

Содержание

1	План на 3 модуль (или 2 сем...)	2
2	Множества	2

1 План на 3 модуль (или 2 сем...)

1. Множества
2. ЧУМ
3. Исчисление высказываний
4. Исчисление предикатов
5. Теория кодирования

Почитать можно А. Х. Шеня

2 Множества

1. $x \in A$; $y \notin A$
2. Арифметика множеств: $\cup, \cap, \setminus, \Delta$
3. \emptyset
4. $A = \{a, b, c\}$; $B = \{d\} \cup A$
5. $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$

Remark 2.1.

Чисто синтаксически вот такой бред: $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ имеет смысл

X – множество: $X \neq \emptyset$. Рассмотрим $x \in X$

$Term(x)$ – проблема, потому что мы не знаем, к каким характеристикам обращаемся и вообще не понятно, что мы выбрали

Спасают аксиомы ZFC

Definition 2.1. Равномощность

A, B – равномощны $\Leftrightarrow \exists f : A \rightarrow B$ – биекция

А что с бесконечностями? Давайте возьмем функцию $f : N \rightarrow 2N$

Хотя множество четных чисел – подмножество всех, но они равномощны, т.к. f – биекция

Definition 2.2. Характеристическая функция

X – множество. Есть $\chi : X \rightarrow \{0, 1\}$, т.е. $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in X \\ 0, & x \notin X \end{cases}$ – характеристическая функция

А пусть $X \subset Y$

- произведение характеристических функций X и Y – это характеристическая функция $X \cap Y$
- $1 - \chi(x)$ – характеристическая функция дополнения X
- $\max(\chi_X(x), \chi_Y(x))$ – характеристическая функция $X \cup Y$

- $|X| = \sum_{x \in Y} \chi_X(x)$

Example 2.1.

Возьмем 2^N ; $B = \{0, 1\}$ и B^∞

Равномощны ли они? Берем $x \in 2^N$, теперь $b_i = \begin{cases} 1, & i \in x \\ 0, & i \notin x \end{cases}$

Definition 2.3. Счетное множество

X – счетное, если X равномощно N

Example 2.2.

Например, множество целых чисел счетно, т.к. $x \in Z \Rightarrow \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x + 1, & x < 0 \end{cases}$

Proposition 2.1.

1. X – счетно и $Y \subset X \Rightarrow Y$ или счетно, или конечно
2. X – бесконечно. Тогда $\exists Y$ – счетное: $Y \subset X$
3. X_1, \dots, X_n, \dots – конечные или счетные. Тогда $\bigcup X_i$ – конечное или счетное

Доказательство:

1. X – счетно, т.е. соответствует последовательности $\{x_1, \dots, x_n, \dots\} = \xi$
Возьмем $\xi \cdot \chi(Y)$. Т.е. что-то типа $\{0, 0 \dots x_{i_1}, 0 \dots x_{i_2}, 0 \dots\}$ который равносильно $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots = Y$
В свою очередь эта штука либо конечна, либо счетна, т.к. счетен X
2. Просто выбираем по 1 элементу из X . Если они кончатся на каком-то шаге – X не бесконечно
3. Рисуем табличку. Берем элемент (1, 1), потом (1, 2), потом (2, 1), потом (1, 3) и так далее. То есть по диагоналям. Так переберем вообще все элементы (если не понятно, погуглите метод Кантора)

Exercise 2.1.

В качестве следствия попробуйте построить явную биекцию между множеством рациональных чисел и натуральных

Theorem 2.1.

A – бесконечно, B – нбчс, т.е. B – конечно или счетно
 $A \cup B$ равномощно A

Доказательство:

$\exists Y \subset A$ – счетное

Y и $Y \cup B$ – равномощны

$$A \cup B = (A \setminus Y) \cup (Y \cup B)$$

$$A = Y \cup (A \setminus Y)$$

Биекция между Y и $Y \cup B$ существует, значит A и $A \cup B$ равномоцны

Example 2.3.

$[0; 1]$ и B^∞ . Равномоцны ли? Да. Последовательность единиц и нулей – это бинарное число

Проблема: $0, (9) = 1, (0)$

$b_1 \dots b_k, 1, 1, 1, 1, (1)$

$(b_1 \dots b_k) + 1$

$R \cup [0, 1] \sim B^\infty$ и $R \cup [0, 1] \sim [0, 1] \Rightarrow [0, 1] \sim B^\infty$

Example 2.4.

$[0, 1] \sim [0, 1] \times [0, 1]$

$0, a_1 a_2 \dots a_k \dots$

$0, a_1 a_3 a_5 \dots$ и $0, a_2 a_4 a_6 \dots$

Exercise 2.2.

Проблема та же, что и в прошлом примере, но число уязвимых моментовратно больше. Почините

Theorem 2.2. Кантор-Бернштейн

$A, B; A_1 \subset A; B_1 \subset B$

$A_1 \sim B, B_1 \sim A \Rightarrow A \sim B$

Доказательство:

A имеет мощность не больше B . Существует какое-то отображение. Нужна его биективность. А где-то по пути можем доказать еще и полный порядок

$f: A \rightarrow B_1$ – биекция

$g: B \rightarrow A_1$ – еще одна биекция

Заметим, что $g(f(A)) = A_2$ – биекция, более того этот процесс можно продолжить до бесконечности

То есть имеем $A \supset A_1 \supset A_2 \dots$ и $A \sim A_2 \sim A_4 \dots$ и $A_1 \sim A_3 \sim A_5 \sim \dots$

Возьмем просто много вложенных C -шек таких, что $C \rightarrow C_2 \rightarrow C_4 \dots$ и $C_1 \rightarrow C_3 \dots$ при какой-то биекции h

Как построить биекцию из C_6 в C_7 ? Положим $D_i = C_i \setminus C_{i+1}$. Тогда $C_0 = D_0 \cup D_1 \cup D_2 \dots$

При этом $C_1 = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \dots$

$D_2 = C_2 \setminus C_3$; $D_0 = C_0 \setminus C_1$. Ну тогда $C_2 = D_2 \cup C_3$ и $C_0 = D_0 \cup C_1$

При этом биекция h все еще существует. Можем сопоставить $D_{2k} \rightarrow D_{2(k+1)}$, а $D_{2k+1} \rightarrow D_{2k+1}$, т.е. построить биекцию между C_0 и C_1 . Победа

Явная биекция: $q(x) = \begin{cases} x, & x \in D_{2i+1} \\ h(x), & x \in D_{2i} \end{cases}$

Theorem 2.3. Теорема Кантора

B^{inf} – не счетно

Доказательство:

Построили последовательность типа

1. $a_1, a_2 \dots$
2. $b_1, b_2 \dots$
3. $c_1, c_2 \dots$

Ну возьмем еще одну последовательность $a_1, b_2, c_3 \dots$ – она будет отличаться от всех предыдущих как минимум в одном элементе. Значит B^{inf} не счетно

Theorem 2.4. Обобщенная теорема Кантора

$\forall X, X \not\sim 2^X$

Доказательство:

Пусть $\exists \varphi : X \rightarrow 2^X$ – биекция

$Z = \{x | x \notin \varphi(x)\}$

$Z \subset X$

$\nexists z : \varphi(z) = Z \Rightarrow z \notin Z \Rightarrow z \in Z$

Theorem 2.5. Следствие

$|2^X| > |X|$

$\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, 2^{2^{\mathbb{N}}}, \dots$

$\aleph_0, \aleph_1, \dots$

Remark 2.2.

Почему не существует множества всех множеств?

Пусть существует и называется U

Посмотрим на U и 2^U

По Кантору-Бернштейну $U \sim 2^U$, но по теореме Кантора $|U| < |2^U|$????

Theorem 2.6.

A и B – множества

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \text{ при } |A|, |B| < +\infty$$

Если же $|A| = +\infty$, а $|B| < +\infty$, то $|A \cup B| = |A|$

Что если $|A| = +\infty$ и $|B| = +\infty$? Скажем, НУО $|A| \leq |B|$, тогда $|A \cup B| = |B|$

Remark 2.3.

Вообще мы умеем еще и $|A \times B|$, но там разница будет только в конечных множествах

Есть так же и возведение в степень. С нбчс работа очевидна, а вот с не нбчс уже не так просто

Что такое $|A|^{|B|}$? Такое описать нормально не получится

Definition 2.4.

Нечто абстрактное и «умозрительное» – \aleph

Так, например, $\aleph + n = \aleph$ и $\aleph \cdot n = \aleph$

Definition 2.5. \geq

X – множество

$$\langle \geq \rangle \subset X \times X$$

1. $\forall x \in X \Rightarrow x \geq x$
2. $\forall x, y, z : x \geq y, y \geq z \Rightarrow x \geq z$
3. $\forall x, y : x \neq y, x \geq y \Rightarrow \overline{y \geq x}$
- 3̃ $\forall x, y \in X : x \geq y, y \geq x \Rightarrow x = y$

Theorem 2.7. Порядок

Заведем отношение \geq . Если оно существует для всех пар множества, то это порядок, иначе – частичный порядок

Заметим, что он нестрогий. Для строгого нужно добавить проверку на равенство

Definition 2.6. Частично упорядоченное множество

(X, \geq_X) – ЧУМ

Example 2.5.

Взяли \mathbb{N} и степенной порядок, т.е.

$$a, b \in \mathbb{N}; \exists x \in \mathbb{N} (x > 1) : \begin{cases} a = x^k \\ b = x^m \end{cases}$$

$$a \geq b \Leftrightarrow k \geq m$$

Definition 2.7. Индуцированный порядок

Рассмотрим $Y \subset X$. Если пользоваться тем же отношением порядка на $Y \times Y$, то можно смотреть на $\geq_Y = (\geq_X) \cap (Y \times Y)$ – индуцированный порядок

Remark 2.4.

Можно и на $X \times Y$ ввести $\geq_{X \times Y}: (x, y) \geq (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x < a \\ y \geq b \end{cases}$

Такой порядок называется лексикографическим (покоординатным), что в целом то же, что и $(X, \geq_X) + (Y, \geq_Y)$

Definition 2.8. Наибольший и максимальный элемент

$x \in X$ – наибольший элемент $\Leftrightarrow \forall y \in X : y < x$

$x \in X$. Если $\nexists y \in X : y > x$, то x – максимальный элемент

Remark 2.5.

Наибольший элемент – всегда максимальный, но не наоборот

Definition 2.9. Изоморфизм

$(X, \geq_X) \sim (Y, \geq_Y)$ – изоморфизм, если $\exists f : X \rightarrow Y$ – биекция, сохраняющая порядок

Что можно сказать про $(\mathbb{R}, \geq_{\mathbb{R}})$? Можно построить биекцию $x \mapsto x + 1$ – это автоморфизм
А что с $\mathbb{R}_+, \geq_{\mathbb{R}_+}$? Тут уже не получится построить автоморфизм (т.к. из луча $(0, +\infty)$ уйдем в луч $(1, +\infty)$)

Remark 2.6.

Из существования биекции не следует существование автоморфизма

Берем X, Y ; $h : X \rightarrow Y$ – биекция

И $\forall x, y \in X : x \geq y \Rightarrow h(x) \geq h(y)$

Смотрим на \mathbb{Z}, \mathbb{Q} . Пусть $\exists h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$

Рассмотрим двойку и тройку

$\nexists x \in \mathbb{Z} : 2 < x < 3$

$h(2) = y_2; h(3) = y_3$

$h^{-1}\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right) = x$

Целого числа между 2 и 3 нет, но по биекции оно есть

Definition 2.10. Плотность

x – плотная точка, если

$$\begin{cases} \forall y < x \exists z : y < z < x \\ \forall y > x \exists z : x < z < y \end{cases}$$

Example 2.6.

Возьмем множество $\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$. В нем плотная точка – только 0

Theorem 2.8.

X – всюду плотное (нет соседних элементов), счетное, без наибольшего и наименьшего элемента

Это значит, что $X \cong \mathbb{Q}$

Доказательство:

Возьмем n точек из X и n точек из \mathbb{Q} . Построим между ними изоморфизм

Теперь нам нужен изоморфизм из $n + 1$ отрезков из X в $n + 1$ отрезок множества \mathbb{Q} . Далее идем рекурсивно

Получим для точки что-то типа системы стягивающихся отрезков

Exercise 2.3.

Попробуйте придумать явный изоморфизм между \mathbb{Q} и $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$

Remark 2.7.

$x \rightarrow x + 1$ – автоморфизм \mathbb{Z}

$h(\mathbb{N}) \neq \mathbb{N}$

Пусть есть изоморфизм $g(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{N}$

Применим прошлую функцию и получим $h(g(\mathbb{Z})) \rightarrow h(\mathbb{N})$

Но $g(h(\mathbb{Z})) = g(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$, а $h(\mathbb{N}) \neq \mathbb{N}$

Notation 2.1.

$\forall m < n; A(m)$ – истина $\Rightarrow A(n)$ (если $A(0)$)

Theorem 2.9.

X – ЧУМ

1. $\forall Y \subset X; \exists \min Y$
2. $\nexists x_1, x_2 \dots x_n \dots : x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n \dots$
3. Для X работает принцип индукции

Remark 2.8.

Переформулируем 3 пункт: A – какое-то произвольное свойство, тогда

$(\forall x (\forall y (y < x \Rightarrow A(y)) \Rightarrow A(x)) \Rightarrow \forall x A(x)$

Доказательство:

$2 \Rightarrow 1$ Пусть $\exists Y$: в Y нет минимального элемента

Рассмотрим $X_1 \in Y \Rightarrow \exists x_2 < x_1 \Rightarrow \exists x_3 < x_2 \dots$

$1 \Rightarrow 2$ очев

$1 \Rightarrow 3$ Пусть $Y \neq \emptyset; \forall y \in Y \neg A(y)$

$X \setminus Y = A(x)$

$$\exists y_0 = \min Y \Rightarrow \forall x < y_0 \ A(x)$$

Тут что-то было

3 \Rightarrow 1 Пусть $\exists Y : \nexists \min Y$

$$A(x) \sim x \notin Y$$

Смотрим на какой-то $x \in Y$. $\forall y < x \ A(y)$

Дословно: если для какого-то x выполнялось бы условие выше, то x был минимальным, а минимального нет, значит x нет