Конспект Шорохова Сергея
Если нашли опечатку/ошибку - пишите @le9endwp

Содержание

1 Оргинфа

Ведет Крыжевич Сергей Геннадьевич
+79219181076 и +48572768176
kryzhevicz@gmail.com и serkryzh@pg.edu.pl

2 Дифференциальные уравнения первого порядка

Definition 2.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

$D \subset \mathbb{R}^2$ – область, $f : D \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция
Дифференциальные уравнения первого порядка – это уравнения вида $y' = f(x, y)$

Example 2.1.

$y' = xy$

Definition 2.2. Решение дифференциального уравнения

$\langle a, b\rangle$ – интервал
Функция $\varphi(x)$ – решение дифференциального уравнения на $\langle a, b\rangle$, если

1. φ, φ' – непрерывны на $\langle a, b\rangle$
2. $(x, \varphi(x)) \in D\ \forall x \in \langle a, b\rangle$
3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$

Example 2.2.

$y' = xy$
Решениями будут:

1. $y = 0$
2. $y = e^{\frac{x^2}{2}}$
   $y' = xe^{\frac{x^2}{2}} = xy$

На самом деле решением будет любая функция вида $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$

Notation 2.1. Начальные данные для дифференциального уравнения

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Definition 2.3. Задача Коши

Задача Коши – дифференциальное уравнение с начальными данными

Example 2.3.

$$\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$
$5 = Ce^0 = C$
Получаем ответ $y = 5e^{\frac{x^2}{2}}$

Definition 2.4. Общее решение дифференциального уравнения

Общее решение дифференциального уравнения – совокупность всех его решений (= решение с параметром)

Definition 2.5. Интегральная кривая

Интегральная кривая – график решения дифференциального уравнения, т.е. график $\{x, \varphi(x)\}$

Remark 2.1.

$y' = \sqrt{y};\ y \geq 0$
Здесь множество не является открытым, но считается, что $y = 0$ является решением (хотя формально им не является)
Если в каких-то задачах такое будет, в рамках курса не считаем это ошибкой

Remark 2.2. Единственность решений задачи Коши

Почти всегда задача Коши имеет единственное решение. Но есть исключения, например

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Очевидное решение $y = 0$, но также $y = x^3$. Более того, решением будет любая функция вида $y = (x + C)^3$. График есть на записи
Более того, можно собрать решение покусочно (ветка параболки вниз + прямая $y = 0$ + ветка параболы вверх)

Definition 2.6. Точка единственности/ветвления

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Точка (x_0, y_0) – точка единственности, если решение задачи Коши единственно. В противном случае это точка ветвления

Definition 2.7. Особое решение

Решение называется особым, если любая его точка – точка ветвления

Theorem 2.1.

Если в уравнении $y' = f(x, y)$ функция f непрерывна и имеет непрерывную производную по переменной y в области D, то для любой точки (x_0, y_0) из D решение задачи Коши с начальными данными $y(x_0) = y_0$ существует и единственно

Remark 2.3.

По x нужна только непрерывность, производной существовать не обязательно

Definition 2.8. Дифференциальные уравнения в симметричной форме

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

Example 2.4.

$ydx - xdy = 0 \mapsto y' = \frac{y}{x}$ или $x' = \frac{x}{y}$

Remark 2.4.

Предполагаем, что P и Q – функции, непрерывные в некоторой области D на плоскости и они не обращаются в ноль одновременно ни в одной точке D

Definition 2.9. Решение уравнения в симметричной форме

1. $y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, решением будет $y = \varphi(x) : P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0$
2. $x' = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$, решением будет $x = \psi(y) : P(\psi(y), y)\psi'(y) + Q(\psi(y), y) = 0$
3. $y = \varphi(t), x = \psi(t)$, хотим $P(\psi(t), \varphi(t))\psi'(t) + Q(\psi(t), \varphi(t))\varphi'(t) = 0$