Конспект Шорохова Сергея

Если нашли опечатку/ошибку - пишите @le9endwp

Содержание

1 Линейная алгебра и геометрия

Типичная система линейных уравнений: $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$; $a, b, c, d, e, f \in R$ – кольцо или $\in K$ – поле

Неизвестные здесь: $\binom{x}{y} \in K \times K$

Множество линейных уравнений: $\{px + qy = r\}$

Операции:

- Их можно складывать
- Умножать на константу (элемент K)

Definition 1.1. Векторное пространство

K – поле. Векторное пространство над K это $(V, +, \cdot)$, где V – множество, $+ : V \times V \to V$, $\cdot : K \times V \to V$

Аксиомы:

1-4. $(V, +)$ – абелева группа
5. $(ab)v = a(bv)$ $\forall a, b \in K, v \in V$
6. $(a + b)v = av + bv$ $\forall a, b \in K, v \in V$
7. $a(v + u) = av + au$ $\forall a \in K, v, u \in V$
8. $1v = v$ $\forall v \in V$

Lemma 1.1.

$0 \cdot v = \overrightarrow{0}$ $\forall v \in V$
$(-1) \cdot v = -v$ $\forall v \in V$

Доказательство:

$(0 + 0)v = 0v + 0v \Rightarrow 0v = 0v + 0v$

$(-0)v + 0v = (-0)v + 0v + 0v \Rightarrow \overrightarrow{0} = 0v$

Тогда $\overrightarrow{0} = 0v = (1 + (-1))v = 1v + (-1)v = v + (-1)v$, т.е. $v + (-1)v = \overrightarrow{0} \Rightarrow (-1)v = -v$

Remark 1.1.

$u + v = v + u$ $\forall u, v \in V$ следует из остальных 7 аксиом пространства (упражнение)

Example 1.1.

Тут рисуночки, говорящие что два вектора задают пространство, в котором выполнены аксиомы 1-8
Заметим, что есть биекция $vec \leftrightarrow R^2$, т.е. $v \to \binom{a}{b}$

Example 1.2. Самый главный пример

$$K^n = \{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} | a_i \in K\}$$

А еще тут выполнены все аксиомы (доказано методом очев): можем складывать, домножать итд

Это называем пространство столбцов

$^nK = \{(a_1, a_2 \dots a_n) | a_i \in K\}$

А это то же самое, но называем пространством строк

Definition 1.2. Линейное отображение

V_1, V_2 – векторные пространства над K

$f : V_1 \to V_2$ – линейное отображение (гомоморфизм), если:

1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)\ \forall v_1, v_2 \in V_1$
2. $f(kv) = kf(v)\ \forall k \in K, v \in V_1$

Definition 1.3. Изоморфизм

f – линейное отображение и биекция, тогда f – изоморфизм

$V_1 \cong V_2$ если существует изоморфизм $V_1 \to V_2$

А есть изоморфизм $vect_2 \cong R^2$, то есть вектор изоморфен его координатам

Example 1.3.

M – множество, $R \equiv K$

$V = HOM(M|R)$ – множество всех функций $M \to R$

$f_1, f_2 \in V$

$(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$

$(kf)(x) := k \cdot f(x)$

Значит V – векторное пространство

Example 1.4.

$M = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$

$$f \in V \leftrightarrow \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \in R^n$$

$V \cong R^n$

$M = [0, 1]$; $(f : M \to R$ – непрерывная функция$)$

Example 1.5.

$V = \{(a_1, a_2 \dots)|a_i \in R;\ a_{i+2} = a_i + a_{i+1}\}$
Заметим, что если $a \in V$, то $ka \in V$. Более того, если и $b \in V$, то $a + b \in V$
Но любую фиббоначиеву последовательность можно задать двумя начальными элементами, т.е. $(a_i) \in V \leftrightarrow (a_1, a_2) \in R^2$
Тогда $V \cong R^2$ но этот изоморфизм не лучший

Example 1.6.

M – множество, $V = 2^M$

1. $|M| = n$;
2. $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
3. $K = Z/2Z$
4. $0A = \varnothing$
5. $1A = A$

$1A + 1A = 2A \Rightarrow 1A + 1A = \varnothing$
$2A = \vec{0}\ \forall A$

Definition 1.4. Линейная комбинация

V – векторное пространство над K
$x_1 \dots x_n \in V;\ a_1 \dots a_n \in K$
Тогда $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ – линейная комбинация векторов $x_1 \dots x_n$ с коэффициентами $a_1 \dots a_n$

Definition 1.5. Подпространство

V – векторное пространство над K. $U \subseteq V$
U – подпространство V, если U – векторное пространство над K с теми же операциями

Remark 1.2.

U – подпространство $V \Leftrightarrow$

1. $\forall u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U$
2. $\forall u \in U, k \in K \Rightarrow ku \in U$

Где $U \neq \varnothing$

Example 1.7.

$U = \{V \parallel l\}$ – подпространство V
K^3, $U \subset K^3$
$U = \{(x, y, z)|x + y + z = 0\}$ – подпространство K^3

Definition 1.6. Линейная оболочка

V – векторное пространство над K
$V_1, \dots V_n \in V$
Линейная оболочка $\langle V_1, \dots V_n \rangle$ – их множество линейных комбинаций с произвольными коэффициентами
$\langle V_1, \dots V_n \rangle = \{a_1V_1 + \dots + a_nV_n | a_i \in K\}$

Remark 1.3.

1. $\langle V_1, \dots V_n \rangle$ – подпространство V
   $\langle V_1, \dots V_n \rangle < V$
2. $U < V;\ V_1 \dots V_n \in U \Rightarrow \langle V_1, \dots V_n \rangle \subset U$

Т.е. $\langle V_1, \dots V_n \rangle$ – нелинейное подпространство содержит $V_1 \dots V_n$

Доказательство:

$V_i = 0V_1 + \dots + 1V_i + \dots + 0V_n \Rightarrow V_i \in \langle V_1, \dots V_n \rangle$

$u, w \in \langle V_1, \dots V_n \rangle$

$ku + w \in \langle V_1, \dots V_n \rangle$

$U < V\ V_i \in U \Rightarrow a_iV_i \in U$

$a_1V_1 \dots a_nV_n \in U \Rightarrow a_1V_1 + \dots + a_nV_n \in U$

Т.е. U содержит все линейные комбинации $V_1 \dots V_n$

Remark 1.4.

Аналогично определяется линейная оболочка для любого числа векторов

Definition 1.7. Порождающая система

M называется порождающей системой в V, если $\langle M \rangle = V$, т.е. $\forall v \in V$ – линейная комбинация векторов из M

Definition 1.8. Конечномерные пространства

V – векторное пространство над K
V называется конечномерным, если $\exists$ конечная порождающая система. Будем изучать конечномерные пространства

Lemma 1.2.

$\langle V_1 \dots V_n \rangle$
$\langle V_1 + \sum\limits_2^n a_iV_i, V_2 \dots V_n \rangle = \langle V_1, V_2 \dots V_n \rangle$

Доказательство:

$V_1 + \sum\limits_2^n a_iV_i \in \langle V_1, V_2 \dots V_n \rangle$ и $V_2 \dots V_n \in \langle V_1 \dots V_n \rangle$

Тогда $\langle V_1 + \sum\limits_2^n a_iV_i, V_2 \dots V_n \rangle = \langle V_1, V_2 \dots V_n \rangle$ по Rem2.

Definition 1.9. Линейная независимость

$M \subset V$
M называется линейно независимым, если $\forall v_1 \dots v_n \in M$ и $\forall a_1 \dots a_n \in K : \sum a_i v_i = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$
Т.е. никакая линейнай комбинация элементов M не равна 0

Proposition 1.1.

$v_1 \dots v_n \in V$
Тогда $v_1 \dots v_n$ – линейно зависимы (не линейно независимы) $\Leftrightarrow \exists i : v_i \in \langle v_1 \dots v_{i-1}, v_{i+1} \dots v_n \rangle$
$v_i = \sum\limits_{j \neq i} a_j v_j$
$(-1)v_i + \sum\limits_{j \neq i} a_j v_j = \overrightarrow{0}$ – нетривиальная линейная комбинация
Пусть $\sum a_i v_i = 0$ – нетривиальная линейная комбинация
$\exists i : a_i \neq 0$
$-a_i v_i = \sum\limits_{j \neq i} a_j v_j \Rightarrow v_i = \sum\limits_{j \neq i} -\frac{a_j}{a_i} v_j$
$v_i \in \langle v_j \rangle$

Remark 1.5.

K не поле (ассоциативное кольцо)
V над k (с теми эе операциями) называется модулем над K. Для модулей это утверждение (и большинство других) неверно

Definition 1.10. Базис

V – векторное пространство над K
$v_1 \dots v_n$ – базис V, если это порождающая система и линейно независима

Definition 1.11. Размерность

V – конечномерное векторное пространство. Мощность его базиса называется размерностью V и обозначается $dim(V)$

Example 1.8.

$dim(K^n) = n$

Базис стандартный $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ итд

Definition 1.12.

$a_1 \dots a_n$ – координаты вектора v в базисе $v_1 \dots v_n$

Theorem 1.1.

Следующие условия равносильны:

1. $v_1 \dots v_n$ – базис V
2. $v_1 \dots v_n$ – порождающая линейно независимая система
3. $v_1 \dots v_n$ – максимальная по включению линейно независимая система
4. $\forall v \in V\ \exists! a_1 \dots a_n : v = \sum a_i v_i$

Theorem 1.2.

V – конечное векторное пространство

1. Базисы существуют
2. Любые два базиса равномощны

Доказательство:

$1 \Rightarrow 2$ $v_1 \dots v_n$ – базис $\Rightarrow v_1 \dots v_n$ – порождающая система

Почему лнз? $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$ и $\exists a_i \neq 0 \Rightarrow v_i = \sum\limits_{j \neq i} c_j v_j \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle v_1 \dots v_n \rangle = \langle v_1 \dots v_{i-1}, v_{i+1} \dots v_n \rangle$

$2 \Rightarrow 1$ $v_1 \dots v_n$ лнз

Пусть не минимальная порождающая. НУО $v_2 \dots v_n$ – порождающая система, в частности $v_1 = \sum a_i v_i \Rightarrow v_1 \dots v_n$ – линейно зависимая

$2 \Rightarrow 4$ $v_1 \dots v_n$ – порождающая лнз

Т.к. порождающая $\forall v = \sum a_i v_i$

Единственность: пусть $\sum a_i v_i = \sum a_i' v_i : \sum (a_i - a_i') v_i = 0 \Rightarrow a_i = a_i' \quad \forall i$

$4 \Rightarrow 2$ $\forall v \exists a_i : v = \sum a_i v_i$, т.е. $v_1 \dots v_n$ – порождающая

Лнз-ть: пусть $v_i = \sum\limits_{j \neq i} a_j v_j$. Тогда $v_i = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 1 \cdot v_i + \dots + 0 \cdot v_n =$

$= 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \dots + 0 \cdot v_n$

Exercise 1.1.

$2 \Leftrightarrow 3$

Lemma 1.3. Линейная зависимости линейных комбинаций

V – векторное пространство над K

$v_1 \dots v_n \in \langle u_1 \dots u_m \rangle;\ n > m$

Тогда $v_1 \dots v_n$ – линейно зависимы

Доказательство:

ММИ по m. База $m = 1$

$$\begin{cases} v_1 = a_1 u_1 \\ v_2 = a_2 u_1 \\ \dots \end{cases}$$

$a_2 v_1 - a_1 v_2 = 0$. Либо v_1, v_2 – линейно зависимы, либо $a_1, a_2 = 0 \Rightarrow v_1 = \overline{0} = v_2$

$1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \dots = 0 \Rightarrow v_1 \dots v_n$ – линейно зависимы

Переход: $m \to m + 1$

$$\begin{cases} v_1 = a_{1_1}u_1 + \ldots + a_{1_{m+1}}u_{m+1} \\ v_2 = a_{2_1}u_1 + \ldots + a_{2_{m+1}}u_{m+1} \\ \ldots \\ v_n = a_{n_1}u_1 + \ldots + a_{n_{m+1}}u_{m+1} \end{cases}$$

1. $a_{1_{m+1}} = a_{2_{m+1}} = \ldots = a_{n_{m+1}} = 0$
   $v_1 \ldots v_n \in \langle u_1 \ldots u_m \rangle$
   $n > m + 1 \Rightarrow n > m \Rightarrow v_1 \ldots v_n$ – линейно зависимы
2. НУО $a_{1_{m+1}} \neq 0$
   Вычтем из i равенства $(i = 2 \ldots n)$ первое умноженное на $\frac{a_{i_{m+1}}}{a_{1_{m+1}}}$
   Тогда $\tilde{v_i} = v_i - \frac{a_{i_{m+1}}}{a_{1_{m+1}}}v_1 = \sum\limits_{k=1}^{m+1}(a_{i_k} - \frac{a_{i_{m+1}}}{a_{1_{m+1}}}a_{1_k})u_k \in \langle u_1 \ldots u_m \rangle$
   $\tilde{v_2} \ldots \tilde{v_n} \in \langle u_1 \ldots u_m \rangle$, но $n > m + 1 \Rightarrow n - 1 > m \Rightarrow \tilde{v_2} \ldots \tilde{v_n}$ – линейно зависимы
   $\exists a_1 \ldots a_n$ – не все нули:
   $0 = \sum a_i\tilde{v_i} = \sum a_i(v_i - \frac{a_{i_{m+1}}}{a_{1_{m+1}}}v_1) = \sum a_iv_i + (\ldots)v_1 \Rightarrow v_1 \ldots v_n$ – линейно зависимы

Theorem 1.3. Следствие

$v_1 \ldots v_n$ – базис и $u_1 \ldots u_m$ – базис $\Rightarrow n = m$ (теорема часть 2)

Доказательство:

Пусть НУО $n > m$

$u_1 \ldots u_m$ – базис $\Rightarrow$ порождающая $\Rightarrow$ $v_1 \ldots v_n \in \langle u_1 \ldots u_m \rangle$; $n > m \Rightarrow v_1 \ldots v_n$ – линейно зависимы ???

1. $v_1 \ldots v_s$ – порождающая система (существует, т.к. V конечномерно)
   Пусть $v_1 \ldots v_s$ – линейно зависимы
   $\exists i : v_i \in \langle v_j \rangle;\ v_i = \sum\limits_{j \neq i} a_jv_j$
   НУО $i = 1$
   Тогда $\langle v_1 \ldots v_n \rangle = \langle v_1 - \sum\limits_{j \neq 1} a_jv_j, v_2 \ldots v_n \rangle = \langle v_2 \ldots v_n \rangle$
   $v_2 \ldots v_n$ – порождающая система. Продолжаем выкидывать v_i пока не получим базис
2. **Example 1.9. За что мы боремся?**

   Векторные пространства $\to$ абелевы группы
   $Z = \langle 1, 2, 3 \rangle = \langle 1, 2 \rangle = \langle 1 \rangle$
   С другой стороны $Z = \langle 1, 2, 3 \rangle = \langle 2, 3 \rangle$ – минимальная порождающая система

   $dimV = n$, если $\exists$ базис $v_1 \ldots v_n \Leftrightarrow$ в любом базисе n элементов

   Lemma 1.4.

   V – конечномерное пространство, $u_1 \ldots u_k$ – линейно независимы $\Rightarrow \exists u_{k+1} \ldots u_n$: $u_1 \ldots u_n$ – базис

   Доказательство:
   $u_1 \ldots u_k$ – не максимальная лнз. $\exists u_{k+1} : u_1 \ldots u_{k+1}$ – лнз
   $u_1 \ldots u_{k+1}$ – не максимальная лнз. $\exists u_{k+2} : u_1 \ldots u_{k+2}$ – лнз итд
   Заметим: не может быть $u_1 \ldots u_{n+1}$ – лнз (по лзлк), $u_1 \ldots u_{n+1} \in \langle v_1 \ldots v_n \rangle$

$\Rightarrow$ не позже n шага процесс закончится. На самом деле ровно на n шаге

Theorem 1.4. Следствие

$n = dimV$, $u_1 \dots u_m \in V$
$m > n \Rightarrow u_1 \dots u_m$ – линейно зависимы
$m < n \Rightarrow u_1 \dots u_m$ – не порождающая система

Theorem 1.5. Следствие

$U \leq V$, тогда $dimU \leq dimV$ и $dimU = dimV \Leftrightarrow U = V$

Theorem 1.6.

V – k-мерное над K. $dimV = n \Rightarrow V \cong K^n$

Доказательство:
$v_1 \dots v_n$ – базис V. Рассмотрим отображение $p : K^n \to V$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \to a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$$

$$f(x+y) = f(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n) \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}) = \sum(a_i+b_i)v_i = \sum a_iv_i + \sum b_iv_i = f(x) + f(y)$$

Exercise 1.2.

$f(kx) = kf(x)$

f – сюръективно и инъективно: по определению базиса

Example 1.10.

$v = \{f \in K[x] | deg(f) \leq 2\} = \langle 1, x, x^2 \rangle = \langle 1, 1+x, x^2 \rangle$ – оба базисы

Example 1.11. Числа Фиббоначи

$V = \{(a_1 \ldots)|a_{i+1} = a_i + a_{i-1}\}$
$V \leftrightarrow (a_1, a_2)$, $V \cong R^2$
Хороший базис:
$\varphi_1 = (1, \varphi, \varphi^2 \ldots) \in V$
$\varphi_2 = (1, (-\frac{1}{\varphi}), (-\frac{1}{\varphi})^2 \ldots) \in V$
φ_1, φ_2 – базис
$f = a\varphi_1 + b\varphi_2$
$f \to u_n = a \cdot \varphi^n + v(-\frac{1}{\varphi})^n$
$a = b = \frac{1}{\sqrt{5}}$

2 Система линейных уравнений (СЛУ)

Definition 2.1. Линейное уравнение

Линейное уравнение: $a_1x_1 \ldots a_nx_n = b$
где $a_1 \ldots a_n, b \in K$, а $x_1 \ldots x_n$ – переменные

Definition 2.2. Система линейных уравнений

СЛУ – это набор линейных уравнений: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{k_i}x_i = b_k$, $k = 1 \ldots m$
СЛУ соответствует отображение $A : K^n \to K^m$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \sum a_{1_i}x_i \\ \vdots \\ \sum a_{m_i}x_i \end{pmatrix}$$

Это отображение уважает сложение (просто поверьте), и вообще A – линейное отображение

Definition 2.3. Ядро и образ

$A : U \to V$ – линейное
Ядро: $ker(A) = \{x \in U | A(x) = \overline{0}\} \subset U$
$Im(A) = \{A(x) | x \in U\} \subset V$

Example 2.1.

В нашем примере

$$Im(A) = \{ \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} | \text{СЛУ} A(x) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \}$$

$Ker(A)$ = множество решений системы

$$\begin{cases} \sum a_{1_i} x_i = 0 \\ \vdots \\ \sum a_{m_i} x_i = 0 \end{cases}$$

Такие системы называются однородными

Lemma 2.1.

$A : U \to V$ – линейное отображение $\Rightarrow Ker(a) \le U$ и $Im(A) \le V$ – подпространство

Доказательство:

1. Надо проверить замкнутость
   $u_1, u_2 \in Ker(A)$, т.е. $A(u_1) = 0$ и $A(u_2) = 0$
   $A(u_1 + ku_2) = A(u_1) + kA(u_2) = 0 + 0 = 0$
2. $v_1, v_2 \in Im(A)$, $v_1 = A(u_1)$ и $v_2 = A(u_2)$
   $v_1 + kv_2 = A(u_1) + kA(u_2) = A(u_1 + ku_2) = A(u) \Rightarrow v_1 + kv_2 \in Im(A)$

Proposition 2.1.

В нашем примере:
Множество решений однородной линейной системы – подпространство в K^n

Тривиальный случай: $dim(Ker(A)) = 0$, т.е. $Ker(A) = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \}$ – всегда решение однородной СЛУ (есть только тривиальное решение)

Theorem 2.1.

В однородной СЛУ
$n > m \Rightarrow dim(Ker(a)) > 1$, т.е. существует нетривиальное решение СЛУ

Доказательство:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$u_1 \ldots u_n \in K^m;\ n > m \Rightarrow u_1 \ldots u_n$ – лз, т.е. $\exists x_1 \ldots x_n$ – не все нули: $\sum x_i u_i = 0$