Конспект Шорохова Сергея
Если нашли опечатку/ошибку - пишите @le9endwp

§0. Методы математического доказательства

1. Индукция
   (a) База индукции
   (b) Индукционное предположение
   (c) Индукционный переход

   $P_1, P_2 \cdots P_n$

   - 1 аксиома индукции
     $\begin{cases} \text{P}_1 \text{ - истина} \\ \forall i \ P_i \to P_{i_1} \end{cases} \Rightarrow \forall i \ P_i$ - истина
   - 2 аксиома индукции
     $\begin{cases} \text{P}_1 \text{ - истина} \\ \forall i \ P_1 \cdots P_i \to P_{i+1} \end{cases} \Rightarrow \forall i \ P_i$ - истина

2. "От противного"
   $A \to B \ \overline{B} \to \overline{A}$

3. Полный перебор

4. Прямой вывод
   $A \to B \to C \to D$, от A к D

5. Контрпример

6. Комбинаторное доказательство (сведение к известной задаче)

7. Двусторонние оценки
   $\begin{cases} \text{A} \geqslant B \\ \text{B} \geqslant A \end{cases} \Rightarrow A = B$

8. Оценка + пример

9. Дедукция + рекурсия
   $A \to B \to C \to D$, от D к A

10. Принцип Дирихле
    Биективное отображение для множеств разного размера оставит "лишние"элементы в одном из них

11. Инвариант
    Ex. Доказательство баланса красно-черного дерева

12. Доказательство эквивалентных утверждений
    $A \to B \to C \to D \to A$

§1. Множества

Def. $|A|$ - мощность множества (количество элементов в множестве
$A \bigcap B = \varnothing \Rightarrow |A \bigcup B| = |A| + |B|$

- $A_1 \cdots A_n$
  $\forall i \neq j \ A_i \bigcap A_j = \emptyset$
  $|\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i| = \sum\limits_{i=1}^{n} |A_i|$
- $A_1 \cdots A_n$
  $|\bigtimes\limits_{i=1}^{n} A_i| = \prod\limits_{i=1}^{n} |A_i|$

Def. $|A \bigcup B| = |A| + |B| - |A \bigcap B|$ - правило включения-исплючения

Доказательство

$A = (A \backslash B) \bigcup (A \bigcap B)$
$|A| = |A \backslash B| + |A \bigcap B|$
$|B| = |B \backslash A| + |A \bigcap B|$
$|A| + |B| = |A \backslash B| + |A \bigcap B| + |B \backslash A| + |A \bigcap B| = |(A \backslash B) \bigcup (A \bigcap B) \bigcup (B \backslash A)| = |A \bigcup B| + |A \bigcap B|$

Дома обобщение для произвольного n
$|A \bigcup B \bigcup C| = |A| + |B| + |C| - |A \bigcap B| - |A \bigcap C| - |B \bigcap C| + |A \bigcap B \bigcap C|$

$L = \{A, C, G, T\}$
$|L^k| = |L|^k = 4^k$
$\begin{cases} \text{f(n)} = \text{n} \cdot f(n-1) \\ \text{f(0)} = 1 \end{cases}$ – количество перестановок
$n(n-1) \cdots (n-k+1) = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = C_n^k \cdot k!$
$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
$(a+b)^n = (a+b)(a+b) \cdots (a+b) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i a^i b^{n-i} = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}$

Если представить $a_1, a_2 \cdots a_n$ как двоичное число или из $(1+1)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i \cdot 1^i \cdot 1^{n-i} = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i$

Тогда $\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$

Дома найти $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$
Посчитаем рекуррентно:
В $a_1 \cdots a_n$ a_1 либо берем, либо не берем

- Если берем, то C_{n-1}^{k-1}
- Если не берем, то C_{n-1}^{k}

Значит $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}$

Другое доказательство: $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!}(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}) = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!} \cdot \frac{n}{k(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$

Воспользоваться суммой можно из треугольника Паскаля. Его можно представить и в виде квадрата. Тогда можем посчитать C_n^i за $i(n-i+1)-(n+1)$, по формуле только $n!$ считали бы $lgn \cdot n$

Свойства:

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$
2. $C_n^i = C_n^{n-i}$
   $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-n+k)!(n-k)!}$

Задача

Пусть есть n книг и k полок. Способов разделить на полки (= поставить $k-1$ перегородок) $\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{(k-1)!} = \frac{A_{n+k-1}^{k-1}}{(k-1)!} = C_{n+k-1}^{k-1}$

Def. Отношения A, B $\rho \subset A \times B$

$a\rho b$ $\forall a \in A, b \in B$, если $(a, b) \in \rho$

Свойства:

1. $\forall a \in A$ $a\rho a$ - рефлексивность
2. $\forall a, b \in A$ $a\rho b \Rightarrow b\rho a$ - симметричность
3. $\forall a, b, c \in A$ $\begin{cases} a\rho b \\ b\rho c \end{cases} \Rightarrow a\rho c$ - транзитивность

Если выполняются все 3, то это оношение эквивалентности. Все элементы разобьются на классы эквивалентности

A, B; $f : A \to B \Leftrightarrow \forall a \in A \exists b \in B : (a, b) \in f$

Def.

Пусть A - позиции в слове, B - символы алфавита

Количество отображений - количество строк длины $|A|$

$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ - инъективность

$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b$ - сюръективность

Если $f : A \to B$ - биективно, то $|A| = |B|$, при этом количество биекций - количество перестановок

Количество инъекций - A_n^k

A, B – конечные множества

Отображение – правило, сопоставляющее $a \in A$ $b \in B$, т.е.

$f : A \to B$

$\forall x \in A$ $\exists y : f(x) = y$

$\begin{matrix} (x, f(x)) \\ x \in A; y = f(x) \in B \end{matrix}$ – график отображений

$|B|^{|A|}$ – количество отображений

$Im(M) = \{f(x) | x \in M\}$ – образ M

Виды отображений:

- Инъективные

  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

  $|Im(A)| = |A|$

  На $|B|$ позиций $|A|$ элементов

  $A_{|B|}^{|A|}$ – количество отображений

- Сюръективные

  $\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$

  $Im(A) = B$

  $\forall y \in B$; $P_y = \{x | f(x) = y\} \neq \emptyset$

  $Im(P_y) = \{y\}$

  $\hat{S}(n, k)$ – количество сюръективных отображений $A \to B, |A| = n, |B| = k$

$k^n = \sum\limits_{i=0}^{k} (\hat{S}(n, i) \cdot C_k^i)$

$\begin{cases} f_0, f_1 \cdots ; g_0, g_1 \cdots \\ f_k = \sum\limits_i C_k^i g_i \end{cases} \Rightarrow g_i = \sum\limits_i^k (-1)^{k-i} C_k^i f_i$, если докажем, получим $\hat{S}(n, k) = \sum (-1)^{k-i} C_k^i k^i$

Доказательство

TODO, из-за отсутствия практик пока не доказываем

$\frac{\hat{S}(n,k)}{k!} = S(n, k)$ – число Стирлинга первого рода

k предметов (множество X), n ящиков (множество Y)

X	Y	Произвольно	$\leqslant 1$	$\geqslant 1$
Различимы	Различимы	k^n	A_k^n	$\hat{S}(n, k)$
Неразличимы	Различимы	C_{n+k}^k	C_k^n	C_{k-1}^{n-1}
Различимы	Неразличимы	$B(n, k)$	$0, k > n$ $1, k \leqslant n$	$S(n, k)$

$B(n, k) = \sum\limits_{i}^{n} S(i, k)$