

## План на 3 модуль (или 2 сем...)

1. Множества
2. ЧУМ
3. Исчисление высказываний
4. Исчисление предикатов
5. Теория кодирования

Почитать можно А. Х. Шеня

## Множества

1.  $x \in A$ ;  $y \notin A$
2. Арифметика множеств:  $\cup, \cap, \setminus, \Delta$
3.  $\emptyset$
4.  $A = \{a, b, c\}$ ;  $B = \{d\} \cup A$
5.  $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$

### Remark 0.1.

Чисто синтаксически вот такой бред:  $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$  имеет смысл

$X$  – множество:  $X \neq \emptyset$ . Рассмотрим  $x \in X$

$Term(x)$  – проблема, потому что мы не знаем, к каким характеристикам обращаемся и вообще не понятно, что мы выбрали

Спасают аксиомы ZFC

### Definition 0.1. Равномощность

$A, B$  – равномощны  $\Leftrightarrow \exists f : A \rightarrow B$  – биекция

А что с бесконечностями? Давайте возьмем функцию  $f : N \rightarrow 2N$

Хотя множество четных чисел – подмножество всех, но они равномощны, т.к.  $f$  – биекция

### Definition 0.2. Характеристическая функция

$X$  – множество. Есть  $\chi : X \rightarrow \{0, 1\}$ , т.е.  $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in X \\ 0, & x \notin X \end{cases}$  – характеристическая функция

А пусть  $X \subset Y$

- произведение характеристических функций  $X$  и  $Y$  – это характеристическая функция  $X \cap Y$
- $1 - \chi(x)$  – характеристическая функция дополнения  $X$
- $\max(\chi_X(x), \chi_Y(x))$  – характеристическая функция  $X \cup Y$

- $|X| = \sum_{x \in Y} \chi_X(x)$

### Example 0.1.

Возьмем  $2^N$ ;  $B = \{0, 1\}$  и  $B^\infty$

Равномощны ли они? Берем  $x \in 2^N$ , теперь  $b_i = \begin{cases} 1, & i \in x \\ 0, & i \notin x \end{cases}$

### Definition 0.3. Счетное множество

$X$  – счетное, если  $X$  равномощно  $N$

### Example 0.2.

Например, множество целых чисел счетно, т.к.  $x \in Z \Rightarrow \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x + 1, & x < 0 \end{cases}$

### Proposition 0.1.

1.  $X$  – счетно и  $Y \subset X \Rightarrow Y$  или счетно, или конечно
2.  $X$  – бесконечно. Тогда  $\exists Y$  – счетное:  $Y \subset X$
3.  $X_1, \dots, X_n, \dots$  – конечные или счетные. Тогда  $\bigcup X_i$  – конечное или счетное

*Доказательство:*

1.  $X$  – счетно, т.е. соответствует последовательности  $\{x_1, \dots, x_n, \dots\} = \xi$   
Возьмем  $\xi \cdot \chi(Y)$ . Т.е. что-то типа  $\{0, 0 \dots x_{i_1}, 0 \dots x_{i_2}, 0 \dots\}$  который равносильно  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots = Y$   
В свою очередь эта штука либо конечна, либо счетна, т.к. счетен  $X$
2. Просто выбираем по 1 элементу из  $X$ . Если они кончатся на каком-то шаге –  $X$  не бесконечно
3. Рисуем табличку. Берем элемент (1, 1), потом (1, 2), потом (2, 1), потом (1, 3) и так далее. То есть по диагоналям. Так переберем вообще все элементы (если не понятно, погуглите метод Кантора)

### Exercise 0.1.

В качестве следствия попробуйте построить явную биекцию между множеством рациональных чисел и натуральных

### Theorem 0.1.

$A$  – бесконечно,  $B$  – нбчс, т.е.  $B$  – конечно или счетно  
 $A \cup B$  равномощно  $A$

*Доказательство:*

$\exists Y \subset A$  – счетное

$Y$  и  $Y \cup B$  – равномощны

$$A \cup B = (A \setminus Y) \cup (Y \cup B)$$

$$A = Y \cup (A \setminus Y)$$

Биекция между  $Y$  и  $Y \cup B$  существует, значит  $A$  и  $A \cup B$  равноможны

### Example 0.3.

$[0; 1]$  и  $B^\infty$ . Равноможны ли? Да. Последовательность единиц и нулей – это бинарное число

Проблема:  $0, (9) = 1, (0)$

$b_1 \dots b_k, 1, 1, 1, 1, (1)$

$(b_1 \dots b_k) + 1$

$R \cup [0, 1] \sim B^\infty$  и  $R \cup [0, 1] \sim [0, 1] \Rightarrow [0, 1] \sim B^\infty$

### Example 0.4.

$[0, 1] \sim [0, 1] \times [0, 1]$

$0, a_1 a_2 \dots a_k \dots$

$0, a_1 a_3 a_5 \dots$  и  $0, a_2 a_4 a_6 \dots$

### Exercise 0.2.

Проблема та же, что и в прошлом примере, но число уязвимых моментовратно больше. Почините

### Theorem 0.2. Кантор-Бернштейн

$A, B; A_1 \subset A; B_1 \subset B$

$A_1 \sim B, B_1 \sim A \Rightarrow A \sim B$

*Доказательство:*

$A$  имеет мощность не больше  $B$ . Существует какое-то отображение. Нужна его биективность. А где-то по пути можем доказать еще и полный порядок

$f : A \rightarrow B_1$  – биекция

$g : B \rightarrow A_1$  – еще одна биекция

Заметим, что  $g(f(A)) = A_2$  – биекция, более того этот процесс можно продолжить до бесконечности

То есть имеем  $A \supset A_1 \supset A_2 \dots$  и  $A \sim A_2 \sim A_4 \dots$  и  $A_1 \sim A_3 \sim A_5 \sim \dots$

Возьмем просто много вложенных  $C$ -шек таких, что  $C \rightarrow C_2 \rightarrow C_4 \dots$  и  $C_1 \rightarrow C_3 \dots$  при какой-то биекции  $h$

Как построить биекцию из  $C_6$  в  $C_7$ ? Положим  $D_i = C_i \setminus C_{i+1}$ . Тогда  $C_0 = D_0 \cup D_1 \cup D_2 \dots$

При этом  $C_1 = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \dots$

$D_2 = C_2 \setminus C_3; D_0 = C_0 \setminus C_1$ . Ну тогда  $C_2 = D_2 \cup C_3$  и  $C_0 = D_0 \cup C_1$

При этом биекция  $h$  все еще существует. Можем сопоставить  $D_{2k} \rightarrow D_{2(k+1)}$ , а  $D_{2k+1} \rightarrow D_{2k+1}$ , т.е. построить биекцию между  $C_0$  и  $C_1$ . Победа

Явная биекция:  $q(x) = \begin{cases} x, & x \in D_{2i+1} \\ h(x), & x \in D_{2i} \end{cases}$

### Theorem 0.3. Теорема Кантора

$B^{\text{inf}}$  – не счетно

*Доказательство:*

Построили последовательность типа

1.  $a_1, a_2 \dots$
2.  $b_1, b_2 \dots$
3.  $c_1, c_2 \dots$

Ну возьмем еще одну последовательность  $a_1, b_2, c_3 \dots$  – она будет отличаться от всех предыдущих как минимум в одном элементе. Значит  $B^{\text{inf}}$  не счетно

### Theorem 0.4. Обобщенная теорема Кантора

$\forall X, X \not\sim 2^X$

*Доказательство:*

Пусть  $\exists \varphi : X \rightarrow 2^X$  – биекция

$Z = \{x | x \notin \varphi(x)\}$

$Z \subset X$

$\nexists z : \varphi(z) = Z \Rightarrow z \notin Z \Rightarrow z \in Z$

### Theorem 0.5. Следствие

$|2^X| > |X|$

$\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, 2^{2^{\mathbb{N}}}, \dots$

$\aleph_0, \aleph_1, \dots$

### Remark 0.2.

Почему не существует множества всех множеств?

Пусть существует и называется  $U$

Посмотрим на  $U$  и  $2^U$

По Кантору-Бернштейну  $U \sim 2^U$ , но по теореме Кантора  $|U| < |2^U|$  ????