Содержание

1 Интегральчики **2**

1.1 §1. Первообразная и неопределенный интеграл 2

1.2 §2. Площадь 5

1.3 §3. Свойства интеграла 8

1.4 §4. Приложение формулы интегрирования по частям 12

1 Интегральчики

1.1 §1. Первообразная и неопределенный интеграл

Definition 1.1. Первообразная функция

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$; $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
F – первообразная функция f, если F дифференцируема на $\langle a, b\rangle$ и $F'(x) = f(x)$ при всех $x \in \langle a, b\rangle$

Example 1.1.

$f(x) = \cos x$
$F(x) = \sin x$

Proposition 1.1.

Не всякая функция имеет первообразную

Example 1.2.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 0] \\ 1, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

Proposition 1.2.

Непрерывная на $\langle a, b\rangle$ функция имеет первообразную

Theorem 1.1.

$f, F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, F$ – первообразная f. Тогда

1. $F + C$ – первообразная f
2. Если Φ – первообразная f, то $\Phi = F + C$ для некоторой константы C

Доказательство:

1. $(F + C)' = F' = f$
2. $\Phi' = f = F'$
   $g = \Phi - F$
   $g' = 0 \Rightarrow g = C \Rightarrow \Phi = F + C$

Definition 1.2. Неопределенный интеграл

Неопределенный интеграл – множество первообразных функции f
Обозначение: $\int f(x)dx$

Remark 1.1.

Для доказательства равенства $\int f(x)dx = F(x) + C$ достаточно проверить, что $F'(x) = f(x)$

Действия с множествами функций:

A и B – множества функций $\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

$\lambda \in \mathbb{R},\ h : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

1. $A + B = \{f + g : f \in A,\ g \in B\}$
2. $\lambda A = \{\lambda f : f \in A\}$
3. $A + h = \{f + h : f \in A\}$
4. $(A)' = \{f' : f \in A\}$

Example 1.3.

$(\int f(x)dx)' = \{f\}$

Таблица интегралов:

1. $\int adx = ax + C$
2. $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C,\ p \neq -1$
3. $\in \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;\ a > 0,\ a \neq 1$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

Theorem 1.2. Линейность интеграла

$f, g : \langle a, b\rangle \Rightarrow \mathbb{R}$ имеют первообразные
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, не равные нулю одновременно
Тогда $\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$

Доказательство:

F и G – первообразные

Правая часть $= \{\alpha F(x) + \beta G(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$

$(\alpha F(x) + \beta G(x) + C)' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$

Theorem 1.3. Замена переменной в интеграле

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R},\ F$ – первообразная
$\varphi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$ – дифференцируемая функция
Тогда $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C$

Доказательство:

$(F(\varphi(x)) + C)' = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$

Remark 1.2.

$y = \varphi(x); \quad dy = \varphi'(x)dx$
$\frac{dy}{dx} = y'$
$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(y)dy = F(y) + C = F(\varphi(x)) + C$

Example 1.4.

1. $\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \ln|y| + c = \ln|x^2+1| + C$
   Здесь $y = \varphi(x) = x^2 + 1$
2. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dy}{\sin y \cos y} = \int \frac{dy}{\operatorname{tg} y \cos^2 y} = \int \frac{(\operatorname{tg} y)'}{tgy}dy = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C =$
   $= \ln|\operatorname{tg} y| + C = \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C$
   Здесь $y = \frac{x}{2}$ и $z = \operatorname{tg} y$
3. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{3t^2dt}{1+t} = 3\int \frac{t^2-1+1}{t+1}dt = 3\int(t - 1 + \frac{1}{t+1})dt = 3(\int tdt - \int dt + \int \frac{dt}{t+1}) =$
   $= 3t^2 - 3t + 3\int \frac{d(t+1)}{t+1} = 3t^2 - 3t + 3\ln|t+1| + C$

Theorem 1.4. Интегрирование по частям

$f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируемые
Если $f'g$ имеет первообразную, то $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

Доказательство:

H – первообразная функции $f'g$

$(fg - H + C)' = (fg)' - H' = f'g + fg' - f'g = fg'$

Notation 1.1. Традиционная запись формулы

$\int udv = uv - \int vdu$
$\begin{cases} du = u'(x)dx \\ dv = v'(x)dx \end{cases}$

Example 1.5.

1. $\int \ln x dx = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$
   Здесь $u = \ln x, \ v = x$ и $du = (\ln x)'dx = \frac{dx}{x}$
2. $\int x^2e^xdx = \int x^2de^x = x^2e^x - \int 2xe^xdx = x^2e^x - 2\int xde^x = x^2e^x - 2(xe^x - \int e^xdx) =$
   $= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$
   Здесь сначала берем $u = x^2, v = e^x$, а потом $u = x, v = e^x$

1.2 §2. Площадь

Definition 1.3. Площадь

F – семейство всех ограниченных подмножеств плоскости
Прямоугольник $\langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle$, площадь прямоугольника $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$
Площадь $S : F \to [0, +\infty)$

1. $S(\langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$
2. $S(E) = S(E_1) + S(E_2)$, если $E = E_1 \bigcup E_2,\ E_1 \bigcap E_2 = \varnothing$

Theorem 1.5. Свойство

Если $\tilde{E} \subset E$, то $S(\tilde{E}) \leq S(E)$

Доказательство:

$E = \tilde{E} \bigcup (E \setminus \tilde{E})$

$S(E) = S(\tilde{E}) + S(E \setminus \tilde{E}) \geq S(\tilde{E})$

Definition 1.4. (Квази)площадь

$\sigma : F \to [0, +\infty)$

1. $\sigma(\langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$
2. $\sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$, если E_- и E_+ множества, получающиеся в результате разбиения E вертикальной (горизонтальной) прямой
3. Если $\tilde{E} \subset E$, то $\sigma(\tilde{E}) \leq \sigma(E)$

Remark 1.3. Свойство

Формула 2) верна и если $E_- \bigcap E_+ \neq \varnothing$
Например, линию разбиения можно считать относящейся и к левой (верхней), и к правой (нижней) части

Доказательство:

$e = E_- \bigcap E_+$, $\sigma(e) = 0$

$\sigma(E_+) = \sigma(E_+ \setminus e) + \sigma(e \bigcap E_+) = \sigma(E_+ \setminus e)$

$\sigma(E_-) + \sigma(E_+) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+ \setminus e) = \sigma(E_- \bigcup (E_+ \setminus e)) = \sigma(E_- \bigcup E_+) = \sigma(E)$

Example 1.6. Примеры площадей $E \in F$

- Рассмотрим покрытие E конечным числом прямоугольников P_i (т.е. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i \supset E$)
  $\sigma_1(E) = \inf\{\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(P_i) : \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i \supset E\}$
- Рассмотрим покрытие E последовательностью прямоугольников P_i (т.е. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i \supset E$)
  $\sigma_2(E) = \inf\{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sigma(P_i) : \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i \supset E\}$
- Ясно, что $\sigma_1(E) \geq \sigma_2(E)$
  Но, если $E = ([0,1] \bigcap \mathbb{Q}) \times ([0,1] \bigcap \mathbb{Q})$, то $\begin{cases} \sigma_1(E) = 1 \\ \sigma_2(E) = 0 \end{cases}$

Theorem 1.6.

1. σ_1 – площадь
2. σ_1 не меняется при параллельном переносе

Доказательство:

1)

1. $\sigma_1(\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle) = (b-a)(d-c)$
   Поскольку $[a, b] \times [c, d]$ – покрытие P, $\sigma_1(P) \leq (b-a)(d-c)$
   В обратную сторону красиво доказано АИ. Там рисуночки, посмотрите!
2. $E = E_- \bigcup E_+ \Rightarrow \sigma_1(E) = \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$
   $\leq$: Если $P_1^+, \ldots P_m^+$ – покрытие E_+, для которого $\sum\limits_{i=1}^{m} \sigma(P_i^+) < \sigma_1(E_+) + \varepsilon$
   А $P_1^-, \ldots P_n^-$ – покрытие E_-, для которого $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(P_i^-) < \sigma_1(E_-) + \varepsilon$, то
   $P_1^-, P_2^-, \ldots P_n^-, P_1^+, P_2^+, \ldots P_m^+$ – покрытие E, для которого
   $\sigma_1(E) \leq \sum\limits_{i=1}^{n+m} \sigma(P_i) < \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+) + 2\varepsilon \Rightarrow \sigma_1(E) < \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+) + 2\varepsilon$
   $\geq$: Пусть $P_1, P_2, \ldots P_n$ – покрытие E
   Разобьем P_i на P_i^- и P_i^+
   $\sigma(P_i) = \sigma(P_i^-) + \sigma(P_i^+)$
   $P_1^\pm, P_2^\pm, \ldots P_n^\pm$ – покрытие $E^\pm$
   $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(P_i^\pm) \geq \sigma_1(E^\pm)$
   $\sum\limits_{i=1}^{n} (\sigma(P_i^-) + \sigma(P_i^+)) \geq \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$
3. $\tilde{E} \subset E \Rightarrow \sigma_1(\tilde{E}) \leq \sigma_1(E)$
   Если $\bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i \supset E$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i \supset \tilde{E} \Rightarrow$ класс покрытий $\tilde{E}$ шире, чем класс покрытий E

2)

Пусть $\tilde{E}$ – параллельный перенос E на вектор $\overrightarrow{v}$

$P_1, P_2, \ldots P_n$ – покрытие E. Пусть $\tilde{P}_i$ – параллельный перенос P_i на вектор $\overrightarrow{v}$

Тогда $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \dots \tilde{P}_n$ – покрытие $\tilde{E}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(P_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(\tilde{P}_i)$

Definition 1.5.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$
$f_+ := \max\{f, 0\}$, т.е. $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$
$f_- := \max\{-f, 0\}$, т.е. $f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$
Свойства:

1. $f_\pm \geq 0$
2. $f = f_+ - f_-$
   $|f| = f_+ + f_-$
3. $f_+ = \frac{f+|f|}{2}$ и $f_- = \frac{|f|-f}{2}$
4. Если $f \in C[a, b]$, то $f_\pm \in C[a, b]$

Definition 1.6. Подграфик функции

$f : [a, b] \to \mathbb{R},\ f \geq 0$
Подграфик функции f – $P_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x \in [a, b],\ 0 \leq y \leq f(x)\}$

Definition 1.7. Определенный интеграл

σ – зафиксированная квазиплощадь
$f \in C[a, b]$ (пока что так)
$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f(x)dx := \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-})$

Свойства:

1. $\int\limits_a^a f = 0$
2. $\int\limits_a^b 0 = 0$
3. Если $f \geq 0$, то $\int\limits_a^b f = \sigma(P_f)$
4. $\int\limits_a^b (-f) = -\int\limits_a^b f$
   Доказательство:
   $(-f_+) = \max\{-f, 0\} = f_-$
   $(-f_-) = \max\{f, 0\} = f_+$
   $\int\limits_a^b (-f) = \sigma(P_{f_-}) - \sigma(P_{f_+}) = -\int\limits_a^b f$
5. $\int\limits_a^b (c) = c(b - a)$
   Доказательство:
   $c > 0 \Rightarrow \int\limits_a^b c = P(\text{прямоугольника}) = c(b - a)$
6. Если $a < b,\ f \geq 0$ и $\int\limits_a^b f = 0$, то $f \equiv 0$

Доказательство: (от противного)
Пусть $f(x_0) > 0$. Из непрерывности f в $x_0 \Rightarrow \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall |x - x_0| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow P_f \supset [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [0, \frac{f(x_0)}{2}] \Rightarrow$
$\Rightarrow \sigma(P_f) \geq \sigma(\text{прямоугольника}) = 2\sigma\frac{f(x_0)}{2} > 0$ Противоречие

1.3 §3. Свойства интеграла

Notation 1.2. Обозначение

$P_g(E)$ – подграфик функции $g \geq 0$ над множество E, т.е.
$P_g(E) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in E,\ 0 \leq y \leq g(x)\}$

Theorem 1.7. Аддитивность интеграла

$f \in C[a, b]$ и $c \in [a, b]$
Тогда $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$

Доказательство:

$$\int\limits_a^b f = \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-}) = \sigma(P_{f_+}([a, c])) + \sigma(P_{f_+}([c, b])) - \sigma(P_{f_-}([a, c])) - \sigma(P_{f_-}([c, b])) = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$$

Theorem 1.8. Следствие

$f \in C[a, b]$, $a \leq c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n \leq b$. Тогда
$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^{c_1} f + \int\limits_{c_1}^{c_2} f + \ldots + \int\limits_{c_{n-1}}^{c_n} f + \int\limits_{c_n}^b f$

Доказательство:

Индукция по n

Theorem 1.9. Монотонность интеграла

$f, g \in C[a, b]$ и $f \leq g$ на $[a, b]$
Тогда $\int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b g$

Доказательство:

$f \leq g \Rightarrow f_+ \leq g_+ \Rightarrow P_{f_+} \subset P_{g_+}$, а еще $-g \leq -f \Rightarrow g_- \leq f_- \Rightarrow P_{g_-} \subset P_{f_-}$
Значит $\sigma(P_{f_+}) \leq \sigma(P_{g_+})$ и $\sigma(P_{g_-}) \leq \sigma(P_{f_-})$

$$\int\limits_a^b f = \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-}) \leq \sigma(P_{g_+}) - \sigma(P_{g_-}) = \int\limits_a^b g$$

Theorem 1.10. Следствия

1. $f \in C[a,b] \Rightarrow \min\limits_{[a,b]} f \cdot (b-a) \leq \int\limits_a^b f \leq \max\limits_{[a,b]} f \cdot (b-a)$

   Доказательство:

   $\min f \leq f \leq \max f$ и монотонность интеграла для двух постоянных функций и f

2. $f \in C[a,b] \Rightarrow |\int\limits_a^b f| \leq \int\limits_a^b |f|$

   Доказательство:

   $-|f| \leq f \leq |f| \xRightarrow{\text{монотонность}} -\int |f| = \int\limits_a^b (-|f|) \leq \int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b |f|$

Theorem 1.11. (Первая) (интегральная) теорема о среднем

$f \in C[a,b]$. Тогда существует $c \in [a,b] : \int\limits_a^b f = f(c)(b-a)$

Доказательство:

$\min f \leq \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f \leq \max f$, но множество значений f на $[a,b]$ – это отрезок $[\min f, \max f]$

Следовательно, число $\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f$ – есть значение функции f в какой-то точке $[a,b]$. Возьмем эту точку в качестве c

Definition 1.8. Среднее значение функции на отрезке

Среднее значение функции f на отрезке $[a,b]$ – это $\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f$

Definition 1.9. Интеграл с переменным верхним пределом

$f \in C[a,b]$

$\Phi(x) := \int\limits_a^x f$, где $x \in [a,b]$

Remark 1.4.

$\Phi(a) = 0$

Definition 1.10. Интеграл с переменным нижним пределом

$f \in C[a,b]$

$\Psi(x) := \int\limits_x^b f$, где $x \in [a,b]$

Remark 1.5.

$\Psi(b) = 0$

$\Phi(x) + \Psi(x) = \int\limits_a^b f$ (это аддитивность $\int$)

Theorem 1.12. Теорема Барроу

Если $f \in C[a,b]$, $\Phi(x) := \int\limits_a^x f$, то Φ – первообразная функции f

Доказательство:

Надо доказать, что $\Phi'(x) = f(x)$. Пусть $x < y$

$R(y) = \frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \frac{1}{y-x}(\int\limits_a^y f - \int\limits_a^x f) = \frac{1}{y-x}\int\limits_x^y f \overset{\text{т-ма о среднем}}{=} f(c_y)$, где $c_y \in [x,y]$

Возьмем последовательность $y_n > x$ и $\lim y_n = x$

$\Phi'_+(x) = \lim\limits_{y \to x_+} R(y) = \lim\limits_{n\to\infty} R(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(c_{y_n}) = f(x)$, т.к. $x \le c_{y_n} \le y_n \to x$

Если же $y < x$, то нужно смотреть на $\frac{1}{x-y}\int\limits_y^x f$ и дальше ровно так же

Следовательно, $\Phi'(x) = f(x)$

Theorem 1.13. Следствия

1. $\Psi(x) := \int\limits_x^b f \Rightarrow \Psi'(x) = -f(x)$
   Доказательство:
   $\Phi(x) + \Psi(x) = const$
2. Если $f \in C\langle a,b\rangle$, то у f есть первообразная на $\langle a,b\rangle$
   Доказательство:
   Возьмем $c \in (a,b)$ и $F(x) := \begin{cases} \int\limits_c^x f, \ x \ge c \\ -\int\limits_x^c f, \ x \le c \end{cases}$

$$F'(x) = f(x) \text{при} x \ge c \text{ (по теореме Барроу)}$$
$$\text{Тогда} \quad F'(x) = -f(x) \text{при} x \le c \text{ (по следствию 1)}$$
$$F'_+(c) = f(c) = F'_-(c)$$

Theorem 1.14. Формула Ньютона-Лейбница

$f \in C[a,b]$, F – первообразная f

Тогда $\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$

Доказательство:

$\Phi(x) := \int\limits_a^x f$ – первообразная f (по теореме Барроу) $\Rightarrow \Phi = F + C$ для некоторой $C \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \int\limits_a^b f = \Phi(b) = F(b) + C = F(b) - F(a)$, т.к. $0 = \Phi(a) = F(a) + C$

Notation 1.3. Обозначение

$F|_a^b := F(b) - F(a)$ подстановка

$\int\limits_a^b f = F|_a^b$

Theorem 1.15. Линейность интеграла

$f, g \in C[a,b],\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Тогда $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$

Доказательство:

Пусть F и G – первообразные f и g

Тогда $\alpha F + \beta G$ – первообразная $\alpha f + \beta g \Rightarrow \int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = (\alpha F + \beta G)|_a^b = \alpha F|_a^b + \beta G|_a^b =$

$= \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$

Theorem 1.16. Формула интегрирования по частям

$u, v \in C^1[a,b]$

Тогда $\int\limits_a^b uv' = uv|_a^b - \int\limits_a^b u'v$

Доказательство:

Пусть H – первообразная $u'v$. Тогда $uv - H$ – первообразная uv'

$(uv - H)' = u'v + uv' - H' = u'v + uv' - u'v = uv'$

$\int\limits_a^b uv' = (uv - H)|_a^b = uv|_a^b - H|_a^b = uv|_a^b - \int\limits_a^b u'v$

Notation 1.4. Соглашение

Если $a > b$, то $\int\limits_a^b f = -\int\limits_b^a f$

Theorem 1.17. Замена переменной в определенном интеграле

$f \in C\langle a,b\rangle,\ \varphi \in C^1\langle c,d\rangle,\ \varphi : \langle c,d\rangle \to \langle a,b\rangle,\ p, q \in \langle c,d\rangle$. Тогда

$\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dtt = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx$

Доказательство:

Пусть F – первообразная для f. Тогда $F \circ \varphi$ – первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ (т.к. $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t)$)

$\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = (F\circ\varphi)|_p^q = F(\varphi(q)) - F(\varphi(p)) = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f$

1.4 §4. Приложение формулы интегрирования по частям

$W_n := \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \overset{(*)}{=} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

Пояснение к $(*)$: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x ds = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \frac{\pi}{2} - t dt = -\int\limits_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} \cos^n x dx = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$

Здесь $\varphi(t) = \frac{\pi}{2} - t$ и $\varphi'(t) = -1$

$W_0 = \frac{\pi}{2},\ W_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,\ W_2 = \frac{1}{2}(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2) = \frac{\pi}{4}$

$W_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\cdot(-\cos x)' dx = -\sin^{n-1} x \cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x \cos x(-\cos x) dx =$

$= (n-1)(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx) = (n-1)(W_{n-2} - W_n) \Rightarrow nW_n = (n-1)W_{n-2}$

Если четно, то $W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} W_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2} W_{2n-1} = \ldots = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{2n(2n-2)\ldots 2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!}{2n!!}\cdot\frac{\pi}{2}$

Если нечетно, то $W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1} W_{2n-3} = \ldots = \frac{2n(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3}\cdot 1 = \frac{2n!!}{(2n+1)!!}$

Theorem 1.18. Формула Валлеса

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n!!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Доказательство:

$\sin^{2n+2} x \le \sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x$ при $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} x dx \le \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx \le \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx$

То есть $W_{2n+2} \le W_{2n+1} \le W_{2n}$

$\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} \le \frac{2n!!}{(2n+1)!!} \le \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$

$\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{\pi}{2} \le \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!})^2\cdot\frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$

Theorem 1.19. Следствие

$C_{2n}^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$

Доказательство:

$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{n!n!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}4^n \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot 4^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$

Theorem 1.20. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

$f \in C^{n+1}\langle a,b\rangle,\ x_0, x \in \langle a,b\rangle$

Тогда $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$

Доказательство:

Индукция по n. База $n = 0$

$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{0!}\int\limits_{x_0}^{x} f'(t)dt \overset{\text{Н-Л}}{=} f(x_0) + f(x) - f(x_0) = f(x)$ – верно

Переход $n \to n+1$

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = (*)$

Берем $u = f^{(n+1)}$, $v' = (x-t)^n$, $v = -\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$

$\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = -f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(t)dt$

$(*) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)dt$

Example 1.7.

$H_j := \frac{1}{j!}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^j \cos x dx$

Theorem 1.21. Свойства:

1. $0 < H_j \le \frac{1}{j!}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2})^{2j}\cos x dx = \frac{(\frac{\pi}{2})^{2j}}{j!}$
2. Если $c > 0$, то $c^j H_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$
3. $H_0 = 1,\ H_1 = 2$
4. При $j \ge 2\quad H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$
   Доказательство:
   Берем $v' = \cos x$, $u = ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^j$, $v = \sin x$, $u' = -2jx((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1}$
   $j!H_j = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^j \cos x dx = ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^j \sin x|x = 0^{x=\frac{\pi}{2}} + 2j\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1}\sin x dx = (*)$
   Первое слагаемом занулится, второе еще раз интегрируем по частям
   $v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$
   $u = x((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1} \Rightarrow u' = ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1} - 2(j-1)x^2((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-2} = (2j-1)((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1} - \frac{\pi^2}{2}(j-1)((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-2}$
   $(*) = 2j(-\cos x x((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1})|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + (2j-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}((\frac{\pi}{2})^2 0 x^2)^{j-1}\cos x dx - \frac{\pi^2}{2}(j-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-2}\cos x dx$
   Первое слагаемое зануляется, второе $= (j-1)!H_{j-1}$, третье $= (j-2)!H_{j-2}$
   $j!H_j = 2(2j-1)j(j-1)!H_{j-1} - \pi^2 j(j-1)(j-2)!H_{j-2}$
   $H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$
5. Существует многочлен P_j степени $\le j$ с целыми коэффициентами, такой что $H_j = P_j(\pi^2)$
   Доказательство:
   $P_0 \equiv 1,\ P_1 \equiv 2$
   $P_j(x) = (4j-2)P_{j-1}(x) - xP_{j-2}(x) \Rightarrow P_j(\pi^2) = (4j-2)P_{j-1}(\pi^2) - \pi^2 P_{j-2}(\pi^2) = H_j$

Theorem 1.22. Теорема Ламберта

Числа π и π^2 иррациональны

Доказательство:

Пусть $\pi^2 = \frac{m}{n} \Rightarrow 0 < H_j = P_j(\frac{m}{n}) = \frac{\text{целое число}}{n^j} \Rightarrow n^j P_j(\frac{m}{n}) = n^j H_j > 0$ и является целым числом $\Rightarrow n^j H_j \ge 1$, но $\lim\limits_{j\to\infty} n^j H_j = 0$ по свойству 2 – противоречие

Definition 1.11. Равномерная непрерывность

$f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$
f равномерно непрерывна на E, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in E : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Remark 1.6.

Определение непрерывности во всех точках множества E
$\forall y \in E \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ x \in E : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
То есть в этом определении $\delta(\varepsilon, y)$, а в равномерной непрерывности $\delta(\varepsilon)$

Example 1.8.

1. sin и cos равномерно непрерывны на $\mathbb{R}$
   $|sinx - \sin y| \le |x - y|$ и $|\cos x - \cos y| \le |x - y| \Rightarrow \delta = \varepsilon$ подходит
2. x^2 не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$
   Возьмем $\varepsilon = 1$ и покажем, что никакая $\delta > 0$ не подходит
   Рассмотрим x и $x + \frac{\delta}{2}$
   $f(x + \frac{\delta}{2}) - f(x) = (x + \frac{\delta}{2})^2 - x^2 = x\delta + \frac{\delta^2}{4} > x\delta \ge 1$ при $x \ge \frac{1}{\delta}$

Theorem 1.23. Теорема Кантора

$f \in C[a, b] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна на $[a, b]$

Доказательство:

Возьмем $\varepsilon > 0$ и предположим, что никакое $\delta > 0$ не подходит

$\delta = 1$ не подходит $\Rightarrow$ найдутся $x_1, y_1 \in [a, b] : |x_1 - y_1| < 1$ и $|f(x_1) - f(y_1)| \ge \varepsilon$

$\delta = \frac{1}{2}$ не подходит $\Rightarrow$ найдутся $x_2, y_2 : |x_2 - y_2| < \frac{1}{2}$ и $|f(x_2) - f(y_2)| \ge \varepsilon$

...

$\delta = \frac{1}{n}$ не подходит $\Rightarrow$ найдутся $x_n, y_n : |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon$

Выберем из x_n схожящуюся подпоследовательность $x_{n_k} : \lim x_{n_k} = c$

$a \le x_{n_k} \le b \Rightarrow c \in [a, b]$ и $\lim y_{n_k} = \lim x_{n_k} + \lim(y_{n_k} - x_{n_k}) = c + 0 = c$

Функция f непрерывна в $c \Rightarrow \exists \delta > 0 \ \forall |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\lim x_{n_k} = c \Rightarrow$ при больших k $|x_{n_k} - c| < \delta \Rightarrow |f(x_{n_k}) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\lim y_{n_k} = c \Rightarrow$ при больших k $|y_{n_k} - c| < \delta \Rightarrow |f(y_{n_k}) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Тогда $\varepsilon \le |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \le |f(x_{n_k}) - f(c)| + |f(c) - f(y_{n_k})| < \varepsilon$ – противоречие

Remark 1.7.

Важно, что именно отрезок
Для x^2 мы поняли, что на $[0, +\infty)$ нет равномерной непрерывности $\Rightarrow$ отрезок нельзя заменить на луч
Поймем что на полуинтервал тоже нельзя
$f(x) = \frac{1}{x}$ на $(0, 1]$ не равномерно непрерывна
$\varepsilon = 1$ никакое $\delta > 0$ не подходит (если какое-то не подходит, то $\delta > \delta_0$ тоже не подходит)
Возьмем $0 < \delta \leq 1$, $x = \frac{\delta}{2}$ и $y = \frac{\delta}{4}$
$|x - y| = \frac{\delta}{4} < \delta$, но $|f(x) - f(y)| = \frac{2}{\delta} > 1$

Definition 1.12. Модуль непрерывности

$f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$
$\omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in E,\ |x - y| < \delta\}$ определена при $\delta \geq 0$

Theorem 1.24. Свойства:

1. $\omega_f(0) = 0$
2. $\omega_f(\delta) \geq 0$
3. ω_f нестрого возрастает
4. $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x - y|)$
5. Если f липшицева к константе M, то $\omega_f(\delta) \leq M\delta$
   Доказательство:
   Липшицевость с константой M – это $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|\ \forall x, y \in E$
6. f равномерно непрерывна на $E \Leftrightarrow \lim\limits_{\delta \to 0_+} \omega_f(\delta) = 0$ (т.е. w_f непрерывна в 0)
   Доказательство:
   $\Rightarrow$ f равномерно непрер $\Rightarrow \forall \varepsilon\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in E : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \Rightarrow$
   $\Rightarrow \omega_f(\frac{\delta}{2}) < \varepsilon$, т.к. $\omega_f(\frac{\delta}{2}) \leq \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| < \delta\}$
   Значит $\forall t < \frac{\delta}{2}\ \omega_f(t) \leq \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{t \to 0_+} \omega_f(t) = 0$
   $\Leftarrow$ $|f(x) - f(y)| \leq w_f(|x - y|)$ по $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ такое что $\omega_f(\delta) < \varepsilon \Rightarrow$ если $|x - y| \leq \delta$, то $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(\delta) < \varepsilon$
7. $f \in C[a, b] \Leftrightarrow \lim\limits_{\delta \to 0_+} \omega_f(\delta) = 0$
   Доказательство:
   $f \in C[a, b] \Leftrightarrow f$ равномерно непрерывна на $[a, b] \Leftrightarrow \lim\limits_{\delta \to 0_+} \omega_f(\delta) = 0$

Definition 1.13. Дробление отрезка

Дробление отрезка $[a, b]$ – набор точек $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

Definition 1.14. Ранг дробления

Ранг дробления – длина самого большого отрезка из дробления
$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1 \ldots x_n - x_{n-1}\} =: \tau$

Definition 1.15. Оснащение дробления

Оснащение дробления – набор точек $\xi_k : \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Definition 1.16. Интегральная сумма (сумма Римана)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, τ дробление отрезка и $\tau = \{x_0, x_1 \ldots x_n\}$
ξ – оснащение дробления и $\xi = \{\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n\}$
$S(f, \tau, \xi) := \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$

Theorem 1.25. Теорема об интегральных суммах

$f \in C[a, b]$, τ – дробление

Тогда $|\int\limits_a^b f - S(f, \tau, \xi)| \le (b - a)\omega_f(|\tau|)$

Доказательство:

$$\Delta := \int\limits_a^b f - \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f - \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(\xi_k))dx$$

$$|\Delta| \le \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - f(\xi_k)|dx \le \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_f(|\tau|)dx = \omega_f(|\tau|) \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \omega_f(|\tau|)(b - a)$$

Theorem 1.26. Следствия

1. $f \in C[a, b]$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall$ дробления τ ранга $< \delta$ и $\forall$ его оснащения ξ
   $|\int\limits_a^b f - S(f, \tau, \xi)| < \varepsilon$
2. $f \in C[a, b]$. Тогда для любой последовательности дроблений $\tau_n : |\tau_n| \to 0$ и любой последовательности оснащений ξ_n $\lim S(f, \tau_n, \xi_n) = \int\limits_a^b f$

Definition 1.17. Интеграл Римана

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$
f интегрируема по Риману на $[a, b]$, и I ее интеграл, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall$ дробления τ ранга $< \delta$ и $\forall$ его оснащения ξ
$|I - S(f, \tau, \xi)| < \varepsilon$