Если x_n монотонно возрастает и ограничена сверху, то у нее существует пределе
2. Если y_n монотонно убывает и ограничена снизу, то у нее есть предел
3. Если z_n монотонна, то существование предела равносильно ограниченности z_n

Доказательство

1. $\begin{cases} \{x_1, x_2, x_3 \cdots x_n \cdots\} = X \\ \exists M : \forall n ; x_n \leq M \end{cases} \Rightarrow X$ - Ограничена сверху $\Rightarrow \exists supX = a$

   Докажем, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = supX = a$

   $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N : \forall n \geq N$ $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$

   При этом правая часть верна всегда, докажем левую

   $fix \varepsilon > 0$

   $a = supX \Rightarrow a \cdot \varepsilon \neq supX \Rightarrow \exists x_{\tilde{N}} : x_{\tilde{N}} > a - \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq \tilde{N}$ $x_n > a - \varepsilon$, так как x_n монотонно возрастает

2. $\Rightarrow$ уже доказано (свойство 7)

   $\Leftarrow \begin{cases} \exists m, M ; m \leq z_n \leq M \\ z_n - \text{монотонная} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_n \uparrow \Rightarrow z_n \leq M \\ z_n \downarrow \Rightarrow m \leq z_n \end{array} \right.$

Def. Последовательность x_n называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$

Свойства:

1. $\begin{cases} x_n - \text{б/м} \\ y_n - \text{ограничена} \end{cases} \Rightarrow x_n \cdot y_n$ - б/м
2. $\begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0 \\ \lim\limits_{n \to \infty} y_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} x_n + y_n = 0$
3. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n$, где α_n - б/м

Доказательство

1. y_n - ограничена $\Rightarrow \exists M > 0 : |y_n| \le M \ \forall n \in \mathbb{N}$

   $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \le N \ |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$

   Хотим $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \ge N \ |x_n \cdot y_n - 0| < \varepsilon$

   $fix \varepsilon > 0$

   Знаем, что $\exists N : \forall n \ge N \begin{cases} |x_n| < \frac{\varepsilon}{M} \\ |y_n| \le M \end{cases} \Rightarrow |x_n \cdot y_n| < \varepsilon$

2. $fix \varepsilon > 0$

   $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0 \end{cases} \Rightarrow$ по лемме $\varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \ge N \begin{cases} |x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$

   $|x_n + y_n| \le |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \ge N \ |(x_n + y_n) - 0| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n + y_n = 0 \Rightarrow (x_n + y_n)$ - б/м

3. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \ge N \ |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x_n - a) - 0| < \varepsilon$

   Обозначение $x_n - a = \alpha_n$, тогда

   $|\alpha_n - 0| < \varepsilon$

   $|\alpha_n| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Rightarrow \alpha_n$ - б/м, а $x_n = a + \alpha_n$, где α_n - б/м

Th. об арифметических действиях с пределами

1. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \end{cases} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n + y_n = a + b$

2. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \end{cases} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$

3. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$

Доказательство

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n, \alpha_n - б/м$

   $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \Leftrightarrow y_n = b + \beta_n, \beta_n - б/м$

   $x_n + y_n = a + \alpha_n + b + \beta_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n) = a + b + \gamma_n \to a + b$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n$

   $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \Leftrightarrow y_n = b + \beta_n$

   $x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n = ab + \gamma_n \to ab$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \ne 0 \Rightarrow \exists N : \forall n \ge N \ y_n \ne 0$

   $\frac{x_n}{y_n}$ – определено $\forall n \ge N$

   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \frac{1}{y_n}$

   Хотим $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$

   $\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b = \beta_n} - \frac{1}{b} = \frac{b - b - \beta_n}{b(b + \beta_n)} = (-\beta_n) \cdot \frac{1}{b(b + \beta_n)}$

Можем выбрать окрестность $(b-\varepsilon, b+\varepsilon); \varepsilon = \frac{|b|}{2}$

$|b(b+\beta_n)| = |b| \cdot |b+\beta_n|$ $\exists N : \forall n \geq N$ $|\beta_n| < \frac{|b|}{2}$

$|b| \cdot |b+\beta_n| \leq |b| \cdot (|b| + \frac{|b|}{2}) = k$

$|b| \cdot |b+\beta_n| \geq |b| \cdot (|b| - |\beta_n|) \geq |b| \cdot \frac{|b|}{2} = M > 0$

$0 < M \leq |b(b+\beta_n)| \leq k$

$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{|b(b+\beta_n)|} \leq \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{|b(b+\beta_n)|}$ – ограничена $\Rightarrow (-\beta_n) \cdot \frac{1}{b(b+\beta_n)}$ – б/м $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \frac{1}{y_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

   $x_n = a + \alpha_n$

   $|a| - |\alpha_n| \leq |x_n| = |a+\alpha_n| \leq |a| + |\alpha_n|$

   По принципу двух милиционеров

   $$\begin{cases} |a| - |\alpha_n| \to a \\ |a| + |\alpha_n| \to a \end{cases} \Rightarrow |x_n| \to a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$$

Бесконечные пределы

Def. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall E \in \mathbb{R}\ \exists N : \forall n \geq N\ x_n > E$
или $\forall E \in \mathbb{R}$ вне луча $(E; +\infty)$ лежит лишь конечное число членов
Rem. Можно рассматривать только $E > 0$
Def. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall E \in \mathbb{R}\ \exists N : \forall n \geq N\ x_n < E$
или вне любого луча вида $(-\infty; E)$ лежит лишь конечное число членов
Rem. Можно рассматривать только $E < 0$
Def. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall E > 0\ \exists N : \forall n \geq N\ |x_n| > E$
или вне любого множества вида $(-\infty; -E) \bigcup (E; +\infty)$ лежит лишь конечное число членов
Наблюдение. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$
Def. x_n – б/б $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$
Наблюдение. x_n – б/б $\Rightarrow x_n$ не является ограниченной
Утверждение. $x_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$
x_n – б/м $\Leftrightarrow \frac{1}{x_n}$ – б/б

Доказательство

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geq N\ |x_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|x_n|} > \frac{1}{\varepsilon}$
т.е. $\forall E > 0\ \exists N : \forall n \geq N\ |\frac{1}{x_n}| > E \Leftrightarrow \frac{1}{x_n}$ – б/б
Def. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \bigcup \{-\infty\} \bigcup \{+\infty\}$
Свойства пределов в $\overline{\mathbb{R}}$

1. Предел в $\overline{\mathbb{R}}$ – единственный

   $$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \overline{\mathbb{R}} \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases} \Rightarrow a = b$$

2. Все свойства про добавить/убрать/переставить сохраняются

3.
   - $\begin{cases} \forall n; x_n \leq y_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$
   - $\begin{cases} \forall n; x_n \leq y_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty \end{cases} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$

Доказательство

$$\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty \Leftrightarrow \forall E \in \mathbb{R}\ \exists N : \forall n \geq N\ |y_n| < E$$

$$x_n \leq y_n < E \Rightarrow \forall E \in \mathbb{R}\ \exists N : \forall n \geq N\ |x_n| < E \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

4. Арифметические действия с пределами в $\overline{\mathbb{R}}$

   Смотрите нудный, но нужный видос Александра Игоревича

§2. Экспонента

Неравенство Бернулли
$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ (x > -1)$
$(1+x)^n \geq 1 + nx$, причем равенство достигается при $x = 0$ или $n = 1$

Доказательство по ММИ

База: $n = 1$
$1 + x \geq 1 + 1 \cdot x$ – верно
Переход: $n \to n+1$
$(1+x)^n \geq 1 + nx$
$(1+x)^{n+1} \geq (1+x)(1+nx) = 1 + nx + x + x^2n = 1 + (n+1)x + x^2n \geq 1 + (n+1)x$
Наблюдение

1. $|a| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0 \Leftrightarrow a^n$ – б/м
2. $|a| > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty \Leftrightarrow a^n$ – б/б

Rem: $a > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$
Rem: Из пункта 2 $\Rightarrow$ пункт 1

Доказательство

2. $|a| > 1 \Rightarrow |a| = 1 + x,\ x > 0$

   $|a|^n = (1+x)^n \geq 1 + nx$ – б/б $(\lim\limits_{n\to\infty}(1+nx) = +\infty) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a|^n = +\infty \Leftrightarrow a^n$ – б/б

Th.
$a \in \mathbb{R}$
$x_n = (1 + \frac{a}{n})^n$

- $\{x_n\}$возрастает при $n > -a \Leftrightarrow n + a > 0$ (строго при $a \neq 0$)
- $\{x_n\}$ – ограничено сверху

Доказательство

Возрастание. $\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{(1+\frac{a}{n})^n}{(1+\frac{a}{n-1})^{n-1}} = \frac{(n+a)^n\cdot(n-1)^n}{n^n(n-1+a)^{n-1}} = (\frac{(n+a)(n-1)}{n(n-1+a)})^n \cdot \frac{n-1+a}{n-1} = \frac{n-1+a}{n-1} \cdot (1 + \frac{-a}{n(n-1+a)})^n \geq \frac{n-1+a}{n-1} \cdot (1 + \frac{-a}{n(n+1-a)}) = \frac{n-1+a}{n-1} \cdot \frac{n-1+a-a}{n-1+a} = 1$

$\frac{x_n}{x_{n-1}} \geq 1$, но нужно доказать: $\frac{-a}{n(n-1+a)} > -1$

$\frac{a}{n(n-1+a)} < 1$

$a < n(n-1+a)$

$n^2 - n + an - a > 0$

$n(n-1) + a(n-1) > 0$

$(n-1)(n+a) > 0$

Из того, что у нас есть нужно

$(n+a) > 0 \Leftrightarrow n > -a$, что дано, значит Бернулли разрешен

Ограниченность. $y_n = (1+\frac{-a}{n})^n$ монотонно возрастает при $n > a$

$x_n \cdot y_n = (1+\frac{a}{n})^n \cdot (1+\frac{-a}{n})^n = (1-\frac{a^2}{n})^n \leq 1$

$x_n \leq \frac{1}{y_n} \leq \frac{1}{y_{min}} = const$

Следствие $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$ (монотонность + ограниченность)

Def. $a \in \mathbb{R}$ $exp(a) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{a}{n})^n$

Def. $e = \lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = exp(1)$

Rem. $z_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$

1. z_n строго убывает
2. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = e$

Доказательство

2. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} ((1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n})) = e \cdot 1 = e$

1. $z_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1} = (\frac{n+1}{n})^{n+1} = \frac{1}{(\frac{n}{n+1})^{n+1}} = \frac{1}{(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}} = \frac{1}{(1+\frac{-1}{n+1})^{n+1}}$

   Знаменатель строго возрастает $\Rightarrow$ дробь строго убывает

Свойства экспоненты:

1. $exp(1) = e;\ exp(a) = 1$
2. Монотонность:

   $a \leq b \Rightarrow exp(a) \leq exp(b)$

Доказательство

$1+\frac{a}{n} \leq 1+\frac{b}{n}$ – верно $\forall n$: обе дроби > 0

$\Rightarrow (1+\frac{a}{n})^n \leq (1+\frac{b}{n})^n \Rightarrow exp(a) \leq exp(b)$

3. $exp(a) > 0\ \forall a \in \mathbb{R}$

   $(1+\frac{a}{n})^n > 0$ НСНМ строго возрастает

   $\exists \delta > 0 : (1+\frac{a}{n})^n > \delta > 0 \Rightarrow exp(a) > \delta > 0$

4. $exp(a) \cdot exp(-a) \leq 1$

   $(1+\frac{a}{n})^n \cdot (1+\frac{-a}{n})^n = (1+\frac{-a^2}{n})^n \leq 1 \Rightarrow exp(a) \cdot exp(-a) \leq 1$

5. $exp(a) \geq 1+a\ \forall a \in \mathbb{R}$

   $(1+\frac{a}{n})^n \geq 1+n\frac{a}{n} = 1+a; n > -a \Rightarrow exp(a) \geq 1+a$

6. $a < 1$

   $exp(a) \leq \frac{1}{1-a}$

   $\begin{cases} exp(a) \cdot exp(-a) < 1 \Leftrightarrow exp(a) \leq \frac{1}{exp(-a)} \\ exp(-a) \geq 1-a > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{exp(-a)} \leq \frac{1}{1-a}$

7. $\forall n \in \mathbb{N}$

   $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$

Доказательство

- Правое:
  $z_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ строго убывает
  $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = e$
  $fix\ n$
  $(1+\frac{1}{n+1})^{n+2} < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$
- Левое:
  Строго убывает и $\to e \Rightarrow e = inf(1+\frac{1}{n+1})^{n+2} \Rightarrow e \leq (1+\frac{1}{n+1})^{n+2} < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$

$(1+\frac{1}{n})^n = 2\ (n=1) \Rightarrow 2 < e$

$(1+\frac{1}{n})^{n+1} = (1+\frac{1}{5})^6\ (n=5) < 3$

$2 < e < 3$

$e = 2,718281828459045\cdots$

Lem. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{a_n}{n})^n = exp(a)$

Доказательство

$A = 1+\frac{a}{n};\ B = 1+\frac{a_n}{n}$

a_n – ограниченная $\Rightarrow \exists M : \begin{cases} |A| \leq 1+\frac{M}{n} \\ |B| \leq 1+\frac{M}{n} \end{cases}$

Докажем, что $\begin{cases} A^n - B^n \to 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} A^n = exp(a) \end{cases} \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} B^n = exp(a)$

$0 \leq |A^n - B^n| = |(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots+B^{n-1}| = |A-B|\cdot|A^{n-1}+A^{n-2}B\cdots B^{n-1}| \leq |A-B|\cdot(|A^{n-1}| + |A^{n-2}B|+\cdots+|B^{n-1}|) \leq |A-B|\cdot n(1+\frac{M}{n})^{n-1} = |1+\frac{a}{n}-1-\frac{a_n}{n}|\cdot n\cdot(1+\frac{M}{n})^{n-1} = \frac{|a-a_n|}{n}\cdot n\cdot(1+\frac{M}{n})^{n-1} = |a-a_n|\cdot(1+\frac{M}{n})^{n-1}$

Модуль – б/м, скобка ограничена $\Rightarrow$ выражение $\to 0 \Rightarrow A^n - B^n \to 0$

Следствие

$exp(a)\cdot exp(b) = exp(a+b)$

Доказательство

$(1+\frac{a}{n})^n\cdot(1+\frac{b}{n})^n = (1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n}+\frac{ab}{n^2})^n = (1+\frac{a+b+\frac{ab}{n}}{n})^n \Leftrightarrow exp(a)\cdot exp(b) = exp(a+b)$, т.к. $(a+b+\frac{ab}{n}) \to a+b$

Следствие:

1. $exp(n) = e^n, n \in \mathbb{N}$
2. $f(x) = exp(x)$ – строго возрастает

Доказательство

1. $exp(n) = exp(1\cdots1) = exp(1)\cdot exp(1)\cdots = e^n$
2. $t > 0\ exp(x+t) = exp(x)\cdot exp(t) \geq (1+t)exp(x)$

Теорема $\begin{cases} x_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = a < 1 \end{cases} \Rightarrow x_n$ – б/м

Доказательство

$a < 1$, возьмем окрестность радиусом $\frac{a+1}{2}$

$\exists N : \forall n \geq N \frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{a+1}{2}$

$fix\ n > N$

$x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}}\cdot\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\cdots\frac{x_{N+1}}{x_N}\cdot x_N < (\frac{a+1}{2})^{n-N}\cdot x_N$

$0 < x_n < (\frac{a+1}{2})^n\cdot\frac{x_N}{(\frac{a+1}{2})^N} \Rightarrow x_n \to 0$

Следствие

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

Доказательство

1. $x_n=\frac{n^k}{a^n}>0$

   $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(n+1)^k\cdot a^n}{a^{n+1}\cdot n^k}=\frac{1}{a}\cdot(\frac{n+1}{n})^k=\frac{1}{a}\cdot(1+\frac{1}{n})^k$

   $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a}\cdot(1+\frac{1}{n})^k=\frac{1}{a}<1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

2. $x_n=\frac{a^n}{n!}$

   $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{a^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot a^n}=\frac{a}{n+1}$

   $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}=0<1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

3. $x_n=\frac{n!}{n^n}$

   $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot n!}=\frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}=\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$

   $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}<\frac{1}{2}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

Теорема Штольца

y_n строго возрастает и $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$

Если $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=l\in\overline{\mathbb{R}}$, то $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=l$

Доказательство

1. $l=0$

   $\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=z_n$ – б/м $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists N:\forall n\geq N\ |z_n|<\varepsilon$

   $fix\ \varepsilon>0\to N$

   $N\leq m<n$

   $x_n-x_{n-1}=z_n(y_n-y_{n-1})$

   $x_n-x_m=(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\dots+(x_{m+1}-x_m)=z_n(y_n-y_{n-1})+z_{n-1}(y_{n-1}-y_{n-2})+\dots+z_{m+1}(y_{m+1}-y_m)$

   $|x_n-x_m|=|\sum\limits_{k=m+1}^{n}z_k(y_k-y_{k-1})|\leq\sum\limits_{k=m+1}^{n}|z_k(y_k-y_{k-1})|<\varepsilon\sum\limits_{k=m+1}^{n}|y_k-y_{k-1}|=\varepsilon\sum\limits_{k=m+1}^{n}(y_k-y_{k-1})=\varepsilon(y_n-y_m)$

   $|x_n-x_m|<\varepsilon(y_n-y_m)$

   $|x_n|-|x_m|\leq|x_n-x_m|<\varepsilon(y_n-y_m)<\varepsilon y_n$

   $|x_n|<|x_m|+\varepsilon y_n$

   $|\frac{x_n}{y_n}|<\varepsilon+\frac{|x_m|}{y_n}$

   $fix\ m;n\to+\infty\Rightarrow|x_m|=const\Rightarrow\frac{|x_m|}{y_n}$ – б/м $\Rightarrow\frac{|x_n|}{y_n}<\varepsilon\Rightarrow|\frac{x_n}{y_n}|<2\varepsilon$

2. $l\in\mathbb{R};l\neq0$

   $\tilde{x_n}=x_n-ly_n$

   $\frac{\tilde{x_n}-\tilde{x_{n-1}}}{y_n-y_{n-1}}=\frac{x_n-ly_n-(x_{n-1}-ly_{n-1})}{y_n-y_{n-1}}=\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-l\to0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\tilde{x_n}}{y_n}=0$

   $\frac{\tilde{x_n}}{y_n}=\frac{x_n-ly_n}{y_n}=\frac{x_n}{y_n}-l\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=l$

3. $l = +\infty$

   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0_+ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 0_+ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$

   Надо доказать:

   - x_n строго возрастает
   - $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

   $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to +\infty \Rightarrow$ НСНМ $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1 \Rightarrow x_n - x_{n-1} > 0 \Rightarrow x_n > x_{n-1}$

   НСНМ (N) $N \le m < n$

   $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1 \Rightarrow x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1}$

   $x_n - x_m = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_{m+1} - x_m) > (y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + \dots + (y_{m+1} - y_m) = y_n - y_m$

   $x_n - x_m > y_n - y_m > y_n$

   $x_n > x_m + y_n$

   $fix\ m; n \to +\infty$

   $x_n > x_m + y_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

4. $l = -\infty$

   $\tilde{x_n} = -x_n \to$ случай 3

Теорема Штольца (ver. 2)
$y_n : 0 < y_n < y_{n-1}\ \forall n \in \mathbb{N}$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$
Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$

Доказательство

1. $l = 0$

   $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = z_n$ – б/м $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ N : \forall n \ge N\ |z_n| < \varepsilon$

   $N \le m < n$

   $x_n - x_m = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_{m+1} - x_m) = z_n(y_n - y_{n-1}) + z_{n-1}(y_{n-1} - y_{n-2}) + \dots + z_{m+1}(y_{m+1} - y_m)$

   $|x_n - x_m| \le \sum\limits_{k=m+1}^{n} |z_k| \cdot |y_k - y_{k-1}| \le \varepsilon \sum\limits_{k=m+1}^{n} |y_k - y_{k-1}| = \varepsilon \sum\limits_{k=m+1}^{n} (y_{k-1} - y_k) = \varepsilon(y_m - y_n)$

   $fix\ m; n \to +\infty$

   $|x_n - x_m| \le \varepsilon(y_m - y_n) \Rightarrow |x_m| \le \varepsilon y_m$

   $|\frac{x_m}{y_m}| \le \varepsilon$

   $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall m \ge N\ |\frac{x_m}{y_m}| \le \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$

2-4. Упражнение

§3. Подпоследовательности

Def. n_k строго возрастающая последовательность натуральных чисел
$x_1, x_2, x_3 \cdots x_n \cdots$ – последовательность
$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3} \cdots x_{n_k} \cdots$ – ее подпоследовательность
Rem.

1. $\exists \lim x_n = a \Rightarrow \forall x_{n_k}\ \lim x_{n_k} = a$

2. $n_k \bigcup m_l = \mathbb{N}$

   $\lim x_{n_k} = \lim x_{m_l} = a \Rightarrow \exists \lim x_n = a$

Rem. n_k возрастающая последовательность индексов (т.е. $\mathbb{N}$) $\Rightarrow n_k \geq k$

Доказательство

ММИ:
$n_1 \geq 1$
$n_k \geq k \Rightarrow n_{k+1} > n_k \geq k \Rightarrow n_{k+1} > k \Rightarrow n_{k+1} \geq k+1$
Теорема о стягивающихся отрезках
$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots \supset [a_n; b_n]$
$\lim(b_n - a_n) = 0 \Rightarrow \exists! c \in [a_n; b_n]\ \forall n \in \mathbb{N}$ и $\lim a_n = \lim b_n = c$

Доказательство

- $\exists c : c \in [a_n; b_n]\ \forall n \in \mathbb{N}$ – знаем из теоремы о вложенных отрезках
- Пусть $\exists d : d \in [a_n; b_n]\ \forall n \in \mathbb{N}$

  $|c - d| \leq |a_n - b_n|$

  $|c - d| \leq 0 \Rightarrow c = d$
- $0 \leq |a_n - c| \leq |a_n - b_n|$

  $|a_n - c| \to 0 \Rightarrow \lim a_n = c$

Теорема Больцано-Вейерштрасса
Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность

Доказательство

x_n – ограничена $\Rightarrow \exists a_0, b_0 : a_0 < x_n < b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$
Возьмемь $\frac{a_0+b_0}{2}$, выберем половину с бесконечным числом членов. Пусть левая $\Rightarrow a_1 = a_0; b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$
Возьмем $\frac{a_1+b_1}{2}$, аналогично. Пусть правая $\Rightarrow a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}; b_2 = b_1$ итд
Тогда $[a_0; b_0] \supset [a_1; b_1] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$
$|a_n - b_n| = |\frac{a_0 - b_0}{2^n}| \Rightarrow |a_n - b_n| \to 0$
Значит это система стягивающихся отрезков
На первом шаге выберем $x_{n_1} \in [a_0; b_0]$, на втором $x_{n_2} \in [a_1; b_1]$ $(n_2 > n_1)$ и так далее
Получили последовательность x_{n_k}
$x_{n_k} \in [a_{k-1}; b_{k-1}]$
$a_{k-1} \leq x_{n_k} \leq b_{k-1} \Rightarrow x_{n_k} \to c$, где $c = \bigcap [a_n; b_n]$
$\lim x_{n_k} = c$
Def. x_n – фундаментальная, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n, m \geq N\ |x_m - x_m| < \varepsilon$
Свойства:

1. x_n – сходится $\Rightarrow x_n$ – фундаментальна
2. x_n – фундаментальна $\Rightarrow x_n$ – ограничена
3. x_n – фундаментальна и $\exists n_k : \lim x_{n_k} = a \Rightarrow \lim x_n = a$

Доказательство

1. $\lim x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geq N\ |x_n - a| < \varepsilon$

   $m, n \geq N \begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon \\ |x_m - a| < \varepsilon \end{cases}$

   $|x_n - x_m|\ |(x_n - a) + (a - x_m)| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < 2\varepsilon \Rightarrow x_n$ – фундаментальна

2. x_n – фундаментальна

   $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n, m \geq N \ |x_n - x_m| < \varepsilon$

   $\varepsilon = 1 \ \exists N : \forall n, m \geq N \ |x_n - x_m| < 1$

   $\forall n \ |x_n - x_N| < 1$

   $|x_n| - |x_N| \leq |x_n - x_N| < 1$

   $\forall n \geq N \ |x_n| \leq 1 + |x_N|$

   Значит НСНМ ограничена $\in [-(1 + |x_N|); 1 + |x_n|]$

   До N конечное число, их можем просто сравнить с текущей границей, т.е.

   $x_n \leq max\{x_1, x_2 \cdots x_{N-1}, 1 + |x_n|\}$

   $x_n \geq min\{x_1, x_2 \cdots x_{N-1}, -(1 + |x_n)\}$

3. $fix \ \varepsilon > 0$

   $\exists K : \forall k \geq K \ |x_{n_k} - a| < \varepsilon$

   $\exists N : \forall m, n \geq N \ |x_n - x_m| < \varepsilon$

   $k \geq max\{N; K\}$

   $|x_n - a| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a|$

   $k \geq N \Rightarrow n_k \geq k \geq N \Rightarrow |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < 2\varepsilon \Rightarrow \lim x_n = a$

Критерий Коши: x_n – сходится $\Leftrightarrow$ x_n – фундаментальна

Доказательство

$\Rightarrow$ уже доказано

$\Leftarrow$ x_n – фундаментальна $\Rightarrow$ x_n – ограничена $\Rightarrow$ существует сходящаяся подпоследовательность $\Rightarrow$ x_n – сходится