Содержание

1 Интегральчики

1.1 §1. Первообразная и неопределенный интеграл

Definition 1.1. Первообразная функция

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}; \quad F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
F – первообразная функция f, если F дифференцируема на $\langle a, b\rangle$ и $F'(x) = f(x)$ при всех $x \in \langle a, b\rangle$

Example 1.1.

$f(x) = \cos x$
$F(x) = \sin x$

Proposition 1.1.

Не всякая функция имеет первообразную

Example 1.2.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 0] \\ 1, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

Proposition 1.2.

Непрерывная на $\langle a, b\rangle$ функция имеет первообразную

Theorem 1.1.

$f, F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, F$ – первообразная f. Тогда

1. $F + C$ – первообразная f
2. Если Φ – первообразная f, то $\Phi = F + C$ для некоторой константы C

Доказательство:

1. $(F + C)' = F' = f$
2. $\Phi' = f = F'$
   $g = \Phi - F$
   $g' = 0 \Rightarrow g = C \Rightarrow \Phi = F + C$

Definition 1.2. Неопределенный интеграл

Неопределенный интеграл – множество первообразных функции f
Обозначение: $\int f(x)dx$

Remark 1.1.

Для доказательства равенства $\int f(x)dx = F(x) + C$ достаточно проверить, что $F'(x) = f(x)$

Действия с множествами функций:

A и B – множества функций $\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

$\lambda \in \mathbb{R},\ h : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

1. $A + B = \{f + g : f \in A,\ g \in B\}$
2. $\lambda A = \{\lambda f : f \in A\}$
3. $A + h = \{f + h : f \in A\}$
4. $(A)' = \{f' : f \in A\}$

Example 1.3.

$(\int f(x)dx)' = \{f\}$

Таблица интегралов:

1. $\int adx = ax + C$
2. $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C,\ p \neq -1$
3. $\in \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;\ a > 0,\ a \neq 1$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

Theorem 1.2. Линейность интеграла

$f, g : \langle a, b\rangle \Rightarrow \mathbb{R}$ имеют первообразные
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, не равные нулю одновременно
Тогда $\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$

Доказательство:

F и G – первообразные

Правая часть $= \{\alpha F(x) + \beta G(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$

$(\alpha F(x) + \beta G(x) + C)' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$

Theorem 1.3. Замена переменной в интеграле

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R},\ F$ – первообразная
$\varphi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$ – дифференцируемая функция
Тогда $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C$

Доказательство:

$(F(\varphi(x)) + C)' = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$

Remark 1.2.

$y = \varphi(x); \quad dy = \varphi'(x)dx$
$\frac{dy}{dx} = y'$
$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(y)dy = F(y) + C = F(\varphi(x)) + C$

Example 1.4.

1. $\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \ln|y| + c = \ln|x^2+1| + C$
   Здесь $y = \varphi(x) = x^2 + 1$
2. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dy}{\sin y \cos y} = \int \frac{dy}{\operatorname{tg} y \cos^2 y} = \int \frac{(\operatorname{tg} y)'}{tgy}dy = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C =$
   $= \ln|\operatorname{tg} y| + C = \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C$
   Здесь $y = \frac{x}{2}$ и $z = \operatorname{tg} y$
3. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{3t^2dt}{1+t} = 3\int \frac{t^2-1+1}{t+1}dt = 3\int (t - 1 + \frac{1}{t+1})dt = 3(\int tdt - \int dt + \int \frac{dt}{t+1}) =$
   $= 3t^2 - 3t + 3\int \frac{d(t+1)}{t+1} = 3t^2 - 3t + 3\ln|t+1| + C$

Theorem 1.4. Интегрирование по частям

$f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируемые
Если $f'g$ имеет первообразную, то $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

Доказательство:

H – первообразная функции $f'g$

$(fg - H + C)' = (fg)' - H' = f'g + fg' - f'g = fg'$

Notation 1.1. Традиционная запись формулы

$\int udv = uv - \int vdu$
$\begin{cases} du = u'(x)dx \\ dv = v'(x)dx \end{cases}$

Example 1.5.

1. $\int \ln x dx = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$
   Здесь $u = \ln x,\ v = x$ и $du = (\ln x)'dx = \frac{dx}{x}$
2. $\int x^2e^xdx = \int x^2de^x = x^2e^x - \int 2xe^xdx = x^2e^x - 2\int xde^x = x^2e^x - 2(xe^x - \int e^xdx) =$
   $= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$
   Здесь сначала берем $u = x^2, v = e^x$, а потом $u = x, v = e^x$

1.2 §2. Площадь

Definition 1.3. Площадь

F – семейство всех ограниченных подмножеств плоскости
Прямоугольник $\langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle$, площадь прямоугольника $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$
Площадь $S : F \to [0, +\infty)$

1. $S(\langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$
2. $S(E) = S(E_1) + S(E_2)$, если $E = E_1 \bigcup E_2,\ E_1 \bigcap E_2 = \varnothing$

Theorem 1.5. Свойство

Если $\tilde{E} \subset E$, то $S(\tilde{E}) \le S(E)$

Доказательство:

$E = \tilde{E} \bigcup (E \setminus \tilde{E})$

$S(E) = S(\tilde{E}) + S(E \setminus \tilde{E}) \ge S(\tilde{E})$

Definition 1.4. (Квази)площадь

$\sigma : F \to [0, +\infty)$

1. $\sigma(\langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$
2. $\sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$, если E_- и E_+ множества, получающиеся в результате разбиения E вертикальной (горизонтальной) прямой
3. Если $\tilde{E} \subset E$, то $\sigma(\tilde{E}) \le \sigma(E)$

Remark 1.3. Свойство

Формула 2) верна и если $E_- \bigcap E_+ \ne \varnothing$
Например, линию разбиения можно считать относящейся и к левой (верхней), и к правой (нижней) части

Доказательство:

$e = E_- \bigcap E_+$, $\sigma(e) = 0$

$\sigma(E_+) = \sigma(E_+ \setminus e) + \sigma(e \bigcap E_+) = \sigma(E_+ \setminus e)$

$\sigma(E_-) + \sigma(E_+) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+ \setminus e) = \sigma(E_- \bigcup (E_+ \setminus e)) = \sigma(E_- \bigcup E_+) = \sigma(E)$

Example 1.6. Примеры площадей $E \in F$

- Рассмотрим покрытие E конечным числом прямоугольников P_i (т.е. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i \supset E$)

  $\sigma_1(E) = \inf\{\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(P_i) : \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i \supset E\}$
- Рассмотрим покрытие E последовательностью прямоугольников P_i (т.е. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i \supset E$)

  $\sigma_2(E) = \inf\{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sigma(P_i) : \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i \supset E\}$
- Ясно, что $\sigma_1(E) \geq \sigma_2(E)$

  Но, если $E = ([0,1] \bigcap \mathbb{Q}) \times ([0,1] \bigcap \mathbb{Q})$, то $\begin{cases} \sigma_1(E) = 1 \\ \sigma_2(E) = 0 \end{cases}$

Theorem 1.6.

1. σ_1 – площадь
2. σ_1 не меняется при параллельном переносе

Доказательство:

1)

1. $\sigma_1(\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle) = (b-a)(d-c)$

   Поскольку $[a,b] \times [c,d]$ – покрытие P, $\sigma_1(P) \leq (b-a)(d-c)$

   В обратную сторону красиво доказано АИ. Там рисуночки, посмотрите!
2. $E = E_- \bigcup E_+ \Rightarrow \sigma_1(E) = \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$

   $\leq$: Если $P_1^+, \dots P_m^+$ – покрытие E_+, для которого $\sum\limits_{i=1}^{m} \sigma(P_i^+) < \sigma_1(E_+) + \varepsilon$

   А $P_1^-, \dots P_n^-$ – покрытие E_-, для которого $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(P_i^-) < \sigma_1(E_-) + \varepsilon$, то

   $P_1^-, P_2^-, \dots P_n^-, P_1^+, P_2^+, \dots P_m^+$ – покрытие E, для которого

   $\sigma_1(E) \leq \sum\limits_{i=1}^{n+m} \sigma(P_i) < \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+) + 2\varepsilon \Rightarrow \sigma_1(E) < \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+) + 2\varepsilon$

   $\geq$: Пусть $P_1, P_2, \dots P_n$ – покрытие E

   Разобьем P_i на P_i^- и P_i^+

   $\sigma(P_i) = \sigma(P_i^-) + \sigma(P_i^+)$

   $P_1^\pm, P_2^\pm, \dots P_n^\pm$ – покрытие $E^\pm$

   $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(P_i^\pm) \geq \sigma_1(E^\pm)$

   $\sum\limits_{i=1}^{n} (\sigma(P_i^-) + \sigma(P_i^+)) \geq \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$
3. $\tilde{E} \subset E \Rightarrow \sigma_1(\tilde{E}) \leq \sigma_1(E)$

   Если $\bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i \supset E$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i \supset \tilde{E} \Rightarrow$ класс покрытий $\tilde{E}$ шире, чем класс покрытий E

2)

Пусть $\tilde{E}$ – параллельный перенос E на вектор $\overrightarrow{v}$

$P_1, P_2, \dots P_n$ – покрытие E. Пусть $\tilde{P}_i$ – параллельный перенос P_i на вектор $\overrightarrow{v}$

Тогда $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \dots \tilde{P}_n$ – покрытие $\tilde{E}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(P_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(\tilde{P}_i)$

Definition 1.5.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$
$f_+ := \max\{f, 0\}$, т.е. $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$
$f_- := \max\{-f, 0\}$, т.е. $f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$
Свойства:

1. $f_\pm \geq 0$
2. $f = f_+ - f_-$
   $|f| = f_+ + f_-$
3. $f_+ = \frac{f+|f|}{2}$ и $f_- = \frac{|f|-f}{2}$
4. Если $f \in C[a, b]$, то $f_\pm \in C[a, b]$

Definition 1.6. Подграфик функции

$f : [a, b] \to \mathbb{R},\ f \geq 0$
Подграфик функции f – $P_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x \in [a, b],\ 0 \leq y \leq f(x)\}$

Definition 1.7. Определенный интеграл

σ – зафиксированная квазиплощадь
$f \in C[a, b]$ (пока что так)
$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f(x)dx := \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-})$

Свойства:

1. $\int\limits_a^a f = 0$
2. $\int\limits_a^b 0 = 0$
3. Если $f \geq 0$, то $\int\limits_a^b f = \sigma(P_f)$
4. $\int\limits_a^b (-f) = -\int\limits_a^b f$
   Доказательство:
   $(-f_+) = \max\{-f, 0\} = f_-$
   $(-f_-) = \max\{f, 0\} = f_+$
   $\int\limits_a^b (-f) = \sigma(P_{f_-}) - \sigma(P_{f_+}) = -\int\limits_a^b f$
5. $\int\limits_a^b (c) = c(b - a)$
   Доказательство:
   $c > 0 \Rightarrow \int\limits_a^b c = P(\text{прямоугольника}) = c(b - a)$
6. Если $a < b,\ f \geq 0$ и $\int\limits_a^b f = 0$, то $f \equiv 0$

Доказательство: (от противного)
Пусть $f(x_0) > 0$. Из непрерывности f в $x_0 \Rightarrow \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow \exists\delta > 0 : \forall |x - x_0| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow P_f \supset [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [0, \frac{f(x_0)}{2}] \Rightarrow$
$\Rightarrow \sigma(P_f) \geq \sigma(\text{прямоугольника}) = 2\sigma\frac{f(x_0)}{2} > 0$ Противоречие

1.3 §3. Свойства интеграла

Notation 1.2. Обозначение

$P_g(E)$ – подграфик функции $g \geq 0$ над множество E, т.е.
$P_g(E) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in E,\ 0 \leq y \leq g(x)\}$

Theorem 1.7. Аддитивность интеграла

$f \in C[a, b]$ и $c \in [a, b]$
Тогда $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$

Доказательство:

$$\int\limits_a^b f = \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-}) = \sigma(P_{f_+}([a, c])) + \sigma(P_{f_+}([c, b])) - \sigma(P_{f_-}([a, c])) - \sigma(P_{f_-}([c, b])) = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$$

Theorem 1.8. Следствие

$f \in C[a, b]$, $a \leq c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n \leq b$. Тогда
$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^{c_1} f + \int\limits_{c_1}^{c_2} f + \ldots + \int\limits_{c_{n-1}}^{c_n} f + \int\limits_{c_n}^b f$

Доказательство:

Индукция по n

Theorem 1.9. Монотонность интеграла

$f, g \in C[a, b]$ и $f \leq g$ на $[a, b]$
Тогда $\int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b g$

Доказательство:

$f \leq g \Rightarrow f_+ \leq g_+ \Rightarrow P_{f_+} \subset P_{g_+}$, а еще $-g \leq -f \Rightarrow g_- \leq f_- \Rightarrow P_{g_-} \subset P_{f_-}$
Значит $\sigma(P_{f_+}) \leq \sigma(P_{g_+})$ и $\sigma(P_{g_-}) \leq \sigma(P_{f_-})$
$\int\limits_a^b f = \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-}) \leq \sigma(P_{g_+}) - \sigma(P_{g_-}) = \int\limits_a^b g$

Theorem 1.10. Следствия

1. $f \in C[a,b] \Rightarrow \min\limits_{[a,b]} f \cdot (b-a) \le \int\limits_a^b f \le \max\limits_{[a,b]} f \cdot (b-a)$
   Доказательство:
   $\min f \le f \le \max f$ и монотонность интеграла для двух постоянных функций и f
2. $f \in C[a,b] \Rightarrow |\int\limits_a^b f| \le \int\limits_a^b |f|$
   Доказательство:
   $-|f| \le f \le |f| \xRightarrow{\text{монотонность}} -\int |f| = \int\limits_a^b (-|f|) \le \int\limits_a^b f \le \int\limits_a^b |f|$

Theorem 1.11. (Первая) (интегральная) теорема о среднем

$f \in C[a,b]$. Тогда существует $c \in [a,b] : \int\limits_a^b f = f(c)(b-a)$

Доказательство:

$\min f \le \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f \le \max f$, но множество значений f на $[a,b]$ – это отрезок $[\min f, \max f]$

Следовательно, число $\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f$ – есть значение функции f в какой-то точке $[a,b]$. Возьмем эту точку в качестве c

Definition 1.8. Среднее значение функции на отрезке

Среднее значение функции f на отрезке $[a,b]$ – это $\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f$

Definition 1.9. Интеграл с переменным верхним пределом

$f \in C[a,b]$

$\Phi(x) := \int\limits_a^x f$, где $x \in [a,b]$

Remark 1.4.

$\Phi(a) = 0$

Definition 1.10. Интеграл с переменным нижним пределом

$f \in C[a,b]$

$\Psi(x) := \int\limits_x^b f$, где $x \in [a,b]$

Remark 1.5.

$\Psi(b) = 0$

$\Phi(x) + \Psi(x) = \int\limits_a^b f$ (это аддитивность $\int$)

Theorem 1.12. Теорема Барроу

Если $f \in C[a,b]$, $\Phi(x) := \int\limits_a^x f$, то Φ – первообразная функции f

Доказательство:

Надо доказать, что $\Phi'(x) = f(x)$. Пусть $x < y$

$R(y) = \frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \frac{1}{y-x}(\int\limits_a^y f - \int\limits_a^x f) = \frac{1}{y-x}\int\limits_x^y f \overset{\text{т-ма о среднем}}{=} f(c_y)$, где $c_y \in [x,y]$

Возьмем последовательность $y_n > x$ и $\lim y_n = x$

$\Phi'_+(x) = \lim\limits_{y \to x_+} R(y) = \lim\limits_{n\to\infty} R(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(c_{y_n}) = f(x)$, т.к. $x \le c_{y_n} \le y_n \to x$

Если же $y < x$, то нужно смотреть на $\frac{1}{x-y}\int\limits_y^x f$ и дальше ровно так же

Следовательно, $\Phi'(x) = f(x)$

Theorem 1.13. Следствия

1. $\Psi(x) := \int\limits_x^b f \Rightarrow \Psi'(x) = -f(x)$
   Доказательство:
   $\Phi(x) + \Psi(x) = const$
2. Если $f \in C\langle a,b\rangle$, то у f есть первообразная на $\langle a,b\rangle$
   Доказательство:
   Возьмем $c \in (a,b)$ и $F(x) := \begin{cases} \int\limits_c^x f, \ x \ge c \\ -\int\limits_x^c f, \ x \le c \end{cases}$
   $$F'(x) = f(x) \text{при} x \ge c \text{ (по теореме Барроу)}$$
   $$\text{Тогда} \quad F'(x) = -f(x) \text{при} x \le c \text{ (по следствию 1)}$$
   $$F'_+(c) = f(c) = F'_-(c)$$

Theorem 1.14. Формула Ньютона-Лейбница

$f \in C[a,b]$, F – первообразная f

Тогда $\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$

Доказательство:

$\Phi(x) := \int\limits_a^x f$ – первообразная f (по теореме Барроу) $\Rightarrow \Phi = F + C$ для некоторой $C \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \int\limits_a^b f = \Phi(b) = F(b) + C = F(b) - F(a)$, т.к. $0 = \Phi(a) = F(a) + C$

Notation 1.3. Обозначение

$F|_a^b := F(b) - F(a)$ подстановка

$\int\limits_a^b f = F|_a^b$

Theorem 1.15. Линейность интеграла

$f, g \in C[a, b],\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Тогда $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$

Доказательство:

Пусть F и G – первообразные f и g

Тогда $\alpha F + \beta G$ – первообразная $\alpha f + \beta g \Rightarrow \int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = (\alpha F + \beta G)|_a^b = \alpha F|_a^b + \beta G|_a^b =$

$= \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$

Theorem 1.16. Формула интегрирования по частям

$u, v \in C^1[a, b]$

Тогда $\int\limits_a^b uv' = uv|_a^b - \int\limits_a^b u'v$

Доказательство:

Пусть H – первообразная $u'v$. Тогда $uv - H$ – первообразная uv'

$(uv - H)' = u'v + uv' - H' = u'v + uv' - u'v = uv'$

$\int\limits_a^b uv' = (uv - H)|_a^b = uv|_a^b - H|_a^b = uv|_a^b - \int\limits_a^b u'v$

Notation 1.4. Соглашение

Если $a > b$, то $\int\limits_a^b f = -\int\limits_b^a f$

Theorem 1.17. Замена переменной в определенном интеграле

$f \in C\langle a, b\rangle,\ \varphi \in C^1\langle c, d\rangle,\ \varphi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle,\ p, q \in \langle c, d\rangle$. Тогда

$\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dtt = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx$

Доказательство:

Пусть F – первообразная для f. Тогда $F \circ \varphi$ – первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ (т.к. $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t)$)

$$\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = (F \circ \varphi)|_p^q = F(\varphi(q)) - F(\varphi(p)) = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f$$

1.4 §4. Приложение формулы интегрирования по частям

$W_n := \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \stackrel{(*)}{=} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

Пояснение к $(*)$: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x ds = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \frac{\pi}{2} - t dt = -\int\limits_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} \cos^n x dx = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$

Здесь $\varphi(t) = \frac{\pi}{2} - t$ и $\varphi'(t) = -1$

$W_0 = \frac{\pi}{2},\ W_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,\ W_2 = \frac{1}{2}(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2) = \frac{\pi}{4}$

$W_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \cdot (-\cos x)' dx = -\sin^{n-1} x \cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \cos x (-\cos x) dx =$

$= (n-1)(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx) = (n-1)(W_{n-2} - W_n) \Rightarrow nW_n = (n-1)W_{n-2}$

Если четно, то $W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} W_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} W_{2n-1} = \ldots = \frac{(2n-1)(2n-3)...1}{2n(2n-2)...2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{\pi}{2}$

Если нечетно, то $W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} W_{2n-3} = \ldots = \frac{2n(2n-2)...2}{(2n+1)(2n-1)...3} \cdot 1 = \frac{2n!!}{(2n+1)!!}$

Theorem 1.18. Формула Валлеса

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n!!}{(2n+1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Доказательство:

$\sin^{2n+2} x \le \sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x$ при $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} x dx \le \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx \le \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx$

То есть $W_{2n+2} \le W_{2n+1} \le W_{2n}$

$\frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \le \frac{2n!!}{(2n+1)!!} \le \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$

$\frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{\pi}{2} \le \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim (\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!})^2 \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$

Theorem 1.19. Следствие

$C_{2n}^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$

Доказательство:

$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{n!n!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} 4^n \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot 4^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$

Theorem 1.20. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

$f \in C^{n+1}\langle a, b\rangle,\ x_0, x \in \langle a, b\rangle$

Тогда $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$

Доказательство:

Индукция по n. База $n = 0$

$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{0!}\int\limits_{x_0}^{x} f'(t)dt \overset{\text{Н-Л}}{=} f(x_0) + f(x) - f(x_0) = f(x)$ – верно

Переход $n \to n+1$

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = (*)$

Берем $u = f^{(n+1)}$, $v' = (x-t)^n$, $v = -\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$

$\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = -f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \int\limits_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}f^{(n+2)}(t)dt$

$(*) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)dt$

Example 1.7.

$H_j := \frac{1}{j!}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^j \cos x dx$

Theorem 1.21. Свойства:

1. $0 < H_j \leq \frac{1}{j!}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2})^{2j}\cos x dx = \frac{(\frac{\pi}{2})^{2j}}{j!}$
2. Если $c > 0$, то $c^j H_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$
3. $H_0 = 1,\ H_1 = 2$
4. При $j \geq 2\ \ H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$
   Доказательство:
   Берем $v' = \cos x$, $u = ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^j$, $v = \sin x$, $u' = -2jx((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1}$
   $j!H_j = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^j \cos x dx = ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^j \sin x|x = 0^{x=\frac{\pi}{2}} + 2j\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1}\sin x dx = (*)$
   Первое слагаемом занулится, второе еще раз интегрируем по частям
   $v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$
   $u = x((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1} \Rightarrow u' = ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1} - 2(j-1)x^2((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-2} = (2j-1)((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1} - \frac{\pi^2}{2}(j-1)((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-2}$
   $(*) = 2j(-\cos x x((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1})|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + (2j-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}((\frac{\pi}{2})^2 0 x^2)^{j-1}\cos x dx - \frac{\pi^2}{2}(j-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-2}\cos x dx$
   Первое слагаемое зануляется, второе $= (j-1)!H_{j-1}$, третье $= (j-2)!H_{j-2}$
   $j!H_j = 2(2j-1)j(j-1)!H_{j-1} - \pi^2 j(j-1)(j-2)!H_{j-2}$
   $H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$
5. Существует многочлен P_j степени $\leq j$ с целыми коэффициентами, такой что $H_j = P_j(\pi^2)$
   Доказательство:
   $P_0 \equiv 1,\ P_1 \equiv 2$
   $P_j(x) = (4j-2)P_{j-1}(x) - xP_{j-2}(x) \Rightarrow P_j(\pi^2) = (4j-2)P_{j-1}(\pi^2) - \pi^2 P_{j-2}(\pi^2) = H_j$

Theorem 1.22. Теорема Ламберта

Числа π и π^2 иррациональны

Доказательство:
Пусть $\pi^2 = \frac{m}{n} \Rightarrow 0 < H_j = P_j(\frac{m}{n}) = \frac{\text{целое число}}{n^j} \Rightarrow n^j P_j(\frac{m}{n}) = n^j H_j > 0$ и является целым числом $\Rightarrow n^j H_j \geq 1$, но $\lim\limits_{j\to\infty} n^j H_j = 0$ по свойству 2 – противоречие

Definition 1.11. Равномерная непрерывность

$f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$
f равномерно непрерывна на E, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in E : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Remark 1.6.

Определение непрерывности во всех точках множества E
$\forall y \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ x \in E : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
То есть в этом определении $\delta(\varepsilon, y)$, а в равномерной непрерывности $\delta(\varepsilon)$

Example 1.8.

1. $\sin$ и $\cos$ равномерно непрерывны на $\mathbb{R}$
   $|sinx - \sin y| \leq |x - y|$ и $|\cos x - \cos y| \leq |x - y| \Rightarrow \delta = \varepsilon$ подходит
2. x^2 не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$
   Возьмем $\varepsilon = 1$ и покажем, что никакая $\delta > 0$ не подходит
   Рассмотрим x и $x + \frac{\delta}{2}$
   $f(x + \frac{\delta}{2}) - f(x) = (x + \frac{\delta}{2})^2 - x^2 = x\delta + \frac{\delta^2}{4} > x\delta \geq 1$ при $x \geq \frac{1}{\delta}$

Theorem 1.23. Теорема Кантора

$f \in C[a, b] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна на $[a, b]$

Доказательство:

Возьмем $\varepsilon > 0$ и предположим, что никакое $\delta > 0$ не подходит

$\delta = 1$ не подходит $\Rightarrow$ найдутся $x_1, y_1 \in [a, b] : |x_1 - y_1| < 1$ и $|f(x_1) - f(y_1)| \geq \varepsilon$

$\delta = \frac{1}{2}$ не подходит $\Rightarrow$ найдутся $x_2, y_2 : |x_2 - y_2| < \frac{1}{2}$ и $|f(x_2) - f(y_2)| \geq \varepsilon$

$\dots$

$\delta = \frac{1}{n}$ не подходит $\Rightarrow$ найдутся $x_n, y_n : |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$

Выберем из x_n схожящуюся подпоследовательность $x_{n_k} : \lim x_{n_k} = c$

$a \leq x_{n_k} \leq b \Rightarrow c \in [a, b]$ и $\lim y_{n_k} = \lim x_{n_k} + \lim(y_{n_k} - x_{n_k}) = c + 0 = c$

Функция f непрерывна в $c \Rightarrow \exists \delta > 0\ \forall |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\lim x_{n_k} = c \Rightarrow$ при больших k $|x_{n_k} - c| < \delta \Rightarrow |f(x_{n_k}) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\lim y_{n_k} = c \Rightarrow$ при больших k $|y_{n_k} - c| < \delta \Rightarrow |f(y_{n_k}) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Тогда $\varepsilon \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(c)| + |f(c) - f(y_{n_k})| < \varepsilon$ – противоречие

Remark 1.7.

Важно, что именно отрезок
Для x^2 мы поняли, что на $[0, +\infty)$ нет равномерной непрерывности $\Rightarrow$ отрезок нельзя заменить на луч
Поймем что на полуинтервал тоже нельзя
$f(x) = \frac{1}{x}$ на $(0, 1]$ не равномерно непрерывна
$\varepsilon = 1$ никакое $\delta > 0$ не подходит (если какое-то не подходит, то $\delta > \delta_0$ тоже не подходит)
Возьмем $0 < \delta \le 1$, $x = \frac{\delta}{2}$ и $y = \frac{\delta}{4}$
$|x - y| = \frac{\delta}{4} < \delta$, но $|f(x) - f(y)| = \frac{2}{\delta} > 1$

Definition 1.12. Модуль непрерывности

$f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$
$\omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in E,\ |x - y| < \delta\}$ определена при $\delta \ge 0$

Theorem 1.24. Свойства:

1. $\omega_f(0) = 0$
2. $\omega_f(\delta) \ge 0$
3. ω_f нестрого возрастает
4. $|f(x) - f(y)| \le \omega_f(|x - y|)$
5. Если f липшицева к константе M, то $\omega_f(\delta) \le M\delta$
   Доказательство:
   Липшицевость с константой M – это $|f(x) - f(y)| \le M|x - y|\ \forall x, y \in E$
6. f равномерно непрерывна на $E \Leftrightarrow \lim\limits_{\delta \to 0_+} \omega_f(\delta) = 0$ (т.е. w_f непрерывна в 0)
   Доказательство:
   $\Rightarrow$ f равномерно непрер $\Rightarrow \forall \varepsilon\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in E : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon \Rightarrow$
   $\Rightarrow \omega_f(\frac{\delta}{2}) < \varepsilon$, т.к. $\omega_f(\frac{\delta}{2}) \le \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| < \delta\}$
   Значит $\forall t < \frac{\delta}{2}\ \omega_f(t) \le \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{t \to 0_+} \omega_f(t) = 0$
   $\Leftarrow$ $|f(x) - f(y)| \le w_f(|x - y|)$ по $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ такое что $\omega_f(\delta) < \varepsilon \Rightarrow$
   если $|x - y| \le \delta$, то $|f(x) - f(y)| \le \omega_f(\delta) < \varepsilon$
7. $f \in C[a, b] \Leftrightarrow \lim\limits_{\delta \to 0_+} \omega_f(\delta) = 0$
   Доказательство:
   $f \in C[a, b] \Leftrightarrow f$ равномерно непрерывна на $[a, b] \Leftrightarrow \lim\limits_{\delta \to 0_+} \omega_f(\delta) = 0$

Definition 1.13. Дробление отрезка

Дробление отрезка $[a, b]$ – набор точек $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

Definition 1.14. Ранг дробления

Ранг дробления – длина самого большого отрезка из дробления
$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1 \ldots x_n - x_{n-1}\} =: \tau$

Definition 1.15. Оснащение дробления

Оснащение дробления – набор точек $\xi_k : \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Definition 1.16. Интегральная сумма (сумма Римана)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, τ дробление отрезка и $\tau = \{x_0, x_1 \dots x_n\}$
ξ – оснащение дробления и $\xi = \{\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n\}$
$S(f, \tau, \xi) := \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$

Example 1.9.

$S_p(n) := 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p;\ p > 0$
$\lim \frac{S_p(n)}{n^{p+1}}$?
Возьмем $f(x) = x^p$ на $[0, 1]$ и $x_k = \xi_k = \frac{k}{n}$
$\frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \frac{1}{n}\cdot((\frac{1}{n})^p + (\frac{2}{n})^p + \ldots + (\frac{n}{n})^p) = \sum f(\xi_k)\cdot(x_k - x_{k-1}) \to \int\limits_0^1 f(t)dt = \int\limits_0^1 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}|_0^1 = \frac{1}{p+1}$

Theorem 1.25. Теорема об интегральных суммах

$f \in C[a, b]$, τ – дробление
Тогда $|\int\limits_a^b f - S(f, \tau, \xi)| \le (b - a)\omega_f(|\tau|)$

Доказательство:

$$\Delta := \int\limits_a^b f - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(\xi_k))dx$$

$$|\Delta| \le \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - f(\xi_k)|dx \le \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_f(|\tau|)dx = \omega_f(|\tau|) \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = \omega_f(|\tau|)(b - a)$$

Theorem 1.26. Следствия

1. $f \in C[a, b]$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall$ дробления τ ранга $< \delta$ и $\forall$ его оснащения ξ
   $|\int\limits_a^b f - S(f, \tau, \xi)| < \varepsilon$
2. $f \in C[a, b]$. Тогда для любой последовательности дроблений $\tau_n : |\tau_n| \to 0$ и любой последовательности оснащений ξ_n $\lim S(f, \tau_n, \xi_n) = \int\limits_a^b f$

Definition 1.17. Интеграл Римана

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$
f интегрируема по Риману на $[a, b]$, и I ее интеграл, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall$ дробления τ ранга $< \delta$ и $\forall$ его оснащения ξ
$|I - S(f, \tau, \xi)| < \varepsilon$

Lemma 1.1.

$f \in C^2[\alpha, \beta]$. Тогда $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)ds - (\beta-\alpha)\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} = -\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f''(t)(t-\alpha)(b-t)dt$

Доказательство:

$\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$

$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)(x-\gamma)'dx = f(x)(x-\gamma)|_{x=\alpha}^{x=\beta} - \int\limits_{\alpha}^{\beta} f'(x)(x-\gamma)dx = f(\beta)\cdot\frac{\beta-\alpha}{2} - f(\alpha)\cdot\frac{\alpha-\beta}{2} =$
$= \frac{f(\beta)+f(\alpha)}{2}(\beta-\alpha)$

$\Delta = -\int\limits_{\alpha}^{\beta} f'(x)(x-\gamma)dx = (*)$

Берем $u = f';\ v' = x-\gamma;\ -v = \frac{1}{2}(x-\alpha)(\beta-x) = \frac{1}{2}(-x^2+(\alpha+\beta)x-\alpha\beta)$

$(*) = -f'(x)\cdot(-\frac{1}{2})(x-\alpha)(\beta-x)|_{x=\alpha}^{x=\beta} - \int\limits_{\alpha}^{\beta} f''(x)\frac{1}{2}(x-\alpha)(\beta-x)dx$

Theorem 1.27. Формула трапеций

$S = \sum(x_k - x_{k-1})\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}$

Как выглядит формула, если узлы на равных расстояниях?

$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$

$S = \frac{b-a}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2} = \frac{b-a}{n}(\frac{f(a)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(b)}{2})$

Notation 1.5. Как выглядит интегральная сумма если узлы на равных расстояниях?

$\xi_k = x_k$

$S(f,\tau,\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)$

А если $\xi_k = x_{k-1}$, то $S(f,\tau,\xi) = \frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x_k)$

Remark 1.8.

Если $|f| \le M$, то $\omega_f(\delta) \le M\delta$

$|S(f,\xi,\tau) - \int\limits_{a}^{b} f| \le (b-a)\omega_f(\frac{b-a}{n}) \le (b-a)^2\cdot\frac{M}{n}$

Theorem 1.28. Оценка погрешности в формуле трапеций

$f \in C^2[a,b]$

Тогда $|\int\limits_{a}^{b} f - \sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\cdot\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}| \le \frac{|\tau|^2}{8}\cdot\int\limits_{a}^{b}|f''|$

Доказательство:

$\Delta = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f - \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2} = \sum\limits_{k=1}^{n} (\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f - (x_k - x_{k-1}) \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}) \overset{lemma}{=}$

$\overset{lemma}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} -\frac{1}{2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t)(x_k - t)(t - x_{k-1})dt$

$|\Delta| \leq \frac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)| \cdot |(x_k - t)(t - x_{k-1})dt| \leq (*)$

$(x_k - t)(t - x_{k-1}) \leq (\frac{(x_k - t)+(t - x_{k-1})}{2})^2 = (\frac{x_k - x_{k-1}}{2})^2 = \frac{|\tau|^2}{4}$

$(*) \leq \frac{|\tau|^2}{8} \sum \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)|dt = \frac{|\tau|^2}{8} \int\limits_a^b |f''|$

Remark 1.9.

Если $|f''| \leq M$ и узлы равноотстоящие друг от друга, то $| \int\limits_a^b f - \frac{b-a}{n}(\frac{f(a)}{2} + \sum f(x_k) + \frac{f(b)}{2})| \leq (\frac{b-a}{n})^2 \frac{M(b-a)}{8}$

Theorem 1.29. Формула Эйлера-Маклорена для второй производной

$f \in C^2[a,b];\ m,n \in \mathbb{Z}$

$\sum\limits_{k=m}^{n} f(k) = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int\limits_m^n f(t)dt + \frac{1}{2} \int\limits_m^n f''(t)\{t\}(1 - \{t\})dt$

Доказательство:

Пишем лемму (1.1) для $\alpha = k$ и $\beta = k+1$

$\int\limits_k^{k+1} f = \frac{f(k)+f(k+1)}{2} - \frac{1}{2} \int\limits_k^{k+1} f''(t)(t-k)(k+1-t)dt$

Просуммируем по k от m до $n-1$

$\int\limits_m^n f = \sum\limits_{k=m}^{n-1} \int\limits_k^{k+1} f = \sum\limits_{k=m}^{n-1} \frac{f(k)+f(k+1)}{2} - \frac{1}{2} \sum\limits_{k=m}^{n-1} \int\limits_k^{k+1} f''(t)\{t\}(1-\{t\})dt = \frac{f(m)}{2} + \sum f(k) + \frac{f(n)}{2} -$

$- \frac{1}{2} \int\limits_m^n f''(t)\{t\}(1-\{t\})dt$

$\int\limits_m^n f + \frac{f(m)+f(n)}{2} = \sum f(k) - \frac{1}{2} \int\limits_m^n f''(t)\{t\}(1-\{t\})dt$

Example 1.10.

1. $S_p(n) = 1^p + 2^p + \ldots + n^p;\ f(x) = x^p;\ f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$
   $S_p(n) = \frac{1+n^p}{2} + \int\limits_1^n x^p dx + \frac{1}{2}\int\limits_1^n p(p-1)x^{p-2}\{x\}(1-\{x\})dx$
   Пусть $p > -1$
   $|S_p(n) - \frac{n^{p+1}-1}{p+1} - \frac{n^p+1}{2}| \leq \frac{|p||p-1|}{8}\int\limits_1^n x^{p-2}dx$
   Если $p \in (-1,1)$, то $\int\limits_1^n x^{p-2}dx = \frac{x^{p-1}}{p-1}|_1^n \leq \frac{1}{1-p} \Rightarrow S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(1)$
   Если $p > 1$, то $\int\limits_1^n x^{p-2}dx = \frac{x^{p-1}}{p-1}|_1^n \leq \frac{n^{p-1}}{p-1} = O(n^{p-1}) \Rightarrow S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(n^{p-1})$
2. Гармонические числа $H_n := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$
   $f(x) = \frac{1}{x};\ f''(x) = \frac{2}{x^3};\ m = 1$
   $H_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \int\limits_1^n \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int\limits_1^n \frac{2}{x^3}\{x\}(1-\{x\})dx = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a_n = (*)$
   $a_n := \int\limits_1^n \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^3}dx$
   $a_{n+1} = a_n + \int\limits_n^{n+1} \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^3}dx > a_n$
   Поймем что a_n ограничена: $a_n \leq \int\limits_1^n \frac{\frac{1}{4}}{x^3}dx = \frac{1}{4}\cdot(-\frac{1}{2x^2})|_1^n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8n^2} < \frac{1}{8} \Rightarrow$
   $\Rightarrow$ существует конечный $\lim a_n =: a$
   $(*) = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a + O(1) = \ln n + \gamma + O(\frac{1}{n})$, где γ – постоянная Эйлера

   Notation 1.6.

   $\gamma \approx 0.5772156043\ldots$

3. Формула Стирлинга
   $f(t) = \ln t;\ f''(t) = -\frac{1}{t^2};\ m = 1$
   $\sum\limits_{k=1}^n \ln k = \frac{\ln 1 + \ln n}{2} + \int\limits_1^n \ln t dt - \frac{1}{2}\int\limits_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}dt = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + 1 - b_n$
   $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2}\int\limits_n^{n+1} \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}dt > b_n$
   $b_n \leq \frac{1}{8}\int\limits_1^n \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{8}(-\frac{1}{t})|_1^n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8n} < \frac{1}{8} \Rightarrow \lim b_n = b \in \mathbb{R} \Rightarrow b_n = b + o(1)$
   $\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + (1-b) + o(1)$
   $n! = n^n e^{-n}\sqrt{n} e^{1-b} e^{o(1)} \sim C n^n e^{-n}\sqrt{n}$ (где $C = e^{1-b}$)
   Хотим найти $C > 0$ из формулы $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{n}C$
   Знаем, что $C_{2n}^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$, но $C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{C(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}}{(Cn^n e^{-n}\sqrt{n})^2} = \frac{C2^{2n}\sqrt{2n}}{C^2\sqrt{n}\sqrt{n}} = \frac{4^n\sqrt{n}}{C\sqrt{n}} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$
   $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^n\sqrt{2}}{C\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} = 1 \Rightarrow C = \sqrt{2\pi}$

   Notation 1.7. Формула Стирлинга

   $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$
   $\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}(\ln n + \ln 2\pi) + o(1)$

   Remark 1.10.

   Чуть более точные вычисления дают $O(\frac{1}{n})$ вместо $o(1)$
   $n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}e^{O(\frac{1}{n})}$

1.5 §5. Несобственные интегралы

Definition 1.18.

$-\infty < a < b \le +\infty;\ f \in C[a,b)$

$\int\limits_a^{\to b} f := \lim\limits_{B\to b_-} \int\limits_a^B f$, если такой предел существует

$-\infty \le a < b < +\infty;\ f \in C(a,b]$

$\int\limits_{\to a}^{b} f := \lim\limits_{A\to a_+} \int\limits_A^b f$, если такой предел существует

Remark 1.11.

1. Если F – первообразная f на $[a,b)$, то
   $\int\limits_a^{\to b} f = \lim\limits_{B\to b_-} \int\limits_a^B f = \lim\limits_{B\to b_-} (F(B) - F(a)) = \lim\limits_{B\to b_-} F(B) - F(a)$
   Если F – первообразная f на $(a,b]$, то
   $\int\limits_{\to a}^{b} f = F(b) - \lim\limits_{A\to a_+} F(A) =: F|_a^b$, т.е. подстановку теперь понимаем как предел (в случае, если она не определена в какой-то точке)
2. Если $f \in C[a,b]$, то новое определение совпадает со старым
   $\int\limits_a^{\to b} f - \int\limits_a^b f = \lim\limits_{B\to b_-} \int\limits_a^B f - \int\limits_a^b f = -\lim\limits_{B\to b_-} \int\limits_B^b f$
   $f \in C[a,b] \Rightarrow f$ ограничена $\Rightarrow |f| \le M$
   $|\int\limits_B^b f| \le \int\limits_B^b |f| \le \int\limits_B^b M = (b-B)M \xrightarrow[B\to b_-]{} 0$

Example 1.11.

$\int \frac{dx}{x^p}$ на $(1,\infty)$ и $(0,1)$

1. $p \ne 1$, первообразная для $\frac{1}{x^p} = x^{-p}$ – это $\frac{x^{-p+1}}{1-p}$
   $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = \begin{cases} +\infty & p<1 \\ \frac{1}{p-1} & p>1 \end{cases}$
   Если $p=1$, то первообразная для $\frac{1}{x}$ – это $\ln x$
   $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x|_1^{+\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} \ln x - \ln 1 = +\infty$
   Итого $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} +\infty & p \le 1 \\ \frac{1}{p-1} & p>1 \end{cases}$
2. $p \ne 1$, первообразная $\frac{x^{1-p}}{1-p} \Rightarrow \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_0^1 = \frac{1}{1-p} - \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{x^{1-p}}{1-p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} & p<1 \\ +\infty & p>1 \end{cases}$
   $p = 1 \Rightarrow$ первообразная $\ln x \Rightarrow \int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x|_0^1 = \ln 1 - \lim\limits_{x\to 0_+} \ln x = +\infty$
   Итого $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} & p<1 \\ +\infty & p \ge 1 \end{cases}$

Definition 1.19. Сходящийся интеграл

Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f$ называется сходящимся, если $\lim$ из определения существует и конечен и называется расходящимся в противном случае

Remark 1.12.

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится $\Leftrightarrow p > 1$

$\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^p}$ сходится $\Leftrightarrow p < 1$

Theorem 1.30. Критерий Коши для сходимости интегралов

$f \in C[a, b]; \quad -\infty < a < b \leq +\infty$

Тогда $\int\limits_a^{\to b} f$ сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists c \in (a, b) : \forall A, B \in (c, b) \Rightarrow |\int\limits_A^B f| < \varepsilon$

Доказательство:

$\Rightarrow$ $\int\limits_a^{\to b} f$ сходится $\Rightarrow$ существует конечный $\lim\limits_{y \to b_-} F(y)$, где F – первообразная f

$\forall \varepsilon > 0$ найдется такая окрестность (c, b), что $\forall y \in (c, b)$ $|F(y) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow$ если $A, B \in (c, b)$, то $|F(A) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|F(B) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow |F(B) - F(A)| \leq |F(B) - L| + |L - F(A)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Leftarrow$ Пусть F – первообразная f, тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists c \in (a, b) : \forall A, B \in (c, b) \Rightarrow |F(B) - F(A)| < \varepsilon$

Но это условие из критерия Коши для $\lim\limits_{y \to b_-} F(y) \Rightarrow$ этот предел существует и конечен

$\Rightarrow \int\limits_a^{\to b} f = \lim\limits_{y \to b_-} F(y) - F(a)$ существует и конечен

Theorem 1.31. Свойства несобственных интегралов

1. Аддитивность. $f \in C[a, b); \ c \in (a, b)$

   Тогда $\int\limits_a^b f$ сходится $\Leftrightarrow \int\limits_c^b f$ сходится и в этом случае $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b$

2. $f \in C[a, b)$. Если $\int\limits_a^b$ сходится, то $\lim\limits_{B \to b_-} \int\limits_B^b f = 0$

3. Линейность $f, g \in C[a, b); \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

   Если $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b$ сходится, то $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится и $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$

4. Монотонность. $f, g \in C[a, b); \ f \leq g$ на $[a, b)$ и интегралы существуют $\Rightarrow \int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b g$

5. Интегрирование по частям. $f, g \in C^1[a, b)$. Тогда $\int\limits_a^b fg' = fg|_a^b - \int\limits_a^b f'g$

   (если существуют какие-то два предела из трех, то существует и третий и есть равенство)

Доказательство:

1. $\int\limits_a^B f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^B$ и переходим к $\lim\limits_{B \to b_-} \Rightarrow \int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$
2. $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^B f + \int\limits_B^b f \Rightarrow \int\limits_B^b f = \int\limits_a^b f - \int\limits_a^B$ и пишем $\lim\limits_{B \to b_-}$
3. $a < B < b \Rightarrow \int\limits_a^B (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^B f + \beta \int\limits_a^B g$ и переходим к $\lim\limits_{B \to b_-}$
4. $a < B < b$. Тогда $\int\limits_a^B f \le \int\limits_a^B g$ и переходим к $\lim\limits_{B \to b_-}$
5. $a < B < b$. Тогда $\int\limits_a^B fg' = fg|_a^B - \int\limits_a^B f'g$ и переходим к $\lim\limits_{B \to b_-}$

Remark 1.13.

Если $\int\limits_a^b f$ сходится и $\int\limits_a^b g$ расходится, то $\int\limits_a^b (f+g)$ расходится

Если бы $\int\limits_a^b (f+g)$ сходится, то $\int\limits_a^b g = \int\limits_a^b ((f+g) - f)$ сходится

Theorem 1.32. Замена переменной в несобственном интеграле

$\varphi : [\alpha, \beta) \to [a, b);\ \varphi \in C^1[\alpha, \beta)$ и существует $\lim\limits_{\gamma \to \beta_-} \varphi(\gamma) =: c$

$f \in C[a, b)$. Тогда $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^c f(x)dx$ (если существует один из интегралов, то существует другой и есть равенство)

Доказательство:

$F(y) := \int\limits_{\varphi(\alpha)}^y f(x)dx;\ y \in [a, b)$

$\Phi(\gamma) := \int\limits_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)dt;\ \gamma \in [\alpha, \beta)$

Тогда $\Phi(\gamma) = F(\varphi(\gamma))$ по формуле замены переменной в собственном интеграле

1. Пусть существует $\lim\limits_{y \to c_-} F(y)$. Покажем, что сузествует $\lim\limits_{\gamma \to \beta_-} \Phi(\gamma)$
   Проверяем по Гейне. Возьмем $\gamma_n \nearrow \beta \Rightarrow \Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n))$
   $\gamma_n \nearrow \beta \Rightarrow \varphi(\gamma_n) \to c \Rightarrow \Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)) \to \lim\limits_{y \to c_-} F(y) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^c f(x)dx$
   $\Rightarrow \lim\limits_{\gamma \to \beta_-} \Phi(\gamma) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^c f(x)dx$
2. Пусть существует $\lim\limits_{\gamma \to \beta_-} \Phi(\gamma)$. Проверим, что тогда $\exists \lim\limits_{y \to c} F(y)$. Тогда по пункту 1 будет равенство. Если $c < b$, то очевидно существует (т.к. F непрерывно при $y < b$)
   Считаем, что $c = b$. Проверим по Гейне, что $\exists \lim\limits_{y \to b_-} F(y)$. Возьмем $b_n \nearrow b$. Можно считать, что $b_n \in [\varphi(\alpha), b)$. Т.е. сколь угодно близко к b найдутся значения $\varphi \Rightarrow$ найдется $\varphi(\beta_n) > b_n$
   $\Rightarrow$ по БК $\exists \gamma_n \in (\alpha, \beta_n) : \varphi(\gamma_n) = b_n \Rightarrow \Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)) = F(b_n)$

Осталось проверить, что γ_n имеют предел. Предположим, что $\lim \gamma_n \neq \beta \Rightarrow$ найдется подпоследовательность $\gamma_{n_k} \to \tilde{\beta} \neq \beta$
$\gamma_n \in [\alpha, \beta) \Rightarrow \gamma_{n_k} \to \tilde{\beta} < \beta \Rightarrow \varphi$ непрерывна в $\tilde{\beta}$
$b \leftarrow b_{n_k} = \varphi(\gamma_{n_k}) \to \varphi(\tilde{\beta}) < b$. Противоречие. Следовательно $\lim \gamma_n = \beta \Rightarrow \lim \Phi(\gamma_n) =$
$= \lim\limits_{\gamma \to \beta_-} \Phi(\gamma)$, т.е. он существует

Remark 1.14.

$\int\limits_a^b f(x)dx$ заменой $x = b - \frac{1}{t}$ и $\varphi(t) = b - \frac{1}{t}$ сводится к $\int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(b - \frac{1}{t})\frac{dt}{t^2}$

То есть точку, где нет непрерывности можно записать на ∞. $\varphi(\frac{1}{b-a}) = a$ и $\varphi(\infty) = b$

Theorem 1.33.

$f \in C[a, b)$ и $f \geq 0$. Тогда $\int\limits_a^b f$ всегда определен. Он сходится $\Leftrightarrow$ F – ограниченная функция на $[a, b)$

Доказательство:

$F(y) := \int\limits_a^y f$. Если $y < z$, то $F(z) = \int\limits_a^z f = \int\limits_a^y f + \int\limits_y^z f \geq F(y) \Rightarrow F$ нестрого возрастает $\Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{y \to b_-} F$ существует и $\lim\limits_{y \to b_-} F = \sup\limits_{y \in [a,b)} F(y)$

Тогда конечность предела равносильна ограниченности функции F

Theorem 1.34. Следствие 1 (признак сравнения)

$f, g \in C[a, b)$, $f, g \geq 0$ и $f \leq g$. Тогда

1. Если $\int\limits_a^b g$ сходится, то $\int\limits_a^b f$ сходится
2. Если $\int\limits_a^b f$ сходится, то $\int\limits_a^b g$ расходится

Доказательство:

$F(y) := \int\limits_a^y f, G(y) := \int\limits_a^y g$; $f \leq g \Rightarrow F(y) \leq G(y)$

1. $\int\limits_a^b g$ сходится $\Leftrightarrow G$ – ограничена $\Rightarrow F$ – ограничена $\Leftrightarrow \int\limits_a^b f$ сходится
2. Если бы $\int\limits_a^b g$ сходится, то $\int\limits_a^b f$ сходится. Противоречие

Remark 1.15.

1. Достаточно наличия неравенства $f \le g$ при аргументах близких к точке b
2. Неравенство $f \le g$ можно заменить на $f = O(g)$

   $f = O(g)$ означает, что $f \le Cg$ для некоторого C и $\int\limits_a^b Cg = C\int\limits_a^b g$

3. Если $f = O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$ при $\varepsilon > 0$, то $\int\limits_a^{+\infty} f$ сходится

   $g(x) = \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$ и $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\varepsilon}}$ сходится

Theorem 1.35. Следствие

$f, g \in C[a, b);\ f, g \ge 0$ и $f \overset{x\to b}{\sim} g$. Тогда $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ ведут себя одинаково

Доказательство:

$f \sim g \Rightarrow f = \varphi g$, где $\lim\limits_{x\to b_-} \varphi(x) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \le \varphi(x) \le 2$ при x близких к b

$\frac{1}{2}g(x) \le f(x) \le 2g(x)$ при x близких к $b \Rightarrow f = O(g)$ и $g = O(f)$ в окрестности b

Remark 1.16.

Если $f \ge 0$ и $\int\limits_a^{+\infty} f$ сходится, то не обязательно $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Definition 1.20. Абсолютная сходимость

$f \in C[a, b)$

$\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится, если $\int\limits_a^b |f| < +\infty$

Theorem 1.36.

Если $\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится, то $\int\limits_a^b f$ сходится

Доказательство:

$0 \le f_\pm \le |f|$. Признак сравнения: $\int\limits_a^b |f|$ сходится $\Rightarrow \int\limits_a^b f_\pm$ сходится $\Rightarrow \int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f_+ - \int\limits_a^b f_-$ сходится

Remark 1.17.

Бывают интегралы, которые сходятся, но не абсолютно

Exercise 1.1.

Что делать, если несколько точек, где нет непрерывности? Пусть отрезок $[a, b]$ нарезан на куски, т.е. $[a, b] = [a, c_1] \cup [c_1, c_2] \cup \ldots \cup [c_n, b]$ (где в c_i нет непрерывности). Добавим в каждый полученный отрезок по точке d_i

Итого подряд идут точки типа $a, d_1, c_1, d_2, c_2 \ldots d_n, c_n, d_{n+1}, b$

$\int\limits_a^b f$ сходится означает, что $\int\limits_a^{d_1}, \int\limits_{d_1}^{c_1}, \int\limits_{c_1}^{d_2}, \ldots, \int\limits_{d_{n+1}}^{b}$ сходятся

Theorem 1.37. Признак Дирихле

$f, g \in C[a, +\infty)$

1. f имеет ограниченную первообразную на $[a, +\infty)$ (т.е. $F(x) := \int\limits_a^x f$ ограничена)
2. g монотонна
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится

Доказательство (для случая, когда $g \in C^1[a, +\infty)$):

Хотим доказать, что $H(x) := \int\limits_a^x fg$ имеет конечный предел при $x \to +\infty$

$H(x) = \int\limits_a^x F'g = Fg|_a^x - \int\limits_a^b Fg'$. Проверим, что существует конечный предел

$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)g(x) = 0$, т.к. F ограничена и g – бесконечно малая

Осталось доказать, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \int\limits_a^x Fg'$ существует и конечен, т.е. что $\int\limits_a^{+\infty} Fg'$ сходится

Проверим, что он абсолютно сходится, т.е. $\int\limits_a^{+\infty} |Fg'| < +\infty$

F – ограничена $\Rightarrow \exists M : |F(x)| \leq M \ \forall x \Rightarrow |Fg'| \leq M|g'|$. По признаку сравнения достаточно проверить, что $\int\limits_a^{+\infty} |g'|$ сходится. Из монотонности g следует, что g' фиксированного знака, поэтому надо проверить, что $\int\limits_a^{+\infty} g'$ сходится

$\int\limits_a^{+\infty} g' = g|_a^{+\infty} = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) - g(a) = -g(a) < +\infty$

Theorem 1.38. Признак Абеля

$f, g \in C[a, +\infty)$

1. $\int\limits_a^{+\infty} f$ сходится
2. g монотонна
3. g ограничена

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится

Доказательство:

Монотонная ограниченная функция имеет конечный предел $b := \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$\tilde{g}(x) := g(x) - b$ – монотонная и $\lim\limits_{x\to+\infty} \tilde{g}(x) = 0$

$F(x) := \int\limits_a^x f$. По условию $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \int\limits_a^{+\infty} f$ существует и конечен $\Rightarrow F$ локально ограничена, т.е. при $x \geq K$ $|F(x)| \leq M$

Но на отрезке $[a, K]$ функция F непрерывна $\Rightarrow$ ограничена

$\Rightarrow f$ и $\tilde{g}$ удовлетворяют условиям признака Дирихле $\Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f\tilde{g}$ сходится

$\int\limits_a^{+\infty} = \int\limits_a^{+\infty} f(\tilde{g} + b) = \int\limits_a^{+\infty} f\tilde{g} + b\int\limits_a^{+\infty} f$ сходится как сумма двух сходящихся

Theorem 1.39. Следствие

$f, g \in C[a, +\infty), f$ – периодична с периодом T, g – монотонна и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

1. Если $\int\limits_a^{+\infty} |g|$ сходится, то $\int\limits_a^{+\infty} fg$ сходится абсолютно
2. Если $\int\limits_a^{+\infty} |g|$ расходится, то $\int\limits_a^{+\infty} fg$ сходится $\Leftrightarrow \int\limits_a^{a+T} f = 0$

Доказательство:

1. f непрерывна на $[a, a+T] \Rightarrow$ ограничена на $[a, a+T] \Rightarrow$ ограничена, т.к. периодична
   $fg = O(g) \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} fg$ абсолютно сходится по признаку сравнения
2. $\Leftarrow$ $\int\limits_a^{a+T} f = 0$, тогда $F(x) := \int\limits_a^x f$ – ограниченная функция
   Проверим, что F периодична с периодом T
   $F(x+T) = \int\limits_a^{x+T} f = \int\limits_a^{a+T} f + \int\limits_{a+T}^{x+T} f = 0 + \int\limits_a^x f = F(x) \Rightarrow F$ ограничена $\Rightarrow$ принцип Дирихле
   $\Rightarrow$ Пусть $\int\limits_a^{a+T} f = b \neq 0$. Тогда $\int\limits_a^{a+T} (f - \frac{b}{T}) = 0 \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} (f - \frac{b}{T})g$ сходится
   $\int\limits_a^{+\infty} fg = \int\limits_a^{+\infty} (f - \frac{b}{T})g + \frac{b}{T}\int\limits_a^{+\infty} g$. Первое сходится, второе расходится $\Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} fg$ расходится

Example 1.12.

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$

$p > 1$ $|\frac{\sin x}{x^p}| \leq \frac{1}{x^p}$

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится $\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ сходится абсолютно по признаку сравнения

$p > 0$ sin – периодическая функция с периодом 2π

$\int\limits_0^{2\pi} \sin x dx = 0$

$f(x) = \sin x;\ g(x) = \frac{1}{x^p} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ монотонно $\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ сходится

А что с абсолютной сходимостью? $\int\limits_0^{2\pi} |\sin x| dx > 0$

$f(x) = |\sin x|;\ g(x) = \frac{1}{x^p} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ монотонно

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ – расходится $\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx$ расходится $\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ не имеет абсолютной сходимости

$p \leq 0$ Рассмотрим отрезок $[2\pi k + \frac{\pi}{6}, 2\pi k + \frac{5\pi}{6}]$. На нем $\sin x \geq \frac{1}{2}$

$\int\limits_{2\pi k + \frac{\pi}{6}}^{2\pi k + \frac{5\pi}{6}} \frac{\sin x}{x^p} dx \geq \frac{1}{2} \int\limits_{2\pi k + \frac{\pi}{6}}^{2\pi k + \frac{5\pi}{6}} \frac{dx}{x^p} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot (2\pi k + \frac{\pi}{6})^{-p} \geq \frac{\pi}{3}$ – противоречие с условие критерия Коши, значит $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ расходится

Remark 1.18.

В признаках Абеля и Дирихле нельзя отказаться от монотонности g

$f(x) = \sin x;\ g(x) = \frac{\sin x}{x}$

$|\int\limits_1^{x} \sin x dx| = |\cos 1 - \cos x| \leq 2;\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

$\int\limits_1^{+\infty} fg = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$

$\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \pi > 0;\ \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ – расходится

$\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ расходится

2 Анализ в метрических пространствах

2.1 §1. Метрические пространства

Definition 2.1. Метрика

X – множество. $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ – метрика (расстояние)

1. $\rho(x, y) \geq 0$ и $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. Неравенство треугольника: $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Definition 2.2. Метрическое пространство

(X, ρ) – метрическое пространство

Example 2.1.

1. Дискретная метрика (метрика лентяя) $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$
2. $X = \mathbb{R};\ \rho(x, y) = |x - y|$
3. $X = \mathbb{R}^2;\ \rho$ – расстояние на плоскости
4. $X = \mathbb{R}^d;\ p \geq 1$ и $\rho(x, y) = (|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p + \ldots + |x_d - y_d|^p)^{\frac{1}{p}}$
   Неравенство треугольника – это неравенство Минковского
5. Частный случай 4. $X = \mathbb{R}^2;\ \rho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ – Манхэттенское расстояние
6. Французская железнодорожная метрика $X = \mathbb{R}^2$
   $\rho(A, B) =$ длина отрезка AB
   $\rho(C, D) = CP + PD$
   Тут кросивый рисуночек, типа чтоб проехать из города в другой оч часто надо заехать в P – пАрИж
7. Метрика Хемминга $a_1, a_2 \ldots a_n$ слова из n букв
   $\rho(A, B) =$ количество разрядов, в которых A и B различаются
8. $X = C[a, b];\ \rho(f, g) := \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$ – равномерная метрика
9. $X = C[a, b];\ \rho(f, g) := \int\limits_a^b |f(x) - g(x)| dx$ – метрика в L_1

Definition 2.3. Шар

(X, ρ) – метрическое пространство, $r > 0,\ a \in X$
Открытый шар радиуса r с центром в точке a
$B_r(a) := \{x \in X : \rho(x, a) < r\}$
Замкнутый шар $\overline{B_r}(a) := \{x \in X : \rho(x, a) \leq r\}$

Theorem 2.1. Свойства

1. $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min(r_1,r_2)}(a)$
   $B_{r_1}(a) \cup B_{r_2}(a) = B_{\max(r_1,r_2)}(a)$
2. Если $a \neq b$, то найдется $r > 0 : \overline{B_r}(a) \cap \overline{B_r}(b) = \varnothing$

Доказательство:

2. Возьмем $r = \frac{\rho(a,b)}{3} > 0$. Пусть $\overline{B_r}(a) \cap \overline{B_r}(b) \neq \varnothing$, т.е. найдется $x \in \overline{B_r}(a)$ и $x \in \overline{B_r}(b) \Rightarrow$
   $\Rightarrow \rho(a,b) \leq \rho(a,x) + \rho(x,b) \leq r + r = \frac{2}{3}\rho(a,b)$ – противоречие

Definition 2.4. Открытое множество

$U \subset X$ – открытое множество, если $\forall a \in U$ найдется $B_r(a) \subset U$

Theorem 2.2. Свойства

1. $\varnothing$ и X – открытые множества
2. Объединение любого количества открытых множеств – открытое множество
3. Пересечение конечного количества открытых множеств – открытое множество
4. Открытый шар – открытое множество

Доказательство:

1. Очевидно
2. Пусть U_α – открытые при $\alpha \in I$. Докажем, что $U := \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ – открытое
   Возьмем $a \in U \Rightarrow a \in U_{\alpha_0}$ для некоторого α_0, но U_{α_0} – открытое $\Rightarrow \exists r > 0 :$
   $B_r(a) \subset U_{\alpha_0} \subset U$
3. Пусть $U_1, U_2 \ldots U_n$ открытые. Докажем, что $U := \bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k$ – открытое
   Возьмем $a \in U \Rightarrow a \in U_k \ \forall k \in 1 \ldots n$. U_k – открытое $\Rightarrow \exists r_k > 0 : B_{r_k}(a) \subset U_k$
   Возьмем $r := \min(r_1, r_2 \ldots r_n) > 0 \Rightarrow B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset U_k \Rightarrow B_r(a) \subset U = \bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k$
4. $B_R(a)$ – открытое множество
   Возьмем $x \in B_R(a) \Rightarrow \rho(x,a) < R$ и положим $r := R - \rho(x,a) > 0$
   Проверим, что $B_r(x) \subset B_R(a)$. Возьмем $y \in B_r(x)$ и проверим, что $y \in B_R(a)$
   $y \in B_r(x) \Rightarrow \rho(y,x) < r = R - \rho(x,a) \Rightarrow \rho(y,a) \leq \rho(y,x) + \rho(x,a) < r + \rho(x,a) = R$

Remark 2.1.

В 3 существенно, что множеств конечное число

Example 2.2.

$X = R;\ \rho(x,y) = |x - y|;\ U_n := (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ – открытые множества
$\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} U_n = \{0\}$ – не открытое

Definition 2.5. Внутренняя точка

(X, ρ) – метрическое пространство, $A \subset X,\ a \in A$
a – внутренняя точка множества A, если $\exists r > 0 : B_r(a) \subset A$

Remark 2.2.

Открытое множество – множество, все точки которого внутренние

Definition 2.6. Внутренность множества

(X, ρ) – метрическое пространство, $A \subset X$
Внутренность множества – все внутренние точки множества
Обозначение: $\text{Int}\, A$ (иногда A°)

Theorem 2.3. Свойства

1. $\text{Int}\, A \subset A$
2. $\text{Int}\, A$ – объединение всех открытых множеств, содержащихся в A
3. $\text{Int}\, A$ – открытое множество
4. A – открытое $\Leftrightarrow A = \text{Int}\, A$
5. $A \subset B \Rightarrow \text{Int}\, A \subset \text{Int}\, B$
6. $\text{Int}(\text{Int}\, A) = \text{Int}\, A$
7. $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}\, A \cap \text{Int}\, B$

Доказательство:

1. Очев
2. Хотим $\text{Int}\, A = \bigcup\limits_{G \subset A} G$, где G – открытое
   - $\subset$ Возьмем $a \in \text{Int}\, A \Rightarrow a$ – внутренняя точка $\Rightarrow \exists r > 0 : B_r(a) \subset A$, но $B_r(a)$ – открытое множество $\Rightarrow B_r(a)$ присутствует среди множеств из объединения
   - $\supset$ Пусть $a \in U \Rightarrow \exists G$ – откртытое $\subset A : a \in G \Rightarrow \exists r > 0 : B_r(a) \subset G \subset A \Rightarrow a$ – внутренняя точка
3. По пункту 2 $\text{Int}\, A$ – объединение открытых множеств $\Rightarrow \text{Int}\, A$ – открытое
4. $\Leftarrow$ т.к. $\text{Int}\, A$ – открытое
   $\Rightarrow$ A – открытое $\Rightarrow$ все точки внутренние $\Rightarrow$ все лежат в $\text{Int}\, A \Rightarrow A = \text{Int}\, A$
5. Если a – внутрення точка для A, то и для B тоже, т.к. $A \subset B$
6. $3 + 4 = 6$

Exercise 2.1.

1. Доказать пункт 7
2. Придумать пример, когда $\text{Int}(A \cup B) \neq \text{Int}\, A \cup \text{Int}\, B$

Definition 2.7. Замкнутое множество

Замкнутое множество – множество, дополнение которого открыто
A замкнуто $\Leftrightarrow X \setminus A$ открыто

Theorem 2.4. Свойства замкнутых множеств

1. $\varnothing$ и X – замкнутые множества
2. Пересечение любого количества замкнутых множеств – замкнутое множество
3. Объединение конечного количества замкнутых множеств – замкнутое множество
4. Замкнутый шар – замкнутое множество

Доказательство:

1. Очевидно, ничего писать не буду
2. F_α – замкнутые $\Rightarrow X \setminus F_\alpha$ – открытые $\Rightarrow \bigcup X \setminus F_\alpha = X \setminus \bigcap F_\alpha$ – открытое $\Rightarrow \bigcap F_\alpha$ – замкнутое
3. $F_1 \dots F_n$ – замкнутые $\Rightarrow X \setminus F_k$ – открытые $\Rightarrow \bigcap X \setminus F_k = X \setminus \bigcup F_k$ – открытое $\Rightarrow \bigcup F_k$ – замкнутое
4. $\overline{B}_R(a)$ – замкнутое множество $\Leftrightarrow X \setminus \overline{B}_R(a) = \{x \in X : \rho(x, a) > R\}$ – открытое
   Возьмем $r := \rho(x, a) - R$ и проверим, что $B_r(x) \subset X \setminus \overline{B}_R(a)$
   $x \notin \overline{B}_R(a)$, т.е. $B_r(x) \cap \overline{B}_R(a) = \varnothing$
   Предположим противное, тогда $\exists y \in B_r(x)$ и $y \in \overline{B}_R(a) \Rightarrow \rho(x, y) < r$ и $\rho(y, a) \leq R \Rightarrow$
   $\Rightarrow \rho(x, a) \leq \rho(x, y) + \rho(y, a) < r + R = \rho(x, a)$?????

Definition 2.8. Замыкание множества

Замыкание множества A – пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A
Обозначение $\operatorname{Cl} A$ или $\overline{A}$

Theorem 2.5.

$X \setminus \operatorname{Cl} A = \operatorname{Int}(X \setminus A)$ и $X \setminus \operatorname{Int} A = \operatorname{Cl}(X \setminus A)$

Доказательство:

Докажем, что $X \setminus \operatorname{Cl} A = \operatorname{Int}(X \setminus A)$

- $\subset$ Пусть $x \in X \setminus \operatorname{Cl} A \Rightarrow x \notin \operatorname{Cl} A \Rightarrow x \notin F$, где F – некоторое замкнутое множество, содержащее $A \Rightarrow x \in X \setminus F$ – открытое и $X \setminus F \subset X \setminus A \Rightarrow x \in \operatorname{Int}(X \setminus A)$
- $\supset$ Пусть $x \in \operatorname{Int}(X \setminus A) \Rightarrow x \in G$, где G – открытое, содержащееся в $X \setminus A \Rightarrow x \notin X \setminus G$ – замкнутое и $X \setminus G \supset X \setminus (X \setminus A) = A \Rightarrow x \notin \operatorname{Cl} A \Rightarrow x \in X \setminus \operatorname{Cl} A$

Theorem 2.6. Свойства замыкания

1. $\operatorname{Cl} A \supset A$
2. $\operatorname{Cl} A$ – замкнутое множество
3. A – замкнутое $\Leftrightarrow A = \operatorname{Cl} A$
4. $A \subset B \Rightarrow \operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Cl} B$
5. $\operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl} A$
6. $\operatorname{Cl}(A \cup B) = \operatorname{Cl} A \cup \operatorname{Cl} B$

Доказательство:

1. Очевидно
2. Пересечение замкнутые – замкнутое
3. A – замкнутое $\Leftrightarrow X \setminus A$ – открытое $\Leftrightarrow X \setminus A = \operatorname{Int}(X \setminus A) \Leftrightarrow A = \operatorname{Cl} A$
4. $A \subset B \Rightarrow X \setminus A \supset X \setminus B \Rightarrow \operatorname{Int}(X \setminus A) \supset \operatorname{Int}(X \setminus B) \Rightarrow X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A) \subset X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus B) \Rightarrow$ $\operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Cl} B$

5. $2 + 3 = 5$

Exercise 2.2.

1. Доказать пункт 6
2. Придумать пример, когда $\operatorname{Cl}(A \cap B) \neq \operatorname{Cl} A \cap \operatorname{Cl} B$
3. $A, \operatorname{Int} A, \operatorname{Cl} A, \operatorname{Int} \operatorname{Cl} A, \operatorname{Cl} \operatorname{Int} A, \operatorname{Cl} \operatorname{Int} \operatorname{Cl} A \dots$
   Какое наибольше количество различных множеств может получиться?

Theorem 2.7.

$x \int \operatorname{Cl} A \Leftrightarrow \forall r > 0\ B_r(x) \cap A \neq \varnothing$

Доказательство:

$x \in ClA = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A) \Leftrightarrow x \notin \operatorname{Int}(X \setminus A) \Leftrightarrow \forall r > 0\ B_r(x) \not\subset X \setminus A \Leftrightarrow \forall r > 0\ B_r(x) \cap A \neq \varnothing$

Definition 2.9. Окрестность и проколотая окрестность

Окрестность точки a – шарик радиуса $r > 0$ с центром в точке a
Обозначение U_a
Проколотая окрестность – $\mathring{U}_a = U_a \setminus \{a\}$

Definition 2.10. Предельная точка

x – предельная точка множества A, если $\forall \mathring{U}_x$ содержится точки множества A
Локальное обозначение (примерно на 1 лекцию): A' – множество предельных точек множества A

Theorem 2.8. Свойства

1. $\operatorname{Cl} A = A \cup A'$
2. $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$
3. A – замкнутое $\Leftrightarrow A \supset A'$
4. $(A \cup B)' = A' \cup B'$

Доказательство:

1. $x \in \operatorname{Cl} A \Leftrightarrow \forall U_x\ U_x \cap A \neq \varnothing$
   Это так, если $x \in A$ или $x \in A'$ (тут $\mathring{U}_a \cap A \neq \varnothing$)
2. очев
3. A – замкнутое $\Leftrightarrow A = \operatorname{Cl} A \Leftrightarrow A = A \cup A' \Leftrightarrow A \supset A'$
4. $\supset$ $A \cup B \supset A \Rightarrow (A \cup B)' \supset A'$
   $\subset$ Возьмем $x \in (A \cup B)'$ и предположим, что $x \notin A'$. Надо доказать, что $x \in B'$
   $x \in (A \cup B)' \Rightarrow \forall r > 0\ \mathring{B}_r(x) \cap (A \cup B) \neq \varnothing$
   $x \notin A' \Rightarrow \exists R > 0 : \mathring{B}_R(x) \cap A = \varnothing \Rightarrow \forall r < R\ \mathring{B}_r(x) \cap A = \varnothing$
   Тогда $\mathring{B}_r(x) \cap B \neq \varnothing \forall r < R \Rightarrow$ вообще любой $\mathring{B}_r(x)$ пересекается с $B \Rightarrow x \in B'$

Theorem 2.9.

Следующие условия равносильны

1. $x \in A'$
2. $\forall r > 0\ B_r(x)$ содержит бесконечное количество точек из A
3. Существует последовательность различных точек $x_n \in A : \rho(x_n, x) \to 0$
4. Существует последовательность $x_n \in A : \rho(x_n, x)$ строго убывает и $\to 0$

Доказательство:

$4 \Rightarrow 3$ очевидно

$3 \Rightarrow 2$ Если $\rho(x_n, x) \to 0$, то при больших и $\rho(x_n, x) < r$, т.е. $x_n \in B_r(x) \Rightarrow$ в $B_r(x)$ бесконечное количество точек из A

$2 \Rightarrow 1$ Если $B_r(x) \cap A$ состоит из бесконечного количество точек, то $\mathring{B}_r(x) \cap A \neq \varnothing$ (множества отличаются на одну точку или совпадают)

$1 \Rightarrow 4$ Рассмотрим $r = 1$. В открестности $\mathring{B}_r(x)$ есть точка из A, назовем ее $x_1 \neq x$
$r = \frac{1}{2}\rho(x_1, x) < \frac{1}{2}$. В окрестности $\mathring{B}_r(x)$ есть точка из A, назовем ее $x_2 \neq x$
$\rho(x_2, x) < r < \rho(x_1, x)$
$r = \frac{1}{2}\rho(x_2, x) < \frac{1}{4}$. В окрестности $\mathring{B}_r(x)$ есть точка из A, назовем ее $x_3 \neq x$
$\rho(x_3, x) < \rho(x_2, x)$ и так далее
$x_1, x_2 \ldots \in A$, $\rho(x_1, x) > \rho(x_2, x) > \ldots$ и $\rho(x_n, x) < \frac{1}{2^n} \Rightarrow \rho(x_1, x) \to 0$

Theorem 2.10. Очевидное следствие

Конечное множество не имеет предельных точек

Definition 2.11. Подпространство

(X, ρ) – метрическое пространство $Y \subset X$
$(Y, \rho|_{Y \times Y})$ – подпространство метрического пространства (X, ρ)

Theorem 2.11. Об открытых множества в пространстве и подпространстве

(X, ρ) – метрическое пространство, $Y \subset X$. Тогда

1. A – открыто в $(Y, \rho) \Leftrightarrow \exists G \subset X$, открытое в $(X, \rho) : A = G \cap Y$
2. A – замкнуто в $(Y, \rho) \Leftrightarrow \exists F \subset X$, замкнутое в $(X, \rho) : A = F \cap Y$

Доказательство:

1. $\Rightarrow$ A открыто в $(Y, \rho) \Rightarrow A = \bigcup\limits_{x \in A} B^Y_{r_x}(x)$, где r_x – такой радиус, что $B^Y_{r_x}(x) \subset A$
   $B^Y_{r_x}(x) = \{z \in Y : \rho(z, x) < r_x\} = B^X_{r_x}(x) \cap Y$
   $\Rightarrow A = \bigcup\limits_{x \in A} (B^X_{r_x}(x) \cap Y) = Y \cap \bigcup\limits_{x \in A} B^X_{r_x}(x)$, где $G := \bigcup\limits_{x \in A} B^X_{r_x}(x)$ – открытое в (X, ρ) как объединение открытых
   $\Leftarrow$ $A = G \cap Y$, G – открытое в X. Докажем, что A открыто в Y
   Возьмем $a \in A \subset G \Rightarrow \exists r > 0 : B^X_r(a) \subset G \Rightarrow B^Y_r(a) = B^X_r(a) \cap Y \subset G \cap Y = A$
2. A – замкнуто в $(Y, \rho) \Leftrightarrow Y \setminus A$ – открыто в $(Y, \rho) \Leftrightarrow \exists G \subset X$ открытое в $(X, \rho) : Y \setminus A = G \cap Y \Rightarrow Y \cap (X \setminus G) = A$, где $X \setminus G$ – замкнутое $\Leftrightarrow G$ – открытое

Example 2.3.

$X = \mathbb{R},\ Y = [0, 3)$
$[0, 1)$ – открыто в Y, т.к. $(-1, 1)$ – открыто в $\mathbb{R}$, а $[0, 1) = (-1, 1) \cap Y$
$[2, 3)$ – замкнуто в Y, т.к. $[2, 4]$ – замкнуто в $\mathbb{R}$, а $[2, 3) = [2, 4] \cap Y$

Definition 2.12. Норма

X – векторное пространство. $||\ ||$ – норма на X, если
$|| \cdot || : X \to R$

1. $||x|| \forall x \in X$ и $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = \overrightarrow{0}$
2. $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||\ \forall x \in X\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||\ \forall x, y \in X$ (неравенство треугольника)

Example 2.4.

1. $X = \mathbb{R};\ |x|$ – норма
2. $X = \mathbb{R}^d;\ ||x||_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_d|^p)^{\frac{1}{p}}$ – норма, $p \geq 1$
   Неравенство треугольника – это неравенство Минковского
3. $X = C[a, b];\ ||f|| := \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$
4. $X = C[a, b];\ ||f|| := \int\limits_a^b |f|$

Definition 2.13. Скалярное произведение

X – векторное пространство, $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ – скалярное произведение, если

1. $\langle x, x \rangle \geq 0\ \forall x \in X$ и $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \overrightarrow{0}$
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle\ \forall x, y \in X$
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle\ \forall x, y \in X\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle\ \forall x, y, z \in X$

Example 2.5.

1. $X = \mathbb{R}^d;\ \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_d y_d$
   $x = (x_1 \ldots x_d);\ y = (y_1 \ldots y_d)$
2. $X = \mathbb{R}^d;\ w_1, w_2 \ldots w_d > 0$
   $\langle x, y \rangle = w_1 x_1 y_1 + w_2 x_2 y_2 + \ldots + w_d x_d y_d$
3. $X = C[a, b];\ \langle f, g \rangle = \int\limits_a^b f(x) g(x) dx$

Theorem 2.12. Свойства

1. Неравенство Коши-Буняковского
   $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$
2. $||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ – норма
3. $|| \cdot ||$ – норма в $X \Rightarrow \rho(x, y) := ||x - y||$ – метрика в X
4. $||x - y|| \geq |||x|| - ||y|||$

Доказательство:

1. $f(t) := \langle x+ty, x+ty\rangle \geq 0$
   $f(t) = \langle x, x+ty\rangle + t\langle y, x+ty\rangle = \langle x,x\rangle + t\langle x,y\rangle + t\langle y,x\rangle + t^2\langle y,y\rangle = t^2\langle y,y\rangle + 2t\langle x,y\rangle + \langle x,x\rangle$ – квадратный трехчлен
   $\Rightarrow f$ имеет не больше одного корня $\Rightarrow D \leq 0 \Leftrightarrow (2\langle x,y\rangle)^2 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leq 0$
   Сократили на 4 и победили
2. $||\alpha x|| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha^2\langle x,x\rangle} = |\alpha|\sqrt{\langle x,x\rangle} = |\alpha|||x||$
   Неравенство треугольника: $||x+y|| \overset{?}{\leq} ||x|| + ||y||$, т.е. $\sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \leq \sqrt{\langle x,x\rangle} + {}$
   $+ \sqrt{\langle y,y\rangle}$
   Т.е. $\langle x+y, x+y\rangle \leq \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\sqrt{\langle x,x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y,y\rangle}$
   Но $\langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$. После сокращения осталось КБШ
3. $||x-y|| \geq 0$ и $||x-y|| = 0 \Leftrightarrow x - y = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow x = y$
   $\rho(y,x) = ||y-x|| = ||(-1)(x-y)|| = |-1|\cdot||x-y|| = \rho(x,y)$
   Неравенство треугольника: $\rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z)$
   $||x-y|| + ||y-z|| \geq ||x-y+y-z|| = ||x-z||$
4. Нужно доказать, что $-||x-y|| \leq ||x|| - ||y|| \leq ||x-y||$
   - Правое:
     $||x|| - ||y|| \leq ||x-y||$, т.е. $||x-y|| + ||y|| \geq ||x-y+y|| = ||x||$
   - Левое:
     $||x|| - ||y|| \geq -||x-y||$, т.е. $||x-y|| + ||x|| = ||y-x|| + ||x|| \geq ||y-x+x|| = ||y||$

Exercise 2.3.

Доказать, что норма $||\ ||$ в векторном пространстве X порождается некоторым скалярным произведением $\Leftrightarrow ||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$

2.2 §2. Предел в метрическом пространстве

Definition 2.14.

(X,ρ) – метрическое пространтсво, $x_n \in X;\ a \in X$. $\lim x_n = a$, если

1. Вне любого шара с центром в точке a содержится лишь конечное число членов последовательности
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N\ \rho(x_n, a) < \varepsilon$
3. $\lim \rho(x_n, a) = 0$

Theorem 2.13.

Эти определения равносильны

Definition 2.15. Ограниченное множество

$A \subset X$, A – ограниченное множество, если оно содержится в каком-то шаре

Notation 2.1. Свойства пределов

1. Предел единственный
   Т.е. если $\lim x_n = a$ и $\lim x_n = b$, то $a = b$
2. Если $\lim x_n \lim y_n = a$, то предел последовательности, полученной перемешиванием x_n и y_n также равен a
3. Если $\lim x_n = a$, то последовательность полученная из x_n перестановкой членов, также стремится к a
4. Если $\lim x_n = a$, то предел ее подпоследовательность также равен a
5. Если последовательность имеет предел, то она ограничена как множество
6. Если $\lim x_n = a;\ \lim y_n = b \Rightarrow \lim \rho(x_n, y_n) = \rho(a, b)$

Доказательство:

1. Пусть $a \neq b$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}\rho(a, b) > 0$
   $\exists N_1 : \forall n > N_1\ \rho(x_n, a) < \varepsilon$ и $\exists N_2 : \forall n > N_2\ \rho(x_n, b) < \varepsilon$
   Возьмем $n > \max(N_1, N_2) \Rightarrow \rho(a, b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) < 2\varepsilon = \rho(a, b)$
2. Очевидно
3. Еще более очевидно
4. Ссылка на 1 семестр
5. Пусть $\lim x_n = a$. Вне $B_1(a)$ конечное число членов последовательности $(x_{i_1} \dots x_{i_k})$.
   $R := \max\{1, \rho(a, x_{i_1}) \dots \rho(a, x_{i_k})\} \Rightarrow x_n \in \overline{B}_R(a)\ \forall n$
6. $\rho(a, b) \leq \rho(x_n, a) + \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, b)$
   $\rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, a) + \rho(a, b) + \rho(y_n, b)$
   Тогда $|\rho(a, b) - \rho(x_n, y_n)| \leq \rho(x_n, a) + \rho(y_n, b) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Theorem 2.14. Теорема об арифметических действиях с пределами в нормированном пространстве

X – нормированное пространство, $\lim x_n = a;\ \lim y_n = b;\ a, b, x_n, y_n \in X;$
$\lim \lambda_n = \mu;\ \lambda_n, \mu \in \mathbb{R}$
Тогда

1. $\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$
2. $\lim(\lambda_n x_n) = \mu a$
3. $\lim ||x_n|| = ||a||$
4. Если в X есть скалярное произведение, то $\lim\langle x_n, y_n\rangle = \langle a, b\rangle$

Доказательство:

1. $||(x_n + y_n) - (a + b)|| \leq ||x_n - a|| + ||y_n - b|| \to 0$
2. $||\lambda_n x_n - \mu a|| \leq ||\lambda_n x_n - \mu x_n + \mu x_n - \mu a|| \leq ||\lambda_n x_n - \mu x_n|| + ||\mu x_n - \mu a|| =$
   $= |\lambda_n - \mu| \cdot ||x_n|| + |\mu| \cdot ||x_n - a|| \to 0$
3. $||x_n|| = \rho(x_n, 0) \to \rho(a, 0) = ||a||$
4. $\langle x_n, y_n\rangle - \langle a, b\rangle = \langle x_n, y_n\rangle - \langle a, y_n\rangle + \langle a, y_n\rangle - \langle a, b\rangle = \langle x_n - a, y_n\rangle + \langle a, y_n - b\rangle$
   $|\langle x_n, y_n\rangle - \langle a, b\rangle| \leq |\langle x_n - a, y_n\rangle| + |\langle a, y_n - b\rangle| \leq ||x_n - a|| \cdot ||y_n|| + ||a|| \cdot ||y_n - b|| \to 0$

Definition 2.16. Покоординатная сходимость в $\mathbb{R}^d$

$x_n = (x_n^{(1)} \dots x_n^{(d)});\ a = (a^{(1)} \dots a^{(d)})$
x_n покоординатно сходится к a, если $\lim x_n^{(k)} = a^{(k)}\ \forall k = 1 \dots d$

Theorem 2.15.

В $\mathbb{R}^d$ покоординатная сходимость и сходимость по норме совпадают

Доказательство:

$\Rightarrow$ $||x_n - a|| = \sqrt{(x_n^{(1)} - a^{(1)})^2 + \ldots + (x_n^{(d)} - a^{(d)})^2} \leq |x_n^{(1)} - a^{(1)}| + \ldots + |x_n^{(d)} - a^{(d)}| \to 0$

$\Leftarrow$ $|x_n^{(k)} - a^{(k)}| \leq \sqrt{(x_n^{(1)} - a^{(1)})^2 + \ldots + (x_n^{(d)} - a^{(d)})^2} = ||x_n - a|| \to 0$

$\Rightarrow \lim x_n^{(k)} = a^{(k)}$

Definition 2.17. Фундаментальная последовательность

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall m, n \geq N\ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

Theorem 2.16. Свойства

1. Сходящаяся последовательность – фундаментальная
2. Фундаментальная последовательность ограничена
3. Если у фундаментальной последовательности есть подпоследовательность, сходящаяся к a, то сама последовательность тоже сходится к a

Доказательство:

1. $\lim x_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geq N\ \rho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\forall m \geq N\ \rho(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2}$
   $\Rightarrow \rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, a) + \rho(a, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
2. Возьмем $\varepsilon = 1. \exists N : \forall m, n \geq N\ \rho(x_n, x_m) < 1 \Rightarrow x_n \in B_1(x_N)$ при $n \geq N$
   $R := \max\{1, \rho(x_1, x_N) \ldots \rho(x_{N-1}, x_N)\} \Rightarrow x_n \in \overline{B}_R(x_N)\ \forall n$
3. Пусть $x_{n_k} \to a$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ $\begin{matrix} \exists N : \forall m, n \geq N\ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon \\ \exists K : \forall k \geq K\ \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \end{matrix}$
   Возьмем $k = \max\{K, N\}$. Тогда $n_k \geq N \Rightarrow \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$ и $\rho(x_{n_k}, x_n) < \varepsilon\ \forall n$
   $\Rightarrow \rho(x_n, a) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < 2\varepsilon$ при $n \geq N$

Definition 2.18. Полное метрическое пространство

(X, ρ) – метрическое пространство
Оно называется полным, если любая фундаментальная последовательность имеет предел

Example 2.6.

R. $\rho(x, y) = |x - y|$ – полное метрическое пространство
$\mathbb{Q}$ не полное. $x_n = \frac{[10^n \pi]}{10^n}$ фундаментальна, но не имеет предела в $\mathbb{Q}$

Theorem 2.17.

$\mathbb{R}^d$ – полное пространство

Доказательство:

Пусть $x_n = (x_n^{(1)} \ldots x_n^{(d)})$ – фундаментальная последовательность

Т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall m, n \geq N\ ||x_n - x_m|| < \varepsilon$

$||x_n - x_m|| = \sqrt{(x_n^{(1)} - x_m^{(1)})^2 + \ldots + (x_n^{(d)} - x_m^{(d)})^2} \geq |x_n^{(k)} - x_m^{(k)}|$

Следовательно, числовая последовательность $x_n^{(k)}$ фундаментальная $\Rightarrow$ у нее есть предел $a^{(k)} := \lim x_n^{(k)} \Rightarrow x_n$ покоординатно сходится к $a = (a^{(1)} \ldots a^{(d)}) \Rightarrow$ сходится по норме

Remark 2.3.

(X, ρ) – полное метрическое пространство. $Y \subset X$
(Y, ρ) – полное $\Leftrightarrow Y$ замкнуто

Доказательство:

$\Leftarrow$ y_n – фундаментальная последовательность в $Y \Rightarrow y_n$ фундаментальная в X
$\Rightarrow y_n$ имеет предел в X, т.е. $b := \lim y_n$ и $b \in X$
$\Rightarrow b$ предельная точка $Y \Rightarrow b \in Y$, т.к. Y замкнуто

$\Rightarrow$ Возьмем предельную точку b множества $Y \Rightarrow$ найдется $y_n \in Y : \lim y_n = b \Rightarrow y_n$ фундаментальна в $X \Rightarrow y_n$ фундаментальна в $Y \Rightarrow$ у нее есть предел в Y
т.е. $\lim y_n = a \in Y \Rightarrow a = b$ по единственности предела

2.3 §3. Компактность

Definition 2.19. Покрытие

A, B_α. $B_\alpha,\ \alpha \in I$ – покрытие множества A, если $A \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha$

Definition 2.20. Открытое покрытие

Открытое покрытие – покрытие открытыми множествами

Definition 2.21. Подпокрытие

Подпокрытие какого-то покрытия – из какого-то покрытия выкинулы какое-то количество множеств и оно осталось покрытием

Definition 2.22. Компакт

K – компакт (компактное множество), если из любого покрытия K открытыми множествами можно извлечь конечное подпокрытие

Theorem 2.18. Теорема о свойствах компактов

(X, ρ) – метрическое пространство

1. $K \subset Y \subset X$. Тогда K – компакт в $(X, \rho) \Leftrightarrow K$ – компакт в (Y, ρ)
2. K – компакт $\Rightarrow K$ – замкнуто и ограничено
3. Замкнутое подмножество компакта – компакт

Доказательство:

1. $\Rightarrow K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$, где U_α – открыты в (Y, ρ)

   Тогда $\exists G_\alpha$ открытые в $(X, \rho) : U_\alpha = G_\alpha \cap Y \Rightarrow K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha$ – открытое покрытие в $(X, \rho) \Rightarrow$ можно выбрать конечное подпокрытие

   $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \Rightarrow K = K \cap Y \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \cap Y = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \Rightarrow K$ – компакт в (Y, ρ)

   $\Leftarrow K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha$, где G_α – открыты в $(X, \rho) \Rightarrow U_\alpha := G_\alpha \cap Y$ – открыты в (Y, ρ) и $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha \Rightarrow$ можно выбрать конечное подпокрытие $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \Rightarrow K$ – компакт в (X, ρ)

2.

Ограниченность. Возьмем $a \in K$ и рассмотрим покрытие $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n(a)$ – открытое покрытие

Выберем конечное подпокрытие $\Rightarrow K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} B_n(a) = B_N(a) \Rightarrow K$ – ограничено

Замкнутость. Надо доказать, что $X \setminus K$ открыто. Возьмем $a \in X \setminus K$ и покажем, что для некоторого $r > 0$ $B_r(a) \subset X \setminus K$

Возьмем такое $r_x > 0$, что $B_{r_x}(x) \cap B_{r_x}(a) = \varnothing$

$K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B_{r_x}(x)$ – открытое покрытие. Выберем конечное подпокрытие $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_{r_{x_i}}(x_i)$

$r := \min\{r_{x_1}, r_{x_2} \dots r_{x_n}\} > 0$

Покажем что $B_r(a) \subset X \setminus K$, т.е. что $B_r(a) \cap K = \varnothing$

$B_{r_{x_i}}(a) \cap B_{r_{x_i}}(x_i) = \varnothing \Rightarrow B_r(a) \cap B_{r_{x_i}}(x_i) = \varnothing \Rightarrow B_r(a) \cap \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_{r_{x_i}}(x_i) = \varnothing$

- K – компакт, $K \supset \tilde{K}$ – замкнуто. Покажем, что $\tilde{K}$ – компакт. Рассмотрим открытое покрытие $\tilde{K} \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$, где U_α – открыты в (X, ρ)

  $X \setminus \tilde{K}$ – открыто $\Rightarrow K \subset (X \setminus \tilde{K}) \cup \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ – открытое покрытие K – компакт $\Rightarrow$ можно выбрать конечное подпокрытие

  $\tilde{K} \subset K \subset (X \setminus \tilde{K}) \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \Rightarrow \tilde{K} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \Rightarrow \tilde{K}$ – компакт

Theorem 2.19.

K_α – семейство компактов в (X, ρ) : пересечение любого их конечно количество непусто. Тогда $\bigcap\limits_{\alpha \in I} K_\alpha \neq \varnothing$

Доказательство:

Зафиксируем компакт K_{α_0}. Предположим, что $\bigcap\limits_{\alpha \in I} K_\alpha = \varnothing$

$K_{\alpha_0} \cap \bigcap\limits_{\alpha \neq \alpha_0} K_\alpha = \varnothing$, т.е. $K_{\alpha_0} \subset X \setminus \bigcap\limits_{\alpha \neq \alpha_0} K_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \neq \alpha_0} (X \setminus K_\alpha)$

Это открытое покрытие K_{α_0}. Выберем конечное подпокрытие

$K_{\alpha_0} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} (X \setminus K_{\alpha_i}) = X \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{n} K_{\alpha_i} \Rightarrow \bigcap\limits_{i=0}^{n} K_{\alpha_i} = \varnothing$ – противоречие

Theorem 2.20. Следствие

$K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ – непустые компакты

Тогда $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n \neq \varnothing$

Definition 2.23. Секвенциально компактное множество

(X, ρ) – метрическое пространство $K \subset X$

K – секвенциально компактное, если из любой последовательности точек множества K можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к какой-то точке из K

Remark 2.4.

Секвенциальный компакт замкнут

Theorem 2.21.

Всякое бесконечное подмножество компакта имеет предельную точку

Доказательство:

K – компакт, $A \subset K$ – бесконечное подмножество

Предположим, что $A' = \varnothing \Rightarrow A$ – замкнуто $\subset K \Rightarrow A$ – компакт

Возьмем $a \in A$, она не предельная $\Rightarrow \exists r_a > 0 : \mathring{B}_{r_a}(a) \cap A = \varnothing \Rightarrow B_{r_a}(a) \cap A = \{a\}$

Рассмотрим открытое покрытие $A \subset \bigcup\limits_{a \in A} B_{r_a}(a)$. Из этого покрытия нельзя выкинуть ни одно из множеств $\Rightarrow$ нельзя выбрать конечное подпокрытие. Противоречие

Theorem 2.22. Следствие

Компактность $\Rightarrow$ секвенциальная компактность

Доказательство:

K – компакт, $\{x_n\}$ – последовательность точек из K

$D := \{x_1, x_2, x_3 \ldots\}$

Если $\#D < +\infty$, то какой-то член последовательности повторяется бесконечное число раз. Возьмем его в качестве подпоследовательности

Если $\#D = +\infty$, то по теореме у D есть предельная точка $\Rightarrow$ найдутся различные $y_n \in D$: $\lim y_n = a$ – предельная точка

Переставим члены последовательности y_n и получим подпоследовательность. $a \in K$, т.к. K – замкнуто

Theorem 2.23.

K – компакт (секвенциальный компакт) в $(X, \rho) \Rightarrow (K, \rho)$ – полное

Доказательство:

$x_n \in K$ фундаментальная последовательность. K – секвенциальный компакт $\Rightarrow$ в ней можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\Rightarrow$ у x_n есть предел

Definition 2.24. Эпсилон-сеть

$A \in X, \ (X, \rho)$ – метрическое пространство, $\varepsilon > 0$
$E \subset A$ – ε-сеть, если $\forall a \in A \ \exists e \in E : \rho(a, e) < \varepsilon$

Remark 2.5.

Здесь написано, что $A \subset \bigcup\limits_{e \in E} B_\varepsilon(e)$

Definition 2.25. Конечная эпсилон-сеть

E – конечное множество и ε-сеть $\Rightarrow E$ – конечная ε-сеть для A

Definition 2.26. Вполне ограниченное множество

A – вполне ограниченое, если $\forall \varepsilon > 0$ в множестве A есть конечная ε-сеть

Theorem 2.24. Свойства

1. Вполне ограниченность $\Rightarrow$ ограниченность
2. В $\mathbb{R}^d$ верно и обратное

Доказательство:

1. $\varepsilon = 1$. Возьмем конечную ε-сеть $x_1 \dots x_n$. $R := 1 + \max\limits_{k \neq 1}(\rho(x_1, x_k))$
   $\overline{B}_R(x_1) \supset A$
   Берем $y \in A \Rightarrow \exists x_i : \rho(x_i, y) \leq 1 \Rightarrow \rho(x_1, y) \leq \rho(x_1, x_i) + \rho(x_i, y) \leq R$
2. A – ограниченное в $\mathbb{R}^d \Rightarrow A \subset B_R(0) \subset [-R; R]^d$
   Нарежем каждую сторону на n частей. Получим n^d кубиков, сторона которых $\frac{2R}{n}$. Если наше множество A пересекается с каким-то кубиком, то выбираем в нем произвольную точку, в остальных не берем вообще ничего
   Получили $\frac{2R}{n}\sqrt{d}$-сеть

Theorem 2.25.

Секвенциальная компактность $\Rightarrow$ вполне ограниченность

Доказательство:

От противного. Пусть для $\varepsilon > 0$ в множестве A не нашлось конечной ε-сети. Возьмем $x_1 \in A \Rightarrow x_1$ – не ε-сеть $\Rightarrow$ найдется $x_2 \in A : \rho(x_1, x_2) > \varepsilon \Rightarrow x_1, x_2$ – не ε-сеть $\Rightarrow$ найдется $x_3 \in A : \rho(x_1, x_3) > \varepsilon$ и $\rho(x_2, x_3) > \varepsilon$ и так далее

На n шаге: $x_1 \dots x_n$ – не ε-сеть $\Rightarrow$ найдется $x + n + 1 \in A : \rho(x_k, x_{n+1}) > \varepsilon \ \forall k \leq n$

Построили последовательность x_n. Выберем сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \Rightarrow$ она фундаментальна. Но это не так, $\rho(x_{n_i}, x_{n_j}) > \varepsilon$

Theorem 2.26. Теорема Хаусдорфа

Если K вполне ограничено и (K, ρ) – полное $\Rightarrow K$ – компакт

Доказательство:

$K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$, U_α – открытые. Пусть нельзя выделить конечное подпокрытие

$\varepsilon = 1$. Существует конечная 1-сеть $S_1 \Rightarrow K \subset \bigcup\limits_{x \in S_1} \overline{B}_1(x)$

Для какого-то из множеств $K \cap \overline{B}_1(x),\ x \in S_1$ нельзя выделить конечное подпокрытие. Возьмем одно такое и назовем его A_1

Существует конечная $\frac{1}{2}$-сеть $S_2 \Rightarrow A_1 \subset K \subset \bigcup\limits_{x \in S_2} \overline{B}_{\frac{1}{2}}(x)$

Для какого-то из множеств $A_1 \cap \overline{B}_{\frac{1}{2}}(x),\ x \in S_2$ нельзя выделить конечное подпокрытие. Возьмем одно такое и назовем его A_2 и так далее

На n шаге: существует конечная $\frac{1}{n}$-сеть $S_n \Rightarrow A_{n-1} \subset K \subset \bigcup\limits_{x \in S_n} \overline{B}_{\frac{1}{n}}(x)$

Для какого-то из множеств $A_{n-1} \cap \overline{B}_{\frac{1}{n}}(x),\ x \in S_n$ нельзя выделить конечное подпокрытие. Возьмем одно такое и назовем его A_n

$K \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots;\ A_n = A_{n-1} \cap \overline{B}_{\frac{1}{n}}(x_n)$

Проверим, что $x_1, x_2 \ldots$ фундаментальная. Возьмем $k > n \Rightarrow$ найдется $y \in A_k \Rightarrow y \in \overline{B}_{\frac{1}{k}}(x_k)$ и $y \in \overline{B}_{\frac{1}{n}}(x_n) \Rightarrow \rho(x_k, x_n) \le \rho(x_k, y) + \rho(y, x_n) < \frac{1}{k} + \frac{1}{n} < \frac{2}{n}$ – фундаментальная, значит $\exists \lim x_n = x_* \in K \Rightarrow$ найдется $U_{\alpha_0} \ni x_* \Rightarrow \exists r > 0\ x_* \in B_r(x_*) \subset U_{\alpha_0}$

$\lim x_n = x_* \Rightarrow \exists N : \forall n > N\ \rho(x_n, x_*) < \frac{r}{2}$. А еще $A_n \subset \overline{B}_{\frac{1}{n}}(x_n) \subset \overline{B}_{\frac{1}{n}+\frac{r}{2}}(x_*) \subset \overline{B}_r(x_*)$ при $n > \frac{2}{r}$

Theorem 2.27. Следующие условия равносильны

1. K – компакт
2. K – секвенциальный компакт
3. K – вполне ограниченное и (K, ρ) – полное

Theorem 2.28.

(X, ρ) – полное метрическое пространство. Следующие условия равносильны

1. K – компакт
2. K – секвенциальный компакт
3. K – замкнуто и вполне ограниченно

Доказательство:

Если (X, ρ) – полное, то K – замкнуто $\Leftrightarrow$ (K, ρ) – полное, тогда третьи строчки из двух предыдущих теорем – одно и то же

Theorem 2.29. Характеристика компакта в $\mathbb{R}^d$

$K \in \mathbb{R}^d$, следующие условия равносильны

1. K – компакт
2. K – секвенциальный компакт
3. K – замкнуто и ограничено

Lemma 2.1. Лемма Лебега

K – компакт, $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ – открытое

Тогда $\exists r > 0 : \forall x \in K$ шар $B_r(x)$ целиком накрывается каким-то U_α

Доказательство:

$\forall x \in K$ x покрыта каким-то U_{α_0} – открытое $\Rightarrow \exists r_x > 0 : B_{r_x}(x) \subset U_{\alpha_0}$

Рассмотрим покрытие $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B_{\frac{r_x}{2}}(x)$. Выделим конечное подпокрытие $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_{\frac{r_{x_i}}{2}}(x_i)$

$r := \min\{\frac{r_1}{2}, \frac{r_2}{2} \dots \frac{r_n}{2}\}$ подходит. Возьмем $y \in K$. Хотим доказать, что $B_r(y) \subset B_{r_{x_i}}(x_i)$ для некоторой i

Возьмем $z \in B_r(y)$, $\rho(y, z) < r \leq \frac{r_{x_i}}{2}$, $y \in K \Rightarrow y \in B_{\frac{r_{x_i}}{2}}(x_i)$ для некоторого $i \Rightarrow \rho(y, x_i) < \frac{r_{x_i}}{2}$

$\rho(z, x_i) \leq \rho(z, y) + \rho(y, x_i) < r_{x_i}$

2.4 §4. Непрерывные отображения

Definition 2.27. Непрерывность функции в точке

(X, ρ) и (Y, ρ) – метрические пространства. $E \subset X$; $f : E \to Y$; $a \in E$

f – непрерывна в a, если

1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in E\ \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f(B_\delta(a) \cap E) \subset B_\varepsilon(f(a))$
3. Для любой последовательность $x_n \in E : \lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = f(a)$

Theorem 2.30.

Эти определения равносильны

Exercise 2.4.

Докажите

Definition 2.28. Предел функции в точке

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, если

1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in E, x \neq a\ \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon$
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f(\mathring{B}_\delta(a) \cap E) \subset B_\varepsilon(b)$
3. Для любой последовательности $x_n \in E, x_n \neq a : \lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = b$

Theorem 2.31. Критерий Коши

a – предельная точка E. Существование предела $\lim\limits_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$:

$$\begin{cases} \forall \rho(x, a) < \delta \\ \forall \rho(y, a) < \delta \\ x, y \neq a \end{cases} \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Доказательство:

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Rightarrow \exists \delta > 0 : \begin{cases} \rho_X(x,a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), b) < \frac{\varepsilon}{2} \\ \rho_X(y,a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(y), b) < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$

$\Leftarrow$ Проверим определение по Гейне. Берем $x_n \to a$

$\exists N : \forall n \geq N \ \rho_X(x_n, a) < \delta \Rightarrow \forall m, n \geq N \ \begin{cases} \rho_X(x_n, a) < \delta \\ \rho_X(x_m, a) < \delta \end{cases} \Rightarrow \rho_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$

Т.е. $f(x_n)$ – фундаментальная последовательность $\Rightarrow$ у нее есть предел

Theorem 2.32. Арифметические действия с пределами

$f, g : E \to Y$ – нормированное пространство, a – предельная точка E

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = B,\ \lim\limits_{x\to a} \lambda(x) = \mu$. Тогда:

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
2. $\lim\limits_{x\to a} \lambda(x) f(x) = \mu A$
3. $\lim\limits_{x\to a} ||f(x)|| = ||A||$
4. Если в Y есть скалярное произведение, то $\lim\limits_{x\to a}\langle f(x), g(x)\rangle = \langle A, B\rangle$
5. Если $Y = \mathbb{R}$ и $B \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

Доказательство:

Смотрим на определение по Гейне

Theorem 2.33. Теорема о непрерывности композиции

$D \subset X;\ f : D \to Y;\ f(D) \subset E;\ g : E \to Z;\ a \in D$

f – непрерывна в точке a, g – непрерывна в точке $f(a)$. Тогда $g \circ f$ непрерывна в a

Доказательство:

Гейне. Берем $x_n \in E : x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a) \Rightarrow g(f(x_n)) \to g(f(a))$

Theorem 2.34. Характеристика непрерывных в терминах открытых множеств

$f : X \to Y$. Тогда следующие условия равносильны

1. f – непрерывна в точке a
2. Для любого $U \subset Y$ открытого $f^{-1}(U) := \{x \in X : f(x) \in U\}$ – открыто

Доказательство:

$1 \Rightarrow 2$ Возьмем U – открытое. Проверим, что $f^{-1}(U)$ – открыто

Возьмем $a \in f^{-1}(U) \Rightarrow f(a) \in U$ – открытом $\Rightarrow \varepsilon > 0\ B_\varepsilon(f(a)) \subset U$

f – непрерывна в точке a. Возьмем $\delta > 0$ из определения непрерывности f в точке a

$f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \subset U \Rightarrow B_\delta(a) \subset f^{-1}(U) \Rightarrow a$ – внутренняя точка $f^{-1}(U) \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(U)$ – открыто

$2 \Rightarrow 1$ Возьмем $a \in X$ и докажем, что f – непрерывна в точке a

Возьмем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $U = B_\varepsilon(f(a))$ – открытое $\Rightarrow a \in f^{-1}(U)$ – открытое $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : B_\delta(a) \subset f^{-1}(U) \Rightarrow f(B_\delta(a)) \subset U = B_\varepsilon(f(a))$

Theorem 2.35.

Непрерывный образ компакта – компакт

Доказательство:

$f: K \to Y;\ K$ – компакт. f непрерывна во всех точках $\Rightarrow f(K)$ – компакт

Рассмотрим покрытие $f(K) \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$ – открытое $\Rightarrow K \subset f^{-1}(\bigcup U_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha\in I} f^{-1}(U_\alpha)$ – открытое

Выделим конечное подпокрытие $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} f^{-1}(U_{\alpha_i}) = f^{-1}(\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}) \Rightarrow f(K) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$

Definition 2.29. Ограниченная функция

$f: E \to Y$ – ограничена если $f(E)$ – ограниченное множество

Theorem 2.36. Следствия

1. $f: K \to Y;\ K$ – компакт, f – непрерывна $\Rightarrow f$ – ограничена
2. $f: K \to \mathbb{R};\ K$ – компакт, f – непрерывна $\Rightarrow f$ – ограничена и достигает своего минимума и максимума

Доказательство:

1. $f(K)$ – компакт $\Rightarrow f(K)$ – ограничено
2. $f(K)$ – ограниченное множество. $b := \sup f(K) \in \mathbb{R}$
   $\forall n\ b - \frac{1}{n}$ – не верхняя граница $\Rightarrow \exists x_n \in K : b > f(x_n) > b - \frac{1}{n} \Rightarrow \lim f(x_n) = b \Rightarrow$
   $\Rightarrow f(x_{n_k}) \to f(x_n) = b$

Theorem 2.37.

$f: X \to Y;\ (X, \rho_X)$ и (Y, ρ_Y) – метрические пространства
f – непрерывная биекция и X – компакт $\Rightarrow f^{-1}: Y \to X$ – непрерывна

Доказательство:

$g := f^{-1}$. Надо доказать для g, что прообраз открытого – открытое

Берем U – открытое $\subset X$. $g^{-1}(U) = f(U)$

$X \setminus U$ – замкнутое подмножество компакта $X \Rightarrow X \setminus U$ – компакт $\Rightarrow f(X \setminus U)$ – компакт $\Rightarrow f(X \setminus U)$ – замкнутое $\Rightarrow Y \setminus f(X \setminus U)$ – открытое, а это $f(U)$

Definition 2.30. Равномерная непрерывность отображений

$f: E \to Y;\ E \subset X;\ (X, \rho_X)$ и (Y, ρ_Y) – метрические пространства
f равномерно непрерывная, если
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in E\ \rho_X(x, y) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Theorem 2.38. Теорема Кантора

$f: K \to Y$ – непрерывна, K – компакт $\Rightarrow f$ равномерно непрерывна

Доказательство:

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Возьмем $x \in K$, f непрерывна в точке $x \Rightarrow \exists r_x : f(B_{r_x}(x)) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x))$

$K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B_{r_x}(x)$ – покрытие K открытыми множествами

Берем $\delta > 0$ из леммы Лебега. Любой шарик $B_\delta(a)$ целиком содержится в каком-то элементе покрытия

Покажем, что это δ подходит. Пусть $x, y \in K : \rho_X(x, y) < \delta \Rightarrow x \in B_\delta(y) \subset B_{r_a}(a)$ (какой-то элемент покрытия) $\Rightarrow f(x), f(y) \in f(B_\delta(y)) \subset f(B_{r_a}(a)) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(a))$

$\rho_Y(f(x), f(y)) \leq \rho_Y(f(x), f(a)) + \rho_Y(f(a), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Exercise 2.5.

Модифицировать старое доказательство теоремы Кантора на случай отображений

Definition 2.31.

X – векторное пространство и $||\cdot||$ и $|||\cdot|||$ – нормы в X

Эти нормы эквивалентны, если $\exists c_1$ и $c_2 > 0 : c_1||x|| \leq |||x||| \leq c_2||x|| \; \forall x \in X$

Remark 2.6.

1. Это отношение эквивалентности
2. Если $||\cdot||$ и $|||\cdot|||$ эквивалентны, то $x_n \to a$ в смысле $||\cdot||$ и в смысле $|||\cdot|||$ одно и то же
3. Предельные точки в смысле $||\cdot||$ и $|||\cdot|||$ совпадают
4. Замкнутые и открытые множества в смысле $||\cdot||$ и $|||\cdot|||$ совпадают
5. Непрерывность в смысле $||\cdot||$ и $|||\cdot|||$ совпадает

Theorem 2.39.

В $\mathbb{R}^d$ все нормы эквивалентны

Доказательство:

Достаточно доказать, что любая норма эквивалентна $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}$

$p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ – норма

$p(x) = p(\sum\limits_{k=1}^{d} x_k e_k)$ (e_k – стандартный базис)

$p(\sum\limits_{k=1}^{d} x_k e_k) \leq \sum\limits_{k=1}^{d} p(x_k e_k) = \sum\limits_{k=1}^{d} |x_k| p(e_k) \leq (\sum\limits_{k=1}^{d} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum\limits_{k=1}^{d} p(e_k)^2)^{\frac{1}{2}}$. Первое это $||x||$, второе – какая-то константа c_2

$|p(x) - p(y)| \leq p(x - y) \leq c_2||x - y|| \Rightarrow p$ – непрерывна

$S := \{x \in \mathbb{R}^d : ||x|| = 1\}$ – компакт

По теореме Вейерштрасса $\exists a \in S : 0 < p(a) \leq p(x) \; \forall x \in S$. Зададим $c_1 := p(a)$

$p(x) = p(\frac{x}{||x||} \cdot ||x||) = ||x|| \cdot p(\frac{x}{||x||})$. Аргумент $\frac{x}{||x||} \in S \Rightarrow ||x|| \cdot p(\frac{x}{||x||}) \geq ||x|| \cdot p(a)$

2.5 §5. Длина кривой

Definition 2.32. Путь

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ (или даже в X – метрическое пространство) – непрерывная
Тогда γ – путь
Начало пути $\gamma(a)$, конец пути $\gamma(b)$

Definition 2.33. Замкнутые путь

Путь замкнутый, если $\gamma(a) = \gamma(b)$

Definition 2.34. Простой (несамопересекающийся путь)

Путь простое, если $\gamma(x) \neq \gamma(y)$ если $\forall x \neq y$ за исключением $\gamma(a) = \gamma(b)$

Definition 2.35. Носители пути

Носитель пути – $\gamma([a, b])$

Definition 2.36. Линейно связное множество

$A \subset X$ – линейно связное, если
$\forall p, q \in A$ существует путь в A с началом в p и концом в q

Theorem 2.40. Теорема Больцано-Коши

A – линейно связное, $f : A \to \mathbb{R}$ – непрерывная
$p, q \in A$. Тогда f принимает все значения между $f(p)$ и $f(q)$

Доказательство:

A – линейно связное $\Rightarrow \exists \gamma : [a, b] \to A : \gamma(a) = p, \gamma(b) = q$

$f \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна и $f(p) = f \circ \gamma(a)$; $f(q) = f \circ \gamma(b)$

Definition 2.37. Противоположный путь

$\gamma : [a, b] \to X$
$\gamma^{-1} : [a, b] \to X$ и $\gamma^{-1}(t) := \gamma(a + b - t)$
Начало γ^{-1} – конец γ
Конец γ^{-1} – начало γ

Definition 2.38. Эквивалентные пути

$\gamma : [a.b] \to X$ и $\tilde{\gamma} : [c, d] \to X$
Найдется $\tau : [c, d] \to [a, b]$ – строго возрастающая биекция (и непрерывна), такое что $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$

Definition 2.39. Кривая

Кривая – класс эквивалентности путей
Параметризация кривой – выбор конкретного представителя класса эквивалентности

Definition 2.40. Гладкий путь

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ – гладкий путь, если $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_d \end{pmatrix}$ и $\gamma_1 \dots \gamma_d$ – непрерывные дифференцируемые

Definition 2.41. Гладкая кривая

Кривая гладкая, если у нее есть гладкая параметризация

Remark 2.7.

Начало, конец кривой определяет и носитель тоже

Definition 2.42. Длина пути

$\gamma : [a, b] \to X$
Берем дробление $[a, b] : t_0 = a, t_1, t_2 \dots t_n = b$
$l(\gamma) := \sup\{\sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\gamma(t_k), \gamma(t_{k-1}))\}$

Theorem 2.41. Свойства

1. $l(\gamma) \geq \rho(\gamma(a), \gamma(b))$
2. Длина пути $\geq$ длины вписанной в него ломаной
3. Длины эквивалентных путей равны
4. $l(\gamma) = l(\gamma^{-1})$

Definition 2.43. Длина кривой

Длина кривой – длина любого из путей ее класса эквивалентности

Theorem 2.42. Единственность длины пути

$\gamma : [a, b] \to X$. Тогда $l(\gamma) = l(\gamma|_{[a,c]}) + l(\gamma|_{[c,b]})$

Доказательство:

«$\geq$» $l(\gamma) \geq \sum\limits_{j=1}^{m} \rho(\gamma(t_j), \gamma(t_{j-1})) + \sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\gamma(u_k), \gamma(u_{k-1}))$
Зафиксируем t-шки и перейдем к sup по u-шкам
$l(\gamma) \geq \sum\limits_{j=1}^{m} \rho(\gamma(t_j), \gamma(t_{j-1})) + \sup\{\sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\gamma(u_k), \gamma(u_{k-1}))\}$. Зададим супремум как $l(\gamma|_{[c,b]})$
$l(\gamma) \geq \sup\{\sum \rho(\gamma(t_j), \gamma(t_{j-1}))\} + l(\gamma|_{[c,b]})$. Зададим супрмум как $l(\gamma|_{[a,c]})$

«≤» $\sum\limits_{k=1}^{n}\rho(\gamma(t_k),\gamma(t_{k-1}))\le\sum\limits_{k=1}^{m}\rho(\gamma(t_k),\gamma(t_{k-1}))+\rho(\gamma(t_m),\gamma(c))+\rho(\gamma(c),\gamma(t_{m+1}))+\sum\limits_{k=m+1}^{n}\rho(\gamma(t_k),\gamma(t_{k-1}))$

Первые два слагаемых $\le l(\gamma|_{[a,c]})$, вторые два $\le l(\gamma|_{[c,b]})$

$\sum\limits_{k=1}^{n}\rho(\gamma(t_k),\gamma(t_{k-1}))\le l(\gamma|_{[a,c]})+l(\gamma|_{[c,b]})$

Осталось перейти к sup и получим $l(\gamma)\le l(\gamma|_{[a,c]})+l(\gamma|_{[c,b]})$

Theorem 2.43. Длина гладкого пути

$\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^d$

Тогда $l(\gamma)=\int\limits_a^b||\gamma'(t)||dt=\int\limits_a^b\sqrt{\gamma_1'(t)^2+\ldots+\gamma_d'(t)^2}dt$

Lemma 2.2.

$\Delta\subset[a,b]$ – отрезок

$m_\Delta^{(k)}:=\min\limits_{t\in\Delta}|\gamma_k'(t)|$

$M_\Delta^{(k)}:=\max t\in\Delta|\gamma_k'(t)|$

$m_\Delta:=(\sum\limits_{k=1}^{d}(m_\Delta^{(k)})^2)^{\frac{1}{2}}$

$M_\Delta:=(\sum\limits_{k=1}^{d}(M_\Delta^{(k)})^2)^{\frac{1}{2}}$

Тогда $m_\Delta\cdot l(\Delta)\le l(\gamma|_\Delta)\le M_\Delta\cdot l(\Delta)$

Доказательство:

Рассмотрим дробление Δ $t_0<t_1<\ldots<t_n$ и a_j – длина j-го звена ломаной по этому дроблению

$a_j^2=(\gamma_1(t_j)-\gamma_1(t_{j-1}))^2+\ldots+(\gamma_d(t_j)-\gamma_d(t_{j-1}))^2$

Каждую скобочку зададим как $\gamma_i(\xi_{ij})(t_j-t_{j-1})$, где $\xi_{1i}\in[t_{j-1},t_j]$

$a_j^2\le(|\gamma_1'(\xi_{1j})|^2+\ldots+|\gamma_d'(\xi_{dj})|^2)(t_j-t_{j-1})^2$

Но каждый модуль $\le(M_\Delta^{(i)})^2$

Тогда $a_j^2\le(M_\Delta)^2(t_j-t_{j-1})^2$

Аналогично снизу и извлекаем корень

$m_\Delta(t_j-t_{j-1})\le a_j\le M_\Delta(t_j-t_{j-1})$

И просуммируем по j от 1 до n

$m_\Delta(t_n-t_0)\le\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\le M_\Delta(t_n-t_0)$

А еще $t_n-t_0=l(\Delta)$

Доказательство теоремы 2.43:

$M_{[t_{k-1},t_k]}=:M_k$ и аналогично с m

$l(\gamma)=l(\gamma|_{[t_0,t_1]})+\ldots+l(\gamma|_{[t_{n-1},t_n]})$

Но для каждой такой штуки мы знаем оценку снизу и сверху ($m_i(t_i-t_{i-1})$ и $M_i(t_i-t_{i-1})$ соответственно)

$\int\limits_a^b||\gamma'||=\int\limits_{t_0}^{t_1}+\ldots+\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}$

$m_k(t_k - t_{k-1}) \leq \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} ||\gamma'(t)||dt \leq M_k(t_k - t_{k-1})$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(t_k - t_{k-1}) \leq \begin{bmatrix} l(\gamma) \\ \int\limits_a^b ||\gamma'|| \end{bmatrix} \leq \sum_{k=1}^{n} M_k(t_k - t_{k-1})$$

Докажем, что $\sum\limits_{k=1}^{m}(M_k - m_k)(t_k - t_{k-1}) \to 0$ если мелкость $\to 0$

$M_k - m_k = (\sum\limits_{j=1}^{d}(M^{(j)}_{[t_{k-1},t_k]})^2)^{\frac{1}{2}} - (\sum\limits_{j=1}^{d}(m^{(j)}_{[t_{k-1},t_k]})^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum\limits_{j=1}^{d}(M^{(j)}_{[t_{k-1},t_k]} - m^{(j)}_{[t_{k-1},t_k]})^2)^{\frac{1}{2}}$

$I \leq \sum\limits_{k=1}^{n}(\sum\limits_{j=1}^{d}(M^{(j)}_{[t_{k-1},t_k]} - m^{(j)}_{[t_{k-1},t_k]})^2)^{\frac{1}{2}}(t_k - t_{k-1})$

Зададим $M := |\gamma_j'(\eta_{jk})|$ и $m := |\gamma_j'(\zeta_{jk})|$

$|\gamma_j'(\eta_{jk}) - \gamma_j'(\zeta_{jk})| \leq \omega_{\gamma_j'}(|\tau|)$

Тогда та штука сверху $\leq \sum\limits_{k=1}^{n}(\sum\limits_{j=1}^{d}\omega^2_{\gamma_j'}(|\tau|))^{\frac{1}{2}}(t_k - t_{k-1}) = (b-a)(\sum\limits_{j=1}^{d}\omega^2_{\gamma_j'}(|\tau|))^{\frac{1}{2}} \leq \omega_{\gamma_j'}(|\tau|)$

TODO Много лекций. Тут с 04/23

Definition 2.44. Пространство $l^\infty(E)$

$l^\infty(E) := \{f : E \to \mathbb{R} \text{ огр.}\}$
$||f||_{l^\infty(E)} = ||f||_\infty := \sup\limits_{x \in E} |f(x)|$ норма

Definition 2.45. Пространство $C(K)$

$C(K) := \{f : K \to \mathbb{R} \text{ непр.}\}$
$||f||_{C(K)} = ||f||_\infty := \max\limits_{x \in K} |f(x)|$ норма

Remark 2.8.

1. $C(K) \subset l^\infty(K)$
2. $f_n \rightrightarrows f$ на $E \Leftrightarrow ||f_n - f||_\infty \to 0$

Theorem 2.44.

$l^\infty(E)$ – полное нормированное пространство

Доказательство:

f_n – фундаментальная последовательность в $l\infty(E)$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \ \forall n, m \geq N \ \sup\limits_{x \in E} |f_n(x) - f_m(x)| ||f_n - f_m||_\infty < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \ \forall n, m \geq N \ \forall x \in E \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow \exists f : E \to D : f_n \rightrightarrows f \Rightarrow ||f - n - f||_\infty \to 0$

Осталось доказать, что $f \in l^\infty(E) \Leftrightarrow f$ – ограничена

$f_n \in l^\infty(E) \Rightarrow f_n$ – ограничена. $\sup x \in E |f_n(x) - f(x)| < 1$ НСНМ $\Rightarrow f_n - f$ – ограничена $\Rightarrow f$ ограничена

Theorem 2.45.

$f, f_n : E \to \mathbb{R};\ a \in E,\ f_n \rightrightarrows f$ на E
Если f_n непрерывна в a, то f непрерывна в a

Доказательство:

Возьмем $\varepsilon > 0$

$f_n \rightrightarrows f$ на $E \Rightarrow \exists n : \forall x \in E \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < 2\varepsilon + |f_n(x) - f_n(a)| = (*)$

Но f_n непрерывна в $a \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in E \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon$

$(*) < 3\varepsilon \Rightarrow f$ – непрерывна в a

Theorem 2.46. Следствие (теорема Стокса-Зайделя)

$f, f_n : E \to \mathbb{R};\ f_n \rightrightarrows f$ на E
Если f_n – непрерывна, то f – непрерывна

Theorem 2.47.

$C(K)$ – полное нормированное пространство (K – компакт)

Доказательство:

$C(K)$ – замкнутое подпространство $l^\infty(K)$

Подпространство, т.к. непрерывная на компакте функция ограничена

Замкнутость – теорема Стокса-Зайделя

Definition 2.46. Поточечная сходимость

$u_n : E \to \mathbb{R}$ функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$

Поточечно сходится, если $\forall x \in E$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ – сходится

Definition 2.47. Равномерная сходимость

$u_n : E \to \mathbb{R}$ функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$

Равномерная сходимость $S_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ если S_n равномерно сходится

Theorem 2.48. Критерий Коши для равномерной сходимости ряда

$u_n : E \to \mathbb{R}$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходится на $E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m \geq N\ \forall x \in E \Rightarrow |\sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k(x)| < \varepsilon$

Доказательство:

$\sum\limits_{1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходится на $E \Leftrightarrow S_n$ равномерно сходится на $E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N\ \forall n, m \geq N\ \forall x \in E\ |S_n(x) - S_m(x)| = |\sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k(x)| < \varepsilon$

Definition 2.48.

Пусть $\sum\limits_{1}^{\infty} u_k(x)$ сходится поточечно

$r_n(x) := \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ – остаток ряда (все называют хвостом)

Theorem 2.49.

1. Ряд $\sum u_k(x)$ равномерно сходится на $E \Leftrightarrow r_n \rightrightarrows 0$ на E
2. (Необходимое условие сходимости) Ряд $\sum u_k(x)$ равномерно сходится на $E \Rightarrow u_k \rightrightarrows 0$ на E

Доказательство:

1. $S(x) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, $S_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) \Rightarrow r_n = S - S_n$
   Ряд равномерно сходится $\Leftrightarrow S_n \rightrightarrows S$ на $E \Leftrightarrow r_n = S - S_n \rightrightarrows 0$ на E
2. $S_n \rightrightarrows S$ на $E \Rightarrow u_n = S_n - S_{n-1} \rightrightarrows S - S = 0$ на E

Remark 2.9.

Если найдутся $x_n \in E : u_n(x_n) \not\to 0$, то $\sum u_k(x)$ не может сходиться равномерно на E (будет противоречe=ие $u_n \rightrightarrows 0$ на E)

Example 2.7.

$\sum x^n$ поточечно сходится на $(0,1)$, но равномерной сходимости нет

Remark 2.10.

Расходимость ряда $u_n(x_n)$ ничего не дает

Theorem 2.50. Признак сравнения

$u_n, v_n : E \to \mathbb{R}$ и $|u_n(x)| \leq v_n(x)\ \forall n\ \forall x \in E$
Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ сходится равномерно на E, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на E

Доказательство:

Критерий Коши

$\sum v_n(x)$ равномерно сходится $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m > n \geq N\ \forall x \in E\ |\sum\limits_{k=n+1}^{m} v_k(x)| < \varepsilon$, но логично $|\sum u_k(x)| \leq \sum |u_k(x)| \leq \sum v_k(x) \Rightarrow \sum u_k(x)$ тоже сходится равномерно на E

Theorem 2.51. Следствие

Если $\sum |u_n(x)|$ равномерно сходится на E, то $\sum u_n(x)$ тоже равномерно сходится на E

Доказательство:

$v_n(x) := |u_n(x)|$

Theorem 2.52. Следствие (признак Вейерштрасса)

Если $|u_n(x)| \leq a_n\ \forall n\ \forall x \in E$ и ряд $\sum a_n$ сходится, то $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E

Доказательство:

$v_n(x) := a_n$

Example 2.8.

$\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$ – равномерно сходится на $\mathbb{R}$
$a_n := \frac{1}{n^2}$ – сходится и признак Вейерштрасса

Remark 2.11.

Абсолютная и равномерная сходимость про разное

Example 2.9.

1. $\sum x^n$ на $(-1,1)$ сходится абсолюьтно, но не равномерно
2. $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ сходится равномерно, но не абсолютно
3. Бывает ряд $\sum u_n(x)$ сходящийся равномерно, абсолютно, но $\sum |u_n(x)|$ сходится неравномерно

Definition 2.49.

$f_n : E \to \mathbb{R}$ – равномерно ограничена на E, если $\exists M : |f_n(x)| \le M \ \forall n \ \forall x \in E$

Theorem 2.53.

Равномерная ограниченность на равномерно стремящуюся к нулю – равномерно стремится к 0

Доказательство:

$|g_n(x)| \le M$ и $f_n \rightrightarrows 0$ на $E \Rightarrow \sup\limits_{x\in E}|f_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \sup\limits_{x\in E}|f_n(x)g_n(x)| \le M \sup\limits_{x\in E}|f_n(x)| \to 0$

Theorem 2.54. Признак Дирихле

$a_n, b_n : E \to \mathbb{R}$. Если

1. $|\sum\limits_1^n a_k(x)| \le K \ \forall x \in E \ \forall n$
2. $b_n \rightrightarrows 0$ на E
3. $b_n(x)$ монотонна при любом фиксированном $x \in E$

Тогда $\sum\limits_1^\infty a_n(x)b_n(x)$ равномерно сходится на E

Доказательство:

$A_n := \sum\limits_1^n a_k(x)$. Признак Абеля $\Rightarrow \sum\limits_1^n a_k b_k = A_n b_n + \sum\limits_1^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1})$

Надо доказать, что $A_n b_n$ и $\sum\limits_1^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1})$ сходятся равномерно

$A_n b_n \rightrightarrows 0$, т.к. A_n равномерно ограничена и $b_n \rightrightarrows 0$

Проверим равномерную сходимость ряда $\sum A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$

$|A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))| \le K|b_k(x) - b_{k+1}(x)| \ \forall x \ \forall k$

Надо доказать, что $\sum |b_k(x) - b_{k+1}(x)|$ сходится равномерно

$S_n(x) := \sum\limits_1^n |b_k(x) - b_{k+1}(x)| = |\sum\limits_1^n (b_k(x) - b_{k+1}(x))| = |b_1(x) - b_{n+1}(x)| \rightrightarrows |b_1(x)|$ на E

Следовательно S_n равномерно сходятся

Theorem 2.55. Следствие (признак Лейбница)

$b_n : E \to \mathbb{R}$. Если

1. $b_n \rightrightarrows 0$ на E
2. $b_n(x)$ – монотонна при любом фиксированном $x \in E$

Тогда ряд $\sum (-1)^{n-1} b_n(x)$ равномерно сходится на E

Example 2.10.

$\sum \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ – на $(0,1)$ сходится абсолютно

$\sum |\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}| = \sum \frac{x^n}{n}$ сходится по признаку Даламбера

Сходится равномерно по признаку Лейбница: $b_n(x) := \frac{x^n}{n} \rightrightarrows 0$, т.к. $\sup = \frac{1}{n}$

Но ряд $\sum \frac{x_n}{n}$ не сходится равномерно

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\sum\limits_{n+1}^{2n} \frac{x^k}{k} \to \sum \frac{1}{k} > \frac{1}{2}$

Theorem 2.56. Признак Абеля

$a_n, b_n : E \to \mathbb{R}$. Если

1. $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на E
2. b_n – равномерно ограничены
3. $b_n(x)$ – монотонна при любом фиксированном $x \in E$

Тогда $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ равномерно сходится на E

Доказательство:

$A_n := \sum\limits_{1}^{n} a_k(x);\ A := \sum\limits_{1}^{\infty} a_k(x)$ и $\alpha_n := A - A_n = \sum\limits_{n+1}^{\infty} a_k(x)$

$\sum\limits_{1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum\limits_{1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) = (A - \alpha_n) b_n + \sum\limits_{1}^{n-1} (A - \alpha_n)(b_k - b_{k+1}) = Ab_n - \alpha_n b_n +$

$+ A \sum\limits_{1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) - \sum\limits_{1}^{n-1} \alpha_k (b_k - b_{k+1}) = Ab_1 - \alpha b_n - \sum\limits_{1}^{n-1} \alpha_k (b_k - b_{k+1})$

$\alpha_n b_n \rightrightarrows 0$ на E, т.к. $\alpha_n \rightrightarrows 0$ и b_n – равномерно ограничена

Осталось доказать, что ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} \alpha_k (b_k - b_{k+1})$ сходится равномерно. Проверим для этого ряда условие из критерия Коши

Возьмем $\varepsilon > 0$. b_n равномерно ограничена $\Rightarrow |b_n(x)| \le M\ \forall x \in E\ \forall n$

$\exists N\ \forall n \ge N\ \forall x \in E\ |\alpha_n(x)| < \varepsilon$ (т.к. $\alpha_n \rightrightarrows 0$ на E)

Рассмотрим $m > n \ge N$ и $|\sum\limits_{k=n+1}^{m} \alpha_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))| \le |\sum\limits_{k=n+1}^{m} |\alpha_k(x)| \cdot |b_k(x) - b_{k+1}(x)| <$
$< \varepsilon \sum\limits_{k=n+1}^{m} |b_k(x) - b_{k+1}(x)| = \varepsilon |\sum\limits_{n+1}^{m} (b_k(x) - b_{k+1}(x))| = \varepsilon |b_{n+1}(x) - b_{m+1}(x)| \le \varepsilon(|b_{n+1}(x)| + |b_{m+1}(x)|) \le 2\varepsilon M$

Theorem 2.57. Признак Дини

$u_n \in C(K), u_n \geq 0, S(x) := \sum u_n(x)$
Если $S \in C(K)$, то ряд равномерно сходится на K

Доказательство:

$S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} u_k;\ r_n := S - S_n = \sum\limits_{n+1}^{\infty} u_k \in C(K)$

Хотим проверить, что $r_n \rightrightarrows 0$ на K. $r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq \dots$

Надо доказать, что $\forall \varepsilon\ \exists n : \forall m \geq n\ \forall x \in K \Rightarrow |r_m(x)| < \varepsilon$

Достаточно проверить, что $\forall \varepsilon\ \exists n : \forall x \in K \Rightarrow r_n(x) < \varepsilon$

От противного. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда $\forall n\ \exists x_n \in K : r_n(x_n) \geq \varepsilon$

Выберем сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to x_* \in K$

$\varepsilon \leq r_{n_k}(x_{n_k}) \leq r_m(x_{n_k})$ при $m \leq n_k \Rightarrow r_1(x_{n_k}) \geq \varepsilon$

$\varepsilon \leq r_m(x_{n_k}) \to r_m(x_*)$, т.к. r_m непрерывна в $x_* \Rightarrow r_m(x_*) \geq \varepsilon\ \forall m \Rightarrow r_m(x_*) \not\to 0 \Rightarrow$ ряд $\sum u_n(x_*)$ расходится. Противоречие

2.6 §6. Свойства равносильности сходящихся последовательностей и рядов

Theorem 2.58.

$f_n, f : E \to \mathbb{R}$, a – предельная точка E, $\mathbb{R} \ni b_n := \lim\limits_{x \to a} f_n(x)$ и $f_n \rightrightarrows f$ на E. Тогда пределы $\lim b_n$ и $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ существуют конечны и равны. Т.е. $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

Доказательство:

$f_n \rightrightarrows f$ на $E \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m, n \geq N\ \forall x \in E \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ и $|f_n(x) - f(x)| \to |b_n - b_m|$ при $x \to a$

Следовательно $\forall m, n \geq N \Rightarrow |b_n - b_m| \leq \varepsilon \Rightarrow b_n$ – фундаментальная числовая последовательность $\Rightarrow$ существует конечный $\lim b_n =: b$

Надо доказать, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

$|f(x) - b| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - b_n| + |b_n - b|$

$\exists N_1\ \forall x \in E\ \forall n \geq N_1 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\exists N_2\ \forall n \geq N_2 \Rightarrow |b_m - b| < \varepsilon$

Возьмем $n = \max\{N_1, N_2\}$

Знаем что $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = b_n \Rightarrow \exists \delta > 0\ \forall |x - a| < \delta\ \Rightarrow |f_n(x) - b_n| < \varepsilon$

Это δ и возьмем

2.7 Разложение элементарных функций в ряд Тейлора

Reminder 2.1.

1. $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\ \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\ \forall x \in \mathbb{R}$
3. $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ \forall x \in \mathbb{R}$

Reminder 2.2.

Ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ сходятся $\forall z \in \mathbb{C}$

Definition 2.50.

$\exp z := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

$\cos z := \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

$\sin z := \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Remark 2.12.

1. $\cos(-z) = \cos z$; $\sin(-z) = -\sin z$; $\exp(-z) = \exp z$
2. Формула Эйлера: $\exp z = \cos z + i \sin z$
3. $\cos z = \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2}$; $\sin z = \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}$

Exercise 2.6.

(a) Доказать, что $\sin^2 z + \cos^2 z = 1\ \forall z \in \mathbb{C}$
(b) $\exp z \cdot \exp w = \exp(z+w)\ \forall z, w \in \mathbb{C}$

Remark 2.13.

1. $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ при $|x| < 1$

   Доказательство:

   $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$; $\ln(1+x) = \int\limits_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int\limits_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int\limits_0^x t^n dt =$

   $= \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

2. $\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ при $|x| < 1$

   Доказательство:

   $\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int\limits_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n} dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int\limits_0^x t^{2n} dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

   Theorem 2.59. Следствие

   $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$

   Доказательство:

   Ряд $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ сходится при $x = 1$

   Тогда по теореме Абеля $f(1) = \lim\limits_{x\to 1_-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1_-} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$

Definition 2.51. Нисходящая факториальная степень

$p^{\underline{n}} := p(p-1)(p-2)\dots(p-n+1)$

Remark 2.14.

1. $n! = n^{\underline{n}}$
2. $C_n^k = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$
3. $p^{\underline{n+1}} + np^{\underline{n}} = p \cdot p^{\underline{n}}$

Theorem 2.60.

1. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{p^{\underline{n}}}{n!}x^n$ сходится при $|x| < 1$
2. Если $f(x)$ это его сумма, то $(1+x)f'(x) = pf(x)$
3. $f(x) = (1+x)^p$, т.е. $(1+x)^p = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{p^{\underline{n}}}{n!}x^n$ при $|x| < 1$

Доказательство:

1. Проверим абсолютную сходимость по признаку Даламбера

   $\frac{p^{\underline{n+1}}}{(n+1)!}x^{n+1} : \frac{p^{\underline{n}}}{n!}x^n = \frac{p-n}{n+1}x \xrightarrow[n\to\infty]{} -x$

2. $(1+x)f'(x) = (1+x)\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{p^{\underline{n}}}{n!}nx^{n-1} = (1+x)\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{p^{\underline{n+1}}}{n!}x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{p^{\underline{n+1}}}{n!}x^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{p^{\underline{n+1}}}{(n+1)!}x^{n+1} =$

   $= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{p^{\underline{n+1}}}{n!}x^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{p^{\underline{n}}}{n!}nx^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{p \cdot p^{\underline{n}}}{n!}x^n = pf(x)$

3. Проверим, что $(1+x)^{-p}f(x) = 1$

$((1+x)^{-p}f(x))' = -p(1+x)^{-p-1}f(x)+(1+x)^{-p}f'(x) = (1+x)^{-p-1}(-pf(x)+(1+x)f'(x)) = (1+x)^{-p-1}\cdot 0 = 0$

Example 2.11. Частный случай

$p = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/2)^{\underline{n}}}{n!}x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}n}{4^n}x^n$

Remark 2.15.

6. $\arcsin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}n}{4^n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ при $|x| < 1$

   $\arcsin x = \int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int\limits_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{4^n}t^{2n}dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{4^n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

3 Глава n. Функции многих переменных

3.1 §1. Дифференцируемые отображения

Definition 3.1. Дифференциал функции

$f : E \to \mathbb{R}$; $E \subset \mathbb{R}^n$; $a \in \operatorname{Int} E$. f дифференцируема в точке a, если существует такое линейное отображение $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, что $f(a+h) = f(a) + Th + o(||h||)$ при $h \to 0$
Обозначение: $d_a f$

Remark 3.1.

Если f дифференцируема в точке a, то T определено однозначно

Доказательство:

Зафиксируем $h \in \mathbb{R}^n$; $t \in \mathbb{R} \to 0$
$\frac{f(a+th)-f(a)}{t} = \frac{T(th)+o(||th||)}{t} = \frac{tTh+to(1)}{t} = Th + o(1) \xrightarrow[t\to 0]{} Th$

Definition 3.2. Матрица Якоби

Матрица оператора T называется матрицей Якоби функции f в точке a
Обозначается $f'(a)$

Remark 3.2.

Если f дифференцируема в точке a, то f непрерывна в точке a
$f(a+h) = f(a) + Th + o(||h||) \xrightarrow[h\to 0]{} f(a)$

Example 3.1. Важный частный случай

$m = 1;\ f : E \to \mathbb{R};\ E \subset \mathbb{R}^n$
f дифференцируема в точке $a \Leftrightarrow$ сущесвтует вектор $V \in \mathbb{R}^n : f(a+h) = f(a) + \langle V, h\rangle + o(||h||)$ при $h \to 0$

Definition 3.3.

Этот вектор V называется градиентом функции f в точке a
Обозначается $gradf(a)$ или $\nabla f(a)$

Example 3.2.

1. $f(x) = const$
   $f(a+h) = f(a)$, т.е. $T \equiv 0$ и $o(||h||) \equiv 0$
2. Линейное отображение, т.е. $f(x+y) = f(x) + f(y)$
   $f(a+h) = f(a) + f(h)$, т.е. $Th = f(h)$ и $o(||h||) \equiv 0$

Definition 3.4. Координатные функции

$f : E \to \mathbb{R}; E \subset \mathbb{R}^n$

$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix};\ f_1 \dots f_n : E \to \mathbb{R}$ – координатные функции

Theorem 3.1.

$f : E \to \mathbb{R}^m;\ a \in \operatorname{Int} E$. Тогда дифференцируемость f в точке a равносильна дифференцируемости в точке a всех ее координатных функций

Доказательство:

$\Rightarrow$ $f(a+h) = f(a) + Th + \alpha(h)||h||$, где $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$
Запишем равенство покоординатно: $f_k(a+h) = f_k(a) + T_k h + \alpha_k(h)||h||$
T_k – линейное отображение : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R};\ \alpha_k(h) \to 0$ при $h \to 0$

$\Leftarrow$ Запишем дифф. $f_k : f_k(a+h) = f_k(a) + T_k h + \alpha_k(h)||h||$, где $\alpha_k(h) \to 0$ при $h \to 0$
Соберем их в равенство для векторов
$f(a+h) = f(a) + Th + \alpha(h)||h||$. Надо понять, что $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$
Это следует из равносильности покоординатной сходимости и сходимости по норме

Theorem 3.2. Следствие

Строки матрицы Якоби для f – градиенты координатных функций

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a) \\ \vdots \\ \nabla f_m(a) \end{pmatrix}$$

Definition 3.5. Производная по направлению

$||h|| = 1;\ f : E \to \mathbb{R};\ E \subset \mathbb{R}^n;\ a \in \operatorname{Int} E$
$\frac{\partial f}{\partial h}(a) := \lim\limits_{t \to 0;\ t \in \mathbb{R}} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$

Remark 3.3.

$g(t) := f(a+th) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial h}(a) = g'(0)$

Theorem 3.3.

$f : E \to \mathbb{R}; E \subset \mathbb{R}^n;\ a \in \operatorname{Int} E;\ f$ – дифференцируема в точке a; $||h|| = 1$
Тогда $\frac{\partial f}{\partial h}(a) = d_a f(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$

Theorem 3.4. Слествие

1. Экстремальное свойство градиента
   $f : E \to \mathbb{R};\ E \subset \mathbb{R}^n;\ a \in \operatorname{Int} E;\ f$ – дифференцируема в точке a и $\nabla f(a) \neq 0$
   Тогда $\forall h \in \mathbb{R}^n : ||h|| = 1 \Rightarrow |\frac{\partial f}{\partial h}(a)| \leq ||\nabla f(a)||$ и равенство достигается $\Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow h = \pm \frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||}$

Доказательство:
$|\frac{\partial f}{\partial h}(a)| = |\langle \nabla f(a), h \rangle| \leq ||\nabla f(a)|| \cdot ||h|| = ||\nabla f(a)||$
Равенство $\Leftrightarrow$ векторы сонаправлены

Definition 3.6. Частная производная

$f : E \to \mathbb{R};\ a \in E;\ E \subset \mathbb{R}^n$

$$e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - k\text{-я позиция}$$

Обозначения: $f'_{x_k};\ \partial_k f;\ \frac{\partial f}{\partial x_k};\ D_k f$
$f'_{x_k} = \frac{\partial f}{\partial e_k}(a)$

Example 3.3.

$f(x, y) = x^y$
$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+k,y)-f(x,y)}{h}$, т.е. y – параметр, а дифференцирование по x
$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}$
$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$, т.е. x – параметр, а дифференцирование по y
$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$

Theorem 3.5. Следствие

2. $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \langle \nabla f, e_k \rangle$, т.е. $\nabla f(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \dots \frac{\partial f}{\partial x_k}(a))$
3. $f : E \to \mathbb{R}^m;\ E \in \mathbb{R}^n;\ a \in \operatorname{Int} E;\ f$ – дифференцируема в точке a

   Тогда $f'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$

Theorem 3.6. Линейность

$f, g : E \to \mathbb{R};\ E \subset \mathbb{R}^n;\ a \in \operatorname{Int} E;\ f, g$ – дифференцируемы в точке a
Тогда $f + g$ и λf – дифференцируемы в точке a и $d_a(f+g) = d_a f + d_a g;\ d_a(\lambda f) = \lambda d_a f$
$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a);\ (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$

Доказательство:

Посмотрите запись...

Theorem 3.7. Дифференцирование композиции

$f : D \to \mathbb{R}^n; g : E \to \mathbb{R}^l;\ D \subset \mathbb{R}^n;\ E \subset \mathbb{R}^l;\ a \in \operatorname{Int} D;\ f(D) \subset E;\ f(a) \in \operatorname{Int} E; f$ – дифференцируема в точке a и g – дифференцируема в точке $f(a)$
Тогда $g \circ f$ – дифференцируема в точке a и $d_a(g \circ f) = d_{f(a)} g \circ d_a f$ и $(g \circ f)'(a) =$
$= g'(f(a)) \cdot f'(a)$

Доказательство:

$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \alpha(h)||h||$ и $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$

$b := f(a);\ g(b+k) = g(b) + d_b g(k) + \beta(k)||k||$ и $\beta(k) \to 0$ при $k \to 0$

Возьмем $k = d_a f(h) + \alpha(h)||h|| \to 0$ при $h \to 0$

$f(a+h) = b + k$

$g(f(a+h)) = g(b+k) = g(b) + d_b g(k) + \beta(k)||k|| = g(f(a)) + d_b g(d_a f(h)) + ||h|| d_b f(\alpha(h)) + \beta(k)||k||$

$d_b g(d_a f(h))$ – линейное отображение

$d_b f(\alpha(h)) \to d_b f(0) = 0 \Rightarrow ||h|| d_b f(\alpha(h)) = o(||h||)$

$\frac{\beta(k)||k||}{||h||} \xrightarrow{?} 0$

$||k|| = ||d_a f(h) + \alpha(h)||h|||| \le ||d_a f(h)|| + ||\alpha(h)||h|||| \le ||d_a f|| \cdot ||h|| + ||\alpha(h)|| \cdot ||h|| \to 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ ограничено

Theorem 3.8.

$E \subset \mathbb{R}^n;\ a \in \operatorname{Int} E;\ f : E \to \mathbb{R}^m;\ \lambda : E \to \mathbb{R};\ f, \lambda$ – дифференцируемы в точке a
Тогда λf – дифференцируема в точке a и $d_a(\lambda f)(h) = d_a \lambda(h) f(a) + \lambda(a) d_a f(h)$

Доказательство:

$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \alpha(h)||h||$ и $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$

$\lambda(a+h) = \lambda(a) + d_a \lambda(h) + \beta(h)||h||$ и $\beta(h) \to 0$ при $h \to 0$

$\lambda(a+h)f(a+h) = \lambda(a)f(a)+\lambda(a)d_af(h)+d_a\lambda(h)f(a)+d_a\lambda(h)d_af(h)+\beta(h)||h||f(a)+\lambda(a)\alpha(h)||h||+$

$+ d_af(h)\alpha(h)||h|| + \beta(h)||h||d_af(h) + \alpha(h)\beta(h)||h||^2$
Много что $\to 0$ или $o(||h||)$
$||d_a\lambda(h)d_af(h)|| = |d_a\lambda(h)| \cdot ||d_af(h)|| \leq ||d_a\lambda|| \cdot ||h|| \cdot ||d_af|| \cdot ||h|| = o(||h||)$
Первое слагаемое останется чистым, 2 и 3 – линейное отображение

Theorem 3.9.

$f, g : E \to \mathbb{R}^m;\ E \subset \mathbb{R}^n;\ a \in \operatorname{Int} E;\ f, g$ – дифференцируемы в точке a
Тогда $\langle f, g\rangle$ – дифференцируемо в точке a и $d_a\langle f, g\rangle(h) = \langle d_af(h), g(a)\rangle + \langle f(a), d_ag(h)\rangle$

Доказательство:
$\langle f, g\rangle = \sum\limits_{k=1}^{m} f_kg_k;\ f_kg_k$ – дифференцируемы в точке a и $d_a(f_kg_k)(h) = d_af_k(h)g_k(a)+f_k(a)d_ag_k(h)$
И проссумируем

3.2 §2. Непрерывная дифференцируемость

Theorem 3.10.

$f : E \to \mathbb{R};\ E \subset \mathbb{R}^n;\ a \in \operatorname{Int} E$, все частные производные функции f существуют в окрестности точки a и непрерывны в точке a
Тогда f дифференцируема в точке a

Доказательство:
Надо показать, что $f(a+h) = f(a) + \langle\nabla f(a), h\rangle + o(||h||)$ при $h \to 0$
$R(h) := f(a+h) - f(a) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k$. Надо доказать, что $R(h) = o(||h||)$ при $h \to 0$

$$b_k := \begin{pmatrix} a_1 + h_1 \\ \vdots \\ a_k + h_k \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix};\ F_k(t) := f(b_{k-1} + th_ke_k);\ \begin{cases} F_k(0) = f(b_{k-1}) \\ F_k(1) = f(b_k) \end{cases};\ b_n = a+h;\ b_0 = a$$

$f(a+h) - f(a) = F_n(1) - F_1(0) = \sum\limits_{k=1}^{n} \big(F_k(1) - F_k(0)\big) = \sum\limits_{k=1}^{n} F_k'(\Theta_k)$, где $\Theta_k \in (0,1)$.
$= \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(b_{k-1} + \Theta_kh_ke_k)h_k$
$F_k(t) = f(a_1+h_1, \dots, a_{k-1}+h_{k-1}, a_k+th_k, a_{k+1}, \dots, a_n) \Rightarrow F_k'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(b_{k-1}+th_ke_k) \cdot h_k$

$$|R(h)| = |\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(c_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\right) h_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(c_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} h_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Осталось понять, что $\sum -k = 1^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(c_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\right)^2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$
$c_k \to a$ при $h \to 0$ и $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ непрерывна в точке a

Remark 3.4.

1. $f(a+h_1e_1) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + o(h_1)$
   Без непрерывности $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ в точке a доказательство тоже проходит
2. Дифференцирование в точке не дает даже существование частных производных в окрестности
   $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 \text{ если одно из чисел рационально} \\ 0 \end{cases}$
   $f(x,y) = O(x^2+y^2) = f(0,0) + 0 + o(\sqrt{x^2+y^2})$
   Но функция не является непрерывной при $(x,y) \neq (0,0)$ и у нее нет частных производный ни в какой точке, отличной от $(0,0)$

Definition 3.7.

f непрерывно дифференцируема в точке a, если f дифференцируема в окрестности точки a и $||d_xf - d_af|| \xrightarrow[x\to a]{} 0$

Theorem 3.11.

$f: E \to \mathbb{R}^m;\ E \subset \mathbb{R}^n;\ a \in \operatorname{Int} E$. Тогда
f непрерывно дифференцируема в точке $a \Leftrightarrow f$ дифференцируема в окрестности a и все частные производные всех координатных функций непрерывны в точке a

Доказательство:

$$\Leftarrow\ ||d_xf - d_af||^2 \leq \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)\right)^2 \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

$$\Rightarrow\ |\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)| \leq \underbrace{||d_xf(e_k) - d_af(e_k)||}_{=f'(x)e_k - f'(a)e_k} = ||\left(d_xf - d_af\right)(e_k)|| \leq ||d_xf - d_af|| \cdot ||e_k||$$

Theorem 3.12.

Непрерывная дифференцируемость сохраняется при линейной комбинации скалярный произведений, композиций

Доказательство:

См. лекцию, доказательство на словах

3.3 §3. Частные производные высших порядков

Notation 3.1. Обозначения

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$

$f''_{x_jx_i} := \left(f'_{x_j}\right)'_{x_i}$

Если существует $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}}$ в окрестности точки a, то у нее можно рассмотреть производную, т.е. $\frac{\partial^{r+1}}{\partial x_{ik+1} \ldots \partial x_{i_1}}$

Remark 3.5.

Всего частных производных порядка r будет n^r

Example 3.4.

$f(x,y)=x^y;\ f'_x=yx^{y-1};\ f'_y=x^y\ln x$
$f''_{xx}=\left(yx^{y-1}\right)'_x=y(y-1)x^{y-2};\ f''_{yy}=(x^y\ln x)'_y=x^y\left(\ln x\right)^2$
$f''_{xy}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x;\ f''_{yx}=yx^{y-1}\ln x+x^{y-1}$

Example 3.5. Когда все плохо

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\cdot xy & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
$$\underset{(x,y)\neq(0,0)}{f'_x(x,y)}=\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-2x(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{3x^4y+3x^2y^3-x^2y^3-y^5-2x^4y+2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$$
$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0$$
$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f'_x(0,h)-f'_x(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot\frac{-h^5}{h^4}=-1$$
Но $f''_{yx}(0,0)=1\neq f''_{yx}(0,0)$

Theorem 3.13.

$f:E_{\subset\mathbb{R}^2}\to\mathbb{R};\ (x_0,y_0)\in\operatorname{Int}E$
Частные производные f'_x, f'_y и f''_{xy} существует в окрестности (x_0,y_0) и f''_{xy} непрерывна в точке (x_0,y_0)
Тогда существует $f''_{yx}(x_0,y_0)$ и $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$

Доказательство:

$\varphi(s):=f(s,y_0+k)-f(s,y_0);\ \psi(t):=f'_x(x_0+\Theta h,t)$

$$\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)=h\cdot\varphi'(x_0+\Theta h)=h\left(f'_x(x_0+\Theta h,y_0+k)-f'_x(x_0+\Theta h,y_0)\right)=h\left(\psi(y_0+k)-\psi(y_0)\right)=$$
$$=hk\psi'(y_0+\tilde\Theta k)=hk\cdot\underbrace{f''_{xy}(x_0+\Theta h,y_0+\tilde\Theta k)}_{f''_{xy}(x_0,y_0)+\alpha(h,k);\ \alpha(h,k)\xrightarrow[(h,k)\to0]{}0}$$

$$\frac{\varphi(x_0)}{k}=\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}\xrightarrow[k\to0]{}f'_y(x_0,y_0)$$
$$\frac{\varphi(x_0+h)}{k}=\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)}{k}\xrightarrow[k\to0]{}f'_y(x_0+h,y_0)$$

$|\frac{1}{k}\cdot\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}-f''_{xy}(x_0,y_0)|<\varepsilon$ при (h,k) близким к 0 $\Rightarrow|\frac{f'_y(x_0+h,y_0)-f'_y(x_0,y_0)}{h}-f''_{xy}(x_0,y_0)|\leq\varepsilon$ при малых $h\Rightarrow\lim\limits_{h\to0}\frac{f'_y(x_0+h,y_0)-f'_y(x_0,y_0)}{h}=f''_{xy}(x_0,y_0)$

Exercise 3.1.

Доказать, что если f'_x и f'_y определны в окрестности (x_0,y_0) и дифференцируемы в этой точке, то $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$

Definition 3.8. r**-гладкость**

$f : D_{\subset \mathbb{R}^n} \to \mathbb{R};\ D$ – открытое
f – r раз непрерывно дифференцируема ($=$ r-гладкая), если все ее частные производные до r-го порядка включительно существуют и непрерывны
Обозначение: $C^r(D)$

Theorem 3.14.

$f : D \to \mathbb{R};\ D$ – открытое $\subset \mathbb{R}^n;\ f \in C^r(D)$
$(i_1 \dots i_r)$ – перестановка $(j_1 \dots j_r)$. Тогда $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}} = \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_r}}$

Доказательство:

Любая перестановка может быть получена последовательным выполнением транспозиций. Поэтому достаточно доказать теорему для транспозиций

$\underbrace{(j_1 \dots j_{k-1}, j_{k+1}, j_k, j_{k+2} \dots j_r)}_{=(i_1 \dots i_r)}$

$g(x) := \frac{\partial^{r-k-1} f}{\partial x_{j_{k+2}} \dots \partial x_{j_r}}$

$$\underbrace{\frac{\partial^2 g}{\partial x_{j_k} \partial x_{j_{k+1}}} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_{j_{k+1}} \partial x_{j_k}}}_{\text{из предыдущей теоремы}} \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial^{k-1}}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{k+1}}} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_{j_k} \partial x_{j_{k-1}}} \right)}_{=\frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_r}}} = \underbrace{\frac{\partial^{k-1}}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{k-1}}} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_{j_{k+1}} \partial x_{j_k}} \right)}_{=\frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_r}}}$$

Definition 3.9. Мультииндексы

$k = (k_1 \dots k_n);\ k_1 \dots k_n$ – неотрицательные целые числа
$k! := k_1! \dots k_n!;\ h^k := h_1^{k_1} \dots h_n^{k_n};\ h \in \mathbb{R}^n$

Definition 3.10. Высота мультииндекса

$|k| := k_1 + \ldots + k_n$
$f^{(k)} := \frac{\partial^{|k|} f}{(\partial x_1)^{k_1} \dots (\partial x_n)^{k_n}} = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial^{k_1} x_1 \dots \partial^{k_n} x_n}$

Definition 3.11. Полиномиальный (мультиномиальный) коэффициент

$\binom{|k|}{k_1 \dots k_n} = \frac{|k|!}{k_1! \dots k_n!} = \frac{|k|!}{k!}$
Это количество способов покрасить $|k|$ шариков в n цветов так, чтобы было k_1 шариков первого цвета, k_2 шариков второго цвета итд

Lemma 3.1.

$f : D \to \mathbb{R};\ f \in C^r(D);\ D$ – открытое $\subset \mathbb{R}^n;\ [x, x+h] \subset D$
$F(t) := f(x + th);\ F : [0,1] \to \mathbb{R}$
Тогда $F \in C^r[0,1]$ и $F^{(l)}(t) = \sum\limits_{|k|=l} \binom{l}{k_1 \dots k_n} f^{(k)}(x+th) h^k$

Доказательство:

$g : D \to \mathbb{R};\ g \in C^1(D);\ G(t) := g(x+th)$

$$G'(t) = g'(x+th)\cdot(x+th)'_t = \big(g'_{x_1}(x+th)\dots g'_{x_n}(x+th)\big)\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} g'_{x_j}(x+th)h_j$$

$$t \to x+th = \begin{pmatrix}x_1+th_1\\ \vdots\\ x_n+th_n\end{pmatrix}$$

Тогда $F^{(l)}(t) = \sum\limits_{i_l=1}^{n}\sum\limits_{i_{l-1}=1}^{n}\dots\sum\limits_{i_1=1}^{n}\frac{\partial^l f}{\partial x_{i_l}\dots\partial x_{i_1}}(x+th)h_{i_l}\dots h_{i_1} = (*)$

$k := \big(\#\{j : i_j = 1\},\dots,\#\{j : i_j = n\}\big)$ – мультииндекс

$(*) = \sum\limits_{|k|=l} f^{(k)}(x+th)h^k\binom{l}{k_1\dots k_n} = \sum\limits_{|k|=l}\frac{l!}{k!}f^{(k)}(x+th)h^k$ – запись покороче

Theorem 3.15. Многомерная формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

$D \in \mathbb{R}^n$ открытое; $f \in C^{r+1}(D)$; $f : D \to \mathbb{R};\ [a,x] \subset D;\ h := x-a$
Тогда существует $\Theta \in (0,1)$ такое, что
$f(x) = \sum\limits_{|k|\le r}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \sum\limits_{|k|=r+1}\frac{f^{(k)}(a+\Theta h)}{k!}h^k$

Доказательство:

$F(t) := f(a+th)$. По лемме $F \in C^{r+1}[0,1]$

Тогда $f(x) = f(a+h) = F(1) = \sum\limits_{i=1}^{r}\frac{F^{(i)}(0)}{i!}\cdot 1^i + \frac{F^{(r+1)}(\Theta)}{(r+1)!} = (*)$ для некоторого $\Theta \in (0,1)$

$(*) = \sum\limits_{i=1}^{r}\frac{1}{i!}\sum\limits_{|k|=i}\frac{i!}{k!}f^{(k)}(a)h^k + \frac{1}{(r+1)!}\sum\limits_{|k|=r+1}\frac{(r+1)!}{k!}f^{(k)}(a+\Theta h)h^k$ и посокращать дроби

Definition 3.12. Многочлен Тейлора степени r в точке a для функции f

$\sum\limits_{|k|\le r}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

Theorem 3.16. Многомерная формула Тейлора с остатком в форме Пеано

$f \in C^r(D);\ f : D \to \mathbb{R};\ D$ – открытое $\subset \mathbb{R}^n;\ a \in D$
Тогда при $x \to a$
$f(x) = \sum\limits_{|k|\le r}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(||x-a||^r)$

Доказательство:

$h := x-a$

$$f(x) = \sum_{|k|\le r-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \sum_{|k|=r}\frac{f^{(k)}(a+\Theta(x-a))}{k!}(x-a)^k = \sum_{|k|\le r}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \underbrace{\sum_{|k|=r}\frac{f^{(k)}(a+\Theta h)-f^{(k)}(a)}{k!}h^k}_{\overset{?}{=}o(||h||^r)}$$

$\frac{|h^k|}{||h||^r} \leq 1$, где $r = |k|$; $\frac{|h_1^{k_1} \dots h_n^{k_n}|}{||h||^{k_1+\dots+k_n}} \leq 1$

Осталось понять, что $\frac{f^{(k)}(a+\Theta h)-f^{(k)}(a)}{k!} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ – это из непрерывности $f^{(k)}$