

Содержание

1	Глава 9. Теория меры	2
1.1	§1. Системы множеств	2
1.2	§2. Объем и мера	8
1.3	§3. Продолжение меры	13
1.4	§4. Мера Лебега	18

1 Глава 9. Теория меры

1.1 §1. Системы множеств

Definition 1.1. Объемлющее множество

X – объемлющее множество. Будем рассматривать $A \subset X$

Declaration 1.1. Обозначения

$A \sqcup B$ – объединение множеств A и B и множества A и B не пересекаются

$\bigsqcup_{k=1}^n A_k$ – объединение и $A_i \cap A_j = \emptyset$

Дизъюнктные множества = непересекающиеся множества

Definition 1.2. Разбиение множества

Множества E_α , $\alpha \in I$ – разбиение множества E , если $E = \bigsqcup_{\alpha \in I} E_\alpha$

Definition 1.3. Система подмножеств и ее свойства

\mathcal{A} – система подмножеств X (т.е. $\mathcal{A} \subset 2^X$)

1. \mathcal{A} имеет свойство σ_0 , если $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

2. \mathcal{A} имеет свойство δ_0 , если $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

3. \mathcal{A} имеет свойство σ , если $\forall A_1, A_2 \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

4. \mathcal{A} имеет свойство δ , если $\forall A_1, A_2 \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

5. \mathcal{A} – симметричная система, если $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$

Reminder 1.1.

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$$

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$$

Proposition 1.1.

Если \mathcal{A} симметричная система, то $(\sigma_0) \Leftrightarrow (\delta_0)$
 $(\sigma) \Leftrightarrow (\delta)$

Definition 1.4. Алгебра

\mathcal{A} – алгебра, если

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$

2. \mathcal{A} – симметричная система

3. Есть свойства (σ_0) и (δ_0)

Definition 1.5. σ -алгебра

\mathcal{A} – σ -алгебра, если

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. \mathcal{A} – симметричная система
3. Есть свойства (σ) и (δ)

Theorem 1.1. Свойства

1. Если \mathcal{A} – алгебра и $A_1 \dots A_n \in \mathcal{A}$, то $\bigcup_{k=1}^n A_k$ и $\bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}$
2. Если \mathcal{A} – σ -алгебра, то \mathcal{A} – алгебра
3. Если \mathcal{A} – алгебра и $A, B \in \mathcal{A}$, то $\underbrace{A \setminus B}_{A \cap (X \setminus B)} \in \mathcal{A}$

Example 1.1.

1. $X = \mathbb{R}^n$
 \mathcal{A} – все ограниченные множества и их дополнения. Это алгебра, но не σ -алгебра
2. 2^X – σ -алгебра
3. Индуцированная (σ) -алгебра
 $Y \subset X$, \mathcal{A} – (σ) -алгебра подмножеств X
 $\mathcal{B} := \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$ – (σ) -алгебра подмножеств Y
4. $X \supset A, B$
 \mathcal{A} – алгебра подмножеств X
 $\emptyset, X, A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, X \setminus A, X \setminus B, A \Delta B, X \setminus (A \cap B), X \setminus (A \cup B),$
 $X \setminus (A \Delta B), X \setminus (A \setminus B), X \setminus (B \setminus A)$
5. \mathcal{A}_α – (σ) -алгебра подмножеств X
Тогда $\mathcal{B} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ – (σ) -алгебра подмножеств X
Доказательство:
(a) $\emptyset \in \mathcal{A}_\alpha \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{B}$
(b) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A \in \mathcal{A}_\alpha \forall \alpha \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}_\alpha \forall \alpha \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{B}$

Theorem 1.2.

Пусть \mathcal{E} – система подмножеств X

Тогда существует наименьшая по включению (σ) -алгебра \mathcal{A} , содержащая \mathcal{E}

Доказательство:

Пусть \mathcal{A}_α – всевозможные алгебры, содержащие \mathcal{E} (2^X подходит)

$\mathcal{A} := \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ – алгебра и $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\alpha \forall \alpha$

Definition 1.6. Борелевская оболочка

\mathcal{E} – система подмножеств X

Борелевская оболочка системы \mathcal{E} – наименьшая по включению σ -алгебра, содержащая \mathcal{E}

Declaration 1.2. Обозначение

$\mathcal{B}(\mathcal{E})$

Definition 1.7. Борелевская σ -алгебра

Борелевская σ -алгебра – это $\mathcal{B}(\mathcal{E})$, где \mathcal{E} – всевозможные открытые множества в \mathbb{R}^n

Declaration 1.3. Обозначение

\mathcal{B}^n

Remark 1.1.

$\mathcal{B}^n \neq 2^{\mathbb{R}^n}$

Definition 1.8. Кольцо

\mathcal{A} – семейство подмножеств X

\mathcal{A} – кольцо, если

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}, A \cup B \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

Remark 1.2.

\mathcal{A} – алгебра $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ – кольцо и $X \in \mathcal{A}$

Definition 1.9.

\mathcal{P} – семейство подмножеств X

\mathcal{P} – полукольцо, если

1. $\emptyset \in \mathcal{P}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$
3. $\forall A, B \in \mathcal{P} \exists Q_1 \dots Q_m \in \mathcal{P}, \text{ т.ч. } A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^m Q_k$

Example 1.2.

1. $X = \mathbb{R}; \mathcal{P} := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ – полукольцо
2. $X = \mathbb{R}; \mathcal{P} := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{Q}\}$ – полукольцо

Lemma 1.1.

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = \bigsqcup_{k=1}^n \underbrace{(A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j)}_{B_k} \quad (\text{для } \infty \text{ вместо } n \text{ тоже верно})$$

Доказательство:

- $B_k \subset A_k \Rightarrow \supset$ верно
- \subset возьмем $x \in \bigcup_{k=1}^n A_k \Rightarrow$ найдется наименьший индекс m , т.ч. $x \in A_m$ и $x \notin A_{m-1} \dots A_1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x \in B_m$
- Дизъюнктность $k < m \Rightarrow B_k \cap B_m = \emptyset$
 $B_m = A_m \setminus \bigcup_{j=1}^{m-1} A_j \subset A_m \setminus A_k \subset A_m \setminus B_k$
 $B_k \subset A_k$

Theorem 1.3.

\mathcal{P} – полукольцо. Тогда

1. $P, P_1 \dots P_n \in \mathcal{P} \Rightarrow \exists Q_1 \dots Q_m \in \mathcal{P}$, т.ч. $P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j$
2. $P_1, P_2 \dots \in \mathcal{P} \Rightarrow \exists Q_{ij} \in \mathcal{P}$, т.ч. $\bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$, где $Q_{kj} \subset P_k \forall k, j$
3. В п. 2 можно вместо n написать ∞

Доказательство:

1. Индукция. База $n = 1$ – определение полукольца

Переход $n \rightarrow n + 1$

$$P \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} P_k = \underbrace{(P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k)}_{\text{инд. предполож.}} \setminus P_{n+1} = \underbrace{(\bigsqcup_{j=1}^m Q_j)}_{\text{где } Q_j \in \mathcal{P}} \setminus P_{n+1} = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \setminus P_{n+1} = \bigsqcup_{j=1}^m \bigsqcup_{i=1}^{m_j} Q_{ji}$$

$$2. \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^n \underbrace{(P_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} P_j)}_{\text{п. 1}}$$

Definition 1.10.

\mathcal{P} – полукольцо подмножеств X

\mathcal{Q} – полукольцо подмножеств Y

$\mathcal{P} \times \mathcal{Q} := \{A \times B : A \in \mathcal{P} \text{ и } B \in \mathcal{Q}\}$ – декартово произведение полуколец \mathcal{P} и \mathcal{Q}

Theorem 1.4.

Декартово произведение полуколец – полукольцо

Доказательство:

1. Пустые очев
2. $C \times D$ и $A \times B \in \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \Rightarrow (A \times B) \cap (C \times D) = \underbrace{(A \cap C)}_{\in \mathcal{P}} \times \underbrace{(B \cap D)}_{\in \mathcal{Q}}$
3. $A \times B, C \times D \in \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \stackrel{?}{\Rightarrow} (A \times B) \setminus (C \times D) = \bigsqcup_{k=1}^m \underbrace{P_k}_{\in \mathcal{P}} \times \underbrace{Q_k}_{\in \mathcal{Q}}$

$$(A \times B) \setminus (C \times D) = \underbrace{(A \setminus C)}_{\bigsqcup_{j=1}^m P_j} \times \underbrace{B}_{\in \mathcal{Q}} \sqcup \underbrace{(A \cap C)}_{\in \mathcal{P}} \times \underbrace{(B \setminus D)}_{\bigsqcup_{i=1}^n Q_i}$$

Definition 1.11. Замкнутый и открытый параллелепипеды $a, b \in \mathbb{R}^n$ Замкнутый параллелепипед $[a, b] := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ Открытый параллелепипед $(a, b) := (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$ **Definition 1.12. Ячейка** $a, b \in \mathbb{R}^n$ Ячейка $(a, b] := (a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]$ **Remark 1.3.** $(a, b) \subset (a, b] \subset [a, b]$ **Proposition 1.2.**

1. Непустая ячейка – объединение возрастающей (по включению) последовательности замкнутых параллелепипедов
2. Непустая ячейка – пересечение убывающей (по включению) последовательности открытых параллелепипедов

Доказательство:

1. $A_k := [a_1 - \frac{1}{k}, b_1] \times [a_2 - \frac{1}{k}, b_2] \times \dots \times [a_n - \frac{1}{k}, b_n]$
 $A_{k+1} \supset A_k$ и $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = (a, b]$
2. $B_k := (a_1, b_1 + \frac{1}{k}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{k}) \times \dots \times (a_n, b_n + \frac{1}{k})$
 $B_{k+1} \subset B_k$ и $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = (a, b)$

Declaration 1.4. Обозначения $\mathcal{P}^n := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}^n\}$ $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^n := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{Q}^n\}$

Proposition 1.3.

\mathcal{P}^n и $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^n$ – полукольца

Доказательство:

$$\mathcal{P}^n = \underbrace{\mathcal{P}^1 \times \mathcal{P}^1 \times \dots \times \mathcal{P}^1}_{\text{полукольца}}$$

Theorem 1.5.

G – непустое открытое множество в \mathbb{R}^m

Тогда G представимо в виде счетного дизъюнктного объединения ячеек с рациональными координатами вершин

Доказательство:

У АИ тут рисуночки, посмотрите запись!

Для $x \in G$ построим ячейку P_x с рациональными координатами вершин, т.ч. $P_x \in G$ и $x \in P_x$

$$\bigcup_{x \in G} P_x = G$$

Ячеек с рациональными координатами вершин счетное число. Значит если выкинуть повторы из объединения выше, то останется счетное объединение

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{x_n} = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{m_n} Q_{nj} \text{ – ячейки с рациональными координатами вершин}$$

Theorem 1.6. Следствие

$$\mathcal{B}^m = \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) = \mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m)$$

Доказательство:

1. $\mathcal{B}^m \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}^m)$. Достаточно доказать, что $\mathcal{B}^m \supset \mathcal{P}^m$
 $(a, b]$ – счетное пересечение открытых параллелепипедов (т.к. открытых множеств) \Rightarrow
 $(a, b]$ лежит в σ -алгебре, содержащей все открытые множества
2. $\mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m)$. Достаточно доказать, что $\mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m$, но $\mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{P}^m \supset \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m$
3. $\mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m) \supset \mathcal{B}^m$. Достаточно доказать, что $\mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m)$ содержит все открытые множества. Это следует из теоремы 1.5.

1.2 §2. Объем и мера

Definition 1.13. Объем

\mathcal{P} – полукольцо. $\mu : \mathcal{P} \rightarrow [0, +\infty]$

μ – объем, если

1. $\mu \emptyset = 0$
2. Если A_1, \dots, A_n и $\bigsqcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{P}$, то $\mu(\bigsqcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \mu A_k$

Definition 1.14. Мера

\mathcal{P} – полукольцо. $\mu : \mathcal{P} \rightarrow [0, +\infty]$

μ – мера, если

1. $\mu \emptyset = 0$
2. Если A_1, A_2, \dots и $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$, то $\mu(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k$

Exercise 1.1.

Если $\mu \emptyset \neq +\infty$, то $\mu \emptyset = 0$ из свойства 2

Example 1.3. Примеры объемов

1. $X = \mathbb{R}$, \mathcal{P}^1 . Длина – объем. $\mu(a, b] = b - a$
2. $X = \mathbb{R}$, \mathcal{P}^1 . $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – нестрого возрастающая функция
 $\nu_g(a, b] := g(b) - g(a)$
3. Классический объем на \mathcal{P}^m
 $\lambda_m(a, b] = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_m - a_m)$ – объем и даже мера (докажем позже)
4. $x_0 \in X$; $\mu A = \begin{cases} 0 & x_0 \notin A \\ 1 & x_0 \in A \end{cases}$
5. $X = \mathbb{R}^2$; \mathcal{P} – ограниченные множества и их дополнения
 $\mu A = \begin{cases} 0 & A \text{ – ограничена} \\ 1 & A \text{ дополнение ограничено} \end{cases}$ – объем, но не мера

Theorem 1.7. Свойства объема

\mathcal{P} – полукольцо, μ – объем на \mathcal{P} . Тогда

1. Монотонность
 $P, \tilde{P} \in \mathcal{P}$ и $P \subset \tilde{P} \Rightarrow \mu P \leq \mu \tilde{P}$
2. Усиленная монотонность
 $P_1, P_2, \dots, P_n, \tilde{P} \in \mathcal{P}$ и $\bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset \tilde{P} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \mu P_k \leq \mu \tilde{P}$
- 2'. $P_1, P_2, \dots, \tilde{P} \in \mathcal{P}$ и $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k \subset \tilde{P} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \leq \mu \tilde{P}$
3. Конечная полуаддитивность
 $P_1, \dots, P_n, P \in \mathcal{P}$ и $P \subset \bigcup_{k=1}^n P_k \Rightarrow \mu P \leq \sum_{k=1}^n \mu P_k$

Доказательство:

$$2. \tilde{P} \setminus \bigsqcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j, \text{ где } Q_j \in \mathcal{P}$$

$$\tilde{P} = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \sqcup \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \Rightarrow \mu\tilde{P} = \sum_{k=1}^n \mu P_k + \underbrace{\sum_{j=1}^m \mu Q_j}_{\geq 0} \geq \sum_{k=1}^n \mu P_k$$

2'. Предельный переход в неравенстве

$$3. P'_k := P_k \cap P \in \mathcal{P} \Rightarrow P = \bigcup_{k=1}^n P'_k \underset{\text{th.}}{=} \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj} \text{ (они из } \mathcal{P}) \Rightarrow \mu P = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj}$$

$$P_k \supset P'_k \supset \bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj} \Rightarrow \mu P_k \geq \sum_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj}$$

Remark 1.4.

1. Если μ – объем на алгебре \mathcal{A} , $A \subset B$; $A, B \in \mathcal{A}$ и $\mu A < +\infty$, то $\mu(B \setminus A) = \mu B - \mu A$
Доказательство: Т.к. $B = A \sqcup (B \setminus A)$
2. Объем на полукольце можно продолжить на кольцо, состоящего из всевозможных объединений элементов полукольца

Theorem 1.8.

\mathcal{P} и \mathcal{Q} – полукольца подмножеств X и Y . μ и ν – объемы на \mathcal{P} и \mathcal{Q}

$\lambda \left(\underbrace{P \times Q}_{P \in \mathcal{P}; Q \in \mathcal{Q}} \right) := \mu P \cdot \nu Q$ (считаем, что $0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 = 0$)

Тогда λ – объем на $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$

Theorem 1.9. Следствие

Классический объем λ_m – объем

Доказательство:

$$\text{Случай 1. } P = \bigsqcup_{j=1}^m P_j \text{ и } Q = \bigsqcup_{k=1}^n Q_k$$

$$\text{Тогда } P \times Q = \bigsqcup_{j=1}^m \bigsqcup_{k=1}^n P_j \times Q_k$$

$$\lambda(P \times Q) = \mu P \cdot \nu Q = \sum_{j=1}^m \mu P_j \cdot \sum_{k=1}^n \nu Q_k = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \mu P_j \cdot \nu Q_k = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \lambda(P_j \times Q_k)$$

$$\text{Случай 2. } P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \times Q_k \stackrel{?}{\Rightarrow} \lambda(P \times Q) = \sum_{k=1}^n \lambda(P_k \times Q_k)$$

Разбиваем P на кусочки $P = \bigsqcup_{j=1}^m P'_j$ и каждая P_k – дизъюнктное объединение каких-то P'_j

Example 1.4. Примеры мер

1. λ_m – мера (потом докажем)
2. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – нестрого возрастающая и непрерывная справа во всех точках
 $\nu_g(a, b] := g(b) - g(a)$ – мера
3. $x_0 \in X$; $\mu A = \begin{cases} 1 & x_0 \in A \\ 0 & x_0 \notin A \end{cases}$ – мера на 2^X
4. Считаящая мера = количество элементов в множестве
5. X ; $t_1, t_2 \dots \in X$
 $w_1, w_2 \dots \geq 0$; $\mu A := \sum_{k: t_k \in A} w_k$ – мера на 2^X

Счетная аддитивность: $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \stackrel{?}{\Rightarrow} \mu A = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k$

В множестве A_k гирьки $w_{k_1}, w_{k_2} \dots$

$$\mu A_k = \sum_{j=1}^{\infty} w_{k_j} \text{ и } \mu A = \sum w_{k_j}$$

Надо понять, что $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_{k_j} = \sum w_{k_j}$

$$\leq: \underbrace{\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{\infty} w_{k_j}}_{\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^K w_{k_j}} \leq R \Rightarrow L \leq R$$

\geq : Берем частичную сумму S для R . Надо доказать, что $S \leq L$

$$\begin{aligned} K = \max k \text{ в этой частичной сумме} \\ J = \max j \text{ в этой частичной сумме} \end{aligned} \Rightarrow S \leq \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J w_{k_j} \leq L$$

Theorem 1.10.

$\mu : \mathcal{P} \rightarrow [0, +\infty]$ – объем на полукольце \mathcal{P} . Тогда

μ – мера \Leftrightarrow (счетная полуаддитивность)

$$(P, P_k \in \mathcal{P}) \forall P \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \Rightarrow \mu P \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k$$

Доказательство:

$$\Leftarrow: P = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \xrightarrow{\text{сч. полуадд.}} \mu P \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k$$

$$P = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \xrightarrow{\text{усил. монот.}} \mu P \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k$$

$$\Rightarrow: P'_k := P \cap P_k \Rightarrow P = \bigcup_{k=1}^{\infty} P'_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{m_k} Q_{k_j}, \text{ где } Q_{k_j} \subset P'_k \subset P_k \xrightarrow{\mu \text{ – мера}} \mu P = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{m_k} \mu Q_{k_j}}_{\leq \mu P_k}$$

$$\bigcup_{j=1}^{m_k} Q_{k_j} \subset P_k \xrightarrow{\text{усил. монот.}} \mu P_k \geq \sum_{j=1}^{m_k} \mu Q_{k_j}$$

Theorem 1.11. Следствие

μ – мера на σ -алгебре. Тогда счетное объединение множеств нулевой меры – множество нулевой меры

Доказательство:

$$\mu A = 0; \quad A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow \mu A \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k = 0 \Rightarrow \mu A = 0$$

Theorem 1.12. Непрерывность меры снизу

μ – объем на σ -алгебре \mathcal{A} . Тогда равносильны

1. μ – мера
2. $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots; A_k \in \mathcal{A}$. Тогда $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu A_k$

Доказательство:

$$1 \Rightarrow 2: A_0 \neq \emptyset \text{ и } B_k := A_k \setminus A_{k-1}; \quad A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

$$\text{Тогда } A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \Rightarrow \mu A = \sum_{k=1}^{\infty} \mu B_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{k=1}^n \mu B_k}_{\mu(\bigcup_{k=1}^n B_k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$$

$$\begin{aligned} 2 \Rightarrow 1: \text{ Пусть } A = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k; \quad A_n := \bigcup_{k=1}^n C_k \Rightarrow A_1 \subset A_2 \subset \dots \Rightarrow \mu A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\bigcup_{k=1}^n C_k) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu C_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu C_k \end{aligned}$$

Theorem 1.13. Непрерывность меры сверху

μ – объем на σ -алгебре \mathcal{A} и $\mu X < +\infty$. Следующие условия равносильны

1. μ – мера
2. Непрерывность меры сверху
 $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots; A_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu A_k$
3. Непрерывность меры сверху на пустом множестве
 $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots; A_k \in \mathcal{A} \text{ и } \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \mu A_k = 0$

Доказательство:

$$1 \Rightarrow 2: B_k := A_1 \setminus A_k; \quad B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = A_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k. \text{ По предыдущей теореме } \underbrace{\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k)}_{\mu A_1 - \mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu B_k = \mu A_1 - \lim_{k \rightarrow \infty} \mu A_k$$

$$2 \Rightarrow 3: \text{ Очев, 3. – частный случай 2.}$$

$$3 \Rightarrow 1: A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} C_k; A_n := \bigsqcup_{k=n+1}^{\infty} C_k; \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \text{ и } A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \Rightarrow \lim \mu A_n = 0$$

$$A = \bigsqcup_{k=1}^n C_k \sqcup A_n \Rightarrow \mu A = \underbrace{\sum_{k=1}^n \mu C_k}_{\rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \mu C_k} + \underbrace{\mu A_n}_{\rightarrow 0}$$

Theorem 1.14. Следствие

μ – мера на σ -алгебре \mathcal{A} и $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ и $\mu A_m < +\infty$ для некоторого m
Тогда $\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim \mu A_k$

Доказательство:

Пишем $A_m \setminus A_k$ вместо $A_1 \setminus A_k$

Remark 1.5.

Условие $\mu X < +\infty$ важно. $A_n := [n, +\infty)$ и $\lambda_1 A_n = +\infty$; $\bigcap_{n=1}^{\infty} [n, +\infty) = \emptyset$

Exercise 1.2.

Придумать объем, не являющийся мерой, который обладает свойством из следствия

1.3 §3. Продолжение меры

Definition 1.15. Субмера

$\nu : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$ – субмера, если

1. $\nu \emptyset = 0$
2. Монотонность: $A \subset B \Rightarrow \nu A \leq \nu B$
3. Счетная полуаддитивность: $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \nu A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu A_n$

Remark 1.6.

2. – частный случай 3.

Definition 1.16. Полная мера

μ – мера на \mathcal{A} . μ – полная мера, если

$A \in \mathcal{A}$, т.ч. $\mu A = 0 \Rightarrow \forall B \subset A, B \in \mathcal{A}$ (и тогда $\mu B = 0$)

Definition 1.17.

ν – субмера. $E \subset X$

E – ν -измеримое множество, если $\forall A \subset X \Rightarrow \nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$

Remark 1.7.

1. Достаточно требовать \geq , т.к. \leq из полуаддитивности
2. $E_1, E_2 \dots E_n$ – ν -измеримые и $E = \bigcup_{k=1}^n E_k \Rightarrow \nu(A \cap E) = \sum_{k=1}^n \nu(A \cap E_k)$

Индукция по n . $n \rightarrow n+1$

$$\nu\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{n+1} E_k\right) = \underbrace{\nu\left((A \cap \bigcup_{k=1}^{n+1} E_k) \cap E_{n+1}\right)}_{A \cap E_{n+1}} + \underbrace{\nu\left((A \cap \bigcup_{k=1}^{n+1} E_k) \setminus E_{n+1}\right)}_{A \cap \bigcup_{k=1}^n E_k}$$

Theorem 1.15. Теорема Каратеодори

ν – субмера. Тогда

1. ν -измеримые множества образуют σ -алгебру
2. Сужение ν на эту σ -алгебру – полная мера

Доказательство:

\mathcal{A} – семейство всех ν -измеримых множеств

1. Маленькими шагами :)

Шаг 1. Если $\nu E = 0$, то E будет ν -измеримым

$$\underbrace{\nu(A \cap E)}_{\subset E} + \underbrace{\nu(A \setminus E)}_{\subset A} \leq \nu E + \nu A = 0 + \nu A = \nu A$$

Шаг 2. \mathcal{A} – симметричная, т.к. если $E \in \mathcal{A}$, то $X \setminus E \in \mathcal{A}$

$$A \cap (X \setminus E) = A \setminus E; \quad A \setminus (X \setminus E) = A \cap E$$

Шаг 3. Если E и $F \in \mathcal{A}$, то $E \cup F \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \nu A &= \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) = \nu(A \cap E) + \nu((A \setminus E) \cap F) + \underbrace{\nu((A \setminus E) \setminus F)}_{\nu(A \setminus (E \cup F))} \geq \\ &\geq \nu(A \cap (E \cup F)) + \nu(A \setminus (E \cup F)) \end{aligned}$$

Шаг 4. \mathcal{A} – алгебра

Шаг 5. $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ и $E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow E \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \nu A &= \nu(A \cap \bigcup_{k=1}^n E_k) + \nu(A \setminus \bigcup_{k=1}^n E_k) \geq \nu(A \cap \bigcup_{k=1}^n E_k) + \nu(A \setminus E) = \underbrace{\sum_{k=1}^n \nu(A \cap E_k) + \nu(A \setminus E)}_{\rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A \cap E_k) + \nu(A \setminus E)} \\ &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \nu A \geq \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A \cap E_k) + \nu(A \setminus E) \geq \underbrace{\nu(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap E_k))}_{\nu(A \cap E)} + \nu(A \setminus E) \end{aligned}$$

Шаг 6. $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$

Переделаем в дизъюнктивное объединение

Т.е. \mathcal{A} – σ -алгебра

2. $\nu|_{\mathcal{A}}$ – мера, т.к. это объем и счетная полуаддитивная

$$\nu(A \cap \bigcup_{k=1}^n E_k) = \sum_{k=1}^n \nu(A \cap E_k); \quad A = X \Rightarrow \text{объем}$$

$\nu|_{\mathcal{A}}$ – полная мера. Если $\nu B = 0$ и $A \subset B$, то $\nu A = 0$ и тогда $A \in \mathcal{A}$ по шагу 1

Definition 1.18. Внешняя мера

μ – мера на полукольце \mathcal{P} . Внешняя мера, порожденная μ называется

$$\mu^* A := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, A_k \in \mathcal{P} \right\}$$

Если такого покрытия для A нет, то $\mu^* A = +\infty$

Remark 1.8.

1. Можем рассматривать только покрытия дизъюнктивными множествами

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj} \quad \text{и} \quad \bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj} \subset A_k$$

2. Если μ – мера на σ -алгебре, то $\mu^* A = \inf \{ \mu B : B \supset A \text{ и } B \in \mathcal{A} \}$

Theorem 1.16.

μ^* – субмера, совпадающая с μ на \mathcal{P}

Доказательство:

Шаг 1. Если $A \in \mathcal{P}$, то $\mu A = \mu^* A$

\geq Берем покрытие $A, \emptyset, \emptyset, \dots$ $\mu^* A = \inf \leq \mu A$

$\leq A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \mu A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$ (счетная полуаддитивность меры) $\Rightarrow \mu A \leq \inf = \mu^* A$

Шаг 2. μ^* – субмера

Надо проверить, если $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \mu^* A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* A_n$

Если справа есть $+\infty$, то все очев. Считаем, что $\mu^* A_n < +\infty$

Возьмем покрытие $A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{nk}$, т.ч. $C_{nk} \in \mathcal{P}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \mu C_{nk} < \mu^* A_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \Rightarrow A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{nk}$

$$\mu^* A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu C_{nk} < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* (A_n + \frac{\varepsilon}{2^n}) = \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* A_n$$

Definition 1.19. Стандартное продолжение меры

μ_0 – мера на полукольце \mathcal{P}

μ_0^* – внешняя мера, построенная по μ_0 – субмера

μ – сужение субмеры μ_0^* на μ_0^* -измеримые множества

μ называется стандартным продолжением μ_0

Declaration 1.5.

Будем писать μ -измеримые, вместо μ_0^* -измеримые

Theorem 1.17.

Это действительно продолжение. Т.е. множества из \mathcal{P} будут μ -измеримы

Доказательство:

Шаг 1. Если E и $A \in \mathcal{P}$, то $\mu_0^* A \geq \mu_0^* (A \cap E) + \mu_0^* (A \setminus E)$

$$\mu_0^* A = \mu_0 A \text{ и } \mu_0^* (A \cap E) = \mu_0 (A \cap E)$$

$$A \setminus E = \bigsqcup_{k=1}^m Q_k, \text{ где } Q_k \in \mathcal{P} \Rightarrow A = (A \cap E) \sqcup \bigsqcup_{k=1}^m Q_k \Rightarrow \mu_0 A = \mu_0 (A \cap E) + \underbrace{\sum_{k=1}^m \mu_0^* Q_k}_{\geq \mu_0^* (A \setminus E)} \geq$$

$$\geq \mu_0^* (A \cap E) + \mu_0^* (A \setminus E)$$

Шаг 2. Если $E \in \mathcal{P}$, а $A \notin \mathcal{P}$

Если $\mu_0^* A = +\infty$, то неравенство очевидно. Считаем, что $\mu_0^* A < +\infty$

Возьмем покрытие $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, т.ч. $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k < \mu_0^* A + \varepsilon$ ($P_n \in \mathcal{P}$)

$$\mu_0 P_k \geq \mu_0^* (P_k \cap E) + \mu_0^* (P_k \setminus E)$$

$$\varepsilon + \mu_0^* A > \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0^* (P_k \cap E) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0^* (P_k \setminus E) \geq \underbrace{\mu_0^* \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \cap E) \right)}_{\supset A \cap E} + \underbrace{\mu_0^* \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \setminus E) \right)}_{\supset A \setminus E} \geq$$

$$\geq \mu_0^* (A \cap E) + \mu_0^* (A \setminus E)$$

Definition 1.20. σ -конечная мера

Мера μ – σ -конечная, если $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, т.ч. $\mu X_n < +\infty$

Remark 1.9.

1. Мету и ее стандартное продолжение будем обозначать одинаково
2. μ задана на σ -алгебре

$$\mu A = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : P_k \in \mathcal{P}, \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supset A \right\}$$
3. Применение стандартного продолжения к стандартному продолжению меры не дает ничего нового
4. Можно ли продолжить меру на более широкий класс множеств?
Обычно да, но нет однозначности продолжения
5. Можно ли по-другому продолжить меру на σ -алгебру μ -измеримых множеств?
Если μ_0 – σ -конечная мера, то нет!
6. Обязательно ли полная мера задана на σ -алгебре μ -измеримых множеств?
Если μ_0 – σ -конечная, то да

Exercise 1.3.

Доказать замечание 1.9.3.

Подсказка: нужно доказать, что $\mu_0^* = \mu^*$

Theorem 1.18.

\mathcal{P} – полукольцо, μ – стандартное продолжение с полукольца

μ^* – внешняя мера. A – множество, т.ч. $\mu^* A < +\infty$. Тогда существует $B_{nk} \in \mathcal{P}$, т.ч.

$$C_n := \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}, \quad C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n, \quad C \supset A \text{ и } \mu C = \mu^* A$$

Доказательство:

$$\mu^* A = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : P_k \in \mathcal{P} \text{ и } \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supset A \right\}$$

Пусть $B_{nk} \in \mathcal{P}$, т.ч. $\sum_{k=1}^{\infty} \mu B_{nk} < \mu^* A + \frac{1}{n}$ и $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk} \supset A$

$$A \subset C_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk} \Rightarrow \mu C_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu B_{nk} < \mu^* A + \frac{1}{n}$$

$$A \subset C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \subset C_n; \quad \mu C \leq \mu C_n < \mu^* A + \frac{1}{n} \Rightarrow \mu C \leq \mu^* A$$

$$C \supset A \Rightarrow \mu^* A \leq \mu^* C = \mu C$$

Theorem 1.19. Следствие

\mathcal{P} – полукольцо, μ – стандартное продолжение с \mathcal{P} , A – μ -измеримое множество.

$\mu A < +\infty$. Тогда существует $B \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ и e – μ -измеримое, т.ч. $A = B \sqcup e$ и $\mu e = 0$

Доказательство:

По теореме существует $C \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$, т.ч. $A \subset C$ и $\mu A = \mu C$

$$e_1 := C \setminus A; \quad \mu e_1 = \mu C - \mu A = 0$$

По теореме найдется $e_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$, т.ч. $e_1 \subset e_2$ и $\mu e_2 = \mu e_1 = 0 \Rightarrow A \supset C \setminus e_2$

$$\mu(\underbrace{C \setminus e_2}_B) = \mu C = \mu A$$

$$e := A \setminus B \Rightarrow \mu e = \mu A - \mu B = 0$$

Theorem 1.20. Единственность продолжения

\mathcal{P} – полукольцо, μ – стандартное продолжение с полукольца, \mathcal{A} – σ -алгебра, на которой задана μ . ν – мера на \mathcal{A} , т.ч. $\mu P = \nu P \ \forall P \in \mathcal{P}$
Если мера μ – σ -конечна, то $\mu A = \nu A \ \forall A \in \mathcal{A}$

Reminder 1.2. σ -конечность

μ – σ -конечна, если $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, т.ч. $\mu X_n < +\infty$

Доказательство:

Шаг 1. $\mu A \geq \nu A \ \forall A \in \mathcal{A}$

$$\mu A = \inf \left\{ \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k}_{\geq \nu A} : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \text{ и } P_k \in \mathcal{P} \right\}. \text{ По усиленной монотонности меры } \nu$$

$$\nu A \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu P_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \Rightarrow \mu A \geq \nu A$$

Шаг 2. Если $E \in \mathcal{A}$ и $\mu P < +\infty$, то $\mu(P \cap E) = \nu(P \cap E) \ \forall P \in \mathcal{P}$

$$\mu P = \underbrace{\mu(P \cap E)}_{\geq \nu(P \cap E)} + \underbrace{\mu(P \setminus E)}_{\geq \nu(P \setminus E)} \geq \nu(P \cap E) + \nu(P \setminus E) = \nu P \Rightarrow \mu(P \cap E) = \nu(P \cap E)$$

Шаг 3. $\mu A = \nu A \ \forall A \in \mathcal{A}$

$$\mu - \sigma\text{-конечная} \Rightarrow X = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n, \text{ т.ч. } P_n \in \mathcal{P} \text{ и } \mu P_n < +\infty$$

$$\text{Тогда } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap P_n)$$

$$\mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap P_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A \cap P_n) = \nu A$$

1.4 §4. Мера Лебега

Theorem 1.21.

λ_m (классический объем в \mathbb{R}^m) – σ -конечная мера

Доказательство: (на записи рисуночки!)

Достаточно проверить счетную полуаддитивность λ_m , т.е. если $(a, b] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n]$, то

$$\lambda_m(a, b] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m(a_n, b_n]$$

Возьмем $a' \in (a, b]$, т.ч. $\lambda_m(a', b] > \lambda_m(a, b] - \varepsilon \Rightarrow [a', b] \subset (a, b]$

Возьмем b'_n , т.ч. $(a_n, b_n] \subset (a_n, b'_n]$ и $\lambda_m(a_n, b'_n] < \lambda_m(a_n, b_n] + \frac{\varepsilon}{2^n}$

$$\underbrace{[a', b]}_{\text{замкн. паралл. – компакт}} \subset (a, b] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a_n, b'_n]}_{\text{откр. паралл. – откр. мн-ва}}$$

Выберем конечное подпокрытие $(a', b] \subset [a', b] \subset \bigcup_{n=1}^N (a_n, b'_n] \subset \bigcup_{n=1}^N (a_n, b'_n]$

По конечной полуаддитивности объема:

$$\lambda_m(a, b] - \varepsilon < \lambda_m(a', b] \leq \sum_{n=1}^N \lambda_m(a_n, b'_n] < \sum_{n=1}^N (\lambda_m(a_n, b_n] + \frac{\varepsilon}{2^n}) < \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m(a_n, b_n] \text{ и устремляем } \varepsilon \text{ к } 0$$

Definition 1.21. Мера Лебега

Мера Лебега – стандартное продолжение классического объема

Declaration 1.6. Обозначение

\mathcal{L}^m – σ -алгебра, на которую продолжили
Лебеговская σ -алгебра

Remark 1.10.

1. Если $A \in \mathcal{L}^m$, то $\lambda_m A = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_m P_k : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \text{ и } P_k - \text{ячейки} \right\}$
2. Можно брать ячейки из $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m$

Theorem 1.22. Свойства меры Лебега

1. Открытые множества измеримы и меры непустого открытого > 0
2. Замкнутые множества измеримы
3. Мера одноточечного множества равна 0
4. Мера ограниченного измеримого множества конечна
5. Всякое измеримое множество – счетное объединение множеств конечной меры
 Картинка! $\mathbb{R}^m = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$, P_k – единичные ячейки. $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \cap A)$ и $\lambda_m(P_k \cap A) \leq \lambda_m P_k = 1$
6. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m : \forall \varepsilon > 0$ найдутся $A_\varepsilon, B_\varepsilon \in \mathcal{L}^m$, т.ч. $A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$ и $\lambda_m(B_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$. Тогда $E \in \mathcal{L}^m$

Remark 1.11.

Это свойство любой полной меры

7. Пусть $e \subset \mathbb{R}^m$, т.ч. $\forall \varepsilon > 0$ найдется $B_\varepsilon \in \mathcal{L}^m$, т.ч. $e \subset B_\varepsilon$ и $\lambda_m B_\varepsilon < \varepsilon$
 Тогда $E \in \mathcal{L}^m$ и $\lambda_m e = 0$
8. Счетное объединение множеств нулевой меры – множество нулевой меры
9. Счетное множество имеет нулевую меру
10. Множество нулевой меры не имеет внутренних точек
11. $\lambda_m e = 0$ и $\varepsilon > 0$. Тогда найдутся кубические ячейки Q_k , т.ч. $e \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_m Q_k < \varepsilon$
12. Пусть $m \geq 2$. $H_k(c) = \{x \in \mathbb{R}^m : x_k = c\}$. Тогда $\lambda_m(H_k(c)) = 0$
13. Пусть $m \geq 2$. Множество, содержащееся в нбс объединении гиперплоскостей $H_k(c)$, имеет меру 0
14. $\lambda_m(a, b] = \lambda_m(a, b) = \lambda_m[a, b]$

Доказательство:

1. Открытые множества лежат в $\mathcal{B}(\mathcal{P}^m)$. Картинка на записи! $\lambda_m \delta > \lambda_m(\text{ячейка}) > 0$
3. Картинка! $\lambda_m(\text{точка}) < \lambda_m(\text{ячейка}) = \varepsilon^m$
4. Картинка! A – ограничено. $\lambda_m A \leq \lambda_m(\text{шар}) \leq \lambda_m(\text{ячейка}) < +\infty$
6. $A_{\frac{1}{n}} \subset E \subset B_{\frac{1}{n}}$; $\lambda_m(B_{\frac{1}{n}} \setminus A_{\frac{1}{n}}) < \frac{1}{n}$
 $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{L}^m$ и $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{L}^m$
 $B \setminus A \subset B_{\frac{1}{n}} \setminus A_{\frac{1}{n}}$; $\lambda_m(B \setminus A) \leq \lambda_m(B_{\frac{1}{n}} \setminus A_{\frac{1}{n}}) < \frac{1}{n} \Rightarrow \lambda_m(B \setminus A) = 0$
 Тогда т.к. $E \setminus A \subset B \setminus A \Rightarrow E \setminus A \in \mathcal{L}^m$
 Тогда $E = \underbrace{A}_{\in \mathcal{L}^m} \cup \underbrace{(E \setminus A)}_{\in \mathcal{L}^m}$
7. $A_\varepsilon = \emptyset$ в свойстве 6
10. От противного. Если a – внутренняя точка A . Рисунок! $\Rightarrow \lambda_m A \geq \lambda_m(\text{ячейка}) > 0$
11. $0 = \lambda_m e = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_m P_k : e \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \text{ и } P_k \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m \right\}$

Возьмем такие $P_k \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m$, что $e \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_m P_k < \varepsilon$

Рассмотрим P_k , у нее все стороны имеют рациональную длину. $d = \frac{1}{\text{НОК знаменателей}}$
 \Rightarrow каждая сторона кратна $d \Rightarrow$ нарежем P_k на кубики со стороной d

$$12. A_n := (-n, n]^m \cap H_k(c) \Rightarrow H_k(c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Достаточно доказать, что $\lambda_n A_n = 0$. $A_n \subset (-n, n] \times \dots \times (-n, n] \times (c - \varepsilon, c] \times (-n, n] \times \dots$
 $\lambda_m(\text{ячейка}) = (2n)^{m-1} \cdot \varepsilon$

Remark 1.12.

1. Существуют несчетные множество нулевой меры

При $m \geq 2$ подойдет $H_1(0)$

При $m = 1$ подойдет Канторово множество:

$$1 = \lambda(0, 1] = \lambda K + \underbrace{\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \dots + 2^n \cdot \frac{1}{3^{n+1}}}_{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1} \Rightarrow \lambda K = 0$$

$(0, 1]$ запишем в троичной системе счисления. Запрещаем запись $\dots \underbrace{000}_{\text{нули}}$

Т.к. $0, 2000 \dots = 0, 1222 \dots$

$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ – числа, у которых первая цифра после запятой – 1

$(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ и $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ – числа, у которых вторая цифра после запятой – 1

И так далее

K – числа из $(0, 1]$, у которых в троичной записи нет 1. Биекция между K и $(0, 1]$:

$0 \mapsto 0$; $2 \mapsto 1$; троичная \mapsto двоичная

2. Существуют неизмеримые множества (т.е. $\mathcal{L}^m \neq 2^{\mathbb{R}^m}$)

Theorem 1.23. Регулярность меры Лебега

$E \in \mathcal{L}^m$. Тогда существует G – открытое, $G \supset E$, т.ч. $\lambda_m(G \setminus E) < \varepsilon$

Доказательство:

$$\lambda_m E < +\infty. \quad \lambda_m E = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_m P_k : P_k - \text{ячейки и } E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \right\}$$

Возьмем такие ячейки, что $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_m P_k < \lambda_m E + \varepsilon$ и $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$

Возьмем $(a_k, b_k) \supset P_k$, т.ч. $\lambda_m(a_k, b_k) < \lambda_m P_k + \frac{\varepsilon}{2^k}$

$E \subset G := \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$ – открытое

$$\lambda_m G \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_m(a_k, b_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_m P_k + \frac{\varepsilon}{2^k}) = \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_m P_k < 2\varepsilon + \lambda_m E$$

$$\lambda_m(G \setminus E) = \lambda_m G - \lambda_m E < 2\varepsilon$$

$$\lambda_m E = +\infty. \quad E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \text{ т.ч. } \lambda_m E_n < +\infty$$

По предыдущему случаю $\exists G_n$ – открытое, $G_n \supset E_n$ и $\lambda_m(G_n \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$

$G := \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ – открытое

$$G \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus E_n \Rightarrow \lambda_m(G \setminus E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m(G_n \setminus E_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

Theorem 1.24. Следствие 1

$\varepsilon > 0$, $E \in \mathcal{L}^m$. Тогда существует замкнутое F , т.ч. $F \subset E$ и $\lambda_m(E \setminus F) < \varepsilon$

Доказательство:

По теореме найдется G – открытое, т.ч. $G \supset \mathbb{R}^m \setminus E$ и $\lambda_m(G \setminus (\mathbb{R}^m \setminus E)) < \varepsilon \Rightarrow$
 $\Rightarrow F := \mathbb{R}^m \setminus G$ – замкнутое, $F \subset E$ и $E \setminus F = G \setminus (\mathbb{R}^m \setminus E)$

Theorem 1.25. Следствие 2

$E \in \mathcal{L}^m$. Тогда

$$\lambda_m E = \inf \{ \lambda_m G : G \text{ – открытое и } E \subset G \}$$

$$\lambda_m E = \sup \{ \lambda_m F : F \text{ – замкнутое и } E \supset F \}$$

$$\lambda_m E = \sup \{ \lambda_m K : K \text{ – компакт и } K \subset E \}$$

Доказательство:

1. Из теоремы $\Rightarrow \exists G \supset E$ – открытое, т.ч. $\lambda_m(G \setminus E) < \varepsilon \Rightarrow \lambda_m G < \lambda_m E + \varepsilon$
2. Если $\lambda_m E < +\infty$, то по следствию 1 $\exists F \subset E$ – замкнутое, т.ч. $\lambda_m(E \setminus F) < \varepsilon \Rightarrow \lambda_m F > \lambda_m E - \varepsilon$

Если $\lambda_m E = +\infty \dots \dots \Rightarrow \lambda_m F = +\infty$

3. Выберем замкнутое $F \subset E$, т.ч. $\lambda_m F > \lambda_m E - \varepsilon$

$$K_n := \underbrace{[-n, n]^m}_{\text{компакт}} \cap F$$

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \text{ и } \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = F \xrightarrow[\text{непр. меры снизу}]{\quad\quad\quad} \lambda_m K_n \rightarrow \lambda_m F > \lambda_m E - \varepsilon \Rightarrow \text{найдется } K_n,$$

т.ч. $\lambda_m K_n > \lambda_m F - \varepsilon$

В случае с $\lambda_m E = +\infty$ доказательство меняется несильно

Theorem 1.26. Следствие 3

$E \in \mathcal{L}^m$. Тогда существуют компакты $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ и e нулевой меры, т.ч. $E = e \sqcup \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$

Доказательство:

$\lambda_m E < +\infty$. Возьмем $K_n \subset E$ – компакт, т.ч. $\lambda_m K_n > \lambda_m E - \frac{1}{n}$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subset E \text{ и } E \setminus \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n}_e \subset E \setminus K_n \Rightarrow \lambda_m e < \lambda_m(E \setminus K) = \lambda_m E - \lambda_m K_n < \frac{1}{n} \Rightarrow \lambda_m e = 0$$

Как сделать вложенность? $K_1, K_1 \cup K_2, K_1 \cup K_2 \cup K_3, \dots$

$\lambda_m E = +\infty$. $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$; $\lambda_m E_n < +\infty$. Тогда $\exists K_{n1}, K_{n2} \dots$ – компакты и $\lambda_m e_n = 0$,

$$\text{т.ч. } E_n = e_n \sqcup \bigcup_{k=1}^{\infty} K_{nk} \Rightarrow E = \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n}_e \sqcup \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} K_{nk}$$