

Глава 1. Введение

§1. Множества и их отношения

Def. Множество - набор каких-то элементов, т.е. либо $x \in A$, либо $x \notin A (\forall x)$

Def. A, B - множества. $A \subset B$ - A подмножество B , т.е. $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$

Def. $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$

Def. \emptyset - пустое множество, т.е. $\forall x, x \notin \emptyset$

Rem. $\forall A \emptyset \subset A$

Def. $\begin{cases} A \subset B \\ A \neq B \end{cases} \Leftrightarrow A \subsetneq B \Leftrightarrow A$ - собственное подмножество

Операции:

- Пересечение $A \cap B = \{x \mid \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases} \}$
- Объединение $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$
- Разность $A \setminus B = \{x \mid \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \}$
- Симметрическая разность $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Способы задания множеств:

- Перечисление
- Неполное перечисление
- Словесно
- С помощью функции

Канонические обозначения:

- \mathbb{N} - натуральные числа
- \mathbb{Z} - целые числа
- \mathbb{Q} - рациональные числа
- \mathbb{R} - вещественные числа
- \mathbb{C} - комплексные числа
- \mathbb{P} - простые числа

Def. $\langle a, b \rangle (a \in A, b \in B)$ - упорядоченная пара

$\langle a, b \rangle = \langle p, q \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} a = p \\ b = q \end{cases}$

Def. $\langle a_1, a_2 \dots a_n \rangle (a_k \in A_k \forall k)$ - кортеж (упорядоченная n -ка)

$\langle a_1 \dots a_n \rangle = \langle b_1 \dots b_n \rangle \Leftrightarrow a_k = b_k \forall k$

Def. Декартово произведение $A \times B = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B\}$

Правила Д'Моргана:

$$1. A \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

$$2. A \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

Доказательство 2

$$x \in A \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_\alpha, \forall \alpha \in I \end{cases} \Leftrightarrow x \in A \setminus B_\alpha, \forall \alpha \in I \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

Теорема

- $A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$
- $A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$

Доказательство

$$x \in A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \exists \alpha \in I : x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha \in I : x \in A \cap B_\alpha \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$

Def. Бинарным отношением R на $A \times B$ называется $R \subset A \times B$

$$R = \{ \langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B \}$$

$$\langle a, b \rangle \in R \Leftrightarrow aRb$$

Def. $\sigma_R = \{ a \in A \mid \exists b \in B : \langle a, b \rangle \in R \}$ - область определения бинарных отношений

Def. $\rho_R = \{ b \in B \mid \exists a \in A : \langle a, b \rangle \in R \}$ - множество значений бинарных отношений

Def. $R^{-1} = \{ \langle b, a \rangle \mid \langle a, b \rangle \in R \}$ - обратное отношение

Def. $R_1 \circ R_2 \subset A \times C$; $\begin{cases} R_1 \subset A \times B \\ R_2 \subset B \times C \end{cases}$

$$R_1 \circ R_2 = \{ \langle a, c \rangle \mid \exists b \in B \begin{cases} \langle a, b \rangle \in R_1 \\ \langle b, c \rangle \in R_2 \end{cases} \}$$

Свойства бинарных отношений:

1. R - рефлексивное, если $\forall a \in A \langle a, a \rangle \in R$
2. R - иррефлексивное, если $\forall a \in A \langle a, a \rangle \notin R$
3. R - симметричное, если $\langle a, b \rangle \in R \Rightarrow \langle b, a \rangle \in R$
4. R - антисимметричное, если $\begin{cases} \langle a, b \rangle \in R \\ \langle b, a \rangle \in R \end{cases} \Rightarrow a = b$
5. R - транзитивное, если $\begin{cases} \langle a, b \rangle \in R \\ \langle b, c \rangle \in R \end{cases} \Rightarrow \langle a, c \rangle \in R$

Def. R - отношение эквивалентности, если R рефлексивно, симметрично, транзитивно

Def. R - нестрогий частичный порядок, если R - рефлексивно, антисимметрично, транзитивно

Def. R - строгий частичный порядок, если R - иррефлексивно, транзитивно

Def. $\begin{cases} \langle a, b \rangle \in R \\ \langle a, c \rangle \in R \end{cases} \Rightarrow b = c$, тогда R - функция f

Def. f - инъективная, если $\begin{cases} f(x_1) = a \\ f(x_2) = a \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2$

Def. f - сюръективная, если $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$

Def. f - биективная, если f - инъективная и сюръективная

§2. Вещественные числа

Две операции в \mathbb{R}

1. Сложение

A_1 $a + b = b + a$ - коммутативность

A_2 $(a + b) + c = a + (b + c)$ - ассоциативность

A_3 $\exists 0 \in \mathbb{R} : a + 0 = a; \forall a \in \mathbb{R}$ - существование нейтрального

A_4 $\forall a \in \mathbb{R} \exists -a : a + (-a) = 0$ - существование обратного

2. Умножение

M_1 $a \cdot b = b \cdot a$ - коммутативность

M_2 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ - ассоциативность

M_3 $\exists 1 \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a; \forall a \in \mathbb{R}$ - существование нейтрального

M_4 $\forall a \neq 0 \in \mathbb{R} \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1$ - существование обратного

AM $\forall a, b, c \in \mathbb{R} (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ - дистрибутивность

Rem. Если соблюдаются все эти аксиомы, то поле

Аксиомы порядка:

• $\forall x, y \in \mathbb{R} x \leq y$ или $y \leq x$

• OA $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

• OM $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq a \cdot b$

Аксиома полноты:

$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A, B \subset \mathbb{R}$

$\forall a \in A$

$\forall b \in B$ $a \leq b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b (\forall a \in A, \forall b \in B)$

\mathbb{Q} не удовлетворяет аксиоме полноты:

$A = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\}$

$B = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 > 2\}$

Между ними только $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Следствие (принцип Архимеда):

$\forall x \in \mathbb{R}$

$\forall y \in \mathbb{R}, y > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : x < ny$

Доказательство

fix $y > 0$

$A = \{x \in \mathbb{R} | \exists n : x < ny\}$

Пусть $A \neq \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \setminus A = B \neq \emptyset$

$A \neq \emptyset$, т.к. $0 \in A$

Левее ли A , чем B

Пусть $\begin{matrix} b \in B \\ a \in A \end{matrix} : b < a < ny \Rightarrow b < ny \Rightarrow b \in A$, но из $\mathbb{R} \setminus A = B \Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow$

$\begin{cases} \Rightarrow \forall a \in A, b \in B, a \leq b \\ A, B \subset \mathbb{R} \\ A \neq \emptyset \\ B \neq \emptyset \end{cases} \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : a \leq b \leq c (\forall a \in A, b \in B)$

$\begin{cases} c - y < c \Rightarrow c - y \in A \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : c - y < ny \Rightarrow c < (n + 1)y \\ c < c + y \Rightarrow c \in B \end{cases} \Rightarrow c + y < (n + 2)y \Rightarrow c + y \in A$ - противоречие

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A = \mathbb{R}$

Следствие:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow 1 < n\varepsilon - \text{принцип Архимеда } x = 1, y = \varepsilon$$

Аксиома индукции (метод математической индукции; принцип математической индукции)

$P_1, P_2, \dots P_n \dots$ - последовательность утверждений

$$\begin{cases} P_1 - \text{истина (база)} \\ P_n - \text{истина} \Rightarrow P_{n+1} - \text{истина (переход)} \end{cases} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} P_n - \text{истина}$$

Th. Во всяком конечном множестве вещественных чисел есть наибольший и наименьший элементы

$$a = \max A \Leftrightarrow \begin{cases} a \in A \\ \forall x \in A \quad x \leq a \end{cases}$$
$$b = \min A \Leftrightarrow \begin{cases} b \in A \\ \forall x \in A \quad x \geq b \end{cases}$$

Доказательство

P_n - в множестве из n элементов есть наибольший и наименьший элементы

1. P_1 - истина, т.к. в множестве из 1 элемента он и наибольший, и наименьший
2. $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

$$A = \{a_1, a_2 \dots a_{n+1}\}$$

$$B = \{b_1, b_2 \dots b_n\} - n \text{ элементов} \Rightarrow \exists \max B = \tilde{a}$$

$$\tilde{a} \in B \Rightarrow \tilde{a} \in A$$

$$\forall k, 1 \leq k \leq n \quad a_k \leq \tilde{a}$$

Случаи:

- $a_k \leq \tilde{a} \leq a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = \max A$
- $a_{n+1} \leq \tilde{a} \Rightarrow \tilde{a} = \max A$

Def. Множество A называется ограниченным сверху, если $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c, \forall a \in A$

Def. Множество A называется ограниченным снизу, если $\exists c \in \mathbb{R} : a \geq c, \forall a \in A$

Def. Множество A называется ограниченным, если оно ограничено и сверху, и снизу

$$\exists c_1, c_2 : c_1 \leq a \leq c_2, \forall a \in A$$

Th.

1. В любом непустом ограниченном сверху множестве целых чисел есть наибольший элемент
2. В любом непустом ограниченном снизу множестве целых чисел есть наименьший элемент
3. В любом непустом ограниченном сверху множестве натуральных чисел есть наибольший и наименьший элементы

Доказательство

$$A; a \in \mathbb{Z}, \forall a \in A$$

b - верхняя граница

$$\forall a \in A \quad a \leq b. \text{ Возьмем } \tilde{a} \in A$$

$$\begin{cases} B = \{a \in A | a \geq \tilde{a}\} \\ B - \text{конечное множество} \end{cases} \Rightarrow \exists \max B = \tilde{a}$$

$$\tilde{a} = \max A, \text{ т.к. } \tilde{a} \leq \beta \in B \leq \tilde{a}$$

Def. $x \in \mathbb{R}; [x] = \lfloor x \rfloor$ - целая часть числа

$[x]$ - наибольшее целое число, не превосходящее x

Свойства:

1. $[x] \leq x \leq [x] + 1$

$$2. x - 1 \leq [x] \leq x$$

Доказательство

1. $[x] \leq x$ - определение

2. Пусть $x \geq [x] + 1 \in \mathbb{Z}$, тогда $[x]$ не наибольшее, что противоречит определению

Th. $x, y \in \mathbb{R} : y > x \Rightarrow$
 1) $\exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$
 2) $\exists s \notin \mathbb{Q} : x < s < y$

Доказательство

1. $x < y \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow$ (по следствию из принципа Архимеда) $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < y - x \Leftrightarrow \frac{1}{n} + x < y$

$$r = \frac{[nx]+1}{n} > \frac{nx}{n} = x$$

$$r = \frac{[nx]+1}{n} = \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n} \leq \frac{nx}{n} + \frac{1}{n} = x + \frac{1}{n} < y$$

$$x < r < y$$

2. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$$x < y \Rightarrow x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} \Rightarrow (\text{по п.1}) \exists r \in \mathbb{Q} : x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2} \Rightarrow x < r + \sqrt{2} < y$$

$$s = r + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

§3. Супремум и инфимум

Def. $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset, A$ - ограничено сверху

$\sup A$ - наименьшая (точная) верхняя граница

Def. $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset, A$ - ограничено снизу

$\inf A$ - наибольшая (точная) нижняя граница

Th.

1. У любого непустого ограниченного сверху множества вещественных чисел существует единственный супремум
2. У любого непустого ограниченного снизу множества вещественных чисел существует единственный инфимум

Доказательство

1. Единственность - очевидно

2. Существование:

$$A \neq \emptyset, A \subset \mathbb{R}$$

B - множество всех верхних границ

$$B \neq \emptyset, B \subset \mathbb{R}$$

$$\forall a \in A$$

$$\forall b \in B \quad a \leq b$$

Тогда по аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b (\forall a \in A, \forall b \in B)$

$\forall a \in A \quad a \leq c \Rightarrow c$ - верхняя граница $A \Rightarrow c \in B$

$\forall b \in B \quad c \leq b \Rightarrow c = \min B \Rightarrow c = \sup A$

Следствия:

$$1. \begin{cases} A \neq \emptyset \\ A \subset B \subset \mathbb{R} \\ B \text{ - ограничено сверху} \end{cases} \Rightarrow \sup A \leq \sup B$$

$$2. \begin{cases} A \neq \emptyset \\ A \subset B \subset \mathbb{R} \\ B - \text{ограничено снизу} \end{cases} \Rightarrow \inf A \geq \inf B$$

Доказательство

$$\begin{cases} B \neq \emptyset \\ B \subset \mathbb{R} \\ B - \text{ограничено сверху} \end{cases} \Rightarrow \exists \sup B \Rightarrow \forall b \in B \quad b \leq \sup B \Rightarrow \forall a \in A \quad a \leq \sup B \Rightarrow \exists \sup A \Rightarrow \sup A \leq \sup B$$

Обозначения:

1. A не является ограниченным сверху $\Rightarrow \sup A = +\infty$
2. A не ограничено снизу $\Rightarrow \inf A = -\infty$

Th. (характеристика супремума и инфимума)

$$1. a = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \leq a \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x > a - \varepsilon \end{cases}$$

$$2. b = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \geq b \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x < b + \varepsilon \end{cases}$$

Доказательство

1. $\forall x \in A, x \geq b \Rightarrow b$ - нижняя граница A
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x < b + \varepsilon \Rightarrow$ все числа $> b$ не являются нижними границами множества $A \Rightarrow b$ - наибольшая нижняя граница $\Rightarrow b = \inf A$

Th. о вложенных отрезках

$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$, тогда $\exists c \in \mathbb{R} : c \in [a_n; b_n] \forall n \in \mathbb{N}$

Другими словами $\bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n; b_n] \neq \emptyset$

Доказательство

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \dots, A = \{a_1, a_2 \dots\}$$

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \dots, B = \{b_1, b_2 \dots\}$$

$$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset; A, B \subset \mathbb{R}$$

$$\forall a_n \leq b_n$$

$$? a_k \leq b_m$$

1. $k < m, a_k \leq a_m \leq b_m$
2. $k > m. a_k \leq b_k \leq b_m$
3. $k = m, a_k \leq b_m$

По аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b (\forall a \in A, \forall b \in B) \Rightarrow \forall n \quad a_n \leq c \leq b_n \Rightarrow c \in [a_n; b_n] \forall n \in \mathbb{N}$

Замечания:

1. Таких точек может быть много
2. Интервалов недостаточно
3. Лучей недостаточно

Глава 2. Последовательности вещественных чисел

§1. Пределы последовательности

Def. Последовательность - функция натурального аргумента

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \Leftrightarrow \{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$$

$$f(1) \leftrightarrow f_1$$

Как задавать последовательность?

- Формулой (форму общего члена последовательности)
- Описательно
- Рекуррентно
- График последовательности (двумерный или одномерный, но второй неудобен, если какие-то точки дублируются)

Def. x_n называется ограниченной сверху, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} x_n \leq M$

Def. y_n называется ограниченной снизу, если $\exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} y_n \geq m$

Def. z_n называется ограниченной, если она ограничена и сверху, и снизу $\Leftrightarrow \exists c > 0 : \forall n \in \mathbb{N} |z_n| < c$

Def. x_n называется монотонно возрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} x_{n+1} \geq x_n$

Def. y_n строго монотонно возрастает, если $\forall n \in \mathbb{N} y_{n+1} > y_n$

Def. x_n монотонно убывает, если $\forall n \in \mathbb{N} x_{n+1} \leq x_n$

Def. y_n строго монотонно убывает, если $\forall n \in \mathbb{N} y_{n+1} < y_n$

Def. z_n монотонная, если она монотонно возрастает или монотонно убывает

Def. z_n строго монотонная, если она строго монотонно возрастает или строго монотонно убывает

Def.(1) (неклассическое)

$a \in \mathbb{R}$

$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Leftrightarrow$ вне любого интервала, содержащего точку a находится лишь конечное число членов последовательности

Rem. Можно рассматривать только симметричные интервалы

Def.(2) (классическое)

$a \in \mathbb{R}$

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N |x_n - a| < \varepsilon$$

Последнее неравенство равносильно выбору симметричного интервала, отсюда равносильность определений

$$\exists N \in \mathbb{N} \Leftrightarrow N = N(\varepsilon)$$

Свойства:

1. Если предел существует, то он единственный

Доказательство

$$\text{От противного: } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \\ a \neq b \end{cases}$$

Пусть $\varepsilon = \frac{|b-a|}{3}$, тогда окрестности будут непересекающимися \Rightarrow либо вне $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ бесконечно много членов и вне $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ бесконечно много членов, либо число n - конечно, оба варианта неверны

2. Если из последовательности удалить конечное число членов, то предел не изменится
3. Если переставить члены последовательности, то предел не изменится
4. Если записать некоторые члены последовательности с конечной кратностью, то предел не изменится
5. Если добавить конечное число членов последовательности, то предел не изменится
6. Если изменить конечное число членов последовательности, то предел не изменится

7. Если последовательность имеет предел, то она ограничена

Доказательство

Окрестность $(a - 1, a + 1)$

Снаружи лишь конечное число членов, в их множестве существует наибольший и наименьший элемент

Пусть $x_{\tilde{N}}$ - наибольший, а $x_{\tilde{\tilde{N}}}$ - наименьший, тогда

$$M = \max\{a + 1, x_{\tilde{N}}\} \text{ и } m = \min\{a - 1, x_{\tilde{\tilde{N}}}\}$$

Lem.

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \end{cases} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon \\ |y_n - b| < \varepsilon \end{cases}$$

Доказательство

Для $x_n \forall \varepsilon_1 > 0 \exists N_1 : \forall n \geq N_1 |x_n - a| < \varepsilon_1$

Для $y_n \forall \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \exists N_2 : \forall n \geq N_2 |y_n - b| < \varepsilon_2$

$$\varepsilon = \varepsilon_2 = \varepsilon_1; N = \max\{N_1, N_2\}$$

8. Предельный переход в неравенстве

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \\ \forall n \in \mathbb{N}; x_n \leq y_n \end{cases} \Rightarrow a \leq b$$

Доказательство

Пусть $b < a$

Возьмем $\varepsilon = \frac{|a-b|}{3}$, окрестности не пересекаются

По лемме для нашего $\varepsilon \exists N : \forall n \geq N \begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon \\ |y_n - b| < \varepsilon \end{cases}$

Рассмотрим $\begin{cases} x_N \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \\ y_N \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \end{cases} \Rightarrow x_N > y_N ??$

Значит $a \leq b$

Rem. $\forall n x_n < y_n \nRightarrow a < b$

Rem. Необязательно $\forall n x_n \leq y_n$, можно использовать $x_n \leq y_n \forall n \geq N_0$

9. Стабилизация знака

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0 \Rightarrow \exists N : \forall n \geq N x_n \cdot a > 0$$

Доказательство

Пусть $\varepsilon = \frac{|a|}{3}$

$$\exists N : \forall n \geq N |x_n - a| < \varepsilon$$

10. Принцип двух миллионеров (теорема о сжатой переменной)

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \\ \forall n; x_n \leq y_n \leq z_n \end{cases} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$$

Доказательство

Хотим $\varepsilon > 0 \exists N : n \geq N \quad |y_n - a| < \varepsilon$

fix $\varepsilon > 0$

По лемме $\exists N : \forall n \geq N \begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon \\ |z_n - a| < \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \\ a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon \end{cases}$

Возьмем $\begin{cases} a - \varepsilon < x_n \\ z_n < a + \varepsilon \\ x_n \leq y_n \leq z_n \end{cases} \Rightarrow a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow |y_n - a| < \varepsilon \Rightarrow$
 $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$

Rem. Можно вместо $\forall n \in \mathbb{N}$ использовать $\exists N_0 : \forall n \geq N_0$

Следствие: $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} |y_n| \leq z_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$

Доказательство

$|y_n| \leq z_n \Leftrightarrow -z_n \leq y_n \leq z_n$, дальше очев

Rem. Вместо $\forall n \in \mathbb{N}$ можно $\exists N_0 : \forall n \geq N_0$

Теорема о пределе монотонной последовательности

1. Если x_n монотонно возрастает и ограничена сверху, то у нее существует пределе
2. Если y_n монотонно убывает и ограничена снизу, то у нее есть предел
3. Если z_n монотонна, то существование предела равносильно ограниченности z_n

Доказательство

1. $\begin{cases} \{x_1, x_2, x_3 \dots x_n \dots\} = X \\ \exists M : \forall n; x_n \leq M \end{cases} \Rightarrow X - \text{Ограничена сверху} \Rightarrow \exists \sup X = a$

Докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup X = a$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \quad |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$

При этом правая часть верна всегда, докажем левую

fix $\varepsilon > 0$

$a = \sup X \Rightarrow a - \varepsilon \neq \sup X \Rightarrow \exists x_{\tilde{N}} : x_{\tilde{N}} > a - \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq \tilde{N} \quad x_n > a - \varepsilon$, так как x_n монотонно возрастает

2. \Rightarrow уже доказано (свойство 7)

$$\Leftarrow \begin{cases} \exists m, M; m \leq z_n \leq M \\ z_n - \text{монотонная} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_n \uparrow \Rightarrow z_n \leq M \\ z_n \downarrow \Rightarrow m \leq z_n \end{cases}$$

Def. Последовательность x_n называется бесконечно малой, если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

Свойства:

1. $\begin{cases} x_n - \text{б/м} \\ y_n - \text{ограничена} \end{cases} \Rightarrow x_n \cdot y_n - \text{б/м}$
2. $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + y_n = 0$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n$, где $\alpha_n - \text{б/м}$

Доказательство

1. y_n - ограничена $\Rightarrow \exists M > 0 : |y_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

$$\text{Хотим } \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N |x_n \cdot y_n - 0| < \varepsilon$$

$$fix \varepsilon > 0$$

$$\text{Знаем, что } \exists N : \forall n \geq N \begin{cases} |x_n| < \frac{\varepsilon}{M} \\ |y_n| \leq M \end{cases} \Rightarrow |x_n \cdot y_n| < \varepsilon$$

2. $fix \varepsilon > 0$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{по лемме } \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \begin{cases} |x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N |(x_n + y_n) - 0| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + y_n = 0 \Rightarrow (x_n + y_n) - 0/M$$

3. $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x_n - a) - 0| < \varepsilon$

Обозначение $x_n - a = \alpha_n$, тогда

$$|\alpha_n - 0| < \varepsilon$$

$$|\alpha_n| < \varepsilon, \text{ т.е. } \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \Rightarrow \alpha_n - 0/M, \text{ а } x_n = a + \alpha_n, \text{ где } \alpha_n - 0/M$$

Th. об арифметических действиях с пределами

$$1. \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \end{cases} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + y_n = a + b$$

$$2. \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \end{cases} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$$

$$3. \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$$

Доказательство

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n, \alpha_n - 0/M$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \Leftrightarrow y_n = b + \beta_n, \beta_n - 0/M$$

$$x_n + y_n = a + \alpha_n + b + \beta_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n) = a + b + \gamma_n \rightarrow a + b$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \Leftrightarrow y_n = b + \beta_n$$

$$x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n = ab + \gamma_n \rightarrow ab$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0 \Rightarrow \exists N : \forall n \geq N y_n \neq 0$$

$$\frac{x_n}{y_n} - \text{определено } \forall n \geq N$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \frac{1}{y_n}$$

$$\text{Хотим } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$$

$$\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b+\beta_n} - \frac{1}{b} = \frac{b-b-\beta_n}{b(b+\beta_n)} = (-\beta_n) \cdot \frac{1}{b(b+\beta_n)}$$

Можем выбрать окрестность $(b - \varepsilon, b + \varepsilon); \varepsilon = \frac{|b|}{2}$

$$|b(b + \beta_n)| = |b| \cdot |b + \beta_n| \quad \exists N : \forall n \geq N \quad |\beta_n| < \frac{|b|}{2}$$

$$|b| \cdot |b + \beta_n| \leq |b| \cdot (|b| + \frac{|b|}{2}) = k$$

$$|b| \cdot |b + \beta_n| \geq |b| \cdot (|b| - |\beta_n|) \geq |b| \cdot \frac{|b|}{2} = M > 0$$

$$0 < M \leq |b(b + \beta_n)| \leq k$$

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{|b(b+\beta_n)|} \leq \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{|b(b+\beta_n)|} - \text{ограничена} \Rightarrow (-\beta_n) \cdot \frac{1}{b(b+\beta_n)} - \text{огр}/M \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \frac{1}{y_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

$$x_n = a + \alpha_n$$

$$|a| - |\alpha_n| \leq |x_n| = |a + \alpha_n| \leq |a| + |\alpha_n|$$

По принципу двух милиционеров

$$\begin{cases} |a| - |\alpha_n| \rightarrow a \\ |a| + |\alpha_n| \rightarrow a \end{cases} \Rightarrow |x_n| \rightarrow a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$$

Бесконечные пределы

Def. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall E \in \mathbb{R} \exists N : \forall n \geq N \quad x_n > E$

или $\forall E \in \mathbb{R}$ вне луча $(E; +\infty)$ лежит лишь конечное число членов

Rem. Можно рассматривать только $E > 0$

Def. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall E \in \mathbb{R} \exists N : \forall n \geq N \quad x_n < E$

или вне любого луча вида $(-\infty; E)$ лежит лишь конечное число членов

Rem. Можно рассматривать только $E < 0$

Def. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall E > 0 \exists N : \forall n \geq N \quad |x_n| > E$

или вне любого множества вида $(-\infty; -E) \cup (E; +\infty)$ лежит лишь конечное число членов

Наблюдение. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$

Def. $x_n - \text{огр}/\text{огр} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$

Наблюдение. $x_n - \text{огр}/\text{огр} \Rightarrow x_n$ не является ограниченной

Утверждение. $x_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$x_n - \text{огр}/\text{огр} \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} - \text{огр}/\text{огр}$$

Доказательство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \quad |x_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|x_n|} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\text{т.е. } \forall E > 0 \exists N : \forall n \geq N \quad \left| \frac{1}{x_n} \right| > E \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} - \text{огр}/\text{огр}$$

Def. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$

Свойства пределов в $\overline{\mathbb{R}}$

1. Предел в $\overline{\mathbb{R}}$ – единственный

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \overline{\mathbb{R}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases} \Rightarrow a = b$$

2. Все свойства про добавить/убрать/переставить сохраняются

$$3. \quad \bullet \quad \begin{cases} \forall n; x_n \leq y_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$$

$$\bullet \begin{cases} \forall n; x_n \leq y_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty \end{cases} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$$

Доказательство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty \Leftrightarrow \forall E \in \mathbb{R} \exists N : \forall n \geq N |y_n| < E$$

$$x_n \leq y_n < E \Rightarrow \forall E \in \mathbb{R} \exists N : \forall n \geq N |x_n| < E \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$$

4. Арифметические действия с пределами в $\overline{\mathbb{R}}$

Смотрите нудный, но нужный видос Александра Игоревича

§2. Экспонента

Неравенство Бернулли

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R} (x > -1)$$

$(1+x)^n \geq 1+nx$, причем равенство достигается при $x=0$ или $n=1$

Доказательство по ММИ

База: $n=1$

$$1+x \geq 1+1 \cdot x \text{ — верно}$$

Переход: $n \rightarrow n+1$

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+x)(1+nx) = 1+nx+x+x^2n = 1+(n+1)x+x^2n \geq 1+(n+1)x$$

Наблюдение

$$1. |a| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \Leftrightarrow a^n - \delta/\epsilon$$

$$2. |a| > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty \Leftrightarrow a^n - \delta/\epsilon$$

$$\text{Rem: } a > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty$$

Rem: Из пункта 2 \Rightarrow пункт 1

Доказательство

$$2. |a| > 1 \Rightarrow |a| = 1+x, x > 0$$

$$|a|^n = (1+x)^n \geq 1+nx - \delta/\epsilon \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (1+nx) = +\infty \right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a|^n = +\infty \Leftrightarrow a^n - \delta/\epsilon$$

Th.

$$a \in \mathbb{R}$$

$$x_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$

$$\bullet \{x_n\} \text{ возрастает при } n > -a \Leftrightarrow n+a > 0 \text{ (строго при } a \neq 0)$$

$$\bullet \{x_n\} \text{ — ограничено сверху}$$

Доказательство

$$\text{Возрастание. } \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{a}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{a}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{(n+a)^n \cdot (n-1)^n}{n^n (n-1+a)^{n-1}} = \left(\frac{(n+a)(n-1)}{n(n-1+a)}\right)^n \cdot \frac{n-1+a}{n-1} = \frac{n-1+a}{n-1} \cdot \left(1 + \frac{-a}{n(n-1+a)}\right)^n \geq \frac{n-1+a}{n-1} \cdot \left(1 + \frac{-a}{n(n-1+a)}\right)^n = \frac{n-1+a}{n-1} \cdot \frac{n-1+a-a}{n-1+a} = 1$$

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} \geq 1, \text{ но нужно доказать: } \frac{-a}{n(n-1+a)} > -1$$

$$\frac{a}{n(n-1+a)} < 1$$

$$a < n(n-1+a)$$

$$n^2 - n + an - a > 0$$

$$n(n-1) + a(n-1) > 0$$

$$(n-1)(n+a) > 0$$

Из того, что у нас есть нужно

$$(n+a) > 0 \Leftrightarrow n > -a, \text{ что дано, значит Бернулли разрешен}$$

Ограниченность. $y_n = (1 + \frac{-a}{n})^n$ монотонно возрастает при $n > a$

$$x_n \cdot y_n = (1 + \frac{a}{n})^n \cdot (1 + \frac{-a}{n})^n = (1 - \frac{a^2}{n})^n \leq 1$$

$$x_n \leq \frac{1}{y_n} \leq \frac{1}{y_{min}} = const$$

Следствие $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}$ (монотонность + ограниченность)

Def. $a \in \mathbb{R} \exp(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{n})^n$

Def. $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \exp(1)$

Rem. $z_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$

1. z_n строго убывает

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = e$

Доказательство

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} ((1 + \frac{1}{n})^n (1 + \frac{1}{n})) = e \cdot 1 = e$

1. $z_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1} = (\frac{n+1}{n})^{n+1} = \frac{1}{(\frac{n}{n+1})^{n+1}} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{n+1})^{n+1}} = \frac{1}{(1 + \frac{-1}{n+1})^{n+1}}$

Знаменатель строго возрастает \Rightarrow дробь строго убывает

Свойства экспоненты:

1. $\exp(1) = e$; $\exp(a) = 1$

2. Монотонность:

$$a \leq b \Rightarrow \exp(a) \leq \exp(b)$$

Доказательство

$$1 + \frac{a}{n} \leq 1 + \frac{b}{n} - \text{верно } \forall n : \text{обе дроби} > 0$$

$$\Rightarrow (1 + \frac{a}{n})^n \leq (1 + \frac{b}{n})^n \Rightarrow \exp(a) \leq \exp(b)$$

3. $\exp(a) > 0 \forall a \in \mathbb{R}$

$$(1 + \frac{a}{n})^n > 0 \text{ НСНМ строго возрастает}$$

$$\exists \delta > 0 : (1 + \frac{a}{n})^n > \delta > 0 \Rightarrow \exp(a) > \delta > 0$$

4. $\exp(a) \cdot \exp(-a) \leq 1$

$$(1 + \frac{a}{n})^n \cdot (1 + \frac{-a}{n})^n = (1 + \frac{-a^2}{n})^n \leq 1 \Rightarrow \exp(a) \cdot \exp(-a) \leq 1$$

5. $\exp(a) \geq 1 + a \forall a \in \mathbb{R}$

$$(1 + \frac{a}{n})^n \geq 1 + n \frac{a}{n} = 1 + a; n > -a \Rightarrow \exp(a) \geq 1 + a$$

6. $a < 1$

$$\exp(a) \leq \frac{1}{1-a}$$

$$\begin{cases} \exp(a) \cdot \exp(-a) < 1 \Leftrightarrow \exp(a) \leq \frac{1}{\exp(-a)} \\ \exp(-a) \geq 1 - a > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\exp(-a)} \leq \frac{1}{1-a}$$

7. $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$$

Доказательство

- Правое:

$z_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ строго убывает

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = e$$

fix n

$$(1 + \frac{1}{n+1})^{n+2} < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$$

- Левое:

Строго убывает и $\rightarrow e \Rightarrow e = \inf(1 + \frac{1}{n+1})^{n+2} \Rightarrow e \leq (1 + \frac{1}{n+1})^{n+2} < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$

$$(1 + \frac{1}{n})^n = 2 \quad (n = 1) \Rightarrow 2 < e$$

$$(1 + \frac{1}{n})^{n+1} = (1 + \frac{1}{5})^6 \quad (n = 5) < 3$$

$$2 < e < 3$$

$$e = 2,718281828459045 \dots$$

Lem. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{a_n}{n})^n = \exp(a)$

Доказательство

$$A = 1 + \frac{a}{n}; \quad B = 1 + \frac{a_n}{n}$$

$$a_n - \text{ограниченная} \Rightarrow \exists M : \begin{cases} |A| \leq 1 + \frac{M}{n} \\ |B| \leq 1 + \frac{M}{n} \end{cases}$$

$$\text{Докажем, что } \begin{cases} A^n - B^n \rightarrow 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \exp(a) \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} B^n = \exp(a)$$

$$0 \leq |A^n - B^n| = |(A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + B^{n-1})| = |A-B| \cdot |A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + B^{n-1}| \leq |A-B| \cdot (|A^{n-1}| + |A^{n-2}B| + \dots + |B^{n-1}|) \leq |A-B| \cdot n(1 + \frac{M}{n})^{n-1} = |1 + \frac{a}{n} - 1 - \frac{a_n}{n}| \cdot n \cdot (1 + \frac{M}{n})^{n-1} = \frac{|a-a_n|}{n} \cdot n \cdot (1 + \frac{M}{n})^{n-1} = |a-a_n| \cdot (1 + \frac{M}{n})^{n-1}$$

Модуль — б/м, скобка ограничена \Rightarrow выражение $\rightarrow 0 \Rightarrow A^n - B^n \rightarrow 0$

Следствие

$$\exp(a) \cdot \exp(b) = \exp(a+b)$$

Доказательство

$$(1 + \frac{a}{n})^n \cdot (1 + \frac{b}{n})^n = (1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{ab}{n^2})^n = (1 + \frac{a+b+\frac{ab}{n}}{n})^n \Leftrightarrow \exp(a) \cdot \exp(b) = \exp(a+b), \text{ т.к. } (a+b+\frac{ab}{n}) \rightarrow a+b$$

Следствие:

1. $\exp(n) = e^n, n \in \mathbb{N}$
2. $f(x) = \exp(x)$ — строго возрастает

Доказательство

1. $\exp(n) = \exp(1 \dots 1) = \exp(1) \cdot \exp(1) \dots = e^n$
2. $t > 0 \exp(x+t) = \exp(x) \cdot \exp(t) \geq (1+t)\exp(x)$

$$\text{Теорема } \begin{cases} x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a < 1 \end{cases} \Rightarrow x_n - \text{б/м}$$

Доказательство

$a < 1$, возьмем окрестность радиусом $\frac{a+1}{2}$

$$\exists N : \forall n \geq N \frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{a+1}{2}$$

fix $n > N$

$$x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \dots \frac{x_{N+1}}{x_N} \cdot x_N < (\frac{a+1}{2})^{n-N} \cdot x_N$$

$$0 < x_n < (\frac{a+1}{2})^n \cdot \frac{x_N}{(\frac{a+1}{2})^N} \Rightarrow x_n \rightarrow 0$$

Следствие

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

Доказательство

1. $x_n = \frac{n^k}{a^n} > 0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^k \cdot a^n}{a^{n+1} \cdot n^k} = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^k = \frac{1}{a} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{a} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$
2. $x_n = \frac{a^n}{n!}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot a^n} = \frac{a}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$
3. $x_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

Теорема Штольца

y_n строго возрастает и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$

Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \mathbb{R}$, то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l$

Доказательство

1. $l = 0$

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = z_n - \delta/M \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N |z_n| < \varepsilon$$

fix $\varepsilon > 0 \rightarrow N$

$$N \leq m < n$$

$$x_n - x_{n-1} = z_n(y_n - y_{n-1})$$

$$x_n - x_m = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_{m+1} - x_m) = z_n(y_n - y_{n-1}) + z_{n-1}(y_{n-1} - y_{n-2}) + \dots + z_{m+1}(y_{m+1} - y_m)$$

$$|x_n - x_m| = \left| \sum_{k=m+1}^n z_k(y_k - y_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |z_k(y_k - y_{k-1})| < \varepsilon \sum_{k=m+1}^n |y_k - y_{k-1}| = \varepsilon \sum_{k=m+1}^n (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon(y_n - y_m)$$

$$|x_n - x_m| < \varepsilon(y_n - y_m)$$

$$|x_n| - |x_m| \leq |x_n - x_m| < \varepsilon(y_n - y_m) < \varepsilon y_n$$

$$|x_n| < |x_m| + \varepsilon y_n$$

$$\left| \frac{x_n}{y_n} \right| < \varepsilon + \frac{|x_m|}{y_n}$$

fix $m; n \rightarrow +\infty \Rightarrow |x_m| = \text{const} \Rightarrow \frac{|x_m|}{y_n} - \delta/M \Rightarrow \frac{|x_n|}{y_n} < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{x_n}{y_n} \right| < 2\varepsilon$
2. $l \in \mathbb{R}; l \neq 0$

$$\tilde{x}_n = x_n - ly_n$$

$$\frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - ly_n - (x_{n-1} - ly_{n-1})}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{x}_n}{y_n} = 0$$

$$\frac{\tilde{x}_n}{y_n} = \frac{x_n - ly_n}{y_n} = \frac{x_n}{y_n} - l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l$$

3. $l = +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0_+ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = 0_+ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$$

Надо доказать:

- x_n строго возрастает
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow +\infty \Rightarrow \text{НСМ} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1 \Rightarrow x_n - x_{n-1} > 0 \Rightarrow x_n > x_{n-1}$$

$$\text{НСМ} (N) \quad N \leq m < n$$

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1 \Rightarrow x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1}$$

$$x_n - x_m = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_{m+1} - x_m) > (y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + \dots + (y_{m+1} - y_m) = y_n - y_m$$

$$x_n - x_m > y_n - y_m > y_n$$

$$x_n > x_m + y_n$$

$$\text{fix } m; n \rightarrow +\infty$$

$$x_n > x_m + y_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$

4. $l = -\infty$

$$\tilde{x}_n = -x_n \rightarrow \text{случай 3}$$

Теорема Штольца (ver. 2)

$$y_n : 0 < y_n < y_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

$$\text{Если } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}, \text{ то } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l$$

Доказательство

1. $l = 0$

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = z_n - \delta/M \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad N : \forall n \geq N \quad |z_n| < \varepsilon$$

$$N \leq m < n$$

$$x_n - x_m = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_{m+1} - x_m) = z_n(y_n - y_{n-1}) + z_{n-1}(y_{n-1} - y_{n-2}) + \dots + z_{m+1}(y_{m+1} - y_m)$$

$$|x_n - x_m| \leq \sum_{k=m+1}^n |z_k| \cdot |y_k - y_{k-1}| \leq \varepsilon \sum_{k=m+1}^n |y_k - y_{k-1}| = \varepsilon \sum_{k=m+1}^n (y_{k-1} - y_k) = \varepsilon(y_m - y_n)$$

$$\text{fix } m; n \rightarrow +\infty$$

$$|x_n - x_m| \leq \varepsilon(y_m - y_n) \Rightarrow |x_m| \leq \varepsilon y_m$$

$$\left| \frac{x_m}{y_m} \right| \leq \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall m \geq N \quad \left| \frac{x_m}{y_m} \right| \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$$

2-4. Упражнение

§3. Подпоследовательности

Def. n_k строго возрастающая последовательность натуральных чисел

$x_1, x_2, x_3 \dots x_n \dots$ – последовательность

$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3} \dots x_{n_k} \dots$ – ее подпоследовательность

Rem.

1. $\exists \lim x_n = a \Rightarrow \forall x_{n_k} \quad \lim x_{n_k} = a$

$$2. n_k \bigcup m_l = \mathbb{N}$$

$$\lim x_{n_k} = \lim x_{m_l} = a \Rightarrow \exists \lim x_n = a$$

Rem. n_k возрастающая последовательность индексов (т.е. \mathbb{N}) $\Rightarrow n_k \geq k$

Доказательство

ММИ:

$$n_1 \geq 1$$

$$n_k \geq k \Rightarrow n_{k+1} > n_k \geq k \Rightarrow n_{k+1} > k \Rightarrow n_{k+1} \geq k+1$$

Теорема о стягивающихся отрезках

$$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots \supset [a_n; b_n]$$

$$\lim(b_n - a_n) = 0 \Rightarrow \exists! c \in [a_n; b_n] \forall n \in \mathbb{N} \text{ и } \lim a_n = \lim b_n = c$$

Доказательство

• $\exists c : c \in [a_n; b_n] \forall n \in \mathbb{N}$ – знаем из теоремы о вложенных отрезках

• Пусть $\exists d : d \in [a_n; b_n] \forall n \in \mathbb{N}$

$$|c - d| \leq |a_n - b_n|$$

$$|c - d| \leq 0 \Rightarrow c = d$$

• $0 \leq |a_n - c| \leq |a_n - b_n|$

$$|a_n - c| \rightarrow 0 \Rightarrow \lim a_n = c$$

Теорема Больцано-Вейерштрасса

Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность

Доказательство

x_n – ограничена $\Rightarrow \exists a_0, b_0 : a_0 < x_n < b_0 \forall n \in \mathbb{N}$

Возьмем $\frac{a_0+b_0}{2}$, выберем половину с бесконечным числом членов. Пусть левая $\Rightarrow a_1 = a_0; b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$

Возьмем $\frac{a_1+b_1}{2}$, аналогично. Пусть правая $\Rightarrow a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}; b_2 = b_1$ итд

Тогда $[a_0; b_0] \supset [a_1; b_1] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$

$$|a_n - b_n| = \left| \frac{a_0 - b_0}{2^n} \right| \Rightarrow |a_n - b_n| \rightarrow 0$$

Значит это система стягивающихся отрезков

На первом шаге выберем $x_{n_1} \in [a_0; b_0]$, на втором $x_{n_2} \in [a_1; b_1]$ ($n_2 > n_1$) и так далее

Получили последовательность x_{n_k}

$$x_{n_k} \in [a_{k-1}; b_{k-1}]$$

$$a_{k-1} \leq x_{n_k} \leq b_{k-1} \Rightarrow x_{n_k} \rightarrow c, \text{ где } c = \bigcap [a_n; b_n]$$

$$\lim x_{n_k} = c$$

Def. x_n – фундаментальная, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m \geq N |x_m - x_n| < \varepsilon$

Свойства:

1. x_n – сходится $\Rightarrow x_n$ – фундаментальна

2. x_n – фундаментальна $\Rightarrow x_n$ – ограничена

3. x_n – фундаментальна и $\exists n_k : \lim x_{n_k} = a \Rightarrow \lim x_n = a$

Доказательство

1. $\lim x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N |x_n - a| < \varepsilon$

$$m, n \geq N \begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon \\ |x_m - a| < \varepsilon \end{cases}$$

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < 2\varepsilon \Rightarrow x_n - \text{фундаментальна}$$

2. x_n – фундаментальна

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m \geq N |x_n - x_m| < \varepsilon$$

$$\varepsilon = 1 \exists N : \forall n, m \geq N |x_n - x_m| < 1$$

$$\forall n |x_n - x_N| < 1$$

$$|x_n| - |x_N| \leq |x_n - x_N| < 1$$

$$\forall n \geq N |x_n| \leq 1 + |x_N|$$

$$\text{Значит НСНМ ограничена } \in [-(1 + |x_N|); 1 + |x_N|]$$

До N конечное число, их можем просто сравнить с текущей границей, т.е.

$$x_n \leq \max\{x_1, x_2 \dots x_{N-1}, 1 + |x_N|\}$$

$$x_n \geq \min\{x_1, x_2 \dots x_{N-1}, -(1 + |x_N|)\}$$

3. $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists K : \forall k \geq K |x_{n_k} - a| < \varepsilon$$

$$\exists N : \forall m, n \geq N |x_n - x_m| < \varepsilon$$

$$k \geq \max\{N; K\}$$

$$|x_n - a| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a|$$

$$k \geq N \Rightarrow n_k \geq k \geq N \Rightarrow |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < 2\varepsilon \Rightarrow \lim x_n = a$$

Критерий Коши: x_n – сходится $\Leftrightarrow x_n$ – фундаментальна

Доказательство

\Rightarrow уже доказано

$\Leftarrow x_n$ – фундаментальна $\Rightarrow x_n$ – ограничена \Rightarrow существует сходящаяся подпоследовательность $\Rightarrow x_n$ – сходится

Th.

1. x_n – монотонная и не ограниченная сверху $\Rightarrow \lim x_n = +\infty$

x_n – монотонная и не ограниченная снизу $\Rightarrow \lim x_n = -\infty$

2. x_n – неограниченная сверху $\Rightarrow \exists x_{n_k} : \lim x_{n_k} = +\infty$

3. x_n – неограниченная снизу $\Rightarrow \exists x_{n_k} : \lim x_{n_k} = -\infty$

Доказательство

1. $\begin{cases} x_n \text{ возрастает монотонно} \\ x_n \text{ неограничена сверху} \end{cases} \Leftrightarrow \forall M \exists N : x_N > M \Rightarrow \forall n \geq N x_n > M$
 $\forall M \exists N : \forall n \geq N x_n > M \Leftrightarrow \lim x_n = +\infty$

2. x_n неограничена сверху

$$\exists n_1 : x_{n_1} > 1$$

$$\exists n_2 : x_{n_2} > 2 + x_{n_1}; n_2 > n_1$$

$$\exists n_3 : x_{n_3} > 2 + x_{n_2}; n_3 > n_2$$

...

$$\forall k \exists x_{n_{k+1}} > 2 + x_{n_k}$$

$$x_{n_1} > 1 \Rightarrow \forall k x_{n_k} > k$$

$$\lim x_{n_k} = +\infty$$

3. Аналогично второму пункту

Def. $a \in \bar{R}$; a – частичный предел последовательности x_n , если $\exists x_{n_k} : \lim x_{n_k} = a$

Th. a – частичный предел $x_n \Leftrightarrow$ в любой окрестности точки a содержится бесконечное число членов последовательности

Доказательство

\Rightarrow a – частичный предел $\Leftrightarrow \exists x_{n_k} \rightarrow a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ в $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ содержится бесконечное количество членов x_{n_k}

\Leftarrow Возьмем $(a - 1; a + 1)$, возьмем $x_{n_1} : a - 1 < x_{n_1} < a + 1$

Возьмем $(a - \frac{1}{2}; a + \frac{1}{2})$, возьмем $x_{n_2} : a - \frac{1}{2} < x_{n_2} < a + \frac{1}{2}$ и $n_2 > n_1$

...

$\forall k \exists x_{n_k} : n_k > n_{k-1}$ и $a - \frac{1}{k} < x_{n_k} < a + \frac{1}{k} \Rightarrow \lim x_{n_k} = a$

Def. x_n – последовательность

$\underline{\lim} x_n$ – нижний предел последовательности x_n

$\underline{\lim} x_n = \lim(\inf x_k) = \lim \inf\{x_k, x_{k+1} \dots\}$

Def. x_n – последовательность

$\overline{\lim} x_n$ – верхний предел последовательности x_n

$\overline{\lim} x_n = \lim(\sup x_k) = \lim \sup\{x_k, x_{k+1} \dots\}$

Договор: $\lim \pm\infty = \pm\infty$

$\begin{cases} y_n = \inf x_k^- \text{ монотонно возрастает} \\ z_n = \sup x_k^- \text{ монотонно убывает} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists \lim y_n = \underline{\lim} x_n \\ \exists \lim z_n = \overline{\lim} x_n \end{cases}$

Th.

1. $\forall x_n \exists \underline{\lim} x_n$ и $\overline{\lim} x_n$ в \bar{R}

2. $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$

Доказательство

1. $y_n \uparrow; z_n \downarrow$

2. $\forall n y_n \leq z_n \Rightarrow \underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$

Th.

1. $\underline{\lim} x_n$ – наименьший из частичных пределов

2. $\overline{\lim} x_n$ – наибольший из частичных пределов

Rem. $\forall x_n$ множество частичных пределов непустое

3. $\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n \Leftrightarrow \exists \lim x_n = \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$

Доказательство

2. $x_n \rightarrow z = \sup x_k; z_n \downarrow$

$\overline{\lim} x_n = \lim z_n = a$

z_n бежит к a справа

Хотим $x_{n_k} : \lim x_{n_k} = a$

$(a - 1)$ не является верхней границей для $x_n \Rightarrow \exists x_{n_1} > a - 1$

$(a - \frac{1}{2})$ не является верхней границей для $\{x_{n_1} + 1, x_{n_1} + 2 \dots\} \Rightarrow \exists x_{n_2} > a - \frac{1}{2}$

...

$\forall k \exists x_{n_k} > a - \frac{1}{k}$, т.к. $a - \frac{1}{k}$ не может быть верхней границей для $\{x_{n_{k-1}} + 1, x_{n_{k-1}} + 2 \dots\}$

$a - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leq z_{n_k} \Rightarrow \lim x_{n_k} = a \Rightarrow \overline{\lim} x_n = a$ – частичный предел

Пусть $x_{n_m} \rightarrow b$

$$x_{n_m} \leq z_{n_m} \Rightarrow \lim x_{n_m} \leq \lim z_{n_m} \Rightarrow b \leq a$$

Если $a = +\infty \Rightarrow x_n$ – не ограничена сверху $\Rightarrow \exists x_{n_k} \rightarrow +\infty$

$$x_{n_m} \leq z_{n_m}$$

$$b \leq +\infty$$

$$1. \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n \Leftrightarrow \exists \lim x_n$$

$$\Leftrightarrow \exists \lim x_n = a \Rightarrow \forall x_{n_k} \rightarrow a$$

$$\Rightarrow \forall n y_n \leq x_n \leq z_n \Rightarrow \exists \lim x_n = \lim y_n = \lim z_n$$

Th. Характеристика верхнего и нижнего пределов на языке ε, N

$$a = \underline{\lim} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

$$b = \overline{\lim} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N x_n < b + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N x_n > b - \varepsilon \end{cases}$$

Доказательство

$$b = \lim z_n$$

$$z_n = \sup\{x_n, x_{n+1} \dots\}$$

$$\Leftarrow 1. \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N z_n \leq b + \varepsilon$$

$$2. \text{ В любом хвосте есть элемент больший, чем } b - \varepsilon \Rightarrow \forall n z_n > b - \varepsilon$$

$$\text{Тогда НСНМ } b - \varepsilon < z_n \leq b + \varepsilon \Rightarrow \lim z_n = b$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N b - \varepsilon < z_n < b + \varepsilon$$

$$x_n \leq z_n \Rightarrow \exists x_N : x_N > b - \varepsilon$$

§4. Ряды

Def. $\sum a_n$ – ряд (числовой ряд); $a_n \in R$

Def. $S_n = \sum a_k$ – частичная сумма ряда

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$\{S_n\}$ – последовательность частичных сумм

Если $\exists \lim S_n = S \in \bar{R}$, то S – суммы ряда

Def. $\sum a_n$ – ряд – сходящийся, если $S \in R$. Т.е. если $S = \pm\infty$ или $\nexists \lim S_n$, то $\sum a_n$ – расходящийся ряд

Th. Необходимый признак сходимости числового ряда

$$\sum a_n \text{ – сходится} \Rightarrow a_n \rightarrow 0$$

Доказательство

$$\sum a_n \text{ сходится} \Leftrightarrow \exists \lim S_n = S \in R \quad a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow 0 = S - S$$

Действия с числовыми рядами:

$$1. \begin{cases} \sum a_n \text{ – сходится к } S \\ \sum b_n \text{ – сходится к } \tilde{S} \end{cases} \Rightarrow \sum (a_n + b_n) \text{ – сходится к } S + \tilde{S}$$

$$2. \begin{cases} \sum a_n \text{ – сходится к } S \\ c \in R \end{cases} \Rightarrow \sum c \cdot a_n \text{ – сходится к } c \cdot S$$

3. Сумма ряда, если существует, то единственная

$$4. \sum a_n \text{ сходится к } S$$

$$\begin{cases} (a_1 + a_2) + (a_3) + (a_4 + a_5 + \dots) \\ b_1 + b_2 + b_3 \end{cases} \Rightarrow \sum b_n \text{ – сходится к } S$$

5. Изменение (добавление, отбрасывание) конечного числа членов ряда не меняет сходимость, но может изменить сумму

Глава 3. Непрерывные функции

§1. Предел функции

Def.

- $a \in R$; U_a – окрестность точки a
 $U_a = (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$
 $\overset{\circ}{U}_a$ – проколота окрестность точки a
 $\overset{\circ}{U}_a = (a - \varepsilon; a) \cup (a; a + \varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$
- $a = +\infty \Rightarrow$ окрестность – луч $(\varepsilon; +\infty)$
- $a = -\infty \Rightarrow$ окрестность – луч $(-\infty; \varepsilon)$

Def. $E \subset R$; $a \in R$

a – предельная точка множества E , если $\forall U_a \cap E \neq \emptyset$, т.е. в любой проколота окрестности a есть элемент из E

Th. Следующие условия равносильны:

1. a – предельная точка E
2. В любой окрестности точки a содержится бесконечное количество элементов множества E
3. $\exists x_n : \begin{matrix} x_n \neq a \\ x_n \in E \end{matrix} \lim x_n = a$

Более того, можно сделать так, что $|x_n - a|$ строго монотонно убывает

Доказательство

- $2 \Rightarrow 1$ очев
- $3 \Rightarrow 2$

$$\exists x_n : \lim x_n = a$$

$$\forall \begin{matrix} x_n \neq a \\ x_n \in E \end{matrix}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \begin{matrix} |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq N \\ x_n \in U_a \\ x_n \in E \end{matrix}$$

Возьмем $b_1 = (a - 1; a + 1) \setminus \{a\}$ и $x_1 \in b_1$

Потом $\varepsilon_2 = \min(\frac{1}{2}; |x_1 - a|)$, $b_2 = (a - \varepsilon_2; a + \varepsilon_2) \setminus \{a\}$ и $x_2 \in b_2$ итд

Знаем:

1. $x_n \neq a$
2. $|x_{n-1} - a| > |x_n - a|$
3. $|x_n - a| < \frac{1}{n}$
 $\lim x_n = a$

Def. $f : E \rightarrow R$; a – предельная точка E

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow$$

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ – определение предела по Коши
2. \forall окрестности $U_A \exists U_a : f(\overset{\circ}{U}_a \cap E) \subset U_A$ – на языке окрестностей

$$3. \forall \{x_n\} : \begin{cases} x_n \in E \\ x_n \neq a \\ \lim x_n = a \end{cases} \Rightarrow \lim f(x_n) = A - \text{по Гейне}$$

$$1 \Leftrightarrow 2$$

$$x \in (a - \delta; a) \cup (a; a + \delta) = U_a^\circ$$

$$U_A = (A - \varepsilon; A + \varepsilon)$$

Дальше по определению

Rem.

1. Значение функции $f(x)$ в точке a в окрестности не участвует

2. Предел в точке – локальное свойство

3. В определении по Гейне: если все последовательности $f(x_n)$ имеют предел $\forall x_n : \begin{cases} x_n \neq a \\ x_n \in E \\ x_n \rightarrow a \end{cases}$, то все последовательности $\{f(x_n)\}$ имеют равные пределы

Доказательство

$$\begin{cases} x_n \rightarrow a; y_n \rightarrow a \\ f(x_n) \rightarrow A; f(y_n) \rightarrow B \\ z_n = x_1, y_1, x_2, y_2 \dots \end{cases}$$

$$z_n \rightarrow a \Rightarrow f(z_n) \rightarrow C \Rightarrow \begin{cases} A = C \\ B = C \end{cases} \Rightarrow A = B$$

Th. Определение предела по Коши и по Гейне равносильны

Доказательство

$$K \Rightarrow \Gamma. x_n : \begin{cases} x_n \neq a \\ x_n \in E \\ x_n \rightarrow a \end{cases}$$

Хотим $f(x_n) \rightarrow A$

Знаем: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

fix $\varepsilon > 0$, подбираем для нее δ

$$\delta \rightarrow \exists N : \forall n \geq N \ 0 < |x_n - a| < \delta \text{ и } x_n \in E \Rightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim f(x_n) = A$$

$$\Gamma \Rightarrow K. \text{ Надо: } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

От противного

Пусть есть $\varepsilon > 0$ для которого любая δ не подходит

$$\varepsilon \leftarrow \delta = 1 \exists x_1 : \begin{cases} 0 < |x_1 - a| < 1 \\ x_1 \in E \\ |f(x_1) - A| \geq \varepsilon \end{cases}$$

$$\varepsilon \leftarrow \delta = \frac{1}{2} \exists x_2 : \begin{cases} 0 < |x_2 - a| < \frac{1}{2} \\ x_2 \in E \\ |f(x_2) - A| \geq \varepsilon \end{cases}$$

$$\text{На } n\text{-м шаге } \delta = \frac{1}{n} \exists x_n : \begin{cases} 0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \\ x_n \in E \\ |f(x_n) - A| \geq \varepsilon \end{cases}$$

$$\text{Получили последовательность } x_n : \forall n \begin{cases} x_n \in E \\ x_n \neq a \\ |x_n - a| < \frac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_n \in E \\ x_n \neq a \\ \lim x_n = a \end{cases} \Rightarrow \lim f(x_n) = A ?!$$

Th. Свойства пределов:

1. Единственность пределов

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$

$$\text{Гейне: } \begin{cases} x_n \rightarrow a \\ x_n \neq a \\ x_n \in E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = B \end{cases}$$

У последовательности предел единственный $\Rightarrow A = B$

2. Локальная ограниченность

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in R$, то $\exists U_a : f(x)$ ограничена при $x \in U_a$

Определение через окрестность:

$$U_A = (A - 1; A + 1) \rightarrow \exists U_a : f(E \cap \overset{\circ}{U}_a) \subset U_A$$

$$A - 1 < f(x) < A + 1 \quad \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_a$$

Rem. Глобальной ограниченности нет

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

3. Стабилизация знака

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq 0 \Rightarrow \exists U_a : \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_a \quad f(x) \cdot A > 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall x \in E \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Берем $A > 0; \varepsilon = \frac{A}{2}$ – победа

$$\text{Def. } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

$$\text{Def. } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \in R \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \begin{cases} x \in E \\ x > \delta \end{cases} \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Th. Арифметические действия с пределами

$f, g : E \rightarrow R; a$ – предельная точка E

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A; \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B; A, B \in R \Rightarrow$$

$$1. \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm g(x) = A \pm B$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |A|$$

$$4. B \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

Доказательство

Пункт 1 по Гейне:

$$\begin{cases} \{x_n\} \begin{cases} x_n \in E \\ x_n \neq a \\ x_n \rightarrow a \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A$$

$$\text{Аналогично } \lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = B$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) + g(x_n) = A + B$$

Аналогично доказываются все пункты

Th. Предельный переход в неравенстве

$f, g : E \rightarrow R; a$ – предельная точка E

$$\text{В некоторой } \mathring{U}_a \ f(x) \leq g(x); \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \end{cases} \Rightarrow A \leq B$$

Доказательство

$$\text{По Гейне: } \{x_n\} \begin{cases} x_n \neq a \\ x_n \in E \\ x_n \rightarrow a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim f(x_n) = A \\ \lim g(x_n) = B \end{cases}$$

$$x_n \rightarrow a \Rightarrow \text{в какой-то момент } \forall n \geq N : x_n \in \mathring{U}_a \Rightarrow f(x_n) \leq g(x_n) \Rightarrow A \leq B$$

Th. Теорема о двух милиционерах

$f, g, h : E \rightarrow R; a$ – предельная точка E

В некоторой $\mathring{U}_a \ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \ (\forall x \in \mathring{U}_a)$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A \in R \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$$

Доказательство

$$\{x_n\} \begin{cases} x_n \neq a \\ x_n \in E \\ x_n \rightarrow a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x_n) \rightarrow A \\ h(x_n) \rightarrow A \end{cases}$$

$$\exists N : \forall n \geq N \ x_n \in \mathring{U}_a \Rightarrow f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$$

Критерий Коши (для функции):

$f : E \rightarrow R; a$ – предельная точка E

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \in R \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \mathring{U}_{\delta(a)} \cap E \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Доказательство

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in R \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \begin{cases} \forall x \in E \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \\ \forall y \in E \ 0 < |y - a| < \delta \Rightarrow |f(y) - A| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow |f(x) - f(y)| =$$

$$|(f(x) - A) + (A - f(y))| \leq |f(x) - A| + |f(y) - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

$$\Leftarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \mathring{U}_a \cap E \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Гейне:

$$\begin{cases} x_n \neq a \\ x_n \in E \\ x_n \rightarrow a \end{cases}$$

fix $\varepsilon > 0$, подбираем δ

$$\exists N : \forall n \geq N \ |x_n - a| < \delta \Rightarrow x_n \in \mathring{U}_a \cap E$$

$$\text{Возьмем } x_n, x_m : n, m \geq N \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$$

$$\text{Получили } \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall m, n \geq N \ |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \Rightarrow \{f(x_n)\} - \text{фундаментальная} \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \in R \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Def. $f : E \rightarrow R; E_1 = E \cap (-\infty; a)$

a – предельная точка E_1

$f_1 = f|_{E_1}$. Тогда если существует $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$, то он называется пределом слева для $f(x)$ в точке a

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

Def. $f : E \rightarrow R; E_2 = E \cap (a; +\infty)$

$f_2 = f|_{E_2}$. Тогда если существует $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$, то он называется пределом справа для $f(x)$ в точке a

$$\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

Это односторонние пределы

Rem. $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A \in R \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \ a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Def. $f : E \rightarrow R$

f – монотонно возрастает $\Leftrightarrow \forall x, y \in E : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

f – строго монотонно возрастает $\Leftrightarrow \forall x, y \in E : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

f – монотонно убывает $\Leftrightarrow \forall x, y \in E : x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

f – строго монотонно убывает $\Leftrightarrow \forall x, y \in E : x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

Th. $f : E \rightarrow R; E_1 = (-\infty; a) \cap E; a$ – предельная точка $E_1 \Rightarrow$

1. Если f монотонно возрастает и ограничена сверху, то $\exists \lim_{x \rightarrow a-} f(x) \in R$

Th. $f : E \rightarrow R; E_2 = (a; +\infty) \cap E; a$ – предельная точка $E_2 \Rightarrow$

1. Если f монотонно убывает и ограничена снизу, то $\exists \lim_{x \rightarrow a+} f(x) \in R$

Доказательство

1. f – ограничена сверху $\Rightarrow \exists \sup(f(x)) = A$

Хотим доказать $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A$

$\forall \varepsilon > 0$

$A - \varepsilon$ – не верхняя граница $\Rightarrow \exists y \in E_1 : f(y) > A - \varepsilon \Rightarrow \forall x > y \ f(x) > f(y) > A - \varepsilon$

$$\begin{cases} x < a \\ y < a \end{cases} \Rightarrow \forall x : a > x > y \ A + \varepsilon > A \geq f(x) > A - \varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A$$

§2. Непрерывность

Def. $f : E \rightarrow R, a \in E$

f называется непрерывной в точке a , если

1. a – не является предельной точкой E

2. a – предельная точка $E \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

2. $\forall U_{f(a)} \exists U_a : f(U_a \cap E) \subset U_{f(a)}$

3. $\forall x_n : \begin{cases} x_n \in E \\ x_n \rightarrow a \end{cases} \Rightarrow \lim f(x_n) = f(a)$

Ex:

$$\bullet f(x) = C \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = C$$

$$\bullet f(x) = x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = a = f(a)$$

$$\bullet f(x) = (x)$$

Для $f(0)$ неверно, значит не непрерывна

Th. $f(x) = \exp(x)$ непрерывна на R

Доказательство

1. $\exp(x)$ непрерывна в 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \exp(x) = \exp(0) = 1$$

$$\frac{1}{1-x} \geq \exp(x) \geq 1+x$$

По двум милиционерам $1 \geq \lim_{x \rightarrow 0} \exp(x) \geq 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \exp(x) = 1$

2. $x = a \neq 0$

$$\text{Хотим } \lim_{x \rightarrow a} \exp(x) = \exp(a)$$

$\exp(x) = \exp((x-a)+a) = \exp(x-a) \cdot \exp(a)$. Первое стремится к 1 по первому пункту, второе – константа $\Rightarrow \exp(x) \rightarrow 1 \cdot \exp(a)$

Th. Арифметика непрерывных функций

$f, g : E \rightarrow R; a \in E$

f, g – непрерывные в $a \Rightarrow$

1. $f \pm g$ – непрерывно в a
2. $f \cdot g$ – непрерывно в a
3. $|f|$ – непрерывно в a
4. $g(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}$ – непрерывно в a

Доказательство

1. a не является предельной точкой $E \Rightarrow$ очев, т.к. в ней все непрерывно

2. a – предельная точка $E \Rightarrow \begin{cases} \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \\ \exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) \end{cases} \Rightarrow$ зовем теорему про арифметику пределов

Th. О стабилизации знака

$f : E \rightarrow R$, непрерывна в $a; a \in E$ и $f(a) \neq 0 \Rightarrow \exists U_a : \forall x \in U_a f(x) \cdot f(a) > 0$

Доказательство

1. a – не является предельной \Rightarrow можем выбрать окрестность, в которой будет только a
2. a – предельная точка $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Rightarrow$ смотри теорему о стабилизации знака для предела функции

Th. О пределе композиции

$f : D \rightarrow R; g : E \rightarrow R; f(D) \subset E$

a – предельная точка $D; \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b; b \in E$

Если $g(x)$ непрерывна в b , то $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(b)$

Доказательство

g непрерывна в $b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall y \in E : |y - b| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(b)| < \varepsilon$

Для этой $\delta > 0 \exists \gamma > 0 : \forall x \in D : 0 < |x - a| < \gamma \Rightarrow |f(x) - b| < \delta$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \gamma > 0 : \forall x \in D 0 < |x - a| < \gamma \Rightarrow |g(f(x)) - g(b)| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(b)$

Следствие: $f : D \rightarrow R; g : E \rightarrow R; f(D) \subset E; a \in D; f(a) = b \in E$

Если f непрерывна в a , а g непрерывна в b , то композиция $g(f(x))$ непрерывна в a