Конспект Шорохова Сергея

Если нашли опечатку/ошибку - пишите @le9endwp

Содержание

1 Глава 9. Теория меры

1.1 §1. Системы множеств

Definition 1.1. Объемлющее множество

X – объемлющее множество. Будем рассматривать $A \subset X$

Declaration 1.1. Обозначения

$A \sqcup B$ – объединение множеств A и B и множества A и B не пересекаются
$\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ – объединение и $A_i \cap A_j = \varnothing$
Дизъюнктные множества = непересекающиеся множества

Definition 1.2. Разбиение множества

Множества $E_\alpha,\ \alpha \in I$ – разбиение множества E, если $E = \bigsqcup\limits_{a \in I} E_\alpha$

Definition 1.3. Система подмножеств и ее свойства

$\mathcal{A}$ – система подмножеств X (т.е. $\mathcal{A} \subset 2^X$)

1. $\mathcal{A}$ имеет свойство σ_0, если $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$
2. $\mathcal{A}$ имеет свойство δ_0, если $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$
3. $\mathcal{A}$ имеет свойство σ, если $\forall A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
4. $\mathcal{A}$ имеет свойство δ, если $\forall A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
5. $\mathcal{A}$ – симметричная система, если $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$

Reminder 1.1.

$X \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$
$X \setminus \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$

Proposition 1.1.

Если $\mathcal{A}$ симметричная система, то $\begin{array}{c} (\sigma_0) \Leftrightarrow (\delta_0) \\ (\sigma) \Leftrightarrow (\delta) \end{array}$

Definition 1.4. Алгебра

$\mathcal{A}$ – алгебра, если

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$
2. $\mathcal{A}$ – симметричная система
3. Есть свойства (σ_0) и (δ_0)

Definition 1.5. σ-алгебра

$\mathcal{A}$ – σ-алгебра, если

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$
2. $\mathcal{A}$ – симметричная система
3. Есть свойства (σ) и (δ)

Theorem 1.1. Свойства

1. Если $\mathcal{A}$ – алгебра и $A_1 \dots A_n \in \mathcal{A}$, то $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ и $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$
2. Если $\mathcal{A}$ – σ-алгебра, то $\mathcal{A}$ – алгебра
3. Если $\mathcal{A}$ – алгебра и $A, B \in \mathcal{A}$, то $\underbrace{A \setminus B}_{A \cap (X \setminus B)} \in \mathcal{A}$

Example 1.1.

1. $X = \mathbb{R}^n$
   $\mathcal{A}$ – все ограниченные множества и их дополнения. Это алгебра, но не σ-алгебра
2. 2^X – σ-алгебра
3. Индуцированная $(\sigma$-)алгебра
   $Y \subset X,\ \mathcal{A}$ – $(\sigma$-)алгебра подмножеств X
   $\mathcal{B} := \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$ – $(\sigma$-)алгебра подмножеств Y
4. $X \supset A, B$
   $\mathcal{A}$ – алгебра подмножеств X
   $\varnothing, X, A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, X \setminus A, X \setminus B, A \triangle B, X \setminus (A \cap B), X \setminus (A \cup B),$
   $X \setminus (A \triangle B), X \setminus (A \setminus B), X \setminus (B \setminus A)$
5. A_α – $(\sigma$-)алгебра подмножеств X
   Тогда $\mathcal{B} = \bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ – $(\sigma$-)алгебра подмножеств X
   Доказательство:
   (a) $\varnothing \in \mathcal{A}_\alpha \Rightarrow \varnothing \in \mathcal{B}$
   (b) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A \in \mathcal{A}_\alpha \forall \alpha \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}_\alpha \forall \alpha \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{B}$

Theorem 1.2.

Пусть $\mathcal{E}$ – система подмножеств X
Тогда существует наименьшая по включению $(\sigma$-)алгебра $\mathcal{A}$, содержащая $\mathcal{E}$

Доказательство:

Пусть $\mathcal{A}_\alpha$ – всевозможные алгебры, содержащие $\mathcal{E}$ $(2^X$ подходит)

$\mathcal{A} := \bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ – алгебра и $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\alpha \forall \alpha$

Definition 1.6. Борелевская оболочка

$\mathcal{E}$ – система подмножеств X
Борелевская оболочка системы $\mathcal{E}$ – наименьшая по включению σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$

Declaration 1.2. Обозначение

$\mathcal{B}(\mathcal{E})$

Definition 1.7. Борелевская σ-алгебра

Борелевская σ-алгебра – это $\mathcal{B}(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ – всевозможные открытые множества в $\mathbb{R}^n$

Declaration 1.3. Обозначение

$\mathcal{B}^n$

Remark 1.1.

$\mathcal{B}^n \neq 2^{\mathbb{R}^n}$

Definition 1.8. Кольцо

$\mathcal{A}$ – семейство подмножеств X
$\mathcal{A}$ – кольцо, если

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$
2. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A},\ A \cup B \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

Remark 1.2.

$\mathcal{A}$ – алгебра $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ – кольцо и $X \in \mathcal{A}$

Definition 1.9.

$\mathcal{P}$ – семейство подмножеств X
$\mathcal{P}$ – полукольцо, если

1. $\varnothing \in \mathcal{P}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$
3. $\forall A, B \in \mathcal{P}\ \exists Q_1 \dots Q_m \in \mathcal{P}$, т.ч. $A \setminus B = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} Q_k$

Example 1.2.

1. $X = \mathbb{R};\ \mathcal{P} := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ – полукольцо
2. $X = \mathbb{R};\ \mathcal{P} := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{Q}\}$ – полукольцо

Lemma 1.1.

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigsqcup_{k=1}^{n} \underbrace{(A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j)}_{B_k} \text{ (для } \infty \text{ вместо } n \text{ тоже верно)}$$

Доказательство:

- $B_k \subset A_k \Rightarrow \supset$ верно
- $\subset$ возьмем $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \Rightarrow$ найдется наименьший индекс m, т.ч. $x \in A_m$ и $x \notin A_{m-1} \dots A_1 \Rightarrow$

  $\Rightarrow x \in B_m$
- Дизъюнктность $k < m \Rightarrow B_k \cap B_m = \varnothing$

  $B_m = A_m \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m-1} A_j \subset A_m \setminus A_k \subset A_m \setminus B_k$

  $B_k \subset A_k$

Theorem 1.3.

$\mathcal{P}$ – полукольцо. Тогда

1. $P, P_1 \dots P_n \in \mathcal{P} \Rightarrow \exists Q_1 \dots Q_m \in \mathcal{P}$, т.ч. $P \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$
2. $P_1, P_2 \dots \in \mathcal{P} \Rightarrow \exists Q_{ij} \in \mathcal{P}$, т.ч. $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$, где $Q_{kj} \subset P_k \forall\ k, j$
3. В п. 2 можно вместо n написать ∞

Доказательство:

1. Индукция. База $n = 1$ – определение полукольца

   Переход $n \to n+1$

   $$P \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} P_k = \underbrace{(P \setminus \bigcup_{k=1}^{n} P_k)}_{\text{инд. предполож.}} \setminus P_{n+1} = \underbrace{(\bigsqcup_{j=1}^{m} Q_j)}_{\text{где } Q_j \in \mathcal{P}} \setminus P_{n+1} = \bigsqcup_{j=1}^{m} Q_j \setminus P_{n+1} = \bigsqcup_{j=1}^{m} \bigsqcup_{i=1}^{m_j} Q_{ji}$$
2. $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \underbrace{(P_k \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} P_j)}_{\text{п. 1}}$

Definition 1.10.

$\mathcal{P}$ – полукольцо подмножеств X
$\mathcal{Q}$ – полукольцо подмножеств Y
$\mathcal{P} \times \mathcal{Q} := \{A \times B : A \in \mathcal{P}$ и $B \in \mathcal{Q}\}$ – декартово произведение полуколец $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$

Theorem 1.4.

Декартово произведение полуколец – полукольцо

Доказательство:

1. Пустые очев
2. $C \times D$ и $A \times B \in \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \Rightarrow (A \times B) \cap (C \times D) = \underbrace{(A \cap C)}_{\in \mathcal{P}} \times \underbrace{(B \cap D)}_{\in \mathcal{Q}}$
3. $A \times B, C \times D \in \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \overset{?}{\Rightarrow} (A \times B) \setminus (C \times D) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} \underbrace{P_k}_{\in \mathcal{P}} \times \underbrace{Q_k}_{\in \mathcal{Q}}$

   $(A \times B) \setminus (C \times D) = \underbrace{(A \setminus C)}_{\bigsqcup\limits_{j=1}^{m} P_j} \times \underbrace{B}_{\in \mathcal{Q}} \sqcup \underbrace{(A \cap C)}_{\in \mathcal{P}} \times \underbrace{(B \setminus D)}_{\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} Q_i}$

Definition 1.11. Замкнутый и открытый параллелепипеды

$a, b \in \mathbb{R}^n$
Замкнутый параллелепипед $[a, b] := [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$
Открытый параллелепипед $(a, b) := (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$

Definition 1.12. Ячейка

$a, b \in \mathbb{R}^n$
Ячейка $(a, b] := (a_1, b_1] \times \ldots \times (a_n, b_n]$

Remark 1.3.

$(a, b) \subset (a, b] \subset [a, b]$

Proposition 1.2.

1. Непустая ячейка – объединение возрастающей (по включению) последовательности замкнутых параллелепипедов
2. Непустая ячейка – пересечение убывающей (по включению) последовательности открытых параллелепипедов

Доказательство:

1. $A_k := [a_1 - \frac{1}{k}, b_1] \times [a_2 - \frac{1}{k}, b_2] \times \ldots \times [a_n - \frac{1}{k}, b_n]$

   $A_{k+1} \supset A_k$ и $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = (a, b]$
2. $B_k := (a_1, b_1 + \frac{1}{k}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{k}) \times \ldots \times (a_n, b_n + \frac{1}{k})$

   $B_{k+1} \subset B_k$ и $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k = (a, b]$

Declaration 1.4. Обозначения

$\mathcal{P}^n := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}^n\}$
$\mathcal{P}^n_{\mathbb{Q}} := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{Q}^n\}$

Proposition 1.3.

$\mathcal{P}^n$ и $\mathcal{P}^n_{\mathbb{Q}}$ – полукольца

Доказательство:

$\mathcal{P}^n = \underbrace{\mathcal{P}^1 \times \mathcal{P}^1 \times \ldots \times \mathcal{P}^1}_{\text{полукольца}}$

Theorem 1.5.

G – непустое открытое множество в $\mathbb{R}^m$
Тогда G представимо в виде счетного дизъюнктного объединения ячеек с рациональными координатами вершин

Доказательство:

У АИ тут рисуночки, посмотрите запись!

Для $x \in G$ построим ячейку P_x с рациональными координатами вершин, т.ч. $P_x \in G$ и $x \in P_x$

$\bigcup\limits_{x \in G} P_x = G$

Ячеек с рациональными координатами вершин счетное число. Значит если выкинуть повторы из объединения выше, то останется счетное объединение

$G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_{x_n} = \coprod\limits_{n=1}^{\infty} \coprod\limits_{j=1}^{m_n} Q_{nj}$ – ячейки с рациональными координатами вершин

Theorem 1.6. Следствие

$\mathcal{B}^m = \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) = \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}})$

Доказательство:

1. $\mathcal{B}^m \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}^m)$. Достаточно доказать, что $\mathcal{B}^m \supset \mathcal{P}^m$
   $(a, b]$ – счетное пересечение открытых параллелепипедов (т.к. открытых множеств) $\Rightarrow$ $(a, b]$ лежит в σ-алгебре, содержащей все открытые множества
2. $\mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}})$. Достаточно доказать, что $\mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}$, но $\mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{P}^m \supset \mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}$
3. $\mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}) \supset \mathcal{B}^m$. Достаточно доказать, что $\mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}})$ содержит все открытые множества. Это следует из теоремы 1.5.

1.2 §2. Объем и мера

Definition 1.13. Объем

$\mathcal{P}$ – полукольцо. $\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$
μ – объем, если

1. $\mu\varnothing = 0$
2. Если $A_1, \dots A_n$ и $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{P}$, то $\mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu A_k$

Definition 1.14. Мера

$\mathcal{P}$ – полукольцо. $\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$
μ – мера, если

1. $\mu\varnothing = 0$
2. Если $A_1, A_2 \dots$ и $\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, то $\mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu A_k$

Exercise 1.1.

Если $\mu\varnothing \neq +\infty$, то $\mu\varnothing = 0$ из свойства 2

Example 1.3. Примеры объемов

1. $X = \mathbb{R},\ \mathcal{P}^1$. Длина – объем. $\mu(a, b] = b - a$
2. $X = \mathbb{R},\ \mathcal{P}^1$. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – нестрого возрастающая функция
   $\nu_g(a, b] := g(b) - g(a)$
3. Классический объем на $\mathcal{P}^m$
   $\lambda_m(a, b] = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_m - a_m)$ – объем и даже мера (докажем позже)
4. $x_0 \in X;\ \mu A = \begin{cases} 0 & x_0 \notin A \\ 1 & x_0 \in A \end{cases}$
5. $X = \mathbb{R}^2;\ \mathcal{P}$ – ограниченные множества и их дополнения
   $\mu A = \begin{cases} 0 & A \text{ – ограничена} \\ 1 & A \text{ дополнение ограничено} \end{cases}$ – объем, но не мера

Theorem 1.7. Свойства объема

$\mathcal{P}$ – полукольцо, μ – объем на $\mathcal{P}$. Тогда

1. Монотонность
   $P, \tilde{P} \in \mathcal{P}$ и $P \subset \tilde{P} \Rightarrow \mu P \leq \mu\tilde{P}$
2. Усиленная монотонность
   $P_1, P_2 \dots P_n, \tilde{P} \in \mathcal{P}$ и $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k \subset \tilde{P} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k \leq \mu\tilde{P}$

2'. $P_1, P_2 \dots, \tilde{P} \in \mathcal{P}$ и $\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} P \subset \tilde{P} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu P_k \leq \mu\tilde{P}$

3. Конечная полуаддитивность
   $P_1 \dots P_n, P \in \mathcal{P}$ и $P \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k \Rightarrow \mu P \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k$

Доказательство:

2. $\tilde{P} \setminus \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$, где $Q_j \in \mathcal{P}$

   $\tilde{P} = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k \sqcup \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j \Rightarrow \mu\tilde{P} = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k + \underbrace{\sum\limits_{j=1}^{m}}_{\geq 0} \mu Q_j \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k$

2'. Предельный переход в неравенстве

3. $P'_k := P_k \cap P \in \mathcal{P} \Rightarrow P = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P'_k \underbrace{=}_{\text{th.}} \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$ (они из $\mathcal{P}$) $\Rightarrow \mu P = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj}$

   $P_k \supset P'_k \supset \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{kj} \Rightarrow \mu P_k \geq \sum\limits_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj}$