План на 3 модуль (или 2 сем...)

1. Множества
2. ЧУМ
3. Исчисление высказываний
4. Исчисление предикатов
5. Теория кодирования

Почитать можно А. Х. Шеня

Множества

1. $x \in A$; $y \notin A$
2. Арифметика множеств: $\bigcup, \bigcap, \setminus, \triangle$
3. $\varnothing$
4. $A = \{a, b, c\}$; $B = \{d\} \bigcup A$
5. $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$

Remark 0.1.

Чисто синтаксически вот такой бред: $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ имеет смысл

X – множество: $X \neq \varnothing$. Рассмотрим $x \in X$

$Term(x)$ – проблема, потому что мы не знаем, к каким характеристикам обращаемся и вообще не понятно, что мы выбрали

Спасают аксиомы ZFC

Definition 0.1. Равномощность

A, B – равномощны $\Leftrightarrow \exists f : A \to B$ – биекция
А что с бесконечностями? Давайте возьмем функцию $f : N \to 2N$
Хотя множество четных чисел – подмножество всех, но они равномощны, т.к. f – биекция

Definition 0.2. Характеристическая функция

X – множество. Есть $\chi : X \to \{0, 1\}$, т.е. $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in X \\ 0, & x \notin X \end{cases}$ – характеристическая функция

А пусть $X \subset Y$

- произведение характеристических функций X и Y – это характеристическая функция $X \bigcap Y$
- $1 - \chi(x)$ – характеристическая функция дополнения X
- $max(\chi_X(x), \chi_Y(x))$ – характеристическая функция $X \bigcup Y$
- $|X| = \sum\limits_{x \in Y} \chi_X(x)$

Example 0.1.

Возьмем 2^N; $B = \{0, 1\}$ и B^∞

Равномощны ли они? Берем $x \in 2^N$, теперь $b_i = \begin{cases} 1, & i \in x \\ 0, & i \notin x \end{cases}$

Definition 0.3. Счетное множество

X – счетное, если X равномощно N

Example 0.2.

Например, множество целых чисел счетно, т.к. $x \in Z \Rightarrow \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x + 1, & x < 0 \end{cases}$

Proposition 0.1.

1. X – счетно и $Y \subset X \Rightarrow Y$ или счетно, или конечно
2. X – бесконечно. Тогда $\exists Y$ – счетное: $Y \subset X$
3. $X_1, \dots X_n \dots$ – конечные или счетные. Тогда $\bigcup X_i$ – конечное или счетное

Доказательство:

1. X – счетно, т.е. соответствует последовательности $\{x_1, \dots x_n \dots\} = \xi$
   Возьмем $\xi \cdot \xi(Y)$. Т.е. что-то типа $\{0, 0 \dots x_{i_1}, 0 \dots x_{i_2}, 0 \dots\}$ который равносилен $y_1, y_2, \dots y_n \dots = Y$
   В свою очередь эта штука либо конечна, либо счетна, т.к. счетен X
2. Просто выбираем по 1 элементу из X. Если они кончатся на каком-то шаге – X не бесконечно
3. Рисуем табличку. Берем элемент (1, 1), потом (1, 2), потом (2, 1), потом (1, 3) и так далее. То есть по диагоналям. Так переберем вообще все элементы (если не понятно, погуглите метод Кантора)

Exercise 0.1.

В качестве следствия попробуйте построить явную биекцию между множеством рациональных чисел и натуральных

Theorem 0.1.

A – бесконечно, B – нбчс, т.е. B – конечно или счетно
$A \bigcup B$ равномощно A

Доказательство:

$\exists Y \subset A$ – счетное

Y и $Y \bigcup B$ – равномощны

$A \bigcup B = (A \backslash Y) \bigcup (Y \bigcup B)$

$A = Y \bigcup (A \backslash Y)$

Биекция между Y и $Y \bigcup B$ сущесвтует, значит A и $A \bigcup B$ равномощны

Example 0.3.

$[0; 1]$ и B^{∞}. Равномощны ли? Да. Последовательность единиц и нулей – это бинпоиск числа