

# Содержание

<b>1</b>	<b>Интегральчики</b>	<b>2</b>
1.1	§1. Первообразная и неопределенный интеграл . . . . .	2
1.2	§2. Площадь . . . . .	5
1.3	§3. Свойства интеграла . . . . .	8
1.4	§4. Приложение формулы интегрирования по частям . . . . .	12
1.5	§5. Несобственные интегралы . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Анализ в метрических пространствах</b>	<b>29</b>
2.1	§1. Метрические пространства . . . . .	29
2.2	§2. Предел в метрическом пространстве . . . . .	36
2.3	§3. Компактность . . . . .	39
2.4	§4. Непрерывные отображения . . . . .	44

# 1 Интегральчики

## 1.1 §1. Первообразная и неопределенный интеграл

### Definition 1.1. Первообразная функция

$$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}; \quad F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

$F$  – первообразная функция  $f$ , если  $F$  дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$  и  $F'(x) = f(x)$  при всех  $x \in \langle a, b \rangle$

#### Example 1.1.

$$f(x) = \cos x$$

$$F(x) = \sin x$$

### Proposition 1.1.

Не всякая функция имеет первообразную

#### Example 1.2.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 0] \\ 1, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

### Proposition 1.2.

Непрерывная на  $\langle a, b \rangle$  функция имеет первообразную

### Theorem 1.1.

$f, F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F$  – первообразная  $f$ . Тогда

1.  $F + C$  – первообразная  $f$
2. Если  $\Phi$  – первообразная  $f$ , то  $\Phi = F + C$  для некоторой константы  $C$

*Доказательство:*

1.  $(F + C)' = F' = f$
2.  $\Phi' = f = F'$   
 $g = \Phi - F$   
 $g' = 0 \Rightarrow g = C \Rightarrow \Phi = F + C$

### Definition 1.2. Неопределенный интеграл

Неопределенный интеграл – множество первообразных функции  $f$

Обозначение:  $\int f(x)dx$

**Remark 1.1.**

Для доказательства равенства  $\int f(x)dx = F(x) + C$  достаточно проверить, что  $F'(x) = f(x)$

**Действия с множествами функций:**

$A$  и  $B$  – множества функций  $\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$\lambda \in \mathbb{R}, h : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

1.  $A + B = \{f + g : f \in A, g \in B\}$
2.  $\lambda A = \{\lambda f : f \in A\}$
3.  $A + h = \{f + h : f \in A\}$
4.  $(A)' = \{f' : f \in A\}$

**Example 1.3.**

$$(\int f(x)dx)' = \{f\}$$

**Таблица интегралов:**

1.  $\int adx = ax + C$
2.  $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, p \neq -1$
3.  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; a > 0, a \neq 1$
5.  $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6.  $\int \cos x dx = \sin x + C$
7.  $\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctg x + C$
8.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

**Theorem 1.2. Линейность интеграла**

$f, g : \langle a, b \rangle \Rightarrow \mathbb{R}$  имеют первообразные  
 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , не равные нулю одновременно  
 Тогда  $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$

*Доказательство:*

$F$  и  $G$  – первообразные

Правая часть =  $\{\alpha F(x) + \beta G(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$

$$(\alpha F(x) + \beta G(x) + C)' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

**Theorem 1.3. Замена переменной в интеграле**

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F$  – первообразная  
 $\varphi : \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$  – дифференцируемая функция  
 Тогда  $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C$

*Доказательство:*

$$(F(\varphi(x)) + C)' = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

**Remark 1.2.**

$$y = \varphi(x); \quad dy = \varphi'(x)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(y)dy = F(y) + C = F(\varphi(x)) + C$$

**Example 1.4.**

$$1. \int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y} = \ln |y| + c = \ln |x^2 + 1| + C$$

Здесь  $y = \varphi(x) = x^2 + 1$

$$2. \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{dy}{\sin y \cos y} = \int \frac{dy}{\operatorname{tg} y \cos^2 y} = \int \frac{(\operatorname{tg} y)'}{\operatorname{tg} y} dy = \int \frac{dz}{z} = \ln |z| + C =$$

$$= \ln |\operatorname{tg} y| + C = \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2}| + C$$

Здесь  $y = \frac{x}{2}$  и  $z = \operatorname{tg} y$

$$3. \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{3t^2 dt}{1+t} = 3 \int \frac{t^2-1+1}{t+1} dt = 3 \int (t-1+\frac{1}{t+1}) dt = 3(\int t dt - \int dt + \int \frac{dt}{t+1}) =$$

$$= 3t^2 - 3t + 3 \int \frac{d(t+1)}{t+1} = 3t^2 - 3t + 3 \ln |t+1| + C$$

**Theorem 1.4. Интегрирование по частям**

$f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируемые

Если  $f'g$  имеет первообразную, то  $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

*Доказательство:*

$H$  – первообразная функции  $f'g$

$$(fg - H + C)' = (fg)' - H' = f'g + fg' - f'g = fg'$$

**Notation 1.1. Традиционная запись формулы**

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\begin{cases} du = u'(x)dx \\ dv = v'(x)dx \end{cases}$$

**Example 1.5.**

$$1. \int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

Здесь  $u = \ln x$ ,  $v = x$  и  $du = (\ln x)'dx = \frac{dx}{x}$

$$2. \int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x de^x = x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) =$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

Здесь сначала берем  $u = x^2$ ,  $v = e^x$ , а потом  $u = x$ ,  $v = e^x$

## 1.2 §2. Площадь

### Definition 1.3. Площадь

$F$  – семейство всех ограниченных подмножеств плоскости

Прямоугольник  $\langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle$ , площадь прямоугольника  $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$

Площадь  $S : F \rightarrow [0, +\infty)$

1.  $S(\langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$
2.  $S(E) = S(E_1) + S(E_2)$ , если  $E = E_1 \cup E_2$ ,  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

### Theorem 1.5. Свойство

Если  $\tilde{E} \subset E$ , то  $S(\tilde{E}) \leq S(E)$

*Доказательство:*

$$E = \tilde{E} \cup (E \setminus \tilde{E})$$

$$S(E) = S(\tilde{E}) + S(E \setminus \tilde{E}) \geq S(\tilde{E})$$

### Definition 1.4. (Квази)площадь

$\sigma : F \rightarrow [0, +\infty)$

1.  $\sigma(\langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$
2.  $\sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$ , если  $E_-$  и  $E_+$  множества, получающиеся в результате разбиения  $E$  вертикальной (горизонтальной) прямой
3. Если  $\tilde{E} \subset E$ , то  $\sigma(\tilde{E}) \leq \sigma(E)$

### Remark 1.3. Свойство

Формула 2) верна и если  $E_- \cap E_+ \neq \emptyset$

Например, линию разбиения можно считать относящейся и к левой (верхней), и к правой (нижней) части

*Доказательство:*

$$e = E_- \cap E_+, \sigma(e) = 0$$

$$\sigma(E_+) = \sigma(E_+ \setminus e) + \sigma(e \cap E_+) = \sigma(E_+ \setminus e)$$

$$\sigma(E_-) + \sigma(E_+) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+ \setminus e) = \sigma(E_- \cup (E_+ \setminus e)) = \sigma(E_- \cup E_+) = \sigma(E)$$

### Example 1.6. Примеры площадей $E \in F$

- Рассмотрим покрытие  $E$  конечным числом прямоугольников  $P_i$  (т.е.  $\bigcup_{i=1}^n P_i \supset E$ )

$$\sigma_1(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \sigma(P_i) : \bigcup_{i=1}^n P_i \supset E \right\}$$

- Рассмотрим покрытие  $E$  последовательностью прямоугольников  $P_i$  (т.е.  $\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \supset E$ )

$$\sigma_2(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sigma(P_i) : \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \supset E \right\}$$

- Ясно, что  $\sigma_1(E) \geq \sigma_2(E)$

$$\text{Но, если } E = ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \times ([0, 1] \cap \mathbb{Q}), \text{ то } \begin{cases} \sigma_1(E) = 1 \\ \sigma_2(E) = 0 \end{cases}$$

### Theorem 1.6.

- $\sigma_1$  – площадь
- $\sigma_1$  не меняется при параллельном переносе

*Доказательство:*

1)

- $\sigma_1(\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle) = (b - a)(d - c)$

Поскольку  $[a, b] \times [c, d]$  – покрытие  $P$ ,  $\sigma_1(P) \leq (b - a)(d - c)$

В обратную сторону красиво доказано АИ. Там рисуночки, посмотрите!

- $E = E_- \cup E_+ \Rightarrow \sigma_1(E) = \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$

$\leq$ : Если  $P_1^+, \dots, P_m^+$  – покрытие  $E_+$ , для которого  $\sum_{i=1}^m \sigma(P_i^+) < \sigma_1(E_+) + \varepsilon$

А  $P_1^-, \dots, P_n^-$  – покрытие  $E_-$ , для которого  $\sum_{i=1}^n \sigma(P_i^-) < \sigma_1(E_-) + \varepsilon$ , то

$P_1^-, P_2^-, \dots, P_n^-, P_1^+, P_2^+, \dots, P_m^+$  – покрытие  $E$ , для которого

$$\sigma_1(E) \leq \sum_{i=1}^{n+m} \sigma(P_i) < \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+) + 2\varepsilon \Rightarrow \sigma_1(E) < \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+) + 2\varepsilon$$

$\geq$ : Пусть  $P_1, P_2, \dots, P_n$  – покрытие  $E$

Разобьем  $P_i$  на  $P_i^-$  и  $P_i^+$

$$\sigma(P_i) = \sigma(P_i^-) + \sigma(P_i^+)$$

$P_1^\pm, P_2^\pm, \dots, P_n^\pm$  – покрытие  $E^\pm$

$$\sum_{i=1}^n \sigma(P_i^\pm) \geq \sigma_1(E^\pm)$$

$$\sum_{i=1}^n (\sigma(P_i^-) + \sigma(P_i^+)) \geq \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$$

- $\tilde{E} \subset E \Rightarrow \sigma_1(\tilde{E}) \leq \sigma_1(E)$

Если  $\bigcup_{i=1}^n P_i \supset E$ , то  $\bigcup_{i=1}^n P_i \supset \tilde{E} \Rightarrow$  класс покрытий  $\tilde{E}$  шире, чем класс покрытий  $E$

2)

Пусть  $\tilde{E}$  – параллельный перенос  $E$  на вектор  $\vec{v}$

$P_1, P_2, \dots, P_n$  – покрытие  $E$ . Пусть  $\tilde{P}_i$  – параллельный перенос  $P_i$  на вектор  $\vec{v}$

Тогда  $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \dots, \tilde{P}_n$  – покрытие  $\tilde{E}$  и  $\sum_{i=1}^n \sigma(P_i) = \sum_{i=1}^n \sigma(\tilde{P}_i)$

### Definition 1.5.

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_+ := \max\{f, 0\}, \text{ т.е. } f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$$

$$f_- := \max\{-f, 0\}, \text{ т.е. } f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

Свойства:

1.  $f_{\pm} \geq 0$
2.  $f = f_+ - f_-$   
 $|f| = f_+ + f_-$
3.  $f_+ = \frac{f+|f|}{2}$  и  $f_- = \frac{|f|-f}{2}$
4. Если  $f \in C[a, b]$ , то  $f_{\pm} \in C[a, b]$

### Definition 1.6. Подграфик функции

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \geq 0$$

$$\text{Подграфик функции } f - P_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$$

### Definition 1.7. Определенный интеграл

$\sigma$  – зафиксированная квазиплощадь

$$f \in C[a, b] \text{ (пока что так)}$$

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx := \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-})$$

Свойства:

1.  $\int_a^a f = 0$
2.  $\int_a^b 0 = 0$
3. Если  $f \geq 0$ , то  $\int_a^b f = \sigma(P_f)$
4.  $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$   
*Доказательство:*  
 $(-f_+) = \max\{-f, 0\} = f_-$   
 $(-f_-) = \max\{f, 0\} = f_+$   
 $\int_a^b (-f) = \sigma(P_{f_-}) - \sigma(P_{f_+}) = -\int_a^b f$
5.  $\int_a^b (c) = c(b-a)$   
*Доказательство:*  
 $c > 0 \Rightarrow \int_a^b c = P(\text{прямоугольника}) = c(b-a)$
6. Если  $a < b$ ,  $f \geq 0$  и  $\int_a^b f = 0$ , то  $f \equiv 0$

*Доказательство:* (от противного)

Пусть  $f(x_0) > 0$ . Из непрерывности  $f$  в  $x_0 \Rightarrow \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall |x - x_0| < \delta \Rightarrow$   
 $\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow P_f \supset [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [0, \frac{f(x_0)}{2}] \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \sigma(P_f) \geq \sigma(\text{прямоугольника}) = 2\sigma \frac{f(x_0)}{2} > 0$  Противоречие

### 1.3 §3. Свойства интеграла

#### Notation 1.2. Обозначение

$P_g(E)$  – подграфик функции  $g \geq 0$  над множеством  $E$ , т.е.  
 $P_g(E) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in E, 0 \leq y \leq g(x)\}$

#### Theorem 1.7. Аддитивность интеграла

$f \in C[a, b]$  и  $c \in [a, b]$   
 Тогда  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

*Доказательство:*

$$\int_a^b f = \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-}) = \sigma(P_{f_+}([a, c])) + \sigma(P_{f_+}([c, b])) - \sigma(P_{f_-}([a, c])) - \sigma(P_{f_-}([c, b])) = \int_a^c f + \int_c^b f$$

#### Theorem 1.8. Следствие

$f \in C[a, b]$ ,  $a \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n \leq b$ . Тогда  
 $\int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \dots + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f + \int_{c_n}^b f$

*Доказательство:*

Индукция по  $n$

#### Theorem 1.9. Монотонность интеграла

$f, g \in C[a, b]$  и  $f \leq g$  на  $[a, b]$   
 Тогда  $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

*Доказательство:*

$f \leq g \Rightarrow f_+ \leq g_+ \Rightarrow P_{f_+} \subset P_{g_+}$ , а еще  $-g \leq -f \Rightarrow g_- \leq f_- \Rightarrow P_{g_-} \subset P_{f_-}$

Значит  $\sigma(P_{f_+}) \leq \sigma(P_{g_+})$  и  $\sigma(P_{g_-}) \leq \sigma(P_{f_-})$

$$\int_a^b f = \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-}) \leq \sigma(P_{g_+}) - \sigma(P_{g_-}) = \int_a^b g$$



**Theorem 1.10. Следствия**

$$1. f \in C[a, b] \Rightarrow \min_{[a, b]} f \cdot (b - a) \leq \int_a^b f \leq \max_{[a, b]} f \cdot (b - a)$$

*Доказательство:*

$\min f \leq f \leq \max f$  и монотонность интеграла для двух постоянных функций и  $f$

$$2. f \in C[a, b] \Rightarrow \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

*Доказательство:*

$$-|f| \leq f \leq |f| \xrightarrow{\text{монотонность}} -\int_a^b |f| = \int_a^b (-|f|) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

**Theorem 1.11. (Первая) (интегральная) теорема о среднем**

$$f \in C[a, b]. \text{ Тогда существует } c \in [a, b] : \int_a^b f = f(c)(b - a)$$

*Доказательство:*

$$\min f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq \max f, \text{ но множество значений } f \text{ на } [a, b] - \text{ это отрезок } [\min f, \max f]$$

Следовательно, число  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$  – есть значение функции  $f$  в какой-то точке  $[a, b]$ . Возьмем эту точку в качестве  $c$

**Definition 1.8. Среднее значение функции на отрезке**

Среднее значение функции  $f$  на отрезке  $[a, b]$  – это  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$

**Definition 1.9. Интеграл с переменным верхним пределом**

$$f \in C[a, b]$$

$$\Phi(x) := \int_a^x f, \text{ где } x \in [a, b]$$

**Remark 1.4.**

$$\Phi(a) = 0$$

**Definition 1.10. Интеграл с переменным нижним пределом**

$$f \in C[a, b]$$

$$\Psi(x) := \int_x^b f, \text{ где } x \in [a, b]$$

**Remark 1.5.**

$$\Psi(b) = 0$$

$$\Phi(x) + \Psi(x) = \int_a^b f \quad (\text{это аддитивность } \int)$$

**Theorem 1.12. Теорема Барроу**

Если  $f \in C[a, b]$ ,  $\Phi(x) := \int_a^x f$ , то  $\Phi$  – первообразная функции  $f$

*Доказательство:*

Надо доказать, что  $\Phi'(x) = f(x)$ . Пусть  $x < y$

$$R(y) = \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \frac{1}{y - x} \left( \int_a^y f - \int_a^x f \right) = \frac{1}{y - x} \int_x^y f \stackrel{\text{т-ма о среднем}}{=} f(c_y), \text{ где } c_y \in [x, y]$$

Возьмем последовательность  $y_n > x$  и  $\lim y_n = x$

$$\Phi'_+(x) = \lim_{y \rightarrow x+} R(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} R(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(c_{y_n}) = f(x), \text{ т.к. } x \leq c_{y_n} \leq y_n \rightarrow x$$

Если же  $y < x$ , то нужно смотреть на  $\frac{1}{x - y} \int_y^x f$  и дальше ровно так же

Следовательно,  $\Phi'(x) = f(x)$

**Theorem 1.13. Следствия**

$$1. \Psi(x) := \int_x^b f \Rightarrow \Psi'(x) = -f(x)$$

*Доказательство:*

$$\Phi(x) + \Psi(x) = \text{const}$$

$$2. \text{ Если } f \in C\langle a, b \rangle, \text{ то } f \text{ есть первообразная на } \langle a, b \rangle$$

*Доказательство:*

$$\text{Возьмем } c \in (a, b) \text{ и } F(x) := \begin{cases} \int_c^x f, & x \geq c \\ -\int_x^c f, & x \leq c \end{cases}$$

$$F'(x) = f(x) \text{ при } x \geq c \text{ (по теореме Барроу)}$$

$$\text{Тогда } F'(x) = -f(x) \text{ при } x \leq c \text{ (по следствию 1)}$$

$$F'_+(c) = f(c) = F'_-(c)$$

**Theorem 1.14. Формула Ньютона-Лейбница**

$f \in C[a, b]$ ,  $F$  – первообразная  $f$

$$\text{Тогда } \int_a^b f = F(b) - F(a)$$

*Доказательство:*

$$\Phi(x) := \int_a^x f - \text{первообразная } f \text{ (по теореме Барроу)} \Rightarrow \Phi = F + C \text{ для некоторой } C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f = \Phi(b) = F(b) + C = F(b) - F(a), \text{ т.к. } 0 = \Phi(a) = F(a) + C$$

### Notation 1.3. Обозначение

$$F|_a^b := F(b) - F(a) \text{ подстановка}$$

$$\int_a^b f = F|_a^b$$

### Theorem 1.15. Линейность интеграла

$$f, g \in C[a, b], \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\text{Тогда } \int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

*Доказательство:*

Пусть  $F$  и  $G$  – первообразные  $f$  и  $g$

$$\text{Тогда } \alpha F + \beta G \text{ – первообразная } \alpha f + \beta g \Rightarrow \int_a^b (\alpha f + \beta g) = (\alpha F + \beta G)|_a^b = \alpha F|_a^b + \beta G|_a^b =$$

$$= \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

### Theorem 1.16. Формула интегрирования по частям

$$u, v \in C^1[a, b]$$

$$\text{Тогда } \int_a^b uv' = uv|_a^b - \int_a^b u'v$$

*Доказательство:*

Пусть  $H$  – первообразная  $u'v$ . Тогда  $uv - H$  – первообразная  $uv'$

$$(uv - H)' = u'v + uv' - H' = u'v + uv' - u'v = uv'$$

$$\int_a^b uv' = (uv - H)|_a^b = uv|_a^b - H|_a^b = uv|_a^b - \int_a^b u'v$$

### Notation 1.4. Соглашение

$$\text{Если } a > b, \text{ то } \int_a^b f = - \int_b^a f$$

### Theorem 1.17. Замена переменной в определенном интеграле

$$f \in C\langle a, b \rangle, \varphi \in C^1\langle c, d \rangle, \varphi : \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle, p, q \in \langle c, d \rangle. \text{ Тогда}$$

$$\int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx$$

*Доказательство:*

Пусть  $F$  – первообразная для  $f$ . Тогда  $F \circ \varphi$  – первообразная для  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$  (т.к.  $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t)$ )

$$\int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = (F \circ \varphi)|_p^q = F(\varphi(q)) - F(\varphi(p)) = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f$$

## 1.4 §4. Приложение формулы интегрирования по частям

$$W_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \stackrel{(*)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

$$\text{Пояснение к } (*): \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \frac{\pi}{2} - t dt = - \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} \cos^n x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

$$\text{Здесь } \varphi(t) = \frac{\pi}{2} - t \text{ и } \varphi'(t) = -1$$

$$W_0 = \frac{\pi}{2}, \quad W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1, \quad W_2 = \frac{1}{2} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \cdot (-\cos x)' dx = -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \cos x (-\cos x) dx =$$

$$= (n-1) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \right) = (n-1)(W_{n-2} - W_n) \Rightarrow nW_n = (n-1)W_{n-2}$$

$$\text{Если чётно, то } W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} W_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} W_{2n-4} = \dots = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2n(2n-2)\dots 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Если нечётно, то } W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} W_{2n-3} = \dots = \frac{2n(2n-2)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 3} \cdot 1 = \frac{2n!!}{(2n+1)!!}$$

### Theorem 1.18. Формула Валлеса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n!!}{(2n+1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

*Доказательство:*

$$\sin^{2n+2} x \leq \sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \text{ при } x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx$$

$$\text{То есть } W_{2n+2} \leq W_{2n+1} \leq W_{2n}$$

$$\frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{2n!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

### Theorem 1.19. Следствие

$$C_{2n}^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

*Доказательство:*

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{n!n!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} 4^n \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot 4^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

**Theorem 1.20. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме**

$f \in C^{n+1}\langle a, b \rangle, x_0, x \in \langle a, b \rangle$

Тогда  $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$

*Доказательство:*

Индукция по  $n$ . База  $n = 0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{0!} \int_{x_0}^x f'(t) dt \stackrel{\text{H-П}}{=} f(x_0) + f(x) - f(x_0) = f(x) - \text{верно}$$

Переход  $n \rightarrow n + 1$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt = (*)$$

Берем  $u = f^{(n+1)}, v' = (x - t)^n, v = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}$

$$\int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt = -f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \Big|_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(t) dt$$

$$(*) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (x - t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt$$

**Example 1.7.**

$$H_j := \frac{1}{j!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^j \cos x dx$$

**Theorem 1.21. Свойства:**

1.  $0 < H_j \leq \frac{1}{j!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2})^{2j} \cos x dx = \frac{(\frac{\pi}{2})^{2j}}{j!}$
2. Если  $c > 0$ , то  $c^j H_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$
3.  $H_0 = 1, H_1 = 2$
4. При  $j \geq 2$   $H_j = (4j - 2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$

*Доказательство:*

Берем  $v' = \cos x$ ,  $u = ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^j$ ,  $v = \sin x$ ,  $u' = -2jx((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1}$

$$j!H_j = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^j \cos x dx = ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^j \sin x \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + 2j \int_0^{\frac{\pi}{2}} x((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1} \sin x dx = (*)$$

Первое слагаемое занулится, второе еще раз интегрируем по частям

$$v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$$

$$u = x((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1} \Rightarrow u' = ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1} - 2(j-1)x^2((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-2} = (2j-1)((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1} - \frac{\pi^2}{2}(j-1)((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-2}$$

$$(*) = 2j(-\cos x((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1}) \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + (2j-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1} \cos x dx - \frac{\pi^2}{2}(j-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-2} \cos x dx$$

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-2} \cos x dx$$

Первое слагаемое зануляется, второе  $= (j-1)!H_{j-1}$ , третье  $= (j-2)!H_{j-2}$

$$j!H_j = 2(2j-1)j(j-1)!H_{j-1} - \pi^2 j(j-1)(j-2)!H_{j-2}$$

$$H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$$

5. Существует многочлен  $P_j$  степени  $\leq j$  с целыми коэффициентами, такой что  $H_j = P_j(\pi^2)$

*Доказательство:*

$$P_0 \equiv 1, P_1 \equiv 2$$

$$P_j(x) = (4j-2)P_{j-1}(x) - \pi^2 P_{j-2}(x) \Rightarrow P_j(\pi^2) = (4j-2)P_{j-1}(\pi^2) - \pi^2 P_{j-2}(\pi^2) = H_j$$

**Theorem 1.22. Теорема Ламберта**

Числа  $\pi$  и  $\pi^2$  иррациональны

*Доказательство:*

Пусть  $\pi^2 = \frac{m}{n} \Rightarrow 0 < H_j = P_j(\frac{m}{n}) = \frac{\text{целое число}}{n^j} \Rightarrow n^j P_j(\frac{m}{n}) = n^j H_j > 0$  и является целым числом  $\Rightarrow n^j H_j \geq 1$ , но  $\lim_{j \rightarrow \infty} n^j H_j = 0$  по свойству 2 – противоречие

### Definition 1.11. Равномерная непрерывность

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}$$

$f$  равномерно непрерывна на  $E$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

### Remark 1.6.

Определение непрерывности во всех точках множества  $E$

$$\forall y \in E \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 x \in E : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

То есть в этом определении  $\delta(\varepsilon, y)$ , а в равномерной непрерывности  $\delta(\varepsilon)$

### Example 1.8.

1.  $\sin$  и  $\cos$  равномерно непрерывны на  $\mathbb{R}$   
 $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$  и  $|\cos x - \cos y| \leq |x - y| \Rightarrow \delta = \varepsilon$  подходит
2.  $x^2$  не является равномерно непрерывной на  $\mathbb{R}$   
Возьмем  $\varepsilon = 1$  и покажем, что никакая  $\delta > 0$  не подходит  
Рассмотрим  $x$  и  $x + \frac{\delta}{2}$   
 $f(x + \frac{\delta}{2}) - f(x) = (x + \frac{\delta}{2})^2 - x^2 = x\delta + \frac{\delta^2}{4} > x\delta \geq 1$  при  $x \geq \frac{1}{\delta}$

### Theorem 1.23. Теорема Кантора

$$f \in C[a, b] \Rightarrow f \text{ равномерно непрерывна на } [a, b]$$

*Доказательство:*

Возьмем  $\varepsilon > 0$  и предположим, что никакое  $\delta > 0$  не подходит

$$\delta = 1 \text{ не подходит} \Rightarrow \text{найдутся } x_1, y_1 \in [a, b] : |x_1 - y_1| < 1 \text{ и } |f(x_1) - f(y_1)| \geq \varepsilon$$

$$\delta = \frac{1}{2} \text{ не подходит} \Rightarrow \text{найдутся } x_2, y_2 : |x_2 - y_2| < \frac{1}{2} \text{ и } |f(x_2) - f(y_2)| \geq \varepsilon$$

...

$$\delta = \frac{1}{n} \text{ не подходит} \Rightarrow \text{найдутся } x_n, y_n : |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ и } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

Выберем из  $x_n$  сходящуюся подпоследовательность  $x_{n_k} : \lim x_{n_k} = c$

$$a \leq x_{n_k} \leq b \Rightarrow c \in [a, b] \text{ и } \lim y_{n_k} = \lim x_{n_k} + \lim(y_{n_k} - x_{n_k}) = c + 0 = c$$

$$\text{Функция } f \text{ непрерывна в } c \Rightarrow \exists \delta > 0 \forall |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lim x_{n_k} = c \Rightarrow \text{при больших } k \ |x_{n_k} - c| < \delta \Rightarrow |f(x_{n_k}) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lim y_{n_k} = c \Rightarrow \text{при больших } k \ |y_{n_k} - c| < \delta \Rightarrow |f(y_{n_k}) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Тогда } \varepsilon \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(c)| + |f(c) - f(y_{n_k})| < \varepsilon - \text{противоречие}$$

**Remark 1.7.**

Важно, что именно отрезок

Для  $x^2$  мы поняли, что на  $[0, +\infty)$  нет равномерной непрерывности  $\Rightarrow$  отрезок нельзя заменить на луч

Поймем что на полуинтервал тоже нельзя

$f(x) = \frac{1}{x}$  на  $(0, 1]$  не равномерно непрерывна

$\varepsilon = 1$  никакое  $\delta > 0$  не подходит (если какое-то не подходит, то  $\delta > \delta_0$  тоже не подходит)

Возьмем  $0 < \delta \leq 1$ ,  $x = \frac{\delta}{2}$  и  $y = \frac{\delta}{4}$   
 $|x - y| = \frac{\delta}{4} < \delta$ , но  $|f(x) - f(y)| = \frac{2}{\delta} > 1$

**Definition 1.12. Модуль непрерывности**

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subset \mathbb{R}$

$\omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in E, |x - y| < \delta\}$  определена при  $\delta \geq 0$

**Theorem 1.24. Свойства:**

1.  $\omega_f(0) = 0$
2.  $\omega_f(\delta) \geq 0$
3.  $\omega_f$  нестрого возрастает
4.  $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x - y|)$
5. Если  $f$  липшицева к константе  $M$ , то  $\omega_f(\delta) \leq M\delta$

*Доказательство:*

Липшицевость с константой  $M$  — это  $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \forall x, y \in E$

6.  $f$  равномерно непрерывна на  $E \Leftrightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0$  (т.е.  $\omega_f$  непрерывна в 0)

*Доказательство:*

$\Rightarrow f$  равномерно непрерыв  $\Rightarrow \forall \varepsilon \exists \delta > 0 \forall x, y \in E : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega_f(\frac{\delta}{2}) < \varepsilon$ , т.к.  $\omega_f(\frac{\delta}{2}) \leq \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| < \frac{\delta}{2}\}$

Значит  $\forall t < \frac{\delta}{2} \omega_f(t) \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0+} \omega_f(t) = 0$

$\Leftarrow |f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x - y|)$  по  $\varepsilon > 0$  выберем  $\delta > 0$  такое что  $\omega_f(\delta) < \varepsilon \Rightarrow$   
 если  $|x - y| \leq \delta$ , то  $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(\delta) < \varepsilon$

7.  $f \in C[a, b] \Leftrightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0$

*Доказательство:*

$f \in C[a, b] \Leftrightarrow f$  равномерно непрерывна на  $[a, b] \Leftrightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0$

**Definition 1.13. Дробление отрезка**

Дробление отрезка  $[a, b]$  — набор точек  $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

**Definition 1.14. Ранг дробления**

Ранг дробления — длина самого большого отрезка из дробления

$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\} =: \tau$



**Definition 1.15. Оснащение дробления**

Оснащение дробления – набор точек  $\xi_k : \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

**Definition 1.16. Интегральная сумма (сумма Римана)**

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tau$  дробление отрезка и  $\tau = \{x_0, x_1 \dots x_n\}$

$\xi$  – оснащение дробления и  $\xi = \{\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n\}$

$$S(f, \tau, \xi) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

**Example 1.9.**

$$S_p(n) := 1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p; \quad p > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_p(n)}{n^{p+1}}?$$

Возьмем  $f(x) = x^p$  на  $[0, 1]$  и  $x_k = \xi_k = \frac{k}{n}$

$$\frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \frac{1}{n} \cdot \left( \left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^p \right) = \sum f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) \rightarrow \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}$$

**Theorem 1.25. Теорема об интегральных суммах**

$f \in C[a, b]$ ,  $\tau$  – дробление

$$\text{Тогда } \left| \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| \leq (b-a) \omega_f(|\tau|)$$

*Доказательство:*

$$\Delta := \int_a^b f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(\xi_k)) dx$$

$$|\Delta| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - f(\xi_k)| dx \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_f(|\tau|) dx = \omega_f(|\tau|) \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \omega_f(|\tau|)(b-a)$$

**Theorem 1.26. Следствия**

1.  $f \in C[a, b]$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall$  дробления  $\tau$  ранга  $< \delta$  и  $\forall$  его оснащения  $\xi$

$$\left| \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| < \varepsilon$$

2.  $f \in C[a, b]$ . Тогда для любой последовательности дроблений  $\tau_n : |\tau_n| \rightarrow 0$  и любой

$$\text{последовательности оснащений } \xi_n \quad \lim S(f, \tau_n, \xi_n) = \int_a^b f$$

**Definition 1.17. Интеграл Римана**

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$f$  интегрируема по Риману на  $[a, b]$ , и  $I$  ее интеграл, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall$  дробления  $\tau$  ранга  $< \delta$  и  $\forall$  его оснащения  $\xi$

$$|I - S(f, \tau, \xi)| < \varepsilon$$

**Lemma 1.1.**

$f \in C^2[\alpha, \beta]$ . Тогда  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - (\beta - \alpha) \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} = -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t)(t - \alpha)(\beta - t) dt$

Доказательство:

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x)(x - \gamma)' dx = f(x)(x - \gamma) \Big|_{x=\alpha}^{x=\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)(x - \gamma) dx = f(\beta) \cdot \frac{\beta - \alpha}{2} - f(\alpha) \cdot \frac{\alpha - \beta}{2} = \\ &= \frac{f(\beta) + f(\alpha)}{2} (\beta - \alpha) \end{aligned}$$

$$\Delta = - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)(x - \gamma) dx = (*)$$

$$\text{Берем } u = f'; \quad v' = x - \gamma; \quad -v = \frac{1}{2}(x - \alpha)(\beta - x) = \frac{1}{2}(-x^2 + (\alpha + \beta)x - \alpha\beta)$$

$$(*) = -f'(x) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(x - \alpha)(\beta - x) \Big|_{x=\alpha}^{x=\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f''(x) \frac{1}{2}(x - \alpha)(\beta - x) dx$$

**Theorem 1.27. Формула трапеций**

$$S = \sum (x_k - x_{k-1}) \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$$

Как выглядит формула, если узлы на равных расстояниях?

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$$

$$S = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} = \frac{b-a}{n} \left( \frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(b)}{2} \right)$$

**Notation 1.5. Как выглядит интегральная сумма если узлы на равных расстояниях?**

$$\xi_k = x_k$$

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

$$\text{А если } \xi_k = x_{k-1}, \text{ то } S(f, \tau, \xi) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

**Remark 1.8.**

Если  $|f| \leq M$ , то  $\omega_f(\delta) \leq M\delta$

$$\left| S(f, \xi, \tau) - \int_a^b f \right| \leq (b-a) \omega_f\left(\frac{b-a}{n}\right) \leq (b-a)^2 \cdot \frac{M}{n}$$

**Theorem 1.28. Оценка погрешности в формуле трапеций**

$$f \in C^2[a, b]$$

$$\text{Тогда } \left| \int_a^b f - \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \cdot \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \right| \leq \frac{|\tau|^2}{8} \cdot \int_a^b |f''|$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} = \sum_{k=1}^n \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} f - (x_k - x_{k-1}) \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \right) \stackrel{\text{lemma}}{=} \\
&\stackrel{\text{lemma}}{=} \sum_{k=1}^n -\frac{1}{2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t)(x_k - t)(t - x_{k-1}) dt \\
|\Delta| &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)| \cdot |(x_k - t)(t - x_{k-1})| dt \leq (*) \\
(x_k - t)(t - x_{k-1}) &\leq \left( \frac{(x_k - t) + (t - x_{k-1})}{2} \right)^2 = \left( \frac{x_k - x_{k-1}}{2} \right)^2 = \frac{|\tau|^2}{4} \\
(*) &\leq \frac{|\tau|^2}{8} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)| dt = \frac{|\tau|^2}{8} \int_a^b |f''|
\end{aligned}$$

#### Remark 1.9.

Если  $|f''| \leq M$  и узлы равноотстоящие друг от друга, то  $\left| \int_a^b f - \frac{b-a}{n} \left( \frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(b)}{2} \right) \right| \leq \left( \frac{b-a}{n} \right)^2 \frac{M(b-a)}{8}$

#### Theorem 1.29. Формула Эйлера-Маклорена для второй производной

$$\begin{aligned}
&f \in C^2[a, b]; \quad m, n \in \mathbb{Z} \\
\sum_{k=m}^n f(k) &= \frac{f(m) + f(n)}{2} + \int_m^n f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^n f''(t) \{t\} (1 - \{t\}) dt
\end{aligned}$$

Доказательство:

Пишем лемму (1.1) для  $\alpha = k$  и  $\beta = k + 1$

$$\int_k^{k+1} f = \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \frac{1}{2} \int_k^{k+1} f''(t)(t - k)(k + 1 - t) dt$$

Просуммируем по  $k$  от  $m$  до  $n - 1$

$$\begin{aligned}
\int_m^n f &= \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} f = \sum_{k=m}^{n-1} \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} f''(t) \{t\} (1 - \{t\}) dt = \frac{f(m)}{2} + \sum_{k=m}^{n-1} f(k) + \frac{f(n)}{2} - \\
&- \frac{1}{2} \int_m^n f''(t) \{t\} (1 - \{t\}) dt \\
\int_m^n f + \frac{f(m) + f(n)}{2} &= \sum_{k=m}^n f(k) - \frac{1}{2} \int_m^n f''(t) \{t\} (1 - \{t\}) dt
\end{aligned}$$

### Example 1.10.

$$1. S_p(n) = 1^p + 2^p + \dots + n^p; f(x) = x^p; f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$$

$$S_p(n) = \frac{1+n^p}{2} + \int_1^n x^p dx + \frac{1}{2} \int_1^n p(p-1)x^{p-2}\{x\}(1-\{x\})dx$$

Пусть  $p > -1$

$$|S_p(n) - \frac{n^{p+1}-1}{p+1} - \frac{n^{p+1}}{2}| \leq \frac{|p||p-1|}{8} \int_1^n x^{p-2} dx$$

$$\text{Если } p \in (-1, 1), \text{ то } \int_1^n x^{p-2} dx = \frac{x^{p-1}}{p-1} \Big|_1^n \leq \frac{1}{1-p} \Rightarrow S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(1)$$

$$\text{Если } p > 1, \text{ то } \int_1^n x^{p-2} dx = \frac{x^{p-1}}{p-1} \Big|_1^n \leq \frac{n^{p-1}}{p-1} = O(n^{p-1}) \Rightarrow S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(n^{p-1})$$

$$2. \text{ Гармонические числа } H_n := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}; f''(x) = \frac{2}{x^3}; m = 1$$

$$H_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \int_1^n \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int_1^n \frac{2}{x^3} \{x\}(1-\{x\})dx = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a_n = (*)$$

$$a_n := \int_1^n \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^3} dx$$

$$a_{n+1} = a_n + \int_n^{n+1} \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^3} dx > a_n$$

$$\text{Поймем что } a_n \text{ ограничена: } a_n \leq \int_1^n \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2x^2}\right) \Big|_1^n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8n^2} < \frac{1}{8} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  существует конечный  $\lim a_n =: a$

(\*)  $= \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a + O(1) = \ln n + \gamma + O(\frac{1}{n})$ , где  $\gamma$  – постоянная Эйлера

#### Notation 1.6.

$$\gamma \approx 0.5772156043 \dots$$

$$3. \text{ Формула Стирлинга}$$

$$f(t) = \ln t; f''(t) = -\frac{1}{t^2}; m = 1$$

$$\sum_{k=1}^n \ln k = \frac{\ln 1 + \ln n}{2} + \int_1^n \ln t dt - \frac{1}{2} \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2} dt = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + 1 - b_n$$

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2} \int_n^{n+1} \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2} dt > b_n$$

$$b_n \leq \frac{1}{8} \int_1^n \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{8} \left(-\frac{1}{t}\right) \Big|_1^n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8n} < \frac{1}{8} \Rightarrow \lim b_n = b \in \mathbb{R} \Rightarrow b_n = b + o(1)$$

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + (1-b) + o(1)$$

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{1-b} e^{o(1)} \sim C n^n e^{-n} \sqrt{n} \text{ (где } C = e^{1-b})$$

Хотим найти  $C > 0$  из формулы  $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{n} C$

$$\text{Знаем, что } C_{2n}^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}, \text{ но } C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{C(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n}}{(Cn^n e^{-n} \sqrt{n})^2} = \frac{C 2^{2n} \sqrt{2n}}{C^2 \sqrt{n} \sqrt{n}} = \frac{4^n \sqrt{n}}{C \sqrt{n}} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \sqrt{2}}{C \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} = 1 \Rightarrow C = \sqrt{2\pi}$$

#### Notation 1.7. Формула Стирлинга

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2}(\ln n + \ln 2\pi) + o(1)$$

#### Remark 1.10.

Чуть более точные вычисления дают  $O(\frac{1}{n})$  вместо  $o(1)$

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{O(\frac{1}{n})}$$

## 1.5 §5. Несобственные интегралы

### Definition 1.18.

$-\infty < a < b \leq +\infty; f \in C[a, b)$   
 $\int_a^b f := \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f$ , если такой предел существует  
 $-\infty \leq a < b < +\infty; f \in C(a, b]$   
 $\int_a^b f := \lim_{A \rightarrow a+} \int_A^b f$ , если такой предел существует

### Remark 1.11.

- Если  $F$  – первообразная  $f$  на  $[a, b)$ , то  
 $\int_a^b f = \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f = \lim_{B \rightarrow b-} (F(B) - F(a)) = \lim_{B \rightarrow b-} F(B) - F(a)$   
 Если  $F$  – первообразная  $f$  на  $(a, b]$ , то  
 $\int_a^b f = F(b) - \lim_{A \rightarrow a+} F(A) =: F|_a^b$ , т.е. подстановку теперь понимаем как предел (в случае, если она не определена в какой-то точке)
- Если  $f \in C[a, b]$ , то новое определение совпадает со старым  
 $\int_a^b f - \int_a^B f = \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f - \int_a^B f = - \lim_{B \rightarrow b-} \int_B^b f$   
 $f \in C[a, b] \Rightarrow f$  ограничена  $\Rightarrow |f| \leq M$   
 $|\int_B^b f| \leq \int_B^b |f| \leq \int_B^b M = (b - B)M \xrightarrow{B \rightarrow b-} 0$

### Example 1.11.

$\int \frac{dx}{x^p}$  на  $(1, \infty)$  и  $(0, 1)$

- $p \neq 1$ , первообразная для  $\frac{1}{x^p} = x^{-p}$  – это  $\frac{x^{-p+1}}{1-p}$   
 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = \begin{cases} +\infty & p < 1 \\ \frac{1}{p-1} & p > 1 \end{cases}$   
 Если  $p = 1$ , то первообразная для  $\frac{1}{x}$  – это  $\ln x$   
 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x - \ln 1 = +\infty$   
 Итого  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} +\infty & p \leq 1 \\ \frac{1}{p-1} & p > 1 \end{cases}$
- $p \neq 1$ , первообразная  $\frac{x^{1-p}}{1-p} \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_0^1 = \frac{1}{1-p} - \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^{1-p}}{1-p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} & p < 1 \\ +\infty & p > 1 \end{cases}$   
 $p = 1 \Rightarrow$  первообразная  $\ln x \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_0^1 = \ln 1 - \lim_{x \rightarrow 0+} \ln x = +\infty$   
 Итого  $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} & p < 1 \\ +\infty & p \geq 1 \end{cases}$

### Definition 1.19. Сходящийся интеграл

Несобственный интеграл  $\int_a^b f$  называется сходящимся, если  $\lim$  из определения существует и конечен и называется расходящимся в противном случае

### Remark 1.12.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ сходится } \Leftrightarrow p > 1$$
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} \text{ сходится } \Leftrightarrow p < 1$$

### Theorem 1.30. Критерий Коши для сходимости интегралов

$$f \in C[a, b]; \quad -\infty < a < b \leq +\infty$$

$$\text{Тогда } \int_a^{\rightarrow b} f \text{ сходится } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists c \in (a, b) : \forall A, B \in (c, b) \Rightarrow \left| \int_A^B f \right| < \varepsilon$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_a^{\rightarrow b} f \text{ сходится} &\Rightarrow \text{существует конечный } \lim_{y \rightarrow b-} F(y), \text{ где } F - \text{ первообразная } f \\ \forall \varepsilon > 0 &\text{ найдется такая окрестность } (c, b), \text{ что } \forall y \in (c, b) |F(y) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow \text{если } A, B \in (c, b), &\text{ то } |F(A) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } |F(B) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow |F(B) - F(A)| &\leq |F(B) - L| + |L - F(A)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \\ \Leftarrow \text{Пусть } F - \text{ первообразная } f, &\text{ тогда } \forall \varepsilon > 0 \exists c \in (a, b) : \forall A, B \in (c, b) \Rightarrow |F(B) - F(A)| < \varepsilon \\ \text{Но это условие из критерия Коши для } &\lim_{y \rightarrow b-} F(y) \Rightarrow \text{этот предел существует и конечен} \\ \Rightarrow \int_a^{\rightarrow b} f = \lim_{y \rightarrow b-} F(y) - F(a) &\text{ существует и конечен} \end{aligned}$$

### Theorem 1.31. Свойства несобственных интегралов

1. Аддитивность.  $f \in C[a, b]; c \in (a, b)$

$$\text{Тогда } \int_a^b f \text{ сходится } \Leftrightarrow \int_c^b f \text{ сходится и в этом случае } \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

2.  $f \in C[a, b)$ . Если  $\int_a^b f$  сходится, то  $\lim_{B \rightarrow b-} \int_B^b f = 0$

3. Линейность  $f, g \in C[a, b]; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\text{Если } \int_a^b f \text{ и } \int_a^b g \text{ сходятся, то } \int_a^b (\alpha f + \beta g) \text{ сходится и } \int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

4. Монотонность.  $f, g \in C[a, b]; f \leq g$  на  $[a, b)$  и интегралы существуют  $\Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$

5. Интегрирование по частям.  $f, g \in C^1[a, b)$ . Тогда  $\int_a^b f g' = f g|_a^b - \int_a^b f' g$

(если существуют какие-то два предела из трех, то существует и третий и есть равенство)

Доказательство:

1.  $\int_a^B f = \int_a^c f + \int_c^B f$  и переходим к  $\lim_{B \rightarrow b_-} \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
2.  $\int_a^b f = \int_a^B f + \int_B^b f \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^B f - \int_a^B f$  и пишем  $\lim_{B \rightarrow b_-}$
3.  $a < B < b \Rightarrow \int_a^B (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^B f + \beta \int_a^B g$  и переходим к  $\lim_{B \rightarrow b_-}$
4.  $a < B < b$ . Тогда  $\int_a^B f \leq \int_a^B g$  и переходим к  $\lim_{B \rightarrow b_-}$
5.  $a < B < b$ . Тогда  $\int_a^B f g' = f g|_a^B - \int_a^B f' g$  и переходим к  $\lim_{B \rightarrow b_-}$

### Remark 1.13.

Если  $\int_a^b f$  сходится и  $\int_a^b g$  расходится, то  $\int_a^b (f + g)$  расходится

Если бы  $\int_a^b (f + g)$  сходился, то  $\int_a^b g = \int_a^b ((f + g) - f)$  сходится

### Theorem 1.32. Замена переменной в несобственном интеграле

$\varphi : [\alpha, \beta) \rightarrow [a, b)$ ;  $\varphi \in C^1[\alpha, \beta)$  и существует  $\lim_{\gamma \rightarrow \beta_-} \varphi(\gamma) =: c$

$f \in C[a, b)$ . Тогда  $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(x)dx$  (если существует один из интегралов, то существует другой и есть равенство)

Доказательство:

$$F(y) := \int_{\varphi(\alpha)}^y f(x)dx; \quad y \in [a, b)$$

$$\Phi(\gamma) := \int_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)dt; \quad \gamma \in [\alpha, \beta)$$

Тогда  $\Phi(\gamma) = F(\varphi(\gamma))$  по формуле замены переменной в собственном интеграле

1. Пусть существует  $\lim_{y \rightarrow c_-} F(y)$ . Покажем, что существует  $\lim_{\gamma \rightarrow \beta_-} \Phi(\gamma)$

Проверяем по Гейне. Возьмем  $\gamma_n \nearrow \beta \Rightarrow \Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n))$

$$\gamma_n \nearrow \beta \Rightarrow \varphi(\gamma_n) \rightarrow c \Rightarrow \Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)) \rightarrow \lim_{y \rightarrow c_-} F(y) = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(x)dx$$

$$\Rightarrow \lim_{\gamma \rightarrow \beta_-} \Phi(\gamma) = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(x)dx$$

2. Пусть существует  $\lim_{\gamma \rightarrow \beta_-} \Phi(\gamma)$ . Проверим, что тогда  $\exists \lim_{y \rightarrow c} F(y)$ . Тогда по пункту 1 будет

равенство. Если  $c < b$ , то очевидно существует (т.к.  $F$  непрерывно при  $y < b$ )

Считаем, что  $c = b$ . Проверим по Гейне, что  $\exists \lim_{y \rightarrow b_-} F(y)$ . Возьмем  $b_n \nearrow b$ . Можно считать,

что  $b_n \in [\varphi(\alpha), b)$ . Т.е. сколь угодно близко к  $b$  найдутся значения  $\varphi \Rightarrow$  найдется

$$\varphi(\beta_n) > b_n$$

$$\Rightarrow \text{по БК } \exists \gamma_n \in (\alpha, \beta_n) : \varphi(\gamma_n) = b_n \Rightarrow \Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)) = F(b_n)$$

Осталось проверить, что  $\gamma_n$  имеют предел. Предположим, что  $\lim \gamma_n \neq \beta \Rightarrow$  найдется подпоследовательность  $\gamma_{n_k} \rightarrow \tilde{\beta} \neq \beta$   
 $\gamma_n \in [\alpha, \beta) \Rightarrow \gamma_{n_k} \rightarrow \tilde{\beta} < \beta \Rightarrow \varphi$  непрерывна в  $\tilde{\beta}$   
 $b \leftarrow b_{n_k} = \varphi(\gamma_{n_k}) \rightarrow \varphi(\tilde{\beta}) < b$ . Противоречие. Следовательно  $\lim \gamma_n = \beta \Rightarrow \lim \Phi(\gamma_n) = \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma)$ , т.е. он существует

#### Remark 1.14.

$\int_a^b f(x)dx$  заменой  $x = b - \frac{1}{t}$  и  $\varphi(t) = b - \frac{1}{t}$  сводится к  $\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(b - \frac{1}{t}) \frac{dt}{t^2}$   
 То есть точку, где нет непрерывности можно записать на  $\infty$ .  $\varphi(\frac{1}{b-a}) = a$  и  $\varphi(\infty) = b$

#### Theorem 1.33.

$f \in C[a, b)$  и  $f \geq 0$ . Тогда  $\int_a^b f$  всегда определен. Он сходится  $\Leftrightarrow F$  – ограниченная функция на  $[a, b)$

*Доказательство:*

$F(y) := \int_a^y f$ . Если  $y < z$ , то  $F(z) = \int_a^z f = \int_a^y f + \int_y^z f \geq F(y) \Rightarrow F$  нестрого возрастает  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \lim_{y \rightarrow b-} F$  существует и  $\lim_{y \rightarrow b-} F = \sup_{y \in [a, b)} F(y)$

Тогда конечность предела равносильна ограниченности функции  $F$

#### Theorem 1.34. Следствие 1 (признак сравнения)

$f, g \in C[a, b)$ ,  $f, g \geq 0$  и  $f \leq g$ . Тогда

1. Если  $\int_a^b g$  сходится, то  $\int_a^b f$  сходится
2. Если  $\int_a^b f$  сходится, то  $\int_a^b g$  расходится

*Доказательство:*

$F(y) := \int_a^y f, G(y) := \int_a^y g; f \leq g \Rightarrow F(y) \leq G(y)$

1.  $\int_a^b g$  сходится  $\Leftrightarrow G$  – ограничена  $\Rightarrow F$  – ограничена  $\Leftrightarrow \int_a^b f$  сходится
2. Если бы  $\int_a^b g$  сходился, то  $\int_a^b f$  сходится. Противоречие



**Remark 1.15.**

1. Достаточно наличия неравенства  $f \leq g$  при аргументах близких к точке  $b$
2. Неравенство  $f \leq g$  можно заменить на  $f = O(g)$

$f = O(g)$  означает, что  $f \leq Cg$  для некоторого  $C$  и  $\int_a^b Cg = C \int_a^b g$

3. Если  $f = O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$  при  $\varepsilon > 0$ , то  $\int_a^{+\infty} f$  сходится

$g(x) = \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$  и  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\varepsilon}}$  сходится

**Theorem 1.35. Следствие**

$f, g \in C[a, b)$ ;  $f, g \geq 0$  и  $f \overset{x \rightarrow b}{\sim} g$ . Тогда  $\int_a^b f$  и  $\int_a^b g$  ведут себя одинаково

*Доказательство:*

$f \sim g \Rightarrow f = \varphi g$ , где  $\lim_{x \rightarrow b-} \varphi(x) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \varphi(x) \leq 2$  при  $x$  близких к  $b$

$\frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq 2g(x)$  при  $x$  близких к  $b \Rightarrow f = O(g)$  и  $g = O(f)$  в окрестности  $b$

**Remark 1.16.**

Если  $f \geq 0$  и  $\int_a^{+\infty} f$  сходится, то не обязательно  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

**Definition 1.20. Абсолютная сходимость**

$f \in C[a, b)$   
 $\int_a^b f$  абсолютно сходится, если  $\int_a^b |f| < +\infty$

**Theorem 1.36.**

Если  $\int_a^b f$  абсолютно сходится, то  $\int_a^b f$  сходится

*Доказательство:*

$0 \leq f_{\pm} \leq |f|$ . Признак сравнения:  $\int_a^b |f|$  сходится  $\Rightarrow \int_a^b f_{\pm}$  сходится  $\Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b f_+ - \int_a^b f_-$  сходится

**Remark 1.17.**

Бывают интегралы, которые сходятся, но не абсолютно

### Exercise 1.1.

Что делать, если несколько точек, где нет непрерывности? Пусть отрезок  $[a, b]$  нарезан на куски, т.е.  $[a, b] = [a, c_1] \cup [c_1, c_2] \cup \dots \cup [c_n, b]$  (где в  $c_i$  нет непрерывности). Добавим в каждый полученный отрезок по точке  $d_i$

Итого подряд идут точки типа  $a, d_1, c_1, d_2, c_2 \dots d_n, c_n, d_{n+1}, b$

$\int_a^b f$  сходится означает, что  $\int_a^{d_1}, \int_{d_1}^{c_1}, \int_{c_1}^{d_2}, \dots, \int_{d_{n+1}}^b$  сходятся

### Theorem 1.37. Признак Дирихле

$f, g \in C[a, +\infty)$

1.  $f$  имеет ограниченную первообразную на  $[a, +\infty)$  (т.е.  $F(x) := \int_a^x f$  ограничена)
2.  $g$  монотонна
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

Тогда  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$  сходится

*Доказательство (для случая, когда  $g \in C^1[a, +\infty)$ ):*

Хотим доказать, что  $H(x) := \int_a^x fg$  имеет конечный предел при  $x \rightarrow +\infty$

$H(x) = \int_a^x F'g = Fg|_a^x - \int_a^x Fg'$ . Проверим, что существует конечный предел

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)g(x) = 0$ , т.к.  $F$  ограничена и  $g$  — бесконечно малая

Осталось доказать, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x Fg'$  существует и конечен, т.е. что  $\int_a^{+\infty} Fg'$  сходится

Проверим, что он абсолютно сходится, т.е.  $\int_a^{+\infty} |Fg'| < +\infty$

$F$  — ограничена  $\Rightarrow \exists M : |F(x)| \leq M \forall x \Rightarrow |Fg'| \leq M|g'|$ . По признаку сравнения достаточно проверить, что  $\int_a^{+\infty} |g'|$  сходится. Из монотонности  $g$  следует, что  $g'$  фиксированного знака,

поэтому надо проверить, что  $\int_a^{+\infty} g'$  сходится

$\int_a^{+\infty} g' = g|_a^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - g(a) = -g(a) < +\infty$

**Theorem 1.38. Признак Абеля**

$f, g \in C[a, +\infty)$

1.  $\int_a^{+\infty} f$  сходится
2.  $g$  монотонна
3.  $g$  ограничена

Тогда  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$  сходится

*Доказательство:*

Монотонная ограниченная функция имеет конечный предел  $b := \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$\tilde{g}(x) := g(x) - b$  — монотонная и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{g}(x) = 0$

$F(x) := \int_a^x f$ . По условию  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \int_a^{+\infty} f$  существует и конечен  $\Rightarrow F$  локально ограничена, т.е. при  $x \geq K$   $|F(x)| \leq M$

Но на отрезке  $[a, K]$  функция  $F$  непрерывна  $\Rightarrow$  ограничена

$\Rightarrow f$  и  $\tilde{g}$  удовлетворяют условиям признака Дирихле  $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f\tilde{g}$  сходится

$\int_a^{+\infty} f = \int_a^{+\infty} f(\tilde{g} + b) = \int_a^{+\infty} f\tilde{g} + b \int_a^{+\infty} f$  сходится как сумма двух сходящихся

**Theorem 1.39. Следствие**

$f, g \in C[a, +\infty)$ ,  $f$  — периодична с периодом  $T$ ,  $g$  — монотонна и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

1. Если  $\int_a^{+\infty} |g|$  сходится, то  $\int_a^{+\infty} fg$  сходится абсолютно
2. Если  $\int_a^{+\infty} |g|$  расходится, то  $\int_a^{+\infty} fg$  сходится  $\Leftrightarrow \int_a^{a+T} f = 0$

*Доказательство:*

1.  $f$  непрерывна на  $[a, a+T]$   $\Rightarrow$  ограничена на  $[a, a+T]$   $\Rightarrow$  ограничена, т.к. периодична

$fg = O(g) \Rightarrow \int_a^{+\infty} fg$  абсолютно сходится по признаку сравнения

2.  $\Leftarrow \int_a^{a+T} f = 0$ , тогда  $F(x) := \int_a^x f$  — ограниченная функция

Проверим, что  $F$  периодична с периодом  $T$

$F(x+T) = \int_a^{x+T} f = \int_a^{a+T} f + \int_{a+T}^{x+T} f = 0 + \int_a^x f = F(x) \Rightarrow F$  ограничена  $\Rightarrow$  принцип Дирихле

$\Rightarrow$  Пусть  $\int_a^{a+T} f = b \neq 0$ . Тогда  $\int_a^{a+T} (f - \frac{b}{T}) = 0 \Rightarrow \int_a^{+\infty} (f - \frac{b}{T})g$  сходится

$\int_a^{+\infty} fg = \int_a^{+\infty} (f - \frac{b}{T})g + \frac{b}{T} \int_a^{+\infty} g$ . Первое сходится, второе расходится  $\Rightarrow \int_a^{+\infty} fg$  расходится

**Example 1.12.**

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$$

$$p > 1 \quad \left| \frac{\sin x}{x^p} \right| \leq \frac{1}{x^p}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ сходится} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \text{ сходится абсолютно по признаку сравнения}$$

$$p > 0 \quad \sin - \text{периодическая функция с периодом } 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$$

$$f(x) = \sin x; \quad g(x) = \frac{1}{x^p} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ монотонно} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \text{ сходится}$$

$$\text{А что с абсолютной сходимостью?} \quad \int_0^{2\pi} |\sin x| dx > 0$$

$$f(x) = |\sin x|; \quad g(x) = \frac{1}{x^p} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ монотонно}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} - \text{расходится} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx \text{ расходится} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \text{ не имеет абсолютной сходимости}$$

$$p \leq 0 \quad \text{Рассмотрим отрезок } [2\pi k + \frac{\pi}{6}, 2\pi k + \frac{5\pi}{6}]. \text{ На нем } \sin x \geq \frac{1}{2}$$

$$\int_{2\pi k + \frac{\pi}{6}}^{2\pi k + \frac{5\pi}{6}} \frac{\sin x}{x^p} dx \geq \frac{1}{2} \int_{2\pi k + \frac{\pi}{6}}^{2\pi k + \frac{5\pi}{6}} \frac{dx}{x^p} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot (2\pi k + \frac{\pi}{6})^{-p} \geq \frac{\pi}{3} - \text{противоречие с условием}$$

$$\text{критерия Коши, значит } \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \text{ расходится}$$

**Remark 1.18.**

В признаках Абеля и Дирихле нельзя отказаться от монотонности  $g$

$$f(x) = \sin x; \quad g(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$\left| \int_1^x \sin x dx \right| = |\cos 1 - \cos x| \leq 2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

$$\int_1^{+\infty} fg = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \pi > 0; \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} - \text{расходится}$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx \text{ расходится}$$

## 2 Анализ в метрических пространствах

### 2.1 §1. Метрические пространства

#### Definition 2.1. Метрика

$X$  – множество.  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  – метрика (расстояние)

1.  $\rho(x, y) \geq 0$  и  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. Неравенство треугольника:  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

#### Definition 2.2. Метрическое пространство

$(X, \rho)$  – метрическое пространство

#### Example 2.1.

1. Дискретная метрика (метрика лентяя)  $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$
2.  $X = \mathbb{R}$ ;  $\rho(x, y) = |x - y|$
3.  $X = \mathbb{R}^2$ ;  $\rho$  – расстояние на плоскости
4.  $X = \mathbb{R}^d$ ;  $p \geq 1$  и  $\rho(x, y) = (|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p + \dots + |x_d - y_d|^p)^{\frac{1}{p}}$   
Неравенство треугольника – это неравенство Минковского
5. Частный случай 4.  $X = \mathbb{R}^2$ ;  $\rho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$  – Манхэттенское расстояние
6. Французская железнодорожная метрика  $X = \mathbb{R}^2$   
 $\rho(A, B)$  = длина отрезка  $AB$   
 $\rho(C, D) = CP + PD$   
Тут красивый рисуночек, типа чтоб проехать из города в другой оч часто надо заехать в  $P$  – пАрИж
7. Метрика Хемминга  $a_1, a_2 \dots a_n$  слова из  $n$  букв  
 $\rho(A, B)$  = количество разрядов, в которых  $A$  и  $B$  различаются
8.  $X = C[a, b]$ ;  $\rho(f, g) := \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$  – равномерная метрика
9.  $X = C[a, b]$ ;  $\rho(f, g) := \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$  – метрика в  $L_1$

#### Definition 2.3. Шар

$(X, \rho)$  – метрическое пространство,  $r > 0$ ,  $a \in X$

Открытый шар радиуса  $r$  с центром в точке  $a$

$$B_r(a) := \{x \in X : \rho(x, a) < r\}$$

$$\text{Замкнутый шар } \overline{B}_r(a) := \{x \in X : \rho(x, a) \leq r\}$$

### Theorem 2.1. Свойства

1.  $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min(r_1, r_2)}(a)$   
 $B_{r_1}(a) \cup B_{r_2}(a) = B_{\max(r_1, r_2)}(a)$
2. Если  $a \neq b$ , то найдется  $r > 0 : \overline{B_r}(a) \cap \overline{B_r}(b) = \emptyset$

Доказательство:

2. Возьмем  $r = \frac{\rho(a, b)}{3} > 0$ . Пусть  $\overline{B_r}(a) \cap \overline{B_r}(b) \neq \emptyset$ , т.е. найдется  $x \in \overline{B_r}(a)$  и  $x \in \overline{B_r}(b) \Rightarrow \rho(a, b) \leq \rho(a, x) + \rho(x, b) \leq r + r = \frac{2}{3}\rho(a, b)$  – противоречие

### Definition 2.4. Открытое множество

$U \subset X$  – открытое множество, если  $\forall a \in U$  найдется  $B_r(a) \subset U$

### Theorem 2.2. Свойства

1.  $\emptyset$  и  $X$  – открытые множества
2. Объединение любого количества открытых множеств – открытое множество
3. Пересечение конечного количества открытых множеств – открытое множество
4. Открытый шар – открытое множество

Доказательство:

1. Очевидно
2. Пусть  $U_\alpha$  – открытые при  $\alpha \in I$ . Докажем, что  $U := \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$  – открытое  
 Возьмем  $a \in U \Rightarrow a \in U_{\alpha_0}$  для некоторого  $\alpha_0$ , но  $U_{\alpha_0}$  – открытое  $\Rightarrow \exists r > 0 : B_r(a) \subset U_{\alpha_0} \subset U$
3. Пусть  $U_1, U_2 \dots U_n$  открытые. Докажем, что  $U := \bigcap_{k=1}^n U_k$  – открытое  
 Возьмем  $a \in U \Rightarrow a \in U_k \forall k \in 1 \dots n$ .  $U_k$  – открытое  $\Rightarrow \exists r_k > 0 : B_{r_k}(a) \subset U_k$   
 Возьмем  $r := \min(r_1, r_2 \dots r_n) > 0 \Rightarrow B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset U_k \Rightarrow B_r(a) \subset U = \bigcap_{k=1}^n U_k$
4.  $B_R(a)$  – открытое множество  
 Возьмем  $x \in B_R(a) \Rightarrow \rho(x, a) < R$  и положим  $r := R - \rho(x, a) > 0$   
 Проверим, что  $B_r(x) \subset B_R(a)$ . Возьмем  $y \in B_r(x)$  и проверим, что  $y \in B_R(a)$   
 $y \in B_r(x) \Rightarrow \rho(y, x) < r = R - \rho(x, a) \Rightarrow \rho(y, a) \leq \rho(y, x) + \rho(x, a) < r + \rho(x, a) = R$

### Remark 2.1.

В 3 существенно, что множеств конечное число

### Example 2.2.

$X = R; \rho(x, y) = |x - y|; U_n := (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$  – открытые множества  
 $\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n = \{0\}$  – не открытое

### Definition 2.5. Внутренняя точка

$(X, \rho)$  – метрическое пространство,  $A \subset X$ ,  $a \in A$   
 $a$  – внутренняя точка множества  $A$ , если  $\exists r > 0 : B_r(a) \subset A$

### Remark 2.2.

Открытое множество – множество, все точки которого внутренние

### Definition 2.6. Внутренность множества

$(X, \rho)$  – метрическое пространство,  $A \subset X$   
Внутренность множества – все внутренние точки множества  
**Обозначение:**  $\text{Int } A$  (иногда  $A^\circ$ )

### Theorem 2.3. Свойства

1.  $\text{Int } A \subset A$
2.  $\text{Int } A$  – объединение всех открытых множеств, содержащихся в  $A$
3.  $\text{Int } A$  – открытое множество
4.  $A$  – открытое  $\Leftrightarrow A = \text{Int } A$
5.  $A \subset B \Rightarrow \text{Int } A \subset \text{Int } B$
6.  $\text{Int}(\text{Int } A) = \text{Int } A$
7.  $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B$

*Доказательство:*

1. Очев
2. Хотим  $\text{Int } A = \bigcup_{G \subset A} G$ , где  $G$  – открытое  
 $\subset$  Возьмем  $a \in \text{Int } A \Rightarrow a$  – внутренняя точка  $\Rightarrow \exists r > 0 : B_r(a) \subset A$ , но  $B_r(a)$  – открытое множество  $\Rightarrow B_r(a)$  присутствует среди множеств из объединения  
 $\supset$  Пусть  $a \in U \Rightarrow \exists G$  – открытое  $\subset A : a \in G \Rightarrow \exists r > 0 : B_r(a) \subset G \subset A \Rightarrow a$  – внутренняя точка
3. По пункту 2  $\text{Int } A$  – объединение открытых множеств  $\Rightarrow \text{Int } A$  – открытое
4.  $\Leftarrow$  т.к.  $\text{Int } A$  – открытое  
 $\Rightarrow A$  – открытое  $\Rightarrow$  все точки внутренние  $\Rightarrow$  все лежат в  $\text{Int } A \Rightarrow A = \text{Int } A$
5. Если  $a$  – внутренняя точка для  $A$ , то и для  $B$  тоже, т.к.  $A \subset B$
6.  $3 + 4 = 6$

### Exercise 2.1.

1. Доказать пункт 7
2. Придумать пример, когда  $\text{Int}(A \cup B) \neq \text{Int } A \cup \text{Int } B$

### Definition 2.7. Замкнутое множество

Замкнутое множество – множество, дополнение которого открыто  
 $A$  замкнуто  $\Leftrightarrow X \setminus A$  открыто

### Theorem 2.4. Свойства замкнутых множеств

1.  $\emptyset$  и  $X$  – замкнутые множества
2. Пересечение любого количества замкнутых множеств – замкнутое множество
3. Объединение конечного количества замкнутых множеств – замкнутое множество
4. Замкнутый шар – замкнутое множество

Доказательство:

1. Очевидно, ничего писать не буду
2.  $F_\alpha$  – замкнутые  $\Rightarrow X \setminus F_\alpha$  – открытые  $\Rightarrow \bigcup X \setminus F_\alpha = X \setminus \bigcap F_\alpha$  – открытое  $\Rightarrow \bigcap F_\alpha$  – замкнутое
3.  $F_1 \dots F_n$  – замкнутые  $\Rightarrow X \setminus F_k$  – открытые  $\Rightarrow \bigcap X \setminus F_k = X \setminus \bigcup F_k$  – открытое  $\Rightarrow \bigcup F_k$  – замкнутое
4.  $\overline{B}_R(a)$  – замкнутое множество  $\Leftrightarrow X \setminus \overline{B}_R(a) = \{x \in X : \rho(x, a) > R\}$  – открытое  
Возьмем  $r := \rho(x, a) - R$  и проверим, что  $B_r(x) \subset X \setminus \overline{B}_R(a)$   
 $x \notin \overline{B}_R(a)$ , т.е.  $B_r(x) \cap \overline{B}_R(a) = \emptyset$   
Предположим противное, тогда  $\exists y \in B_r(x)$  и  $y \in \overline{B}_R(a) \Rightarrow \rho(x, y) < r$  и  $\rho(y, a) \leq R \Rightarrow \rho(x, a) \leq \rho(x, y) + \rho(y, a) < r + R = \rho(x, a) \text{ ???}$

### Definition 2.8. Замыкание множества

Замыкание множества  $A$  – пересечение всех замкнутых множеств, содержащих  $A$   
Обозначение  $\text{Cl } A$  или  $\overline{A}$

### Theorem 2.5.

$$X \setminus \text{Cl } A = \text{Int}(X \setminus A) \text{ и } X \setminus \text{Int } A = \text{Cl}(X \setminus A)$$

Доказательство:

Докажем, что  $X \setminus \text{Cl } A = \text{Int}(X \setminus A)$

- $\subset$  Пусть  $x \in X \setminus \text{Cl } A \Rightarrow x \notin \text{Cl } A \Rightarrow x \notin F$ , где  $F$  – некоторое замкнутое множество, содержащее  $A \Rightarrow x \in X \setminus F$  – открытое и  $X \setminus F \subset X \setminus A \Rightarrow x \in \text{Int}(X \setminus A)$
- $\supset$  Пусть  $x \in \text{Int}(X \setminus A) \Rightarrow x \in G$ , где  $G$  – открытое, содержащееся в  $X \setminus A \Rightarrow x \notin X \setminus G$  – замкнутое и  $X \setminus G \supset X \setminus (X \setminus A) = A \Rightarrow x \notin \text{Cl } A \Rightarrow x \in X \setminus \text{Cl } A$

### Theorem 2.6. Свойства замыкания

1.  $\text{Cl } A \supset A$
2.  $\text{Cl } A$  – замкнутое множество
3.  $A$  – замкнутое  $\Leftrightarrow A = \text{Cl } A$
4.  $A \subset B \Rightarrow \text{Cl } A \subset \text{Cl } B$
5.  $\text{Cl}(\text{Cl } A) = \text{Cl } A$
6.  $\text{Cl}(A \cup B) = \text{Cl } A \cup \text{Cl } B$

Доказательство:

1. Очевидно
2. Пересечение замкнутых – замкнутое
3.  $A$  – замкнутое  $\Leftrightarrow X \setminus A$  – открытое  $\Leftrightarrow X \setminus A = \text{Int}(X \setminus A) \Leftrightarrow A = \text{Cl } A$
4.  $A \subset B \Rightarrow X \setminus A \supset X \setminus B \Rightarrow \text{Int}(X \setminus A) \supset \text{Int}(X \setminus B) \Rightarrow X \setminus \text{Int}(X \setminus A) \subset X \setminus \text{Int}(X \setminus B) \Rightarrow \text{Cl } A \subset \text{Cl } B$



5.  $2 + 3 = 5$

### Exercise 2.2.

1. Доказать пункт 6
2. Придумать пример, когда  $\text{Cl}(A \cap B) \neq \text{Cl} A \cap \text{Cl} B$
3.  $A, \text{Int} A, \text{Cl} A, \text{Int Cl} A, \text{Cl Int} A, \text{Cl Int Cl} A \dots$   
Какое наибольшее количество различных множеств может получиться?

### Theorem 2.7.

$$x \in \text{Cl} A \Leftrightarrow \forall r > 0 \ B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

Доказательство:

$$x \in \text{Cl} A = X \setminus \text{Int}(X \setminus A) \Leftrightarrow x \notin \text{Int}(X \setminus A) \Leftrightarrow \forall r > 0 \ B_r(x) \not\subset X \setminus A \Leftrightarrow \forall r > 0 \ B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

### Definition 2.9. Окрестность и проколота окрестность

Окрестность точки  $a$  – шарик радиуса  $r > 0$  с центром в точке  $a$

Обозначение  $U_a$

Проколота окрестность –  $\mathring{U}_a = U_a \setminus \{a\}$

### Definition 2.10. Предельная точка

$x$  – предельная точка множества  $A$ , если  $\forall \mathring{U}_x$  содержится точки множества  $A$

Локальное обозначение (примерно на 1 лекцию):  $A'$  – множество предельных точек множества  $A$

### Theorem 2.8. Свойства

1.  $\text{Cl} A = A \cup A'$
2.  $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$
3.  $A$  – замкнутое  $\Leftrightarrow A \supset A'$
4.  $(A \cup B)' = A' \cup B'$

Доказательство:

1.  $x \in \text{Cl} A \Leftrightarrow \forall U_x \ U_x \cap A \neq \emptyset$   
Это так, если  $x \in A$  или  $x \in A'$  (тут  $\mathring{U}_a \cap A \neq \emptyset$ )
2. очев
3.  $A$  – замкнутое  $\Leftrightarrow A = \text{Cl} A \Leftrightarrow A = A \cup A' \Leftrightarrow A \supset A'$
4.  $\supset A \cup B \supset A \Rightarrow (A \cup B)' \supset A'$   
 $\subset$  Возьмем  $x \in (A \cup B)'$  и предположим, что  $x \notin A'$ . Надо доказать, что  $x \in B'$   
 $x \in (A \cup B)' \Rightarrow \forall r > 0 \ \mathring{B}_r(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$   
 $x \notin A' \Rightarrow \exists R > 0 : \mathring{B}_R(x) \cap A = \emptyset \Rightarrow \forall r < R \ \mathring{B}_r(x) \cap A = \emptyset$   
Тогда  $\mathring{B}_r(x) \cap B \neq \emptyset \forall r < R \Rightarrow$  вообще любой  $\mathring{B}_r(x)$  пересекается с  $B \Rightarrow x \in B'$

**Theorem 2.9.**

Следующие условия равносильны

1.  $x \in A'$
2.  $\forall r > 0$   $B_r(x)$  содержит бесконечное количество точек из  $A$
3. Существует последовательность различных точек  $x_n \in A : \rho(x_n, x) \rightarrow 0$
4. Существует последовательность  $x_n \in A : \rho(x_n, x)$  строго убывает и  $\rightarrow 0$

*Доказательство:*

$4 \Rightarrow 3$  очевидно

$3 \Rightarrow 2$  Если  $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$ , то при больших  $n$   $\rho(x_n, x) < r$ , т.е.  $x_n \in B_r(x) \Rightarrow$  в  $B_r(x)$  бесконечное количество точек из  $A$

$2 \Rightarrow 1$  Если  $B_r(x) \cap A$  состоит из бесконечного количества точек, то  $\overset{\circ}{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset$  (множества отличаются на одну точку или совпадают)

$1 \Rightarrow 4$  Рассмотрим  $r = 1$ . В окрестности  $\overset{\circ}{B}_r(x)$  есть точка из  $A$ , назовем ее  $x_1 \neq x$

$r = \frac{1}{2} \rho(x_1, x) < \frac{1}{2}$ . В окрестности  $\overset{\circ}{B}_r(x)$  есть точка из  $A$ , назовем ее  $x_2 \neq x$   
 $\rho(x_2, x) < r < \rho(x_1, x)$

$r = \frac{1}{2} \rho(x_2, x) < \frac{1}{4}$ . В окрестности  $\overset{\circ}{B}_r(x)$  есть точка из  $A$ , назовем ее  $x_3 \neq x$   
 $\rho(x_3, x) < \rho(x_2, x)$  и так далее

$x_1, x_2 \dots \in A, \rho(x_1, x) > \rho(x_2, x) > \dots$  и  $\rho(x_n, x) < \frac{1}{2^n} \Rightarrow \rho(x_n, x) \rightarrow 0$

**Theorem 2.10. Очевидное следствие**

Конечное множество не имеет предельных точек

**Definition 2.11. Подпространство**

$(X, \rho)$  – метрическое пространство  $Y \subset X$

$(Y, \rho|_{Y \times Y})$  – подпространство метрического пространства  $(X, \rho)$

**Theorem 2.11. Об открытых множества в пространстве и подпространстве**

$(X, \rho)$  – метрическое пространство,  $Y \subset X$ . Тогда

1.  $A$  – открыто в  $(Y, \rho) \Leftrightarrow \exists G \subset X$ , открытое в  $(X, \rho) : A = G \cap Y$
2.  $A$  – замкнуто в  $(Y, \rho) \Leftrightarrow \exists F \subset X$ , замкнутое в  $(X, \rho) : A = F \cap Y$

*Доказательство:*

1.  $\Rightarrow A$  открыто в  $(Y, \rho) \Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} B_{r_x}^Y(x)$ , где  $r_x$  – такой радиус, что  $B_{r_x}^Y(x) \subset A$

$$B_{r_x}^Y(x) = \{z \in Y : \rho(z, x) < r_x\} = B_{r_x}^X(x) \cap Y$$

$$\Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} (B_{r_x}^X(x) \cap Y) = Y \cap \bigcup_{x \in A} B_{r_x}^X(x), \text{ где } G := \bigcup_{x \in A} B_{r_x}^X(x) \text{ – открытое в } (X, \rho)$$

как объединение открытых

$$\Leftarrow A = G \cap Y, G \text{ – открытое в } X. \text{ Докажем, что } A \text{ открыто в } Y$$

$$\text{Возьмем } a \in A \subset G \Rightarrow \exists r > 0 : B_r^X(a) \subset G \Rightarrow B_r^Y(a) = B_r^X(a) \cap Y \subset G \cap Y = A$$

2.  $A$  – замкнуто в  $(Y, \rho) \Leftrightarrow Y \setminus A$  – открыто в  $(Y, \rho) \Leftrightarrow \exists G \subset X$  открытое в  $(X, \rho) : Y \setminus A = G \cap Y \Rightarrow Y \cap (X \setminus G) = A$ , где  $X \setminus G$  – замкнутое  $\Leftrightarrow G$  – открытое

### Example 2.3.

$$X = \mathbb{R}, Y = [0, 3)$$

$[0, 1)$  – открыто в  $Y$ , т.к.  $(-1, 1)$  – открыто в  $\mathbb{R}$ , а  $[0, 1) = (-1, 1) \cap Y$

$[2, 3)$  – замкнуто в  $Y$ , т.к.  $[2, 4]$  – замкнуто в  $\mathbb{R}$ , а  $[2, 3) = [2, 4] \cap Y$

### Definition 2.12. Норма

$X$  – векторное пространство.  $\|\cdot\|$  – норма на  $X$ , если

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

1.  $\|x\| \forall x \in X$  и  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$
2.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \forall x \in X \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \forall x, y \in X$  (неравенство треугольника)

### Example 2.4.

1.  $X = \mathbb{R}$ ;  $|x|$  – норма
2.  $X = \mathbb{R}^d$ ;  $\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_d|^p)^{\frac{1}{p}}$  – норма,  $p \geq 1$   
Неравенство треугольника – это неравенство Минковского
3.  $X = C[a, b]$ ;  $\|f\| := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$
4.  $X = C[a, b]$ ;  $\|f\| := \int_a^b |f|$

### Definition 2.13. Скалярное произведение

$X$  – векторное пространство,  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  – скалярное произведение, если

1.  $\langle x, x \rangle \geq 0 \forall x \in X$  и  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$
2.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \forall x, y \in X$
3.  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \forall x, y \in X \forall \alpha \in \mathbb{R}$
4.  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \forall x, y, z \in X$

### Example 2.5.

1.  $X = \mathbb{R}^d$ ;  $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_d y_d$   
 $x = (x_1 \dots x_d)$ ;  $y = (y_1 \dots y_d)$
2.  $X = \mathbb{R}^d$ ;  $w_1, w_2 \dots w_d > 0$   
 $\langle x, y \rangle = w_1 x_1 y_1 + w_2 x_2 y_2 + \dots + w_d x_d y_d$
3.  $X = C[a, b]$ ;  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$

### Theorem 2.12. Свойства

1. Неравенство Коши-Буняковского  
 $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$
2.  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  – норма
3.  $\|\cdot\|$  – норма в  $X \Rightarrow \rho(x, y) := \|x - y\|$  – метрика в  $X$
4.  $\|x - y\| \geq |||x| - |y|||$

Доказательство:

1.  $f(t) := \langle x + ty, x + ty \rangle \geq 0$   
 $f(t) = \langle x, x + ty \rangle + t \langle y, x + ty \rangle = \langle x, x \rangle + t \langle x, y \rangle + t \langle y, x \rangle + t^2 \langle y, y \rangle = t^2 \langle y, y \rangle + 2t \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle$   
 – квадратный трехчлен  
 $\Rightarrow f$  имеет не больше одного корня  $\Rightarrow D \leq 0 \Leftrightarrow (2\langle x, y \rangle)^2 - 4\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0$   
 Сократили на 4 и победили
2.  $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\alpha| \|x\|$   
 Неравенство треугольника:  $\|x + y\| \stackrel{?}{\leq} \|x\| + \|y\|$ , т.е.  $\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$   
 Т.е.  $\langle x + y, x + y \rangle \leq \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle}$   
 Но  $\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$ . После сокращения осталось КБШ
3.  $\|x - y\| \geq 0$  и  $\|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = \vec{0} \Leftrightarrow x = y$   
 $\rho(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1| \cdot \|x - y\| = \rho(x, y)$   
 Неравенство треугольника:  $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$   
 $\|x - y\| + \|y - z\| \geq \|x - y + y - z\| = \|x - z\|$
4. Нужно доказать, что  $-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ 
  - Правое:  
 $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ , т.е.  $\|x - y\| + \|y\| \geq \|x - y + y\| = \|x\|$
  - Левое:  
 $\|x\| - \|y\| \geq -\|x - y\|$ , т.е.  $\|x - y\| + \|x\| = \|y - x\| + \|x\| \geq \|y - x + x\| = \|y\|$

### Exercise 2.3.

Доказать, что норма  $\|\cdot\|$  в векторном пространстве  $X$  порождается некоторым скалярным произведением  $\Leftrightarrow \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

## 2.2 §2. Предел в метрическом пространстве

### Definition 2.14.

$(X, \rho)$  – метрическое пространство,  $x_n \in X$ ;  $a \in X$ .  $\lim x_n = a$ , если

1. Вне любого шара с центром в точке  $a$  содержится лишь конечное число членов последовательности
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \rho(x_n, a) < \varepsilon$
3.  $\lim \rho(x_n, a) = 0$

### Theorem 2.13.

Эти определения равносильны

### Definition 2.15. Ограниченное множество

$A \subset X$ ,  $A$  – ограниченное множество, если оно содержится в каком-то шаре

## Notation 2.1. Свойства пределов

1. Предел единственный  
Т.е. если  $\lim x_n = a$  и  $\lim x_n = b$ , то  $a = b$
2. Если  $\lim x_n \lim y_n = a$ , то предел последовательности, полученной перемешиванием  $x_n$  и  $y_n$  также равен  $a$
3. Если  $\lim x_n = a$ , то последовательность полученная из  $x_n$  перестановкой членов, также стремится к  $a$
4. Если  $\lim x_n = a$ , то предел ее подпоследовательность также равен  $a$
5. Если последовательность имеет предел, то она ограничена как множество
6. Если  $\lim x_n = a$ ;  $\lim y_n = b \Rightarrow \lim \rho(x_n, y_n) = \rho(a, b)$

Доказательство:

1. Пусть  $a \neq b$ . Возьмем  $\varepsilon = \frac{1}{2}\rho(a, b) > 0$   
 $\exists N_1 : \forall n > N_1 \rho(x_n, a) < \varepsilon$  и  $\exists N_2 : \forall n > N_2 \rho(x_n, b) < \varepsilon$   
Возьмем  $n > \max(N_1, N_2) \Rightarrow \rho(a, b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) < 2\varepsilon = \rho(a, b)$
2. Очевидно
3. Еще более очевидно
4. Ссылка на 1 семестр
5. Пусть  $\lim x_n = a$ . Вне  $B_1(a)$  конечное число членов последовательности  $(x_{i_1} \dots x_{i_k})$ .  
 $R := \max\{1, \rho(a, x_{i_1}) \dots \rho(a, x_{i_k})\} \Rightarrow x_n \in \overline{B}_R(a) \forall n$
6.  $\rho(a, b) \leq \rho(x_n, a) + \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, b)$   
 $\rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, a) + \rho(a, b) + \rho(y_n, b)$   
Тогда  $|\rho(a, b) - \rho(x_n, y_n)| \leq \rho(x_n, a) + \rho(y_n, b) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

## Theorem 2.14. Теорема об арифметических действиях с пределами в нормированном пространстве

$X$  – нормированное пространство,  $\lim x_n = a$ ;  $\lim y_n = b$ ;  $a, b, x_n, y_n \in X$ ;  
 $\lim \lambda_n = \mu$ ;  $\lambda_n, \mu \in \mathbb{R}$

Тогда

1.  $\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$
2.  $\lim(\lambda_n x_n) = \mu a$
3.  $\lim \|x_n\| = \|a\|$
4. Если в  $X$  есть скалярное произведение, то  $\lim \langle x_n, y_n \rangle = \langle a, b \rangle$

Доказательство:

1.  $\|(x_n + y_n) - (a + b)\| \leq \|x_n - a\| + \|y_n - b\| \rightarrow 0$
2.  $\|\lambda_n x_n - \mu a\| \leq \|\lambda_n x_n - \mu x_n + \mu x_n - \mu a\| \leq \|\lambda_n x_n - \mu x_n\| + \|\mu x_n - \mu a\| =$   
 $= |\lambda_n - \mu| \cdot \|x_n\| + |\mu| \cdot \|x_n - a\| \rightarrow 0$
3.  $\|x_n\| = \rho(x_n, 0) \rightarrow \rho(a, 0) = \|a\|$
4.  $\langle x_n, y_n \rangle - \langle a, b \rangle = \langle x_n, y_n \rangle - \langle a, y_n \rangle + \langle a, y_n \rangle - \langle a, b \rangle = \langle x_n - a, y_n \rangle + \langle a, y_n - b \rangle$   
 $|\langle x_n, y_n \rangle - \langle a, b \rangle| \leq |\langle x_n - a, y_n \rangle| + |\langle a, y_n - b \rangle| \leq \|x_n - a\| \cdot \|y_n\| + \|a\| \cdot \|y_n - b\| \rightarrow 0$

## Definition 2.16. Покоординатная сходимость в $\mathbb{R}^d$

$x_n = (x_n^{(1)} \dots x_n^{(d)})$ ;  $a = (a^{(1)} \dots a^{(d)})$

$x_n$  покоординатно сходится к  $a$ , если  $\lim x_n^{(k)} = a^{(k)} \forall k = 1 \dots d$

**Theorem 2.15.**

В  $\mathbb{R}^d$  покоординатная сходимость и сходимость по норме совпадают

*Доказательство:*

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|x_n - a\| &= \sqrt{(x_n^{(1)} - a^{(1)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - a^{(d)})^2} \leq |x_n^{(1)} - a^{(1)}| + \dots + |x_n^{(d)} - a^{(d)}| \rightarrow 0 \\ \Leftarrow |x_n^{(k)} - a^{(k)}| &\leq \sqrt{(x_n^{(1)} - a^{(1)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - a^{(d)})^2} = \|x_n - a\| \rightarrow 0 \\ \Rightarrow \lim x_n^{(k)} &= a^{(k)} \end{aligned}$$

**Definition 2.17. Фундаментальная последовательность**

$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n \geq N \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

**Theorem 2.16. Свойства**

1. Сходящаяся последовательность – фундаментальная
2. Фундаментальная последовательность ограничена
3. Если у фундаментальной последовательности есть подпоследовательность, сходящаяся к  $a$ , то сама последовательность тоже сходится к  $a$

*Доказательство:*

1.  $\lim x_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \rho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$  и  $\forall m \geq N \rho(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2}$   
 $\Rightarrow \rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, a) + \rho(a, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
2. Возьмем  $\varepsilon = 1. \exists N : \forall m, n \geq N \rho(x_n, x_m) < 1 \Rightarrow x_n \in B_1(x_N)$  при  $n \geq N$   
 $R := \max\{1, \rho(x_1, x_N) \dots \rho(x_{N-1}, x_N)\} \Rightarrow x_n \in \bar{B}_R(x_N) \forall n$
3. Пусть  $x_{n_k} \rightarrow a$ . Зафиксируем  $\varepsilon > 0$   
 $\exists N : \forall m, n \geq N \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$   
 $\exists K : \forall k \geq K \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$   
 Возьмем  $k = \max\{K, N\}$ . Тогда  $n_k \geq N \Rightarrow \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$  и  $\rho(x_{n_k}, x_n) < \varepsilon \forall n$   
 $\Rightarrow \rho(x_n, a) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < 2\varepsilon$  при  $n \geq N$

**Definition 2.18. Полное метрическое пространство**

$(X, \rho)$  – метрическое пространство

Оно называется полным, если любая фундаментальная последовательность имеет предел

**Example 2.6.**

$R. \rho(x, y) = |x - y|$  – полное метрическое пространство

$\mathbb{Q}$  не полное.  $x_n = \frac{[10^n \pi]}{10^n}$  фундаментальна, но не имеет предела в  $\mathbb{Q}$

**Theorem 2.17.**

$\mathbb{R}^d$  – полное пространство

*Доказательство:*

Пусть  $x_n = (x_n^{(1)} \dots x_n^{(d)})$  – фундаментальная последовательность

Т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n \geq N \|x_n - x_m\| < \varepsilon$

$$\|x_n - x_m\| = \sqrt{(x_n^{(1)} - x_m^{(1)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - x_m^{(d)})^2} \geq |x_n^{(k)} - x_m^{(k)}|$$

Следовательно, числовая последовательность  $x_n^{(k)}$  фундаментальная  $\Rightarrow$  у нее есть предел  $a^{(k)} := \lim x_n^{(k)} \Rightarrow x_n$  покомпонентно сходится к  $a = (a^{(1)} \dots a^{(d)}) \Rightarrow$  сходится по норме

### Remark 2.3.

$(X, \rho)$  – полное метрическое пространство.  $Y \subset X$   
 $(Y, \rho)$  – полное  $\Leftrightarrow Y$  замкнуто

*Доказательство:*

$\Leftarrow y_n$  – фундаментальная последовательность в  $Y \Rightarrow y_n$  фундаментальная в  $X$   
 $\Rightarrow y_n$  имеет предел в  $X$ , т.е.  $b := \lim y_n$  и  $b \in X$   
 $\Rightarrow b$  предельная точка  $Y \Rightarrow b \in Y$ , т.к.  $Y$  замкнуто  
 $\Rightarrow$  Возьмем предельную точку  $b$  множества  $Y \Rightarrow$  найдется  $y_n \in Y : \lim y_n = b \Rightarrow y_n$  фундаментальна в  $X \Rightarrow y_n$  фундаментальна в  $Y \Rightarrow$  у нее есть предел в  $Y$   
т.е.  $\lim y_n = a \in Y \Rightarrow a = b$  по единственности предела

## 2.3 §3. Компактность

### Definition 2.19. Покрытие

$A, B_\alpha. B_\alpha, \alpha \in I$  – покрытие множества  $A$ , если  $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$

### Definition 2.20. Открытое покрытие

Открытое покрытие – покрытие открытыми множествами

### Definition 2.21. Подпокрытие

Подпокрытие какого-то покрытия – из какого-то покрытия выкинули какое-то количество множеств и оно осталось покрытием

### Definition 2.22. Компакт

$K$  – компакт (компактное множество), если из любого покрытия  $K$  открытыми множествами можно извлечь конечное подпокрытие

### Theorem 2.18. Теорема о свойствах компактов

$(X, \rho)$  – метрическое пространство  
1.  $K \subset Y \subset X$ . Тогда  $K$  – компакт в  $(X, \rho) \Leftrightarrow K$  – компакт в  $(Y, \rho)$   
2.  $K$  – компакт  $\Rightarrow K$  – замкнуто и ограничено  
3. Замкнутое подмножество компакта – компакт

Доказательство:

1.  $\Rightarrow K \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ , где  $U_\alpha$  – открыты в  $(Y, \rho)$

Тогда  $\exists G_\alpha$  открытые в  $(X, \rho) : U_\alpha = G_\alpha \cap Y \Rightarrow K \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$  – открытое покрытие в  $(X, \rho) \Rightarrow$  можно выбрать конечное подпокрытие

$K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i} \Rightarrow K = K \cap Y \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i} \cap Y = \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \Rightarrow K$  – компакт в  $(Y, \rho)$

$\Leftarrow K \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ , где  $G_\alpha$  – открыты в  $(X, \rho) \Rightarrow U_\alpha := G_\alpha \cap Y$  – открыты в  $(Y, \rho)$  и

$K \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \Rightarrow$  можно выбрать конечное подпокрытие  $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i} \Rightarrow K$  – компакт в  $(X, \rho)$

2.

Ограниченность. Возьмем  $a \in K$  и рассмотрим покрытие  $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a)$  – открытое покрытие

Выберем конечное подпокрытие  $\Rightarrow K \subset \bigcup_{n=1}^N B_n(a) = B_N(a) \Rightarrow K$  – ограничено

Замкнутость. Надо доказать, что  $X \setminus K$  открыто. Возьмем  $a \in X \setminus K$  и покажем, что для некоторого  $r > 0$   $B_r(a) \subset X \setminus K$

Возьмем такое  $r_x > 0$ , что  $B_{r_x}(x) \cap B_{r_x}(a) = \emptyset$

$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{r_x}(x)$  – открытое покрытие. Выберем конечное подпокрытие  $K \subset \bigcup_{i=1}^n B_{r_{x_i}}(x_i)$

$r := \min\{r_{x_1}, r_{x_2}, \dots, r_{x_n}\} > 0$

Покажем что  $B_r(a) \subset X \setminus K$ , т.е. что  $B_r(a) \cap K = \emptyset$

$B_{r_{x_i}}(a) \cap B_{r_{x_i}}(x_i) = \emptyset \Rightarrow B_r(a) \cap B_{r_{x_i}}(x_i) = \emptyset \Rightarrow B_r(a) \cap \bigcup_{i=1}^n B_{r_{x_i}}(x_i) = \emptyset$

- $K$  – компакт,  $K \supset \tilde{K}$  – замкнуто. Покажем, что  $\tilde{K}$  – компакт. Рассмотрим открытое покрытие  $\tilde{K} \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ , где  $U_\alpha$  – открыты в  $(X, \rho)$

$X \setminus \tilde{K}$  – открыто  $\Rightarrow K \subset (X \setminus \tilde{K}) \cup \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$  – открытое покрытие  $K$  – компакт  $\Rightarrow$  можно выбрать конечное подпокрытие

$\tilde{K} \subset K \subset (X \setminus \tilde{K}) \cup \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \Rightarrow \tilde{K} \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \Rightarrow \tilde{K}$  – компакт

### Theorem 2.19.

$K_\alpha$  – семейство компактов в  $(X, \rho)$  : пересечение любого их конечно количество непусто.

Тогда  $\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha \neq \emptyset$

Доказательство:

Зафиксируем компакт  $K_{\alpha_0}$ . Предположим, что  $\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha = \emptyset$

$K_{\alpha_0} \cap \bigcap_{\alpha \neq \alpha_0} K_\alpha = \emptyset$ , т.е.  $K_{\alpha_0} \subset X \setminus \bigcap_{\alpha \neq \alpha_0} K_\alpha = \bigcup_{\alpha \neq \alpha_0} (X \setminus K_\alpha)$

Это открытое покрытие  $K_{\alpha_0}$ . Выберем конечное подпокрытие

$K_{\alpha_0} \subset \bigcup_{i=1}^n (X \setminus K_{\alpha_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^n K_{\alpha_i} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n K_{\alpha_i} = \emptyset$  – противоречие



**Theorem 2.20. Следствие**

$K_1 \supset K_2 \supset \dots$  – непустые компакты

Тогда  $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$

**Definition 2.23. Секвенциально компактное множество**

$(X, \rho)$  – метрическое пространство  $K \subset X$

$K$  – секвенциально компактное, если из любой последовательности точек множества  $K$  можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к какой-то точке из  $K$

**Remark 2.4.**

Секвенциальный компакт замкнут

**Theorem 2.21.**

Всякое бесконечное подмножество компакта имеет предельную точку

*Доказательство:*

$K$  – компакт,  $A \subset K$  – бесконечное подмножество

Предположим, что  $A' = \emptyset \Rightarrow A$  – замкнуто  $\subset K \Rightarrow A$  – компакт

Возьмем  $a \in A$ , она не предельная  $\Rightarrow \exists r_a > 0 : \overset{\circ}{B}_{r_a}(a) \cap A = \emptyset \Rightarrow B_{r_a}(a) \cap A = \{a\}$

Рассмотрим открытое покрытие  $A \subset \bigcup_{a \in A} B_{r_a}(a)$ . Из этого покрытия нельзя выкинуть ни одно из множеств  $\Rightarrow$  нельзя выбрать конечное подпокрытие. Противоречие

**Theorem 2.22. Следствие**

Компактность  $\Rightarrow$  секвенциальная компактность

*Доказательство:*

$K$  – компакт,  $\{x_n\}$  – последовательность точек из  $K$

$D := \{x_1, x_2, x_3 \dots\}$

Если  $\#D < +\infty$ , то какой-то член последовательности повторяется бесконечное число раз. Возьмем его в качестве подпоследовательности

Если  $\#D = +\infty$ , то по теореме у  $D$  есть предельная точка  $\Rightarrow$  найдутся различные  $y_n \in D : \lim y_n = a$  – предельная точка

Переставим члены последовательности  $y_n$  и получим подпоследовательность.  $a \in K$ , т.к.  $K$  – замкнуто

**Theorem 2.23.**

$K$  – компакт (секвенциальный компакт) в  $(X, \rho) \Rightarrow (K, \rho)$  – полное

*Доказательство:*

$x_n \in K$  фундаментальная последовательность.  $K$  – секвенциальный компакт  $\Rightarrow$  в ней можно выбрать сходящуюся подпоследовательность  $\Rightarrow$  у  $x_n$  есть предел

**Definition 2.24. Эпсилон-сеть**

$A \in X$ ,  $(X, \rho)$  – метрическое пространство,  $\varepsilon > 0$   
 $E \subset A$  –  $\varepsilon$ -сеть, если  $\forall a \in A \exists e \in E : \rho(a, e) < \varepsilon$

**Remark 2.5.**

Здесь написано, что  $A \subset \bigcup_{e \in E} B_\varepsilon(e)$

**Definition 2.25. Конечная эпсилон-сеть**

$E$  – конечное множество и  $\varepsilon$ -сеть  $\Rightarrow E$  – конечная  $\varepsilon$ -сеть для  $A$

**Definition 2.26. Вполне ограниченное множество**

$A$  – вполне ограниченное, если  $\forall \varepsilon > 0$  в множестве  $A$  есть конечная  $\varepsilon$ -сеть

**Theorem 2.24. Свойства**

1. Вполне ограниченность  $\Rightarrow$  ограниченность
2. В  $\mathbb{R}^d$  верно и обратное

*Доказательство:*

1.  $\varepsilon = 1$ . Возьмем конечную  $\varepsilon$ -сеть  $x_1 \dots x_n$ .  $R := 1 + \max_{k \neq 1}(\rho(x_1, x_k))$

$$\overline{B}_R(x_1) \supset A$$

Берем  $y \in A \Rightarrow \exists x_i : \rho(x_i, y) \leq 1 \Rightarrow \rho(x_1, y) \leq \rho(x_1, x_i) + \rho(x_i, y) \leq R$

2.  $A$  – ограниченное в  $\mathbb{R}^d \Rightarrow A \subset B_R(0) \subset [-R; R]^d$

Нарежем каждую сторону на  $n$  частей. Получим  $n^d$  кубиков, сторона которых  $\frac{2R}{n}$ . Если наше множество  $A$  пересекается с каким-то кубиком, то выбираем в нем произвольную точку, в остальных не берем вообще ничего

Получили  $\frac{2R}{n} \sqrt{d}$ -сеть

**Theorem 2.25.**

Секвенциальная компактность  $\Rightarrow$  вполне ограниченность

*Доказательство:*

От противного. Пусть для  $\varepsilon > 0$  в множестве  $A$  не нашлось конечной  $\varepsilon$ -сети. Возьмем  $x_1 \in A \Rightarrow x_1$  – не  $\varepsilon$ -сеть  $\Rightarrow$  найдется  $x_2 \in A : \rho(x_1, x_2) > \varepsilon \Rightarrow x_1, x_2$  – не  $\varepsilon$ -сеть  $\Rightarrow$  найдется  $x_3 \in A : \rho(x_1, x_3) > \varepsilon$  и  $\rho(x_2, x_3) > \varepsilon$  и так далее

На  $n$  шаге:  $x_1 \dots x_n$  – не  $\varepsilon$ -сеть  $\Rightarrow$  найдется  $x_{n+1} \in A : \rho(x_k, x_{n+1}) > \varepsilon \forall k \leq n$

Построили последовательность  $x_n$ . Выберем сходящуюся подпоследовательность  $x_{n_k} \Rightarrow$  она фундаментальна. Но это не так,  $\rho(x_{n_i}, x_{n_j}) > \varepsilon$

**Theorem 2.26. Теорема Хаусдорфа**

Если  $K$  вполне ограничено и  $(K, \rho)$  – полное  $\Rightarrow K$  – компакт

*Доказательство:*

$K \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ ,  $U_\alpha$  – открытые. Пусть нельзя выделить конечное подпокрытие

$\varepsilon = 1$ . Существует конечная 1-сеть  $S_1 \Rightarrow K \subset \bigcup_{x \in S_1} \overline{B}_1(x)$

Для какого-то из множеств  $K \cap \overline{B}_1(x)$ ,  $x \in S_1$  нельзя выделить конечное подпокрытие. Возьмем одно такое и назовем его  $A_1$

Существует конечная  $\frac{1}{2}$ -сеть  $S_2 \Rightarrow A_1 \subset K \subset \bigcup_{x \in S_2} \overline{B}_{\frac{1}{2}}(x)$

Для какого-то из множеств  $A_1 \cap \overline{B}_{\frac{1}{2}}(x)$ ,  $x \in S_2$  нельзя выделить конечное подпокрытие. Возьмем одно такое и назовем его  $A_2$  и так далее

На  $n$  шаге: существует конечная  $\frac{1}{n}$ -сеть  $S_n \Rightarrow A_{n-1} \subset K \subset \bigcup_{x \in S_n} \overline{B}_{\frac{1}{n}}(x)$

Для какого-то из множеств  $A_{n-1} \cap \overline{B}_{\frac{1}{n}}(x)$ ,  $x \in S_n$  нельзя выделить конечное подпокрытие. Возьмем одно такое и назовем его  $A_n$

$K \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$ ;  $A_n = A_{n-1} \cap \overline{B}_{\frac{1}{n}}(x_n)$

Проверим, что  $x_1, x_2, \dots$  фундаментальная. Возьмем  $k > n \Rightarrow$  найдется  $y \in A_k \Rightarrow y \in \overline{B}_{\frac{1}{k}}(x_k)$

и  $y \in \overline{B}_{\frac{1}{n}}(x_n) \Rightarrow \rho(x_k, x_n) \leq \rho(x_k, y) + \rho(y, x_n) < \frac{1}{k} + \frac{1}{n} < \frac{2}{n}$  – фундаментальная, значит  $\exists \lim x_n = x_* \in K \Rightarrow$  найдется  $U_{\alpha_0} \ni x_* \Rightarrow \exists r > 0$   $x_* \in B_r(x_*) \subset U_{\alpha_0}$

$\lim x_n = x_* \Rightarrow \exists N : \forall n > N$   $\rho(x_n, x_*) < \frac{r}{2}$ . А еще  $A_n \subset \overline{B}_{\frac{1}{n}}(x_n) \subset \overline{B}_{\frac{1}{n} + \frac{r}{2}}(x_*) \subset \overline{B}_r(x_*)$  при  $n > \frac{2}{r}$

### Theorem 2.27. Следующие условия равносильны

1.  $K$  – компакт
2.  $K$  – секвенциальный компакт
3.  $K$  – вполне ограниченное и  $(K, \rho)$  – полное

### Theorem 2.28.

$(X, \rho)$  – полное метрическое пространство. Следующие условия равносильны

1.  $K$  – компакт
2.  $K$  – секвенциальный компакт
3.  $K$  – замкнуто и вполне ограничено

*Доказательство:*

Если  $(X, \rho)$  – полное, то  $K$  – замкнуто  $\Leftrightarrow (K, \rho)$  – полное, тогда третьи строчки из двух предыдущих теорем – одно и то же

### Theorem 2.29. Характеристика компакта в $\mathbb{R}^d$

$K \in \mathbb{R}^d$ , следующие условия равносильны

1.  $K$  – компакт
2.  $K$  – секвенциальный компакт
3.  $K$  – замкнуто и ограничено

### Лемма 2.1. Лемма Лебега

$K$  – компакт,  $K \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$  – открытое

Тогда  $\exists r > 0 : \forall x \in K$  шар  $B_r(x)$  целиком покрывается каким-то  $U_\alpha$

*Доказательство:*

$\forall x \in K$   $x$  покрыта каким-то  $U_{\alpha_0}$  – открытое  $\Rightarrow \exists r_x > 0 : B_{r_x}(x) \subset U_{\alpha_0}$

Рассмотрим покрытие  $K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\frac{r_x}{2}}(x)$ . Выделим конечное подпокрытие  $K \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\frac{r_{x_i}}{2}}(x_i)$

$r := \min\{\frac{r_1}{2}, \frac{r_2}{2} \dots \frac{r_n}{2}\}$  подходит. Возьмем  $y \in K$ . Хотим доказать, что  $B_r(y) \subset B_{r_{x_i}}(x_i)$  для некоторой  $i$

Возьмем  $z \in B_r(y)$ ,  $\rho(y, z) < r \leq \frac{r_{x_i}}{2}$ ,  $y \in K \Rightarrow y \in B_{\frac{r_{x_i}}{2}}(x_i)$  для некоторого  $i \Rightarrow \rho(y, x_i) < \frac{r_{x_i}}{2}$

$\rho(z, x_i) \leq \rho(z, y) + \rho(y, x_i) < r_{x_i}$

## 2.4 §4. Непрерывные отображения

### Definition 2.27. Непрерывность функции в точке

$(X, \rho)$  и  $(Y, \rho)$  – метрические пространства.  $E \subset X$ ;  $f : E \rightarrow Y$ ;  $a \in E$

$f$  – непрерывна в  $a$ , если

1.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B_\delta(a) \cap E) \subset B_\varepsilon(f(a))$
3. Для любой последовательности  $x_n \in E : \lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = f(a)$

### Theorem 2.30.

Эти определения равносильны

### Exercise 2.4.

Докажите

### Definition 2.28. Предел функции в точке

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , если

1.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E, x \neq a \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon$
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(\overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E) \subset B_\varepsilon(b)$
3. Для любой последовательности  $x_n \in E, x_n \neq a : \lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = b$

### Theorem 2.31. Критерий Коши

$a$  – предельная точка  $E$ . Существование предела  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :$

$$\begin{cases} \forall \rho(x, a) < \delta \\ \forall \rho(y, a) < \delta \\ x, y \neq a \end{cases} \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Доказательство:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Rightarrow \exists \delta > 0 : \begin{cases} \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), b) < \frac{\varepsilon}{2} \\ \rho_X(y, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(y), b) < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

$\Leftarrow$  Проверим определение по Гейне. Берем  $x_n \rightarrow a$

$$\exists N : \forall n \geq N \rho_X(x_n, a) < \delta \Rightarrow \forall m, n \geq N \begin{cases} \rho_X(x_n, a) < \delta \\ \rho_X(x_m, a) < \delta \end{cases} \Rightarrow \rho_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$$

Т.е.  $f(x_n)$  – фундаментальная последовательность  $\Rightarrow$  у нее есть предел

### Theorem 2.32. Арифметические действия с пределами

$f, g : E \rightarrow Y$  – нормированное пространство,  $a$  – предельная точка  $E$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B, \lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) = \mu$ . Тогда:

1.  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) f(x) = \mu A$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} \|f(x)\| = \|A\|$
4. Если в  $Y$  есть скалярное произведение, то  $\lim_{x \rightarrow a} \langle f(x), g(x) \rangle = \langle A, B \rangle$
5. Если  $Y = \mathbb{R}$  и  $B \neq 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

Доказательство:

Смотрим на определение по Гейне

### Theorem 2.33. Теорема о непрерывности композиции

$D \subset X; f : D \rightarrow Y; f(D) \subset E; g : E \rightarrow Z; a \in D$

$f$  – непрерывна в точке  $a$ ,  $g$  – непрерывна в точке  $f(a)$ . Тогда  $g \circ f$  непрерывна в  $a$

Доказательство:

Гейне. Берем  $x_n \in E : x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a) \Rightarrow g(f(x_n)) \rightarrow g(f(a))$

### Theorem 2.34. Характеристика непрерывных в терминах открытых множеств

$f : X \rightarrow Y$ . Тогда следующие условия равносильны

1.  $f$  – непрерывна в точке  $a$
2. Для любого  $U \subset Y$  открытого  $f^{-1}(U) := \{x \in X : f(x) \in U\}$  – открыто

Доказательство:

- 1  $\Rightarrow$  2 Возьмем  $U$  – открытое. Проверим, что  $f^{-1}(U)$  – открыто  
 Возьмем  $a \in f^{-1}(U) \Rightarrow f(a) \in U$  – открытым  $\Rightarrow \varepsilon > 0 B_\varepsilon(f(a)) \subset U$   
 $f$  – непрерывна в точке  $a$ . Возьмем  $\delta > 0$  из определения непрерывности  $f$  в точке  $a$   
 $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \subset U \Rightarrow B_\delta(a) \subset f^{-1}(U) \Rightarrow a$  – внутренняя точка  $f^{-1}(U) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow f^{-1}(U)$  – открыто
- 2  $\Rightarrow$  1 Возьмем  $a \in X$  и докажем, что  $f$  – непрерывна в точке  $a$   
 Возьмем  $\varepsilon > 0$  и рассмотрим  $U = B_\varepsilon(f(a))$  – открытое  $\Rightarrow a \in f^{-1}(U)$  – открытое  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \exists \delta > 0 : B_\delta(a) \subset f^{-1}(U) \Rightarrow f(B_\delta(a)) \subset U = B_\varepsilon(f(a))$

**Theorem 2.35.**

Непрерывный образ компакта – компакт

*Доказательство:*

$f : K \rightarrow Y$ ;  $K$  – компакт.  $f$  непрерывна во всех точках  $\Rightarrow f(K)$  – компакт

Рассмотрим покрытие  $f(K) \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$  – открытое  $\Rightarrow K \subset f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(U_\alpha)$  – открытое

Выделим конечное подпокрытие  $K \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_{\alpha_i}) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}) \Rightarrow f(K) \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$

**Definition 2.29. Ограниченная функция**

$f : E \rightarrow Y$  – ограничена если  $f(E)$  – ограниченное множество

**Theorem 2.36. Следствия**

1.  $f : K \rightarrow Y$ ;  $K$  – компакт,  $f$  – непрерывна  $\Rightarrow f$  – ограничена
2.  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $K$  – компакт,  $f$  – непрерывна  $\Rightarrow f$  – ограничена и достигает своего минимума и максимума

*Доказательство:*

1.  $f(K)$  – компакт  $\Rightarrow f(K)$  – ограничено
2.  $f(K)$  – ограниченное множество.  $b := \sup f(K) \in \mathbb{R}$   
 $\forall n \ b - \frac{1}{n}$  – не верхняя граница  $\Rightarrow \exists x_n \in K : b > f(x_n) > b - \frac{1}{n} \Rightarrow \lim f(x_n) = b \Rightarrow$   
 $\Rightarrow f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_n) = b$