

Содержание

1	Линейная алгебра и геометрия	2
2	Система линейных уравнений (СЛУ)	10
3	Операции над пространствами	16
4	Элементарные матрицы и метод Гаусса	19
5	Явные формулы линейной алгебры	23
6	Операторы	31
7	Нильпотентные операторы	36
8	Операторы над произвольными полями	41
9	Геометрия в векторных пространствах	42
9.1	Евклидовы и унитарные пространства	44
10	Операторы в евклидовых и унитарных пространствах	46
11	Самосопряженные операторы и квадратичные формы	49
12	Ортогональные и унитарные операторы	51

1 Линейная алгебра и геометрия

Типичная система линейных уравнений: $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$; $a, b, c, d, e, f \in R$ – кольцо или $\in K$ – поле

Неизвестные здесь: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K \times K$

Множество линейных уравнений: $\{px + qy = r\}$

Операции:

- Их можно складывать
- Умножать на константу (элемент K)

Definition 1.1. Векторное пространство

K – поле. Векторное пространство над K это $(V, +, \cdot)$, где V – множество, $+: V \times V \rightarrow V$, $\cdot: K \times V \rightarrow V$

Аксиомы:

- 1-4. $(V, +)$ – абелева группа
5. $(ab)v = a(bv) \forall a, b \in K, v \in V$
6. $(a + b)v = av + bv \forall a, b \in K, v \in V$
7. $a(v + u) = av + au \forall a \in K, v, u \in V$
8. $1v = v \forall v \in V$

Lemma 1.1.

$$\begin{aligned} 0 \cdot v &= \vec{0} \quad \forall v \in V \\ (-1) \cdot v &= -v \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

Доказательство:

$$(0 + 0)v = 0v + 0v \Rightarrow 0v = 0v + 0v$$

$$(-0)v + 0v = (-0)v + 0v + 0v \Rightarrow \vec{0} = 0v$$

$$\text{Тогда } \vec{0} = 0v = (1 + (-1))v = 1v + (-1)v = v + (-1)v, \text{ т.е. } v + (-1)v = \vec{0} \Rightarrow (-1)v = -v$$

Remark 1.1.

$u + v = v + u \forall u, v \in V$ следует из остальных 7 аксиом пространства (упражнение)

Example 1.1.

Тут рисуночки, говорящие что два вектора задают пространство, в котором выполнены аксиомы 1-8

Заметим, что есть биекция $vec \leftrightarrow R^2$, т.е. $v \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Example 1.2. Самый главный пример

$$K^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in K \right\}$$

А еще тут выполнены все аксиомы (доказано методом очев): можем складывать, домножать итд

Это называем пространство столбцов

$${}^n K = \{(a_1, a_2 \dots a_n) \mid a_i \in K\}$$

А это то же самое, но называем пространством строк

Definition 1.2. Линейное отображение

V_1, V_2 – векторные пространства над K

$f : V_1 \rightarrow V_2$ – линейное отображение (гомоморфизм), если:

1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V_1$
2. $f(kv) = kf(v) \quad \forall k \in K, v \in V_1$

Definition 1.3. Изоморфизм

f – линейное отображение и биекция, тогда f – изоморфизм

$V_1 \cong V_2$ если существует изоморфизм $V_1 \rightarrow V_2$

А есть изоморфизм $vect_2 \cong R^2$, то есть вектор изоморфен его координатам

Example 1.3.

M – множество, $R \equiv K$

$V = HOM(M|R)$ – множество всех функций $M \rightarrow R$

$f_1, f_2 \in V$

$$(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$$

$$(kf)(x) := k \cdot f(x)$$

Значит V – векторное пространство

Example 1.4.

$$M = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$$

$$f \in V \leftrightarrow \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \in R^n$$

$$V \cong R^n$$

$$M = [0, 1]; (f : M \rightarrow R \text{ – непрерывная функция})$$

Example 1.5.

$$V = \{(a_1, a_2 \dots) | a_i \in R; a_{i+2} = a_i + a_{i+1}\}$$

Заметим, что если $a \in V$, то $ka \in V$. Более того, если и $b \in V$, то $a + b \in V$

Но любую фиббоначиеву последовательность можно задать двумя начальными элементами, т.е. $(a_i) \in V \leftrightarrow (a_1, a_2) \in R^2$

Тогда $V \cong R^2$ но этот изоморфизм не лучший

Example 1.6.

M – множество, $V = 2^M$

1. $|M| = n$;

2. $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

3. $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

4. $0A = \emptyset$

5. $1A = A$

$$1A + 1A = 2A \Rightarrow 1A + 1A = \emptyset$$

$$2A = \vec{0} \quad \forall A$$

Definition 1.4. Линейная комбинация

V – векторное пространство над K

$$x_1 \dots x_n \in V; a_1 \dots a_n \in K$$

Тогда $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ – линейная комбинация векторов $x_1 \dots x_n$ с коэффициентами $a_1 \dots a_n$

Definition 1.5. Подпространство

V – векторное пространство над K . $U \subseteq V$

U – подпространство V , если U – векторное пространство над K с теми же операциями

Remark 1.2.

U – подпространство $V \Leftrightarrow$

1. $\forall u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U$

2. $\forall u \in U, k \in K \Rightarrow ku \in U$

Где $U \neq \emptyset$

Example 1.7.

$U = \{V \parallel l\}$ – подпространство V

$$K^3, U \subset K^3$$

$U = \{(x, y, z) | x + y + z = 0\}$ – подпространство K^3

Definition 1.6. Линейная оболочка

V – векторное пространство над K

$V_1, \dots, V_n \in V$

Линейная оболочка $\langle V_1, \dots, V_n \rangle$ – их множество линейных комбинаций с произвольными коэффициентами

$$\langle V_1, \dots, V_n \rangle = \{a_1 V_1 + \dots + a_n V_n | a_i \in K\}$$

Remark 1.3.

1. $\langle V_1, \dots, V_n \rangle$ – подпространство V

$$\langle V_1, \dots, V_n \rangle < V$$

2. $U < V; V_1 \dots V_n \in U \Rightarrow \langle V_1, \dots, V_n \rangle \subset U$

Т.е. $\langle V_1, \dots, V_n \rangle$ – нелинейное подпространство содержит $V_1 \dots V_n$

Доказательство:

$$V_i = 0V_1 + \dots + 1V_i + \dots + 0V_n \Rightarrow V_i \in \langle V_1, \dots, V_n \rangle$$

$$u, w \in \langle V_1, \dots, V_n \rangle$$

$$ku + w \in \langle V_1, \dots, V_n \rangle$$

$$U < V \quad V_i \in U \Rightarrow a_i V_i \in U$$

$$a_1 V_1 \dots a_n V_n \in U \Rightarrow a_1 V_1 + \dots + a_n V_n \in U$$

Т.е. U содержит все линейные комбинации $V_1 \dots V_n$

Remark 1.4.

Аналогично определяется линейная оболочка для любого числа векторов

Definition 1.7. Порождающая система

M называется порождающей системой в V , если $\langle M \rangle = V$, т.е. $\forall v \in V$ – линейная комбинация векторов из M

Definition 1.8. Конечномерные пространства

V – векторное пространство над K

V называется конечномерным, если \exists конечная порождающая система. Будем изучать конечномерные пространства

Lemma 1.2.

$$\langle V_1 \dots V_n \rangle$$

$$\langle V_1 + \sum_2^n a_i V_i, V_2 \dots V_n \rangle = \langle V_1, V_2 \dots V_n \rangle$$

Доказательство:

$$V_1 + \sum_2^n a_i V_i \in \langle V_1, V_2 \dots V_n \rangle \text{ и } V_2 \dots V_n \in \langle V_1 \dots V_n \rangle$$

Тогда $\langle V_1 + \sum_2^n a_i V_i, V_2 \dots V_n \rangle = \langle V_1, V_2 \dots V_n \rangle$ по Rem2.

Definition 1.9. Линейная независимость

$$M \subset V$$

M называется линейно независимым, если $\forall v_1 \dots v_n \in M$ и $\forall a_1 \dots a_n \in K : \sum a_i v_i = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$

Т.е. никакая линейная комбинация элементов M не равна 0

Proposition 1.1.

$$v_1 \dots v_n \in V$$

Тогда $v_1 \dots v_n$ – линейно зависимы (не линейно независимы) $\Leftrightarrow \exists i : v_i \in \langle v_1 \dots v_{i-1}, v_{i+1} \dots v_n \rangle$

$$v_i = \sum_{j \neq i} a_j v_j$$

$$(-1)v_i + \sum_{j \neq i} a_j v_j = \vec{0} - \text{нетривиальная линейная комбинация}$$

Пусть $\sum a_i v_i = 0$ – нетривиальная линейная комбинация

$$\exists i : a_i \neq 0$$

$$-a_i v_i = \sum_{j \neq i} a_j v_j \Rightarrow v_i = \sum_{j \neq i} -\frac{a_j}{a_i} v_j$$

$$v_i \in \langle v_j \rangle$$

Remark 1.5.

K не поле (ассоциативное кольцо)

V над k (с теми же операциями) называется модулем над K . Для модулей это утверждение (и большинство других) неверно

Definition 1.10. Базис

V – векторное пространство над K

$v_1 \dots v_n$ – базис V , если это порождающая система и линейно независима

Definition 1.11. Размерность

V – конечномерное векторное пространство. Мощность его базиса называется размерностью V и обозначается $\dim(V)$

Example 1.8.

$$\dim(K^n) = n$$

Базис стандартный $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ итд

Definition 1.12.

$a_1 \dots a_n$ – координаты вектора v в базисе $v_1 \dots v_n$

Theorem 1.1.

Следующие условия равносильны:

1. $v_1 \dots v_n$ – базис V
2. $v_1 \dots v_n$ – порождающая линейно независимая система
3. $v_1 \dots v_n$ – максимальная по включению линейно независимая система
4. $\forall v \in V \exists! a_1 \dots a_n : v = \sum a_i v_i$

Theorem 1.2.

V – конечное векторное пространство

1. Базисы существуют
2. Любые два базиса равномощны

Доказательство:

- $1 \Rightarrow 2$ $v_1 \dots v_n$ – базис $\Rightarrow v_1 \dots v_n$ – порождающая система
 Почему лнз? $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$ и $\exists a_i \neq 0 \Rightarrow v_i = \sum_{j \neq i} c_j v_j \Rightarrow$
 $\Rightarrow \langle v_1 \dots v_n \rangle = \langle v_1 \dots v_{i-1}, v_{i+1} \dots v_n \rangle$
- $2 \Rightarrow 1$ $v_1 \dots v_n$ лнз
 Пусть не минимальная порождающая. НУО $v_2 \dots v_n$ – порождающая система, в частности $v_1 = \sum a_i v_i \Rightarrow v_1 \dots v_n$ – линейно зависима
- $2 \Rightarrow 4$ $v_1 \dots v_n$ – порождающая лнз
 Т.к. порождающая $\forall v = \sum a_i v_i$
 Единственность: пусть $\sum a_i v_i = \sum a'_i v_i : \sum (a_i - a'_i) v_i = 0 \Rightarrow a_i = a'_i \quad \forall i$
- $4 \Rightarrow 2$ $\forall v \exists a_i : v = \sum a_i v_i$, т.е. $v_1 \dots v_n$ – порождающая
 Лнз-ть: пусть $v_i = \sum_{j \neq i} a_j v_j$. Тогда $v_i = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 1 \cdot v_i + \dots + 0 \cdot v_n =$
 $= 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \dots + 0 \cdot v_n$

Exercise 1.1.

$$2 \Leftrightarrow 3$$

Lemma 1.3. Линейная зависимости линейных комбинаций

V – векторное пространство над K

$v_1 \dots v_n \in \langle u_1 \dots u_m \rangle; n > m$

Тогда $v_1 \dots v_n$ – линейно зависимы

Доказательство:

ММИ по m . База $m = 1$

$$\begin{cases} v_1 = a_1 u_1 \\ v_2 = a_2 u_1 \\ \dots \end{cases}$$

$a_2 v_1 - a_1 v_2 = 0$. Либо v_1, v_2 – линейно зависимы, либо $a_1, a_2 = 0 \Rightarrow v_1 = \bar{0} = v_2$

$1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \dots = 0 \Rightarrow v_1 \dots v_n$ – линейно зависимы

Переход: $m \rightarrow m + 1$

$$\begin{cases} v_1 = a_{11}u_1 + \dots + a_{1m+1}u_{m+1} \\ v_2 = a_{21}u_1 + \dots + a_{2m+1}u_{m+1} \\ \dots \\ v_n = a_{n1}u_1 + \dots + a_{nm+1}u_{m+1} \end{cases}$$

$$1. a_{1m+1} = a_{2m+1} = \dots = a_{nm+1} = 0$$

$$v_1 \dots v_n \in \langle u_1 \dots u_m \rangle$$

$$n > m + 1 \Rightarrow n > m \Rightarrow v_1 \dots v_n - \text{линейно зависимы}$$

$$2. \text{НУО } a_{1m+1} \neq 0$$

$$\text{Вычтем из } i \text{ равенства } (i = 2 \dots n) \text{ первое умноженное на } \frac{a_{im+1}}{a_{1m+1}}$$

$$\text{Тогда } \tilde{v}_i = v_i - \frac{a_{im+1}}{a_{1m+1}}v_1 = \sum_{k=1}^{m+1} (a_{ik} - \frac{a_{im+1}}{a_{1m+1}}a_{1k})u_k \in \langle u_1 \dots u_m \rangle$$

$$\tilde{v}_2 \dots \tilde{v}_n \in \langle u_1 \dots u_m \rangle, \text{ но } n > m + 1 \Rightarrow n - 1 > m \Rightarrow \tilde{v}_2 \dots \tilde{v}_n - \text{линейно зависимы}$$

$$\exists a_1 \dots a_n - \text{не все нули:}$$

$$0 = \sum a_i \tilde{v}_i = \sum a_i (v_i - \frac{a_{im+1}}{a_{1m+1}}v_1) = \sum a_i v_i + (\dots)v_1 \Rightarrow v_1 \dots v_n - \text{линейно зависимы}$$

Theorem 1.3. Следствие

$$v_1 \dots v_n - \text{базис и } u_1 \dots u_m - \text{базис} \Rightarrow n = m \text{ (теорема часть 2)}$$

Доказательство:

Пусть НУО $n > m$

$u_1 \dots u_m - \text{базис} \Rightarrow \text{порождающая} \Rightarrow v_1 \dots v_n \in \langle u_1 \dots u_m \rangle; \quad n > m \Rightarrow v_1 \dots v_n - \text{линейно зависимы} ???$

$$1. v_1 \dots v_s - \text{порождающая система (существует, т.к. } V \text{ конечномерно)}$$

Пусть $v_1 \dots v_s - \text{линейно зависимы}$

$$\exists i : v_i \in \langle v_j \rangle; \quad v_i = \sum_{j \neq i} a_j v_j$$

НУО $i = 1$

$$\text{Тогда } \langle v_1 \dots v_n \rangle = \langle v_1 - \sum_{j \neq 1} a_j v_j, v_2 \dots v_n \rangle = \langle v_2 \dots v_n \rangle$$

$v_2 \dots v_n - \text{порождающая система. Продолжаем выкидывать } v_i \text{ пока не получим базис}$

Example 1.9. За что мы боремся?

Векторные пространства \rightarrow абелевы группы

$$Z = \langle 1, 2, 3 \rangle = \langle 1, 2 \rangle = \langle 1 \rangle$$

С другой стороны $Z = \langle 1, 2, 3 \rangle = \langle 2, 3 \rangle - \text{минимальная порождающая система}$

2.

$\dim V = n$, если \exists базис $v_1 \dots v_n \Leftrightarrow$ в любом базисе n элементов

Lemma 1.4.

$V - \text{конечномерное пространство, } u_1 \dots u_k - \text{линейно независимы} \Rightarrow \exists u_{k+1} \dots u_n : u_1 \dots u_n - \text{базис}$

Доказательство:

$u_1 \dots u_k - \text{не максимальная ЛНЗ. } \exists u_{k+1} : u_1 \dots u_{k+1} - \text{ЛНЗ}$

$u_1 \dots u_{k+1} - \text{не максимальная ЛНЗ. } \exists u_{k+2} : u_1 \dots u_{k+2} - \text{ЛНЗ ИТД}$

Заметим: не может быть $u_1 \dots u_{n+1} - \text{ЛНЗ (по ЛЗЛК), } u_1 \dots u_{n+1} \in \langle v_1 \dots v_n \rangle$

\Rightarrow не позже n шага процесс закончится. На самом деле ровно на n шаге

Theorem 1.4. Следствие

$$n = \dim V, u_1 \dots u_m \in V$$

$m > n \Rightarrow u_1 \dots u_m$ – линейно зависимы

$m < n \Rightarrow u_1 \dots u_m$ – не порождающая система

Theorem 1.5. Следствие

$$U \leq V, \text{ тогда } \dim U \leq \dim V \text{ и } \dim U = \dim V \Leftrightarrow U = V$$

Theorem 1.6.

$$V - k\text{-мерное над } K. \dim V = n \Rightarrow V \cong K^n$$

Доказательство:

$v_1 \dots v_n$ – базис V . Рассмотрим отображение $p : K^n \rightarrow V$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \rightarrow a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

$$f(x+y) = f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}\right) = \sum (a_i + b_i) v_i = \sum a_i v_i + \sum b_i v_i = f(x) + f(y)$$

Exercise 1.2.

$$f(kx) = kf(x)$$

f – сюръективно и инъективно: по определению базиса

Example 1.10.

$$v = \{f \in K[x] | \deg(f) \leq 2\} = \langle 1, x, x^2 \rangle = \langle 1, 1+x, x^2 \rangle - \text{оба базисы}$$

Example 1.11. Числа Фибоначчи

$$V = \{(a_1 \dots) | a_{i+1} = a_i + a_{i-1}\}$$

$$V \leftrightarrow (a_1, a_2), V \cong R^2$$

Хороший базис:

$$\varphi_1 = (1, \varphi, \varphi^2 \dots) \in V$$

$$\varphi_2 = (1, (-\frac{1}{\varphi}), (-\frac{1}{\varphi})^2 \dots) \in V$$

φ_1, φ_2 – базис

$$f = a\varphi_1 + b\varphi_2$$

$$f \rightarrow u_n = a \cdot \varphi^n + b(-\frac{1}{\varphi})^n$$

$$a = b = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

2 Система линейных уравнений (СЛУ)

Definition 2.1. Линейное уравнение

Линейное уравнение: $a_1x_1 \dots a_nx_n = b$

где $a_1 \dots a_n, b \in K$, а $x_1 \dots x_n$ – переменные

Definition 2.2. Система линейных уравнений

СЛУ – это набор линейных уравнений: $\sum_{i=1}^n a_{ki}x_i = b_k, k = 1 \dots m$

СЛУ соответствует отображение $A : K^n \rightarrow K^m$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sum a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Это отображение уважает сложение (просто поверьте), и вообще A – линейное отображение

Definition 2.3. Ядро и образ

$A : U \rightarrow V$ – линейное

Ядро: $\ker(A) = \{x \in U \mid A(x) = \bar{0}\} \subset U$

$\operatorname{Im}(A) = \{A(x) \mid x \in U\} \subset V$

Example 2.1.

В нашем примере

$$\operatorname{Im}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \mid \text{СЛУ } A(x) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\}$$

$\operatorname{Ker}(A)$ = множество решений системы

$$\begin{cases} \sum a_{1i} x_i = 0 \\ \vdots \\ \sum a_{mi} x_i = 0 \end{cases}$$

Такие системы называются однородными

Lemma 2.1.

$A : U \rightarrow V$ – линейное отображение $\Rightarrow \operatorname{Ker}(A) \leq U$ и $\operatorname{Im}(A) \leq V$ – подпространство

Доказательство:

1. Надо проверить замкнутость
 $u_1, u_2 \in \operatorname{Ker}(A)$, т.е. $A(u_1) = 0$ и $A(u_2) = 0$
 $A(u_1 + ku_2) = A(u_1) + kA(u_2) = 0 + 0 = 0$
2. $v_1, v_2 \in \operatorname{Im}(A)$, $v_1 = A(u_1)$ и $v_2 = A(u_2)$
 $v_1 + kv_2 = A(u_1) + kA(u_2) = A(u_1 + ku_2) = A(u) \Rightarrow v_1 + kv_2 \in \operatorname{Im}(A)$

Proposition 2.1.

В нашем примере:

Множество решений однородной линейной системы – подпространство в K^n

Тривиальный случай: $\dim(\operatorname{Ker}(A)) = 0$, т.е. $\operatorname{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ – всегда решение однородной СЛУ (есть только тривиальное решение)

Theorem 2.1.

В однородной СЛУ

$n > m \Rightarrow \dim(\operatorname{Ker}(A)) > 1$, т.е. существует нетривиальное решение СЛУ

Доказательство:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$u_1 \dots u_n \in K^m$; $n > m \Rightarrow u_1 \dots u_n$ — лз, т.е. $\exists x_1 \dots x_n$ — не все нули: $\sum x_i u_i = 0$

$A: K^n \rightarrow K^m$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum a_{1i}x_i \\ \sum a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$$

Решить систему: найти A^{-1}

U, V — векторные пространства. $A: U \rightarrow V$ линейное отображение

Как описать A ?

Лемма 2.2.

$U_1, U_2 \dots U_n$ — базис U и $V_1, V_2 \dots V_n \in V$

Тогда $\exists!$ линейное отображение $A: U \rightarrow V: A(U_i) = V_i \quad \forall i = 1 \dots n$

Доказательство:

Уникальность: Пусть $A_1(U_i) = V_i$ и $A_2(U_i) = V_i$

? $A_1 = A_2 \Leftrightarrow A_1(u) = A_2(u) \quad \forall u \in U$

$u = \sum a_i u_i \quad a_i \in K$

Тогда $A_1(u) = A_1(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n) = A_1(a_1 u_1) + A_1(a_2 u_2) + \dots + A_1(a_n u_n) = a_1 A_1(u_1) + a_2 A_1(u_2) + \dots + a_n A_1(u_n) = a_1 V_1 + a_2 V_2 + \dots + a_n V_n$

Аналогично для A_2

Тогда $A_1(u) = A_2(u) \quad \forall u \in U$

Существование: Построим A . Рассмотрим какой-то $u \in U$

$\exists! a_1, a_2 \dots a_n: u = \sum a_i u_i$

Положим $A(u) = \sum a_i V_i$

$U_i = 0 \cdot u_1 + \dots + 1 \cdot u_i + \dots + 0 \cdot u_n \Rightarrow A(U_i) = 0 \cdot V_1 + \dots + 1 \cdot V_i + \dots + 0 \cdot V_n = V_i$

$u = \sum a_i u_i; \quad v = \sum b_i u_i$

$A(u + v) = A(\sum a_i u_i + \sum b_i u_i) = A(\sum (a_i + b_i) u_i) = \sum (a_i + b_i) V_i = \sum a_i V_i + \sum b_i V_i = A(u) + A(v)$

$A(kv) = kA(v)$ — очев

Definition 2.4. Матрица линейного отображения в базисах

Итак. $u_1, u_2 \dots u_n$ – базис U

Задать $A : U \rightarrow V \Leftrightarrow$ зафиксировать $A(u_1) \dots A(u_n) \in V$

$A : U \rightarrow V$ линейно $v_1, v_2 \dots v_m$ – базис V

$$A(u_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{m1}v_m$$

\vdots

$$A(u_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{mn}v_m$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ называется матрицей линейного отображения } A \text{ в базисах}$$

$\{u_i\}$ и $\{v_i\}$

Обозначение: $[A]_{\{u_i\}, \{v_i\}}$ – зависит от $\{u_i\}$ и $\{v_i\}$

Notation 2.1. Итог

Такая матрица:

- Отображение $\{1 \dots m\} \times \{1 \dots n\} \rightarrow R$ – R кольцо
- Отображение $I \times I \rightarrow R$ I, I – конечные множества

Обозначение: $M_{m,n}(R)$ – матрицы $m \times n$ над R

Изоморфизм:

K – поле, $M_{1,n} \cong^n K$ и $M_{n,1} \cong K^n$

$M_{m,n}(K)$ – векторное пространство над K

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})_{i=1 \dots m; j=1 \dots n}$$

$$k(a_{ij}) = (ka_{ij})_{i=1 \dots m; j=1 \dots n}$$

Операции:

$${}^n K \times K^n$$

$$((a_1 a_2 \dots a_n), \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}) \rightarrow \sum a_i b_i \text{ – умножение строки на столбец}$$

$$M_{m,n} \times K^n \rightarrow K^m \text{ – пример с прошлой лекции}$$

Theorem 2.2. Свойства:

$$(A, X) \rightarrow AX$$

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2$$

$$(A_1 + A_2)X = A_1X + A_2X$$

$$A(kX) = k(AX)$$

Доказательство:

$$m = 1$$

$$(a_1 + a'_1)b_1 + \dots + (a_n + a'_n)b_n = \sum a_i b_i + \sum a'_i b_i \text{ и наоборот } \sum (ka_i)b_i = \sum a_i(kb_i) = k \sum a_i b_i$$

В частности $A \in M_{m,n}$ – fix

$X \rightarrow AX$ – линейное отображение $K^n \rightarrow K^m$

Лемма 2.3.

$A : U \rightarrow V$, $\{u_i\}$ – базис U и $\{v_i\}$ – базис V

$A = [A]_{\{u_i\}, \{v_i\}}$

$u \in U$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – координаты u в базисе $\{u_i\}$

Тогда AX – координаты $A(u)$ в базисе $\{v_i\}$

Доказательство:

$$u = \sum x_i u_i$$

$$A(u) = \sum x_i A(u_i) = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^m a_{ji} v_j \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \right) v_j$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi} x_i \end{pmatrix} \text{ – координаты } A(u) \text{ в базисе } \{v_i\} \text{ и это } A \cdot X$$

Remark 2.1. Мораль

Любое линейное отображение при координатизации (отождествлении с K^n) превращается в умножение на матрицу

$$x \rightarrow A(x)$$

$$\tilde{x} \rightarrow A(\tilde{x})$$

$A : U \rightarrow V$ и знаем $\text{Ker} U, \text{Im} U$ – подпространства

$$\text{Ker} A = \{x | A(x) = 0_v\}$$

$$\text{Im} A = \{A(x) | x \in U\}$$

$$A : K^n \rightarrow K^m \quad X \rightarrow AX$$

$$A \in M_{m,n}(K)$$

$\text{Ker} A$ – множество решений однородной СЛУ с матрицей A

$$\text{Im} A = \{B | \exists x : Ax = B\}$$

$$u_1 \dots u_n \text{ – базис} \Rightarrow \text{Im} A = \langle A(u_1) \dots A(u_n) \rangle$$

$$A(u) = \sum a_i A(u_i)$$

e_i – стандартный базис ($i = 1 \dots n$)

$$\text{Im} A = \langle A_1 e_1 \dots A_n e_n \rangle$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \text{ – } i\text{-ый столбец } A$$

Theorem 2.3. Теорема о ядре и образе

$$A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Example 2.2.

1. A – поворот на $\frac{\pi}{2}$ – линейное отображение

Remark 2.2.

Параллельный перенос не линейное отображение

2. $A(x) = 0$
3. A – ортогональная проекция на Ox

1. $ImA = \mathbb{R}^2$
 $KerA = \{0\}$
2. $ImA = \{0\}$
 $KerA = \mathbb{R}^2$
3. $ImA = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$
 $KerA = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Theorem 2.4.

$A : U \rightarrow V$ – линейное

1. \exists базис $u_1 \dots u_n$ в U и $k \leq n$:
 $u_1 \dots u_k$ – базис $KerA$ и $u_{k+1} \dots u_n$ – базис ImA
2. $dimKerA + dimImA = dimU$

Доказательство:

$$1 \Rightarrow 2: k = dimKerA$$

$$n - k = dimImA$$

$$n = dimU$$

- 1: Выберем $u_1 \dots u_k$ – базис $KerA$

$u_1 \dots u_k$ – ЛНЗ \Rightarrow дополним до базиса: $u_1 \dots u_k, u_{k+1} \dots u_n$ – базис U

Осталось доказать: $A(u_{k+1}) \dots A(u_n)$ – базис ImA

1. $A(u_i) \in ImA$ по определению

2. Проверим $\langle A(u_{k+i}) \rangle = ImA$

$$v \in ImA \Rightarrow v = A(u) \quad u \in U, \quad a = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$$

$$A(u) = \sum a_i A(u_i) = \sum_{i=k+1}^n a_i A(u_i) \Rightarrow v \in \langle A(u_{k+i}) \rangle$$

3. Проверим ЛНЗ: пусть $\sum_{i=k+1}^n a_i A(u_i) = 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} a_i = 0 \quad \forall i$

$$\text{По линейности } 0 = \sum a_{k+i} A(u_{k+i}) = A(\sum a_{k+i} u_{k+i})$$

$$\text{То есть } \sum a_{k+i} u_{k+i} \in KerA = \langle u_1 \dots u_k \rangle$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n-k} a_{k+i} u_{k+i} = \sum_{i=1}^k (-a_i) u_i \right) \Rightarrow \sum a_i u_i = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$$

$$\text{В частности } a_{k+1} = \dots = a_n = 0$$

3 Операции над пространствами

Лемма 3.1.

$U_1, U_2 \leq U \Rightarrow U_1 \cap U_2 \leq U$. Д-во: очев

$U_1, U_2 \leq U \Rightarrow U_1 \cup U_2 \not\leq U$ (почти никогда)

$U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ – сумма по Минковскому

Сама лемма: $U_1, U_2 \leq U \Rightarrow U_1 + U_2 \leq U$

Доказательство:

$$x, y \in U_1 + U_2$$

$$x = x_1 + x_2; y = y_1 + y_2, \text{ где } x_1, y_1 \in U_1; x_2, y_2 \in U_2$$

$$x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \in U_1 + U_2$$

Definition 3.1. Прямая сумма

U_1, U_2 – векторные пространства над K

$U_1 + U_2 = U_1 \times U_2$ как множество с покомпонентными операциями – (внешняя) прямая сумма U_1 и U_2

Лемма 3.2.

$u_1 \dots u_n$ – базис U и $v_1 \dots v_m$ – базис V

Тогда $\{(u_1, 0) \dots (u_n, 0), (0, v_1) \dots (0, v_m)\}$ – базис $U + V$

Доказательство:

$$u \in U; v \in V$$

$$u = \sum a_i u_i; v = \sum b_i v_i$$

$$u + v = \sum a_i u_i + \sum b_i v_i = \sum (a_i u_i, 0) + \sum (0, b_i v_i)$$

Theorem 3.1. Следствие

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V$$

Theorem 3.2. Формула Грассмана

$U_1, U_2 \leq U$, U – в.п. над K

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

Доказательство:

Рассмотрим линейное отображение $A : U_1 + U_2 \rightarrow U$

$$\text{Im} A = \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\} = U_1 + U_2$$

$$\dim(\text{Im} A) = \dim(U_1 + U_2)$$

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2. \text{ Осталось понять: } \dim \text{Ker} A = \dim(U_1 \cap U_2)$$

$$\text{Тогда } \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

$\text{Ker} A = \{(u_1, u_2) | u_1 + u_2 = 0\} = \{(u_1, u_2) | u_1 = -u_2\} \Rightarrow$ отображение $U_1 \cap U_2 \rightarrow \text{Ker} A$ – изоморфизм векторного пространства

Definition 3.2. Канонический вид матрицы линейного отображения

$$A \mapsto CAD = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definition 3.3. Ранг линейного отображения

$$A : U \rightarrow V$$

$rkA = \dim ImA$ – размерность линейной оболочки столбцов матрицы $[A]$ (в любом базисе)

$$A = [A]; A = (c_1 | c_2 | \dots | c_n)$$

$rkA = \dim \langle c_1 \dots c_n \rangle$ – максимальное количество ЛНЗ столбцов матрицы

Theorem 3.3. Свойства ранга

1. $rk(A + B) \leq rkA + rkB$; $A, B \in M_{m,n}(K)$
2. $rk(A \cdot B) \leq \min(rkA, rkB)$; $A \in M_{m,n}(K), B \in M_{n,l}(K)$
3. Если в пункте 2 A или B обратимы (в том числе $(m = n)/(n = l)$), то $rk(A \cdot B) = rkA = rkB$
4. $rkA = rkA^T$

Remark 3.1.

Знаем: столбцы A^T – строки A , т.е. rkA – максимальное количество ЛНЗ строк

Строчный ранг совпадает со столбцовым

Доказательство:

1. $A = (c_1 | c_2 | \dots | c_n)$; $B = (d_1 | d_2 | \dots | d_n)$; $c_i, d_i \in K^m$

$$A + B = (c_1 + d_1 | c_2 + d_2 | \dots | c_n + d_n)$$

$$\dim \langle c_1 + d_1 \dots c_n + d_n \rangle \leq \dim \langle c_1 \dots c_n, d_1 \dots d_n \rangle \leq \dim \langle c_1 \dots c_n \rangle + \dim \langle d_1 \dots d_n \rangle$$

$$\text{Значит } rk(A + B) \leq rkA + rkB$$

2. $A \cdot B \leftrightarrow A \circ B$

$$\text{Хотим } rk(A \circ B) \stackrel{(1)}{\leq} rkA \\ \stackrel{(2)}{\leq} rkB$$

$$(1) rk(A \circ B) = \dim(Im(A \circ B)) = \dim\{A(B(x))\} \leq \dim\{A(y)\} = \dim(ImA) = rkA$$

$$(2) Im(A \circ B) = \{A(B(x)) | x \in \dots\} = \{A(y) | y \in ImB\} = Im(A|_{ImB}) = \dim ImB - \dim(Ker(A|_{ImB})) \leq \dim ImB = rkB$$

3. Пусть $\exists A^{-1}$

$$\text{Тогда } rk(AB) \leq rk(B) = rk(A^{-1}AB) \leq rk(AB) \Rightarrow rk(B) = rk(AB)$$

4. Найдем C, D – обратимые

$$CAD = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(CAD)^T = D^T A^T C^T = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_1^T$$

$$rk(A_1) = rk(A_1^T) = l$$

$e_1 \dots e_l$ – что-то из стандартного базиса для K^m

По пункту 3

$$l = rk(CAD) = rk(AD) = rk(A)$$

$$l = rk(D^T A^T C^T) = rk(A^T C^T) = rk(A^T) \Rightarrow rk(A) = rk(A^T)$$

Remark 3.2.

C – обратима $\Leftrightarrow C^T$ – обратима

$$CC^{-1} = C^{-1}C = E$$

$$E = E^T = (C^{-1}C)^T = \frac{(C^{-1})^T C^T}{C^T (C^{-1})^T} \Rightarrow (C^{-1})^T = (C^T)^{-1}, \text{ т.е. } C^T \text{ – обратима}$$

Remark 3.3. Полуобратимость

$C \in M_{m,n}(K); D \in M_{n,m}(K)$ (т.е. $\exists CD, DC$). Пусть $m < n$

$$\Rightarrow rkC \leq m \Rightarrow rk(DC) \leq m \Rightarrow DC \neq E_n \text{ (} rkE = n \text{)}$$

Но может быть, что $CD = E_m$ – полуобратные матрицы

Theorem 3.4.

Следующие условия равносильны для $A \in M_n(K)$:

1. Строки A – ЛНЗ
2. Столбцы A – ЛНЗ
3. A обратима
4. $Ker A = \{0\}$
5. $Im A = K^n$
6. СЛУ с матрицей A имеет единственное решение для любой правой части

Доказательство:

$$1. 1 \Leftrightarrow rkA = n \Leftrightarrow 2$$

2. В две стороны:

$$3 \Rightarrow 2: n = rkE = rk(AA^{-1}) \leq rkA \leq n \Rightarrow rkA = n$$

$$2 \Rightarrow 3: \exists CAD = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$l = rkA = n \Rightarrow CAD = E$$

$$A \cdot (DC^{-1}) = E = (DC^{-1}) \cdot A \Rightarrow A \text{ обратима}$$

$$3. 3 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 5 \Leftrightarrow 6$$

Знаем: $A : K^n \rightarrow K^n$, т.е. A – инъекция ($Ker A = 0$) $\Leftrightarrow A$ – сюръекция ($Im A = K^n$) $\Leftrightarrow A$ – изоморфизм ($\exists A^{-1}$)

$$6. A \text{ – обратима СЛУ } AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

Если $\forall B \exists! X \text{ } AX = B \Rightarrow (x \mapsto AX) \text{ – биекция} \Leftrightarrow \exists A^{-1}$

Definition 3.4. ????

A называется обратимой/невырожденной/неособенной/неосовой матрицей полного ранга ...

Definition 3.5. Полная линейная группа

$(M_n(K))^* = GL(n, K)$ – полная линейная группа (обратимые матрицы относительно умножения)

4 Элементарные матрицы и метод Гаусса

Хотим: систему простых образующих $GL(n, K) = \langle \{s_i\} \rangle : \forall g \in GL(n, K) \ g = s_{i_1} \cdot s_{i_2} \cdot \dots \cdot s_{i_k}$ (не единственность разложения)

Приложение: $g^{-1} = (s_{i_1} \cdot \dots \cdot s_{i_k})^{-1} = s_{i_k}^{-1} \cdot \dots \cdot s_{i_1}^{-1}$ – алгоритм для вычисления g^{-1}

Definition 4.1. Трансвекция

$n \in \mathbb{N}$ – fix $(M_n(K))$; $i, j \in \{1 \dots n\}$; $i \neq j$

Трансвекция $t_{ij}(a) = E + aE_{ij}$; $e_{ij} \in M_n(K)$ и $(e_{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 & k = i, l = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

Example 4.1.

Пусть $x \in K^n$; $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$t_{ij}(a) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i + ax_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

К i -ой координате прибавляется j -ая, умноженная на a

$t_{ij}(a) \in GL(n)$

$(t_{ij}(a))^{-1} = t_{ij}(-a)$

Example 4.2. Действия на матрице

Слева $t_{ij}(a) \cdot A = t_{ij}(a)(c_1 | c_2 | \dots | c_m) = (t_{ij}(a) \cdot c_1 | \dots | t_{ij}(a) \cdot c_m) = \tilde{A}$

\tilde{A} получается из A прибавлением к i -ой строке j -ой строки, умноженной на a

Справа $A \cdot t_{ij}(a) = (A^T)^T ((t_{ij}(a))^T)^T = (t_{ij}(a)^T A^T)^T = (t_{ji}(a) A^T)^T$

К j -ому столбцу прибавляется i -ый, умноженный на a

Definition 4.2. Дилатация

$$m_i(a) = E + (a - 1)e_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & a & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Example 4.3.

$$m_i(a) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ ax_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$m_i(a) \in GL(n)$$

$$(m_i(a))^{-1} = m_i(a^{-1})$$

$m_i(a) \cdot A$ – умножение i -ой строки на a

$A \cdot m_i(a)$ – умножение i -ого столбца на a

Definition 4.3. Транспозиция

$$s_{ij} = E - e_{ii} - e_{jj} + e_{ij} + e_{ji}$$

$$s_{ij} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Умножение слева – перестановка строки, умножение справа – перестановка столбца

Proposition 4.1.

s_{ij} выражаема через трансвенции и дилатации

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+y \\ -x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$s_{12} = m_2(-1) \cdot t_{21}(1) \cdot t_{12}(-1) \cdot t_{21}(1)$$

Theorem 4.1. Метод Гаусса

1. $A \in M_{m,n}(K) \Rightarrow \exists$ элем. $e_1 \dots e_k : e_1 e_2 \dots e_k A$ – ступенчатая (типа треугольная но не очень)
2. $A \in GL(n, K) \Rightarrow \exists$ элем. $e_1 \dots e_s : e_1 e_2 \dots e_s A = E$
- 2'. $\forall A \in GL(n, K) \exists$ элем. $f_1 \dots f_s : A = f_1 f_2 \dots f_s$
3. $A \in M_{m,n}(K) \Rightarrow \exists$ элем. $e_1 \dots e_k, g_1 \dots g_l : e_1 e_2 \dots e_k A g_1 \dots g_l = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Доказательство:

$$2 \Rightarrow 2': e_1 e_2 \dots e_s A = E$$
$$A = e_s^{-1} \dots e_1^{-1} = f_1 f_2 \dots f_s; f_i = e_i^{-1}$$

Theorem 4.2. Следствие

$$e_1 \dots e_s A = E$$
$$(e_1 \dots e_s) = A^{-1}$$

Алгоритм для нахождения A^{-1} (если существует)

$$(A|E) \rightarrow (e_s A | e_s E) \rightarrow \dots \rightarrow (e_1 \dots e_s A | e_1 \dots e_s E) = (E | A^{-1})$$

Theorem 4.3. Теорема формализующая метод Гаусса

1. $A \in M_{m,n}(K) \Rightarrow \exists e_1 \dots e_k$ – Элементарные
- $$e_1 \dots e_k A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$
2. $A \in GL_n(K) \exists e_1 \dots e_s : e_1 \dots e_s A = E$
3. $A \in M_{m,n}(K) \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_1 \dots e_k A g_1 \dots g_l$

Доказательство:

1. Индукция по n

База $n = 0$ очев или $n = 1$ там то же, что и в переходе

Переход $n \rightarrow n + 1$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots \\ \vdots & \ddots & a_{1n} & \dots \end{pmatrix}$$

- $a_{11} \neq 0$

Домножим слева на $\prod t_{i1}(-\frac{a_{1i}}{a_{11}}) = T$

$$TA = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots \\ 0 & \dots \\ \vdots & \ddots \\ 0 & \dots \end{pmatrix}$$

По ИП $\exists u_1 \dots u_k$ – элементарные ($u_1 \dots u_k \in GL_{m-1} \Rightarrow \tilde{u}_i \in GL_m$)

$$u_1 \dots u_k \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots \\ 0 & a_{22} & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

Тогда $\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_k T A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots \\ 0 & a_{22} & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$, т.е. получили треугольную

- $a_{11} = 0$, но $\exists i : a_{1i} \neq 0$
 \exists матрица перестановки строк (произведение элементарных)
 Переставим, перейдем к случаю 1
- $\forall i : a_{1i} = 0$

$$\text{По ИП } \exists e_1 \dots e_k : e_1 \dots e_k \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots \\ 0 & a_{22} & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \tilde{\tilde{A}}$$

Если у нас матрица с нулевым первым столбцом, то такие же преобразования оставят первый столбик нулевым

2. $A \in GL_n(K)$

По пункту 1 $\exists e_1 \dots e_k$ – элементарные, такие что

$$e_1 \dots e_k A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \tilde{A} \Rightarrow \tilde{A} \in GL_n(K)$$

Лемма 4.1.

\tilde{A} – треугольная
 \tilde{A} обратима \Leftrightarrow все $a_{ii} \neq 0$

Доказательство:

$$A = (C_1 | \dots | C_n)$$

Все $a_{ii} \neq 0 \Rightarrow \forall i \ c_i \notin \langle c_1 \dots c_{i-1} \rangle \Rightarrow c_1 \dots c_n$ – ЛНЗ $\Rightarrow rk \tilde{A} = n \Rightarrow \tilde{A}$ обратима

А если \tilde{A} обратима $\Rightarrow rk \tilde{A} = n \Rightarrow c_1 \dots c_n$ – ЛНЗ

Пусть $a_{ii} = 0 (\exists i)$, все $c_1 \dots c_i \in \langle e_1 \dots e_{i-1} \rangle \Rightarrow c_n \dots c_i$ – ЛЗ????????????????????

Вернемся к теореме

Теперь домножим слева на $\prod t_{in}(-\frac{a_{in}}{a_{nn}})$

Потом на $\prod t_{i(n-1)}(-\frac{a_{i(n-1)}}{a_{n(n-1)}})$ и так далее

$$\text{Итого будет какая-то } \tilde{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots \\ 0 & a_{22} & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Потом набор дилатаций, которые превратят $\tilde{\tilde{A}} \rightarrow E$

3. Знаем: $\forall A \exists C, D$ – обратимые: $CAD = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

По пункту 2 $C = e_1 \dots e_k$; $D = g_1 \dots g_l$, где e_i, g_i – элементарные

$$\Rightarrow e_1 \dots e_k A g_1 \dots g_l = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notation 4.1. Разложение Гаусса

Знаем: $A \in GL_n(K)$

$$e_1 \dots e_k A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = u; \quad a_{ii} \neq 0$$

$$A = e_k^{-1} \dots e_1^{-1} u$$

Пусть всегда в методе Гаусса был случай 1 ($a_{ii} \neq 0$)

Тогда $\forall i \quad e_i = t_{k_i l_i}(a_i)$

$$e_i^{-1} = t_{k_i l_i}(-a_i)$$

$$e_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & 1 \end{pmatrix} - \text{нижнетреугольная матрица}$$

Тогда $e_1^{-1} \dots e_k^{-1}$ – тоже нижнетреугольная матрица

Итого: $A = LU$, где L – нижнетреугольная, U – верхнетреугольная

LU – разложение Гаусса

В общем случае $\exists P$ – матрица перестановки

$$PA = LU \Rightarrow A = \tilde{P}LU$$

\tilde{P} – матрица, где в каждой строке одна единичка на случайной позиции

5 Явные формулы линейной алгебры

СЛАУ $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$, где A^{-1} ищется методом Гаусса

В общем случае: Гаусс

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

В общем виде $x = \frac{ed-bf}{ad-bc}$, $y = \frac{af-ec}{ad-bc}$, если $ad - bc \neq 0$

Вот эти вот штуки после равно называют определителями. Они выражают идею площади

Что значит, что $ad - bc = 0$? Значит столбцы в матрице ЛЗ, тогда $S(v_1, v_2) = 0$

Хотим функцию $\det(K^n)^n \rightarrow K$. Причем такую, что:

$$1. \quad \forall i \quad \forall a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n \in K^n$$

Отображение $x \mapsto \det(a_1 \dots a_{i-1} x a_{i+1} \dots a_n)$ – линейно

$(K^n \rightarrow K)$ – полилинейность

$$2. \quad \exists i \neq j : x_i = x_j \Rightarrow \det - \text{кососимметричность}$$

$$3. \quad \det(e_1 \dots e_n) = 1, \text{ где } e_i - \text{стандартный базис}$$

Remark 5.1.

$$(K^n)^n \cong M_n(K)$$

$$\text{Тогда } 3 \Leftrightarrow \det(E) = 1$$

Example 5.1.

$$n = 2$$

3. Вот столбики $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда $S := 1$

$$2. \det(x, x) = 0$$

$$3. \det(x_1 + x_2, y) = \det(x_1, y) + \det(x_2, y)$$

Remark 5.2.

f – полилинейная и кососимметричная \Rightarrow

$$\Rightarrow \forall i, j \ f(x_1 \dots x_i \dots x_j \dots x_n) = -f(x_1 \dots x_j \dots x_i \dots x_n)$$

Доказательство:

В общем виде доказывать не будем, нам лень

$$n = 2$$

$$B(x, y) = f(x_1 \dots x_{i-1} x_i \dots g_1 x_{j+1} \dots x_n)$$

x_k – fix при $k \neq i, j$

$$g(x, x) = 0 \ \forall x$$

$$g(x + y, x + y) = g(x, x) + g(x, y) + g(y, x) + g(y, y) = 0$$

Remark 5.3.

Это похоже на свойство из определения, но равносильность есть только тогда, когда $\text{char } K \neq 2$

Theorem 5.1.

Если \det_1, \det_2 – функции удовлетворяющие аксиомам 1-3, то $\det_1(x_1 \dots x_n) = \det_2(x_1 \dots x_n)$ ($\forall x_1 \dots x_n \in K^n$), т.е. $\det_1 = \det_2$

Theorem 5.2.

\det существует

Начало доказательства теоремы 5.2:

Явная формула для \det

$$A = (x_1 | \dots | x_n) = (a_{ij}); \ i, j = 1 \dots n$$

$$\det A = \sum_{i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n} \pm a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$$

$n!$ слагаемых, каждому нужен знак

Слагаемое: $n \rightarrow i_n$ – биекция (перестановка), назовем π

$$\pi(k) = i_k$$

S_n – группа перестановок $|S_n| = n!$

$$\det = \sum_{\pi \in S_n} \varepsilon(\pi) a_{1\pi(1)} \dots a_{n\pi(n)}$$

s_{ij} – транспозиция, которая $s_{ij}(i) = j$; $s_{ij}(j) = i$; $s_{ij}(k) = k$ при $k \neq i, j$

$$\pi = s_{i_1 j_1} \circ \dots \circ s_{i_k j_k}. \text{ Тогда } \varepsilon(\pi) = (-1)^k$$

Такое разложение существует (очев), но не единственно!

k – не однозначно определено, но $k \bmod 2$ – однозначно определено

$\Rightarrow \varepsilon(\pi)$ – корректно определено

Notation 5.1.

$$\{\pi(1) \dots \pi(n)\} = \{1 \dots n\}$$

$(1, \pi(1)) \dots (n, \pi(n))$ – ладейная расстановка (n ладей на доске $n \times n$, не бьющие друг друга)

Theorem 5.3.

$\pi = t_{i_1, j_1} \dots t_{i_k, j_k}$. Тогда $k \bmod 2$ зависит только от π (не от разложения)

Доказательство:

Рассмотрим $\tilde{\varepsilon}(\pi) = |\{(i, j) | i < j; \pi(i) > \pi(j)\}|$ – количество инверсий

$$\tilde{\varepsilon}(\pi) = (-1)^{\text{что-то}}$$

Proposition 5.1.

В обозначениях выше $k \bmod 2 = |\{(i, j \dots)\}| \bmod 2 \Leftrightarrow \varepsilon(\pi) = \tilde{\varepsilon}(\pi)$ – корректно определено

Доказательство:

Докажем что t_{ij} транспозиция, $\tilde{\varepsilon}(t_{ij}\pi) = -\tilde{\varepsilon}(\pi)$ и $\tilde{\varepsilon}(id) = 1$ (у id 0 инверсий)

$$\Rightarrow \varepsilon(t_1 \dots t_s) = -\varepsilon(t_2 \dots t_s) = \varepsilon(t_3 \dots t_s) = \dots = (-1)^s \varepsilon(id) = (-1)^s$$

$$\pi : \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & l & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_k & \dots & a_l & \dots & a_n \end{matrix}$$

$$t_{lj}\pi : \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & l & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_l & \dots & a_k & \dots & a_n \end{matrix}$$

Посмотрим на изменившуюся часть:

Сначала r раз чтоб протащить k до l , потом меняем местами k и l , потом еще r раз меняем местами, чтоб вернуть на место l

Любая элементарная транспозиция меняет количество инверсий на 1

Всего сделали $2r + 1$ элементарную транспозицию \Rightarrow знак поменялся, т.к. $2r + 1$ – нечетное

Доказательство теоремы 5.3:

$$1. \det E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}, \text{ где } a_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j$$

$$\pi \neq id \Rightarrow \exists i : \pi(i) \neq i \Rightarrow a_{i, \pi(i)} = 0 \Rightarrow \prod \dots = 0$$

$$\text{Т.е. в сумме лишь } \varepsilon(i) a_{11} \dots a_{nn} = 1 \dots 1 = 1$$

$$\text{Обозначим } \varepsilon(\pi) a_{1, \pi(1)} \dots a_{n, \pi(n)} = A_\pi$$

$$A = \sum_{\pi \in S_n} A_\pi$$

$$\text{Линейность: } \det((a_{i1})(a_{i2}) \dots (a_{ik} + c \cdot a'_{ik}) \dots (a_{in})) = \det(A) + c \cdot \det(\tilde{A})$$

$$\tilde{A} = (a_{i1})(a_{i2}) \dots (a'_{ik}) \dots (a_{in})$$

$$\begin{aligned}
\forall \pi \quad \tilde{A} &= a_{1,\pi(1)} \dots (a_{k,\pi(k)} + c \cdot a''_{k,\pi(k)}) \dots a_{n,\pi(n)} = \\
&= \varepsilon(\pi) a_{1,\pi(1)} \dots a_{k,\pi(k)} \dots a_{n,\pi(n)} + c \cdot \varepsilon(\pi) a_{1,\pi(1)} \dots a'_{k,\pi(k)} \dots a_{n,\pi(n)} = \\
&= A_\pi + c \cdot \tilde{A}_\pi \Rightarrow \det(\tilde{A}) = \det(A) + c \cdot \det(\tilde{A}) \\
\text{Кососимметричность } A &= (a_{ij}). \text{ Доказать: } a_{ik} = a_{il} \forall i \Rightarrow \det A = 0 \\
\text{Это следует из того, что } \forall \pi \quad A_\pi &= -A_{t_{kl}\pi} \\
\varepsilon(t_{kl}\pi) &= -\varepsilon(\pi) \text{ (по предыдущей теореме)} \\
t_{kl}\pi(x) &= x \quad \pi(x) \neq k, l \\
t_{kl}\pi(x) &= l \text{ если } \pi(x) = k \\
t_{kl}\pi(x) &= k \text{ если } \pi(x) = l \\
x &\rightarrow ax; y \rightarrow ay; z \rightarrow az \dots - \text{разбиение на пары. Корректно, если } a^2 = id, \text{ т.е.} \\
x &\leftrightarrow ax \text{ итд} \\
A_\pi \neq A_{t_{kl}\pi} &= 0, \text{ сл-ные разбиваются на такие пары } \Rightarrow \sum = 0
\end{aligned}$$

Theorem 5.4.

\det единственный

Доказательство:

$\det_1, \det_2 : M_n(K) \rightarrow K$ удовлетворяют аксиомам 1-3

1. $\det_1(E) = \det_2(E) = 1$ (аксиома 3)

2. Докажем, что $\det_1(e_{i_1} \dots e_{i_n}) = \det_2(e_{i_1} \dots e_{i_n})$

Если $\exists k, l : i_k = i_l$, то $\det_1 = \det_2 = 0$ по кососимметричности

Все i_k различны $\Rightarrow \exists \pi \in S_n : i_k = \pi(k)$; $\pi = t_1 \dots t_l$, где t_i – транспозиция

$$(e_{\pi(1)} \dots e_{\pi(n)}) = E_\pi$$

$\det_{i_1}(E_\pi) = \det(tE_\pi)$, π – транспозиция. По кососимметричности перестановка любых двух столбцов/строк меняет знак

$$\det_1(\pi) = -\det(t_2 \dots t_l) = \det(t_3 \dots t_l) = \dots = (-1)^l \det(e_1 \dots e_n) = (-1)^l = \det_2(\pi)$$

3. Общий случай

$$\begin{aligned}
\det_1(c_1, c_2 \dots c_n) &= \det_1(\sum a_{i1}e_i, \sum a_{i2}e_i \dots \sum a_{in}e_n) = \sum a_{i1} \cdot \det(e_1, \dots, \sum a_{in}e_n) = \dots = \\
&= \sum a_{i1} \dots \sum a_{in} \det_1(e_1 \dots e_n) \text{ но с какой-то перестановкой и тут ссылка на пункт 2}
\end{aligned}$$

Theorem 5.5.

$$\det A = \det(A^T)$$

Доказательство:

$$A = (a_{ij}); A^T = (b_{ij}); b_{ij} = a_{ji}$$

$$A_\pi = \varepsilon(\pi) a_{1,\pi(1)} \dots a_{n,\pi(n)} = \varepsilon(\pi) a_{\pi^{-1}(1),1} \dots a_{\pi^{-1}(n),n} = \varepsilon(\pi^{-1}) b_{1,\pi^{-1}(1)} \dots b_{n,\pi^{-1}(n)} = B_{\pi^{-1}}$$

$$\det A = \sum A_\pi = \sum B_{\pi^{-1}} = \sum B_s = \det B$$

Почему $\varepsilon(\pi) = \varepsilon(\pi^{-1})$?

$\pi = t_1 \dots t_k$, где t_i – транспозиция

$$\pi^{-1} = t_k^{-1} \dots t_1^{-1} = t_k \dots t_1$$

Theorem 5.6. Следствие

\det линеен и кососимметричен по строкам

Theorem 5.7.

\det не меняется при трансвекциях, а при дилатациях с коэффициентом a умножается на a

Доказательство:

2. По полилинейности

Lemma 5.1.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \prod a_{ii}$$

$$\pi \neq id \Rightarrow \exists i : \pi(i) < i$$

$$a_{i,\pi(i)} = 0 \Rightarrow A_\pi = 0 \Rightarrow \det A = A_{id} = a_{11} \dots a_{nn}$$

Theorem 5.8. Следствие

Быстро считать определитель так:

Взяли A , Гауссом привели к \tilde{A} – треугольной матрице. Тогда знаем $\det(\tilde{A}) \Rightarrow$ знаем $\det A$

Theorem 5.9. Разложение по строке и столбцу

$$A = (a_{ij})$$

$$M_{kl} = \det(a_{ij})_{i \neq k, j \neq l} - \text{определитель матрицы} \in M_{n-1}(K)$$

1. i – fix

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

2. А если j – fix, то

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

Доказательство:

$$1. A = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

$$r_i = a_{i1}f_1 + a_{i2}f_2 + \dots + a_{in}f_n$$

По полилинейности $\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \det \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$

Сам определитель назовем M_j

$$M_i = \det \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = (-1)^{i-1} \cdot \det \begin{pmatrix} f_i \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = (-1)^{i-1} \cdot (-1)^{j-1} \det \begin{pmatrix} f_1 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Здесь $M_{ij} = \det \tilde{A}$ и \tilde{A} – это A без i -й строки и j -го столбца

Осталось заметить, что $\det B$ не меняется, если добавить слева столбец, сверху строку, в которых все нули, кроме b_{11}

Theorem 5.10. Следствие

$$k \neq i \\ \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{ij} M_{kj} = 0$$

Доказательство:

По предыдущей теореме это выражение – определитель матрицы с r_i вместо r_k (НУО $k < i$)

$$= \det \tilde{A} = \det \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

$\det \tilde{A}$ с одной стороны 0 по кососимметричности, с другой стороны выражение из следствия если разложить по k -й строке

Remark 5.4.

Аналогично со столбцом

Definition 5.1. Присоединенная матрица

$A = (a_{ij})$, M_{ij} – соответствующие миноры

$A^{adj} = (A_{ij})$, где $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ji}$

A^{adj} – присоединенная матрица

Theorem 5.11.

$$A \cdot A^{adj} = A^{adj} \cdot A = (\det A) \cdot E$$

$$\text{В частности } \det A \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{adj}$$

Доказательство:

$$A \cdot A^{adj} = (b_{ij})$$

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (A^{adj})_{kj} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{ik} M_{jk} = \begin{cases} 0; & i \neq j \\ \det A; & i = j \end{cases}$$

$$\text{Т.е. } A \cdot A^{adj} = \det A \cdot E$$

 $A^{adj} \cdot A = E$ – аналогично (разложение по столбцу)
Example 5.2.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^{adj} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{b}{bc-ad} \\ \frac{c}{bc-ad} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

Theorem 5.12. Теорема Крамера
 $A \cdot X = B$ – СЛУ. $A \in M_n(K)$; $X, B \in K^n$

$$\Delta = \det A \neq 0$$

 Δ_i – определитель матрицы, полученной из A заменой c_i на B

$$\Leftrightarrow \text{единственное решение системы } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \vdots \\ \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{pmatrix}$$

Доказательство:

$$A = (a_{ij})$$

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$$

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = (a'_{ij})$$

$$x_k = (A^{-1}B)_k = \sum_{i=1}^n a'_{ki} b_i = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{k+i}}{\det A} M_{ik} \cdot b_i = \frac{1}{\det A} \sum_{i=1}^n (-1)^{k+i} M_{ik} b_i$$
 – разложение по k -му столбцу для матрицы $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a & \dots & c_{k-1} & B & c_{k+1} & \dots & c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \Delta_k$

Notation 5.2.

$$f: (K^n)^n \rightarrow K$$

 f – полилинейна и кососимметрична и $f(e_1 \dots e_n) = 1 \Rightarrow f = \det$

Remark 5.5.

Если f – только полилинейна и кососимметрична, то $f = \det \cdot c$ для какой-то $c \in K$

Доказательство:

Пусть $c = f(E)$

$$\tau(A) = \frac{1}{c} f(A) \quad (c \neq 0)$$

$\tau(A)$ – полилинейна, кососимметрична и $\tau(E) = 1$

$$\tau = \det \Rightarrow f = \det \cdot c$$

$$\text{Если } c = 0, \text{ то } f(e_1 \dots e_n) = 0 \xrightarrow{\text{кососимметричность}} f(e_{\pi(1)} \dots e_{\pi(n)}) = (-1)^{\dots} \cdot 0 = 0$$

$$f(e_{i_1} \dots e_{i_n}) = 0 \text{ всегда} \Rightarrow f(v_1 \dots v_n) = 0 \text{ по полилинейности}$$

$$f \equiv 0 = 0 \cdot \det A$$

Theorem 5.13. Определитель – мультипликативный гомоморфизм

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

В частности $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$ (если $\det A \neq 0$)

$\det : M_n(K) \rightarrow K$ – гомоморфизм по умножению

$\det : GL_n(K) \rightarrow K^*$ – гомоморфизм групп

$$(M_n(K))^* \rightarrow K^*$$

Доказательство:

fix A . B – переменная

$f_A(B) = \det(AB)$. f – полилинейная и кососимметричная

Пусть у B 2 одинаковых столбца $\Rightarrow B$ – вырожденная $\Rightarrow AB$ – вырожденная $\Rightarrow f(AB) = 0$

$$\det(A \cdot (c'_1 + c''_1 | c_2 | \dots | c_n)) = \dots = \det(Ac'_1 + Ac''_1 | Ac_2 | \dots | Ac_n) = \det(Ac'_1 | Ac_2 | \dots | Ac_n) + \det(Ac''_1 | Ac_2 | \dots | Ac_n)$$

$$\det A \cdot \det(c'_1 | c_2 | \dots | c_n) + \det A \cdot \det(c''_1 | c_2 | \dots | c_n)$$

Поэтому $f_A(B) = c \cdot \det B$

$$B = E$$

$$\det(A \cdot E) = c \cdot \det(E) = c \Rightarrow c = \det A \Rightarrow \det(AB) = f_A(B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Theorem 5.14. Определитель блочной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} B & X \\ 0 & C \end{pmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ X & C \end{pmatrix}$$

Блок $B \in M_n(K)$; $C \in M_m(K)$; $X \in M_{n \times m}(K)$

Тогда $\det A = \det B \cdot \det C$

Доказательство:

fix B и X

$$f_B(C) = \det \begin{pmatrix} B & X \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

f_B – полилинейна и кососимметрична как функция от строк C (из полилинейности \det большой матрицы)

$$\Rightarrow f_B(C) = c \cdot \det C$$

$$c_b = f_B(E) = \det \begin{pmatrix} B & X \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

X – fix

$$g(B) = \det \begin{pmatrix} B & X \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

Она полилинейна и кососимметрична относительно столбцов B

$$g_B = c \cdot \det(B)$$

$$c = g_B(E) = \det \begin{pmatrix} E & X \\ 0 & E \end{pmatrix} = 1, \text{ т.к. матрица треугольная}$$

Тогда $g_B = \det B$

$$c_B = \det B$$

$$f_B(C) = \det B \cdot \det C$$

Theorem 5.15. Следствие

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & * & \dots & * \\ 0 & A_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix} = \det(A_1) \cdot \dots \cdot \det(A_n)$$

6 Операторы

Definition 6.1. Оператор

Оператор на B – это $f : V \rightarrow V$, где f – k -линейно

Definition 6.2.

Множество операторов на V – $\text{End}(V)$ – кольцо относительно сложения и композиции
 $\text{End}(V) \cong M_n(K)$
 $n = \dim V$

Remark 6.1.

A – оператор
 Матрица $A : A = [A]_e$
 В частности $\text{Id} \leftrightarrow E$ (в любом базисе)
 А обычно A зависит от базиса

Notation 6.1. Задача

Для каждого A найти максимально хороший базис (с очень простой матрицей A)

Notation 6.2.

У A можно искать

1. Ядро $AX = 0$
2. Неподвижные точки $AX = X$
3. Неподвижные прямые $AX = \lambda X$

Definition 6.3. Собственное число и собственный вектор

A – оператор $x \in V$; $x \neq 0$

$A(x) = \lambda x$; $\lambda \in K \Rightarrow$ x – собственный вектор
 λ – собственное число

$$A(kx) = k\lambda x$$

Знаем $\lambda \Rightarrow AX = \lambda X$ – СЛУ

λ – собственное число $\Leftrightarrow A(x) = \lambda x$ имеет решение $x \neq 0$

$$(A - \text{Id})x = 0 \Leftrightarrow \text{Ker}(A - \lambda \text{Id}) \neq 0 \Leftrightarrow A - \lambda \text{Id} \text{ вырожденная} \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

Definition 6.4. Характеристический многочлен

$\det(A - \lambda E) = \dots = \chi_A(\lambda)$ – характеристический многочлен (многочлен от λ степени n)

Remark 6.2.

Как итог: собственные числа A – корни его характеристического многочлена

Theorem 6.1. Следствие

$\dim V = n \Rightarrow$ у A не более n собственных чисел

Доказательство:

$\deg \chi_A(t) = n \Rightarrow$ у $\chi_A(t)$ не более n корней

Remark 6.3.

Определение $\chi_A(t)$ корректно:

A_1 и A_2 – матрицы A в разных базисах

$$\det(A_1 - tE) = \det(A_2 - tE)$$

Notation 6.3.

A, \tilde{A} – матрицы A в разных базисах $\Rightarrow A = C^{-1}\tilde{A}D$, где C, D – матрицы перехода

В нашем случае $A_2 = C^{-1}A_1C$, C – матрица перехода

Remark 6.4.

$$\begin{aligned} \det(A_2 - tE) &= \det(C^{-1}A_1C - tE) = \det(C^{-1}A_1C - tC^{-1}EC) = \det(C^{-1}(A_1 - tE)C) = \\ &= \det(C^{-1}) \det(A_1 - tE) \det(C) = \frac{1}{\det C} \det(A_1 - tE) \det C = \det(A_1 - tE) \end{aligned}$$

Lemma 6.1.

$\mathcal{A} : V \rightarrow V$; $v_1 \dots v_k$ – собственные вектора, соответствующие различным собственным числам $\lambda_1 \dots \lambda_k$

Тогда $v_1 \dots v_k$ – ЛНЗ

Доказательство:

Индукция по k . База: $k = 1$

v_1 – ЛНЗ $\Leftrightarrow v_1 \neq 0$ – по определению собственного вектора

Переход: $k \rightarrow k + 1$

Пусть $v_1 \dots v_{k+1}$ – линейно зависимы

$$\mathcal{A}v_i = \lambda_i v_i$$

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{k+1} a_i v_i = 0 \quad \text{Применим к обеим частям } \mathcal{A}$$

$$0 = \mathcal{A}(\sum a_i v_i) = \sum a_i \mathcal{A}(v_i) = \sum a_i \lambda_i v_i$$

$$(*) \cdot \lambda_{k+1} = a_1 \lambda_{k+1} v_1 + \dots + a_k \lambda_{k+1} v_k + a_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0$$

Получили две равные штуки, сократим на последнее слагаемое, получим

$$\sum_{i=1}^k a_i (\lambda_{k+1} - \lambda_i) v_i = 0 \xrightarrow{\text{ИП}} a_i = 0 \quad \forall i \in [1; k] \Rightarrow a_{k+1} = 0$$

Theorem 6.2. Следствие

$$\mathcal{A} : V \rightarrow V; \quad \chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{i=1}^k t - \lambda_i; \quad \lambda_i \neq \lambda_j$$

Тогда в V есть базис из собственных векторов \mathcal{A}

$[\mathcal{A}]_{e_1 \dots e_k}$ – диагональная

Доказательство:

Знаем: λ_i – собственное число $\Rightarrow \exists$ собственный вектор e_i

Все λ_i различные $\Rightarrow e_1 \dots e_n$ – ЛНЗ

$n = \dim V \Rightarrow e_1 \dots e_n$ – базис

Definition 6.5. Диагонализуемый оператор

\mathcal{A} называется диагонализуемым, если \exists базис из собственных векторов

($\Leftrightarrow [\mathcal{A}]$ – диагональная)

Remark 6.5. Препятствия в диагонализуемости

1. V – бесконечномерное, нет $\chi_A(t)$
Может не быть собственных чисел

Example 6.1.

$v_1 \dots v_n \dots$ – базис V
 $\mathcal{A}(v_i) = v_{i+1}$ – оператор сдвига

2. $\chi_A(t)$ не имеет разложения на линейные множители

Example 6.2.

$K = \mathbb{R}$
 $f(t) = t^2 + 1$
 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – поворот на π
 $f(e_1) = e_2; f(e_2) = -e_1$

3. $\chi_A(t)$ имеет кратные корни

Example 6.3.

$V = K[x]_n$
 $D(f) = f'$ – линейный оператор
 $D(f) = \lambda f$ – только если $f = \text{const}$; $\lambda = 0$
 $\chi_0(t) = (-t)^{n+1}$, но только 1 собственный вектор

Definition 6.6. Собственное подпространство

$\mathcal{A} : V \rightarrow V$ – линейный оператор
 λ – собственное число \mathcal{A} – корень $\chi_A(t)$
 $V_\lambda = \{v \in V : \mathcal{A}(v) = \lambda v\}$ – собственное подпространство

Remark 6.6.

Это действительно подпространство

Доказательство:

$$\begin{aligned} V_\lambda &\leq V \\ \mathcal{A}v_1 &= \lambda v_1 \\ \mathcal{A}(v_1 + v_2) &= \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2) \\ \mathcal{A}v_2 &= \lambda v_2 \end{aligned}$$

Definition 6.7.

$m_a(\lambda)$ – кратность λ в $\chi_A(t)$ – алгебраическая кратность
 $m_g(\lambda) = \dim V_\lambda$ – геометрическая кратность (максимальное количество ЛНЗ векторов, соответствующих λ)

Example 6.4.

$$\mathcal{A} = 0; \chi_A(t) = t^n$$

$$m_a(0) = n; m_g(0) = n$$

А если $\mathcal{A} = D$ из примера 6.3

$$m_a(0) = n + 1; m_g(0) = 1$$

Theorem 6.3.

1. $\forall \lambda m_a(\lambda) \geq m_g(\lambda)$
2. \mathcal{A} – диагонализуем $\Leftrightarrow \chi_A(t)$ раскладывается на линейные множители и $m_a(\lambda) = m_g(\lambda) \forall \lambda$

Доказательство:

1. Пусть $v_1 \dots v_k$ – базис V_λ ($k = m_g(\lambda)$)

$v_1 \dots v_k \dots v_n$ – базис V

$$\mathcal{A}v_1 = \lambda v_1$$

$$\mathcal{A}v_2 = \lambda v_2$$

$$\mathcal{A}v_k = \lambda v_k$$

$$\mathcal{A}v_{k+1} = \dots$$

$$[\mathcal{A}]_{v_1 \dots v_n} = \begin{pmatrix} \lambda E_k & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} - tE = \begin{pmatrix} (\lambda - t)E_k & B \\ 0 & C - tE_{n-k} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(\mathcal{A} - tE) = \det(\lambda - t)E_k \cdot \det(C - tE_{n-k}) = (\lambda - t)^k \cdot f(t) \Rightarrow \chi_A(t) \geq k$$

2. Пусть \mathcal{A} – диагонализуем \Rightarrow есть базис из собственных векторов

$v_1^1 \dots v_k^1$ – базис V_{λ_1}

$v_1^2 \dots v_k^2$ – базис V_{λ_2}

$v_1^s \dots v_k^s$ – базис V_{λ_s}

$$\deg \chi_A(t) = n \geq \sum m_a(\lambda_i) \geq \sum m_g(\lambda_i) \geq \sum k_i = n \Rightarrow \text{все неравенства – равенства}$$

$$m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) \forall i$$

$$n = \sum m_a(\lambda_i) \Leftrightarrow \chi_A(t) \text{ раскладывается на линейные множители}$$

Обратно: \mathcal{A} – диагонализуем $\Leftrightarrow \chi_A(t)$ раскладывается на линейные множители и $m_a(\lambda) = m_g(\lambda) \forall \lambda$

Пусть $v_1^i \dots v_{k_i}^i$ – базис V_{λ_i} ($k_i = m_g(\lambda_i)$)

Всего выбрали $\sum k_i = \sum m_g(\lambda_i) = \sum m_a(\lambda_i) = n$ векторов

$$\text{Осталось проверить, что они ЛНЗ Пусть } \sum_{i,j} a_{ij} v_j^i = 0 \Rightarrow 0 = \sum_i (\sum a_{ij} v_j^i)$$

$$\forall i \sum a_{ij} v_j^i \in V_{\lambda_i}$$

Тогда $\sum w_i = 0 \Rightarrow$ по лемме о ЛНЗ собственных чисел $\Rightarrow w_1 = \dots = w_s = 0$

$$w_i = \sum a_{ij} v_j^i = 0 \Rightarrow \text{все } a_{ij} = 0, \text{ т.к. } v_1^i \dots v_{k_i}^i \text{ – ЛНЗ}$$

7 Нильпотентные операторы

Definition 7.1. Нильпотентный оператор

$\mathcal{A} : V \rightarrow V$ – линейный оператор

\mathcal{A} называется нильпотентным, если $\exists N : \mathcal{A}^N = 0$

Remark 7.1.

$$\mathcal{A}^N = 0 \Rightarrow \mathcal{A}^{\dim V} = 0$$

Theorem 7.1. Свойство

λ – собственное число $\mathcal{A} \Rightarrow \lambda = 0$

($K = \mathbb{C} \Rightarrow \text{def} \Leftrightarrow \text{свойству}$)

Remark 7.2.

\mathcal{A} – нильпотентен и диагонализуем $\Rightarrow \mathcal{A} \equiv 0$

Definition 7.2. Жорданова цепочка

Жорданова цепочка для оператора \mathcal{A} – вектора $v_1 \dots v_k : \mathcal{A}v_i = v_{i+1}; \mathcal{A}v_k = 0$

Theorem 7.2.

\mathcal{A} – нильпотентный оператор на $V \Rightarrow \exists$ базис, состоящий из (непересекающихся) жордановых цепочек

Пусть цепочка одна

$$\mathcal{A}v_1 = v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \dots$$

$$\text{Тогда } [\mathcal{A}]_{v_1 \dots v_k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \iota_k(0) - \text{жорданов блок}$$

В общем случае и сама матрица делится на блоки, идущие по диагонали (посмотрите запись пожалуйста...)

Доказательство:

Шаг 0: $v_1^0 \dots v_n^0$ – базис V

$\forall i \ v_i^0 \dots v_i^{k_i}$ – жорданова цепочка

$$\mathcal{A}(v_i^{k_i}) = 0$$

$\{v_i^j\}$ – порождающая система векторов, состоящая из набора цепочек, $\langle v_i^j \rangle = V$

Основной шаг: $\{v_i^j\}$ – ЛЗ \Rightarrow преобразуем набор цепочек : количество $\{v_i^j\}$ уменьшается, а факт, что $\langle \{v_i^j\} \rangle = V$ сохраняется

\Rightarrow за несколько шагов придем к ЛНЗ системе \Rightarrow к базису, состоящему из жордановых цепочек

Notation 7.1. Детали

Пусть $\{v_i^j\}$ – ЛЗ $\Rightarrow \exists a_{ij}$ не все 0 : $\sum a_{ij}v_i^j = 0$ – считаем, что здесь уже выкинули все нулевые

1. Можно считать: $\forall i \exists$ не более 1 $j : a_{ij} \neq 0$

Иначе будем применять \mathcal{A} пока это не станет так

НУО все i различны. $\sum a_{is_i}v_i^{s_i} = 0$

$\sum a_{is_i}\mathcal{A}^{s_i}(v_i^0) = 0$ и $s_1 = \min\{s_i\}$

$\sum a_{is_i}\mathcal{A}^{s_1} \cdot (\mathcal{A}^{s_i-s_1}(v_i^0)) = 0$

$\mathcal{A}^{s_1}(\sum a_{is_i}\mathcal{A}^{s_i-s_1}(v_i^0)) = 0$

Распишем эту штуку: $\sum a_{is_i}\mathcal{A}^{s_i-s_1}(v_i^0) = a_{1s_1} \cdot v_1^0 + \sum_2 a_{is_i}\mathcal{A}^{s_i-s_1}(v_i^0) = 0$. А теперь часть суммы

(понятно какую) объявим как $(v_1^0)_{new}$

Заменяем: $v_1^0 \rightarrow (v_1^0)_{new}$ (и всю его цепочку)

$\mathcal{A}^{s_1}(v_1^0) \neq 0$, но $\mathcal{A}^{s_1}((v_1^0)_{new}) = 0 \Rightarrow$ первая цепочка укоротилась \Rightarrow количество $\{v_i^j\}$ уменьшилось. Осталось доказать, что это все еще порождающая система

Надо проверить, что $(v_i^j)_{old} \in \langle \{v_i^j\}_{new} \rangle$

$(v_i^j)_{old} = (v_i^j)_{new}$ при $i > 1$. Остается одно значение: $(v_1^0)_{old} = (v_1^0)_{new} - \sum_2 a_{is_i}v_i^{s_i-s_1}$

$(v_1^0)_{old} = \mathcal{A}^s(v_1^0) = \frac{(v_1^s)_{new} - \sum a_{is_i}(v_i^{s_i-s_1+s})_{new}}{a_{1s_1}}$

Notation 7.2. Матричная переформулировка

$A \in M_n(K)$; $A^N = 0 \Rightarrow \exists C$ – обратимая, такая что

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} J_{k_1}(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{k_s}(0) \end{pmatrix}$$

$\sum k_i = n$

$J_k(0)$ – матрица нильпотентного оператора в базисе жордановой цепочки

Remark 7.3. Анонс

$\mathcal{A}X = \mu X \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda \text{Id})X = (\mu - \lambda)X$

λ – единственное собственное число \mathcal{A} ($\mathcal{A} : V \rightarrow V$ и V над \mathbb{C}) $\Rightarrow \mathcal{A} - \lambda \text{Id}$ единственное собственное число 0 $\Rightarrow \mathcal{A}$ – нильпотентна $\Rightarrow \exists$ базис из жордановых цепочек

$$[\mathcal{A} - \lambda \text{Id}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

Theorem 7.3. Теорема Гамильтона-Кэли

$\mathcal{A}^n = 0$ или $(\mathcal{A} - \lambda \text{Id})^n = 0$ – знаем что делать. Хотим: какое-нибудь тождество $\forall \mathcal{A}$
 Матричный язык: $(A - \lambda E)^n = 0$. $\mathcal{A}^n - C_n^1 \lambda \mathcal{A}^{n-1} + C_n^2 \lambda^2 \mathcal{A}^{n-2} - \dots + (-1)^n \lambda^n E = 0$

Remark 7.4.

Бином Ньютона ОК

Бинок НЕОК $A, B \in M_n$ – не коммутируют, т.е. $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$
 $= A^2 + AB + BA + B^2$

(т.к. $AB \neq BA$)

И вообще $f(\mathcal{A}) \circ g(\mathcal{A}) = (f \circ g)(\mathcal{A})$

Example 7.1.

$$(\mathcal{A} - E)(\mathcal{A} - 2E) = \mathcal{A} \circ \mathcal{A} - 3\mathcal{A} + 2E$$

\mathcal{A} – оператор (A – матрица). $f = \chi_A(t)$. Тогда $f(\mathcal{A}) = 0$; $f(A) = 0$
 $\chi_A(\mathcal{A}) = 0$

Доказательство:

Для двоичников: $\chi_A(t) = \det(\mathcal{A} - tE)$

$$\det(A - \mathcal{A}) = \det(0) = 0$$

Нормальное:

Reminder 7.1.

$(A - tE)^{Adj}$ – матрица, составленная из миноров матрицы $A - tE$ и такая, что
 $(A - tE)^{Adj}(A - tE) = \det(A - tE)E = \chi_A(t)E$

$$A - tE \in M_n(K[t]); A \in M_n(K)$$

Или: $K[t] < K(t)$ – поле дробно-рациональных функций

Все формулы про \det не использующие деления верны в любом коммутативном кольце

С другой стороны $(A - tE)^{Adj}(A - tE) \in M_n(K[t])$

$$(A - tE)^{Adj}(A - tE) = (B_0 + tB_1 + t^2B_2 + \dots + t^{n-1}B_{n-1})(A - tE) = a_0E + a_1tE + a_2t^2E + \dots + a_nt^nE$$

$$\begin{cases} B_0A = a_0E \\ B_1A - B_0 = a_1E \\ B_2A - B_1 = a_2E \\ \dots \\ -B_{n-1} = a_nE \end{cases}$$

Домножим на что-то (A^i) так, чтобы в правой части было $a_0E + a_1A + a_2A^2 + \dots = \chi_A(A)$

В левой части будет $B_0A + (B_1A^2 - B_0A) + (B_2A^3 - B_1A^2) + \dots + (-B_{n-1}A^n) = 0$

Example 7.2.

$$n = 1$$

$$A = (a)$$

$$\chi_A(t) = a - t \text{ и } (a) - (a) = 0$$

$$n = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{pmatrix} = (a-t)(d-t) - bc = t^2 - (a+d)t + ad - bc = t^2 - \text{Tr}(A)t + \det(A)$$

$$\text{Итого: } A^2 = (a+d)A - (ad-bc)E$$

Remark 7.5.

В общем случае $\text{Tr}(A) = \sum a_{ii}$ – след матрицы

$\text{Tr}(A)$ – минус коэффициент при t^{n-1} в $\chi_A(t)$

$\text{Tr}(A)$ – сумма корней $\chi_A(t)$ (сумма собственных чисел с учетом алгебраической кратности)

Reminder 7.2.

$$\chi_A(A) = 0; \chi_A(t) = p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k} \text{ (} p_i \text{ – неразложимые и } k \text{ – любое)}$$

$$\chi_A(t) = (t - \lambda_1)^{a_1} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_k)^{a_k}; K = \mathbb{C}$$

$$p_i \neq p_j \text{ (} i \neq j \text{) (} p_i, p_j \text{) = 1}$$

Definition 7.3. Инвариантное подпространство

$\mathcal{A} : V \rightarrow V; U \leq V$ – называется инвариантным, если $\mathcal{A}(u) \in U \forall u \in U$. ($\mathcal{A}(U) \leq U$)

Remark 7.6.

\mathcal{A} задает новый оператор $\mathcal{A}|_U : U \rightarrow U$

Lemma 7.1.

1. $\mathcal{A} : V \rightarrow V; U$ – инвариантное подпространство
 $v_1, v_2 \dots v_k \dots v_n$ – базис V (префикс до k – базис U)

$$[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} [\mathcal{A}|_U] & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$
2. Если $U = \langle v_{k+1} \dots v_n \rangle$ – инвариантное подпространство, то

$$[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} [\mathcal{A}|_U] & 0 \\ 0 & [\mathcal{A}|_U] \end{pmatrix}$$

Доказательство:

Очев: i -ый столбец $[\mathcal{A}]$ ($i \leq k$)

$$\mathcal{A}(v_i) \in U = \langle v_1 \dots v_k \rangle; \mathcal{A}(v_i) = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + 0 \cdot \dots$$

Пункт б аналогично (смотрим $\mathcal{A}(v_i); i > k$)

Remark 7.7.

$v_1 \dots v_{k_1}, v_{k_1+1} \dots v_{k_2}, \dots$ – базис V

И каждый блок $\forall i \langle v_{k_i+1} \rangle \dots v_{k_{i+1}}$ – инвариантное подпространство

$$[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{A}_l \end{pmatrix}$$

Крайний случай: все v_i – одномерны \Rightarrow базис из собственных векторов, т.е. блоки размером 1×1

Example 7.3.

$V \leq V$; $\{0\}$ – инвариантное подпространство

$\langle v \rangle$ – инвариантно $\Leftrightarrow v$ – собственный вектор

$\forall \lambda \ v_\lambda = \{v \in V : \mathcal{A}(v) = \lambda v\}$ – собственное подпространство, соответствующее λ – инвариантно

При $\lambda = 0$ – ядро \mathcal{A}

$\Im \mathcal{A}$ – очевидно инвариантно

Reminder 7.3.

V – векторное пространство над K . $V_1 \dots V_k \leq V$

$V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k \rightarrow V$

$(V_1 \dots V_k) \mapsto V_1 + \dots + V_k$

Theorem 7.4.

Следующие условия равносильны:

1. F – изоморфизм векторных пространств

2. $V = V_1 + \dots + V_k$ и $V_i \cap (V_1 + \dots + V_{i-1} + V_{i+1} + \dots + V_k) = \{0\} \ \forall i$

В этом случае говорят, что V – внутренняя прямая сумма своих подпространств

Доказательство:

F – сюръективно \Leftrightarrow (1) по определению

F – инъективно \Leftrightarrow (2) чуть менее прямо но тоже в общем совершенно понятно

F – не инъективно $\Leftrightarrow \text{Ker } F \neq \{0\} \Leftrightarrow \exists (v_1 \dots v_k) \neq (0 \dots 0)$

$F(v_1 \dots v_k) = 0 \Leftrightarrow v_k = - \sum_{i \neq k} v_i$, т.е. $v_k \cap (v_1 \dots) \neq \{0\}$

TODO 04/07

8 Операторы над произвольными полями

Example 8.1.

$A \in M_n(\mathbb{R})$ $\chi_A(t) = t^n + t^3 + t^2 + t + 1$

Выберем $\forall v_1 \in \mathbb{R}^4$, $v_2 = Av_1$, $v_3 = Av^2$, $v_4 = Av^3$, $v_5 = A^4v_1$

Скорее всего (если $v \in Z^4$ то точно) $v_1 \dots v_5$ – ЛНЗ (упражнение)

Т.к. $A^4 + A^3 + A^2 + A + E = 0 \Rightarrow v_5 = -v_4 - v_3 - v_2 - v_1$

$$\begin{cases} Av_1 = v_2 \\ Av_2 = v_3 \\ Av_3 = v_4 \\ Av_4 = -\sum v_i \end{cases} \Rightarrow \tilde{A} = [A]_{\{v_i\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \text{Фробенисова форма матрицы}$$

Notation 8.1. Общий случай

$\mathcal{A} \in \text{Lin}(V, V)$, V над K

$v \in V$. Строим $v_1 = v, v_2 \dots v_k$, где $Av_{i+1} = \mathcal{A}(v_i)$ до тех пор пока $v_1 \dots v_k$ – ЛНЗ

$\Rightarrow v_{k+1} \in \langle v_1 \dots v_k \rangle$; $v_{k+1} = a_1v_1 + \dots + a_kv_k = (a_1Id + \dots + a_k\mathcal{A}^{k-1})(v_1)$

$(\mathcal{A}^k - a_k\mathcal{A}^{k-1} \dots - a_1Id)v_1 = 0$

Заметим: $(\mathcal{A}^k - a_k\mathcal{A}^{k-1} \dots - a_1Id)v_2 = (\dots)\mathcal{A}(v_1) = \mathcal{A}((\dots)v_1) = 0$

Аналогично для $v_3 \dots v_k$

Definition 8.1. Циклическое подпространство

$\mathcal{A}\langle v \rangle = \langle v_1 \dots v_k \rangle$ – циклическое подпространство, порожденное v – инвариантное подпространство (очев)

Definition 8.2. Фробениусова клетка

$$[\mathcal{A}]_{v_1 \dots v_k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_k \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(t) = t^k - a_k t^{k-1} - \dots - a_2 t - a_1$$

Exercise 8.1.

Знаем, что $\chi_A(\mathcal{A}(v_i)) = 0 \forall i$

И для v_1 нет многочлена меньшей степени с тем же свойством (по построению)

Remark 8.1.

Если v выбран случайно, то скорее всего $\langle v \rangle = V$

Theorem 8.1. В общем случае верна следующая теорема

\exists разложение V в прямую сумму циклических подпространств

$V = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle \dots \oplus \langle v_k \rangle$ – многочленами

Иными словами \forall оператора \exists базис : $[A]$ состоит из фробениусовых клеток и $\chi_A = f_1 \dots f_k$

9 Геометрия в векторных пространствах

Definition 9.1. Главная геометрическая операция

Это скалярное произведение векторов

Example 9.1.

В \mathbb{R}^2 – $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ – полилинейная

Definition 9.2. Билинейность

V – векторное пространство над K . Билинейная форма – это отображение $f : V \times V \rightarrow K$, линейное по каждому аргументу

$f(ax + by, z) = af(x, z) + bf(y, z)$

Example 9.2. Билинейная форма в координатах

$v_1 \dots v_n$ – базис V

$x, y \in V$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ – координаты x и y в этом базисе

$f(x, y) = f(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, y_1 v_1 + \dots + y_n v_n) = \sum x_i f(v_i, \sum y_j v_j) = \sum f(v_i, v_j) x_i y_j =$

$= \sum x_i a_{ij} y_j = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} \sum a_{ij} y_j \\ \sum a_{ij} y_j \\ \vdots \\ \sum a_{ij} y_j \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) (a_{ij}) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x^T A y$

Definition 9.3.

$A = (f(v_i, v_j))$ – называется матрицей билинейной формы (матрица Грама) f относительно базиса $v_1 \dots v_n$

$x \rightarrow Ax$ – линейное отображение

$(x, y) \rightarrow x^T A y$ – билинейная форма

Example 9.3.

$$A = E$$

$$f(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Пусть $v_1 \dots v_n$ – старый базис и $u_1 \dots u_n$ – новый C – матрица перехода $\begin{cases} x \rightarrow Cx \\ y \rightarrow Cy \end{cases}$

$$f(x, y) = x^T A_{old} y = (Cx)^T A_{new} Cy = x^T C^T A_{new} Cy = x^T A_{old} y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow C^T A_{new} C = A_{old}$$

$$A \rightarrow C^T A C \text{ (формула замены)}$$

$$A \rightarrow C^{-1} A C \text{ (формула для операторов)}$$

Definition 9.4. Симметрическая билинейная форма

Симметрической билинейной формой называется f – билинейная на V такая, что $f(x, y) = f(y, x)$

$Byl(V, V)$ – билинейные формы

$Sym(V, V) \subset Byl(V, V)$ – симметрические

Remark 9.1.

$Byl(V, V)$ – векторное пространство над V

$Sym(V, V)$ – подпространство $Byl(V, V)$

Theorem 9.1. Утверждение

$f \in Byl(V, V)$, A_f – ее матрица Грама

f – симметричная $\Leftrightarrow f(x, y) = f(y, x) \Leftrightarrow f(v_i, v_j) = f(v_j, v_i)$ для любых базисных

$\Leftrightarrow A_f = A_f^T$ – симметрическая матрица

$$A = A^T \Rightarrow x^T A y = (x^T A y)^T = y^T A^T (x^T)^T = y^T A x \Rightarrow f(x, y) = f(y, x)$$

Remark 9.2.

Любая квадратная матрица задает билинейную форму, любая симметричная матрица задает симметричную билинейную форму

$(x, y) \rightarrow x^T A y$ – очев билинейно

Definition 9.5.

f – билинейная форма на V

q_f – ее квадратичная форма: $q_f(v) = f(v, v)$

$q_f : V \rightarrow K$

Свойства:

$$1. \quad q_f(kv) = k^2 q_f(v)$$

Theorem 9.2. Утверждение

f (симметричная) однозначно восстанавливается по q_f , т.е. $q_{f_1} = q_{f_2} \Rightarrow f_1 = f_2$

$$2xy = (x + y)^2 - x^2 - y^2$$

Remark 9.3. $\text{char } K \neq 2$ *Доказательство:*Заметим, что $\forall v_1, v_2 \in V$

$$\frac{q_f(v_1+v_2) - q_f(v_1) - q_f(v_2)}{2} = \frac{f(v_1+v_2, v_1+v_2) - f(v_1, v_1) - f(v_2, v_2)}{2} = \frac{2f(v_1, v_2)}{2} = f(v_1, v_2)$$

Т.е. f однозначно выражается через q_f **9.1 Евклидовы и унитарные пространства** $K = \mathbb{R}$ **Definition 9.6. Евклидово пространство**

Евклидово пространство – это пара (V, f) , где V – векторное пространство над \mathbb{R} и f – симметрическая билинейная форма и f – положительно определенная

Т.е. $\forall v \in V \setminus \{0\} f(v, v) > 0$ и $q_f(v) > 0$ (и $f(0, v) = 0$)

Notation 9.1.Обозначим $f(x, y) = (x, y)$ **Definition 9.7. Длина вектора (норма)**

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

 $(V, \|\cdot\|)$ – (нормированное) метрическое пространство $d(x, y) = \|x - y\|$ – удовлетворяет неравенству треугольникаКБШ: $\forall x, y \in V |(x, y)|^2 \leq \|x\| \cdot \|y\|$

$$\arccos \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} = \angle(x, y)$$
 – угол между векторами x и y
TODO 04/21

Notation 9.2. Какое-то резюме прошлых пар

$f((x_1 \dots x_n), (y_1 \dots y_n)) = \sum a_{ij} x_i y_j$ – билинейная форма на \mathbb{R}^n и $A = (a_{ij})$

$f((x_1 \dots x_n), (y_1 \dots y_n)) = \sum x_i y_i \rightarrow (a_{ij}) = E$ – скалярное произведение (симметрично и положительно определено)

Знаем: f – симметрично положительно определено $\Rightarrow \exists$ ОНБ \Rightarrow можно лом. координаты (\mathbb{R}^n, f) – евклидово пространство

$$x_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} x'_j$$

$$f \rightarrow f_0;$$

$$y_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} y'_j$$

$f \rightarrow f_0 - \sum x'_i y'_i$ при этом f – симметрично положительно определено $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$ и все угловые миноры (a_{ij}) – положительны

Т.е. \exists изоморфизм $i : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ векторное пространство и $f(i(x), i(y)) = f_0(x, y) = \sum x_i y_i$. Доказательство через сопоставление ОНБ

Пусть \mathbb{C}^n , хотим скалярное произведение на \mathbb{C}^n – примерно с теми же свойствами, в частности $v \rightarrow \|v\| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ и $d(x, y) = \|x - y\|$ – метрическое пространство

$((x_1 \dots x_n), (y_1 \dots y_n)) = \sum x_i y_i$ – плохо, потому что $\|x\| = \sum x_i^2 \notin \mathbb{R}_{\geq 0}$

Правильная формула: $x_1 \rightarrow x_1 \cdot x_1$ – плохо, а вот $x_1 \rightarrow \overline{x_1} \cdot x_1$ – хорошо

Тогда $((x_1 \dots x_n), (y_1 \dots y_n)) = \sum x_i \overline{y_i}$ – скалярное произведение на \mathbb{C}^n

Definition 9.8. Полуторалинейная форма

V – векторно пространство над \mathbb{C}

$f : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ – полуторалинейная форма, если

1. $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$
2. $f(y, x_1 + x_2) = f(y, x_1) + f(y, x_2)$
3. $f(ax, y) = af(x, y)$
4. $f(x, ay) = \overline{a}f(x, y)$

(наш пример полуторалинеен)

Definition 9.9. Эрмитова форма

Полуторалинейная форма называется эрмитовой, если $\forall x, y \in V \ f(x, y) = \overline{f(y, x)}$

Definition 9.10.

Эрмитова форма – положительно определена, если $\forall x \neq 0 \ f(x, x) \in \mathbb{R}_+$

Remark 9.4.

f – полуторалинейная эрмитова, то $\forall x \ f(x, x) = \overline{f(x, x)} \in \mathbb{R}$

Definition 9.11.

Унитарным пространством называется пара (V, f) , где V – векторное пространство над \mathbb{C} и f – полуторалинейная эрмитова форма и положительно определена на V
 f называется скалярным произведением

Example 9.4.

$V = \mathbb{C}^n$; $f((x_1 \dots x_n), (y_1 \dots y_n)) = \sum x_i \overline{y_i} \Rightarrow (V, f)$ – унитарное пространство
 $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ и $f|_{\mathbb{R}^n}$ – старое скалярное произведение

Notation 9.3.

$A = (f(v_i, v_j))$ – матрица Грама f в базисе $f_1 \dots f_n$
 $f(x, y) = X^T A Y$; X, \overline{Y} – координаты x, y в $(v_1 \dots v_n)$ (доказательство – упр)
 При замене базиса $A \rightarrow C^T A \overline{C}$
 V – унитарное пространство. $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$ – норма. $d(u, v) = \|u - v\|$ – метрика (ничего не меняется)
 Уточнение: $\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}$. Можно доказать КБШ
 $\angle(x, y) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ – угол между прямыми и $\angle(x, y) = \arccos \left| \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|} \right|$
 Ортогональность, ОНБ – определяется как раньше
 Ортогонализация Грама-Шмидта – как раньше \rightarrow в любом унитарно $V \exists$ ОНБ $e_1 \dots e_n$
 В координатах $(e_1 \dots e_n)$ $V = (\mathbb{C}^n; f_0)$; f_0 – стандартное произведение
 Теорема об ортогональных дополнениях сохраняется

10 Операторы в евклидовых и унитарных пространствах

Definition 10.1. Отображение

$\mathcal{A} : U \rightarrow V$ – линейное отображение. U, V – евклидовы или унитарные пространства
 $\mathcal{B} : V \rightarrow U$ – называется сопряженным к \mathcal{A} , если $\forall u \in U, v \in V$ $(\mathcal{A}(u), v) = (u, \mathcal{B}(v))$

Существование и единственность:

$u_1 \dots u_n$ и $v_1 \dots v_m$ – ОНБ в U и V

\mathcal{B} – сопряженное к \mathcal{A} :

$\forall i \in 1 \dots n, j \in 1 \dots m$ $(\mathcal{A}u_i, v_j) = (u_i, \mathcal{B}v_j)$

$(\sum a_{ki} v_k, v_j) = (u_i, \sum b_{lj} u_l)$

$a_{ji} = \overline{b_{ij}}$ (т.к. ортогональность + нормированность)

Получается $A^T = \overline{B}$ ($B = \overline{A^T} \Rightarrow$ единственность)

Существование:

$B = \overline{A^T} \Rightarrow (\mathcal{A}u_i, v_j) = (u_i, \mathcal{B}v_j) \Rightarrow (\mathcal{A}(\sum a_i u_i), \sum b_j v_j) = \sum a_i \overline{b_j} (\mathcal{A}(u_i), v_j) = \sum a_i \overline{b_j} (u_i, \mathcal{B}v_j) = (\sum a_i u_i, \mathcal{B}(\sum b_j v_j))$

Обозначим $\mathcal{B} = \mathcal{A}^*$

$\mathcal{A} \in \text{End}(V, V)$

$\mathcal{A} : V \rightarrow V$ – линейный

$\mathcal{A}^* : V \rightarrow V$ – линейный

A – матрица \mathcal{A} в ОНБ $\Rightarrow \overline{A}^T$ – матрица \mathcal{A}^* в ОНБ

Theorem 10.1. Свойства сопряженного оператора

1. $0^* = 0$
2. $Id^* = Id$
3. $(A + B)^* = A^* + B^*$
4. $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$
5. $A^{**} = A$

Exercise 10.1.

Как выглядит формула для $[\mathcal{A}^*]$ в произвольном базисе?

Definition 10.2. Самосопряженные операторы

Оператор \mathcal{A} называется самосопряженным, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$

В матрицах:

- V – евклидово (ОНБ). $A = A^T$ – симметрическая матрица
- V – унитарное. $A = \overline{A}^T$ ($\overline{A} = A^T$) – эрмитова матрица

Remark 10.1.

A – эрмитова – матрица Грама эрмитовой формы

Remark 10.2.

V – евклидово пространство (\cdot, \cdot) – стандартное скалярное произведение

A – матрица Грама в ОНБ (отн стандартного) другого скалярного произведения $f(\cdot, \cdot)$

Тогда $f(x, y) = (Ax, y)$ (упражнение)

Lemma 10.1.

1. V – унитарна, $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \Rightarrow$ собственные числа \mathcal{A} вещественны
2. V – евклидово, $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \Rightarrow \chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod (t - \lambda) \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$

Доказательство:

1. λ – собственное число ($v \neq 0$ – собственный вектор λ)

$$(\mathcal{A}v, v) = (v, \mathcal{A}^*v)$$

$$(\mathcal{A}v, v) = (\lambda v, v) = (v, \lambda v)$$

$$\lambda(v, v) = \overline{\lambda}(v, v) \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

2. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$

$$A = A^T \text{ в } M_n(\mathbb{R})$$

$A = \overline{A}^T$ в $M_n(\mathbb{C})$ – матрица самосопряженного оператора \Rightarrow все собственные числа вещественные корни $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in \mathbb{R}$

Lemma 10.2.

$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$; $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ и $U \leq V$ – инвариантное подпространство
 $\Rightarrow U^\perp$ – инвариантное подпространство

Доказательство:

$$v \in U^\perp. \quad ? \mathcal{A}(v) \in U^\perp$$

$$\forall u \in U \quad (\mathcal{A}(v), u) = (v, \mathcal{A}u) = 0 \Rightarrow \mathcal{A}(v) \in U^\perp$$

Theorem 10.2.

V – евклидово/унитарное пространство. $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ – линейный
 $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \Leftrightarrow$ у \mathcal{A} есть ОНБ из собственных векторов с вещественными собственными числами

Доказательство:

$\Leftarrow e_1 \dots e_n$ – такой базис

$$\text{в ОНБ } [\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = A$$

$$A = \overline{A^T} \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{A}^*$$

\Rightarrow Индукция по $\dim V$

$$n \rightarrow n+1$$

$\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ собственное число $\Rightarrow \exists v_{n+1} \neq 0 : \mathcal{A}v_{n+1} = \lambda v_{n+1}$. $U = \langle v_{n+1} \rangle$ – инвариантно

По лемме U^\perp – инвариантное подпространство, т.е. $\mathcal{A}|_{U^\perp} : U^\perp \rightarrow U^\perp$ и $\mathcal{A}|_{U^\perp}$ – самосопряженный $\Rightarrow \exists$ ОНБ $v_1 \dots v_n$ (по ИП)

$$\mathcal{A}v_i = \lambda_i v_i, \quad \forall i = 1 \dots n. \quad v_{n+1} := \frac{v_{n+1}}{\|v_{n+1}\|}$$

$$\mathcal{A}v_{n+1} = \lambda_n v_{n+1} = \lambda_{n+1} v_{n+1}$$

$$\lambda_{n+1} \perp v_1 \dots v_n, \text{ т.к. } \langle v_1 \dots v_n \rangle = (\langle v_{n+1} \rangle)^\perp$$

Theorem 10.3. Следствие

Собственные вектора самосопряженного оператора, соответствующие различным собственным числам, ортогональны

Exercise 10.2.

Доказать (ясно)

Напрямую

Notation 10.1. Геометрическая формулировка

Самосопряженный оператор – композиция растяжений пространства в нескольких попарно перпендикулярных направлениях

Все вектора ОНБ переходят в себя, один из них $e_i \rightarrow \lambda_i e_i$

11 Самосопряженные оператора и квадратичные формы

Definition 11.1.

V – евклидово, \mathcal{A} – самосопряженный
 $f(x, y) = (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)$; $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ – симметричная билинейная форма
 $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ – квадратичная форма
 $e_1 \dots e_n$ – ОНБ
 $x \mapsto X \in \mathbb{R}^n$; $y \mapsto Y \in \mathbb{R}^n$; $\mathcal{A} \mapsto A \in M_n(\mathbb{R})$
 $(\mathcal{A}x, y) = \sum_{i=1}^n (Ax)_i y_i = (AX)^T Y = X^T AY$
 Вывод: матрица \mathcal{A} и матрица Грама $f_{\mathcal{A}}$ совпадают

Notation 11.1. Оценка квадратичной формы

f – положительно определенная квадратичная форма. $q(x) = f(x, x) > 0$ ($x \neq 0$)
 Хотим: $M||x||^2 > f(x) > m||x||^2$
 В координатах: $M(\sum x_i^2) > \sum a_{ij}x_i x_j > m(\sum x_i^2)$
 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$. Тогда $\frac{3}{2}(x^2 + y^2) \geq x^2 + xy + y^2 \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

Theorem 11.1.

$\lambda_{\max} \cdot ||x||^2 \geq q(x) \geq \lambda_{\min} \cdot ||x||^2$
 Здесь $\lambda_{\min} > 0$ и константы нельзя улучшить

Доказательство:

$q(x) = (\mathcal{A}x, x)$; $x = \sum c_i e_i$; $e_1 \dots e_n$ – собственный базис \mathcal{A}
 $q(x) = (\mathcal{A}(\sum c_i e_i), \sum c_i e_i) = (\sum c_i \lambda_i e_i, \sum c_i e_i) = \sum c_i^2 \lambda_i$
 $\lambda_{\min} = \min(\lambda_1 \dots \lambda_n)$; $\lambda_{\max} = \max(\lambda_1 \dots \lambda_n)$
 $\lambda_{\min} \sum c_i^2 \leq \sum c_i^2 \lambda_i \leq \lambda_{\max} \sum c_i^2$
 $||x||^2 = \sum c_i^2$ ($e_1 \dots e_n$ – ОНБ)
 $\lambda_{\min} ||x||^2 \leq q(x) \leq \lambda_{\max} ||x||^2$

Remark 11.1.

x – собственный вектор для λ_{\min} ($x = e_{\min}$), то неравенство превращается в равенство
 В частности $\lambda_{\min} > 0$

Remark 11.2.

Основное неравенство верно всегда

Notation 11.2.

V – евклидово/унитарное пространство, $e_1 \dots e_n$ – стандартный ОНБ

\mathcal{A} – самосопряженный. В $f_1 \dots f_n$ – ОНБ $[\mathcal{A}]_{f_1 \dots f_n} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$A = [\mathcal{A}]_{e_1 \dots e_n}. \exists C : C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Что можно сказать о C – матрице перехода

Столбцы C – столбцы $f_1 \dots f_n$ в базисе $e_1 \dots e_n$

$$f_i = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix}; f_j = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}$$

$$\text{Знаем, что } \delta_{ij} = (f_i, f_j) = \sum_{k=1}^n c_{ki} \overline{c_{kj}}$$

То есть столбцы C – ОНБ $\mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$

То есть $C \cdot \overline{C^T} = E \Leftrightarrow \overline{C^T} \cdot C = E$ или $C^T \cdot \overline{C} = E$ итд

Reminder 11.1.

$\overline{C^T} = C^*$ – матрица сопряженного оператора, т.е. $C^* = C^{-1}$

Notation 11.3.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = C^{-1}AC = C^*AC \begin{matrix} = C^T AC \text{ евклидово} \\ = \overline{C^T} AC \text{ унитарное} \end{matrix}$$

$C^{-1}AC$ – формула для оператора, а $C^T AC$ – формула для квадратичной формы

Итого: \forall квадратичной формы существует замена переменных с матрицей $C : C^* = C^{-1}$ (ортогональная замена), т.ч. $q \rightarrow \sum x_i x_i^2$. При этом λ_i определены однозначно (собственные числа матрицы \mathcal{A})

12 Ортогональные и унитарные операторы

Definition 12.1.

V – евклидово/унитарное пространство. C называется ортогональным/унитарным (или изометрией) ($C \in \text{Lin}(V, V)$), если выполнено одно из равносильных условий:

1. $\forall x, y \ (Cx, Cy) = (x, y)$
2. $\forall x \ \|Cx\| = \|x\|$
3. В ОНБ $C^T = \overline{C}^{-1}$
4. C – матрица перехода от ОНБ к ОНБ
5. C переводит любой ОНБ в ОНБ
6. \exists ОНБ $e_1 \dots e_n$, такой что $Ce_1 \dots Ce_n$ – ОНБ

"Доказательство":

- $1 \Rightarrow 2 \ (Cx, Cx) = (x, x)$
 $2 \Rightarrow 1 \ (x, y) = \frac{(x+y, x+y) - (x-x, y-y)}{2}$ (если V – евклидово, унитарное – упражнение)
 $3 \Leftrightarrow 4$ Чуть выше
 $4 \Leftrightarrow 6$ Очев. Матрица перехода от $\{e_i\}$ к $\{f_i\}$ = матрица отображения ($f_i \mapsto e_i$)
 $5 \Rightarrow 6$ Очев
 $6 \Rightarrow 1 \ Ce_i = f_i$, где $\{e_i\}, \{f_i\}$ – ОНБ
 $\forall x, y \ (Cx, Cy) = (C(\sum a_i e_i), C(\sum b_i e_i)) = (C(\sum a_i f_i), C(\sum b_i f_i)) = \sum a_i b_i = (x, y)$
 $1 \Rightarrow 5$ Очев

Example 12.1. Ортогональные/унитарные матрицы

$n = 1$. $\overline{C}C^T = E$ при $C = (c)$. Значит $\overline{C}C^T = (c\overline{c})$

C – ортогональная, значит $c = \pm 1$

C – унитарная, значит $c = (\cos \alpha + i \sin \alpha)$

$n = 2$; $K = \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ – ортогональная $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$

$C = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$

В первом случае это матрица поворота на α , во втором – матрица симметрии

$C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$C(0) = 0$ и C – сохраняет расстояния $\Rightarrow C$ – поворот или симметрия

Theorem 12.1. Утверждение

Ортогональные/унитарные матрицы образуют группу. Обозначается $O_n(\mathbb{R})$ или $U_n(\mathbb{C})$
 $O_n(\mathbb{R}) \leq GL_n(\mathbb{R})$ – обратимые матрицы и $|\det A| = 1$ для любой такой матрицы

Доказательство:

\mathcal{A}, \mathcal{B} – сохраняют скалярное произведение $\Rightarrow \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ – сохраняет скалярное произведение

Id – сохраняет скалярное произведение. \mathcal{A} – сохраняет $\Rightarrow \mathcal{A}^{-1}$ – сохраняет

Почему \mathcal{A} – ортогональный/унитарный $\Rightarrow \mathcal{A}$ – обратим?

\mathcal{A} – необратима $\Leftrightarrow \text{Ker } \mathcal{A} \neq 0 \Leftrightarrow \exists x \neq 0 : \mathcal{A}x = 0$, но $0 = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (x, x) \neq 0$????

$$A \cdot \overline{A^T} = E$$

$$\det(A) \cdot \det(\overline{A^T}) = \det(E) = 1$$

$$1 = \det(A) \cdot \det(\overline{A}) = \det(A) \cdot \overline{\det(A)} = |\det(A)|^2$$

Notation 12.1. Ориентация

$e_1 \dots e_n$ и $f_1 \dots f_n$ – базисы V над \mathbb{R}

C – матрица перехода от $\{e_i\}$ к $\{f_i\}$

$\{e_i\}$ и $\{f_i\}$ – одинаково ориентированы, если $\det(C) > 0$

Очевидно, что одинаковая ориентированность – отношение эквивалентности

Theorem 12.2. Утверждение

Существует ровно 2 класса эквивалентности базисов

Доказательство:

$\{e_i\}, \{f_i\}, \{g_i\}$ – 3 базиса

Пусть $\{e_i\} \not\sim \{f_i\} \not\sim \{g_i\}$

$$\det C_{e \rightarrow f} < 0 \text{ и } \det C_{f \rightarrow g} < 0$$

$$\det C_{e \rightarrow g} = \det C_{e \rightarrow f} \cdot \det C_{f \rightarrow g} > 0 \Rightarrow \nexists 3 \text{ разных классов}$$

Definition 12.2.

$\mathcal{A} \in \text{Lin}(V, V)$ – невырожденный

\mathcal{A} сохраняет ориентацию, если переводит каждый класс базисов в себя

\mathcal{A} меняет ориентацию, если он переставляет классы