

Содержание

1	Интегральчики	2
1.1	§1. Первообразная и неопределенный интеграл	2
1.2	§2. Площадь	5
1.3	§3. Свойства интеграла	8
1.4	§4. Приложение формулы интегрирования по частям	12
1.5	§5. Несобственные интегралы	21
2	Анализ в метрических пространствах	29
2.1	§1. Метрические пространства	29
2.2	§2. Предел в метрическом пространстве	36
2.3	§3. Компактность	39
2.4	§4. Непрерывные отображения	44
2.5	§5. Длина кривой	48

1 Интегральчики

1.1 §1. Первообразная и неопределенный интеграл

Definition 1.1. Первообразная функция

$$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}; \quad F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

F – первообразная функция f , если F дифференцируема на $\langle a, b \rangle$ и $F'(x) = f(x)$ при всех $x \in \langle a, b \rangle$

Example 1.1.

$$f(x) = \cos x$$

$$F(x) = \sin x$$

Proposition 1.1.

Не всякая функция имеет первообразную

Example 1.2.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 0] \\ 1, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

Proposition 1.2.

Непрерывная на $\langle a, b \rangle$ функция имеет первообразную

Theorem 1.1.

$f, F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, F – первообразная f . Тогда

1. $F + C$ – первообразная f
2. Если Φ – первообразная f , то $\Phi = F + C$ для некоторой константы C

Доказательство:

1. $(F + C)' = F' = f$
2. $\Phi' = f = F'$
 $g = \Phi - F$
 $g' = 0 \Rightarrow g = C \Rightarrow \Phi = F + C$

Definition 1.2. Неопределенный интеграл

Неопределенный интеграл – множество первообразных функции f

Обозначение: $\int f(x)dx$

Remark 1.1.

Для доказательства равенства $\int f(x)dx = F(x) + C$ достаточно проверить, что $F'(x) = f(x)$

Действия с множествами функций:

A и B – множества функций $\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$\lambda \in \mathbb{R}, h : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

1. $A + B = \{f + g : f \in A, g \in B\}$
2. $\lambda A = \{\lambda f : f \in A\}$
3. $A + h = \{f + h : f \in A\}$
4. $(A)' = \{f' : f \in A\}$

Example 1.3.

$$(\int f(x)dx)' = \{f\}$$

Таблица интегралов:

1. $\int adx = ax + C$
2. $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, p \neq -1$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; a > 0, a \neq 1$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctg x + C$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

Theorem 1.2. Линейность интеграла

$f, g : \langle a, b \rangle \Rightarrow \mathbb{R}$ имеют первообразные
 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, не равные нулю одновременно
 Тогда $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$

Доказательство:

F и G – первообразные

Правая часть = $\{\alpha F(x) + \beta G(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$

$$(\alpha F(x) + \beta G(x) + C)' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

Theorem 1.3. Замена переменной в интеграле

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, F – первообразная
 $\varphi : \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ – дифференцируемая функция
 Тогда $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C$

Доказательство:

$$(F(\varphi(x)) + C)' = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

Remark 1.2.

$$y = \varphi(x); \quad dy = \varphi'(x)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(y)dy = F(y) + C = F(\varphi(x)) + C$$

Example 1.4.

$$1. \int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y} = \ln |y| + c = \ln |x^2 + 1| + C$$

Здесь $y = \varphi(x) = x^2 + 1$

$$2. \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{dy}{\sin y \cos y} = \int \frac{dy}{\operatorname{tg} y \cos^2 y} = \int \frac{(\operatorname{tg} y)'}{\operatorname{tg} y} dy = \int \frac{dz}{z} = \ln |z| + C =$$

$= \ln |\operatorname{tg} y| + C = \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2}| + C$

Здесь $y = \frac{x}{2}$ и $z = \operatorname{tg} y$

$$3. \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{3t^2 dt}{1+t} = 3 \int \frac{t^2-1+1}{t+1} dt = 3 \int (t-1+\frac{1}{t+1}) dt = 3(\int t dt - \int dt + \int \frac{dt}{t+1}) =$$

$$= 3t^2 - 3t + 3 \int \frac{d(t+1)}{t+1} = 3t^2 - 3t + 3 \ln |t+1| + C$$

Theorem 1.4. Интегрирование по частям

$f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемые

Если $f'g$ имеет первообразную, то $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

Доказательство:

H – первообразная функции $f'g$

$$(fg - H + C)' = (fg)' - H' = f'g + fg' - f'g = fg'$$

Notation 1.1. Традиционная запись формулы

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\begin{cases} du = u'(x)dx \\ dv = v'(x)dx \end{cases}$$

Example 1.5.

$$1. \int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

Здесь $u = \ln x$, $v = x$ и $du = (\ln x)'dx = \frac{dx}{x}$

$$2. \int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x de^x = x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) =$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

Здесь сначала берем $u = x^2$, $v = e^x$, а потом $u = x$, $v = e^x$

1.2 §2. Площадь

Definition 1.3. Площадь

F – семейство всех ограниченных подмножеств плоскости

Прямоугольник $\langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle$, площадь прямоугольника $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$

Площадь $S : F \rightarrow [0, +\infty)$

1. $S(\langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$
2. $S(E) = S(E_1) + S(E_2)$, если $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

Theorem 1.5. Свойство

Если $\tilde{E} \subset E$, то $S(\tilde{E}) \leq S(E)$

Доказательство:

$$E = \tilde{E} \cup (E \setminus \tilde{E})$$

$$S(E) = S(\tilde{E}) + S(E \setminus \tilde{E}) \geq S(\tilde{E})$$

Definition 1.4. (Квази)площадь

$\sigma : F \rightarrow [0, +\infty)$

1. $\sigma(\langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$
2. $\sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$, если E_- и E_+ множества, получающиеся в результате разбиения E вертикальной (горизонтальной) прямой
3. Если $\tilde{E} \subset E$, то $\sigma(\tilde{E}) \leq \sigma(E)$

Remark 1.3. Свойство

Формула 2) верна и если $E_- \cap E_+ \neq \emptyset$

Например, линию разбиения можно считать относящейся и к левой (верхней), и к правой (нижней) части

Доказательство:

$$e = E_- \cap E_+, \sigma(e) = 0$$

$$\sigma(E_+) = \sigma(E_+ \setminus e) + \sigma(e \cap E_+) = \sigma(E_+ \setminus e)$$

$$\sigma(E_-) + \sigma(E_+) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+ \setminus e) = \sigma(E_- \cup (E_+ \setminus e)) = \sigma(E_- \cup E_+) = \sigma(E)$$

Example 1.6. Примеры площадей $E \in F$

- Рассмотрим покрытие E конечным числом прямоугольников P_i (т.е. $\bigcup_{i=1}^n P_i \supset E$)

$$\sigma_1(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \sigma(P_i) : \bigcup_{i=1}^n P_i \supset E \right\}$$

- Рассмотрим покрытие E последовательностью прямоугольников P_i (т.е. $\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \supset E$)

$$\sigma_2(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sigma(P_i) : \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \supset E \right\}$$

- Ясно, что $\sigma_1(E) \geq \sigma_2(E)$

$$\text{Но, если } E = ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \times ([0, 1] \cap \mathbb{Q}), \text{ то } \begin{cases} \sigma_1(E) = 1 \\ \sigma_2(E) = 0 \end{cases}$$

Theorem 1.6.

- σ_1 – площадь
- σ_1 не меняется при параллельном переносе

Доказательство:

1)

- $\sigma_1(\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle) = (b - a)(d - c)$

Поскольку $[a, b] \times [c, d]$ – покрытие P , $\sigma_1(P) \leq (b - a)(d - c)$

В обратную сторону красиво доказано АИ. Там рисуночки, посмотрите!

- $E = E_- \cup E_+ \Rightarrow \sigma_1(E) = \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$

\leq : Если P_1^+, \dots, P_m^+ – покрытие E_+ , для которого $\sum_{i=1}^m \sigma(P_i^+) < \sigma_1(E_+) + \varepsilon$

А P_1^-, \dots, P_n^- – покрытие E_- , для которого $\sum_{i=1}^n \sigma(P_i^-) < \sigma_1(E_-) + \varepsilon$, то

$P_1^-, P_2^-, \dots, P_n^-, P_1^+, P_2^+, \dots, P_m^+$ – покрытие E , для которого

$$\sigma_1(E) \leq \sum_{i=1}^{n+m} \sigma(P_i) < \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+) + 2\varepsilon \Rightarrow \sigma_1(E) < \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+) + 2\varepsilon$$

\geq : Пусть P_1, P_2, \dots, P_n – покрытие E

Разобьем P_i на P_i^- и P_i^+

$$\sigma(P_i) = \sigma(P_i^-) + \sigma(P_i^+)$$

$P_1^\pm, P_2^\pm, \dots, P_n^\pm$ – покрытие E^\pm

$$\sum_{i=1}^n \sigma(P_i^\pm) \geq \sigma_1(E^\pm)$$

$$\sum_{i=1}^n (\sigma(P_i^-) + \sigma(P_i^+)) \geq \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$$

- $\tilde{E} \subset E \Rightarrow \sigma_1(\tilde{E}) \leq \sigma_1(E)$

Если $\bigcup_{i=1}^n P_i \supset E$, то $\bigcup_{i=1}^n P_i \supset \tilde{E} \Rightarrow$ класс покрытий \tilde{E} шире, чем класс покрытий E

2)

Пусть \tilde{E} – параллельный перенос E на вектор \vec{v}

P_1, P_2, \dots, P_n – покрытие E . Пусть \tilde{P}_i – параллельный перенос P_i на вектор \vec{v}

Тогда $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \dots, \tilde{P}_n$ – покрытие \tilde{E} и $\sum_{i=1}^n \sigma(P_i) = \sum_{i=1}^n \sigma(\tilde{P}_i)$

Definition 1.5.

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_+ := \max\{f, 0\}, \text{ т.е. } f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$$

$$f_- := \max\{-f, 0\}, \text{ т.е. } f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

Свойства:

1. $f_{\pm} \geq 0$
2. $f = f_+ - f_-$
 $|f| = f_+ + f_-$
3. $f_+ = \frac{f+|f|}{2}$ и $f_- = \frac{|f|-f}{2}$
4. Если $f \in C[a, b]$, то $f_{\pm} \in C[a, b]$

Definition 1.6. Подграфик функции

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \geq 0$$

$$\text{Подграфик функции } f - P_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Definition 1.7. Определенный интеграл

σ – зафиксированная квазиплощадь

$$f \in C[a, b] \text{ (пока что так)}$$

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx := \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-})$$

Свойства:

1. $\int_a^a f = 0$
2. $\int_a^b 0 = 0$
3. Если $f \geq 0$, то $\int_a^b f = \sigma(P_f)$
4. $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$
Доказательство:
 $(-f_+) = \max\{-f, 0\} = f_-$
 $(-f_-) = \max\{f, 0\} = f_+$
 $\int_a^b (-f) = \sigma(P_{f_-}) - \sigma(P_{f_+}) = -\int_a^b f$
5. $\int_a^b (c) = c(b - a)$
Доказательство:
 $c > 0 \Rightarrow \int_a^b c = P(\text{прямоугольника}) = c(b - a)$
6. Если $a < b$, $f \geq 0$ и $\int_a^b f = 0$, то $f \equiv 0$

Доказательство: (от противного)

Пусть $f(x_0) > 0$. Из непрерывности f в $x_0 \Rightarrow \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall |x - x_0| < \delta \Rightarrow$
 $\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow P_f \supset [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [0, \frac{f(x_0)}{2}] \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sigma(P_f) \geq \sigma(\text{прямоугольника}) = 2\sigma \frac{f(x_0)}{2} > 0$ Противоречие

1.3 §3. Свойства интеграла

Notation 1.2. Обозначение

$P_g(E)$ – подграфик функции $g \geq 0$ над множеством E , т.е.
 $P_g(E) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in E, 0 \leq y \leq g(x)\}$

Theorem 1.7. Аддитивность интеграла

$f \in C[a, b]$ и $c \in [a, b]$
 Тогда $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Доказательство:

$$\int_a^b f = \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-}) = \sigma(P_{f_+}([a, c])) + \sigma(P_{f_+}([c, b])) - \sigma(P_{f_-}([a, c])) - \sigma(P_{f_-}([c, b])) = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Theorem 1.8. Следствие

$f \in C[a, b]$, $a \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n \leq b$. Тогда
 $\int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \dots + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f + \int_{c_n}^b f$

Доказательство:

Индукция по n

Theorem 1.9. Монотонность интеграла

$f, g \in C[a, b]$ и $f \leq g$ на $[a, b]$
 Тогда $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

Доказательство:

$f \leq g \Rightarrow f_+ \leq g_+ \Rightarrow P_{f_+} \subset P_{g_+}$, а еще $-g \leq -f \Rightarrow g_- \leq f_- \Rightarrow P_{g_-} \subset P_{f_-}$

Значит $\sigma(P_{f_+}) \leq \sigma(P_{g_+})$ и $\sigma(P_{g_-}) \leq \sigma(P_{f_-})$

$$\int_a^b f = \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-}) \leq \sigma(P_{g_+}) - \sigma(P_{g_-}) = \int_a^b g$$

Theorem 1.10. Следствия

$$1. f \in C[a, b] \Rightarrow \min_{[a, b]} f \cdot (b - a) \leq \int_a^b f \leq \max_{[a, b]} f \cdot (b - a)$$

Доказательство:

$\min f \leq f \leq \max f$ и монотонность интеграла для двух постоянных функций и f

$$2. f \in C[a, b] \Rightarrow \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Доказательство:

$$-|f| \leq f \leq |f| \xrightarrow{\text{монотонность}} -\int_a^b |f| = \int_a^b (-|f|) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

Theorem 1.11. (Первая) (интегральная) теорема о среднем

$$f \in C[a, b]. \text{ Тогда существует } c \in [a, b] : \int_a^b f = f(c)(b - a)$$

Доказательство:

$\min f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq \max f$, но множество значений f на $[a, b]$ – это отрезок $[\min f, \max f]$

Следовательно, число $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$ – есть значение функции f в какой-то точке $[a, b]$. Возьмем эту точку в качестве c

Definition 1.8. Среднее значение функции на отрезке

Среднее значение функции f на отрезке $[a, b]$ – это $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$

Definition 1.9. Интеграл с переменным верхним пределом

$$f \in C[a, b]$$

$$\Phi(x) := \int_a^x f, \text{ где } x \in [a, b]$$

Remark 1.4.

$$\Phi(a) = 0$$

Definition 1.10. Интеграл с переменным нижним пределом

$$f \in C[a, b]$$

$$\Psi(x) := \int_x^b f, \text{ где } x \in [a, b]$$

Remark 1.5.

$$\Psi(b) = 0$$

$$\Phi(x) + \Psi(x) = \int_a^b f \quad (\text{это аддитивность } \int)$$

Theorem 1.12. Теорема Барроу

Если $f \in C[a, b]$, $\Phi(x) := \int_a^x f$, то Φ – первообразная функции f

Доказательство:

Надо доказать, что $\Phi'(x) = f(x)$. Пусть $x < y$

$$R(y) = \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \frac{1}{y - x} \left(\int_a^y f - \int_a^x f \right) = \frac{1}{y - x} \int_x^y f \stackrel{\text{т-ма о среднем}}{=} f(c_y), \text{ где } c_y \in [x, y]$$

Возьмем последовательность $y_n > x$ и $\lim y_n = x$

$$\Phi'_+(x) = \lim_{y \rightarrow x+} R(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} R(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(c_{y_n}) = f(x), \text{ т.к. } x \leq c_{y_n} \leq y_n \rightarrow x$$

Если же $y < x$, то нужно смотреть на $\frac{1}{x - y} \int_y^x f$ и дальше ровно так же

Следовательно, $\Phi'(x) = f(x)$

Theorem 1.13. Следствия

$$1. \Psi(x) := \int_x^b f \Rightarrow \Psi'(x) = -f(x)$$

Доказательство:

$$\Phi(x) + \Psi(x) = \text{const}$$

$$2. \text{ Если } f \in C\langle a, b \rangle, \text{ то } f \text{ есть первообразная на } \langle a, b \rangle$$

Доказательство:

$$\text{Возьмем } c \in (a, b) \text{ и } F(x) := \begin{cases} \int_c^x f, & x \geq c \\ -\int_x^c f, & x \leq c \end{cases}$$

$$F'(x) = f(x) \text{ при } x \geq c \text{ (по теореме Барроу)}$$

$$\text{Тогда } F'(x) = -f(x) \text{ при } x \leq c \text{ (по следствию 1)}$$

$$F'_+(c) = f(c) = F'_-(c)$$

Theorem 1.14. Формула Ньютона-Лейбница

$f \in C[a, b]$, F – первообразная f

$$\text{Тогда } \int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Доказательство:

$$\Phi(x) := \int_a^x f - \text{первообразная } f \text{ (по теореме Барроу)} \Rightarrow \Phi = F + C \text{ для некоторой } C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f = \Phi(b) = F(b) + C = F(b) - F(a), \text{ т.к. } 0 = \Phi(a) = F(a) + C$$

Notation 1.3. Обозначение

$F|_a^b := F(b) - F(a)$ подстановка

$$\int_a^b f = F|_a^b$$

Theorem 1.15. Линейность интеграла

$f, g \in C[a, b], \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\text{Тогда } \int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Доказательство:

Пусть F и G – первообразные f и g

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \alpha F + \beta G \text{ – первообразная } \alpha f + \beta g &\Rightarrow \int_a^b (\alpha f + \beta g) = (\alpha F + \beta G)|_a^b = \alpha F|_a^b + \beta G|_a^b = \\ &= \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g \end{aligned}$$

Theorem 1.16. Формула интегрирования по частям

$u, v \in C^1[a, b]$

$$\text{Тогда } \int_a^b uv' = uv|_a^b - \int_a^b u'v$$

Доказательство:

Пусть H – первообразная $u'v$. Тогда $uv - H$ – первообразная uv'

$$(uv - H)' = u'v + uv' - H' = u'v + uv' - u'v = uv'$$

$$\int_a^b uv' = (uv - H)|_a^b = uv|_a^b - H|_a^b = uv|_a^b - \int_a^b u'v$$

Notation 1.4. Соглашение

$$\text{Если } a > b, \text{ то } \int_a^b f = - \int_b^a f$$

Theorem 1.17. Замена переменной в определенном интеграле

$f \in C\langle a, b \rangle, \varphi \in C^1\langle c, d \rangle, \varphi : \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle, p, q \in \langle c, d \rangle$. Тогда

$$\int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx$$

Доказательство:

Пусть F – первообразная для f . Тогда $F \circ \varphi$ – первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ (т.к. $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t)$)

$$\int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = (F \circ \varphi)|_p^q = F(\varphi(q)) - F(\varphi(p)) = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f$$

1.4 §4. Приложение формулы интегрирования по частям

$$W_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \stackrel{(*)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

$$\text{Пояснение к } (*): \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \frac{\pi}{2} - t dt = - \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} \cos^n x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

$$\text{Здесь } \varphi(t) = \frac{\pi}{2} - t \text{ и } \varphi'(t) = -1$$

$$W_0 = \frac{\pi}{2}, \quad W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1, \quad W_2 = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \cdot (-\cos x)' dx = -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \cos x (-\cos x) dx =$$

$$= (n-1) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \right) = (n-1)(W_{n-2} - W_n) \Rightarrow nW_n = (n-1)W_{n-2}$$

$$\text{Если чётно, то } W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} W_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} W_{2n-4} = \dots = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2n(2n-2)\dots 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Если нечётно, то } W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} W_{2n-3} = \dots = \frac{2n(2n-2)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 3} \cdot 1 = \frac{2n!!}{(2n+1)!!}$$

Theorem 1.18. Формула Валлеса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n!!}{(2n+1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Доказательство:

$$\sin^{2n+2} x \leq \sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \text{ при } x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx$$

$$\text{То есть } W_{2n+2} \leq W_{2n+1} \leq W_{2n}$$

$$\frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{2n!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Theorem 1.19. Следствие

$$C_{2n}^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Доказательство:

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{n!n!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} 4^n \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot 4^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Theorem 1.20. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

$f \in C^{n+1}\langle a, b \rangle, x_0, x \in \langle a, b \rangle$

Тогда $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$

Доказательство:

Индукция по n . База $n = 0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{0!} \int_{x_0}^x f'(t) dt \stackrel{\text{H-П}}{=} f(x_0) + f(x) - f(x_0) = f(x) - \text{верно}$$

Переход $n \rightarrow n + 1$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt = (*)$$

Берем $u = f^{(n+1)}, v' = (x - t)^n, v = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}$

$$\int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt = -f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \Big|_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(t) dt$$

$$(*) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (x - t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt$$

Example 1.7.

$$H_j := \frac{1}{j!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^j \cos x dx$$

Theorem 1.21. Свойства:

1. $0 < H_j \leq \frac{1}{j!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2})^{2j} \cos x dx = \frac{(\frac{\pi}{2})^{2j}}{j!}$
2. Если $c > 0$, то $c^j H_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$
3. $H_0 = 1, H_1 = 2$
4. При $j \geq 2$ $H_j = (4j - 2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$

Доказательство:

Берем $v' = \cos x$, $u = ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^j$, $v = \sin x$, $u' = -2jx((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1}$

$$j! H_j = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^j \cos x dx = ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^j \sin x \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + 2j \int_0^{\frac{\pi}{2}} x((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1} \sin x dx = (*)$$

Первое слагаемое занулится, второе еще раз интегрируем по частям

$$v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$$

$$u = x((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1} \Rightarrow u' = ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1} - 2(j-1)x((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-2} = (2j-1)((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1} - \frac{\pi^2}{2}(j-1)((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-2}$$

$$(*) = 2j(-\cos x((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1}) \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + (2j-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1} \cos x dx - \frac{\pi^2}{2}(j-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-2} \cos x dx$$

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-2} \cos x dx$$

Первое слагаемое зануляется, второе $= (j-1)! H_{j-1}$, третье $= (j-2)! H_{j-2}$

$$j! H_j = 2(2j-1)j(j-1)! H_{j-1} - \pi^2 j(j-1)(j-2)! H_{j-2}$$

$$H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$$

5. Существует многочлен P_j степени $\leq j$ с целыми коэффициентами, такой что $H_j = P_j(\pi^2)$

Доказательство:

$$P_0 \equiv 1, P_1 \equiv 2$$

$$P_j(x) = (4j-2)P_{j-1}(x) - \pi^2 P_{j-2}(x) \Rightarrow P_j(\pi^2) = (4j-2)P_{j-1}(\pi^2) - \pi^2 P_{j-2}(\pi^2) = H_j$$

Theorem 1.22. Теорема Ламберта

Числа π и π^2 иррациональны

Доказательство:

Пусть $\pi^2 = \frac{m}{n} \Rightarrow 0 < H_j = P_j(\frac{m}{n}) = \frac{\text{целое число}}{n^j} \Rightarrow n^j P_j(\frac{m}{n}) = n^j H_j > 0$ и является целым числом $\Rightarrow n^j H_j \geq 1$, но $\lim_{j \rightarrow \infty} n^j H_j = 0$ по свойству 2 – противоречие

Definition 1.11. Равномерная непрерывность

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}$$

f равномерно непрерывна на E , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Remark 1.6.

Определение непрерывности во всех точках множества E

$$\forall y \in E \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 x \in E : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

То есть в этом определении $\delta(\varepsilon, y)$, а в равномерной непрерывности $\delta(\varepsilon)$

Example 1.8.

1. \sin и \cos равномерно непрерывны на \mathbb{R}
 $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ и $|\cos x - \cos y| \leq |x - y| \Rightarrow \delta = \varepsilon$ подходит
2. x^2 не является равномерно непрерывной на \mathbb{R}
Возьмем $\varepsilon = 1$ и покажем, что никакая $\delta > 0$ не подходит
Рассмотрим x и $x + \frac{\delta}{2}$
 $f(x + \frac{\delta}{2}) - f(x) = (x + \frac{\delta}{2})^2 - x^2 = x\delta + \frac{\delta^2}{4} > x\delta \geq 1$ при $x \geq \frac{1}{\delta}$

Theorem 1.23. Теорема Кантора

$$f \in C[a, b] \Rightarrow f \text{ равномерно непрерывна на } [a, b]$$

Доказательство:

Возьмем $\varepsilon > 0$ и предположим, что никакое $\delta > 0$ не подходит

$$\delta = 1 \text{ не подходит} \Rightarrow \text{найдутся } x_1, y_1 \in [a, b] : |x_1 - y_1| < 1 \text{ и } |f(x_1) - f(y_1)| \geq \varepsilon$$

$$\delta = \frac{1}{2} \text{ не подходит} \Rightarrow \text{найдутся } x_2, y_2 : |x_2 - y_2| < \frac{1}{2} \text{ и } |f(x_2) - f(y_2)| \geq \varepsilon$$

...

$$\delta = \frac{1}{n} \text{ не подходит} \Rightarrow \text{найдутся } x_n, y_n : |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ и } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

Выберем из x_n сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} : \lim x_{n_k} = c$

$$a \leq x_{n_k} \leq b \Rightarrow c \in [a, b] \text{ и } \lim y_{n_k} = \lim x_{n_k} + \lim(y_{n_k} - x_{n_k}) = c + 0 = c$$

$$\text{Функция } f \text{ непрерывна в } c \Rightarrow \exists \delta > 0 \forall |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lim x_{n_k} = c \Rightarrow \text{при больших } k \ |x_{n_k} - c| < \delta \Rightarrow |f(x_{n_k}) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lim y_{n_k} = c \Rightarrow \text{при больших } k \ |y_{n_k} - c| < \delta \Rightarrow |f(y_{n_k}) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Тогда } \varepsilon \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(c)| + |f(c) - f(y_{n_k})| < \varepsilon - \text{противоречие}$$

Remark 1.7.

Важно, что именно отрезок

Для x^2 мы поняли, что на $[0, +\infty)$ нет равномерной непрерывности \Rightarrow отрезок нельзя заменить на луч

Поймем что на полуинтервал тоже нельзя

$f(x) = \frac{1}{x}$ на $(0, 1]$ не равномерно непрерывна

$\varepsilon = 1$ никакое $\delta > 0$ не подходит (если какое-то не подходит, то $\delta > \delta_0$ тоже не подходит)

Возьмем $0 < \delta \leq 1$, $x = \frac{\delta}{2}$ и $y = \frac{\delta}{4}$
 $|x - y| = \frac{\delta}{4} < \delta$, но $|f(x) - f(y)| = \frac{2}{\delta} > 1$

Definition 1.12. Модуль непрерывности

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$

$\omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in E, |x - y| < \delta\}$ определена при $\delta \geq 0$

Theorem 1.24. Свойства:

1. $\omega_f(0) = 0$
2. $\omega_f(\delta) \geq 0$
3. ω_f нестрого возрастает
4. $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x - y|)$
5. Если f липшицева к константе M , то $\omega_f(\delta) \leq M\delta$

Доказательство:

Липшицевость с константой M – это $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \forall x, y \in E$

6. f равномерно непрерывна на $E \Leftrightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0$ (т.е. ω_f непрерывна в 0)

Доказательство:

$\Rightarrow f$ равномерно непрерыв $\Rightarrow \forall \varepsilon \exists \delta > 0 \forall x, y \in E : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega_f(\frac{\delta}{2}) < \varepsilon$, т.к. $\omega_f(\frac{\delta}{2}) \leq \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| < \frac{\delta}{2}\}$

Значит $\forall t < \frac{\delta}{2} \omega_f(t) \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0+} \omega_f(t) = 0$

$\Leftarrow |f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x - y|)$ по $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ такое что $\omega_f(\delta) < \varepsilon \Rightarrow$
 если $|x - y| \leq \delta$, то $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(\delta) < \varepsilon$

7. $f \in C[a, b] \Leftrightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0$

Доказательство:

$f \in C[a, b] \Leftrightarrow f$ равномерно непрерывна на $[a, b] \Leftrightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0$

Definition 1.13. Дробление отрезка

Дробление отрезка $[a, b]$ – набор точек $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

Definition 1.14. Ранг дробления

Ранг дробления – длина самого большого отрезка из дробления

$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\} =: \tau$

Definition 1.15. Оснащение дробления

Оснащение дробления – набор точек $\xi_k : \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Definition 1.16. Интегральная сумма (сумма Римана)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, τ дробление отрезка и $\tau = \{x_0, x_1 \dots x_n\}$

ξ – оснащение дробления и $\xi = \{\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n\}$

$$S(f, \tau, \xi) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

Example 1.9.

$$S_p(n) := 1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p; \quad p > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_p(n)}{n^{p+1}}?$$

Возьмем $f(x) = x^p$ на $[0, 1]$ и $x_k = \xi_k = \frac{k}{n}$

$$\frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \frac{1}{n} \cdot \left(\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^p \right) = \sum f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) \rightarrow \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}$$

Theorem 1.25. Теорема об интегральных суммах

$f \in C[a, b]$, τ – дробление

$$\text{Тогда } \left| \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| \leq (b - a) \omega_f(|\tau|)$$

Доказательство:

$$\Delta := \int_a^b f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(\xi_k)) dx$$

$$|\Delta| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - f(\xi_k)| dx \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_f(|\tau|) dx = \omega_f(|\tau|) \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \omega_f(|\tau|)(b - a)$$

Theorem 1.26. Следствия

1. $f \in C[a, b]$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall$ дробления τ ранга $< \delta$ и \forall его оснащения ξ

$$\left| \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| < \varepsilon$$

2. $f \in C[a, b]$. Тогда для любой последовательности дроблений $\tau_n : |\tau_n| \rightarrow 0$ и любой

$$\text{последовательности оснащений } \xi_n \lim S(f, \tau_n, \xi_n) = \int_a^b f$$

Definition 1.17. Интеграл Римана

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

f интегрируема по Риману на $[a, b]$, и I ее интеграл, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall$ дробления τ ранга $< \delta$ и \forall его оснащения ξ

$$|I - S(f, \tau, \xi)| < \varepsilon$$

Lemma 1.1.

$f \in C^2[\alpha, \beta]$. Тогда $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - (\beta - \alpha) \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} = -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t)(t - \alpha)(\beta - t) dt$

Доказательство:

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x)(x - \gamma)' dx = f(x)(x - \gamma) \Big|_{x=\alpha}^{x=\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)(x - \gamma) dx = f(\beta) \cdot \frac{\beta - \alpha}{2} - f(\alpha) \cdot \frac{\alpha - \beta}{2} = \\ &= \frac{f(\beta) + f(\alpha)}{2} (\beta - \alpha) \end{aligned}$$

$$\Delta = - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)(x - \gamma) dx = (*)$$

$$\text{Берем } u = f'; \quad v' = x - \gamma; \quad -v = \frac{1}{2}(x - \alpha)(\beta - x) = \frac{1}{2}(-x^2 + (\alpha + \beta)x - \alpha\beta)$$

$$(*) = -f'(x) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(x - \alpha)(\beta - x) \Big|_{x=\alpha}^{x=\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f''(x) \frac{1}{2}(x - \alpha)(\beta - x) dx$$

Theorem 1.27. Формула трапеций

$$S = \sum (x_k - x_{k-1}) \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$$

Как выглядит формула, если узлы на равных расстояниях?

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$$

$$S = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(b)}{2} \right)$$

Notation 1.5. Как выглядит интегральная сумма если узлы на равных расстояниях?

$$\xi_k = x_k$$

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

$$\text{А если } \xi_k = x_{k-1}, \text{ то } S(f, \tau, \xi) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

Remark 1.8.

Если $|f| \leq M$, то $\omega_f(\delta) \leq M\delta$

$$\left| S(f, \xi, \tau) - \int_a^b f \right| \leq (b-a) \omega_f\left(\frac{b-a}{n}\right) \leq (b-a)^2 \cdot \frac{M}{n}$$

Theorem 1.28. Оценка погрешности в формуле трапеций

$$f \in C^2[a, b]$$

$$\text{Тогда } \left| \int_a^b f - \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \cdot \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \right| \leq \frac{|\tau|^2}{8} \cdot \int_a^b |f''|$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} = \sum_{k=1}^n \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f - (x_k - x_{k-1}) \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \right) \stackrel{\text{lemma}}{=} \\
&\stackrel{\text{lemma}}{=} \sum_{k=1}^n -\frac{1}{2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t)(x_k - t)(t - x_{k-1}) dt \\
|\Delta| &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)| \cdot |(x_k - t)(t - x_{k-1})| dt \leq (*) \\
(x_k - t)(t - x_{k-1}) &\leq \left(\frac{(x_k - t) + (t - x_{k-1})}{2} \right)^2 = \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{2} \right)^2 = \frac{|\tau|^2}{4} \\
(*) &\leq \frac{|\tau|^2}{8} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)| dt = \frac{|\tau|^2}{8} \int_a^b |f''|
\end{aligned}$$

Remark 1.9.

Если $|f''| \leq M$ и узлы равноотстоящие друг от друга, то $\left| \int_a^b f - \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)}{2} + \sum f(x_k) + \frac{f(b)}{2} \right) \right| \leq \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 \frac{M(b-a)}{8}$

Theorem 1.29. Формула Эйлера-Маклорена для второй производной

$$\begin{aligned}
&f \in C^2[a, b]; \quad m, n \in \mathbb{Z} \\
\sum_{k=m}^n f(k) &= \frac{f(m) + f(n)}{2} + \int_m^n f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^n f''(t) \{t\} (1 - \{t\}) dt
\end{aligned}$$

Доказательство:

Пишем лемму (1.1) для $\alpha = k$ и $\beta = k + 1$

$$\int_k^{k+1} f = \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \frac{1}{2} \int_k^{k+1} f''(t)(t - k)(k + 1 - t) dt$$

Просуммируем по k от m до $n - 1$

$$\begin{aligned}
\int_m^n f &= \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} f = \sum_{k=m}^{n-1} \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} f''(t) \{t\} (1 - \{t\}) dt = \frac{f(m)}{2} + \sum f(k) + \frac{f(n)}{2} - \\
&- \frac{1}{2} \int_m^n f''(t) \{t\} (1 - \{t\}) dt \\
\int_m^n f + \frac{f(m) + f(n)}{2} &= \sum f(k) - \frac{1}{2} \int_m^n f''(t) \{t\} (1 - \{t\}) dt
\end{aligned}$$

Example 1.10.

$$1. S_p(n) = 1^p + 2^p + \dots + n^p; f(x) = x^p; f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$$

$$S_p(n) = \frac{1+n^p}{2} + \int_1^n x^p dx + \frac{1}{2} \int_1^n p(p-1)x^{p-2}\{x\}(1-\{x\})dx$$

Пусть $p > -1$

$$|S_p(n) - \frac{n^{p+1}-1}{p+1} - \frac{n^{p+1}}{2}| \leq \frac{|p||p-1|}{8} \int_1^n x^{p-2} dx$$

$$\text{Если } p \in (-1, 1), \text{ то } \int_1^n x^{p-2} dx = \frac{x^{p-1}}{p-1} \Big|_1^n \leq \frac{1}{1-p} \Rightarrow S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(1)$$

$$\text{Если } p > 1, \text{ то } \int_1^n x^{p-2} dx = \frac{x^{p-1}}{p-1} \Big|_1^n \leq \frac{n^{p-1}}{p-1} = O(n^{p-1}) \Rightarrow S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(n^{p-1})$$

$$2. \text{ Гармонические числа } H_n := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}; f''(x) = \frac{2}{x^3}; m = 1$$

$$H_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \int_1^n \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int_1^n \frac{2}{x^3} \{x\}(1-\{x\})dx = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a_n = (*)$$

$$a_n := \int_1^n \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^3} dx$$

$$a_{n+1} = a_n + \int_n^{n+1} \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^3} dx > a_n$$

$$\text{Поймем что } a_n \text{ ограничена: } a_n \leq \int_1^n \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2x^2}\right) \Big|_1^n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8n^2} < \frac{1}{8} \Rightarrow$$

\Rightarrow существует конечный $\lim a_n =: a$

$(*) = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a + O(1) = \ln n + \gamma + O(\frac{1}{n})$, где γ – постоянная Эйлера

Notation 1.6.

$$\gamma \approx 0.5772156043 \dots$$

$$3. \text{ Формула Стирлинга}$$

$$f(t) = \ln t; f''(t) = -\frac{1}{t^2}; m = 1$$

$$\sum_{k=1}^n \ln k = \frac{\ln 1 + \ln n}{2} + \int_1^n \ln t dt - \frac{1}{2} \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2} dt = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + 1 - b_n$$

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2} \int_n^{n+1} \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2} dt > b_n$$

$$b_n \leq \frac{1}{8} \int_1^n \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{8} \left(-\frac{1}{t}\right) \Big|_1^n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8n} < \frac{1}{8} \Rightarrow \lim b_n = b \in \mathbb{R} \Rightarrow b_n = b + o(1)$$

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + (1-b) + o(1)$$

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{1-b} e^{o(1)} \sim C n^n e^{-n} \sqrt{n} \text{ (где } C = e^{1-b})$$

Хотим найти $C > 0$ из формулы $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{n} C$

$$\text{Знаем, что } C_{2n}^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}, \text{ но } C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{C(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n}}{(Cn^n e^{-n} \sqrt{n})^2} = \frac{C 2^{2n} \sqrt{2n}}{C^2 \sqrt{n} \sqrt{n}} = \frac{4^n \sqrt{n}}{C \sqrt{n}} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \sqrt{2}}{C \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} = 1 \Rightarrow C = \sqrt{2\pi}$$

Notation 1.7. Формула Стирлинга

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2}(\ln n + \ln 2\pi) + o(1)$$

Remark 1.10.

Чуть более точные вычисления дают $O(\frac{1}{n})$ вместо $o(1)$

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{O(\frac{1}{n})}$$

1.5 §5. Несобственные интегралы

Definition 1.18.

$-\infty < a < b \leq +\infty; f \in C[a, b)$
 $\int_a^b f := \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f$, если такой предел существует
 $-\infty \leq a < b < +\infty; f \in C(a, b]$
 $\int_a^b f := \lim_{A \rightarrow a+} \int_A^b f$, если такой предел существует

Remark 1.11.

- Если F – первообразная f на $[a, b)$, то
 $\int_a^b f = \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f = \lim_{B \rightarrow b-} (F(B) - F(a)) = \lim_{B \rightarrow b-} F(B) - F(a)$
 Если F – первообразная f на $(a, b]$, то
 $\int_a^b f = F(b) - \lim_{A \rightarrow a+} F(A) =: F|_a^b$, т.е. подстановку теперь понимаем как предел (в случае, если она не определена в какой-то точке)
- Если $f \in C[a, b]$, то новое определение совпадает со старым
 $\int_a^b f - \int_a^B f = \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f - \int_a^B f = - \lim_{B \rightarrow b-} \int_B^b f$
 $f \in C[a, b] \Rightarrow f$ ограничена $\Rightarrow |f| \leq M$
 $|\int_B^b f| \leq \int_B^b |f| \leq \int_B^b M = (b - B)M \xrightarrow{B \rightarrow b-} 0$

Example 1.11.

- $\int \frac{dx}{x^p}$ на $(1, \infty)$ и $(0, 1)$
- $p \neq 1$, первообразная для $\frac{1}{x^p} = x^{-p}$ – это $\frac{x^{-p+1}}{1-p}$
 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = \begin{cases} +\infty & p < 1 \\ \frac{1}{p-1} & p > 1 \end{cases}$
 Если $p = 1$, то первообразная для $\frac{1}{x}$ – это $\ln x$
 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x - \ln 1 = +\infty$
 Итого $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} +\infty & p \leq 1 \\ \frac{1}{p-1} & p > 1 \end{cases}$
 - $p \neq 1$, первообразная $\frac{x^{1-p}}{1-p} \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_0^1 = \frac{1}{1-p} - \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^{1-p}}{1-p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} & p < 1 \\ +\infty & p > 1 \end{cases}$
 $p = 1 \Rightarrow$ первообразная $\ln x \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_0^1 = \ln 1 - \lim_{x \rightarrow 0+} \ln x = +\infty$
 Итого $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} & p < 1 \\ +\infty & p \geq 1 \end{cases}$

Definition 1.19. Сходящийся интеграл

Несобственный интеграл $\int_a^b f$ называется сходящимся, если \lim из определения существует и конечен и называется расходящимся в противном случае

Remark 1.12.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ сходится } \Leftrightarrow p > 1$$
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} \text{ сходится } \Leftrightarrow p < 1$$

Theorem 1.30. Критерий Коши для сходимости интегралов

$$f \in C[a, b]; \quad -\infty < a < b \leq +\infty$$

$$\text{Тогда } \int_a^{\rightarrow b} f \text{ сходится } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists c \in (a, b) : \forall A, B \in (c, b) \Rightarrow \left| \int_A^B f \right| < \varepsilon$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_a^{\rightarrow b} f \text{ сходится} &\Rightarrow \text{существует конечный } \lim_{y \rightarrow b-} F(y), \text{ где } F - \text{ первообразная } f \\ \forall \varepsilon > 0 &\text{ найдется такая окрестность } (c, b), \text{ что } \forall y \in (c, b) |F(y) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow \text{если } A, B \in (c, b), &\text{ то } |F(A) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } |F(B) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow |F(B) - F(A)| &\leq |F(B) - L| + |L - F(A)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \\ \Leftarrow \text{Пусть } F - \text{ первообразная } f, &\text{ тогда } \forall \varepsilon > 0 \exists c \in (a, b) : \forall A, B \in (c, b) \Rightarrow |F(B) - F(A)| < \varepsilon \\ \text{Но это условие из критерия Коши для } &\lim_{y \rightarrow b-} F(y) \Rightarrow \text{этот предел существует и конечен} \\ \Rightarrow \int_a^{\rightarrow b} f = \lim_{y \rightarrow b-} F(y) - F(a) &\text{ существует и конечен} \end{aligned}$$

Theorem 1.31. Свойства несобственных интегралов

1. Аддитивность. $f \in C[a, b]; c \in (a, b)$

$$\text{Тогда } \int_a^b f \text{ сходится } \Leftrightarrow \int_c^b f \text{ сходится и в этом случае } \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

2. $f \in C[a, b)$. Если $\int_a^b f$ сходится, то $\lim_{B \rightarrow b-} \int_B^b f = 0$

3. Линейность $f, g \in C[a, b]; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\text{Если } \int_a^b f \text{ и } \int_a^b g \text{ сходятся, то } \int_a^b (\alpha f + \beta g) \text{ сходится и } \int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

4. Монотонность. $f, g \in C[a, b]; f \leq g$ на $[a, b)$ и интегралы существуют $\Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$

5. Интегрирование по частям. $f, g \in C^1[a, b)$. Тогда $\int_a^b f g' = f g|_a^b - \int_a^b f' g$

(если существуют какие-то два предела из трех, то существует и третий и есть равенство)

Доказательство:

1. $\int_a^B f = \int_a^c f + \int_c^B f$ и переходим к $\lim_{B \rightarrow b_-} \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
2. $\int_a^b f = \int_a^B f + \int_B^b f \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^B f - \int_a^B f$ и пишем $\lim_{B \rightarrow b_-}$
3. $a < B < b \Rightarrow \int_a^B (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^B f + \beta \int_a^B g$ и переходим к $\lim_{B \rightarrow b_-}$
4. $a < B < b$. Тогда $\int_a^B f \leq \int_a^B g$ и переходим к $\lim_{B \rightarrow b_-}$
5. $a < B < b$. Тогда $\int_a^B f g' = f g|_a^B - \int_a^B f' g$ и переходим к $\lim_{B \rightarrow b_-}$

Remark 1.13.

Если $\int_a^b f$ сходится и $\int_a^b g$ расходится, то $\int_a^b (f + g)$ расходится

Если бы $\int_a^b (f + g)$ сходился, то $\int_a^b g = \int_a^b ((f + g) - f)$ сходится

Theorem 1.32. Замена переменной в несобственном интеграле

$\varphi : [\alpha, \beta) \rightarrow [a, b)$; $\varphi \in C^1[\alpha, \beta)$ и существует $\lim_{\gamma \rightarrow \beta_-} \varphi(\gamma) =: c$

$f \in C[a, b)$. Тогда $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(x)dx$ (если существует один из интегралов, то существует другой и есть равенство)

Доказательство:

$$F(y) := \int_{\varphi(\alpha)}^y f(x)dx; \quad y \in [a, b)$$

$$\Phi(\gamma) := \int_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)dt; \quad \gamma \in [\alpha, \beta)$$

Тогда $\Phi(\gamma) = F(\varphi(\gamma))$ по формуле замены переменной в собственном интеграле

1. Пусть существует $\lim_{y \rightarrow c_-} F(y)$. Покажем, что существует $\lim_{\gamma \rightarrow \beta_-} \Phi(\gamma)$

Проверяем по Гейне. Возьмем $\gamma_n \nearrow \beta \Rightarrow \Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n))$

$$\gamma_n \nearrow \beta \Rightarrow \varphi(\gamma_n) \rightarrow c \Rightarrow \Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)) \rightarrow \lim_{y \rightarrow c_-} F(y) = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(x)dx$$

$$\Rightarrow \lim_{\gamma \rightarrow \beta_-} \Phi(\gamma) = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(x)dx$$

2. Пусть существует $\lim_{\gamma \rightarrow \beta_-} \Phi(\gamma)$. Проверим, что тогда $\exists \lim_{y \rightarrow c} F(y)$. Тогда по пункту 1 будет

равенство. Если $c < b$, то очевидно существует (т.к. F непрерывно при $y < b$)

Считаем, что $c = b$. Проверим по Гейне, что $\exists \lim_{y \rightarrow b_-} F(y)$. Возьмем $b_n \nearrow b$. Можно считать,

что $b_n \in [\varphi(\alpha), b)$. Т.е. сколь угодно близко к b найдутся значения $\varphi \Rightarrow$ найдется

$$\varphi(\beta_n) > b_n$$

$$\Rightarrow \text{по БК } \exists \gamma_n \in (\alpha, \beta_n) : \varphi(\gamma_n) = b_n \Rightarrow \Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)) = F(b_n)$$

Осталось проверить, что γ_n имеют предел. Предположим, что $\lim \gamma_n \neq \beta \Rightarrow$ найдется подпоследовательность $\gamma_{n_k} \rightarrow \tilde{\beta} \neq \beta$
 $\gamma_n \in [\alpha, \beta) \Rightarrow \gamma_{n_k} \rightarrow \tilde{\beta} < \beta \Rightarrow \varphi$ непрерывна в $\tilde{\beta}$
 $b \leftarrow b_{n_k} = \varphi(\gamma_{n_k}) \rightarrow \varphi(\tilde{\beta}) < b$. Противоречие. Следовательно $\lim \gamma_n = \beta \Rightarrow \lim \Phi(\gamma_n) = \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma)$, т.е. он существует

Remark 1.14.

$\int_a^b f(x)dx$ заменой $x = b - \frac{1}{t}$ и $\varphi(t) = b - \frac{1}{t}$ сводится к $\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(b - \frac{1}{t}) \frac{dt}{t^2}$
 То есть точку, где нет непрерывности можно записать на ∞ . $\varphi(\frac{1}{b-a}) = a$ и $\varphi(\infty) = b$

Theorem 1.33.

$f \in C[a, b)$ и $f \geq 0$. Тогда $\int_a^b f$ всегда определен. Он сходится $\Leftrightarrow F$ – ограниченная функция на $[a, b)$

Доказательство:

$F(y) := \int_a^y f$. Если $y < z$, то $F(z) = \int_a^z f = \int_a^y f + \int_y^z f \geq F(y) \Rightarrow F$ нестрого возрастает \Rightarrow
 $\Rightarrow \lim_{y \rightarrow b-} F$ существует и $\lim_{y \rightarrow b-} F = \sup_{y \in [a, b)} F(y)$

Тогда конечность предела равносильна ограниченности функции F

Theorem 1.34. Следствие 1 (признак сравнения)

$f, g \in C[a, b)$, $f, g \geq 0$ и $f \leq g$. Тогда

1. Если $\int_a^b g$ сходится, то $\int_a^b f$ сходится
2. Если $\int_a^b f$ сходится, то $\int_a^b g$ расходится

Доказательство:

$F(y) := \int_a^y f, G(y) := \int_a^y g; f \leq g \Rightarrow F(y) \leq G(y)$

1. $\int_a^b g$ сходится $\Leftrightarrow G$ – ограничена $\Rightarrow F$ – ограничена $\Leftrightarrow \int_a^b f$ сходится
2. Если бы $\int_a^b g$ сходился, то $\int_a^b f$ сходится. Противоречие

Remark 1.15.

1. Достаточно наличия неравенства $f \leq g$ при аргументах близких к точке b
2. Неравенство $f \leq g$ можно заменить на $f = O(g)$

$f = O(g)$ означает, что $f \leq Cg$ для некоторого C и $\int_a^b Cg = C \int_a^b g$

3. Если $f = O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$ при $\varepsilon > 0$, то $\int_a^{+\infty} f$ сходится

$g(x) = \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$ и $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\varepsilon}}$ сходится

Theorem 1.35. Следствие

$f, g \in C[a, b)$; $f, g \geq 0$ и $f \overset{x \rightarrow b}{\sim} g$. Тогда $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ ведут себя одинаково

Доказательство:

$f \sim g \Rightarrow f = \varphi g$, где $\lim_{x \rightarrow b-} \varphi(x) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \varphi(x) \leq 2$ при x близких к b

$\frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq 2g(x)$ при x близких к $b \Rightarrow f = O(g)$ и $g = O(f)$ в окрестности b

Remark 1.16.

Если $f \geq 0$ и $\int_a^{+\infty} f$ сходится, то не обязательно $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Definition 1.20. Абсолютная сходимость

$f \in C[a, b)$
 $\int_a^b f$ абсолютно сходится, если $\int_a^b |f| < +\infty$

Theorem 1.36.

Если $\int_a^b f$ абсолютно сходится, то $\int_a^b f$ сходится

Доказательство:

$0 \leq f_{\pm} \leq |f|$. Признак сравнения: $\int_a^b |f|$ сходится $\Rightarrow \int_a^b f_{\pm}$ сходится $\Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b f_+ - \int_a^b f_-$ сходится

Remark 1.17.

Бывают интегралы, которые сходятся, но не абсолютно

Exercise 1.1.

Что делать, если несколько точек, где нет непрерывности? Пусть отрезок $[a, b]$ нарезан на куски, т.е. $[a, b] = [a, c_1] \cup [c_1, c_2] \cup \dots \cup [c_n, b]$ (где в c_i нет непрерывности). Добавим в каждый полученный отрезок по точке d_i

Итого подряд идут точки типа $a, d_1, c_1, d_2, c_2 \dots d_n, c_n, d_{n+1}, b$

$\int_a^b f$ сходится означает, что $\int_a^{d_1}, \int_{d_1}^{c_1}, \int_{c_1}^{d_2}, \dots, \int_{d_{n+1}}^b$ сходятся

Theorem 1.37. Признак Дирихле

$f, g \in C[a, +\infty)$

1. f имеет ограниченную первообразную на $[a, +\infty)$ (т.е. $F(x) := \int_a^x f$ ограничена)
2. g монотонна
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится

Доказательство (для случая, когда $g \in C^1[a, +\infty)$):

Хотим доказать, что $H(x) := \int_a^x fg$ имеет конечный предел при $x \rightarrow +\infty$

$H(x) = \int_a^x F'g = Fg|_a^x - \int_a^x Fg'$. Проверим, что существует конечный предел

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)g(x) = 0$, т.к. F ограничена и g — бесконечно малая

Осталось доказать, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x Fg'$ существует и конечен, т.е. что $\int_a^{+\infty} Fg'$ сходится

Проверим, что он абсолютно сходится, т.е. $\int_a^{+\infty} |Fg'| < +\infty$

F — ограничена $\Rightarrow \exists M : |F(x)| \leq M \forall x \Rightarrow |Fg'| \leq M|g'|$. По признаку сравнения достаточно проверить, что $\int_a^{+\infty} |g'|$ сходится. Из монотонности g следует, что g' фиксированного знака,

поэтому надо проверить, что $\int_a^{+\infty} g'$ сходится

$\int_a^{+\infty} g' = g|_a^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - g(a) = -g(a) < +\infty$

Theorem 1.38. Признак Абеля

$f, g \in C[a, +\infty)$

1. $\int_a^{+\infty} f$ сходится
2. g монотонна
3. g ограничена

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится

Доказательство:

Монотонная ограниченная функция имеет конечный предел $b := \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$\tilde{g}(x) := g(x) - b$ — монотонная и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{g}(x) = 0$

$F(x) := \int_a^x f$. По условию $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \int_a^{+\infty} f$ существует и конечен $\Rightarrow F$ локально ограничена, т.е. при $x \geq K$ $|F(x)| \leq M$

Но на отрезке $[a, K]$ функция F непрерывна \Rightarrow ограничена

$\Rightarrow f$ и \tilde{g} удовлетворяют условиям признака Дирихле $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f\tilde{g}$ сходится

$\int_a^{+\infty} f = \int_a^{+\infty} f(\tilde{g} + b) = \int_a^{+\infty} f\tilde{g} + b \int_a^{+\infty} f$ сходится как сумма двух сходящихся

Theorem 1.39. Следствие

$f, g \in C[a, +\infty)$, f — периодична с периодом T , g — монотонна и $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

1. Если $\int_a^{+\infty} |g|$ сходится, то $\int_a^{+\infty} fg$ сходится абсолютно
2. Если $\int_a^{+\infty} |g|$ расходится, то $\int_a^{+\infty} fg$ сходится $\Leftrightarrow \int_a^{a+T} f = 0$

Доказательство:

1. f непрерывна на $[a, a+T]$ \Rightarrow ограничена на $[a, a+T]$ \Rightarrow ограничена, т.к. периодична

$fg = O(g) \Rightarrow \int_a^{+\infty} fg$ абсолютно сходится по признаку сравнения

2. $\Leftarrow \int_a^{a+T} f = 0$, тогда $F(x) := \int_a^x f$ — ограниченная функция

Проверим, что F периодична с периодом T

$F(x+T) = \int_a^{x+T} f = \int_a^{a+T} f + \int_{a+T}^{x+T} f = 0 + \int_a^x f = F(x) \Rightarrow F$ ограничена \Rightarrow принцип Дирихле

\Rightarrow Пусть $\int_a^{a+T} f = b \neq 0$. Тогда $\int_a^{a+T} (f - \frac{b}{T}) = 0 \Rightarrow \int_a^{+\infty} (f - \frac{b}{T})g$ сходится

$\int_a^{+\infty} fg = \int_a^{+\infty} (f - \frac{b}{T})g + \frac{b}{T} \int_a^{+\infty} g$. Первое сходится, второе расходится $\Rightarrow \int_a^{+\infty} fg$ расходится

Example 1.12.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$$

$p > 1 \quad \left| \frac{\sin x}{x^p} \right| \leq \frac{1}{x^p}$
 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ сходится абсолютно по признаку сравнения

$p > 0$ \sin – периодическая функция с периодом 2π
 $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$

$f(x) = \sin x; \quad g(x) = \frac{1}{x^p} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ монотонно $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ сходится

А что с абсолютной сходимостью? $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx > 0$

$f(x) = |\sin x|; \quad g(x) = \frac{1}{x^p} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ монотонно

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ – расходится $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx$ расходится $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ не имеет абсолютной сходимости

$p \leq 0$ Рассмотрим отрезок $[2\pi k + \frac{\pi}{6}, 2\pi k + \frac{5\pi}{6}]$. На нем $\sin x \geq \frac{1}{2}$

$$\int_{2\pi k + \frac{\pi}{6}}^{2\pi k + \frac{5\pi}{6}} \frac{\sin x}{x^p} dx \geq \frac{1}{2} \int_{2\pi k + \frac{\pi}{6}}^{2\pi k + \frac{5\pi}{6}} \frac{dx}{x^p} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot (2\pi k + \frac{\pi}{6})^{-p} \geq \frac{\pi}{3} - \text{противоречие с условием}$$

критерия Коши, значит $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ расходится

Remark 1.18.

В признаках Абеля и Дирихле нельзя отказаться от монотонности g

$$f(x) = \sin x; \quad g(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$\left| \int_1^x \sin t dt \right| = |\cos 1 - \cos x| \leq 2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

$$\int_1^{+\infty} fg = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \pi > 0; \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} - \text{расходится}$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx \text{ расходится}$$

2 Анализ в метрических пространствах

2.1 §1. Метрические пространства

Definition 2.1. Метрика

X – множество. $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ – метрика (расстояние)

1. $\rho(x, y) \geq 0$ и $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. Неравенство треугольника: $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Definition 2.2. Метрическое пространство

(X, ρ) – метрическое пространство

Example 2.1.

1. Дискретная метрика (метрика лентяя) $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$
2. $X = \mathbb{R}$; $\rho(x, y) = |x - y|$
3. $X = \mathbb{R}^2$; ρ – расстояние на плоскости
4. $X = \mathbb{R}^d$; $p \geq 1$ и $\rho(x, y) = (|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p + \dots + |x_d - y_d|^p)^{\frac{1}{p}}$
Неравенство треугольника – это неравенство Минковского
5. Частный случай 4. $X = \mathbb{R}^2$; $\rho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ – Манхэттенское расстояние
6. Французская железнодорожная метрика $X = \mathbb{R}^2$
 $\rho(A, B)$ = длина отрезка AB
 $\rho(C, D) = CP + PD$
Тут красивый рисуночек, типа чтоб проехать из города в другой оч часто надо заехать в P – пАрИж
7. Метрика Хемминга $a_1, a_2 \dots a_n$ слова из n букв
 $\rho(A, B)$ = количество разрядов, в которых A и B различаются
8. $X = C[a, b]$; $\rho(f, g) := \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$ – равномерная метрика
9. $X = C[a, b]$; $\rho(f, g) := \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ – метрика в L_1

Definition 2.3. Шар

(X, ρ) – метрическое пространство, $r > 0$, $a \in X$

Открытый шар радиуса r с центром в точке a

$$B_r(a) := \{x \in X : \rho(x, a) < r\}$$

$$\text{Замкнутый шар } \overline{B}_r(a) := \{x \in X : \rho(x, a) \leq r\}$$

Theorem 2.1. Свойства

1. $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min(r_1, r_2)}(a)$
 $B_{r_1}(a) \cup B_{r_2}(a) = B_{\max(r_1, r_2)}(a)$
2. Если $a \neq b$, то найдется $r > 0 : \overline{B_r}(a) \cap \overline{B_r}(b) = \emptyset$

Доказательство:

2. Возьмем $r = \frac{\rho(a, b)}{3} > 0$. Пусть $\overline{B_r}(a) \cap \overline{B_r}(b) \neq \emptyset$, т.е. найдется $x \in \overline{B_r}(a)$ и $x \in \overline{B_r}(b) \Rightarrow \rho(a, b) \leq \rho(a, x) + \rho(x, b) \leq r + r = \frac{2}{3}\rho(a, b)$ – противоречие

Definition 2.4. Открытое множество

$U \subset X$ – открытое множество, если $\forall a \in U$ найдется $B_r(a) \subset U$

Theorem 2.2. Свойства

1. \emptyset и X – открытые множества
2. Объединение любого количества открытых множеств – открытое множество
3. Пересечение конечного количества открытых множеств – открытое множество
4. Открытый шар – открытое множество

Доказательство:

1. Очевидно
2. Пусть U_α – открытые при $\alpha \in I$. Докажем, что $U := \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ – открытое
 Возьмем $a \in U \Rightarrow a \in U_{\alpha_0}$ для некоторого α_0 , но U_{α_0} – открытое $\Rightarrow \exists r > 0 : B_r(a) \subset U_{\alpha_0} \subset U$
3. Пусть $U_1, U_2 \dots U_n$ открытые. Докажем, что $U := \bigcap_{k=1}^n U_k$ – открытое
 Возьмем $a \in U \Rightarrow a \in U_k \forall k \in 1 \dots n$. U_k – открытое $\Rightarrow \exists r_k > 0 : B_{r_k}(a) \subset U_k$
 Возьмем $r := \min(r_1, r_2 \dots r_n) > 0 \Rightarrow B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset U_k \Rightarrow B_r(a) \subset U = \bigcap_{k=1}^n U_k$
4. $B_R(a)$ – открытое множество
 Возьмем $x \in B_R(a) \Rightarrow \rho(x, a) < R$ и положим $r := R - \rho(x, a) > 0$
 Проверим, что $B_r(x) \subset B_R(a)$. Возьмем $y \in B_r(x)$ и проверим, что $y \in B_R(a)$
 $y \in B_r(x) \Rightarrow \rho(y, x) < r = R - \rho(x, a) \Rightarrow \rho(y, a) \leq \rho(y, x) + \rho(x, a) < r + \rho(x, a) = R$

Remark 2.1.

В 3 существенно, что множеств конечное число

Example 2.2.

$X = \mathbb{R}; \rho(x, y) = |x - y|; U_n := (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ – открытые множества
 $\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n = \{0\}$ – не открытое

Definition 2.5. Внутренняя точка

(X, ρ) – метрическое пространство, $A \subset X$, $a \in A$
 a – внутренняя точка множества A , если $\exists r > 0 : B_r(a) \subset A$

Remark 2.2.

Открытое множество – множество, все точки которого внутренние

Definition 2.6. Внутренность множества

(X, ρ) – метрическое пространство, $A \subset X$
Внутренность множества – все внутренние точки множества
Обозначение: $\text{Int } A$ (иногда A°)

Theorem 2.3. Свойства

1. $\text{Int } A \subset A$
2. $\text{Int } A$ – объединение всех открытых множеств, содержащихся в A
3. $\text{Int } A$ – открытое множество
4. A – открытое $\Leftrightarrow A = \text{Int } A$
5. $A \subset B \Rightarrow \text{Int } A \subset \text{Int } B$
6. $\text{Int}(\text{Int } A) = \text{Int } A$
7. $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B$

Доказательство:

1. Очев
2. Хотим $\text{Int } A = \bigcup_{G \subset A} G$, где G – открытое
 \subset Возьмем $a \in \text{Int } A \Rightarrow a$ – внутренняя точка $\Rightarrow \exists r > 0 : B_r(a) \subset A$, но $B_r(a)$ – открытое множество $\Rightarrow B_r(a)$ присутствует среди множеств из объединения
 \supset Пусть $a \in U \Rightarrow \exists G$ – открытое $\subset A : a \in G \Rightarrow \exists r > 0 : B_r(a) \subset G \subset A \Rightarrow a$ – внутренняя точка
3. По пункту 2 $\text{Int } A$ – объединение открытых множеств $\Rightarrow \text{Int } A$ – открытое
4. \Leftarrow т.к. $\text{Int } A$ – открытое
 $\Rightarrow A$ – открытое \Rightarrow все точки внутренние \Rightarrow все лежат в $\text{Int } A \Rightarrow A = \text{Int } A$
5. Если a – внутренняя точка для A , то и для B тоже, т.к. $A \subset B$
6. $3 + 4 = 6$

Exercise 2.1.

1. Доказать пункт 7
2. Придумать пример, когда $\text{Int}(A \cup B) \neq \text{Int } A \cup \text{Int } B$

Definition 2.7. Замкнутое множество

Замкнутое множество – множество, дополнение которого открыто
 A замкнуто $\Leftrightarrow X \setminus A$ открыто

Theorem 2.4. Свойства замкнутых множеств

1. \emptyset и X – замкнутые множества
2. Пересечение любого количества замкнутых множеств – замкнутое множество
3. Объединение конечного количества замкнутых множеств – замкнутое множество
4. Замкнутый шар – замкнутое множество

Доказательство:

1. Очевидно, ничего писать не буду
2. F_α – замкнутые $\Rightarrow X \setminus F_\alpha$ – открытые $\Rightarrow \bigcup X \setminus F_\alpha = X \setminus \bigcap F_\alpha$ – открытое $\Rightarrow \bigcap F_\alpha$ – замкнутое
3. $F_1 \dots F_n$ – замкнутые $\Rightarrow X \setminus F_k$ – открытые $\Rightarrow \bigcap X \setminus F_k = X \setminus \bigcup F_k$ – открытое $\Rightarrow \bigcup F_k$ – замкнутое
4. $\overline{B}_R(a)$ – замкнутое множество $\Leftrightarrow X \setminus \overline{B}_R(a) = \{x \in X : \rho(x, a) > R\}$ – открытое
Возьмем $r := \rho(x, a) - R$ и проверим, что $B_r(x) \subset X \setminus \overline{B}_R(a)$
 $x \notin \overline{B}_R(a)$, т.е. $B_r(x) \cap \overline{B}_R(a) = \emptyset$
Предположим противное, тогда $\exists y \in B_r(x)$ и $y \in \overline{B}_R(a) \Rightarrow \rho(x, y) < r$ и $\rho(y, a) \leq R \Rightarrow \rho(x, a) \leq \rho(x, y) + \rho(y, a) < r + R = \rho(x, a) \text{ ???}$

Definition 2.8. Замыкание множества

Замыкание множества A – пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A
Обозначение $\text{Cl } A$ или \overline{A}

Theorem 2.5.

$$X \setminus \text{Cl } A = \text{Int}(X \setminus A) \text{ и } X \setminus \text{Int } A = \text{Cl}(X \setminus A)$$

Доказательство:

Докажем, что $X \setminus \text{Cl } A = \text{Int}(X \setminus A)$

- \subset Пусть $x \in X \setminus \text{Cl } A \Rightarrow x \notin \text{Cl } A \Rightarrow x \notin F$, где F – некоторое замкнутое множество, содержащее $A \Rightarrow x \in X \setminus F$ – открытое и $X \setminus F \subset X \setminus A \Rightarrow x \in \text{Int}(X \setminus A)$
- \supset Пусть $x \in \text{Int}(X \setminus A) \Rightarrow x \in G$, где G – открытое, содержащееся в $X \setminus A \Rightarrow x \notin X \setminus G$ – замкнутое и $X \setminus G \supset X \setminus (X \setminus A) = A \Rightarrow x \notin \text{Cl } A \Rightarrow x \in X \setminus \text{Cl } A$

Theorem 2.6. Свойства замыкания

1. $\text{Cl } A \supset A$
2. $\text{Cl } A$ – замкнутое множество
3. A – замкнутое $\Leftrightarrow A = \text{Cl } A$
4. $A \subset B \Rightarrow \text{Cl } A \subset \text{Cl } B$
5. $\text{Cl}(\text{Cl } A) = \text{Cl } A$
6. $\text{Cl}(A \cup B) = \text{Cl } A \cup \text{Cl } B$

Доказательство:

1. Очевидно
2. Пересечение замкнутых – замкнутое
3. A – замкнутое $\Leftrightarrow X \setminus A$ – открытое $\Leftrightarrow X \setminus A = \text{Int}(X \setminus A) \Leftrightarrow A = \text{Cl } A$
4. $A \subset B \Rightarrow X \setminus A \supset X \setminus B \Rightarrow \text{Int}(X \setminus A) \supset \text{Int}(X \setminus B) \Rightarrow X \setminus \text{Int}(X \setminus A) \subset X \setminus \text{Int}(X \setminus B) \Rightarrow \text{Cl } A \subset \text{Cl } B$

5. $2 + 3 = 5$

Exercise 2.2.

1. Доказать пункт 6
2. Придумать пример, когда $\text{Cl}(A \cap B) \neq \text{Cl} A \cap \text{Cl} B$
3. $A, \text{Int} A, \text{Cl} A, \text{Int Cl} A, \text{Cl Int} A, \text{Cl Int Cl} A \dots$
Какое наибольшее количество различных множеств может получиться?

Theorem 2.7.

$$x \in \text{Cl} A \Leftrightarrow \forall r > 0 \ B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

Доказательство:

$$x \in \text{Cl} A = X \setminus \text{Int}(X \setminus A) \Leftrightarrow x \notin \text{Int}(X \setminus A) \Leftrightarrow \forall r > 0 \ B_r(x) \not\subset X \setminus A \Leftrightarrow \forall r > 0 \ B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

Definition 2.9. Окрестность и проколота окрестность

Окрестность точки a – шарик радиуса $r > 0$ с центром в точке a

Обозначение U_a

Проколота окрестность – $\mathring{U}_a = U_a \setminus \{a\}$

Definition 2.10. Предельная точка

x – предельная точка множества A , если $\forall \mathring{U}_x$ содержится точки множества A

Локальное обозначение (примерно на 1 лекцию): A' – множество предельных точек множества A

Theorem 2.8. Свойства

1. $\text{Cl} A = A \cup A'$
2. $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$
3. A – замкнутое $\Leftrightarrow A \supset A'$
4. $(A \cup B)' = A' \cup B'$

Доказательство:

1. $x \in \text{Cl} A \Leftrightarrow \forall U_x \ U_x \cap A \neq \emptyset$
Это так, если $x \in A$ или $x \in A'$ (тут $\mathring{U}_a \cap A \neq \emptyset$)
2. очев
3. A – замкнутое $\Leftrightarrow A = \text{Cl} A \Leftrightarrow A = A \cup A' \Leftrightarrow A \supset A'$
4. $\supset A \cup B \supset A \Rightarrow (A \cup B)' \supset A'$
 \subset Возьмем $x \in (A \cup B)'$ и предположим, что $x \notin A'$. Надо доказать, что $x \in B'$
 $x \in (A \cup B)' \Rightarrow \forall r > 0 \ \mathring{B}_r(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$
 $x \notin A' \Rightarrow \exists R > 0 : \mathring{B}_R(x) \cap A = \emptyset \Rightarrow \forall r < R \ \mathring{B}_r(x) \cap A = \emptyset$
Тогда $\mathring{B}_r(x) \cap B \neq \emptyset \forall r < R \Rightarrow$ вообще любой $\mathring{B}_r(x)$ пересекается с $B \Rightarrow x \in B'$

Theorem 2.9.

Следующие условия равносильны

1. $x \in A'$
2. $\forall r > 0$ $B_r(x)$ содержит бесконечное количество точек из A
3. Существует последовательность различных точек $x_n \in A : \rho(x_n, x) \rightarrow 0$
4. Существует последовательность $x_n \in A : \rho(x_n, x)$ строго убывает и $\rightarrow 0$

Доказательство:

$4 \Rightarrow 3$ очевидно

$3 \Rightarrow 2$ Если $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$, то при больших n $\rho(x_n, x) < r$, т.е. $x_n \in B_r(x) \Rightarrow$ в $B_r(x)$ бесконечное количество точек из A

$2 \Rightarrow 1$ Если $B_r(x) \cap A$ состоит из бесконечного количества точек, то $\overset{\circ}{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset$ (множества отличаются на одну точку или совпадают)

$1 \Rightarrow 4$ Рассмотрим $r = 1$. В окрестности $\overset{\circ}{B}_r(x)$ есть точка из A , назовем ее $x_1 \neq x$

$r = \frac{1}{2} \rho(x_1, x) < \frac{1}{2}$. В окрестности $\overset{\circ}{B}_r(x)$ есть точка из A , назовем ее $x_2 \neq x$
 $\rho(x_2, x) < r < \rho(x_1, x)$

$r = \frac{1}{2} \rho(x_2, x) < \frac{1}{4}$. В окрестности $\overset{\circ}{B}_r(x)$ есть точка из A , назовем ее $x_3 \neq x$
 $\rho(x_3, x) < \rho(x_2, x)$ и так далее

$x_1, x_2 \dots \in A, \rho(x_1, x) > \rho(x_2, x) > \dots$ и $\rho(x_n, x) < \frac{1}{2^n} \Rightarrow \rho(x_n, x) \rightarrow 0$

Theorem 2.10. Очевидное следствие

Конечное множество не имеет предельных точек

Definition 2.11. Подпространство

(X, ρ) – метрическое пространство $Y \subset X$

$(Y, \rho|_{Y \times Y})$ – подпространство метрического пространства (X, ρ)

Theorem 2.11. Об открытых множества в пространстве и подпространстве

(X, ρ) – метрическое пространство, $Y \subset X$. Тогда

1. A – открыто в $(Y, \rho) \Leftrightarrow \exists G \subset X$, открытое в $(X, \rho) : A = G \cap Y$
2. A – замкнуто в $(Y, \rho) \Leftrightarrow \exists F \subset X$, замкнутое в $(X, \rho) : A = F \cap Y$

Доказательство:

1. $\Rightarrow A$ открыто в $(Y, \rho) \Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} B_{r_x}^Y(x)$, где r_x – такой радиус, что $B_{r_x}^Y(x) \subset A$

$$B_{r_x}^Y(x) = \{z \in Y : \rho(z, x) < r_x\} = B_{r_x}^X(x) \cap Y$$

$$\Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} (B_{r_x}^X(x) \cap Y) = Y \cap \bigcup_{x \in A} B_{r_x}^X(x), \text{ где } G := \bigcup_{x \in A} B_{r_x}^X(x) \text{ – открытое в } (X, \rho)$$

как объединение открытых

$$\Leftarrow A = G \cap Y, G \text{ – открытое в } X. \text{ Докажем, что } A \text{ открыто в } Y$$

$$\text{Возьмем } a \in A \subset G \Rightarrow \exists r > 0 : B_r^X(a) \subset G \Rightarrow B_r^Y(a) = B_r^X(a) \cap Y \subset G \cap Y = A$$

2. A – замкнуто в $(Y, \rho) \Leftrightarrow Y \setminus A$ – открыто в $(Y, \rho) \Leftrightarrow \exists G \subset X$ открытое в $(X, \rho) : Y \setminus A = G \cap Y \Rightarrow Y \cap (X \setminus G) = A$, где $X \setminus G$ – замкнутое $\Leftrightarrow G$ – открытое

Example 2.3.

$$X = \mathbb{R}, Y = [0, 3)$$

$[0, 1)$ – открыто в Y , т.к. $(-1, 1)$ – открыто в \mathbb{R} , а $[0, 1) = (-1, 1) \cap Y$

$[2, 3)$ – замкнуто в Y , т.к. $[2, 4]$ – замкнуто в \mathbb{R} , а $[2, 3) = [2, 4] \cap Y$

Definition 2.12. Норма

X – векторное пространство. $\|\cdot\|$ – норма на X , если

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

1. $\|x\| \forall x \in X$ и $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \forall x \in X \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \forall x, y \in X$ (неравенство треугольника)

Example 2.4.

1. $X = \mathbb{R}$; $|x|$ – норма
2. $X = \mathbb{R}^d$; $\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_d|^p)^{\frac{1}{p}}$ – норма, $p \geq 1$
Неравенство треугольника – это неравенство Минковского
3. $X = C[a, b]$; $\|f\| := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$
4. $X = C[a, b]$; $\|f\| := \int_a^b |f|$

Definition 2.13. Скалярное произведение

X – векторное пространство, $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ – скалярное произведение, если

1. $\langle x, x \rangle \geq 0 \forall x \in X$ и $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \forall x, y \in X$
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \forall x, y \in X \forall \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \forall x, y, z \in X$

Example 2.5.

1. $X = \mathbb{R}^d$; $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_d y_d$
 $x = (x_1 \dots x_d)$; $y = (y_1 \dots y_d)$
2. $X = \mathbb{R}^d$; $w_1, w_2 \dots w_d > 0$
 $\langle x, y \rangle = w_1 x_1 y_1 + w_2 x_2 y_2 + \dots + w_d x_d y_d$
3. $X = C[a, b]$; $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$

Theorem 2.12. Свойства

1. Неравенство Коши-Буняковского
 $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$
2. $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ – норма
3. $\|\cdot\|$ – норма в $X \Rightarrow \rho(x, y) := \|x - y\|$ – метрика в X
4. $\|x - y\| \geq |||x| - |y|||$

Доказательство:

1. $f(t) := \langle x + ty, x + ty \rangle \geq 0$
 $f(t) = \langle x, x + ty \rangle + t \langle y, x + ty \rangle = \langle x, x \rangle + t \langle x, y \rangle + t \langle y, x \rangle + t^2 \langle y, y \rangle = t^2 \langle y, y \rangle + 2t \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle$
 – квадратный трехчлен
 $\Rightarrow f$ имеет не больше одного корня $\Rightarrow D \leq 0 \Leftrightarrow (2 \langle x, y \rangle)^2 - 4 \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0$
 Сократили на 4 и победили
2. $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\alpha| \|x\|$
 Неравенство треугольника: $\|x + y\| \stackrel{?}{\leq} \|x\| + \|y\|$, т.е. $\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$
 Т.е. $\langle x + y, x + y \rangle \leq \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle}$
 Но $\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$. После сокращения осталось КБШ
3. $\|x - y\| \geq 0$ и $\|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = \vec{0} \Leftrightarrow x = y$
 $\rho(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1| \cdot \|x - y\| = \rho(x, y)$
 Неравенство треугольника: $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$
 $\|x - y\| + \|y - z\| \geq \|x - y + y - z\| = \|x - z\|$
4. Нужно доказать, что $-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$
 - Правое:
 $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$, т.е. $\|x - y\| + \|y\| \geq \|x - y + y\| = \|x\|$
 - Левое:
 $\|x\| - \|y\| \geq -\|x - y\|$, т.е. $\|x - y\| + \|x\| = \|y - x\| + \|x\| \geq \|y - x + x\| = \|y\|$

Exercise 2.3.

Доказать, что норма $\|\cdot\|$ в векторном пространстве X порождается некоторым скалярным произведением $\Leftrightarrow \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

2.2 §2. Предел в метрическом пространстве

Definition 2.14.

(X, ρ) – метрическое пространство, $x_n \in X$; $a \in X$. $\lim x_n = a$, если

1. Вне любого шара с центром в точке a содержится лишь конечное число членов последовательности
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \rho(x_n, a) < \varepsilon$
3. $\lim \rho(x_n, a) = 0$

Theorem 2.13.

Эти определения равносильны

Definition 2.15. Ограниченное множество

$A \subset X$, A – ограниченное множество, если оно содержится в каком-то шаре

Notation 2.1. Свойства пределов

1. Предел единственный
Т.е. если $\lim x_n = a$ и $\lim x_n = b$, то $a = b$
2. Если $\lim x_n \lim y_n = a$, то предел последовательности, полученной перемешиванием x_n и y_n также равен a
3. Если $\lim x_n = a$, то последовательность полученная из x_n перестановкой членов, также стремится к a
4. Если $\lim x_n = a$, то предел ее подпоследовательность также равен a
5. Если последовательность имеет предел, то она ограничена как множество
6. Если $\lim x_n = a$; $\lim y_n = b \Rightarrow \lim \rho(x_n, y_n) = \rho(a, b)$

Доказательство:

1. Пусть $a \neq b$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}\rho(a, b) > 0$
 $\exists N_1 : \forall n > N_1 \rho(x_n, a) < \varepsilon$ и $\exists N_2 : \forall n > N_2 \rho(x_n, b) < \varepsilon$
Возьмем $n > \max(N_1, N_2) \Rightarrow \rho(a, b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) < 2\varepsilon = \rho(a, b)$
2. Очевидно
3. Еще более очевидно
4. Ссылка на 1 семестр
5. Пусть $\lim x_n = a$. Вне $B_1(a)$ конечное число членов последовательности $(x_{i_1} \dots x_{i_k})$.
 $R := \max\{1, \rho(a, x_{i_1}) \dots \rho(a, x_{i_k})\} \Rightarrow x_n \in \overline{B}_R(a) \forall n$
6. $\rho(a, b) \leq \rho(x_n, a) + \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, b)$
 $\rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, a) + \rho(a, b) + \rho(y_n, b)$
Тогда $|\rho(a, b) - \rho(x_n, y_n)| \leq \rho(x_n, a) + \rho(y_n, b) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Theorem 2.14. Теорема об арифметических действиях с пределами в нормированном пространстве

X – нормированное пространство, $\lim x_n = a$; $\lim y_n = b$; $a, b, x_n, y_n \in X$;
 $\lim \lambda_n = \mu$; $\lambda_n, \mu \in \mathbb{R}$

Тогда

1. $\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$
2. $\lim(\lambda_n x_n) = \mu a$
3. $\lim \|x_n\| = \|a\|$
4. Если в X есть скалярное произведение, то $\lim \langle x_n, y_n \rangle = \langle a, b \rangle$

Доказательство:

1. $\|(x_n + y_n) - (a + b)\| \leq \|x_n - a\| + \|y_n - b\| \rightarrow 0$
2. $\|\lambda_n x_n - \mu a\| \leq \|\lambda_n x_n - \mu x_n + \mu x_n - \mu a\| \leq \|\lambda_n x_n - \mu x_n\| + \|\mu x_n - \mu a\| =$
 $= |\lambda_n - \mu| \cdot \|x_n\| + |\mu| \cdot \|x_n - a\| \rightarrow 0$
3. $\|x_n\| = \rho(x_n, 0) \rightarrow \rho(a, 0) = \|a\|$
4. $\langle x_n, y_n \rangle - \langle a, b \rangle = \langle x_n, y_n \rangle - \langle a, y_n \rangle + \langle a, y_n \rangle - \langle a, b \rangle = \langle x_n - a, y_n \rangle + \langle a, y_n - b \rangle$
 $|\langle x_n, y_n \rangle - \langle a, b \rangle| \leq |\langle x_n - a, y_n \rangle| + |\langle a, y_n - b \rangle| \leq \|x_n - a\| \cdot \|y_n\| + \|a\| \cdot \|y_n - b\| \rightarrow 0$

Definition 2.16. Покоординатная сходимость в \mathbb{R}^d

$x_n = (x_n^{(1)} \dots x_n^{(d)})$; $a = (a^{(1)} \dots a^{(d)})$

x_n покоординатно сходится к a , если $\lim x_n^{(k)} = a^{(k)} \forall k = 1 \dots d$

Theorem 2.15.

В \mathbb{R}^d покоординатная сходимость и сходимость по норме совпадают

Доказательство:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|x_n - a\| &= \sqrt{(x_n^{(1)} - a^{(1)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - a^{(d)})^2} \leq |x_n^{(1)} - a^{(1)}| + \dots + |x_n^{(d)} - a^{(d)}| \rightarrow 0 \\ \Leftarrow |x_n^{(k)} - a^{(k)}| &\leq \sqrt{(x_n^{(1)} - a^{(1)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - a^{(d)})^2} = \|x_n - a\| \rightarrow 0 \\ \Rightarrow \lim x_n^{(k)} &= a^{(k)} \end{aligned}$$

Definition 2.17. Фундаментальная последовательность

$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n \geq N \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

Theorem 2.16. Свойства

1. Сходящаяся последовательность – фундаментальная
2. Фундаментальная последовательность ограничена
3. Если у фундаментальной последовательности есть подпоследовательность, сходящаяся к a , то сама последовательность тоже сходится к a

Доказательство:

1. $\lim x_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \rho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\forall m \geq N \rho(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2}$
 $\Rightarrow \rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, a) + \rho(a, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
2. Возьмем $\varepsilon = 1. \exists N : \forall m, n \geq N \rho(x_n, x_m) < 1 \Rightarrow x_n \in B_1(x_N)$ при $n \geq N$
 $R := \max\{1, \rho(x_1, x_N) \dots \rho(x_{N-1}, x_N)\} \Rightarrow x_n \in \bar{B}_R(x_N) \forall n$
3. Пусть $x_{n_k} \rightarrow a$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$
 $\exists N : \forall m, n \geq N \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$
 $\exists K : \forall k \geq K \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$
 Возьмем $k = \max\{K, N\}$. Тогда $n_k \geq N \Rightarrow \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$ и $\rho(x_{n_k}, x_n) < \varepsilon \forall n$
 $\Rightarrow \rho(x_n, a) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < 2\varepsilon$ при $n \geq N$

Definition 2.18. Полное метрическое пространство

(X, ρ) – метрическое пространство

Оно называется полным, если любая фундаментальная последовательность имеет предел

Example 2.6.

$R. \rho(x, y) = |x - y|$ – полное метрическое пространство

\mathbb{Q} не полное. $x_n = \frac{[10^n \pi]}{10^n}$ фундаментальна, но не имеет предела в \mathbb{Q}

Theorem 2.17.

\mathbb{R}^d – полное пространство

Доказательство:

Пусть $x_n = (x_n^{(1)} \dots x_n^{(d)})$ – фундаментальная последовательность

Т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n \geq N \|x_n - x_m\| < \varepsilon$

$$\|x_n - x_m\| = \sqrt{(x_n^{(1)} - x_m^{(1)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - x_m^{(d)})^2} \geq |x_n^{(k)} - x_m^{(k)}|$$

Следовательно, числовая последовательность $x_n^{(k)}$ фундаментальная \Rightarrow у нее есть предел $a^{(k)} := \lim x_n^{(k)} \Rightarrow x_n$ покомпонентно сходится к $a = (a^{(1)} \dots a^{(d)}) \Rightarrow$ сходится по норме

Remark 2.3.

(X, ρ) – полное метрическое пространство. $Y \subset X$
 (Y, ρ) – полное $\Leftrightarrow Y$ замкнуто

Доказательство:

$\Leftarrow y_n$ – фундаментальная последовательность в $Y \Rightarrow y_n$ фундаментальная в X
 $\Rightarrow y_n$ имеет предел в X , т.е. $b := \lim y_n$ и $b \in X$
 $\Rightarrow b$ предельная точка $Y \Rightarrow b \in Y$, т.к. Y замкнуто
 \Rightarrow Возьмем предельную точку b множества $Y \Rightarrow$ найдется $y_n \in Y : \lim y_n = b \Rightarrow y_n$ фундаментальна в $X \Rightarrow y_n$ фундаментальна в $Y \Rightarrow$ у нее есть предел в Y
т.е. $\lim y_n = a \in Y \Rightarrow a = b$ по единственности предела

2.3 §3. Компактность

Definition 2.19. Покрытие

$A, B_\alpha. B_\alpha, \alpha \in I$ – покрытие множества A , если $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$

Definition 2.20. Открытое покрытие

Открытое покрытие – покрытие открытыми множествами

Definition 2.21. Подпокрытие

Подпокрытие какого-то покрытия – из какого-то покрытия выкинули какое-то количество множеств и оно осталось покрытием

Definition 2.22. Компакт

K – компакт (компактное множество), если из любого покрытия K открытыми множествами можно извлечь конечное подпокрытие

Theorem 2.18. Теорема о свойствах компактов

(X, ρ) – метрическое пространство
1. $K \subset Y \subset X$. Тогда K – компакт в $(X, \rho) \Leftrightarrow K$ – компакт в (Y, ρ)
2. K – компакт $\Rightarrow K$ – замкнуто и ограничено
3. Замкнутое подмножество компакта – компакт

Доказательство:

1. $\Rightarrow K \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, где U_α – открыты в (Y, ρ)

Тогда $\exists G_\alpha$ открытые в $(X, \rho) : U_\alpha = G_\alpha \cap Y \Rightarrow K \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ – открытое покрытие в $(X, \rho) \Rightarrow$ можно выбрать конечное подпокрытие

$K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i} \Rightarrow K = K \cap Y \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i} \cap Y = \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \Rightarrow K$ – компакт в (Y, ρ)

$\Leftarrow K \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$, где G_α – открыты в $(X, \rho) \Rightarrow U_\alpha := G_\alpha \cap Y$ – открыты в (Y, ρ) и

$K \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \Rightarrow$ можно выбрать конечное подпокрытие $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i} \Rightarrow K$ – компакт в (X, ρ)

2.

Ограниченность. Возьмем $a \in K$ и рассмотрим покрытие $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a)$ – открытое покрытие

Выберем конечное подпокрытие $\Rightarrow K \subset \bigcup_{n=1}^N B_n(a) = B_N(a) \Rightarrow K$ – ограничено

Замкнутость. Надо доказать, что $X \setminus K$ открыто. Возьмем $a \in X \setminus K$ и покажем, что для некоторого $r > 0$ $B_r(a) \subset X \setminus K$

Возьмем такое $r_x > 0$, что $B_{r_x}(x) \cap B_{r_x}(a) = \emptyset$

$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{r_x}(x)$ – открытое покрытие. Выберем конечное подпокрытие $K \subset \bigcup_{i=1}^n B_{r_{x_i}}(x_i)$

$r := \min\{r_{x_1}, r_{x_2}, \dots, r_{x_n}\} > 0$

Покажем что $B_r(a) \subset X \setminus K$, т.е. что $B_r(a) \cap K = \emptyset$

$B_{r_{x_i}}(a) \cap B_{r_{x_i}}(x_i) = \emptyset \Rightarrow B_r(a) \cap B_{r_{x_i}}(x_i) = \emptyset \Rightarrow B_r(a) \cap \bigcup_{i=1}^n B_{r_{x_i}}(x_i) = \emptyset$

- K – компакт, $K \supset \tilde{K}$ – замкнуто. Покажем, что \tilde{K} – компакт. Рассмотрим открытое покрытие $\tilde{K} \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, где U_α – открыты в (X, ρ)

$X \setminus \tilde{K}$ – открыто $\Rightarrow K \subset (X \setminus \tilde{K}) \cup \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ – открытое покрытие K – компакт \Rightarrow можно выбрать конечное подпокрытие

$\tilde{K} \subset K \subset (X \setminus \tilde{K}) \cup \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \Rightarrow \tilde{K} \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \Rightarrow \tilde{K}$ – компакт

Theorem 2.19.

K_α – семейство компактов в (X, ρ) : пересечение любого их конечно количество непусто.

Тогда $\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha \neq \emptyset$

Доказательство:

Зафиксируем компакт K_{α_0} . Предположим, что $\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha = \emptyset$

$K_{\alpha_0} \cap \bigcap_{\alpha \neq \alpha_0} K_\alpha = \emptyset$, т.е. $K_{\alpha_0} \subset X \setminus \bigcap_{\alpha \neq \alpha_0} K_\alpha = \bigcup_{\alpha \neq \alpha_0} (X \setminus K_\alpha)$

Это открытое покрытие K_{α_0} . Выберем конечное подпокрытие

$K_{\alpha_0} \subset \bigcup_{i=1}^n (X \setminus K_{\alpha_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^n K_{\alpha_i} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n K_{\alpha_i} = \emptyset$ – противоречие

Theorem 2.20. Следствие

$K_1 \supset K_2 \supset \dots$ – непустые компакты

Тогда $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$

Definition 2.23. Секвенциально компактное множество

(X, ρ) – метрическое пространство $K \subset X$

K – секвенциально компактное, если из любой последовательности точек множества K можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к какой-то точке из K

Remark 2.4.

Секвенциальный компакт замкнут

Theorem 2.21.

Всякое бесконечное подмножество компакта имеет предельную точку

Доказательство:

K – компакт, $A \subset K$ – бесконечное подмножество

Предположим, что $A' = \emptyset \Rightarrow A$ – замкнуто $\subset K \Rightarrow A$ – компакт

Возьмем $a \in A$, она не предельная $\Rightarrow \exists r_a > 0 : \overset{\circ}{B}_{r_a}(a) \cap A = \emptyset \Rightarrow B_{r_a}(a) \cap A = \{a\}$

Рассмотрим открытое покрытие $A \subset \bigcup_{a \in A} B_{r_a}(a)$. Из этого покрытия нельзя выкинуть ни одно из множеств \Rightarrow нельзя выбрать конечное подпокрытие. Противоречие

Theorem 2.22. Следствие

Компактность \Rightarrow секвенциальная компактность

Доказательство:

K – компакт, $\{x_n\}$ – последовательность точек из K

$D := \{x_1, x_2, x_3 \dots\}$

Если $\#D < +\infty$, то какой-то член последовательности повторяется бесконечное число раз. Возьмем его в качестве подпоследовательности

Если $\#D = +\infty$, то по теореме у D есть предельная точка \Rightarrow найдутся различные $y_n \in D : \lim y_n = a$ – предельная точка

Переставим члены последовательности y_n и получим подпоследовательность. $a \in K$, т.к. K – замкнуто

Theorem 2.23.

K – компакт (секвенциальный компакт) в $(X, \rho) \Rightarrow (K, \rho)$ – полное

Доказательство:

$x_n \in K$ фундаментальная последовательность. K – секвенциальный компакт \Rightarrow в ней можно выбрать сходящуюся подпоследовательность \Rightarrow у x_n есть предел

Definition 2.24. Эпсилон-сеть

$A \in X$, (X, ρ) – метрическое пространство, $\varepsilon > 0$
 $E \subset A$ – ε -сеть, если $\forall a \in A \exists e \in E : \rho(a, e) < \varepsilon$

Remark 2.5.

Здесь написано, что $A \subset \bigcup_{e \in E} B_\varepsilon(e)$

Definition 2.25. Конечная эпсилон-сеть

E – конечное множество и ε -сеть $\Rightarrow E$ – конечная ε -сеть для A

Definition 2.26. Вполне ограниченное множество

A – вполне ограниченное, если $\forall \varepsilon > 0$ в множестве A есть конечная ε -сеть

Theorem 2.24. Свойства

1. Вполне ограниченность \Rightarrow ограниченность
2. В \mathbb{R}^d верно и обратное

Доказательство:

1. $\varepsilon = 1$. Возьмем конечную ε -сеть $x_1 \dots x_n$. $R := 1 + \max_{k \neq 1}(\rho(x_1, x_k))$

$$\overline{B}_R(x_1) \supset A$$

Берем $y \in A \Rightarrow \exists x_i : \rho(x_i, y) \leq 1 \Rightarrow \rho(x_1, y) \leq \rho(x_1, x_i) + \rho(x_i, y) \leq R$

2. A – ограниченное в $\mathbb{R}^d \Rightarrow A \subset B_R(0) \subset [-R; R]^d$

Нарежем каждую сторону на n частей. Получим n^d кубиков, сторона которых $\frac{2R}{n}$. Если наше множество A пересекается с каким-то кубиком, то выбираем в нем произвольную точку, в остальных не берем вообще ничего

Получили $\frac{2R}{n} \sqrt{d}$ -сеть

Theorem 2.25.

Секвенциальная компактность \Rightarrow вполне ограниченность

Доказательство:

От противного. Пусть для $\varepsilon > 0$ в множестве A не нашлось конечной ε -сети. Возьмем $x_1 \in A \Rightarrow x_1$ – не ε -сеть \Rightarrow найдется $x_2 \in A : \rho(x_1, x_2) > \varepsilon \Rightarrow x_1, x_2$ – не ε -сеть \Rightarrow найдется $x_3 \in A : \rho(x_1, x_3) > \varepsilon$ и $\rho(x_2, x_3) > \varepsilon$ и так далее

На n шаге: $x_1 \dots x_n$ – не ε -сеть \Rightarrow найдется $x_{n+1} \in A : \rho(x_k, x_{n+1}) > \varepsilon \forall k \leq n$

Построили последовательность x_n . Выберем сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \Rightarrow$ она фундаментальна. Но это не так, $\rho(x_{n_i}, x_{n_j}) > \varepsilon$

Theorem 2.26. Теорема Хаусдорфа

Если K вполне ограничено и (K, ρ) – полное $\Rightarrow K$ – компакт

Доказательство:

$K \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, U_α – открытые. Пусть нельзя выделить конечное подпокрытие

$\varepsilon = 1$. Существует конечная 1-сеть $S_1 \Rightarrow K \subset \bigcup_{x \in S_1} \overline{B}_1(x)$

Для какого-то из множеств $K \cap \overline{B}_1(x)$, $x \in S_1$ нельзя выделить конечное подпокрытие. Возьмем одно такое и назовем его A_1

Существует конечная $\frac{1}{2}$ -сеть $S_2 \Rightarrow A_1 \subset K \subset \bigcup_{x \in S_2} \overline{B}_{\frac{1}{2}}(x)$

Для какого-то из множеств $A_1 \cap \overline{B}_{\frac{1}{2}}(x)$, $x \in S_2$ нельзя выделить конечное подпокрытие. Возьмем одно такое и назовем его A_2 и так далее

На n шаге: существует конечная $\frac{1}{n}$ -сеть $S_n \Rightarrow A_{n-1} \subset K \subset \bigcup_{x \in S_n} \overline{B}_{\frac{1}{n}}(x)$

Для какого-то из множеств $A_{n-1} \cap \overline{B}_{\frac{1}{n}}(x)$, $x \in S_n$ нельзя выделить конечное подпокрытие. Возьмем одно такое и назовем его A_n

$K \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$; $A_n = A_{n-1} \cap \overline{B}_{\frac{1}{n}}(x_n)$

Проверим, что x_1, x_2, \dots фундаментальная. Возьмем $k > n \Rightarrow$ найдется $y \in A_k \Rightarrow y \in \overline{B}_{\frac{1}{k}}(x_k)$

и $y \in \overline{B}_{\frac{1}{n}}(x_n) \Rightarrow \rho(x_k, x_n) \leq \rho(x_k, y) + \rho(y, x_n) < \frac{1}{k} + \frac{1}{n} < \frac{2}{n}$ – фундаментальная, значит $\exists \lim x_n = x_* \in K \Rightarrow$ найдется $U_{\alpha_0} \ni x_* \Rightarrow \exists r > 0$ $x_* \in B_r(x_*) \subset U_{\alpha_0}$

$\lim x_n = x_* \Rightarrow \exists N : \forall n > N$ $\rho(x_n, x_*) < \frac{r}{2}$. А еще $A_n \subset \overline{B}_{\frac{1}{n}}(x_n) \subset \overline{B}_{\frac{1}{n} + \frac{r}{2}}(x_*) \subset \overline{B}_r(x_*)$ при $n > \frac{2}{r}$

Theorem 2.27. Следующие условия равносильны

1. K – компакт
2. K – секвенциальный компакт
3. K – вполне ограниченное и (K, ρ) – полное

Theorem 2.28.

(X, ρ) – полное метрическое пространство. Следующие условия равносильны

1. K – компакт
2. K – секвенциальный компакт
3. K – замкнуто и вполне ограничено

Доказательство:

Если (X, ρ) – полное, то K – замкнуто $\Leftrightarrow (K, \rho)$ – полное, тогда третьи строчки из двух предыдущих теорем – одно и то же

Theorem 2.29. Характеристика компакта в \mathbb{R}^d

$K \in \mathbb{R}^d$, следующие условия равносильны

1. K – компакт
2. K – секвенциальный компакт
3. K – замкнуто и ограничено

Лемма 2.1. Лемма Лебега

K – компакт, $K \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ – открытое

Тогда $\exists r > 0 : \forall x \in K$ шар $B_r(x)$ целиком покрывается каким-то U_α

Доказательство:

$\forall x \in K$ x покрыта каким-то U_{α_0} – открытое $\Rightarrow \exists r_x > 0 : B_{r_x}(x) \subset U_{\alpha_0}$

Рассмотрим покрытие $K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\frac{r_x}{2}}(x)$. Выделим конечное подпокрытие $K \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\frac{r_{x_i}}{2}}(x_i)$

$r := \min\{\frac{r_1}{2}, \frac{r_2}{2} \dots \frac{r_n}{2}\}$ подходит. Возьмем $y \in K$. Хотим доказать, что $B_r(y) \subset B_{r_{x_i}}(x_i)$ для некоторой i

Возьмем $z \in B_r(y)$, $\rho(y, z) < r \leq \frac{r_{x_i}}{2}$, $y \in K \Rightarrow y \in B_{\frac{r_{x_i}}{2}}(x_i)$ для некоторого $i \Rightarrow \rho(y, x_i) < \frac{r_{x_i}}{2}$

$\rho(z, x_i) \leq \rho(z, y) + \rho(y, x_i) < r_{x_i}$

2.4 §4. Непрерывные отображения

Definition 2.27. Непрерывность функции в точке

(X, ρ) и (Y, ρ) – метрические пространства. $E \subset X$; $f : E \rightarrow Y$; $a \in E$

f – непрерывна в a , если

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B_\delta(a) \cap E) \subset B_\varepsilon(f(a))$
3. Для любой последовательности $x_n \in E : \lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = f(a)$

Theorem 2.30.

Эти определения равносильны

Exercise 2.4.

Докажите

Definition 2.28. Предел функции в точке

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, если

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E, x \neq a \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon$
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(\overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E) \subset B_\varepsilon(b)$
3. Для любой последовательности $x_n \in E, x_n \neq a : \lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = b$

Theorem 2.31. Критерий Коши

a – предельная точка E . Существование предела $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :$

$$\begin{cases} \forall \rho(x, a) < \delta \\ \forall \rho(y, a) < \delta \\ x, y \neq a \end{cases} \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Доказательство:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Rightarrow \exists \delta > 0 : \begin{cases} \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), b) < \frac{\varepsilon}{2} \\ \rho_X(y, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(y), b) < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

\Leftarrow Проверим определение по Гейне. Берем $x_n \rightarrow a$

$$\exists N : \forall n \geq N \rho_X(x_n, a) < \delta \Rightarrow \forall m, n \geq N \begin{cases} \rho_X(x_n, a) < \delta \\ \rho_X(x_m, a) < \delta \end{cases} \Rightarrow \rho_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$$

Т.е. $f(x_n)$ – фундаментальная последовательность \Rightarrow у нее есть предел

Theorem 2.32. Арифметические действия с пределами

$f, g : E \rightarrow Y$ – нормированное пространство, a – предельная точка E

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B, \lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) = \mu$. Тогда:

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
2. $\lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) f(x) = \mu A$
3. $\lim_{x \rightarrow a} \|f(x)\| = \|A\|$
4. Если в Y есть скалярное произведение, то $\lim_{x \rightarrow a} \langle f(x), g(x) \rangle = \langle A, B \rangle$
5. Если $Y = \mathbb{R}$ и $B \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

Доказательство:

Смотрим на определение по Гейне

Theorem 2.33. Теорема о непрерывности композиции

$D \subset X; f : D \rightarrow Y; f(D) \subset E; g : E \rightarrow Z; a \in D$

f – непрерывна в точке a , g – непрерывна в точке $f(a)$. Тогда $g \circ f$ непрерывна в a

Доказательство:

Гейне. Берем $x_n \in E : x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a) \Rightarrow g(f(x_n)) \rightarrow g(f(a))$

Theorem 2.34. Характеристика непрерывных в терминах открытых множеств

$f : X \rightarrow Y$. Тогда следующие условия равносильны

1. f – непрерывна в точке a
2. Для любого $U \subset Y$ открытого $f^{-1}(U) := \{x \in X : f(x) \in U\}$ – открыто

Доказательство:

- 1 \Rightarrow 2 Возьмем U – открытое. Проверим, что $f^{-1}(U)$ – открыто
 Возьмем $a \in f^{-1}(U) \Rightarrow f(a) \in U$ – открытом $\Rightarrow \varepsilon > 0 B_\varepsilon(f(a)) \subset U$
 f – непрерывна в точке a . Возьмем $\delta > 0$ из определения непрерывности f в точке a
 $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \subset U \Rightarrow B_\delta(a) \subset f^{-1}(U) \Rightarrow a$ – внутренняя точка $f^{-1}(U) \Rightarrow$
 $\Rightarrow f^{-1}(U)$ – открыто
- 2 \Rightarrow 1 Возьмем $a \in X$ и докажем, что f – непрерывна в точке a
 Возьмем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $U = B_\varepsilon(f(a))$ – открытое $\Rightarrow a \in f^{-1}(U)$ – открытое \Rightarrow
 $\Rightarrow \exists \delta > 0 : B_\delta(a) \subset f^{-1}(U) \Rightarrow f(B_\delta(a)) \subset U = B_\varepsilon(f(a))$

Theorem 2.35.

Непрерывный образ компакта – компакт

Доказательство:

$f : K \rightarrow Y$; K – компакт. f непрерывна во всех точках $\Rightarrow f(K)$ – компакт

Рассмотрим покрытие $f(K) \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ – открытое $\Rightarrow K \subset f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(U_\alpha)$ – открытое

Выделим конечное подпокрытие $K \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_{\alpha_i}) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}) \Rightarrow f(K) \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$

Definition 2.29. Ограниченная функция

$f : E \rightarrow Y$ – ограничена если $f(E)$ – ограниченное множество

Theorem 2.36. Следствия

1. $f : K \rightarrow Y$; K – компакт, f – непрерывна $\Rightarrow f$ – ограничена
2. $f : K \rightarrow \mathbb{R}$; K – компакт, f – непрерывна $\Rightarrow f$ – ограничена и достигает своего минимума и максимума

Доказательство:

1. $f(K)$ – компакт $\Rightarrow f(K)$ – ограничено
2. $f(K)$ – ограниченное множество. $b := \sup f(K) \in \mathbb{R}$
 $\forall n \ b - \frac{1}{n}$ – не верхняя граница $\Rightarrow \exists x_n \in K : b > f(x_n) > b - \frac{1}{n} \Rightarrow \lim f(x_n) = b \Rightarrow f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_n) = b$

Theorem 2.37.

$f : X \rightarrow Y$; (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) – метрические пространства
 f – непрерывная биекция и X – компакт $\Rightarrow f^{-1} : Y \rightarrow X$ – непрерывна

Доказательство:

$g := f^{-1}$. Надо доказать для g , что прообраз открытого – открытое

Берем U – открытое $\subset X$. $g^{-1}(U) = f(U)$

$X \setminus U$ – замкнутое подмножество компакта $X \Rightarrow X \setminus U$ – компакт $\Rightarrow f(X \setminus U)$ – компакт $\Rightarrow f(X \setminus U)$ – замкнутое $\Rightarrow Y \setminus f(X \setminus U)$ – открытое, а это $f(U)$

Definition 2.30. Равномерная непрерывность отображений

$f : E \rightarrow Y$; $E \subset X$; (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) – метрические пространства
 f равномерно непрерывная, если
 $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in E \ \rho_X(x, y) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Theorem 2.38. Теорема Кантора

$f : K \rightarrow Y$ – непрерывна, K – компакт $\Rightarrow f$ равномерно непрерывна

Доказательство:

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Возьмем $x \in K$, f непрерывна в точке $x \Rightarrow \exists r_x : f(B_{r_x}(x)) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x))$

$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{r_x}(x)$ – покрытие K открытыми множествами

Берем $\delta > 0$ из леммы Лебега. Любой шарик $B_\delta(a)$ целиком содержится в каком-то элементе покрытия

Покажем, что это δ подходит. Пусть $x, y \in K : \rho_X(x, y) < \delta \Rightarrow x \in B_\delta(y) \subset B_{r_a}(a)$ (какой-то элемент покрытия) $\Rightarrow f(x), f(y) \in f(B_\delta(y)) \subset f(B_{r_a}(a)) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(a))$

$\rho_Y(f(x), f(y)) \leq \rho_Y(f(x), f(a)) + \rho_Y(f(a), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Exercise 2.5.

Модифицировать старое доказательство теоремы Кантора на случай отображений

Definition 2.31.

X – векторное пространство и $\|\cdot\|$ и $|||\cdot|||$ – нормы в X

Эти нормы эквивалентны, если $\exists c_1$ и $c_2 > 0 : c_1\|x\| \leq |||x||| \leq c_2\|x\| \forall x \in X$

Remark 2.6.

1. Это отношение эквивалентности
2. Если $\|\cdot\|$ и $|||\cdot|||$ эквивалентны, то $x_n \rightarrow a$ в смысле $\|\cdot\|$ и в смысле $|||\cdot|||$ одно и то же
3. Предельные точки в смысле $\|\cdot\|$ и $|||\cdot|||$ совпадают
4. Замкнутые и открытые множества в смысле $\|\cdot\|$ и $|||\cdot|||$ совпадают
5. Непрерывность в смысле $\|\cdot\|$ и $|||\cdot|||$ совпадает

Theorem 2.39.

В \mathbb{R}^d все нормы эквивалентны

Доказательство:

Достаточно доказать, что любая норма эквивалентна $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$

$p : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ – норма

$p(x) = p(\sum_{k=1}^d x_k e_k)$ (e_k – стандартный базис)

$p(\sum_{k=1}^d x_k e_k) \leq \sum_{k=1}^d p(x_k e_k) = \sum_{k=1}^d |x_k| p(e_k) \leq (\sum_{k=1}^d |x_k|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^d p(e_k)^2)^{\frac{1}{2}}$. Первое это $\|x\|$, второе – какая-то константа c_2

$|p(x) - p(y)| \leq p(x - y) \leq c_2 \|x - y\| \Rightarrow p$ – непрерывна

$S := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$ – компакт

По теореме Вейерштрасса $\exists a \in S : 0 < p(a) \leq p(x) \forall x \in S$. Зададим $c_1 := p(a)$

$p(x) = p(\frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|) = \|x\| \cdot p(\frac{x}{\|x\|})$. Аргумент $\frac{x}{\|x\|} \in S \Rightarrow \|x\| \cdot p(\frac{x}{\|x\|}) \geq \|x\| \cdot p(a)$

2.5 §5. Длина кривой

Definition 2.32. Путь

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ (или даже в X – метрическое пространство) – непрерывная
Тогда γ – путь
Начало пути $\gamma(a)$, конец пути $\gamma(b)$

Definition 2.33. Замкнутые путь

Путь замкнутый, если $\gamma(a) = \gamma(b)$

Definition 2.34. Простой (несамопересекающийся путь)

Путь простое, если $\gamma(x) \neq \gamma(y)$ если $\forall x \neq y$ за исключением $\gamma(a) = \gamma(b)$

Definition 2.35. Носители пути

Носитель пути – $\gamma([a, b])$

Definition 2.36. Линейно связное множество

$A \subset X$ – линейно связное, если
 $\forall p, q \in A$ существует путь в A с началом в p и концом в q

Theorem 2.40. Теорема Больцано-Коши

A – линейно связное, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная
 $p, q \in A$. Тогда f принимает все значения между $f(p)$ и $f(q)$

Доказательство:

A – линейно связное $\Rightarrow \exists \gamma : [a, b] \rightarrow A : \gamma(a) = p, \gamma(b) = q$
 $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и $f(p) = f \circ \gamma(a)$; $f(q) = f \circ \gamma(b)$

Definition 2.37. Противоположный путь

$\gamma : [a, b] \rightarrow X$
 $\gamma^{-1} : [a, b] \rightarrow X$ и $\gamma^{-1}(t) := \gamma(a + b - t)$
Начало γ^{-1} – конец γ
Конец γ^{-1} – начало γ

Definition 2.38. Эквивалентные пути

$\gamma : [a, b] \rightarrow X$ и $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow X$
Найдется $\tau : [c, d] \rightarrow [a, b]$ – строго возрастающая биекция (и непрерывна), такое что
 $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$

Definition 2.39. Кривая

Кривая – класс эквивалентности путей

Параметризация кривой – выбор конкретного представителя класса эквивалентности

Definition 2.40. Гладкий путь

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ – гладкий путь, если $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_d \end{pmatrix}$ и $\gamma_1 \dots \gamma_d$ – непрерывные дифференцируемые

Definition 2.41. Гладкая кривая

Кривая гладкая, если у нее есть гладкая параметризация

Remark 2.7.

Начало, конец кривой определяет и носитель тоже

Definition 2.42. Длина пути

$\gamma : [a, b] \rightarrow X$

Берем дробление $[a, b] : t_0 = a, t_1, t_2 \dots t_n = b$

$$l(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \rho(\gamma(t_k), \gamma(t_{k-1})) \right\}$$

Theorem 2.41. Свойства

1. $l(\gamma) \geq \rho(\gamma(a), \gamma(b))$
2. Длина пути \geq длины вписанной в него ломаной
3. Длины эквивалентных путей равны
4. $l(\gamma) = l(\gamma^{-1})$

Definition 2.43. Длина кривой

Длина кривой – длина любого из путей ее класса эквивалентности

Theorem 2.42. Единственность длины пути

$\gamma : [a, b] \rightarrow X$. Тогда $l(\gamma) = l(\gamma|_{[a,c]}) + l(\gamma|_{[c,b]})$

Доказательство:

$$\llcorner \geq \gg l(\gamma) \geq \sum_{j=1}^m \rho(\gamma(t_j), \gamma(t_{j-1})) + \sum_{k=1}^n \rho(\gamma(u_k), \gamma(u_{k-1}))$$

Зафиксируем t -шки и перейдем к \sup по u -шкам

$$l(\gamma) \geq \sum_{j=1}^m \rho(\gamma(t_j), \gamma(t_{j-1})) + \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \rho(\gamma(u_k), \gamma(u_{k-1})) \right\}. \text{ Зададим супремум как } l(\gamma|_{[c,b]})$$

$$l(\gamma) \geq \sup \left\{ \sum \rho(\gamma(t_j), \gamma(t_{j-1})) \right\} + l(\gamma|_{[c,b]}). \text{ Зададим супремум как } l(\gamma|_{[a,c]})$$

$$\begin{aligned} \ll \leq \gg \quad \sum_{k=1}^n \rho(\gamma(t_k), \gamma(t_{k-1})) &\leq \sum_{k=1}^m \rho(\gamma(t_k), \gamma(t_{k-1})) + \rho(\gamma(t_m), \gamma(c)) + \rho(\gamma(c), \gamma(t_{m+1})) + \sum_{k=m+1}^n \rho(\gamma(t_k), \gamma(t_{k-1})) \\ \text{Первые два слагаемых} &\leq l(\gamma|_{[a,c]}), \text{ вторые два} \leq l(\gamma|_{[c,b]}) \\ \sum_{k=1}^n \rho(\gamma(t_k), \gamma(t_{k-1})) &\leq l(\gamma|_{[a,c]}) + l(\gamma|_{[c,b]}) \\ \text{Осталось перейти к sup и получим} &l(\gamma) \leq l(\gamma|_{[a,c]}) + l(\gamma|_{[c,b]}) \end{aligned}$$

Theorem 2.43. Длина гладкого пути

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$\text{Тогда } l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \dots + \gamma_d'(t)^2} dt$$

Lemma 2.2.

$\Delta \subset [a, b]$ – отрезок

$$m_{\Delta}^{(k)} := \min_{t \in \Delta} |\gamma_k'(t)|$$

$$M_{\Delta}^{(k)} := \max_{t \in \Delta} |\gamma_k'(t)|$$

$$m_{\Delta} := \left(\sum_{k=1}^d (m_{\Delta}^{(k)})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$M_{\Delta} := \left(\sum_{k=1}^d (M_{\Delta}^{(k)})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Тогда } m_{\Delta} \cdot l(\Delta) \leq l(\gamma|_{\Delta}) \leq M_{\Delta} \cdot l(\Delta)$$

Доказательство:

Рассмотрим дробление Δ $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ и a_j – длина j -го звена ломаной по этому дроблению

$$a_j^2 = (\gamma_1(t_j) - \gamma_1(t_{j-1}))^2 + \dots + (\gamma_d(t_j) - \gamma_d(t_{j-1}))^2$$

Каждую скобочку зададим как $\gamma_i(\xi_{ij})(t_j - t_{j-1})$, где $\xi_{ij} \in [t_{j-1}, t_j]$

$$a_j^2 \leq (|\gamma_1'(\xi_{1j})|^2 + \dots + |\gamma_d'(\xi_{dj})|^2)(t_j - t_{j-1})^2$$

Но каждый модуль $\leq (M_{\Delta}^{(i)})^2$

$$\text{Тогда } a_j^2 \leq (M_{\Delta})^2 (t_j - t_{j-1})^2$$

Аналогично снизу и извлекаем корень

$$m_{\Delta}(t_j - t_{j-1}) \leq a_j \leq M_{\Delta}(t_j - t_{j-1})$$

И просуммируем по j от 1 до n

$$m_{\Delta}(t_n - t_0) \leq \sum_{j=1}^n a_j \leq M_{\Delta}(t_n - t_0)$$

А еще $t_n - t_0 = l(\Delta)$

Доказательство теоремы 2.43:

$M_{[t_{k-1}, t_k]} =: M_k$ и аналогично с m

$$l(\gamma) = l(\gamma|_{[t_0, t_1]}) + \dots + l(\gamma|_{[t_{n-1}, t_n]})$$

Но для каждой такой штуки мы знаем оценку снизу и сверху ($m_i(t_i - t_{i-1})$ и $M_i(t_i - t_{i-1})$ соответственно)

$$\int_a^b \|\gamma'\| = \int_{t_0}^{t_1} + \dots + \int_{t_{n-1}}^{t_n}$$

$$m_k(t_k - t_{k-1}) \leq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\| dt \leq M_k(t_k - t_{k-1})$$

$$\sum_{k=1}^n m_k(t_k - t_{k-1}) \leq \left[\int_a^b \|\gamma'\| \right] \leq \sum_{k=1}^n M_k(t_k - t_{k-1})$$

Докажем, что $\sum_{k=1}^m (M_k - m_k)(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0$ если мелкость $\rightarrow 0$

$$M_k - m_k = \left(\sum_{j=1}^d (M_{[t_{k-1}, t_k]}^{(j)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{j=1}^d (m_{[t_{k-1}, t_k]}^{(j)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^d (M_{[t_{k-1}, t_k]}^{(j)} - m_{[t_{k-1}, t_k]}^{(j)})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$I \leq \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^d (M_{[t_{k-1}, t_k]}^{(j)} - m_{[t_{k-1}, t_k]}^{(j)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} (t_k - t_{k-1})$$

Зададим $M := |\gamma'_j(\eta_{jk})|$ и $m := |\gamma'_j(\zeta_{jk})|$

$$|\gamma'_j(\eta_{jk}) - \gamma'_j(\zeta_{jk})| \leq \omega_{\gamma'_j}(|\tau|)$$

$$\text{Тогда та штука сверху} \leq \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^d \omega_{\gamma'_j}^2(|\tau|) \right)^{\frac{1}{2}} (t_k - t_{k-1}) = (b - a) \left(\sum_{j=1}^d \omega_{\gamma'_j}^2(|\tau|) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \omega_{\gamma'_j}(|\tau|)$$