Конспект Шорохова Сергея
Если нашли опечатку/ошибку - пишите @le9endwp

Линейная алгебра и геометрия

Типичная система линейных уравнений: $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$; $a,b,c,d,e,f \in R$ – кольцо или $\in K$ – поле

Неизвестные здесь: $\binom{x}{y} \in K \times K$

Множество линейных уравнений: $\{px+qy=r\}$

Операции:

- Их можно складывать
- Умножать на константу (элемент K)

Definition 0.1. Векторное пространство

K – поле. Векторное пространство над K это $(V,+,\cdot)$, где V – множество, $+ : V \times V \to V$, $\cdot : K \times V \to V$

Аксиомы:

1-4. $(V,+)$ – абелева группа
5. $(ab)v = a(bv)\ \forall a,b \in K, v \in V$
6. $(a+b)v = av+bv\ \forall a,b \in K, v \in V$
7. $a(v+u) = av+au\ \forall a \in K, v,u \in V$
8. $1v = v\ \forall v \in V$

Lemma 0.1.

$0 \cdot v = \overrightarrow{0}\ \forall v \in V$
$(-1) \cdot v = -v\ \forall v \in V$

Доказательство:

$(0+0)v = 0v+0v \Rightarrow 0v = 0v+0v$

$(-0)v+0v = (-0)v+0v+0v \Rightarrow \overrightarrow{0} = 0v$

Тогда $\overrightarrow{0} = 0v = (1+(-1))v = 1v+(-1)v = v+(-1)v$, т.е. $v+(-1)v = \overrightarrow{0} \Rightarrow (-1)v = -v$

Remark 0.1.

$u+v = v+u\ \forall u,v \in V$ следует из остальных 7 аксиом пространства (упражнение)

Example 0.1.

Тут рисуночки, говорящие что два вектора задают пространство, в котором выполнены аксиомы 1-8
Заметим, что есть биекция $vec \leftrightarrow R^2$, т.е. $v \to \binom{a}{b}$

Example 0.2. Самый главный пример

$$K^n = \{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} | a_i \in K \}$$

А еще тут выполнены все аксиомы (доказано методом очев): можем складывать, домножать итд
Это называем пространство столбцов

$^nK = \{(a_1, a_2 \dots a_n) | a_i \in K\}$
А это то же самое, но называем пространством строк

Definition 0.2. Линейное отображение

V_1, V_2 – векторные пространства над K
$f : V_1 \to V_2$ – линейное отображение (гомоморфизм), если:

1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)\ \forall v_1, v_2 \in V_1$
2. $f(kv) = kf(v)\ \forall k \in K, v \in V_1$

Definition 0.3. Изоморфизм

f – линейное отображение и биекция, тогда f – изоморфизм
$V_1 \cong V_2$ если существует изоморфизм $V_1 \to V_2$
А есть изоморфизм $vect_2 \cong R^2$, то есть вектор изоморфен его координатам

Example 0.3.

M – множество, $R \equiv K$
$V = HOM(M|R)$ – множество всех функций $M \to R$
$f_1, f_2 \in V$
$(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$
$(kf)(x) := k \cdot f(x)$
Значит V – векторное пространство

Example 0.4.

$M = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$

$$f \in V \leftrightarrow \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \in R^n$$

$V \cong R^n$
$M = [0, 1];\ (f : M \to R$ – непрерывная функция)

Example 0.5.

$V = \{(a_1, a_2 \dots)|a_i \in R;\ a_{i+2} = a_i + a_{i+1}\}$
Заметим, что если $a \in V$, то $ka \in V$. Более того, если и $b \in V$, то $a + b \in V$
Но любую фиббоначиеву последовательность можно задать двумя начальными элементами, т.е. $(a_i) \in V \leftrightarrow (a_1, a_2) \in R^2$
Тогда $V \cong R^2$ но этот изоморфизм не лучший

Example 0.6.

M – множество, $V = 2^M$

1. $|M| = n$;
2. $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
3. $K = Z/2Z$
4. $0A = \varnothing$
5. $1A = A$

$1A + 1A = 2A \Rightarrow 1A + 1A = \varnothing$
$2A = \overrightarrow{0}\ \forall A$

Definition 0.4. Линейная комбинация

V – векторное пространство над K
$x_1 \dots x_n \in V;\ a_1 \dots a_n \in K$
Тогда $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ – линейная комбинация векторов $x_1 \dots x_n$ с коэффициентами $a_1 \dots a_n$

Definition 0.5. Подпространство

V – векторное пространство над K. $U \subseteq V$
U – подпространство V, если U – векторное пространство над K с теми же операциями

Remark 0.2.

U – подпространство $V \Leftrightarrow$

1. $\forall u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U$
2. $\forall u \in U, k \in K \Rightarrow ku \in U$

Где $U \neq \varnothing$

Example 0.7.

$U = \{V \parallel l\}$ – подпространство V
K^3, $U \subset K^3$
$U = \{(x, y, z)|x + y + z = 0\}$ – подпространство K^3

Definition 0.6. Линейная оболочка

V – векторное пространство над K
$V_1, \dots V_n \in V$
Линейная оболочка $\langle V_1, \dots V_n \rangle$ – их множество линейных комбинаций с произвольными коэффициентами
$\langle V_1, \dots V_n \rangle = \{a_1 V_1 + \dots + a_n V_n | a_i \in K\}$

Remark 0.3.

1. $\langle V_1, \dots V_n \rangle$ – подпространство V
   $\langle V_1, \dots V_n \rangle < V$
2. $U < V;\ V_1 \dots V_n \in U \Rightarrow \langle V_1, \dots V_n \rangle \subset U$

Т.е. $\langle V_1, \dots V_n \rangle$ – нелинейное подпространство содержит $V_1 \dots V_n$

Доказательство:

$V_i = 0V_1 + \dots + 1V_i + \dots + 0V_n \Rightarrow V_i \in \langle V_1, \dots V_n \rangle$

$u, w \in \langle V_1, \dots V_n \rangle$

$ku + w \in \langle V_1, \dots V_n \rangle$

$U < V\ V_i \in U \Rightarrow a_i V_i \in U$

$a_1 V_1 \dots a_n V_n \in U \Rightarrow a_1 V_1 + \dots + a_n V_n \in U$

Т.е. U содержит все линейные комбинации $V_1 \dots V_n$

Remark 0.4.

Аналогично определяется линейная оболочка для любого числа векторов

Definition 0.7. Порождающая система

M называется порождающей системой в V, если $\langle M \rangle = V$, т.е. $\forall v \in V$ – линейная комбинация векторов из M

Definition 0.8. Конечномерные пространства

V – векторное пространство над K
V называется конечномерным, если $\exists$ конечная порождающая система. Будем изучать конечномерные пространства

Lemma 0.2.

$\langle V_1 \dots V_n \rangle$
$\langle V_1 + \sum\limits_2^n a_i V_i, V_2 \dots V_n \rangle = \langle V_1, V_2 \dots V_n \rangle$

Доказательство:

$V_1 + \sum\limits_2^n a_i V_i \in \langle V_1, V_2 \dots V_n \rangle$ и $V_2 \dots V_n \in \langle V_1 \dots V_n \rangle$

Тогда $\langle V_1 + \sum\limits_2^n a_i V_i, V_2 \dots V_n \rangle = \langle V_1, V_2 \dots V_n \rangle$ по Rem2.

Definition 0.9. Линейная независимость

$M \subset V$
M называется линейно независимым, если $\forall v_1 \dots v_n \in M$ и $\forall a_1 \dots a_n \in K : \sum a_i v_i = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$
Т.е. никакая линейнай комбинация элементов M не равна 0

Proposition 0.1.

$v_1 \dots v_n \in V$
Тогда $v_1 \dots v_n$ – линейно зависимы (не линейно независимы) $\Leftrightarrow$ $\exists i : v_i \in \langle v_1 \dots v_{i-1}, v_{i+1} \dots v_n \rangle$
$v_i = \sum\limits_{j \neq i} a_j v_j$
$(-1) v_i + \sum\limits_{j \neq i} a_j v_j = \overrightarrow{0}$ – нетривиальная линейная комбинация
Пусть $\sum a_i v_i = 0$ – нетривиальная линейная комбинация
$\exists i : a_i \neq 0$
$-a_i v_i = \sum\limits_{j \neq i} a_j v_j \Rightarrow v_i = \sum\limits_{j \neq i} -\frac{a_j}{a_i} v_j$
$v_i \in \langle v_j \rangle$

Remark 0.5.

K не поле (ассоциативное кольцо)
V над k (с теми эе операциями) называется модулем над K. Для модулей это утверждение (и большинство других) неверно

Definition 0.10. Базис

V – векторное пространство над K
$v_1 \dots v_n$ – базис V, если это порождающая система и линейно независима

Definition 0.11. Размерность

V – конечномерное векторное пространство. Мощность его базиса называется размерностью V и обозначается $dim(V)$

Example 0.8.

$dim(K^n) = n$

Базис стандартный $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ итд

Theorem 0.1.

V – конечное векторное пространство

1. Базисы существуют
2. Любые два базиса равномощны

Доказательство:

1. $v_1 \dots v_s$ – порождающая система (существует, т.к. V конечномерно)
   Пусть $v_1 \dots v_s$ – линейно зависимы
   $\exists i : v_i \in \langle v_j \rangle;\ v_i = \sum\limits_{j \neq i} a_j v_j$
   НУО $i = 1$
   Тогда $\langle v_1 \dots v_n \rangle = \langle v_1 - \sum\limits_{j \neq 1} a_j v_j, v_2 \dots v_n \rangle = \langle v_2 \dots v_n \rangle$
   $v_2 \dots v_n$ – порождающая система. Продолжаем выкидывать v_i пока не получим базис