Содержание

1 Интегральчики **2**

1.1 §1. Первообразная и неопределенный интеграл 2

1.2 §2. Площадь 5

1.3 §3. Свойства интеграла 8

1.4 §4. Приложение формулы интегрирования по частям 12

1.5 §5. Несобственные интегралы 21

2 Анализ в метрических пространствах **29**

2.1 §1. Метрические пространства 29

1 Интегральчики

1.1 §1. Первообразная и неопределенный интеграл

Definition 1.1. Первообразная функция

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}; \quad F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
F – первообразная функция f, если F дифференцируема на $\langle a, b\rangle$ и $F'(x) = f(x)$ при всех $x \in \langle a, b\rangle$

Example 1.1.

$f(x) = \cos x$
$F(x) = \sin x$

Proposition 1.1.

Не всякая функция имеет первообразную

Example 1.2.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 0] \\ 1, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

Proposition 1.2.

Непрерывная на $\langle a, b\rangle$ функция имеет первообразную

Theorem 1.1.

$f, F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, F$ – первообразная f. Тогда

1. $F + C$ – первообразная f
2. Если Φ – первообразная f, то $\Phi = F + C$ для некоторой константы C

Доказательство:

1. $(F + C)' = F' = f$
2. $\Phi' = f = F'$
   $g = \Phi - F$
   $g' = 0 \Rightarrow g = C \Rightarrow \Phi = F + C$

Definition 1.2. Неопределенный интеграл

Неопределенный интеграл – множество первообразных функции f
Обозначение: $\int f(x)dx$

Remark 1.1.

Для доказательства равенства $\int f(x)dx = F(x) + C$ достаточно проверить, что $F'(x) = f(x)$

Действия с множествами функций:

A и B – множества функций $\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

$\lambda \in \mathbb{R},\ h : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

1. $A + B = \{f + g : f \in A,\ g \in B\}$
2. $\lambda A = \{\lambda f : f \in A\}$
3. $A + h = \{f + h : f \in A\}$
4. $(A)' = \{f' : f \in A\}$

Example 1.3.

$(\int f(x)dx)' = \{f\}$

Таблица интегралов:

1. $\int adx = ax + C$
2. $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C,\ p \neq -1$
3. $\in \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;\ a > 0,\ a \neq 1$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

Theorem 1.2. Линейность интеграла

$f, g : \langle a, b\rangle \Rightarrow \mathbb{R}$ имеют первообразные
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, не равные нулю одновременно
Тогда $\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$

Доказательство:

F и G – первообразные

Правая часть $= \{\alpha F(x) + \beta G(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$

$(\alpha F(x) + \beta G(x) + C)' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$

Theorem 1.3. Замена переменной в интеграле

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R},\ F$ – первообразная
$\varphi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$ – дифференцируемая функция
Тогда $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C$

Доказательство:

$(F(\varphi(x)) + C)' = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$

Remark 1.2.

$y=\varphi(x);\quad dy=\varphi'(x)dx$
$\frac{dy}{dx}=y'$
$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(y)dy=F(y)+C=F(\varphi(x))+C$

Example 1.4.

1. $\int \frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y}=\ln|y|+c=\ln|x^2+1|+C$
   Здесь $y=\varphi(x)=x^2+1$
2. $\int \frac{dx}{\sin x}=\int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int \frac{dy}{\sin y\cos y}=\int \frac{dy}{\operatorname{tg} y\cos^2 y}=\int \frac{(\operatorname{tg} y)'}{tgy}dy=\int \frac{dz}{z}=\ln|z|+C=$
   $=\ln|\operatorname{tg} y|+C=\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|+C$
   Здесь $y=\frac{x}{2}$ и $z=\operatorname{tg} y$
3. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}=\int \frac{3t^2dt}{1+t}=3\int \frac{t^2-1+1}{t+1}dt=3\int(t-1+\frac{1}{t+1})dt=3(\int tdt-\int dt+\int \frac{dt}{t+1})=$
   $=3t^2-3t+3\int \frac{d(t+1)}{t+1}=3t^2-3t+3\ln|t+1|+C$

Theorem 1.4. Интегрирование по частям

$f,g:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ дифференцируемые
Если $f'g$ имеет первообразную, то $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$

Доказательство:

H – первообразная функции $f'g$

$(fg-H+C)'=(fg)'-H'=f'g+fg'-f'g=fg'$

Notation 1.1. Традиционная запись формулы

$\int udv=uv-\int vdu$
$\begin{cases} du=u'(x)dx \\ dv=v'(x)dx \end{cases}$

Example 1.5.

1. $\int \ln xdx=x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C$
   Здесь $u=\ln x,\ v=x$ и $du=(\ln x)'dx=\frac{dx}{x}$
2. $\int x^2e^xdx=\int x^2de^x=x^2e^x-\int 2xe^xdx=x^2e^x-2\int xde^x=x^2e^x-2(xe^x-\int e^xdx)=$
   $=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$
   Здесь сначала берем $u=x^2, v=e^x$, а потом $u=x, v=e^x$

1.2 §2. Площадь

Definition 1.3. Площадь

F – семейство всех ограниченных подмножеств плоскости
Прямоугольник $\langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle$, площадь прямоугольника $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$
Площадь $S : F \to [0, +\infty)$

1. $S(\langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$
2. $S(E) = S(E_1) + S(E_2)$, если $E = E_1 \bigcup E_2,\ E_1 \bigcap E_2 = \varnothing$

Theorem 1.5. Свойство

Если $\tilde{E} \subset E$, то $S(\tilde{E}) \le S(E)$

Доказательство:

$E = \tilde{E} \bigcup (E \setminus \tilde{E})$

$S(E) = S(\tilde{E}) + S(E \setminus \tilde{E}) \ge S(\tilde{E})$

Definition 1.4. (Квази)площадь

$\sigma : F \to [0, +\infty)$

1. $\sigma(\langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$
2. $\sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$, если E_- и E_+ множества, получающиеся в результате разбиения E вертикальной (горизонтальной) прямой
3. Если $\tilde{E} \subset E$, то $\sigma(\tilde{E}) \le \sigma(E)$

Remark 1.3. Свойство

Формула 2) верна и если $E_- \bigcap E_+ \ne \varnothing$
Например, линию разбиения можно считать относящейся и к левой (верхней), и к правой (нижней) части

Доказательство:

$e = E_- \bigcap E_+$, $\sigma(e) = 0$

$\sigma(E_+) = \sigma(E_+ \setminus e) + \sigma(e \bigcap E_+) = \sigma(E_+ \setminus e)$

$\sigma(E_-) + \sigma(E_+) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+ \setminus e) = \sigma(E_- \bigcup (E_+ \setminus e)) = \sigma(E_- \bigcup E_+) = \sigma(E)$

Example 1.6. Примеры площадей $E \in F$

- Рассмотрим покрытие E конечным числом прямоугольников P_i (т.е. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i \supset E$)
  $\sigma_1(E) = \inf\{\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(P_i) : \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i \supset E\}$
- Рассмотрим покрытие E последовательностью прямоугольников P_i (т.е. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i \supset E$)
  $\sigma_2(E) = \inf\{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sigma(P_i) : \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i \supset E\}$
- Ясно, что $\sigma_1(E) \geq \sigma_2(E)$
  Но, если $E = ([0,1] \bigcap \mathbb{Q}) \times ([0,1] \bigcap \mathbb{Q})$, то $\begin{cases} \sigma_1(E) = 1 \\ \sigma_2(E) = 0 \end{cases}$

Theorem 1.6.

1. σ_1 – площадь
2. σ_1 не меняется при параллельном переносе

Доказательство:

1)

1. $\sigma_1(\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle) = (b-a)(d-c)$
   Поскольку $[a, b] \times [c, d]$ – покрытие P, $\sigma_1(P) \leq (b-a)(d-c)$
   В обратную сторону красиво доказано АИ. Там рисуночки, посмотрите!
2. $E = E_- \bigcup E_+ \Rightarrow \sigma_1(E) = \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$
   $\leq$: Если $P_1^+, \dots P_m^+$ – покрытие E_+, для которого $\sum\limits_{i=1}^{m} \sigma(P_i^+) < \sigma_1(E_+) + \varepsilon$
   А $P_1^-, \dots P_n^-$ – покрытие E_-, для которого $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(P_i^-) < \sigma_1(E_-) + \varepsilon$, то
   $P_1^-, P_2^-, \dots P_n^-, P_1^+, P_2^+, \dots P_m^+$ – покрытие E, для которого
   $\sigma_1(E) \leq \sum\limits_{i=1}^{n+m} \sigma(P_i) < \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+) + 2\varepsilon \Rightarrow \sigma_1(E) < \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+) + 2\varepsilon$
   $\geq$: Пусть $P_1, P_2, \dots P_n$ – покрытие E
   Разобьем P_i на P_i^- и P_i^+
   $\sigma(P_i) = \sigma(P_i^-) + \sigma(P_i^+)$
   $P_1^{\pm}, P_2^{\pm}, \dots P_n^{\pm}$ – покрытие $E^{\pm}$
   $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(P_i^{\pm}) \geq \sigma_1(E^{\pm})$
   $\sum\limits_{i=1}^{n} (\sigma(P_i^-) + \sigma(P_i^+)) \geq \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$
3. $\tilde{E} \subset E \Rightarrow \sigma_1(\tilde{E}) \leq \sigma_1(E)$
   Если $\bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i \supset E$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i \supset \tilde{E} \Rightarrow$ класс покрытий $\tilde{E}$ шире, чем класс покрытий E

2)

Пусть $\tilde{E}$ – параллельный перенос E на вектор $\overrightarrow{v}$

$P_1, P_2, \dots P_n$ – покрытие E. Пусть $\tilde{P}_i$ – параллельный перенос P_i на вектор $\overrightarrow{v}$

Тогда $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \dots \tilde{P}_n$ – покрытие $\tilde{E}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(P_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(\tilde{P}_i)$

Definition 1.5.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$
$f_+ := \max\{f, 0\}$, т.е. $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$
$f_- := \max\{-f, 0\}$, т.е. $f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$
Свойства:

1. $f_\pm \geq 0$
2. $f = f_+ - f_-$
   $|f| = f_+ + f_-$
3. $f_+ = \frac{f+|f|}{2}$ и $f_- = \frac{|f|-f}{2}$
4. Если $f \in C[a,b]$, то $f_\pm \in C[a,b]$

Definition 1.6. Подграфик функции

$f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f \geq 0$
Подграфик функции f – $P_f = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x \in [a,b],\ 0 \leq y \leq f(x)\}$

Definition 1.7. Определенный интеграл

σ – зафиксированная квазиплощадь
$f \in C[a,b]$ (пока что так)
$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f(x)dx := \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-})$

Свойства:

1. $\int\limits_a^a f = 0$
2. $\int\limits_a^b 0 = 0$
3. Если $f \geq 0$, то $\int\limits_a^b f = \sigma(P_f)$
4. $\int\limits_a^b (-f) = -\int\limits_a^b f$
   Доказательство:
   $(-f_+) = \max\{-f, 0\} = f_-$
   $(-f_-) = \max\{f, 0\} = f_+$
   $\int\limits_a^b (-f) = \sigma(P_{f_-}) - \sigma(P_{f_+}) = -\int\limits_a^b f$
5. $\int\limits_a^b (c) = c(b-a)$
   Доказательство:
   $c > 0 \Rightarrow \int\limits_a^b c = P(\text{прямоугольника}) = c(b-a)$
6. Если $a < b,\ f \geq 0$ и $\int\limits_a^b f = 0$, то $f \equiv 0$

Доказательство: (от противного)
Пусть $f(x_0) > 0$. Из непрерывности f в $x_0 \Rightarrow \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall |x - x_0| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow P_f \supset [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [0, \frac{f(x_0)}{2}] \Rightarrow$
$\Rightarrow \sigma(P_f) \geq \sigma(\text{прямоугольника}) = 2\sigma \frac{f(x_0)}{2} > 0$ Противоречие

1.3 §3. Свойства интеграла

Notation 1.2. Обозначение

$P_g(E)$ – подграфик функции $g \geq 0$ над множество E, т.е.
$P_g(E) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in E,\ 0 \leq y \leq g(x)\}$

Theorem 1.7. Аддитивность интеграла

$f \in C[a, b]$ и $c \in [a, b]$
Тогда $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$

Доказательство:

$$\int\limits_a^b f = \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-}) = \sigma(P_{f_+}([a, c])) + \sigma(P_{f_+}([c, b])) - \sigma(P_{f_-}([a, c])) - \sigma(P_{f_-}([c, b])) = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$$

Theorem 1.8. Следствие

$f \in C[a, b]$, $a \leq c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n \leq b$. Тогда
$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^{c_1} f + \int\limits_{c_1}^{c_2} f + \ldots + \int\limits_{c_{n-1}}^{c_n} f + \int\limits_{c_n}^b f$

Доказательство:

Индукция по n

Theorem 1.9. Монотонность интеграла

$f, g \in C[a, b]$ и $f \leq g$ на $[a, b]$
Тогда $\int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b g$

Доказательство:

$f \leq g \Rightarrow f_+ \leq g_+ \Rightarrow P_{f_+} \subset P_{g_+}$, а еще $-g \leq -f \Rightarrow g_- \leq f_- \Rightarrow P_{g_-} \subset P_{f_-}$
Значит $\sigma(P_{f_+}) \leq \sigma(P_{g_+})$ и $\sigma(P_{g_-}) \leq \sigma(P_{f_-})$

$$\int\limits_a^b f = \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-}) \leq \sigma(P_{g_+}) - \sigma(P_{g_-}) = \int\limits_a^b g$$

Theorem 1.10. Следствия

1. $f \in C[a,b] \Rightarrow \min\limits_{[a,b]} f \cdot (b-a) \leq \int\limits_a^b f \leq \max\limits_{[a,b]} f \cdot (b-a)$

   Доказательство:

   $\min f \leq f \leq \max f$ и монотонность интеграла для двух постоянных функций и f

2. $f \in C[a,b] \Rightarrow |\int\limits_a^b f| \leq \int\limits_a^b |f|$

   Доказательство:

   $-|f| \leq f \leq |f| \xRightarrow{\text{монотонность}} -\int |f| = \int\limits_a^b (-|f|) \leq \int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b |f|$

Theorem 1.11. (Первая) (интегральная) теорема о среднем

$f \in C[a,b]$. Тогда существует $c \in [a,b] : \int\limits_a^b f = f(c)(b-a)$

Доказательство:

$\min f \leq \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f \leq \max f$, но множество значений f на $[a,b]$ – это отрезок $[\min f, \max f]$

Следовательно, число $\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f$ – есть значение функции f в какой-то точке $[a,b]$. Возьмем эту точку в качестве c

Definition 1.8. Среднее значение функции на отрезке

Среднее значение функции f на отрезке $[a,b]$ – это $\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f$

Definition 1.9. Интеграл с переменным верхним пределом

$f \in C[a,b]$

$\Phi(x) := \int\limits_a^x f$, где $x \in [a,b]$

Remark 1.4.

$\Phi(a) = 0$

Definition 1.10. Интеграл с переменным нижним пределом

$f \in C[a,b]$

$\Psi(x) := \int\limits_x^b f$, где $x \in [a,b]$

Remark 1.5.

$\Psi(b) = 0$

$\Phi(x) + \Psi(x) = \int\limits_a^b f$ (это аддитивность $\int$)

Theorem 1.12. Теорема Барроу

Если $f \in C[a,b]$, $\Phi(x) := \int\limits_a^x f$, то Φ – первообразная функции f

Доказательство:

Надо доказать, что $\Phi'(x) = f(x)$. Пусть $x < y$

$R(y) = \frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \frac{1}{y-x}(\int\limits_a^y f - \int\limits_a^x f) = \frac{1}{y-x}\int\limits_x^y f \overset{\text{т-ма о среднем}}{=} f(c_y)$, где $c_y \in [x,y]$

Возьмем последовательность $y_n > x$ и $\lim y_n = x$

$\Phi'_+(x) = \lim\limits_{y \to x_+} R(y) = \lim\limits_{n\to\infty} R(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(c_{y_n}) = f(x)$, т.к. $x \le c_{y_n} \le y_n \to x$

Если же $y < x$, то нужно смотреть на $\frac{1}{x-y}\int\limits_y^x f$ и дальше ровно так же

Следовательно, $\Phi'(x) = f(x)$

Theorem 1.13. Следствия

1. $\Psi(x) := \int\limits_x^b f \Rightarrow \Psi'(x) = -f(x)$
   Доказательство:
   $\Phi(x) + \Psi(x) = const$
2. Если $f \in C\langle a,b\rangle$, то у f есть первообразная на $\langle a,b\rangle$
   Доказательство:
   Возьмем $c \in (a,b)$ и $F(x) := \begin{cases} \int\limits_c^x f, \ x \ge c \\ -\int\limits_x^c f, \ x \le c \end{cases}$

$$F'(x) = f(x) \text{при} x \ge c \text{ (по теореме Барроу)}$$
$$\text{Тогда} \quad F'(x) = -f(x) \text{при} x \le c \text{ (по следствию 1)}$$
$$F'_+(c) = f(c) = F'_-(c)$$

Theorem 1.14. Формула Ньютона-Лейбница

$f \in C[a,b]$, F – первообразная f

Тогда $\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$

Доказательство:

$\Phi(x) := \int\limits_a^x f$ – первообразная f (по теореме Барроу) $\Rightarrow \Phi = F + C$ для некоторой $C \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \int\limits_a^b f = \Phi(b) = F(b) + C = F(b) - F(a)$, т.к. $0 = \Phi(a) = F(a) + C$

Notation 1.3. Обозначение

$F|_a^b := F(b) - F(a)$ подстановка

$\int\limits_a^b f = F|_a^b$

Theorem 1.15. Линейность интеграла

$f, g \in C[a,b],\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Тогда $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$

Доказательство:

Пусть F и G – первообразные f и g

Тогда $\alpha F + \beta G$ – первообразная $\alpha f + \beta g \Rightarrow \int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = (\alpha F + \beta G)|_a^b = \alpha F|_a^b + \beta G|_a^b =$

$= \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$

Theorem 1.16. Формула интегрирования по частям

$u, v \in C^1[a,b]$

Тогда $\int\limits_a^b uv' = uv|_a^b - \int\limits_a^b u'v$

Доказательство:

Пусть H – первообразная $u'v$. Тогда $uv - H$ – первообразная uv'

$(uv - H)' = u'v + uv' - H' = u'v + uv' - u'v = uv'$

$\int\limits_a^b uv' = (uv - H)|_a^b = uv|_a^b - H|_a^b = uv|_a^b - \int\limits_a^b u'v$

Notation 1.4. Соглашение

Если $a > b$, то $\int\limits_a^b f = -\int\limits_b^a f$

Theorem 1.17. Замена переменной в определенном интеграле

$f \in C\langle a,b\rangle,\ \varphi \in C^1\langle c,d\rangle,\ \varphi : \langle c,d\rangle \to \langle a,b\rangle,\ p, q \in \langle c,d\rangle$. Тогда

$\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dtt = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx$

Доказательство:

Пусть F – первообразная для f. Тогда $F \circ \varphi$ – первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ (т.к. $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t)$)

$\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = (F\circ\varphi)|_p^q = F(\varphi(q)) - F(\varphi(p)) = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f$

1.4 §4. Приложение формулы интегрирования по частям

$W_n := \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \overset{(*)}{=} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

Пояснение к $(*)$: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x ds = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \frac{\pi}{2} - t dt = -\int\limits_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} \cos^n x dx = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$

Здесь $\varphi(t) = \frac{\pi}{2} - t$ и $\varphi'(t) = -1$

$W_0 = \frac{\pi}{2},\ W_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,\ W_2 = \frac{1}{2}(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2) = \frac{\pi}{4}$

$W_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\cdot(-\cos x)' dx = -\sin^{n-1} x \cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x \cos x(-\cos x)dx =$

$= (n-1)(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx) = (n-1)(W_{n-2} - W_n) \Rightarrow nW_n = (n-1)W_{n-2}$

Если четно, то $W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} W_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2} W_{2n-1} = \ldots = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots1}{2n(2n-2)\ldots2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!}{2n!!}\cdot\frac{\pi}{2}$

Если нечетно, то $W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1} W_{2n-3} = \ldots = \frac{2n(2n-2)\ldots2}{(2n+1)(2n-1)\ldots3}\cdot 1 = \frac{2n!!}{(2n+1)!!}$

Theorem 1.18. Формула Валлеса

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n!!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Доказательство:

$\sin^{2n+2} x \le \sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x$ при $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} x dx \le \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx \le \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx$

То есть $W_{2n+2} \le W_{2n+1} \le W_{2n}$

$\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} \le \frac{2n!!}{(2n+1)!!} \le \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$

$\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{\pi}{2} \le \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!})^2\cdot\frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$

Theorem 1.19. Следствие

$C_{2n}^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$

Доказательство:

$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{n!n!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}4^n \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot 4^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$

Theorem 1.20. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

$f \in C^{n+1}\langle a, b\rangle,\ x_0, x \in \langle a, b\rangle$

Тогда $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$

Доказательство:

Индукция по n. База $n = 0$

$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{0!}\int\limits_{x_0}^{x} f'(t)dt \overset{\text{Н-Л}}{=} f(x_0) + f(x) - f(x_0) = f(x)$ – верно

Переход $n \to n+1$

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = (*)$

Берем $u = f^{(n+1)}$, $v' = (x-t)^n$, $v = -\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$

$\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = -f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \int\limits_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(t)dt$

$(*) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)dt$

Example 1.7.

$H_j := \frac{1}{j!}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^j \cos x dx$

Theorem 1.21. Свойства:

1. $0 < H_j \leq \frac{1}{j!}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2})^{2j}\cos x dx = \frac{(\frac{\pi}{2})^{2j}}{j!}$
2. Если $c > 0$, то $c^j H_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$
3. $H_0 = 1,\ H_1 = 2$
4. При $j \geq 2\ \ H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$

   Доказательство:

   Берем $v' = \cos x$, $u = ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^j$, $v = \sin x$, $u' = -2jx((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1}$

   $j!H_j = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^j \cos x dx = ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^j \sin x|x = 0^{x=\frac{\pi}{2}} + 2j\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1}\sin x dx = (*)$

   Первое слагаемом занулится, второе еще раз интегрируем по частям

   $v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$

   $u = x((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1} \Rightarrow u' = ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1} - 2(j-1)x^2((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-2} = (2j-1)((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1} - \frac{\pi^2}{2}(j-1)((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-2}$

   $(*) = 2j(-\cos x x((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1})|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + (2j-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}((\frac{\pi}{2})^2 0 x^2)^{j-1}\cos x dx - \frac{\pi^2}{2}(j-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-2}\cos x dx$

   Первое слагаемое зануляется, второе $= (j-1)!H_{j-1}$, третье $= (j-2)!H_{j-2}$

   $j!H_j = 2(2j-1)j(j-1)!H_{j-1} - \pi^2 j(j-1)(j-2)!H_{j-2}$

   $H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$
5. Существует многочлен P_j степени $\leq j$ с целыми коэффициентами, такой что $H_j = P_j(\pi^2)$

   Доказательство:

   $P_0 \equiv 1,\ P_1 \equiv 2$

   $P_j(x) = (4j-2)P_{j-1}(x) - xP_{j-2}(x) \Rightarrow P_j(\pi^2) = (4j-2)P_{j-1}(\pi^2) - \pi^2 P_{j-2}(\pi^2) = H_j$

Theorem 1.22. Теорема Ламберта

Числа π и π^2 иррациональны

Доказательство:

Пусть $\pi^2 = \frac{m}{n} \Rightarrow 0 < H_j = P_j(\frac{m}{n}) = \frac{\text{целое число}}{n^j} \Rightarrow n^j P_j(\frac{m}{n}) = n^j H_j > 0$ и является целым числом $\Rightarrow n^j H_j \geq 1$, но $\lim\limits_{j\to\infty} n^j H_j = 0$ по свойству 2 – противоречие

Definition 1.11. Равномерная непрерывность

$f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$
f равномерно непрерывна на E, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in E : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Remark 1.6.

Определение непрерывности во всех точках множества E
$\forall y \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ x \in E : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
То есть в этом определении $\delta(\varepsilon, y)$, а в равномерной непрерывности $\delta(\varepsilon)$

Example 1.8.

1. sin и cos равномерно непрерывны на $\mathbb{R}$
   $|sinx - \sin y| \le |x - y|$ и $|\cos x - \cos y| \le |x - y| \Rightarrow \delta = \varepsilon$ подходит
2. x^2 не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$
   Возьмем $\varepsilon = 1$ и покажем, что никакая $\delta > 0$ не подходит
   Рассмотрим x и $x + \frac{\delta}{2}$
   $f(x + \frac{\delta}{2}) - f(x) = (x + \frac{\delta}{2})^2 - x^2 = x\delta + \frac{\delta^2}{4} > x\delta \ge 1$ при $x \ge \frac{1}{\delta}$

Theorem 1.23. Теорема Кантора

$f \in C[a, b] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна на $[a, b]$

Доказательство:

Возьмем $\varepsilon > 0$ и предположим, что никакое $\delta > 0$ не подходит

$\delta = 1$ не подходит $\Rightarrow$ найдутся $x_1, y_1 \in [a, b] : |x_1 - y_1| < 1$ и $|f(x_1) - f(y_1)| \ge \varepsilon$

$\delta = \frac{1}{2}$ не подходит $\Rightarrow$ найдутся $x_2, y_2 : |x_2 - y_2| < \frac{1}{2}$ и $|f(x_2) - f(y_2)| \ge \varepsilon$

$\ldots$

$\delta = \frac{1}{n}$ не подходит $\Rightarrow$ найдутся $x_n, y_n : |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon$

Выберем из x_n схожящуюся подпоследовательность $x_{n_k} : \lim x_{n_k} = c$

$a \le x_{n_k} \le b \Rightarrow c \in [a, b]$ и $\lim y_{n_k} = \lim x_{n_k} + \lim(y_{n_k} - x_{n_k}) = c + 0 = c$

Функция f непрерывна в $c \Rightarrow \exists \delta > 0\ \forall |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\lim x_{n_k} = c \Rightarrow$ при больших k $|x_{n_k} - c| < \delta \Rightarrow |f(x_{n_k}) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\lim y_{n_k} = c \Rightarrow$ при больших k $|y_{n_k} - c| < \delta \Rightarrow |f(y_{n_k}) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Тогда $\varepsilon \le |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \le |f(x_{n_k}) - f(c)| + |f(c) - f(y_{n_k})| < \varepsilon$ – противоречие

Remark 1.7.

Важно, что именно отрезок
Для x^2 мы поняли, что на $[0, +\infty)$ нет равномерной непрерывности $\Rightarrow$ отрезок нельзя заменить на луч
Поймем что на полуинтервал тоже нельзя
$f(x) = \frac{1}{x}$ на $(0, 1]$ не равномерно непрерывна
$\varepsilon = 1$ никакое $\delta > 0$ не подходит (если какое-то не подходит, то $\delta > \delta_0$ тоже не подходит)
Возьмем $0 < \delta \leq 1$, $x = \frac{\delta}{2}$ и $y = \frac{\delta}{4}$
$|x - y| = \frac{\delta}{4} < \delta$, но $|f(x) - f(y)| = \frac{2}{\delta} > 1$

Definition 1.12. Модуль непрерывности

$f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$
$\omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in E,\ |x - y| < \delta\}$ определена при $\delta \geq 0$

Theorem 1.24. Свойства:

1. $\omega_f(0) = 0$
2. $\omega_f(\delta) \geq 0$
3. ω_f нестрого возрастает
4. $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x - y|)$
5. Если f липшицева к константе M, то $\omega_f(\delta) \leq M\delta$
   Доказательство:
   Липшицевость с константой M – это $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|\ \forall x, y \in E$
6. f равномерно непрерывна на $E \Leftrightarrow \lim\limits_{\delta \to 0_+} \omega_f(\delta) = 0$ (т.е. w_f непрерывна в 0)
   Доказательство:
   $\Rightarrow$ f равномерно непрер $\Rightarrow \forall \varepsilon\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in E : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \Rightarrow$
   $\Rightarrow \omega_f(\frac{\delta}{2}) < \varepsilon$, т.к. $\omega_f(\frac{\delta}{2}) \leq \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| < \delta\}$
   Значит $\forall t < \frac{\delta}{2}$ $\omega_f(t) \leq \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{t \to 0_+} \omega_f(t) = 0$
   $\Leftarrow$ $|f(x) - f(y)| \leq w_f(|x - y|)$ по $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ такое что $\omega_f(\delta) < \varepsilon \Rightarrow$ если $|x - y| \leq \delta$, то $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(\delta) < \varepsilon$
7. $f \in C[a, b] \Leftrightarrow \lim\limits_{\delta \to 0_+} \omega_f(\delta) = 0$
   Доказательство:
   $f \in C[a, b] \Leftrightarrow f$ равномерно непрерывна на $[a, b] \Leftrightarrow \lim\limits_{\delta \to 0_+} \omega_f(\delta) = 0$

Definition 1.13. Дробление отрезка

Дробление отрезка $[a, b]$ – набор точек $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

Definition 1.14. Ранг дробления

Ранг дробления – длина самого большого отрезка из дробления
$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1 \ldots x_n - x_{n-1}\} =: \tau$

Definition 1.15. Оснащение дробления

Оснащение дробления – набор точек $\xi_k : \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Definition 1.16. Интегральная сумма (сумма Римана)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, τ дробление отрезка и $\tau = \{x_0, x_1 \ldots x_n\}$
ξ – оснащение дробления и $\xi = \{\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n\}$
$S(f, \tau, \xi) := \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$

Example 1.9.

$S_p(n) := 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p;\ p > 0$
$\lim \frac{S_p(n)}{n^{p+1}}$?
Возьмем $f(x) = x^p$ на $[0, 1]$ и $x_k = \xi_k = \frac{k}{n}$
$\frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \frac{1}{n} \cdot ((\frac{1}{n})^p + (\frac{2}{n})^p + \ldots + (\frac{n}{n})^p) = \sum f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) \to \int\limits_0^1 f(t)dt = \int\limits_0^1 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\big|_0^1 = \frac{1}{p+1}$

Theorem 1.25. Теорема об интегральных суммах

$f \in C[a, b]$, τ – дробление
Тогда $|\int\limits_a^b f - S(f, \tau, \xi)| \leq (b - a)\omega_f(|\tau|)$

Доказательство:

$$\Delta := \int\limits_a^b f - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(\xi_k))dx$$

$$|\Delta| \leq \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - f(\xi_k)|dx \leq \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_f(|\tau|)dx = \omega_f(|\tau|) \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \omega_f(|\tau|)(b - a)$$

Theorem 1.26. Следствия

1. $f \in C[a, b]$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall$ дробления τ ранга $< \delta$ и $\forall$ его оснащения ξ
   $|\int\limits_a^b f - S(f, \tau, \xi)| < \varepsilon$
2. $f \in C[a, b]$. Тогда для любой последовательности дроблений $\tau_n : |\tau_n| \to 0$ и любой последовательности оснащений ξ_n $\lim S(f, \tau_n, \xi_n) = \int\limits_a^b f$

Definition 1.17. Интеграл Римана

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$
f интегрируема по Риману на $[a, b]$, и I ее интеграл, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall$ дробления τ ранга $< \delta$ и $\forall$ его оснащения ξ
$|I - S(f, \tau, \xi)| < \varepsilon$

Lemma 1.1.

$f \in C^2[\alpha,\beta]$. Тогда $\int\limits_\alpha^\beta f(x)ds - (\beta-\alpha)\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} = -\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(b-t)dt$

Доказательство:

$\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$

$\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(x)(x-\gamma)'dx = f(x)(x-\gamma)|_{x=\alpha}^{x=\beta} - \int\limits_\alpha^\beta f'(x)(x-\gamma)dx = f(\beta)\cdot\frac{\beta-\alpha}{2} - f(\alpha)\cdot\frac{\alpha-\beta}{2} =$
$= \frac{f(\beta)+f(\alpha)}{2}(\beta-\alpha)$

$\Delta = -\int\limits_\alpha^\beta f'(x)(x-\gamma)dx = (*)$

Берем $u = f';\ v' = x-\gamma;\ -v = \frac{1}{2}(x-\alpha)(\beta-x) = \frac{1}{2}(-x^2+(\alpha+\beta)x-\alpha\beta)$

$(*) = -f'(x)\cdot(-\frac{1}{2})(x-\alpha)(\beta-x)|_{x=\alpha}^{x=\beta} - \int\limits_\alpha^\beta f''(x)\frac{1}{2}(x-\alpha)(\beta-x)dx$

Theorem 1.27. Формула трапеций

$S = \sum(x_k - x_{k-1})\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}$
Как выглядит формула, если узлы на равных расстояниях?
$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$
$S = \frac{b-a}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2} = \frac{b-a}{n}(\frac{f(a)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(b)}{2})$

Notation 1.5. Как выглядит интегральная сумма если узлы на равных расстояниях?

$\xi_k = x_k$
$S(f,\tau,\xi) = \sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^n f(x_k)$
А если $\xi_k = x_{k-1}$, то $S(f,\tau,\xi) = \frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x_k)$

Remark 1.8.

Если $|f| \le M$, то $\omega_f(\delta) \le M\delta$
$|S(f,\xi,\tau) - \int\limits_a^b f| \le (b-a)\omega_f(\frac{b-a}{n}) \le (b-a)^2\cdot\frac{M}{n}$

Theorem 1.28. Оценка погрешности в формуле трапеций

$f \in C^2[a,b]$
Тогда $|\int\limits_a^b f - \sum\limits_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})\cdot\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}| \le \frac{|\tau|^2}{8}\cdot\int\limits_a^b |f''|$

Доказательство:

$\Delta = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f - \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2} = \sum\limits_{k=1}^{n} (\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f - (x_k - x_{k-1}) \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}) \overset{lemma}{=}$

$\overset{lemma}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} -\frac{1}{2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t)(x_k - t)(t - x_{k-1})dt$

$|\Delta| \leq \frac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)| \cdot |(x_k - t)(t - x_{k-1})dt| \leq (*)$

$(x_k - t)(t - x_{k-1}) \leq (\frac{(x_k - t)+(t - x_{k-1})}{2})^2 = (\frac{x_k - x_{k-1}}{2})^2 = \frac{|\tau|^2}{4}$

$(*) \leq \frac{|\tau|^2}{8} \sum \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)|dt = \frac{|\tau|^2}{8} \int\limits_{a}^{b} |f''|$

Remark 1.9.

Если $|f''| \leq M$ и узлы равноотстоящие друг от друга, то $| \int\limits_{a}^{b} f - \frac{b-a}{n}(\frac{f(a)}{2} + \sum f(x_k) + \frac{f(b)}{2})| \leq (\frac{b-a}{n})^2 \frac{M(b-a)}{8}$

Theorem 1.29. Формула Эйлера-Маклорена для второй производной

$f \in C^2[a,b];\ m, n \in \mathbb{Z}$

$\sum\limits_{k=m}^{n} f(k) = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int\limits_{m}^{n} f(t)dt + \frac{1}{2} \int\limits_{m}^{n} f''(t)\{t\}(1 - \{t\})dt$

Доказательство:

Пишем лемму (1.1) для $\alpha = k$ и $\beta = k + 1$

$\int\limits_{k}^{k+1} f = \frac{f(k)+f(k+1)}{2} - \frac{1}{2} \int\limits_{k}^{k+1} f''(t)(t - k)(k + 1 - t)dt$

Просуммируем по k от m до $n - 1$

$\int\limits_{m}^{n} f = \sum\limits_{k=m}^{n-1} \int\limits_{k}^{k+1} f = \sum\limits_{k=m}^{n-1} \frac{f(k)+f(k+1)}{2} - \frac{1}{2} \sum\limits_{k=m}^{n-1} \int\limits_{k}^{k+1} f''(t)\{t\}(1 - \{t\})dt = \frac{f(m)}{2} + \sum f(k) + \frac{f(n)}{2} -$

$- \frac{1}{2} \int\limits_{m}^{n} f''(t)\{t\}(1 - \{t\})dt$

$\int\limits_{m}^{n} f + \frac{f(m)+f(n)}{2} = \sum f(k) - \frac{1}{2} \int\limits_{m}^{n} f''(t)\{t\}(1 - \{t\})dt$

Example 1.10.

1. $S_p(n) = 1^p + 2^p + \ldots + n^p;\ f(x) = x^p;\ f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$
$S_p(n) = \frac{1+n^p}{2} + \int\limits_1^n x^p dx + \frac{1}{2}\int\limits_1^n p(p-1)x^{p-2}\{x\}(1-\{x\})dx$
Пусть $p > -1$
$|S_p(n) - \frac{n^{p+1}-1}{p+1} - \frac{n^p+1}{2}| \le \frac{|p||p-1|}{8}\int\limits_1^n x^{p-2}dx$
Если $p \in (-1,1)$, то $\int\limits_1^n x^{p-2}dx = \frac{x^{p-1}}{p-1}|_1^n \le \frac{1}{1-p} \Rightarrow S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(1)$
Если $p > 1$, то $\int\limits_1^n x^{p-2}dx = \frac{x^{p-1}}{p-1}|_1^n \le \frac{n^{p-1}}{p-1} = O(n^{p-1}) \Rightarrow S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(n^{p-1})$
2. Гармонические числа $H_n := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$
$f(x) = \frac{1}{x};\ f''(x) = \frac{2}{x^3};\ m = 1$
$H_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \int\limits_1^n \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int\limits_1^n \frac{2}{x^3}\{x\}(1-\{x\})dx = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a_n = (*)$
$a_n := \int\limits_1^n \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^3}dx$
$a_{n+1} = a_n + \int\limits_n^{n+1} \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^3}dx > a_n$
Поймем что a_n ограничена: $a_n \le \int\limits_1^n \frac{\frac{1}{4}}{x^3}dx = \frac{1}{4}\cdot(-\frac{1}{2x^2})|_1^n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8n^2} < \frac{1}{8} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ существует конечный $\lim a_n =: a$
$(*) = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a + O(1) = \ln n + \gamma + O(\frac{1}{n})$, где γ – постоянная Эйлера

Notation 1.6.

$\gamma \approx 0.5772156043\ldots$

3. Формула Стирлинга
$f(t) = \ln t;\ f''(t) = -\frac{1}{t^2};\ m = 1$
$\sum\limits_{k=1}^n \ln k = \frac{\ln 1 + \ln n}{2} + \int\limits_1^n \ln t dt - \frac{1}{2}\int\limits_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}dt = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + 1 - b_n$
$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2}\int\limits_n^{n+1} \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}dt > b_n$
$b_n \le \frac{1}{8}\int\limits_1^n \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{8}(-\frac{1}{t})|_1^n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8n} < \frac{1}{8} \Rightarrow \lim b_n = b \in \mathbb{R} \Rightarrow b_n = b + o(1)$
$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + (1-b) + o(1)$
$n! = n^n e^{-n}\sqrt{n}e^{1-b}e^{o(1)} \sim Cn^n e^{-n}\sqrt{n}$ (где $C = e^{1-b}$)
Хотим найти $C > 0$ из формулы $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{n}C$
Знаем, что $C_{2n}^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$, но $C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{C(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}}{(Cn^n e^{-n}\sqrt{n})^2} = \frac{C2^{2n}\sqrt{2n}}{C^2\sqrt{n}\sqrt{n}} = \frac{4^n\sqrt{n}}{C\sqrt{n}} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^n\sqrt{2}}{C\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} = 1 \Rightarrow C = \sqrt{2\pi}$

Notation 1.7. Формула Стирлинга

$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$
$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}(\ln n + \ln 2\pi) + o(1)$

Remark 1.10.

Чуть более точные вычисления дают $O(\frac{1}{n})$ вместо $o(1)$
$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}e^{O(\frac{1}{n})}$

1.5 §5. Несобственные интегралы

Definition 1.18.

$-\infty < a < b \leq +\infty;\ f \in C[a,b)$

$\int\limits_a^{\to b} f := \lim\limits_{B\to b_-} \int\limits_a^B f$, если такой предел существует

$-\infty \leq a < b < +\infty;\ f \in C(a,b]$

$\int\limits_{\to a}^{b} f := \lim\limits_{A\to a_+} \int\limits_A^b f$, если такой предел существует

Remark 1.11.

1. Если F – первообразная f на $[a,b)$, то
   $\int\limits_a^{\to b} f = \lim\limits_{B\to b_-} \int\limits_a^B f = \lim\limits_{B\to b_-} (F(B) - F(a)) = \lim\limits_{B\to b_-} F(B) - F(a)$
   Если F – первообразная f на $(a,b]$, то
   $\int\limits_{\to a}^{b} f = F(b) - \lim\limits_{A\to a_+} F(A) =: F|_a^b$, т.е. подстановку теперь понимаем как предел (в случае, если она не определена в какой-то точке)
2. Если $f \in C[a,b]$, то новое определение совпадает со старым
   $\int\limits_a^{\to b} f - \int\limits_a^b f = \lim\limits_{B\to b_-} \int\limits_a^B f - \int\limits_a^b f = -\lim\limits_{B\to b_-} \int\limits_B^b f$
   $f \in C[a,b] \Rightarrow f$ ограничена $\Rightarrow |f| \leq M$
   $|\int\limits_B^b f| \leq \int\limits_B^b |f| \leq \int\limits_B^b M = (b-B)M \xrightarrow[B\to b_-]{} 0$

Example 1.11.

$\int \frac{dx}{x^p}$ на $(1,\infty)$ и $(0,1)$

1. $p \neq 1$, первообразная для $\frac{1}{x^p} = x^{-p}$ – это $\frac{x^{-p+1}}{1-p}$
   $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^\infty = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = \begin{cases} +\infty & p < 1 \\ \frac{1}{p-1} & p > 1 \end{cases}$
   Если $p = 1$, то первообразная для $\frac{1}{x}$ – это $\ln x$
   $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x|_1^{+\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} \ln x - \ln 1 = +\infty$
   Итого $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} +\infty & p \leq 1 \\ \frac{1}{p-1} & p > 1 \end{cases}$
2. $p \neq 1$, первообразная $\frac{x^{1-p}}{1-p} \Rightarrow \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_0^1 = \frac{1}{1-p} - \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{x^{1-p}}{1-p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} & p < 1 \\ +\infty & p > 1 \end{cases}$
   $p = 1 \Rightarrow$ первообразная $\ln x \Rightarrow \int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x|_0^1 = \ln 1 - \lim\limits_{x\to 0_+} \ln x = +\infty$
   Итого $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} & p < 1 \\ +\infty & p \geq 1 \end{cases}$

Definition 1.19. Сходящийся интеграл

Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f$ называется сходящимся, если lim из определения существует и конечен и называется расходящимся в противном случае

Remark 1.12.

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится $\Leftrightarrow p > 1$

$\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^p}$ сходится $\Leftrightarrow p < 1$

Theorem 1.30. Критерий Коши для сходимости интегралов

$f \in C[a,b]$; $\;-\infty < a < b \le +\infty$

Тогда $\int\limits_a^{\to b} f$ сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists c \in (a,b) : \forall A, B \in (c,b) \Rightarrow |\int\limits_A^B f| < \varepsilon$

Доказательство:

$\Rightarrow$ $\int\limits_a^{\to b} f$ сходится $\Rightarrow$ существует конечный $\lim\limits_{y \to b_-} F(y)$, где F – первообразная f

$\forall \varepsilon > 0$ найдется такая окрестность (c, b), что $\forall y \in (c,b)$ $|F(y) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow$ если $A, B \in (c,b)$, то $|F(A) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|F(B) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow |F(B) - F(A)| \le |F(B) - L| + |L - F(A)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Leftarrow$ Пусть F – первообразная f, тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists c \in (a,b) : \forall A, B \in (c,b) \Rightarrow |F(B) - F(A)| < \varepsilon$

Но это условие из критерия Коши для $\lim\limits_{y \to b_-} F(y) \Rightarrow$ этот предел существует и конечен

$\Rightarrow \int\limits_a^{\to b} f = \lim\limits_{y \to b_-} F(y) - F(a)$ существует и конечен

Theorem 1.31. Свойства несобственных интегралов

1. Аддитивность. $f \in C[a,b)$; $\;c \in (a,b)$

   Тогда $\int\limits_a^b f$ сходится $\Leftrightarrow \int\limits_c^b f$ сходится и в этом случае $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b$

2. $f \in C[a,b)$. Если $\int\limits_a^b$ сходится, то $\lim\limits_{B \to b_-} \int\limits_B^b f = 0$

3. Линейность $f, g \in C[a,b)$; $\;\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

   Если $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b$ сходится, то $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится и $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$

4. Монотонность. $f, g \in C[a,b)$; $\;f \le g$ на $[a,b)$ и интегралы существуют $\Rightarrow \int\limits_a^b f \le \int\limits_a^b g$

5. Интегрирование по частям. $f, g \in C^1[a,b)$. Тогда $\int\limits_a^b fg' = fg|_a^b - \int\limits_a^b f'g$

   (если существуют какие-то два предела из трех, то существует и третий и есть равенство)

Доказательство:

1. $\int\limits_a^B f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^B$ и переходим к $\lim\limits_{B \to b_-} \Rightarrow \int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$
2. $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^B f + \int\limits_B^b f \Rightarrow \int\limits_B^b f = \int\limits_a^b f - \int\limits_a^B$ и пишем $\lim\limits_{B \to b_-}$
3. $a < B < b \Rightarrow \int\limits_a^B (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^B f + \beta \int\limits_a^B g$ и переходим к $\lim\limits_{B \to b_-}$
4. $a < B < b$. Тогда $\int\limits_a^B f \leq \int\limits_a^B g$ и переходим к $\lim\limits_{B \to b_-}$
5. $a < B < b$. Тогда $\int\limits_a^B fg' = fg|_a^B - \int\limits_a^B f'g$ и переходим к $\lim\limits_{B \to b_-}$

Remark 1.13.

Если $\int\limits_a^b f$ сходится и $\int\limits_a^b g$ расходится, то $\int\limits_a^b (f+g)$ расходится

Если бы $\int\limits_a^b (f+g)$ сходится, то $\int\limits_a^b g = \int\limits_a^b ((f+g) - f)$ сходится

Theorem 1.32. Замена переменной в несобственном интеграле

$\varphi : [\alpha, \beta) \to [a, b);\ \varphi \in C^1[\alpha, \beta)$ и существует $\lim\limits_{\gamma \to \beta_-} \varphi(\gamma) =: c$

$f \in C[a, b)$. Тогда $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^c f(x)dx$ (если существует один из интегралов, то существует другой и есть равенство)

Доказательство:

$F(y) := \int\limits_{\varphi(\alpha)}^y f(x)dx;\ y \in [a, b)$

$\Phi(\gamma) := \int\limits_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)dt;\ \gamma \in [\alpha, \beta)$

Тогда $\Phi(\gamma) = F(\varphi(\gamma))$ по формуле замены переменной в собственном интеграле

1. Пусть существует $\lim\limits_{y \to c_-} F(y)$. Покажем, что сузествует $\lim\limits_{\gamma \to \beta_-} \Phi(\gamma)$
   Проверяем по Гейне. Возьмем $\gamma_n \nearrow \beta \Rightarrow \Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n))$
   $\gamma_n \nearrow \beta \Rightarrow \varphi(\gamma_n) \to c \Rightarrow \Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)) \to \lim\limits_{y \to c_-} F(y) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^c f(x)dx$
   $\Rightarrow \lim\limits_{\gamma \to \beta_-} \Phi(\gamma) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^c f(x)dx$
2. Пусть существует $\lim\limits_{\gamma \to \beta_-} \Phi(\gamma)$. Проверим, что тогда $\exists \lim\limits_{y \to c} F(y)$. Тогда по пункту 1 будет равенство. Если $c < b$, то очевидно существует (т.к. F непрерывно при $y < b$)
   Считаем, что $c = b$. Проверим по Гейне, что $\exists \lim\limits_{y \to b_-} F(y)$. Возьмем $b_n \nearrow b$. Можно считать, что $b_n \in [\varphi(\alpha), b)$. Т.е. сколь угодно близко к b найдутся значения $\varphi \Rightarrow$ найдется $\varphi(\beta_n) > b_n$
   $\Rightarrow$ по БК $\exists \gamma_n \in (\alpha, \beta_n) : \varphi(\gamma_n) = b_n \Rightarrow \Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)) = F(b_n)$

Осталось проверить, что γ_n имеют предел. Предположим, что $\lim \gamma_n \neq \beta \Rightarrow$ найдется подпоследовательность $\gamma_{n_k} \to \tilde{\beta} \neq \beta$

$\gamma_n \in [\alpha, \beta) \Rightarrow \gamma_{n_k} \to \tilde{\beta} < \beta \Rightarrow \varphi$ непрерывна в $\tilde{\beta}$

$b \leftarrow b_{n_k} = \varphi(\gamma_{n_k}) \to \varphi(\tilde{\beta}) < b$. Противоречие. Следовательно $\lim \gamma_n = \beta \Rightarrow \lim \Phi(\gamma_n) = = \lim\limits_{\gamma \to \beta_-} \Phi(\gamma)$, т.е. он существует

Remark 1.14.

$\int\limits_a^b f(x)dx$ заменой $x = b - \frac{1}{t}$ и $\varphi(t) = b - \frac{1}{t}$ сводится к $\int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(b - \frac{1}{t})\frac{dt}{t^2}$

То есть точку, где нет непрерывности можно записать на ∞. $\varphi(\frac{1}{b-a}) = a$ и $\varphi(\infty) = b$

Theorem 1.33.

$f \in C[a, b)$ и $f \geq 0$. Тогда $\int\limits_a^b f$ всегда определен. Он сходится $\Leftrightarrow$ F – ограниченная функция на $[a, b)$

Доказательство:

$F(y) := \int\limits_a^y f$. Если $y < z$, то $F(z) = \int\limits_a^z f = \int\limits_a^y f + \int\limits_y^z f \geq F(y) \Rightarrow F$ нестрого возрастает $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{y \to b_-} F$ существует и $\lim\limits_{y \to b_-} F = \sup\limits_{y \in [a,b)} F(y)$

Тогда конечность предела равносильна ограниченности функции F

Theorem 1.34. Следствие 1 (признак сравнения)

$f, g \in C[a, b)$, $f, g \geq 0$ и $f \leq g$. Тогда

1. Если $\int\limits_a^b g$ сходится, то $\int\limits_a^b f$ сходится
2. Если $\int\limits_a^b f$ сходится, то $\int\limits_a^b g$ расходится

Доказательство:

$F(y) := \int\limits_a^y f, G(y) := \int\limits_a^y g;\ f \leq g \Rightarrow F(y) \leq G(y)$

1. $\int\limits_a^b g$ сходится $\Leftrightarrow G$ – ограничена $\Rightarrow F$ – ограничена $\Leftrightarrow \int\limits_a^b f$ сходится
2. Если бы $\int\limits_a^b g$ сходится, то $\int\limits_a^b f$ сходится. Противоречие

Remark 1.15.

1. Достаточно наличия неравенства $f \le g$ при аргументах близких к точке b
2. Неравенство $f \le g$ можно заменить на $f = O(g)$

   $f = O(g)$ означает, что $f \le Cg$ для некоторого C и $\int\limits_a^b Cg = C\int\limits_a^b g$
3. Если $f = O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$ при $\varepsilon > 0$, то $\int\limits_a^{+\infty} f$ сходится

   $g(x) = \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$ и $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\varepsilon}}$ сходится

Theorem 1.35. Следствие

$f, g \in C[a, b)$; $f, g \ge 0$ и $f \overset{x\to b}{\sim} g$. Тогда $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ ведут себя одинаково

Доказательство:

$f \sim g \Rightarrow f = \varphi g$, где $\lim\limits_{x\to b_-} \varphi(x) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \le \varphi(x) \le 2$ при x близких к b

$\frac{1}{2}g(x) \le f(x) \le 2g(x)$ при x близких к $b \Rightarrow f = O(g)$ и $g = O(f)$ в окрестности b

Remark 1.16.

Если $f \ge 0$ и $\int\limits_a^{+\infty} f$ сходится, то не обязательно $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Definition 1.20. Абсолютная сходимость

$f \in C[a, b)$

$\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится, если $\int\limits_a^b |f| < +\infty$

Theorem 1.36.

Если $\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится, то $\int\limits_a^b f$ сходится

Доказательство:

$0 \le f_\pm \le |f|$. Признак сравнения: $\int\limits_a^b |f|$ сходится $\Rightarrow \int\limits_a^b f_\pm$ сходится $\Rightarrow \int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f_+ - \int\limits_a^b f_-$ сходится

Remark 1.17.

Бывают интегралы, которые сходятся, но не абсолютно

Exercise 1.1.

Что делать, если несколько точек, где нет непрерывности? Пусть отрезок $[a, b]$ нарезан на куски, т.е. $[a, b] = [a, c_1] \cup [c_1, c_2] \cup \ldots \cup [c_n, b]$ (где в c_i нет непрерывности). Добавим в каждый полученный отрезок по точке d_i

Итого подряд идут точки типа $a, d_1, c_1, d_2, c_2 \ldots d_n, c_n, d_{n+1}, b$

$\int\limits_a^b f$ сходится означает, что $\int\limits_a^{d_1}, \int\limits_{d_1}^{c_1}, \int\limits_{c_1}^{d_2}, \ldots, \int\limits_{d_{n+1}}^{b}$ сходятся

Theorem 1.37. Признак Дирихле

$f, g \in C[a, +\infty)$

1. f имеет ограниченную первообразную на $[a, +\infty)$ (т.е. $F(x) := \int\limits_a^x f$ ограничена)
2. g монотонна
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится

Доказательство (для случая, когда $g \in C^1[a, +\infty)$):

Хотим доказать, что $H(x) := \int\limits_a^x fg$ имеет конечный предел при $x \to +\infty$

$H(x) = \int\limits_a^x F'g = Fg|_a^x - \int\limits_a^b Fg'$. Проверим, что существует конечный предел

$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)g(x) = 0$, т.к. F ограничена и g – бесконечно малая

Осталось доказать, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \int\limits_a^x Fg'$ существует и конечен, т.е. что $\int\limits_a^{+\infty} Fg'$ сходится

Проверим, что он абсолютно сходится, т.е. $\int\limits_a^{+\infty} |Fg'| < +\infty$

F – ограничена $\Rightarrow \exists M : |F(x)| \leq M \ \forall x \Rightarrow |Fg'| \leq M|g'|$. По признаку сравнения достаточно проверить, что $\int\limits_a^{+\infty} |g'|$ сходится. Из монотонности g следует, что g' фиксированного знака, поэтому надо проверить, что $\int\limits_a^{+\infty} g'$ сходится

$\int\limits_a^{+\infty} g' = g|_a^{+\infty} = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) - g(a) = -g(a) < +\infty$

Theorem 1.38. Признак Абеля

$f, g \in C[a, +\infty)$

1. $\int\limits_a^{+\infty} f$ сходится
2. g монотонна
3. g ограничена

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится

Доказательство:

Монотонная ограниченная функция имеет конечный предел $b := \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$\tilde{g}(x) := g(x) - b$ – монотонная и $\lim\limits_{x\to+\infty} \tilde{g}(x) = 0$

$F(x) := \int\limits_a^x f$. По условию $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \int\limits_a^{+\infty} f$ существует и конечен $\Rightarrow F$ локально ограничена, т.е. при $x \geq K$ $|F(x)| \leq M$

Но на отрезке $[a, K]$ функция F непрерывна $\Rightarrow$ ограничена

$\Rightarrow f$ и $\tilde{g}$ удовлетворяют условиям признака Дирихле $\Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f\tilde{g}$ сходится

$\int\limits_a^{+\infty} = \int\limits_a^{+\infty} f(\tilde{g} + b) = \int\limits_a^{+\infty} f\tilde{g} + b\int\limits_a^{+\infty} f$ сходится как сумма двух сходящихся

Theorem 1.39. Следствие

$f, g \in C[a, +\infty), f$ – периодична с периодом T, g – монотонна и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

1. Если $\int\limits_a^{+\infty} |g|$ сходится, то $\int\limits_a^{+\infty} fg$ сходится абсолютно
2. Если $\int\limits_a^{+\infty} |g|$ расходится, то $\int\limits_a^{+\infty} fg$ сходится $\Leftrightarrow \int\limits_a^{a+T} f = 0$

Доказательство:

1. f непрерывна на $[a, a+T] \Rightarrow$ ограничена на $[a, a+T] \Rightarrow$ ограничена, т.к. периодична
   $fg = O(g) \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} fg$ абсолютно сходится по признаку сравнения
2. $\Leftarrow$ $\int\limits_a^{a+T} f = 0$, тогда $F(x) := \int\limits_a^x f$ – ограниченная функция
   Проверим, что F периодична с периодом T
   $F(x+T) = \int\limits_a^{x+T} f = \int\limits_a^{a+T} f + \int\limits_{a+T}^{x+T} f = 0 + \int\limits_a^x f = F(x) \Rightarrow F$ ограничена $\Rightarrow$ принцип Дирихле
   $\Rightarrow$ Пусть $\int\limits_a^{a+T} f = b \neq 0$. Тогда $\int\limits_a^{a+T} (f - \frac{b}{T}) = 0 \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} (f - \frac{b}{T})g$ сходится
   $\int\limits_a^{+\infty} fg = \int\limits_a^{+\infty} (f - \frac{b}{T})g + \frac{b}{T}\int\limits_a^{+\infty} g$. Первое сходится, второе расходится $\Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} fg$ расходится

Example 1.12.

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$

$p > 1$ $|\frac{\sin x}{x^p}| \leq \frac{1}{x^p}$

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится $\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ сходится абсолютно по признаку сравнения

$p > 0$ sin – периодическая функция с периодом 2π

$\int\limits_0^{2\pi} \sin x dx = 0$

$f(x) = \sin x;\ g(x) = \frac{1}{x^p} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ монотонно $\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ сходится

А что с абсолютной сходимостью? $\int\limits_0^{2\pi} |\sin x| dx > 0$

$f(x) = |\sin x|;\ g(x) = \frac{1}{x^p} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ монотонно

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ – расходится $\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx$ расходится $\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ не имеет абсолютной сходимости

$p \leq 0$ Рассмотрим отрезок $[2\pi k + \frac{\pi}{6}, 2\pi k + \frac{5\pi}{6}]$. На нем $\sin x \geq \frac{1}{2}$

$\int\limits_{2\pi k + \frac{\pi}{6}}^{2\pi k + \frac{5\pi}{6}} \frac{\sin x}{x^p} dx \geq \frac{1}{2} \int\limits_{2\pi k + \frac{\pi}{6}}^{2\pi k + \frac{5\pi}{6}} \frac{dx}{x^p} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot (2\pi k + \frac{\pi}{6})^{-p} \geq \frac{\pi}{3}$ – противоречие с условие критерия Коши, значит $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ расходится

Remark 1.18.

В признаках Абеля и Дирихле нельзя отказаться от монотонности g

$f(x) = \sin x;\ g(x) = \frac{\sin x}{x}$

$|\int\limits_1^{x} \sin x dx| = |\cos 1 - \cos x| \leq 2;\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

$\int\limits_1^{+\infty} fg = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$

$\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \pi > 0;\ \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ – расходится

$\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ расходится

2 Анализ в метрических пространствах

2.1 §1. Метрические пространства

Definition 2.1. Метрика

X – множество. $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ – метрика (расстояние)

1. $\rho(x, y) \geq 0$ и $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. Неравенство треугольника: $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Definition 2.2. Метрическое пространство

(X, ρ) – метрическое пространство

Example 2.1.

1. Дискретная метрика (метрика лентяя) $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$
2. $X = \mathbb{R};\ \rho(x, y) = |x - y|$
3. $X = \mathbb{R}^2;\ \rho$ – расстояние на плоскости
4. $X = \mathbb{R}^d;\ p \geq 1$ и $\rho(x, y) = (|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p + \ldots + |x_d - y_d|^p)^{\frac{1}{p}}$
   Неравенство треугольника – это неравенство Минковского
5. Частный случай 4. $X = \mathbb{R}^2;\ \rho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ – Манхэттенское расстояние
6. Французская железнодорожная метрика $X = \mathbb{R}^2$
   $\rho(A, B) =$ длина отрезка AB
   $\rho(C, D) = CP + PD$
   Тут кросивый рисуночек, типа чтоб проехать из города в другой оч часто надо заехать в P – пАрИж
7. Метрика Хемминга $a_1, a_2 \ldots a_n$ слова из n букв
   $\rho(A, B) =$ количество разрядов, в которых A и B различаются
8. $X = C[a, b];\ \rho(f, g) := \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$ – равномерная метрика
9. $X = C[a, b];\ \rho(f, g) := \int\limits_a^b |f(x) - g(x)| dx$ – метрика в L_1

Definition 2.3. Шар

(X, ρ) – метрическое пространство, $r > 0,\ a \in X$
Открытый шар радиуса r с центром в точке a
$B_r(a) := \{x \in X : \rho(x, a) < r\}$
Замкнутый шар $\overline{B_r}(a) := \{x \in X : \rho(x, a) \leq r\}$

Theorem 2.1. Свойства

1. $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min(r_1,r_2)}(a)$
   $B_{r_1}(a) \cup B_{r_2}(a) = B_{\max(r_1,r_2)}(a)$
2. Если $a \neq b$, то найдется $r > 0 : \overline{B_r}(a) \cap \overline{B_r}(b) = \varnothing$

Доказательство:

2. Возьмем $r = \frac{\rho(a,b)}{3} > 0$. Пусть $\overline{B_r}(a) \cap \overline{B_r}(b) \neq \varnothing$, т.е. найдется $x \in \overline{B_r}(a)$ и $x \in \overline{B_r}(b) \Rightarrow$
   $\Rightarrow \rho(a,b) \le \rho(a,x) + \rho(x,b) \le r + r = \frac{2}{3}\rho(a,b)$ – противоречие

Definition 2.4. Открытое множество

$U \subset X$ – открытое множество, если $\forall a \in U$ найдется $B_r(a) \subset U$

Theorem 2.2. Свойства

1. $\varnothing$ и X – открытые множества
2. Объединение любого количества открытых множеств – открытое множество
3. Пересечение конечного количества открытых множеств – открытое множество
4. Открытый шар – открытое множество

Доказательство:

1. Очевидно
2. Пусть U_α – открытые при $\alpha \in I$. Докажем, что $U := \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ – открытое
   Возьмем $a \in U \Rightarrow a \in U_{\alpha_0}$ для некоторого α_0, но U_{α_0} – открытое $\Rightarrow \exists r > 0 :$
   $B_r(a) \subset U_{\alpha_0} \subset U$
3. Пусть $U_1, U_2 \dots U_n$ открытые. Докажем, что $U := \bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k$ – открытое
   Возьмем $a \in U \Rightarrow a \in U_k\ \forall k \in 1 \dots n$. U_k – открытое $\Rightarrow \exists r_k > 0 : B_{r_k}(a) \subset U_k$
   Возьмем $r := \min(r_1, r_2 \dots r_n) > 0 \Rightarrow B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset U_k \Rightarrow B_r(a) \subset U = \bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k$
4. $B_R(a)$ – открытое множество
   Возьмем $x \in B_R(a) \Rightarrow \rho(x,a) < R$ и положим $r := R - \rho(x,a) > 0$
   Проверим, что $B_r(x) \subset B_R(a)$. Возьмем $y \in B_r(x)$ и проверим, что $y \in B_R(a)$
   $y \in B_r(x) \Rightarrow \rho(y,x) < r = R - \rho(x,a) \Rightarrow \rho(y,a) \le \rho(y,x) + \rho(x,a) < r + \rho(x,a) = R$

Remark 2.1.

В 3 существенно, что множеств конечное число

Example 2.2.

$X = R;\ \rho(x,y) = |x - y|;\ U_n := (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ – открытые множества
$\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} U_n = \{0\}$ – не открытое

Definition 2.5. Внутренняя точка

(X, ρ) – метрическое пространство, $A \subset X$, $a \in A$
a – внутренняя точка множества A, если $\exists r > 0 : B_r(a) \subset A$

Remark 2.2.

Открытое множество – множество, все точки которого внутренние

Definition 2.6. Внутренность множества

(X, ρ) – метрическое пространство, $A \subset X$
Внутренность множества – все внутренние точки множества
Обозначение: $\mathrm{Int}\, A$ (иногда A°)

Theorem 2.3. Свойства

1. $\mathrm{Int}\, A \subset A$
2. $\mathrm{Int}\, A$ – объединение всех открытых множеств, содержащихся в A
3. $\mathrm{Int}\, A$ – открытое множество
4. A – открытое $\Leftrightarrow A = \mathrm{Int}\, A$
5. $A \subset B \Rightarrow \mathrm{Int}\, A \subset \mathrm{Int}\, B$
6. $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}\, A) = \mathrm{Int}\, A$
7. $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}\, A \cap \mathrm{Int}\, B$

Доказательство:

1. Очев
2. Хотим $\mathrm{Int}\, A = \bigcup\limits_{G \subset A} G$, где G – открытое
   - $\subset$ Возьмем $a \in \mathrm{Int}\, A \Rightarrow a$ – внутренняя точка $\Rightarrow \exists r > 0 : B_r(a) \subset A$, но $B_r(a)$ – открытое множество $\Rightarrow B_r(a)$ присутствует среди множеств из объединения
   - $\supset$ Пусть $a \in U \Rightarrow \exists G$ – откртытое $\subset A : a \in G \Rightarrow \exists r > 0 : B_r(a) \subset G \subset A \Rightarrow a$ – внутренняя точка
3. По пункту 2 $\mathrm{Int}\, A$ – объединение открытых множеств $\Rightarrow \mathrm{Int}\, A$ – открытое
4. $\Leftarrow$ т.к. $\mathrm{Int}\, A$ – открытое
   $\Rightarrow$ A – открытое $\Rightarrow$ все точки внутренние $\Rightarrow$ все лежат в $\mathrm{Int}\, A \Rightarrow A = \mathrm{Int}\, A$
5. Если a – внутрення точка для A, то и для B тоже, т.к. $A \subset B$
6. $3 + 4 = 6$

Exercise 2.1.

1. Доказать пункт 7
2. Придумать пример, когда $\mathrm{Int}(A \cup B) \neq \mathrm{Int}\, A \cup \mathrm{Int}\, B$

Definition 2.7. Замкнутое множество

Замкнутое множество – множество, дополнение которого открыто
A замкнуто $\Leftrightarrow X \setminus A$ открыто

Theorem 2.4. Свойства замкнутых множеств

1. $\varnothing$ и X – замкнутые множества
2. Пересечение любого количества замкнутых множеств – замкнутое множество
3. Объединение конечного количества замкнутых множеств – замкнутое множество
4. Замкнутый шар – замкнутое множество

Доказательство:

1. Очевидно, ничего писать не буду
2. F_α – замкнутые $\Rightarrow X \setminus F_\alpha$ – открытые $\Rightarrow \bigcup X \setminus F_\alpha = X \setminus \bigcap F_\alpha$ – открытое $\Rightarrow \bigcap F_\alpha$ – замкнутое
3. $F_1 \dots F_n$ – замкнутые $\Rightarrow X \setminus F_k$ – открытые $\Rightarrow \bigcap X \setminus F_k = X \setminus \bigcup F_k$ – открытое $\Rightarrow \bigcup F_k$ – замкнутое
4. $\overline{B}_R(a)$ – замкнутое множество $\Leftrightarrow X \setminus \overline{B}_R(a) = \{x \in X : \rho(x,a) > R\}$ – открытое
   Возьмем $r := \rho(x,a) - R$ и проверим, что $B_r(x) \subset X \setminus \overline{B}_R(a)$
   $x \notin \overline{B}_R(a)$, т.е. $B_r(x) \cap \overline{B}_R(a) = \varnothing$
   Предположим противное, тогда $\exists y \in B_r(x)$ и $y \in \overline{B}_R(a) \Rightarrow \rho(x,y) < r$ и $\rho(y,a) \le R \Rightarrow$
   $\Rightarrow \rho(x,a) \le \rho(x,y) + \rho(y,a) < r + R = \rho(x,a)$?????

Definition 2.8. Замыкание множества

Замыкание множества A – пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A
Обозначение $\operatorname{Cl} A$ или $\overline{A}$

Theorem 2.5.

$X \setminus \operatorname{Cl} A = \operatorname{Int}(X \setminus A)$ и $X \setminus \operatorname{Int} A = \operatorname{Cl}(X \setminus A)$

Доказательство:

Докажем, что $X \setminus \operatorname{Cl} A = \operatorname{Int}(X \setminus A)$

- $\subset$ Пусть $x \in X \setminus \operatorname{Cl} A \Rightarrow x \notin \operatorname{Cl} A \Rightarrow x \notin F$, где F – некоторое замкнутое множество, содержащее $A \Rightarrow x \in X \setminus F$ – открытое и $X \setminus F \subset X \setminus A \Rightarrow x \in \operatorname{Int}(X \setminus A)$
- $\supset$ Пусть $x \in \operatorname{Int}(X \setminus A) \Rightarrow x \in G$, где G – открытое, содержащееся в $X \setminus A \Rightarrow x \notin X \setminus G$ – замкнутое и $X \setminus G \supset X \setminus (X \setminus A) = A \Rightarrow x \notin \operatorname{Cl} A \Rightarrow x \in X \setminus \operatorname{Cl} A$

Theorem 2.6. Свойства замыкания

1. $\operatorname{Cl} A \supset A$
2. $\operatorname{Cl} A$ – замкнутое множество
3. A – замкнутое $\Leftrightarrow A = \operatorname{Cl} A$
4. $A \subset B \Rightarrow \operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Cl} B$
5. $\operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl} A$
6. $\operatorname{Cl}(A \cup B) = \operatorname{Cl} A \cup \operatorname{Cl} B$

Доказательство:

1. Очевидно
2. Пересечение замкнутые – замкнутое
3. A – замкнутое $\Leftrightarrow X \setminus A$ – открытое $\Leftrightarrow X \setminus A = \operatorname{Int}(X \setminus A) \Leftrightarrow A = \operatorname{Cl} A$
4. $A \subset B \Rightarrow X \setminus A \supset X \setminus B \Rightarrow \operatorname{Int}(X \setminus A) \supset \operatorname{Int}(X \setminus B) \Rightarrow X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A) \subset X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus B) \Rightarrow \operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Cl} B$

5. $2+3=5$

Exercise 2.2.

1. Доказать пункт 6
2. Придумать пример, когда $\operatorname{Cl}(A\cap B)\neq \operatorname{Cl}A\cap\operatorname{Cl}B$
3. $A, \operatorname{Int}A, \operatorname{Cl}A, \operatorname{Int}\operatorname{Cl}A, \operatorname{Cl}\operatorname{Int}A, \operatorname{Cl}\operatorname{Int}\operatorname{Cl}A\dots$
   Какое наибольше количество различных множеств может получиться?

Theorem 2.7.

$x \int \operatorname{Cl}A \Leftrightarrow \forall r>0\ B_r(x)\cap A\neq\varnothing$

Доказательство:

$x\in ClA = X\setminus\operatorname{Int}(X\setminus A)\Leftrightarrow x\notin\operatorname{Int}(X\setminus A)\Leftrightarrow \forall r>0\ B_r(x)\not\subset X\setminus A\Leftrightarrow\forall r>0\ B_r(x)\cap A\neq\varnothing$

Definition 2.9. Окрестность и проколотая окрестность

Окрестность точки a – шарик радиуса $r>0$ с центром в точке a
Обозначение U_a
Проколотая окрестность – $\mathring{U}_a = U_a\setminus\{a\}$

Definition 2.10. Предельная точка

x – предельная точка множества A, если $\forall\mathring{U}_x$ содержится точки множества A
Локальное обозначение (примерно на 1 лекцию): A' – множество предельных точек множества A

Theorem 2.8. Свойства

1. $\operatorname{Cl}A = A\cup A'$
2. $A\subset B\Rightarrow A'\subset B'$
3. A – замкнутое $\Leftrightarrow A\supset A'$
4. $(A\cup B)' = A'\cup B'$

Доказательство:

1. $x\in\operatorname{Cl}A\Leftrightarrow\forall U_x\ U_x\cap A\neq\varnothing$
   Это так, если $x\in A$ или $x\in A'$ (тут $\mathring{U}_a\cap A\neq\varnothing$)
2. очев
3. A – замкнутое $\Leftrightarrow A=\operatorname{Cl}A\Leftrightarrow A=A\cup A'\Leftrightarrow A\supset A'$
4. $\supset$ $A\cup B\supset A\Rightarrow (A\cup B)'\supset A'$
   $\subset$ Возьмем $x\in(A\cup B)'$ и предположим, что $x\notin A'$. Надо доказать, что $x\in B'$
   $x\in(A\cup B)'\Rightarrow\forall r>0\ \mathring{B}_r(x)\cap(A\cup B)\neq\varnothing$
   $x\notin A'\Rightarrow\exists R>0:\mathring{B}_R(x)\cap A=\varnothing\Rightarrow\forall r<R\ \mathring{B}_r(x)\cap A=\varnothing$
   Тогда $\mathring{B}_r(x)\cap B\neq\varnothing\forall r<R\Rightarrow$ вообще любой $\mathring{B}_r(x)$ пересекается с $B\Rightarrow x\in B'$

Theorem 2.9.

Следующие условия равносильны

1. $x \in A'$
2. $\forall r > 0$ $B_r(x)$ содержит бесконечное количество точек из A
3. Существует последовательность различных точек $x_n \in A : \rho(x_n, x) \to 0$
4. Существует последовательность $x_n \in A : \rho(x_n, x)$ строго убывает и $\to 0$

Доказательство:

$4 \Rightarrow 3$ очевидно

$3 \Rightarrow 2$ Если $\rho(x_n, x) \to 0$, то при больших и $\rho(x_n, x) < r$, т.е. $x_n \in B_r(x) \Rightarrow$ в $B_r(x)$ бесконечное количество точек из A

$2 \Rightarrow 1$ Если $B_r(x) \cap A$ состоит из бесконечного количество точек, то $\mathring{B}_r(x) \cap A \neq \varnothing$ (множества отличаются на одну точку или совпадают)

$1 \Rightarrow 4$ Рассмотрим $r = 1$. В открестности $\mathring{B}_r(x)$ есть точка из A, назовем ее $x_1 \neq x$
$r = \frac{1}{2}\rho(x_1, x) < \frac{1}{2}$. В окрестности $\mathring{B}_r(x)$ есть точка из A, назовем ее $x_2 \neq x$
$\rho(x_2, x) < r < \rho(x_1, x)$
$r = \frac{1}{2}\rho(x_2, x) < \frac{1}{4}$. В окрестности $\mathring{B}_r(x)$ есть точка из A, назовем ее $x_3 \neq x$
$\rho(x_3, x) < \rho(x_2, x)$ и так далее
$x_1, x_2 \ldots \in A$, $\rho(x_1, x) > \rho(x_2, x) > \ldots$ и $\rho(x_n, x) < \frac{1}{2^n} \Rightarrow \rho(x_1, x) \to 0$

Theorem 2.10. Очевидное следствие

Конечное множество не имеет предельных точек

Definition 2.11. Подпространство

(X, ρ) – метрическое пространство $Y \subset X$
$(Y, \rho|_{Y \times Y})$ – подпространство метрического пространства (X, ρ)

Theorem 2.11. Об открытых множества в пространстве и подпространстве

(X, ρ) – метрическое пространство, $Y \subset X$. Тогда

1. A – открыто в $(Y, \rho) \Leftrightarrow \exists G \subset X$, открытое в $(X, \rho) : A = G \cap Y$
2. A – замкнуто в $(Y, \rho) \Leftrightarrow \exists F \subset X$, замкнутое в $(X, \rho) : A = F \cap Y$

Доказательство:

1. $\Rightarrow$ A открыто в $(Y, \rho) \Rightarrow A = \bigcup\limits_{x \in A} B^Y_{r_x}(x)$, где r_x – такой радиус, что $B^Y_{r_x}(x) \subset A$
   $B^Y_{r_x}(x) = \{z \in Y : \rho(z, x) < r_x\} = B^X_{r_x}(x) \cap Y$
   $\Rightarrow A = \bigcup\limits_{x \in A} (B^X_{r_x}(x) \cap Y) = Y \cap \bigcup\limits_{x \in A} B^X_{r_x}(x)$, где $G := \bigcup\limits_{x \in A} B^X_{r_x}(x)$ – открытое в (X, ρ) как объединение открытых
   $\Leftarrow$ $A = G \cap Y$, G – открытое в X. Докажем, что A открыто в Y
   Возьмем $a \in A \subset G \Rightarrow \exists r > 0 : B^X_r(a) \subset G \Rightarrow B^Y_r(a) = B^X_r(a) \cap Y \subset G \cap Y = A$
2. A – замкнуто в $(Y, \rho) \Leftrightarrow Y \setminus A$ – открыто в $(Y, \rho) \Leftrightarrow \exists G \subset X$ открытое в $(X, \rho) : Y \setminus A = G \cap Y \Rightarrow Y \cap (X \setminus G) = A$, где $X \setminus G$ – замкнутое $\Leftrightarrow G$ – открытое

Example 2.3.

$X = \mathbb{R},\ Y = [0,3)$
$[0,1)$ – открыто в Y, т.к. $(-1,1)$ – открыто в $\mathbb{R}$, а $[0,1) = (-1,1) \cap Y$
$[2,3)$ – замкнуто в Y, т.к. $[2,4]$ – замкнуто в $\mathbb{R}$, а $[2,3) = [2,4] \cap Y$

Definition 2.12. Норма

X – векторное пространство. $\|\|$ – норма на X, если
$\|\cdot\|: X \to R$

1. $\| x \|\ \forall x \in X$ и $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = \overrightarrow{0}$
2. $\| \alpha x \| = |\alpha| \cdot \| x \|\ \ \forall x \in X\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. $\| x + y \| \le \| x \| + \| y \|\ \ \forall x, y \in X$ (неравенство треугольника)

Example 2.4.

1. $X = \mathbb{R};\ |x|$ – норма
2. $X = \mathbb{R}^d;\ \| x \|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_d|^p)^{\frac{1}{p}}$ – норма, $p \ge 1$
   Неравенство треугольника – это неравенство Минковского
3. $X = C[a,b];\ \| f \| := \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$
4. $X = C[a,b];\ \| f \| := \int\limits_a^b |f|$

Definition 2.13. Скалярное произведение

X – векторное пространство, $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ – скалярное произведение, если

1. $\langle x, x \rangle \ge 0\ \forall x \in X$ и $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \overrightarrow{0}$
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle\ \forall x, y \in X$
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle\ \forall x, y \in X\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle\ \forall x, y, z \in X$

Example 2.5.

1. $X = \mathbb{R}^d;\ \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_d y_d$
   $x = (x_1 \ldots x_d);\ y = (y_1 \ldots y_d)$
2. $X = \mathbb{R}^d;\ w_1, w_2 \ldots w_d > 0$
   $\langle x, y \rangle = w_1 x_1 y_1 + w_2 x_2 y_2 + \ldots + w_d x_d y_d$
3. $X = C[a,b];\ \langle f, g \rangle = \int\limits_a^b f(x) g(x) dx$

Theorem 2.12. Свойства

1. Неравенство Коши-Буняковского
   $\langle x, y \rangle^2 \le \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$
2. $\| x \| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ – норма
3. $\| \cdot \|$ – норма в $X \Rightarrow \rho(x, y) := \| x - y \|$ – метрика в X
4. $\| x - y \| \ge |\ \| x \| - \| y \|\ |$

Доказательство:

1. $f(t) := \langle x+ty, x+ty\rangle \geq 0$
   $f(t) = \langle x, x+ty\rangle + t\langle y, x+ty\rangle = \langle x,x\rangle + t\langle x,y\rangle + t\langle y,x\rangle + t^2\langle y,y\rangle = t^2\langle y,y\rangle + 2t\langle x,y\rangle + \langle x,x\rangle$ – квадратный трехчлен
   $\Rightarrow f$ имеет не больше одного корня $\Rightarrow D \leq 0 \Leftrightarrow (2\langle x,y\rangle)^2 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leq 0$
   Сократили на 4 и победили
2. $\| \alpha x \| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha^2\langle x,x\rangle} = |\alpha|\sqrt{\langle x,x\rangle} = |\alpha| \| x \|$
   Неравенство треугольника: $\| x+y \| \overset{?}{\leq} \| x \| + \| y \|$, т.е. $\sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \leq \sqrt{\langle x,x\rangle} + \sqrt{\langle y,y\rangle}$
   Т.е. $\langle x+y, x+y\rangle \leq \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\sqrt{\langle x,x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y,y\rangle}$
   Но $\langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$. После сокращения осталось КБШ
3. $\| x-y \| \geq 0$ и $\| x-y \| = 0 \Leftrightarrow x-y = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow x = y$
   $\rho(y,x) = \| y-x \| = \| (-1)(x-y) \| = |-1| \cdot \| x-y \| = \rho(x,y)$
   Неравенство треугольника: $\rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z)$
   $\| x-y \| + \| y-z \| \geq \| x-y+y-z \| = \| x-z \|$
4. Нужно доказать, что $-\| x-y \| \leq \| x \| - \| y \| \leq \| x-y \|$
   - Правое:
     $\| x \| - \| y \| \leq \| x-y \|$, т.е. $\| x-y \| + \| y \| \geq \| x-y+y \| = \| x \|$
   - Левое:
     $\| x \| - \| y \| \geq -\| x-y \|$, т.е. $\| x-y \| + \| x \| = \| y-x \| + \| x \| \geq \| y-x+x \| = \| y \|$

Exercise 2.3.

Доказать, что норма $\|\|$ в векторном пространстве X порождается некоторым скалярным произведением $\Leftrightarrow \| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2\| x \|^2 + 2\| y \|^2$