Конспект Шорохова Сергея
Если нашли опечатку/ошибку - пишите @le9endwp

§0. Методы математического доказательства

1. Индукция
   (a) База индукции
   (b) Индукционное предположение
   (c) Индукционный переход

   $P_1, P_2 \dots P_n$

   - 1 аксиома индукции
     $\begin{cases} P_1 - \text{истина} \\ \forall i \ P_i \to P_{i_1} \end{cases} \Rightarrow \forall i \ P_i$ - истина
   - 2 аксиома индукции
     $\begin{cases} P_1 - \text{истина} \\ \forall i \ P_1 \dots P_i \to P_{i+1} \end{cases} \Rightarrow \forall i \ P_i$ - истина

2. "От противного"
   $A \to B \ \overline{B} \to \overline{A}$

3. Полный перебор

4. Прямой вывод
   $A \to B \to C \to D$, от A к D

5. Контрпример

6. Комбинаторное доказательство (сведение к известной задаче)

7. Двусторонние оценки
   $\begin{cases} A \geqslant B \\ B \geqslant A \end{cases} \Rightarrow A = B$

8. Оценка + пример

9. Дедукция + рекурсия
   $A \to B \to C \to D$, от D к A

10. Принцип Дирихле
    Биективное отображение для множеств разного размера оставит "лишние"элементы в одном из них

11. Инвариант
    Ex. Доказательство баланса красно-черного дерева

12. Доказательство эквивалентных утверждений
    $A \to B \to C \to D \to A$

§1. Множества

Def. $|A|$ - мощность множества (количество элементов в множестве
$A \bigcap B = \varnothing \Rightarrow |A \bigcup B| = |A| + |B|$

- $A_1 \dots A_n$

  $\forall i \neq j \ A_i \bigcap A_j = \varnothing$

  $|\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i| = \sum\limits_{i=1}^{n} |A_i|$

- $A_1 \dots A_n$

  $|\bigtimes\limits_{i=1}^{n} A_i| = \prod\limits_{i=1}^{n} |A_i|$

Def. $|A \bigcup B| = |A| + |B| - |A \bigcap B|$ - правило включения-исплючения

Доказательство

$A = (A \backslash B) \bigcup (A \bigcap B)$
$|A| = |A \backslash B| + |A \bigcap B|$
$|B| = |B \backslash A| + |A \bigcap B|$
$|A| + |B| = |A \backslash B| + |A \bigcap B| + |B \backslash A| + |A \bigcap B| = |(A \backslash B) \bigcup (A \bigcap B) \bigcup (B \backslash A)| = |A \bigcup B| + |A \bigcap B|$

Дома обобщение для произвольного n
$|A \bigcup B \bigcup C| = |A| + |B| + |C| - |A \bigcap B| - |A \bigcap C| - |B \bigcap C| + |A \bigcap B \bigcap C|$

$L = \{A, C, G, T\}$
$|L^k| = |L|^k = 4^k$
$\begin{cases} f(n) = n \cdot f(n-1) \\ f(0) = 1 \end{cases}$ – количество перестановок
$n(n-1)\dots(n-k+1) = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = C_n^k \cdot k!$
$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i a^i b^{n-i} = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}$

Если представить $a_1, a_2 \dots a_n$ как двоичное число или из $(1+1)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i \cdot 1^i \cdot 1^{n-i} = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i$

Тогда $\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$

Дома найти $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$
Посчитаем рекуррентно:
В $a_1 \dots a_n$ a_1 либо берем, либо не берем

- Если берем, то C_{n-1}^{k-1}
- Если не берем, то C_{n-1}^{k}

Значит $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}$

Другое доказательство: $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!}(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}) = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!} \cdot \frac{n}{k(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$

Воспользоваться суммой можно из треугольника Паскаля. Его можно представить и в виде квадрата. Тогда можем посчитать C_n^i за $i(n-i+1)-(n+1)$, по формуле только $n!$ считали бы $lgn \cdot n$

Свойства:

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$
2. $C_n^i = C_n^{n-i}$

   $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-n+k)!(n-k)!}$

Задача

Пусть есть n книг и k полок. Способов разделить на полки (= поставить $k-1$ перегородок) $\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{(k-1)!} = \frac{A_{n+k-1}^{k-1}}{(k-1)!} = C_{n+k-1}^{k-1}$

Def. Отношения A, B $\rho \subset A \times B$

$a\rho b$ $\forall a \in A, b \in B$, если $(a, b) \in \rho$

Свойства:

1. $\forall a \in A$ $a\rho a$ - рефлексивность
2. $\forall a, b \in A$ $a\rho b \Rightarrow b\rho a$ - симметричность
3. $\forall a, b, c \in A$ $\begin{cases} a\rho b \\ b\rho c \end{cases} \Rightarrow a\rho c$ - транзитивность

Если выполняются все 3, то это оношение эквивалентности. Все элементы разобьются на классы эквивалентности

A, B; $f : A \to B \Leftrightarrow \forall a \in A \exists b \in B : (a, b) \in f$

Def.

Пусть A - позиции в слове, B - символы алфавита

Количество отображений - количество строк длины $|A|$

$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ - инъективность

$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b$ - сюръективность

Если $f : A \to B$ - биективно, то $|A| = |B|$, при этом количество биекций - количество перестановок

Количество инъекций - A_n^k

A, B – конечные множества

Отображение – правило, сопоставляющее $a \in A$ $b \in B$, т.е.

$f : A \to B$

$\forall x \in A$ $\exists y : f(x) = y$

$\begin{matrix} (x, f(x)) \\ x \in A; y = f(x) \in B \end{matrix}$ – график отображений

$|B|^{|A|}$ – количество отображений

$Im(M) = \{f(x) | x \in M\}$ – образ M

Виды отображений:

- Инъективные

  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

  $|Im(A)| = |A|$

  На $|B|$ позиций $|A|$ элементов

  $A_{|B|}^{|A|}$ – количество отображений

- Сюръективные

  $\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$

  $Im(A) = B$

  $\forall y \in B$; $P_y = \{x | f(x) = y\} \neq \emptyset$

  $Im(P_y) = \{y\}$

  $\hat{S}(n, k)$ – количество сюръективных отображений $A \to B, |A| = n, |B| = k$

$k^n = \sum\limits_{i=0}^{k} (\hat{S}(n, i) \cdot C_k^i)$

$\begin{cases} f_0, f_1 \dots ; g_0, g_1 \dots \\ f_k = \sum\limits_i C_k^i g_i \end{cases} \Rightarrow g_i = \sum\limits_i^k (-1)^{k-i} C_k^i f_i$, если докажем, получим $\hat{S}(n, k) = \sum (-1)^{k-i} C_k^i k^i$

Доказательство

TODO, из-за отсутствия практик пока не доказываем
$\frac{\hat{S}(n,k)}{k!} = S(n,k)$ – число Стирлинга первого рода
k предметов (множество X), n ящиков (множество Y)

X	Y	Произвольно	$\leqslant 1$	$\geqslant 1$
Различимы	Различимы	k^n	A_k^n	$\hat{S}(n,k)$
Неразличимы	Различимы	C_{n+k}^k	C_k^n	C_{k-1}^{n-1}
Различимы	Неразличимы	$B(n,k)$	$0, k > n$ $1, k \leqslant n$	$S(n,k)$

$B(n,k) = \sum\limits_{i}^{n} S(i,k)$

Рекуррентные соотношения

$f_{n+m} = a_0 f_n + a_1 f_{n+1} + \ldots a_{m-1} f_{n+m-1}$
$f_0 \ldots f_{n-1}$
Прогой рекурсия удобно преображается в динамику (без проги нет)

Числа Фиббоначи: $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$
$f_0 = 0 \ f_1 = 1$
Явная формула (сложно): $\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$

Доказательство

База $n = 0, 1$ – верно
Переход $n \to n+1$
$f_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1) - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1))$
$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4}$

$f_n = \lambda^n; \ \lambda \neq 0$
$\lambda^{n+m} = a_0 \lambda^n \ldots a_{m-1} \lambda^{n+m-1}$
$\lambda^m = a_0 + \ldots + a_{m-1} \lambda^{m-1}$
$\lambda_{1 \ldots n} =$
$f_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \ldots c_m \lambda_m^n$ – характеристическое уравнение

На примере чисел Фиббоначи
$\lambda^2 = \lambda + 1$
$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$
$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$
$f_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$
$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1 \end{cases}$
$c_2 = -c_1$
$c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1$
$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}; \ c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Корней не всегда n
Для $f_{n+2} = 4f_{n+1} - 4f_n$ неправда (корни кратные)
Что делать?
Дифференцируем!

$(n+m)\lambda^{n+m-1} = a_0 n \lambda^{n-1} \ldots a_{m-1}(n+m-1)\lambda^{n+m-2}$
$c_1 \lambda_1^n + c_2 n \lambda_2^{n-1}$ – может быть решением
$\lambda_{1,2} = 2$

$c_1 2^n + c_2 2^{n-1} n$

$\begin{cases} c_1 + 0 = 0 \\ c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 2^0 \cdot 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases}$

Ответ: $2^{n-1} \cdot n$

А что если корней нет вовсе?
$f_{n+2} = 4f_{n+1} - 5f_n$
$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$
$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2^2 - 5} = 2 \pm i$
Корни вида $c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ будут удовлетворять равенству, но в комплексных числах
Из $f_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ мнимая часть будет $= 0$

$a \pm bi = 2(\cos\alpha + i\sin\alpha) = r \cdot e^{i\alpha}$
$c_1 2^n \cos\alpha^2 + c_2 2^n \sin\alpha^2$

$\frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{2} + \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{2} = \cos\alpha$

$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = (e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha} = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$

$c_1 \cos n\alpha + c_2 \sin n\alpha$
$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2^2 - 5} = 2 \pm i = \sqrt{5}(\frac{2}{\sqrt{5}} \pm \frac{i}{\sqrt{5}})$
$\alpha = a2\cos\frac{2}{\sqrt{5}}$
$c_1 \cos n\alpha + c_2 \sin n\alpha$

$f_n = a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2} + 2^n$
$\lambda_{1,2}$
$f_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + K(n)$
$K(n) - K(n-1) \cdot a_1 - K(n-2) \cdot a_2 = 2^n$
$K(n) = W \cdot 2^n$
$W \cdot 2^n - W \cdot 2^{n-1} \cdot a_1 - W \cdot 2^{n-2} \cdot a_2 = 2^n$
$4W - 2a_1 W - a_2 W = 4$

Теория вероятностей

Классическая вероятность

$P(\omega_i) = P_i$
$P_i = \frac{|\text{успех}|}{\Omega}$
Свойства:

1. $\sum P_i = 1;\ P(\Omega) = 1$
2. $A, B : A \bigcap B = \varnothing;\ P(A \bigcup B) = P(A) + P(B)$
3. $P(\Omega \backslash A) = 1 - P(A)$
4. $A \subseteq B;\ P(A) \leqslant P(B)$
5. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

Def. Случайность – разультат конкретных воздействий, влияние которых мы не можем объяснить

Частотный способ определения вероятности

На определенном периоде считаем вероятность, на следующем периоде (их много) ситуация $\sim$ та же
Def. Условная вероятность: $P(A|B) = \frac{P(A\bigcap B)}{P(B)};\ P \neq 0$
Def. A не зависит от B если $P(A|B) = P(A)$
Def. Незавитсимость совокупности: $P(A_{i_1} \dots A_{i_k}) = \prod P(A_{i_j})$

Общее определение вероятности

Ω – множетсво элементарных исходов
F – множество событий
$P : F \to R$ – функция вероятности
$F \subset 2^{\Omega}$

1. $\Omega \in F$
2. $\omega \in F \Rightarrow \Omega \backslash \omega = \overline{\omega} \in F$
3. $\omega_1, \omega_2 \in F \Rightarrow \omega_1 \bigcup \omega_2 \in F$

3'. $\omega_1 \dots \omega_n \dots \in F \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \omega_i \in F$

Если выполняются 1-3 – это алгебра
Если выполняются 1, 2, 3' – это σ-алгебра

4. $P(\Omega) = 1$
5. $P(\omega) \geqslant 0$
6. $P(\bigcup \omega_i) = \sum P_i$, если $\omega_i \bigcap \omega_j = 0$

Как следствие:

- $\omega \bigcup \overline{\omega} = \Omega$
- $1 = P(\omega \bigcup \overline{\omega}) = P(\omega) + P(\overline{\omega})$
- $P(0) = 0$

Def. (Ω, F, P) – вероятностное пространство

Def. Формула полной вероятности
Пусть $\Omega = \Omega_1 \prod \Omega_2 \dots \prod \Omega_n$
$P(A) = P(A|\Omega_1) \cdot P(\Omega_1) + \dots + P(A|\Omega_n) \cdot P(\Omega_n)$
$A = A \bigcap \Omega = (A \bigcap \Omega_1) \bigcup \dots \bigcup (A \bigcap \Omega_n)$
$P(A|\Omega_1) = \frac{P(A\bigcap \Omega_1)}{P(\Omega_1)}$

Th. Теорема (формула) Байеса
A, B
$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$

Для x_i:
p – успех; $1 - p$ – неудача
$M_n(k) = P($ровно k успехов$)$
$x_1 \dots x_n$
$M_n(K) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
$M_n(0), M_n(1), \dots M_n(n)$

$M_n(a,b) = \sum\limits_{k=a}^{b} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$\frac{M_n(k)}{M_n(k+1)} = \frac{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k+1}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}} = \frac{1-p}{p} \cdot \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}} = \frac{1-p}{p} \cdot \frac{k+1}{n-k}$

$\frac{(1-p)(k+1)}{p(n-k)} > 1$

$(1-p)(k+1) > pn - pk$

$1 - p + k - kp > pn - pk$

$1 - p + k > pn$

$k > pn - (1-p)$

Th. Теорема Пуассона

$\lambda = np$

$\lambda = const$ при $n \to \infty$

$M_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Почему?

$M_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{k!} \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n}) \ldots (1-\frac{k-1}{n}) \cdot$
$\cdot n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Здесь используется $(1-p)^{n-k} = (1-\frac{\lambda}{n})^{n-k} = \frac{(1-\frac{\lambda}{n})^n}{(1-\frac{\lambda}{n})^k} \to e^{-\lambda}$

Th. Локальная теорема Муавра-Лапласа

$P_n(k);\ x_n = \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}$. Пусть при $\begin{matrix} n \to \\ k \to \end{matrix} \infty;\ x_k$ не ограничена

$\sqrt{np(1-p)} \cdot P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{\lambda\pi}} e^{-\frac{x_n^2}{2}}$

$k! \approx \sqrt{2\pi k}(\frac{k}{e})^k$ – формула Стирлинга

$ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + o(z^2)$

$|\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}| < c \Rightarrow k < np \pm \sqrt{np(1-p)} \cdot c$

$q = 1 - p$

$k = np + \sqrt{npq} \cdot x_n$

$\frac{k}{np} = 1 + \sqrt{\frac{q}{np}} x_n \to 1$

$n - k = n - np - \sqrt{npq}x_n = nq - \sqrt{npq}x_n$

$\frac{n-k}{nq} = 1 - \sqrt{\frac{p}{nq}} x_n \to 1$

$k - n \to -\infty$

$a^b = e^{lna \cdot b}$

$\sqrt{npq} \cdot P_n(k) = \sqrt{npq} \cdot \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{n}n^n}{\sqrt{n-k}(n-k)^{n-k}\sqrt{k}k^k} p^k q^{n-k} \sqrt{npq} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\frac{np}{k})^k(\frac{nq}{n-k})^{n-k}\sqrt{\frac{np}{k}}\sqrt{\frac{nq}{n-k}} \approx$
$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\frac{k}{np})^{-k}(\frac{n-k}{nq})^{k-n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1+\frac{\sqrt{q}x_n}{\sqrt{np}})^{-k}(1-\frac{\sqrt{p}x_n}{\sqrt{nq}})^{k-n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-k \cdot ln(1+\frac{\sqrt{q}x_n}{\sqrt{np}})\cdot exp(-(n-k)\cdot ln(1-\frac{\sqrt{p}x_n}{\sqrt{nq}}) =$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-k(\frac{\sqrt{q}x_n}{\sqrt{np}} - \frac{qx_n^2}{2np}(1+o(1))) - (n-k)(-\frac{\sqrt{p}x_n}{\sqrt{nq}} - \frac{px_n^2}{2nq}(1+O(1)))) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-x_n^2(1-(\frac{1}{2}+o(1)))) =$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x_n^2}{2} + o(x_n^2)}$

$x_n(\frac{-k\sqrt{q}}{\sqrt{np}} + \frac{(n-k)\sqrt{p}}{\sqrt{nq}}) = x_n \frac{-kq+(n-k)p}{\sqrt{npq}} = x_n \frac{np-k}{\sqrt{npq}} = -x_n^2$

$\frac{kq}{2np}(1+o(1)) + \frac{(n-k)p}{2nq}(1+o(1)) = \frac{1}{2}(q(1+\ldots x_n)(1+o(1)) + p(1-\ldots x_n)(1+o(1))) = \frac{1}{2}(p+q)(1+o(1))$

$P_n(k_1, k_2)$

$a_n = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}};\ P_n = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$

$\lim((P_n(k_1,k_2) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}})\int e^{\frac{-x^2}{2}} dx) = 0$

При броске кубика множество элементарных исходов – количество точек на верхней грани, количество очков за бросок мы ставим самостоятельно (иногда исходя из количества точек, но не обязательно)

$\xi : F \to R$ на (Ω, F, P)

ξ(выпала 1) $= \{1, 2, 1, -2, -1 \ldots\}$
$\{x|\xi(x) = t \in R\} \to P(\xi = t) = P_\xi(t)$

t	t_1	$t_2 \ldots$	t_k
P	P_1	$P_2 \ldots$	P_k

$F_\xi(t) = P(\xi < t)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to-\infty} F_\xi(t) = 0 \\ \lim\limits_{t\to+\infty} F_\xi(t) = 1 \end{cases}$$

ξ_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Сумма чисел на кубике

$F_\xi(t) = P(\{\xi < t\})$

Плотность – $f_\xi(t) : \int\limits_{-\infty}^{t} f_\xi(x)dx = F_\xi(t)$

$f_\xi(t) = F'_\xi(t)$

При $t > q$ $F_\xi(t) - F_\xi(q) = \int\limits_{q}^{t} f_\xi(x)dx$

$U[a,b];\ f_{U[a,b]}(t) = \begin{bmatrix} 0, \ t \notin [a,b] \\ c, \ t \in [a,b] \end{bmatrix}$

$l = \frac{1}{b-a}$

$\frac{c}{1+(x-\Theta)^2}$ – распределение Коши

Совместное распределение

ξ, η – с.в.

$(\xi, \eta);\ P((\{\xi = k\}), (\{\eta = m\})) = P)km$

	k_1	$\ldots$	k_n
m_1	$P_{1,1}$	$\ldots$	$P_{1,n}$
$\vdots$			

$\forall k, m;\ P_{km} = P(\xi = k) \cdot P(\eta = m)$

$E_\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i p_i$

$E_{c\xi} = \sum\limits_{i=1}^{n} (ck_i)p_i = c\sum\limits_{i=1}^{n} k_i p_i = cE_\xi$

$E_{\xi+c} = \sum\limits_{i=1}^{n} (k_i + c)p_i = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i p_i + \sum\limits_{i=1}^{n} cp_i = E_\xi + c$

$E_{\xi+\eta} = E_\xi + E_\eta$ – упражнение на дом

$E_{\xi\eta} \neq E_\xi \cdot E_\eta$, правда если ξ и η независимы

$E_\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf_\xi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xdF(x)$

$E_{\xi\eta} = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{l} k_i m_j p_{ij} = \sum i = 1^n \sum\limits_{j=1}^{l} k_i p_i m_j q_j = \sum(k_i p_i(\sum(m_j q_j))) = E_\eta \sum k_i p_i = E_\eta \cdot E_\xi$

$E(\xi - E_\xi)^2 =: D_\xi$

$D_{c\xi} = c^2 D_\xi$

$d_{\xi+\eta} \neq D_\xi + D_\eta$, верно только в случае независимости ξ и η

Def. E_{ξ^k} – k-ый момент

Def. $E_{|xi^k|}$ – k-ый абсолютный момент

Def. $E_{(\xi-E_\xi)^k}$ – k-ый центральный момент

$cov(\xi, \eta) = E_{(\xi-E_\xi)(\eta-E_\eta)} = E_{\xi\eta-\xi E_\eta-\eta E_\xi+E_{\xi\eta}} = E_{\xi\eta} - E_\xi \cdot E_\eta - E_\eta \cdot E_\xi + E_\xi \cdot E_\eta = E_{\xi\eta} - E_\xi \cdot E_\eta$

Def. $r(\xi, \eta) = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D_\xi D_\eta}}$ – коэффициент корреляции

$E(\xi - E_\xi) = 0$
$r(\alpha\xi + x; \beta\eta + y) = r(\xi; \eta) \cdot sign(\alpha\beta)$
$-1 \leqslant r(\xi, \eta) \leqslant 1$

Производящие и характеристические функции

0	1	2 ...
p_0	p_1	p_2

$\psi(z) = \sum z^k p_k = Ez^k$
$z \in \mathbb{C};\ |z| \leqslant 1$
$\frac{d^k\psi}{dz^k}|_{z=0} = k!p_k$
$\frac{d^k\psi}{dz^k}|_{z=1} = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} \cdot z^{k-n} \cdot p_k|_{z=1} = E(\xi(\xi-1)(\xi-2)\dots(\xi-n+1))$
$\frac{d^k\psi}{dz^k} = E_{\xi^2 - \xi} = E_{\xi^2} - E_\xi$
$\psi_{a\xi+b}(z) = z^b \cdot \psi_\xi(z^a)$
$\psi_{\xi+\eta}(z) = \psi_\xi(z) \cdot \psi_\eta(z)$
Def. $P(\xi = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ – распределение Пуассона
$\psi_\xi(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}z^k = e^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}$
$\lambda e^{\lambda(z-1)}|_{z=1} = \lambda$
$D_\xi = E_{\xi^2} - E_\xi^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$
$\varphi(t) = Ee^{it\xi}$ – характеристическая функция
$\varphi_{a\xi+b}(t) = e^{itb} \cdot \varphi_\xi(at)$
$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t) \cdot \varphi_\eta(t)$
$i^{-n}\frac{d^n\varphi(t)}{dt^n}|_{t=0} = E\xi^n$
$f_{N_{0,1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$
$\varphi_{N_{0,1}}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$
$E_{N_{0,1}} = 0$
$D_{N_{0,1}} = 1$

Мы можем использовать характеристические уравнения для:

- Рекуреннтных соотношений
- Дифференциальных уравнений
- Случайных процессов

ξ – с.в., $\xi \geqslant 0$
$\forall\varepsilon > 0;\ P(\xi \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{E\xi}{\varepsilon}$ – неравенство Маркова
$\Bbbk(x) = \begin{cases} 1,\ x \in A \\ 0,\ x \notin A \end{cases}$
$\Bbbk_{[0;\varepsilon]}(\xi) + \Bbbk_{[\varepsilon;+\infty)}(\xi) = 1$
$E_\xi = E_{\xi\cdot 1} = E_{\xi\cdot\Bbbk_{[0;\varepsilon]}(\xi)} + E_{\xi\cdot\Bbbk_{[\varepsilon;+\infty)}(\xi)} \geqslant E_{\xi\cdot\Bbbk_{[\varepsilon;+\infty)}(\xi)} \geqslant \varepsilon \cdot P(\xi \geqslant \varepsilon)$
ξ – с.в., $D_\xi < +\infty$
$\forall\delta\ P(|\xi - E\xi| \geqslant \delta) \leqslant \frac{D\xi}{\delta^2}$ – неравенство Чебышева
$P(|\xi - E\xi| \geqslant \delta) = P((\xi - E\xi)^2 \geqslant \delta^2) \leqslant \frac{E(\xi - E\xi)^2}{\delta^2} = \frac{D\xi}{\delta^2}$
$\xi_1, \dots \xi_n \dots$ – пнорсв

1. $\xi_i \to \xi$ в среднекрадратичном смысле, если $E(\xi_n - \xi)^2 \to 0$ при $n \to \infty$
2. $\xi_i \to \xi$ по вероятности, если $P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) \to 0$ при $n \to \infty$

3. $\xi_i \to \xi$ почти наверное, если $P(\omega : \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)) = 1$

Th. ЗБЧ Чебышева
$E_{\xi_i} = a;\ D_\xi < +\infty$
$\overline{\xi_n} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$
$\overline{\xi_n} \to E_\xi$ по всем пунктам. Это закон Больших чисел
$N(M, \sigma^2)$ – нормальное распределение

Доказательство

Докажем только среднеквадратичную сходимость, остальное сложно, у нас лапки
$E_{\overline{\xi_n}} = \frac{1}{n} E_{\sum \xi_i} = \frac{1}{n} \sum E_{\xi_i} = \frac{na}{n} = a$
$E_{(\overline{\xi_n} - a)^2} = D_{\overline{\xi_n}} = \frac{1}{n} D_{\sum \xi_i} = \frac{1}{n} \sum D_{\xi_i} = \frac{D_{\xi_1}}{n} \to 0$

Th. ЦПТ Ляпунова
$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$
$Z_n = \frac{S_n - na}{\sqrt{n\sigma^2}}$. $F_n = P(Z_n < x)$
$\sup |F_n(x) - N_{0,1}(x)| \to 0$. Другими словами $Z_n \sim N_{0,1}$ при $n \to \infty$
$S_n \sim N_{na, n\sigma^2}$ при $n \to \infty$

V – вершина $|V| < +\infty$
$E = \{e_i\}$ – ребра
$e_i = (V_i, V_j)$, $V_i, V_j \in V$
$I : V \times E$
$I(v, e)$ если $e = \left[\begin{matrix}(v, *) \\ (*, v)\end{matrix}\right.$
$|V|$, $E \subset V \times V$

1. $e(V_1, V_2) \Rightarrow e(V_2, V_1)$
2. $\overline{e(V_1, V_1)}$

$G = (V, E)$ – граф (бинарное отноешние смежности)

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
V_1	0	1	1	0	0
V_2	1	0	1	0	0
V_3	1	1	0	1	1
V_4	1	0	1	0	0
V_5	0	0	1	0	0

$S(V_i, V_j)$ существует, если существуют
$V_i, E_{\alpha_1}, V_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}, \ldots, E_{\alpha_{n-1}}, V_j$
$\tilde{G}$ – подграф G
$V_{\tilde{G}} \subset V_G$
$\forall e \in E_{\tilde{G}} \Rightarrow e \in E_G$