Содержание

1 Оргинфа

Ведет Крыжевич Сергей Геннадьевич
+79219181076 и +48572768176
kryzhevicz@gmail.com и serkryzh@pg.edu.pl

2 Дифференциальные уравнения первого порядка

Definition 2.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

$D \subset \mathbb{R}^2$ – область, $f : D \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция
Дифференциальные уравнения первого порядка – это уравнения вида $y' = f(x, y)$

Example 2.1.

$y' = xy$

Definition 2.2. Решение дифференциального уравнения

$\langle a, b\rangle$ – интервал
Функция $\varphi(x)$ – решение дифференциального уравнения на $\langle a, b\rangle$, если

1. φ, φ' – непрерывны на $\langle a, b\rangle$
2. $(x, \varphi(x)) \in D$ $\forall x \in \langle a, b\rangle$
3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$

Example 2.2.

$y' = xy$
Решениями будут:

1. $y = 0$
2. $y = e^{\frac{x^2}{2}}$
   $y' = xe^{\frac{x^2}{2}} = xy$

На самом деле решением будет любая функция вида $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$

Notation 2.1. Начальные данные для дифференциального уравнения

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Definition 2.3. Задача Коши

Задача Коши – дифференциальное уравнение с начальными данными

Example 2.3.

$$\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$
$5 = Ce^0 = C$
Получаем ответ $y = 5e^{\frac{x^2}{2}}$

Definition 2.4. Общее решение дифференциального уравнения

Общее решение дифференциального уравнения – совокупность всех его решений (= решение с параметром)

Definition 2.5. Интегральная кривая

Интегральная кривая – график решения дифференциального уравнения, т.е. график $\{x, \varphi(x)\}$

Remark 2.1.

$y' = \sqrt{y};\ y \geq 0$
Здесь множество не является открытым, но считается, что $y = 0$ является решением (хотя формально им не является)
Если в каких-то задачах такое будет, в рамках курса не считаем это ошибкой

Remark 2.2. Единственность решений задачи Коши

Почти всегда задача Коши имеет единственное решение. Но есть исключения, например

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Очевидное решение $y = 0$, но также $y = x^3$. Более того, решением будет любая функция вида $y = (x + C)^3$. График есть на записи
Более того, можно собрать решение покусочно (ветка параболки вниз + прямая $y = 0$ + ветка параболы вверх)

Definition 2.6. Точка единственности/ветвления

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Точка (x_0, y_0) – точка единственности, если решение задачи Коши единственно. В противном случае это точка ветвления

Definition 2.7. Особое решение

Решение называется особым, если любая его точка – точка ветвления

Theorem 2.1.

Если в уравнении $y' = f(x,y)$ функция f непрерывна и имеет непрерывную производную по переменной y в области D, то для любой точки (x_0, y_0) из D решение задачи Коши с начальными данными $y(x_0) = y_0$ существует и единственно

Remark 2.3.

По x нужна только непрерывность, производной существовать не обязательно

Definition 2.8. Дифференциальные уравнения в симметричной форме

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

Example 2.4.

$ydx - xdy = 0 \mapsto y' = \frac{y}{x}$ или $x' = \frac{x}{y}$

Remark 2.4.

Предполагаем, что P и Q – функции, непрерывные в некоторой области D на плоскости и они не обращаются в ноль одновременно ни в одной точке D

Definition 2.9. Решение уравнения в симметричной форме

1. $y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, решением будет $y = \varphi(x) : P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0$
2. $x' = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$, решением будет $x = \psi(y) : P(\psi(y), y)\psi'(y) + Q(\psi(y), y) = 0$
3. $y = \varphi(t), x = \psi(t)$, хотим $P(\psi(t), \varphi(t))\psi'(t) + Q(\psi(t), \varphi(t))\varphi'(t) = 0$

Definition 2.10. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$t, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$; t – время, $x_1 \dots x_n$ – фазовые переменные

$$\begin{cases} x_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad \text{– скалярная запись системы}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \; f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix} \quad \text{– векторная запись системы}$$

Notation 2.2. Как свести уравнение высшего порядка к системам?

Пусть есть уравнение $x^{(n)} = g(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$
Полагаем $x_1 = x, \dots, x_n = x^{(n-1)}$
Получаем $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ \dots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = g(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$

Example 2.5.

$x'' + \sin x = 0$
$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\sin x_1 \end{cases}$

Remark 2.5.

Предполагается что $f : D \to \mathbb{R}^n$ – непрерывна и $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Definition 2.11. Решение системы

Функция $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbb{R}^n$ называется решением системы если

1. $\varphi \in C^1$
2. $(t, \varphi(t)) \in D \ \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$
3. $\varphi(t) = f(t, \varphi(t)) \ \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$

Definition 2.12. Задача Коши для систем

Пусть $t_0, x_{01}, \dots, x_{0n} \in \mathbb{R}$; $(t_0, x_{01}, \dots, x_{0n}) \in D$
Начальные условия: $\begin{cases} x_1(t_0) = x_{01} \\ \dots \\ x_n(t_0) = x_{0n} \end{cases}$

Или в векторной форме: $x(t_0) = x_0$, где $x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \dots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$

Задача Коши – уравнение + начальные условия
$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Definition 2.13. Эквивалентное интегральное уравнение

$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(x, x(s))ds$

Функция $\varphi : \langle\alpha, \beta\rangle \to \mathbb{R}^n$ называется решением эквивалентного интегрального уравнения, если

1. φ – непрерывна
2. $(t, \varphi(t)) \in D\ \forall t \in \langle\alpha, \beta\rangle$
3. $\varphi(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds\ \forall t \in \langle\alpha, \beta\rangle$

Lemma 2.1.

Функция $\varphi(t)$ – решение задачи Коши тогда и только тогда, когда она является решением эквивалентного интегрального уравнения

Доказательство:

$\Rightarrow$ Пусть $\varphi(t)$ – решение задачи Коши

1. φ непрерывна – очевидно
2. $(t, \varphi(t)) \in D\ \forall t \in \langle\alpha, \beta\rangle$ – то же условие
3. $\varphi(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds\ \forall t \in \langle\alpha, \beta\rangle$ – получается интегрированием уравнения $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ с учетом начальных условий

$\Leftarrow$ Пусть $\varphi(t)$ – решение интегрального уравнения

1. φ непрерывна и есть интеграл от непрерывной функции – значит дифференцируема
2. $(t, \varphi(t)) \in D\ \forall t \in \langle\alpha, \beta\rangle$ – то же условие
3. $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))\ \forall t \in \langle\alpha, \beta\rangle$ – получается дифференцированием интегрального уравнения

Theorem 2.2. Теорема существования решений

Пусть правая часть $f(t, x)$ системы $x' = f(t, x)$ непрерывна в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $(t_0, x_0) \in D$. Тогда существует решение задачи Коши

$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

определенное на промежутке $[t_0 - h, t_0 + h]$

Remark 2.6.

Этот промежуток называется промежутком Пеано

Доказательство:

Будем вместо решения задачи Коши искать решение эквивалентного интегрального уравнения $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$

Поскольку D – область (открытое множество), выберем константы $a, b > 0$ такие, что $K := \{(t, x) : |t - t_0| \le a;\ |x - x_0| \le b\} \subset D$

K – компакт, значит непрерывная функция огр. Пусть $M = \max\limits_{(t,x)\in K} |f(t, x)|;\ h := \min(a, \frac{b}{M})$

Remark 2.7.

Длина промежутка Пеано непрерывно зависит от начальной точки

Definition 2.14. Векторные нормы

Понятие нормы в $\mathbb{R}^n$:

1. $||x|| \geq 0$; $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $||ax|| = |a|||x|| \ \forall a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$
3. $||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Example 2.6.

1. $||x||_1 = |x| = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ – с этой нормой и будем работать
2. $||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ – евклидова норма
3. $||x||_3 = |x_1| + \ldots + |x_n|$

Definition 2.15. Равностепенная непрерывность

Последовательность функций $\varphi_k : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n, \ k \in \mathbb{N}$ – равностепенно непрерывна, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall t_1, t_2 \in [\alpha, \beta], \ k \in \mathbb{N}$ верно $|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |\varphi_k(t_1) - \varphi_k(t_2)| < \varepsilon$

Definition 2.16. Равномерная ограниченность

Последовательность функций $\varphi_k : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n, \ k \in \mathbb{N}$ – равномерно ограничена, если $\exists C > 0 : \forall t \in [\alpha, \beta], \ k \in \mathbb{N}$ верно $|\varphi_k(t)| \leq C$

Theorem 2.3. Теорема Арцела Асколи

Пусть последовательность функций $\varphi_k : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n, \ k \in \mathbb{N}$ равностепенно непрерывна и равномерно ограничена. Тогда существует равномерно сходящаяся подпоследовательность $\varphi_{n_k} \rightrightarrows \varphi_*$ на $[\alpha, \beta]$

Definition 2.17. Кусочно-гладкая функция

Функция $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ называется кусочно-гладкой, если она непрерывна, имеет производную везде, кроме конечного числа точек, а в тех точках имеет односторонние пределы

Definition 2.18. ε-решение системы

Пусть $\varepsilon > 0$. Кусочно-гладкая функция $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ называется ε-решением системы, если

1. $(t, \varphi(t)) \in D \ \forall t \in [\alpha, \beta]$
2. $|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| \leq \varepsilon$ во всех точках, где производная определена

Lemma 2.2.

Пусть $\varepsilon_m \to 0$ и $\varphi_m(t)$ – последовательность ε_m-решений системы на отрезке $[\alpha, \beta]$, такая, что $\varphi_m(t_0) = x_0$; $|f(t, \varphi_m(t))| \le M$ и $\varphi_m \rightrightarrows \varphi_*$. Тогда φ_* – решение задачи Коши

Доказательство:

Пусть Δ_m – последовательность функций, заданных формулой

$$\varphi_m(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \varphi_m(s))ds + \Delta_m(t)$$

Интегрируя неравенство $|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| \le \varepsilon_m$ от t_0 до t, с учетом того, что $\varphi_m(t_0) = \varphi(t_0) = x_0$, получаем $|\Delta_m(t)| \le \varepsilon_m(\beta - \alpha)$

Переходя к пределу в первой формуле, получаем, что $\varphi_*(t)$ – решение эквивалентного интегрального уравнения, а значит, и задачи Коши

Remark 2.8.

Далее, мы предложим метод построения таких приближенных решений. Мы будем строить эти решения на промежутке $[t_0, t_0 + h]$, построение на промежутке $[t_0 - h, t_0]$ аналогично

Definition 2.19. Ломаные Эйлера

Фиксируем $m \in \mathbb{N}$. Разделим отрезок $[t_0, t_0 + h]$ на m равных частей:
$t_j = t_0 + \frac{hj}{m}$; $j = 0, \dots, m$
Положим $\varphi_m(t_0) = x_0$ и последовательно определим $\varphi_m(t) = \varphi_m(t_j) + f(t_j, \varphi_m(t_j))(t - t_j)$ при $j = 0, \dots, m-1$ и $t \in [t_j, t_{j+1}]$
В частности $\varphi_m(t_{j+1}) = \varphi_m(t_j) + f(t_j, \varphi_m(t_j))\frac{h}{m}$
Если положить $A_j = (t_j, \varphi_m(t_j))$, то график $\varphi_m(t)$ – ломаная, соединяющая точки A_j

Proposition 2.1.

$K := \{(t, x) := |t - t_0| \le a;\ |x - x_0| \le b\} \subset D$
Для любого $m \in \mathbb{N}, t \in [t_0, t_0 + h]$ верно $(t, \varphi_m(t)) \in K$

Доказательство:

1. $|t - t_0| \le h = \min(a, \frac{b}{M})$
2. $t^* = \min\limits_{t \in [t_0, t_0+h]} \{|\varphi_m(t) - x_0| \ge b\}$

   С другой стороны, $|\varphi_m(t^*) - x_0| = |\varphi_m(t^*) - \varphi_m(t_0)| \le \int\limits_{t}^{t^*} |\varphi'_m(s)|ds \le M(t^* - t_0) \le Mh \le b$

Proposition 2.2.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists m_0$, такое что при $m \ge m_0$ функция φ_m является ε-решением системы

Доказательство:

$|\varphi_m(t_1) - \varphi_m(t_2)| \le M|t_1 - t_2|$

Если $t \in [t_j, t_{j+1}]$, то $|t - t_j| \le \frac{h}{m}$; $|f(t_j, \varphi_m(t_j)) - f(t, \varphi_m(t))| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ равномерно по t

Proposition 2.3.

Функции $\varphi_m(t)$ равномерно ограничены

Доказательство:
$|\varphi_m(t)| \leq M|t - t_0| + |x_0| \leq Mh + |x_0|$

Proposition 2.4.

Функции $\varphi_m(t)$ равностепенно непрерывны

Доказательство:
$|\varphi_m(t_1) - \varphi_m(t_2)| \leq M|t_1 - t_2|$

Theorem 2.4. Теорема Кнезера

В условиях теоремы существования, для любого $t_1 \in [t_0 - h, t_0 + h]$ множество значений решений задачи Коши $\{x(t_1) : x(t) - \text{решение}\}$ замкнуто и связно

Exercise 2.1.

Доказать замкнутость (пользуемся утверждениями 2.1-2.4, леммой 2.1 и теоремой Арцела-Асколи)