Конспект Шорохова Сергея
Если нашли опечатку/ошибку - пишите @le9endwp

Содержание

1 Линейная алгебра и геометрия

Типичная система линейных уравнений: $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$; $a, b, c, d, e, f \in R$ – кольцо или $\in K$ – поле

Неизвестные здесь: $\binom{x}{y} \in K \times K$

Множество линейных уравнений: $\{px + qy = r\}$

Операции:

- Их можно складывать
- Умножать на константу (элемент K)

Definition 1.1. Векторное пространство

K – поле. Векторное пространство над K это $(V, +, \cdot)$, где V – множество, $+ : V \times V \to V$, $\cdot : K \times V \to V$

Аксиомы:

1-4. $(V, +)$ – абелева группа
5. $(ab)v = a(bv)\ \forall a, b \in K, v \in V$
6. $(a + b)v = av + bv\ \forall a, b \in K, v \in V$
7. $a(v + u) = av + au\ \forall a \in K, v, u \in V$
8. $1v = v\ \forall v \in V$

Lemma 1.1.

$0 \cdot v = \overrightarrow{0}\ \forall v \in V$
$(-1) \cdot v = -v\ \forall v \in V$

Доказательство:

$(0 + 0)v = 0v + 0v \Rightarrow 0v = 0v + 0v$

$(-0)v + 0v = (-0)v + 0v + 0v \Rightarrow \overrightarrow{0} = 0v$

Тогда $\overrightarrow{0} = 0v = (1 + (-1))v = 1v + (-1)v = v + (-1)v$, т.е. $v + (-1)v = \overrightarrow{0} \Rightarrow (-1)v = -v$

Remark 1.1.

$u + v = v + u\ \forall u, v \in V$ следует из остальных 7 аксиом пространства (упражнение)

Example 1.1.

Тут рисуночки, говорящие что два вектора задают пространство, в котором выполнены аксиомы 1-8
Заметим, что есть биекция $vec \leftrightarrow R^2$, т.е. $v \to \binom{a}{b}$

Example 1.2. Самый главный пример

$$K^n = \{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} | a_i \in K\}$$

А еще тут выполнены все аксиомы (доказано методом очев): можем складывать, домножать итд

Это называем пространство столбцов

$^nK = \{(a_1, a_2 \dots a_n) | a_i \in K\}$

А это то же самое, но называем пространством строк

Definition 1.2. Линейное отображение

V_1, V_2 – векторные пространства над K

$f : V_1 \to V_2$ – линейное отображение (гомоморфизм), если:

1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)\ \forall v_1, v_2 \in V_1$
2. $f(kv) = kf(v)\ \forall k \in K, v \in V_1$

Definition 1.3. Изоморфизм

f – линейное отображение и биекция, тогда f – изоморфизм

$V_1 \cong V_2$ если существует изоморфизм $V_1 \to V_2$

А есть изоморфизм $vect_2 \cong R^2$, то есть вектор изоморфен его координатам

Example 1.3.

M – множество, $R \equiv K$

$V = HOM(M|R)$ – множество всех функций $M \to R$

$f_1, f_2 \in V$

$(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$

$(kf)(x) := k \cdot f(x)$

Значит V – векторное пространство

Example 1.4.

$M = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$

$$f \in V \leftrightarrow \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \in R^n$$

$V \cong R^n$

$M = [0, 1];\ (f : M \to R$ – непрерывная функция$)$

Example 1.5.

$V = \{(a_1, a_2 \ldots)|a_i \in R;\ a_{i+2} = a_i + a_{i+1}\}$
Заметим, что если $a \in V$, то $ka \in V$. Более того, если и $b \in V$, то $a + b \in V$
Но любую фиббоначиеву последовательность можно задать двумя начальными элементами, т.е. $(a_i) \in V \leftrightarrow (a_1, a_2) \in R^2$
Тогда $V \cong R^2$ но этот изоморфизм не лучший

Example 1.6.

M – множество, $V = 2^M$

1. $|M| = n$;
2. $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
3. $K = Z/2Z$
4. $0A = \varnothing$
5. $1A = A$

$1A + 1A = 2A \Rightarrow 1A + 1A = \varnothing$
$2A = \overrightarrow{0}\ \forall A$

Definition 1.4. Линейная комбинация

V – векторное пространство над K
$x_1 \ldots x_n \in V;\ a_1 \ldots a_n \in K$
Тогда $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$ – линейная комбинация векторов $x_1 \ldots x_n$ с коэффициентами $a_1 \ldots a_n$

Definition 1.5. Подпространство

V – векторное пространство над K. $U \subseteq V$
U – подпространство V, если U – векторное пространство над K с теми же операциями

Remark 1.2.

U – подпространство $V \Leftrightarrow$

1. $\forall u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U$
2. $\forall u \in U, k \in K \Rightarrow ku \in U$

Где $U \neq \varnothing$

Example 1.7.

$U = \{V \parallel l\}$ – подпространство V
K^3, $U \subset K^3$
$U = \{(x, y, z)|x + y + z = 0\}$ – подпространство K^3

Definition 1.6. Линейная оболочка

V – векторное пространство над K
$V_1, \dots V_n \in V$
Линейная оболочка $\langle V_1, \dots V_n \rangle$ – их множество линейных комбинаций с произвольными коэффициентами
$\langle V_1, \dots V_n \rangle = \{a_1 V_1 + \dots + a_n V_n | a_i \in K\}$

Remark 1.3.

1. $\langle V_1, \dots V_n \rangle$ – подпространство V
   $\langle V_1, \dots V_n \rangle < V$
2. $U < V$; $V_1 \dots V_n \in U \Rightarrow \langle V_1, \dots V_n \rangle \subset U$

Т.е. $\langle V_1, \dots V_n \rangle$ – нелинейное подпространство содержит $V_1 \dots V_n$

Доказательство:

$V_i = 0V_1 + \dots + 1V_i + \dots + 0V_n \Rightarrow V_i \in \langle V_1, \dots V_n \rangle$

$u, w \in \langle V_1, \dots V_n \rangle$

$ku + w \in \langle V_1, \dots V_n \rangle$

$U < V$ $V_i \in U \Rightarrow a_i V_i \in U$

$a_1 V_1 \dots a_n V_n \in U \Rightarrow a_1 V_1 + \dots + a_n V_n \in U$

Т.е. U содержит все линейные комбинации $V_1 \dots V_n$

Remark 1.4.

Аналогично определяется линейная оболочка для любого числа векторов

Definition 1.7. Порождающая система

M называется порождающей системой в V, если $\langle M \rangle = V$, т.е. $\forall v \in V$ – линейная комбинация векторов из M

Definition 1.8. Конечномерные пространства

V – векторное пространство над K
V называется конечномерным, если $\exists$ конечная порождающая система. Будем изучать конечномерные пространства

Lemma 1.2.

$\langle V_1 \dots V_n \rangle$
$\langle V_1 + \sum\limits_2^n a_i V_i, V_2 \dots V_n \rangle = \langle V_1, V_2 \dots V_n \rangle$

Доказательство:

$V_1 + \sum\limits_2^n a_i V_i \in \langle V_1, V_2 \dots V_n \rangle$ и $V_2 \dots V_n \in \langle V_1 \dots V_n \rangle$

Тогда $\langle V_1 + \sum\limits_2^n a_i V_i, V_2 \dots V_n \rangle = \langle V_1, V_2 \dots V_n \rangle$ по Rem2.

Definition 1.9. Линейная независимость

$M \subset V$
M называется линейно независимым, если $\forall v_1 \dots v_n \in M$ и $\forall a_1 \dots a_n \in K : \sum a_i v_i = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$
Т.е. никакая линейнай комбинация элементов M не равна 0

Proposition 1.1.

$v_1 \dots v_n \in V$
Тогда $v_1 \dots v_n$ – линейно зависимы (не линейно независимы) $\Leftrightarrow$ $\exists i : v_i \in \langle v_1 \dots v_{i-1}, v_{i+1} \dots v_n \rangle$
$v_i = \sum\limits_{j \neq i} a_j v_j$
$(-1)v_i + \sum\limits_{j \neq i} a_j v_j = \overrightarrow{0}$ – нетривиальная линейная комбинация
Пусть $\sum a_i v_i = 0$ – нетривиальная линейная комбинация
$\exists i : a_i \neq 0$
$-a_i v_i = \sum\limits_{j \neq i} a_j v_j \Rightarrow v_i = \sum\limits_{j \neq i} -\frac{a_j}{a_i} v_j$
$v_i \in \langle v_j \rangle$

Remark 1.5.

K не поле (ассоциативное кольцо)
V над k (с теми эе операциями) называется модулем над K. Для модулей это утверждение (и большинство других) неверно

Definition 1.10. Базис

V – векторное пространство над K
$v_1 \dots v_n$ – базис V, если это порождающая система и линейно независима

Definition 1.11. Размерность

V – конечномерное векторное пространство. Мощность его базиса называется размерностью V и обозначается $dim(V)$

Example 1.8.

$dim(K^n) = n$

Базис стандартный $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ итд

Definition 1.12.

$a_1 \dots a_n$ – координаты вектора v в базисе $v_1 \dots v_n$

Theorem 1.1.

Следующие условия равносильны:

1. $v_1 \dots v_n$ – базис V
2. $v_1 \dots v_n$ – порождающая линейно независимая система
3. $v_1 \dots v_n$ – максимальная по включению линейно независимая система
4. $\forall v \in V\ \exists! a_1 \dots a_n : v = \sum a_i v_i$

Theorem 1.2.

V – конечное векторное пространство

1. Базисы существуют
2. Любые два базиса равномощны

Доказательство:

$1 \Rightarrow 2$ $v_1 \dots v_n$ – базис $\Rightarrow v_1 \dots v_n$ – порождающая система

Почему лнз? $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0$ и $\exists a_i \neq 0 \Rightarrow v_i = \sum\limits_{j \neq i} c_j v_j \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle v_1 \dots v_n \rangle = \langle v_1 \dots v_{i-1}, v_{i+1} \dots v_n \rangle$

$2 \Rightarrow 1$ $v_1 \dots v_n$ лнз

Пусть не минимальная порождающая. НУО $v_2 \dots v_n$ – порождающая система, в частности $v_1 = \sum a_i v_i \Rightarrow v_1 \dots v_n$ – линейно зависимая

$2 \Rightarrow 4$ $v_1 \dots v_n$ – порождающая лнз

Т.к. порождающая $\forall v = \sum a_i v_i$

Единственность: пусть $\sum a_i v_i = \sum a'_i v_i : \sum (a_i - a'_i) v_i = 0 \Rightarrow a_i = a'_i \quad \forall i$

$4 \Rightarrow 2$ $\forall v \exists a_i : v = \sum a_i v_i$, т.е. $v_1 \dots v_n$ – порождающая

Лнз-ть: пусть $v_i = \sum\limits_{j \neq i} a_j v_j$. Тогда $v_i = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 1 \cdot v_i + \ldots + 0 \cdot v_n =$

$= 0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \ldots + 0 \cdot v_n$

Exercise 1.1.

$2 \Leftrightarrow 3$

Lemma 1.3. Линейная зависимости линейных комбинаций

V – векторное пространство над K

$v_1 \dots v_n \in \langle u_1 \dots u_m \rangle;\ n > m$

Тогда $v_1 \dots v_n$ – линейно зависимы

Доказательство:

ММИ по m. База $m = 1$

$$\begin{cases} v_1 = a_1 u_1 \\ v_2 = a_2 u_1 \\ \dots \end{cases}$$

$a_2 v_1 - a_1 v_2 = 0$. Либо v_1, v_2 – линейно зависимы, либо $a_1, a_2 = 0 \Rightarrow v_1 = \overline{0} = v_2$

$1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \ldots = 0 \Rightarrow v_1 \dots v_n$ – линейно зависимы

Переход: $m \to m + 1$

$$\begin{cases} v_1 = a_{1_1}u_1 + \ldots + a_{1_{m+1}}u_{m+1} \\ v_2 = a_{2_1}u_1 + \ldots + a_{2_{m+1}}u_{m+1} \\ \ldots \\ v_n = a_{n_1}u_1 + \ldots + a_{n_{m+1}}u_{m+1} \end{cases}$$

1. $a_{1_{m+1}} = a_{2_{m+1}} = \ldots = a_{n_{m+1}} = 0$
   $v_1 \ldots v_n \in \langle u_1 \ldots u_m \rangle$
   $n > m + 1 \Rightarrow n > m \Rightarrow v_1 \ldots v_n$ – линейно зависимы
2. НУО $a_{1_{m+1}} \neq 0$
   Вычтем из i равенства $(i = 2 \ldots n)$ первое умноженное на $\frac{a_{i_{m+1}}}{a_{1_{m+1}}}$
   Тогда $\tilde{v_i} = v_i - \frac{a_{i_{m+1}}}{a_{1_{m+1}}} v_1 = \sum\limits_{k=1}^{m+1} (a_{i_k} - \frac{a_{i_{m+1}}}{a_{1_{m+1}}} a_{1_k}) u_k \in \langle u_1 \ldots u_m \rangle$
   $\tilde{v_2} \ldots \tilde{v_n} \in \langle u_1 \ldots u_m \rangle$, но $n > m + 1 \Rightarrow n - 1 > m \Rightarrow \tilde{v_2} \ldots \tilde{v_n}$ – линейно зависимы
   $\exists a_1 \ldots a_n$ – не все нули:
   $0 = \sum a_i \tilde{v_i} = \sum a_i (v_i - \frac{a_{i_{m+1}}}{a_{1_{m+1}}} v_1) = \sum a_i v_i + (\ldots) v_1 \Rightarrow v_1 \ldots v_n$ – линейно зависимы

Theorem 1.3. Следствие

$v_1 \ldots v_n$ – базис и $u_1 \ldots u_m$ – базис $\Rightarrow n = m$ (теорема часть 2)

Доказательство:

Пусть НУО $n > m$

$u_1 \ldots u_m$ – базис $\Rightarrow$ порождающая $\Rightarrow v_1 \ldots v_n \in \langle u_1 \ldots u_m \rangle$; $n > m \Rightarrow v_1 \ldots v_n$ – линейно зависимы ???

1. $v_1 \ldots v_s$ – порождающая система (существует, т.к. V конечномерно)
   Пусть $v_1 \ldots v_s$ – линейно зависимы
   $\exists i : v_i \in \langle v_j \rangle$; $v_i = \sum\limits_{j \neq i} a_j v_j$
   НУО $i = 1$
   Тогда $\langle v_1 \ldots v_n \rangle = \langle v_1 - \sum\limits_{j \neq 1} a_j v_j, v_2 \ldots v_n \rangle = \langle v_2 \ldots v_n \rangle$
   $v_2 \ldots v_n$ – порождающая система. Продолжаем выкидывать v_i пока не получим базис
2. **Example 1.9. За что мы боремся?**

   Векторные пространства $\to$ абелевы группы
   $Z = \langle 1, 2, 3 \rangle = \langle 1, 2 \rangle = \langle 1 \rangle$
   С другой стороны $Z = \langle 1, 2, 3 \rangle = \langle 2, 3 \rangle$ – минимальная порождающая система

   $dimV = n$, если $\exists$ базис $v_1 \ldots v_n \Leftrightarrow$ в любом базисе n элементов

   Lemma 1.4.

   V – конечномерное пространство, $u_1 \ldots u_k$ – линейно независимы $\Rightarrow \exists u_{k+1} \ldots u_n :$ $u_1 \ldots u_n$ – базис

   Доказательство:
   $u_1 \ldots u_k$ – не максимальная лнз. $\exists u_{k+1} : u_1 \ldots u_{k+1}$ – лнз
   $u_1 \ldots u_{k+1}$ – не максимальная лнз. $\exists u_{k+2} : u_1 \ldots u_{k+2}$ – лнз итд
   Заметим: не может быть $u_1 \ldots u_{n+1}$ – лнз (по лзлк), $u_1 \ldots u_{n+1} \in \langle v_1 \ldots v_n \rangle$

$\Rightarrow$ не позже n шага процесс закончится. На самом деле ровно на n шаге

Theorem 1.4. Следствие

$n = dimV$, $u_1 \dots u_m \in V$
$m > n \Rightarrow u_1 \dots u_m$ – линейно зависимы
$m < n \Rightarrow u_1 \dots u_m$ – не порождающая система

Theorem 1.5. Следствие

$U \leq V$, тогда $dimU \leq dimV$ и $dimU = dimV \Leftrightarrow U = V$

Theorem 1.6.

V – k-мерное над K. $dimV = n \Rightarrow V \cong K^n$

Доказательство:

$v_1 \dots v_n$ – базис V. Рассмотрим отображение $p : K^n \to V$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \to a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$$

$$f(x+y) = f(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n) \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}) = \sum(a_i+b_i)v_i = \sum a_iv_i + \sum b_iv_i = f(x) + f(y)$$

Exercise 1.2.

$f(kx) = kf(x)$

f – сюръективно и инъективно: по определению базиса

Example 1.10.

$v = \{f \in K[x] | deg(f) \leq 2\} = \langle 1, x, x^2 \rangle = \langle 1, 1+x, x^2 \rangle$ – оба базисы

Example 1.11. Числа Фиббоначи

$V = \{(a_1 \ldots) | a_{i+1} = a_i + a_{i-1}\}$
$V \leftrightarrow (a_1, a_2)$, $V \cong R^2$
Хороший базис:
$\varphi_1 = (1, \varphi, \varphi^2 \ldots) \in V$
$\varphi_2 = (1, (-\frac{1}{\varphi}), (-\frac{1}{\varphi})^2 \ldots) \in V$
φ_1, φ_2 – базис
$f = a\varphi_1 + b\varphi_2$
$f \to u_n = a \cdot \varphi^n + v(-\frac{1}{\varphi})^n$
$a = b = \frac{1}{\sqrt{5}}$

2 Система линейных уравнений (СЛУ)

Definition 2.1. Линейное уравнение

Линейное уравнение: $a_1 x_1 \ldots a_n x_n = b$
где $a_1 \ldots a_n, b \in K$, а $x_1 \ldots x_n$ – переменные

Definition 2.2. Система линейных уравнений

СЛУ – это набор линейных уравнений: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{k_i} x_i = b_k$, $k = 1 \ldots m$
СЛУ соответствует отображение $A : K^n \to K^m$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \sum a_{1_i} x_i \\ \vdots \\ \sum a_{m_i} x_i \end{pmatrix}$$

Это отображение уважает сложение (просто поверьте), и вообще A – линейное отображение

Definition 2.3. Ядро и образ

$A : U \to V$ – линейное
Ядро: $Ker(A) = \{x \in U | A(x) = \overline{0}\} \subset U$
$Im(A) = \{A(x) | x \in U\} \subset V$

Example 2.1.

В нашем примере
$Im(A) = \{ \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} |\text{СЛУ} A(x) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \}$
$Ker(A)$ = множество решений системы
$\begin{cases} \sum a_{1_i} x_i = 0 \\ \vdots \\ \sum a_{m_i} x_i = 0 \end{cases}$
Такие системы называются однородными

Lemma 2.1.

$A : U \to V$ – линейное отображение $\Rightarrow Ker(a) \le U$ и $Im(A) \le V$ – подпространство

Доказательство:

1. Надо проверить замкнутость
   $u_1, u_2 \in Ker(A)$, т.е. $A(u_1) = 0$ и $A(u_2) = 0$
   $A(u_1 + ku_2) = A(u_1) + kA(u_2) = 0 + 0 = 0$
2. $v_1, v_2 \in Im(A)$, $v_1 = A(u_1)$ и $v_2 = A(u_2)$
   $v_1 + kv_2 = A(u_1) + kA(u_2) = A(u_1 + ku_2) = A(u) \Rightarrow v_1 + kv_2 \in Im(A)$

Proposition 2.1.

В нашем примере:
Множество решений однородной линейной системы – подпространство в K^n
Тривиальный случай: $dim(Ker(A)) = 0$, т.е. $Ker(A) = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \}$ – всегда решение однородной СЛУ (есть только тривиальное решение)

Theorem 2.1.

В однородной СЛУ
$n > m \Rightarrow dim(Ker(a)) > 1$, т.е. существует нетривиальное решение СЛУ

Доказательство:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$u_1 \ldots u_n \in K^m;\ n > m \Rightarrow u_1 \ldots u_n$ – лз, т.е. $\exists x_1 \ldots x_n$ – не все нули: $\sum x_i u_i = 0$

$\mathcal{A} : K^n \to K^m$

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum a_{1i}x_i \\ \sum a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$$

Решить систему: найти $\mathcal{A}^{-1}$

U, V – векторные пространства. $A : U \to V$ линейное отображение

Как описать A?

Lemma 2.2.

$U_1, U_2 \ldots U_n$ – базис U и $V_1, V_2 \ldots V_n \in V$
Тогда $\exists!$ линейное отображение $A : U \to V : A(U_i) = V_i \quad \forall i = 1 \ldots n$

Доказательство:

динственность: Пусть $A_1(U_i) = V_i$ и $A_2(U_i) = V_i$
$?A_1 = A_2 \Leftrightarrow A_1(u) = A_2(u) \quad \forall u \in U$
$u = \sum a_i u_i \ a_i \in K$
Тогда $A_1(u) = A_1(a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n) = A_1(a_1u_1) + A_1(a_2u_2) + \ldots + A_1(a_nu_n) = a_1A_1(u_1) + a_2A_1(u_2) + \ldots + a_nA_1(u_n) = a_1V_1 + a_2V_2 + \ldots + a_nV_n$
Аналогично для A_2
Тогда $A_1(u) = A_2(u) \quad \forall u \in U$

Существование: Построим A. Рассмотрим какой-то $u \in U$
$\exists! a_1, a_2 \ldots a_n : u = \sum a_i u_i$
Положим $A(u) = \sum a_i V_i$
$U_i = 0 \cdot u_1 + \ldots + 1 \cdot u_i + \ldots + 0 \cdot u_n \Rightarrow A(U_i) = 0 \cdot V_1 + \ldots + 1 \cdot V_i + \ldots + 0 \cdot V_n = V_i$
$u = \sum a_i u_i;\ v = \sum a_i V_i$
$A(u + v) = A(\sum a_i u_i + \sum b_i u_i) = A(\sum (a_i + b_i) u_i) = \sum (a_i + b_i) V_i = \sum a_i V_i + \sum b_i V_i = A(u) + A(v)$
$A(kv) = kA(v)$ – очев

Definition 2.4. Матрица линейного отображения в базисах

Итак. $u_1, u_2 \dots u_n$ – базис U
Задать $A : U \to V \Leftrightarrow$ зафиксировать $A(u_1) \dots A(u_n) \in V$
$A : U \to V$ линейно $v_1, v_2 \dots v_m$ – базис V
$A(u_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{m1}v_m$
$\vdots$
$A(u_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{mn}v_m$
$A = \begin{pmatrix} a_1 1 & a_1 2 & \dots & a_1 n \\ a_2 1 & a_2 2 & \dots & a_2 n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m 1 & a_m 2 & \dots & a_m n \end{pmatrix}$ называется матрицей линейного отображения A в базисах $\{u_i\}$ и $\{v_i\}$
Обозначение: $[A]_{\{u_i\},\{v_i\}}$ – зависит от $\{u_i\}$ и $\{v_i\}$

Notation 2.1. Итог

Такая матрица:
- Отображение $\{1 \dots m\} \times \{1 \dots n\} \to R$ – R кольцо
- Отображение $I \times I \to R$ I, I – конечные множества

Обозначение: $M_{m,n}(R)$ – матрицы $m \times n$ над R

Изоморфизм:

K – поле, $M_{1,n} \cong^n K$ и $M_{n,1} \cong K^n$

$M_{m,n}(K)$ – векторное пространство над K

$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})_{i=1\dots m; j=1\dots n}$

$k(a_{ij}) = (ka_{ij})_{i=1\dots m; j=1\dots n}$

Операции:

${}^nK \times K^n$

$((a_1 a_2 \dots a_n), \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}) \to \sum a_i b_i$ – умножение строки на столбец

$M_{m,n} \times K^n \to K^m$ – пример с прошлой лекции

Theorem 2.2. Свойства:

$(A, X) \to AX$
$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2$
$(A_1 + A_2)X = A_1X + A_2X$
$A(kX) = k(AX)$

Доказательство:

$m = 1$

$(a_1 + a_1')b_1 + \dots + (a_n + a_n')b_n = \sum a_i b_i + \sum a_i' b_i$ и наоборот $\sum (ka_i)b_i = \sum a_i(kb_i) = k \sum a_i b_i$

В частности $A \in M_{m,n}$ – fix

$X \to AX$ – линейное отображение $K^n \to K^m$

Lemma 2.3.

$A : U \to V$, $\{u_i\}$ – базис U и $\{v_i\}$ – базис V
$A = [A]_{\{u_i\},\{v_i\}}$
$u \in U;\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – координаты u в базисе $\{u_i\}$
Тогда AX – координаты $A(u)$ в базисе $\{v_i\}$

Доказательство:

$u = \sum x_i u_i$

$A(u) = \sum x_i A(u_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i (\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji} v_j) = \sum\limits_{j=1}^{m} (\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji} x_i) v_j$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i} x_i \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{mi} x_i \end{pmatrix}$ – координаты $A(u)$ в базисе $\{v_i\}$ и это $A \cdot X$

Remark 2.1. Мораль

Любое линейное отображение при координатизации (отождествлении с K^n) превращается в умножение на матрицу
$x \to A(x)$
$\tilde{x} \to A(\tilde{x})$

$A : U \to V$ и знаем $KerU, ImU$ – подпространства

$KerA = \{x | A(x) = 0_v\}$

$ImA = \{A(x) | x \in U\}$

$A : K^n \to K^m\ X \to AX$

$A \in M_{m,n}(K)$

$KerA$ – множество решений однородной СЛУ с матрицей A

$ImA = \{B | \exists x : Ax = B\}$

$u_1 \dots u_n$ – базис $\Rightarrow ImA = \langle A(u_1) \dots A(u_n) \rangle$

$A(u) = \sum a_i A(u_i)$

e_i – стандартный базис $(i = 1 \dots n)$

$ImA = \langle A_1 e_1 \dots A_n e_n \rangle$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$ – i-ый столбец A

Theorem 2.3. Теорема о ядре и образе

$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Example 2.2.

1. A – поворот на $\frac{\pi}{2}$ – линейное отображение

Remark 2.2.

Параллельный перенос не линейное отображение

2. $A(x) = 0$
3. A – ортогональная проекция на Ox

1. $ImA = R^2$
   $KerA = \{0\}$
2. $ImA = \{0\}$
   $KerA = \mathbb{R}^2$
3. $ImA =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$

   $KerA =< \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$

Theorem 2.4.

$A : U \to V$ – линейное
1. $\exists$ базис $u_1 \dots u_n$ в U и $k \leq n$:
   $u_1 \dots u_k$ – базис $KerA$ и $u_{k+1} \dots u_n$ – базис ImA
2. $dimKerA + dimImA = dimU$

Доказательство:

$1 \Rightarrow 2$: $k = dimKerA$
$n - k = dimImA$
$n = dimU$

1: Выберем $u_1 \dots u_k$ – базис $KerA$
$u_1 \dots u_k$ – ЛНЗ $\Rightarrow$ дополним до базиса: $u_1 \dots u_k, u_{k+1} \dots u_n$ – базис U
Осталось доказать: $A(u_{k+1}) \dots A(u_n)$ – базис ImA
1. $A(u_i) \in ImA$ по определению
2. Проверим $\langle A(u_{k+i}) \rangle = ImA$
   $v \in ImA \Rightarrow v = A(u)\ u \in U,\ a = a_1u_1 + \ldots + a_nu_n$
   $A(u) = \sum a_iA(u_i) = \sum\limits_{i=k+1}^{n} a_iA(u_i) \Rightarrow v \in \langle A(u_{k+i}) \rangle$
3. Проверим ЛНЗ: пусть $\sum\limits_{i=k+1}^{n} a_iA(u_i) = 0 \overset{?}{\Rightarrow} a_i = 0\ \forall i$
   По линейности $0 = \sum a_{k+i}A(u_{k+i}) = A(\sum a_{k+i}u_{k+i})$
   То есть $\sum a_{k+i}u_{k+i} \in KerA = \langle u_1 \dots u_k \rangle$
   $(\sum\limits_{i=1}^{n-k} a_{k+i}u_{k+i} = \sum\limits_{i=1}^{k}(-a_i)u_i) \Rightarrow \sum a_iu_i = 0 \Rightarrow a_1 = \ldots = a_n = 0$
   В частности $a_{k+1} = \ldots = a_n = 0$

3 Операции над пространствами

Lemma 3.1.

$U_1, U_2 \leq U \Rightarrow U_1 \cap U_2 \leq U$. Д-во: очев
$U_1, U_2 \leq U \Rightarrow U_1 \cup U_2 \not\leq U$ (почти никогда)
$U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ – сумма по Минковскому
Сама лемма: $U_1, U_2 \leq U \Rightarrow U_1 + U_2 \leq U$

Доказательство:

$x, y \in U_1 + U_2$

$x = x_1 + x_2;\ y = y_1 + y_2$, где $x_1, y_1 \in U_1;\ x_2, y_2 \in U_2$

$x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \in U_1 + U_2$

Definition 3.1. Прямая сумма

U_1, U_2 – векторные пространства над K
$U_1 + U_2 = U_1 \times U_2$ как множество с покомпонентными операциями – (внешняя) прямая сумма U_1 и U_2

Lemma 3.2.

$i_1 \dots u_n$ – базис U и $v_1 \dots v_m$ – базис V
Тогда $\{(u_1, 0) \dots (u_n, 0), (0, v_1) \dots (0, v_m)\}$ – базис $U + V$

Доказательство:

$u \in U;\ v \in V$

$u = \sum a_i u_i;\ v = \sum b_i v_i$

$u + v = \sum a_i u_i + \sum b_i v_i = \sum (a_i u_i, 0) + \sum (0, b_i v_i)$

Theorem 3.1. Следствие

$dim(U + V) = dimU + dimV$

Theorem 3.2. Формула Грассмана

$U_1, U_2 \leq U$, U – в.п. над K
$dim(U_1 + U_2) = dimU_1 + dimU_2 - dim(U_1 \cap U_2)$

Доказательство:

Рассмотрим линейное отображение $A : U_1 + U_2 \to U$

$ImA = \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\} = U_1 + U_2$

$dim(ImA) = dim(U_1 + U_2)$

$dim(U_1 + U_2) = dimU_1 + dimU_2$. Осталось понять: $dimKerA = dim(U_1 \cap U_2)$

Тогда $dim(U_1 + U_2) = dimU_1 + dimU_2 - dim(U_1 \cap U_2)$

$KerA = \{(u_1, u_2) | u_1 + u_2 = 0\} = \{(u_1, u_2) | u_1 = -u_2\} \Rightarrow$ отображение $U_1 \cap U_2 \to KerA$ – изоморфизм векторного пространства

TODO lec 02/03

Definition 3.2. Канонеческий вид матрицы линейного отображения

$$A \mapsto CAD = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definition 3.3. Ранг линейного отображения

$A : U \to V$
$rkA = dimImA$ – размерность линейной оболочки столбцов матрицы $[A]$ (в любом базисе)
$A = [A];\ A = (c_1|c_2|\dots|c_n)$
$rkA = dim\langle c_1 \dots c_n\rangle$ – максимальное количество ЛНЗ столбцов матрицы

Theorem 3.3. Свойства ранга

1. $rk(A+B) \leq rkA + rkB;\ A, B \in M_{m,n}(K)$
2. $rk(A \cdot B) \leq min(rkA, rkB);\ A \in M_{m,n}(K), B \in M_{n,l}(K)$
3. Если в пункте 2 A или B обратимы (в том числе $(m = n)/(n = l)$), то $rk(A \cdot B) = rkA = rkB$
4. $rkA = rkA^T$

Remark 3.1.

Знаем: столбцы A^T – строки A, т.е. rkA – максимальное количество ЛНЗ строк
Строчный ранг совпадает со столбцовым

Доказательство:

1. $A = (c_1|c_2|\dots|c_n);\ B = (d_1|d_2|\dots|d_n);\ c_i, d_i \in K^m$
   $A + B = (c_1 + d_1|c_2 + d_2|\dots|c_n + d_n)$
   $dim\langle c_1 + d_1 \dots c_n + d_n\rangle \leq dim\langle c_1 \dots c_n, d_1 \dots d_n\rangle \leq dim\langle c_1 \dots c_n\rangle + dim\langle d_1 \dots d_n\rangle$
   Значит $rk(A + B) \leq rkA + rkB$
2. $A \cdot B \leftrightarrow A \circ B$
   Хотим $rk(A \circ B) \begin{matrix} \overset{(1)}{\leq} rkA \\ \overset{(2)}{\leq} rkB \end{matrix}$
   (1) $rk(A \circ B) = \dim(Im(A \circ B)) = \dim\{A(B(x))\} \leq \dim\{A(y)\} = \dim(ImA) = rkA$
   (2) $Im(A \circ B) = \{A(B(x))|x \in \dots\} = \{A(y)|y \in ImB\} = Im(A|_{ImB}) = dimImB - dim(Ker(A|_{ImB})) \leq dimImB = rkB$
3. Пусть $\exists A^{-1}$
   Тогда $rk(AB) \leq rk(B) = rk(A^{-1}AB) \leq rk(AB) \Rightarrow rk(B) = rk(AB)$
4. Найдем C, D – обратимые
   $$CAD = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(CAD)^T = D^T A^T C^T = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_1^T$

$rk(A_1) = rk(A_1^T) = l$

$e_1 \dots e_l$ – что-то из стандартного базиса для K^m

По пункту 3

$$\left.\begin{aligned} l = rk(CAD) = rk(AD) = rk(A) \\ l = rk(D^T A^T C^T) = rk(A^T C^T) = rk(A^T) \end{aligned}\right\} \Rightarrow rk(A) = rk(A^T)$$

Remark 3.2.

C – обратима $\Leftrightarrow C^T$ – обратима

$CC^{-1} = C^{-1}C = E$

$E = E^T = (C^{-1}C)^T = \begin{matrix} (C^{-1})^T C^T \\ C^T (C^{-1})^T \end{matrix} \Rightarrow (C^{-1})^T = (C^T)^{-1}$, т.е. C^T – обратима

Remark 3.3. Полуобратимость

$C \in M_{m,n}(K)$; $D \in M_{n,m}(K)$ (т.е. $\exists CD, DC$). Пусть $m < n$

$\Rightarrow rkC \le m \Rightarrow rk(DC) \le m \Rightarrow DC \ne E_n$ $(rkE = n)$

Но может быть, что $CD = E_m$ – полуобратные матрицы

Theorem 3.4.

Следующие условия равносильны для $A \in M_n(K)$:

1. Строки A – ЛНЗ
2. Столбцы A – ЛНЗ
3. A обратима
4. $KerA = \{0\}$
5. $ImA = K^n$
6. СЛУ с матрицей A имеет единственное решение для любой правой части

Доказательство:

1. $1 \Leftrightarrow rkA = n \Leftrightarrow 2$
2. В две стороны:

$3 \Rightarrow 2$: $n = rkE = rk(AA^{-1}) \le rkA \ge n \Rightarrow rkA = n$

$2 \Rightarrow 3$: $\exists CAD = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$l = rkA = n \Rightarrow CAD = E$

$A \cdot (DC^{-1}) = E = (DC^{-1}) \cdot A \Rightarrow A$ обратима

3. $3 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 5 \Leftrightarrow 6$

Знаем: $A : K^n \to K^n$, т.е. A – инъекция $(KerA = 0) \Leftrightarrow A$ – сюръекция $(ImA = K^n) \Leftrightarrow A$ – изоморфизм $(\exists A^{-1})$

6. A – обратима СЛУ $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

Если $\forall B \exists! X$" $AX = B \Rightarrow (x \mapsto AX)$ – биекция $\Leftrightarrow \exists A^{-1}$

Definition 3.4. ????

A называется обратимой/невырожденной/неособенной/неосовой матрицей полного ранга ...

Definition 3.5. Полная линейная группа

$(M_n(K))^* = GL(n,k)$ – полная линейная группа (обратимые матрицы относительно умножения)

4 Элементарные матрицы и метод Гаусса

Хотим: систему простых образующих $GL(n,K) = \langle\{s_i\}\rangle : \forall g \in GL(n,K)\ g = s_{i_1} \cdot s_{i_2} \cdot \ldots \cdot s_{i_k}$ (не единственность разложения)

Приложение: $g^{-1} = (s_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_k})^{-1} = s_{i_k}^{-1} \cdot \ldots \cdot s_{i_1}^{-1}$ – алгоритм для вычисления g^{-1}

Definition 4.1. Трансвекция

$n \in N$ – fix $(M_{,n}(K))$; $i, j \in \{1 \ldots n\}$; $i \neq j$

Трансвекцией $t_{ij}(a) = E + aE_{ij}$; $e_{ij} \in M_n(K)$ и $(e_{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 & k = i, l = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

Example 4.1.

Пусть $x \in K^n$; $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$t_{ij}(a) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i + ax_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

К i-ой координате прибавляется j-ая, умноженная на a
$t_{ij}(a) \in GL(n)$
$(t_{ij}(a))^{-1} = t_{ij}(-a)$

Example 4.2. Действия на матрице

Слева $t_{ij}(a) \cdot A = t_{ij}(a)(c_1|c_2|\ldots|c_m) = (t_{ij}(a) \cdot c_1|\ldots|t_{ij}(a) \cdot c_m) = \tilde{A}$
$\tilde{A}$ получается из A прибавлением к i-ой строке j-ой строки, умноженной на a
Справа $A \cdot t_{ij}(a) = (A^T)^T((t_{ij}(a))^T)^T = (t_{ij}(a)^T A^T)^T = (t_{ji}(a)A^T)^T$
К j-ому столбцу прибавляется i-ый, умноженный на a

Definition 4.2. Дилатация

$$m_i(a) = E + (a-1)e_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & a & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Example 4.3.

$$m_i(a) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ ax_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$m_i(a) \in GL(n)$
$(m_i(a))^{-1} = m_i(a^{-1})$
$m_i(a) \cdot A$ – умножение i-ой строки на a
$A \cdot m_i(a)$ – умножение i-ого столбца на a

Definition 4.3. Транспозиция

$s_{ij} = E - e_{ii} - e_{jj} + e_{ij} + e_{ji}$

$$s_{ij} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Умножение слева – перестановка строки, умножение справа – перестановка столбца

Proposition 4.1.

s_{ij} выражаема через трансвенции и дилатации

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+y \\ -x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$s_{12} = m_2(-1) \cdot t_{21}(1) \cdot t_{12}(-1) \cdot t_{21}(1)$

Theorem 4.1. Метод Гаусса

1. $A \in M_{m,n}(K) \Rightarrow \exists$ элем. $e_1 \dots e_k : e_1 e_2 \dots e_k A$ – ступенчатая (типа треугольная но не очень)
2. $A \in GL(n, K) \Rightarrow \exists$ элем. $e_1 \dots e_s : e_1 e_2 \dots e_s A = E$

2'. $\forall A \in GL(n, K) \exists$ элем. $f_1 \dots f_s : A = f_1 f_2 \dots f_s$

3. $A \in M_{m,n}(K) \Rightarrow \exists$ элем. $e_1 \dots e_k, g_1 \dots g_l : e_1 e_2 \dots e_k A g_1 \dots g_l = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Доказательство:

$2 \Rightarrow 2'$: $e_1 e_2 \dots e_s A = E$

$A = e_s^{-1} \dots e_1^{-1} = f_1 f_2 \dots f_s;\ f_i = e_i^{-1}$

Theorem 4.2. Следствие

$e_1 \dots e_s A = E$

$(e_1 \dots e_s) = A^{-1}$

Алгоритм для нахождения A^{-1} (если существует)

$(A|E) \to (e_s A | e_s E) \to \dots \to (e_1 \dots e_s A | e_1 \dots e_s) = (E|A^{-1})$

Theorem 4.3. Теорема формализующая метод Гаусса

1. $A \in M_{m,n}(K) \Rightarrow \exists e_1 \dots e_k$ – Элементарные

$$e_1 \dots e_k A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

2. $A \in GL_n(K)\ \exists e_1 \dots e_s : e_1 \dots e_s A = E$
3. $A \in M_{m,n}(K)\ \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_1 \dots e_k A g_1 \dots e_l$

Доказательство:

1. Индукция по n

База $n = 0$ очев или $n = 1$ там то же, что и в переходе

Переход $n \to n + 1$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \\ \vdots & \ddots a_{1n} & \dots \end{pmatrix}$$

- $a_{11} \neq 0$

Домножим слева на $\prod t_{i1}(-\frac{a_{1i}}{a_{11}}) = T$

$$TA = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots \\ 0 & \dots \\ \vdots & \ddots \\ 0 & \dots \end{pmatrix}$$

По ИП $\exists u_1 \dots u_k$ – элементарные ($u_1 \dots u_k \in GL_{m-1} \Rightarrow \tilde{u}_i \in GL_m$)

$$u_1 \dots u_k \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots \\ 0 & a_{22} & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

Тогда $\tilde{u_1} \dots \tilde{u_k} TA = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots \\ 0 & a_{22} & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$, т.е. получили треугольную

- $a_{11} = 0$, но $\exists i : a_{1i} \neq 0$
  $\exists$ матрица перестановки строк (произведение элементарных)
  Переставим, перейдем к случаю 1
- $\forall i : a_{1i} = 0$
  По ИП $\exists e_1 \dots e_k : e_1 \dots e_k \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots \\ 0 & a_{22} & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \tilde{\tilde{A}}$
  Если у нас матрица с нулевым первым столбцом, то такие же преобразования оставят первый столбик нулевым

2. $A \in GL_n(K)$
   По пункту 1 $\exists e_1 \dots e_k$ – элементарные, такие что
   $e_1 \dots e_k A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \tilde{A} \Rightarrow \tilde{A} \in GL_n(K)$

   Lemma 4.1.

   $\tilde{A}$ – треугольная
   $\tilde{A}$ обратима $\Leftrightarrow$ все $a_{ii} \neq 0$

   Доказательство:
   $A = (C_1 | \dots | C_n)$
   Все $a_{ii} \neq 0 \Rightarrow \forall i \ c_i \notin \langle c_1 \dots c_{i-1} \rangle \Rightarrow c_1 \dots c_n$ – ЛНЗ $\Rightarrow rk\tilde{A} = n \Rightarrow \tilde{A}$ обратима
   А если $\tilde{A}$ обратима $\Rightarrow rk\tilde{A} = n \Rightarrow c_1 \dots c_n$ – ЛНЗ
   Пусть $a_{ii} = 0 (\exists i)$, все $c_1 \dots c_i \in \langle e_1 \dots e_{i-1} \rangle \Rightarrow c_n \dots c_i$ – ЛЗ????????????????????????

   Вернемся к теореме
   Теперь доможножим слева на $\prod t_{in}(-\frac{a_{in}}{a_{nn}})$
   Потом на $\prod t_{i(n-1)}(-\frac{a_{i(n-1)}}{a_{n(n-1)}})$ и так далее
   Итого будет какая-то $\tilde{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots \\ 0 & a_{22} & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$
   Потом набор дилатаций, которые превратят $\tilde{\tilde{A}} \to E$
3. Знаем: $\forall A \ \exists C, D$ – обратимые: $CAD = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
   По пункту 2 $C = e_1 \dots e_k$; $D = g_1 \dots g_l$, где e_i, g_i – элементарные

$\Rightarrow e_1 \dots e_k A g_1 \dots g_l = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Notation 4.1. Разложение Гаусса

Знаем: $A \in GL_n(K)$
$e_1 \dots e_k A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = u;\ a_{ii} \neq 0$
$A = e_k^{-1} \dots e_1^{-1} u$
Пусть всегда в методе Гаусса был случай 1 ($a_{ii} \neq 0$)
Тогда $\forall i\ e_i = t_{k_i l_i}(a_i)$
$e_i^{-1} = t_{k_i l_i}(-a_i)$
$e_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & 1 \end{pmatrix}$ – нижнетреугольная матрица
Тогда $e_1^{-1} \dots e_k^{-1}$ – тоже нижнетреугольная матрица
Итого: $A = LU$, где L – нижнетреугольная, U – верхнетреугольная
LU – разложение Гаусса
В общем случае $\exists P$ – матрица перестановки
$PA = LU \Rightarrow A = \tilde{P} LU$
$\tilde{P}$ – матрица, где в каждой строке одна единичка на рандомной позиции

5 Явные формулы линнейной алгебры

СЛАУ $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$, где A^{-1} ищется методом Гаусса

В общем случае: Гаусс

$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$

В общем виде $x = \frac{ed-bf}{ad-bc};\ y = \frac{af-ec}{ad-bc}$, если $ad - bc \neq 0$

Вот эти вот штуки после равно называют определителями. Они выражают идею площади

Что значит, что $ad - bc = 0$? Значит столбцы в матрице ЛЗ, тогда $S(v_1, v_2) = 0$

Хотим функцию $\det (K^n)^n \to K$. Причем такую, что:

1. $\forall i\ \forall a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n \in K^n$
   Отображение $x \mapsto \det(a_1 \dots a_{i-1} x a_{i+1} \dots a_n)$ – линейно
   $(K^n \to K)$ – полилинейность
2. $\exists i \neq j : x_i = x_j \Rightarrow \det$ – кососимметричность
3. $\det(e_1 \dots e_n) = 1$, где e_i – стандартный базис

Remark 5.1.

$(K^n)^n \cong M_n(K)$
Тогда $3 \Leftrightarrow \det(E) = 1$

Example 5.1.

$n = 2$

3. Вот столбики $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда $S := 1$
2. $\det(x, x) = 0$
3. $\det(x_1 + x_2, y) = \det(x_1, y) + \det(x_2, y)$

Remark 5.2.

f – полилинейная и кососимметричная $\Rightarrow$
$\Rightarrow \forall i, j\ f(x_1 \dots x_i \dots x_j \dots x_n) = -f(x_1 \dots x_j \dots x_i \dots x_n)$

Доказательство:

В общем виде доказывать не будем, нам лень

$n = 2$

В $(x, y) = f(x_1 \dots x_{i-1} x_i \dots g_1 x_{j+1} \dots x_n)$

x_k – fix при $k \neq i, j$

$g(x, x) = 0\ \forall x$

$g(x + y, x + y) = g(x, x) + g(x, y) + g(y, x) + g(y, y) = 0$

Remark 5.3.

Это похоже на свойство из определения, но равносильность есть только тогда, когда $char K \neq 2$

Theorem 5.1.

Если $\det_1, \det_2$ – функции удовлетворяющие аксиомам 1-3, то
$\det_1(x_1 \dots x_n) = \det_2(x_1 \dots x_n)$ $(\forall x_1 \dots x_n \in K^n)$, т.е. $\det_1 = \det_2$

Theorem 5.2.

det существует

Начало доказательства теоремы 5.2:

Явная формула для det

$A = (x_1 | \dots | x_n) = (a_{ij});\ i, j = 1 \dots n$

$\det A = \sum\limits_{i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n} \pm a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$

$n!$ слагаемых, каждому нужен знак

Слагаемое: $n \to i_n$ – биекция (перестановка), назовем π

$\pi(k) = i_k$

S_n – группа перестановок $|S_n| = n!$

$\det = \sum\limits_{\pi \in S_n} \varepsilon(\pi) a_{1\pi(1)} \dots a_{n\pi(n)}$

s_{ij} – транспозиция, которая $s_{ij}(i) = j;\ s_{ij}(j) = i;\ s_{ij}(k) = k$ при $k \neq i, j$

$\pi = s_{i_1 j_1} \circ \dots \circ s_{i_k j_k}$. Тогда $\varepsilon(\pi) = (-1)^k$

Такое разложение существует (очев), но не единственно!

k – не однозначно определено, но $k \mod 2$ – однозначно определено

$\Rightarrow \varepsilon(\pi)$ – корректно определено

Notation 5.1.

$\{\pi(1)\dots\pi(n)\} = \{1\dots n\}$
$(1, \pi(1))\dots(n, \pi(n))$ – ладейная расстановка (n ладей на доске $n \times n$, не бьющие друг друга)

Theorem 5.3.

$\pi = t_{i_1,j_1}\dots t_{i_k,j_k}$. Тогда $k \mod 2$ зависит только от π (не от разложения)

Доказательство:

Рассмотрим $\tilde{\varepsilon}(\pi) = |\{(i,j)|i < j;\ \pi(i) > \pi(j)\}|$ – количество инверсий

$\tilde{\varepsilon}(\pi) = (-1)^{\text{что-то}}$

Proposition 5.1.

В обозначениях выше $k \mod 2 = |\{i, j\dots\}| \mod 2 \Leftrightarrow \varepsilon(\pi) = \tilde{\varepsilon}(\pi)$ – корректно определено

Доказательство:

Докажем что t_{ij} транспозиция, $\tilde{\varepsilon}(t_{ij}\pi) = -\tilde{\varepsilon}(\pi)$ и $\tilde{\varepsilon}(id) = 1$ (у id 0 инверсий)

$\Rightarrow \varepsilon(t_1\dots t_s) = -\varepsilon(t_2\dots t_s) = \varepsilon(t_3\dots t_s) = \dots = (-1)^s\varepsilon(id) = (-1)^s$

$$\pi : \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots k & \dots & l & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_k & \dots & a_l & \dots & a_n \end{matrix}$$

$$t_{lj}\pi : \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots k & \dots & l & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_l & \dots & a_k & \dots & a_n \end{matrix}$$

Посмотрим на измененившуюся часть:

Сначала r раз чтоб протащить k до l, потом меняем местами k и l, потом еще r раз меняем местами, чтоб вернуть на место l

Любая элементарная транспозиция меняет количество инверсий на 1

Всего сделали $2r + 1$ элементарную транспозицию $\Rightarrow$ знак поменялся, т.к. $2r + 1$ – нечетное

Доказательство теоремы 5.3:

1. $\det E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$, где $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$
   $\pi \neq id \Rightarrow \exists i : \pi(i) \neq i \Rightarrow a_{i,\pi(i)} = 0 \Rightarrow \prod \dots = 0$
   Т.е. в сумме лишь $\varepsilon(i)a_{11}\dots a_{nn} = 1\dots 1 = 1$
   Обозначеним $\varepsilon(\pi)a_{1,\pi(1)}\dots a_{n,\pi(n)} = A_\pi$
   $A = \sum\limits_{\pi \in S_n} A_\pi$

Линейность: $\det((a_{i1})(a_{i2})\dots(a_{ik} + c \cdot a'_{ik})\dots(a_{in})) = \det(A) + c \cdot \det(\tilde{A})$
$\tilde{A} = (a_{i1})(a_{i2})\dots(a'_{ik})\dots(a_{in})$

$\forall\pi\ \tilde{\tilde{A}} = a_{1,\pi(1)}\dots(a_{k,\pi(k)} + c\cdot a''_{k,\pi(k)})\dots a_{n,\pi(n)} =$
$= \varepsilon(\pi)a_{1,\pi(1)}\dots a_{k,\pi(k)}\dots a_{n,\pi(n)} + c\cdot\varepsilon(\pi)a_{1,\pi(1)}\dots a'_{k,\pi(k)}\dots a_{n,\pi(n)} =$
$= A_\pi + c\cdot\tilde{A}_\pi \Rightarrow \det(\tilde{\tilde{A}}) = \det(A) + c\cdot\det(\tilde{A})$

Кососимметричность $A = (a_{ij})$. Доказать: $a_{ik} = a_{il}\forall i \Rightarrow \det A = 0$
Это следует из того, что $\forall\pi\ A_\pi = -A_{t_{kl}\pi}$
$\varepsilon(t_{kl}\pi) = -\varepsilon(\pi)$ (по предыдущей теореме)
$t_{kl}\pi(x) = x\ \pi(x) \neq k, l$
$t_{kl}\pi(x) = l$ если $\pi(x) = k$
$t_{kl}\pi(x) = k$ если $\pi(x) = l$
$x \to ax;\ y \to ay;\ z \to az\dots$ – разбиение на пары. Корректно, если $a^2 = id$, т.е. $x \leftrightarrow ax$ итд
$A_\pi \neq A_{t_{kl}\pi} = 0$, сл-ные разбиваются на такие пары $\Rightarrow \sum = 0$

Theorem 5.4.

det единственный

Доказательство:

$\det_1, \det_2 : M_n(K) \to K$ удовлетворяют аксиомам 1-3

1. $\det_1(E) = \det_2(E) = 1$ (аксиома 3)
2. Докажем, что $\det_1(e_{i_1}\dots e_{i_n}) = \det_2(e_{i_1}\dots e_{i_n})$
   Если $\exists k, l : i_k = i_l$, то $\det_1 = \det_2 = 0$ по кососимметричности
   Все i_k различны $\Rightarrow \exists\pi \in S_n : i_k = \pi(k);\ \pi = t_1\dots t_l$, где t_i – транспозиция
   $(e_{\pi(1)}\dots e_{\pi(n)}) = E_\pi$
   $\det_{i_1}(E_\pi) = det(tE_\pi)$, π – транспозиция. По кососимметричности перестановка любых двух столбцов/строк меняет знак
   $\det_1(\pi) = -\det(t_2\dots t_l) = \det(t_3\dots t_l) = \dots = (-1)^l\det(e_1\dots e_n) = (-1)^l = \det_2(\pi)$
3. Общий случай
   $\det_1(c_1, c_2\dots c_n) = \det_1(\sum a_{i1}e_i, \sum a_{i2}e_i\dots\sum a_{in}e_n) = \sum a_{i1}\cdot\det(e_1,\dots\sum a_{in}e_n) = \dots =$
   $= \sum a_{i1}\dots\sum a_{in}\det_1(e_1\dots e_n)$ но с какой-то перестановкой и тут ссылка на пункт 2

Theorem 5.5.

$\det A = \det(A^T)$

Доказательство:

$A = (a_{ij});\ A^T = (b_{ij});\ b_{ij} = a_{ji}$

$A_\pi = \varepsilon(\pi)a_{1,\pi(1)}\dots a_{n,\pi(n)} = \varepsilon(\pi)a_{\pi^{-1}(1),1}\cdot a_{\pi^{-1}(2),2}\dots a_{\pi^{-1}(n),n} = \varepsilon(\pi^{-1})b_{1,\pi^{-1}(1)}\dots b_{n,\pi^{-1}(n)} = B_{\pi^{-1}}$

$\det A = \sum A_\pi = \sum B_{\pi^{-1}} = \sum B_s = \det B$

Почему $\varepsilon(\pi) = \varepsilon(\pi^{-1})$?

$\pi = t_1\dots t_k$, где t_i – транспозиция

$\pi^{-1} = t_k^{-1}\dots t_1^{-1} = t_k\dots t_1$

Theorem 5.6. Следствие

det линеен и кососимметричен по строкам

Theorem 5.7.

det не меняется при трансвекциях, а при дилатациях с коэффициентом a умножается на a

Доказательство:

2. По полилинейности

Lemma 5.1.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \prod a_{ii}$$

$\pi \neq id \Rightarrow \exists i : \pi(i) < i$

$a_{i,\pi(i)} = 0 \Rightarrow A_\pi = 0 \Rightarrow \det A = A_{id} = a_{11} \dots a_{nn}$

Theorem 5.8. Следствие

Быстро считать определитель так:
Взяли A, Гауссом привели к $\tilde{A}$ – треугольной матрице. Тогда знаем $\det(\tilde{A}) \Rightarrow$ знаем $\det A$

Theorem 5.9. Разложение по строке и столбцу

$A = (a_{ij})$
$M_{kl} = \det(a_{ij})_{i\neq k, j\neq l}$ – определитель матрицы $\in M_{n-1}(K)$

1. i – fix
   $\det A = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$
2. А если j – fix, то
   $\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$

Доказательство:

1. $A = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$
   $r_i = a_{i1} f_1 + a_{i2} f_2 + \dots + a_{in} f_n$

По полилинейности $\det A = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \det \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$

Сам определитель назовем M_j

$$M_i = \det \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = (-1)^{i-1} \cdot \det \begin{pmatrix} f_i \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = (-1)^{i-1} \cdot (-1)^{j-1} \det \begin{pmatrix} f_1 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Здесь $M_{ij} = \det \tilde{A}$ и $\tilde{A}$ – это A без i-й строки и j-го столбца

Осталось заметить, что $\det B$ не меняется, если добавить слева столбец, сверху строку, в которых все нули, кроме b_{11}

Theorem 5.10. Следствие

$k \neq i$

$\sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{ij} M_{kj} = 0$

Доказательство:

По предыдущей теореме это выражение – определитель матрицы с r_i вместо r_k (НУО $k < i$)

$$= \det \tilde{A} = \det \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

$\det \tilde{A}$ с одной стороны 0 по кососимметричности, с другой стороны выражение из следствия если разложить по k-й строке

Remark 5.4.

Аналогично со столбцом

Definition 5.1. Присоединенная матрица

$A = (a_{ij})$, M_{ij} – соответствующие миноры

$A^{adj} = (A_{ij})$, где $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ji}$

A^{adj} – присоединенная матрица

Theorem 5.11.

$A \cdot A^{adj} = A^{adj} \cdot A = (\det A) \cdot E$
В частности $\det A \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{adj}$

Доказательство:

$A \cdot A^{adj} = (b_{ij})$

$b_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}(A^{adj})_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{ik} M_{jk} = \left[\begin{matrix} 0;\ i \neq j \\ \det A;\ i = j \end{matrix}\right.$

Т.е. $A \cdot A^{adj} = \det A \cdot E$

$A^{adj} \cdot A = E$ – аналогично (разложение по столбцу)

Example 5.2.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$A^{adj} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{b}{bc-ad} \\ \frac{c}{bc-ad} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$

Theorem 5.12. Теорема Крамера

$A \cdot X = B$ – СЛУ. $A \in M_n(K);\ X, B \in K^n$
$\Delta = \det A \neq 0$
Δ_i – определитель матрицы, полученной из A заменой c_i на B
$\Leftrightarrow$ единственное решение системы $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \vdots \\ \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{pmatrix}$

Доказательство:

$A = (a_{ij})$

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$

$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$

$A^{-1} = (a'_{ij})$

$x_k = (A^{-1}B)_k = \sum\limits_{i=1}^{n} a'_{ki} b_i = \sum \frac{(-1)^{k+i}}{\det A} M_{ik} \cdot b_i = \frac{1}{\det A} \sum (-1)^{k+i} M_{ik} b_i$ – разложение по k-му столбцу для матрицы $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a & \dots & c_{k-1} & B & c_{k+1} & \dots & c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\Delta_k$

Notation 5.2.

$f : (K^n)^n \to K$
f – полилинейна и кососимметрична и $f(e_1 \dots e_n) = 1 \Rightarrow$f $=$ det

Remark 5.5.

Если f – только полилинейна и кососимметрична, то $f = \det \cdot c$ для какой-то $c \in K$

Доказательство:

Пусть $c = f(E)$

$\tau(A) = \frac{1}{c} f(A)$ $(c \neq 0)$

$\tau(A)$ – полилинейна, кососимметрична и $\tau(E) = 1$

$\tau = \det \Rightarrow f = \det \cdot c$

Если $c = 0$, то $f(e_1 \dots e_n) = 0 \xRightarrow{\text{кососимметричность}} f(e_{\pi(1)} \dots e_{\pi(n)}) = (-1)^{\cdots} \cdot 0 = 0$

$f(e_{i1} \dots e_{in}) = 0$ всегда $\Rightarrow f(v_1 \dots v_n) = 0$ по полилинейности

$f \equiv 0 = 0 \cdot \det A$

Theorem 5.13. Определитель – мультипликативный гомоморфизм

$\det(AB) = \det A \cdot \det B$
В частности $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$ (если $\det A \neq 0$)
$\det : M_n(K) \to K$ – гомоморфизм по умножению
$\det : GL_n(K) \to K^*$ – гомоморфизм групп
$(M_n(K))^* \to K^*$

Доказательство:

fix A. B – переменная

$f_A(B) = det(AB)$. f – полилинейная и кососимметричная

Пусть у B 2 одинаковых столбца $\Rightarrow B$ – вырождееная $\Rightarrow AB$ – вырожденная $\Rightarrow f(AB) = 0$

$\det(A \cdot (c_1' + c_1'' | c_2 | \dots | c_n)) = \dots = \det(Ac_1' + Ac_1'' | Ac_2 | \dots | Ac_n) = \det(Ac_1' | Ac_2 | \dots | Ac_n) + \det(Ac_1'' | Ac_2 | \dots | Ac_n) =$
$\det A \cdot \det(c_1' | c_2 | \dots | c_n) + \det A \cdot \det(c_1'' | c_2 | \dots | c_n)$

Поэтому $f_A(B) = c \cdot \det B$

$B = E$

$\det(A \cdot E) = c \cdot \det(E) = c \Rightarrow c = \det A \Rightarrow \det(AB) = f_A(B) = \det(A) \cdot \det(B)$

Theorem 5.14. Определитель блочной матрицы

$A = \begin{pmatrix} B & X \\ 0 & C \end{pmatrix}$ или $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ X & C \end{pmatrix}$
Блок $B \in M_n(K);\ C \in M_m(K);\ X \in M_{n \times m}(K)$
Тогда $\det A = \det B \cdot \det C$

Доказательство:

fix B и X

$f_B(C) = \det \begin{pmatrix} B & X \\ 0 & C \end{pmatrix}$

f_B – полилинейна и кососимметрична как функция от строк C (из полилинейности det большой матрицы)

$\Rightarrow f_B(C) = c \cdot \det C$

$c_b = f_B(E) = \det \begin{pmatrix} B & X \\ 0 & E \end{pmatrix}$

X – fix

$g(B) = \det \begin{pmatrix} B & X \\ 0 & E \end{pmatrix}$

Она полилинейна и кососимметрична относительно столбцов B

$g_B = c \cdot \det(B)$

$c = g_B(E) = \det \begin{pmatrix} E & X \\ 0 & E \end{pmatrix} = 1$, т.к. матрица треугольная

Тогда $g_B = \det B$

$c_B = \det B$

$f_B(C) = \det B \cdot \det C$

Theorem 5.15. Следствие

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & * & \dots & * \\ 0 & A_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix} = \det(A_1) \cdot \ldots \cdot \det(A_n)$$

6 Операторы

Definition 6.1. Оператор

Оператор на B – это $f : V \to V$, где f – k-линейно

Definition 6.2.

Множество операторов на V – $\mathrm{End}(V)$ – кольцо относительно сложения и композиции
$\mathrm{End}(V) \cong M_n(K)$
$n = \dim V$

Remark 6.1.

A – оператор
Матрица $A : A = [A]_e$
В частности $\mathrm{Id} \leftrightarrow E$ (в любом базисе)
А обычно A зависит от базиса

Notation 6.1. Задача

Для каждого A найти максимально хороший базис (с очень простой матрицей A)

Notation 6.2.

У A можно искать

1. Ядро $AX = 0$
2. Неподвижные точки $AX = X$
3. Неподвижные прямые $AX = \lambda X$

Definition 6.3. Собственное число и собственный вектор

A – оператор $x \in V;\ x \neq 0$

$A(x) = \lambda x;\ \lambda \in K \Rightarrow \begin{matrix} x \text{ – собственный вектор} \\ \lambda \text{ – собственное число} \end{matrix}$

$A(kx) = k\lambda x$

Знаем $\lambda \Rightarrow AX = \lambda X$ – СЛУ

λ – собственное число $\Leftrightarrow A(x) = \lambda x$ имеет решение $x \neq 0$

$(A - \mathrm{Id})x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(A - \lambda \operatorname{Id}) \neq 0 \Leftrightarrow A - \lambda \operatorname{Id}$ вырожденная $\Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$

Definition 6.4. Характеристический многочлен

$\det(A - \lambda E) = \ldots = \chi_A(\lambda)$ – характеристический многочлен (многочлен от λ степени n)

Remark 6.2.

Как итог: собственные числа A – корни его характеристического многочлена

Theorem 6.1. Следствие

$\dim V = n \Rightarrow$ у $\mathcal{A}$ не более n собственных чисел

Доказательство:

$\deg \chi_A(t) = n \Rightarrow$ у $\chi_A(t)$ не более n корней

Remark 6.3.

Определение $\chi_A(t)$ корректно:

A_1 и A_2 – матрицы $\mathcal{A}$ в разных базисах

$\det(A_1 - tE) = \det(A_2 - tE)$

Notation 6.3.

$A, \tilde{A}$ – матрицы $\mathcal{A}$ в разных базисах $\Rightarrow A = C^{-1}\tilde{A}D$, где C, D – матрицы перехода

В нашем случае $A_2 = C^{-1}A_1C,\ C$ – матрица перехода

Remark 6.4.

$\det(A_2 - tE) = \det(C^{-1}A_1C - tE) = \det(C^{-1}A_1C - tC^{-1}EC) = \det(C^{-1}(A_1 - tE)C) =$

$= \det(C^{-1})\det(A_1 - tE)\det(C) = \frac{1}{\det C}\det(A_1 - tE)\det C = \det(A_1 - tE)$

Lemma 6.1.

$\mathcal{A}: V \to V$; $v_1 \dots v_k$ – собственные вектора, соответствующие различным собственным числам $\lambda_1 \dots \lambda_k$
Тогда $v_1 \dots v_k$ – ЛНЗ

Доказательство:

Индукция по k. База: $k = 1$

v_1 – ЛНЗ $\Leftrightarrow v_1 \neq 0$ – по определению собственного вектора

Переход: $k \to k+1$

Пусть $v_1 \dots v_{k+1}$ – линейно зависимы

$\mathcal{A}v_i = \lambda_i v_i$

$(*)\ \sum\limits_{i=1}^{k+1} a_i v_i = 0$ Применим к обеим частям $\mathcal{A}$

$0 = \mathcal{A}(\sum a_i v_i) = \sum a_i \mathcal{A}(v_i) = \sum a_i \lambda_i v_i$

$(*) \cdot \lambda_{k+1} = a_1 \lambda k + 1 v_1 + \ldots + a_k \lambda_{k+1} v_k + a_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0$

Получили две равные штуки, сократим на последнее слагаемое, получим

$\sum\limits_{i=1}^{k} a_i(\lambda_{k+1} - \lambda_i) v_i = 0 \overset{\text{ИП}}{\Longrightarrow} a_i = 0\ \forall i \in [1; k] \Rightarrow a_{k+1} = 0$

Theorem 6.2. Следствие

$\mathcal{A}: V \to V$; $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod\limits_{i=1}^{k} t - \lambda_i$; $\lambda_i \neq \lambda_j$
Тогда в V есть базис из собственных векторов $\mathcal{A}$
$[\mathcal{A}]_{e_1 \dots e_k}$ – диагональная

Доказательство:

Знаем: λ_i – собственное число $\Rightarrow \exists$ собственные вектор e_i

Все λ_i различные $\Rightarrow e_1 \dots e_n$ – ЛНЗ

$n = \dim V \Rightarrow e_1 \dots e_n$ – базис

Definition 6.5. Диагонализуемый оператор

$\mathcal{A}$ называется диагонализуемым, если $\exists$ базис из собственных векторов
($\Leftrightarrow [\mathcal{A}]$ – диагональная)

Remark 6.5. Препятствия в диагонализуемости

1. V – бесконечномерное, нет $\chi_A(t)$
   Может не быть собственных чисел

   Example 6.1.

   $v_1 \dots v_n \dots$ – базис V
   $\mathcal{A}(v_i) = v_{i+1}$ – оператор сдвига

2. $\chi_A(t)$ не имеет разложения на линейные множители

   Example 6.2.

   $K = \mathbb{R}$
   $f(t) = t^2 + 1$
   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ – поворот на π
   $f(e_1) = e_2;\ f(e_2) = -e_1$

3. $\chi_A(t)$ имеет кратные корни

   Example 6.3.

   $V = K[x]_n$
   $D(f) = f'$ – линейный оператор
   $D(f) = \lambda f$ – только если $f = const;\ \lambda = 0$
   $\chi_0(t) = (-t)^{n+1}$, но только 1 собственный вектор

Definition 6.6. Собственное подпространство

$\mathcal{A} : V \to V$ – линейный оператор
λ – осбственное число $\mathcal{A}$ – корень $\chi_A(t)$
$V_\lambda = \{v \in V : \mathcal{A}(v) = \lambda v\}$ – собственное подпространство

Remark 6.6.

Это действительно подпространство

Доказательство:

$V_\lambda \leq V$

$$\begin{matrix} \mathcal{A}v_1 = \lambda v_1 \\ \mathcal{A}v_2 = \lambda v_2 \end{matrix} \mathcal{A}(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$$

Definition 6.7.

$m_a(\lambda)$ – кратность λ в $\chi_A(t)$ – алгебраическая кратность
$m_g(\lambda) = \dim V_\lambda$ – геометрическая кратность (максимальное количество ЛНЗ векторов, соответствующих λ)

Example 6.4.

$\mathcal{A} = 0;\ \chi_A(t) = t^n$
$m_a(0) = n;\ m_g(0) = n$
А если $\mathcal{A} = D$ из примера 6.3
$m_a(0) = n + 1;\ m_g(0) = 1$

Theorem 6.3.

1. $\forall \lambda\ m_a(\lambda) \geq m_g(\lambda)$
2. $\mathcal{A}$ – диагонализуем $\Leftrightarrow \chi_A(t)$ раскладывается на линейные множители и $m_a(\lambda) =$ $= m_g(\lambda)\ \forall \lambda$

Доказательство:

1. Пусть $v_1 \ldots v_k$ – базис V_λ $(k = m_g(\lambda))$
   $v_1 \ldots v_k \ldots v_n$ – базис V
   $\mathcal{A}v_1 = \lambda v_1$
   $\mathcal{A}v_2 = \lambda v_2$
   $\mathcal{A}v_k = \lambda v_k$
   $\mathcal{A}v_{k+1} = \ldots$
   $[\mathcal{A}]_{v_1 \ldots v_n} = \begin{pmatrix} \lambda E_k & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$
   $\mathcal{A} - tE = \begin{pmatrix} (\lambda - t)E_k & B \\ 0 & C - tE_{n-k} \end{pmatrix}$
   $\Rightarrow \det(\mathcal{A} - tE) = \det(\lambda - t)E_k \cdot \det(C - tE_{n-k}) = (\lambda - t)^k \cdot f(t) \Rightarrow \chi_a(t) \geq k$
2. Пусть $\mathcal{A}$ – диагонализуем $\Rightarrow$ есть базис из собственных векторов
   $v_1^1 \ldots v_k^1$ – базис V_{λ_1}
   $v_1^2 \ldots v_k^2$ – базис V_{λ_2}
   $v_1^s \ldots v_k^s$ – базис V_{λ_s}
   $\deg \chi_{\mathcal{A}}(t) = n \geq \sum m_a(\lambda_i) \geq \sum m_g(\lambda_i) \geq \sum k_i = n \Rightarrow$ все неравенства – равенства
   $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)\ \forall i$
   $n = \sum m_a(\lambda_i) \Leftrightarrow \chi_A(t)$ раскладывается на линейные множители
   Обратно: $\mathcal{A}$ – диагонализуем $\Leftrightarrow \chi_A(t)$ раскладывается на линейные множители и $m_a(\lambda) =$ $m_g(\lambda)\ \forall \lambda$
   Пусть $v_1^i \ldots v_{k_i}^i$ – базис V_{λ_i} $(k_i = m_g(\lambda_i))$
   Всего выбрали $\sum k_i = \sum m_g(\lambda_i) = \sum m_a(\lambda_i) = n$ векторов
   Осталось проверить, что они ЛНЗ Пусть $\sum\limits_{i,j} a_{ij} v_j^i = 0 \Rightarrow 0 = \sum\limits_i (\sum a_{ij} v_j^i)$
   $\forall i\ \ \sum a_{ij} v_j^i \in V_{\lambda_i}$
   Тогда $\sum w_i = 0 \Rightarrow$ по лемме о ЛНЗ собственных чисел $\Rightarrow w_1 = \ldots = w_s = 0$
   $w_i = \sum a_{ij} v_j^i = 0 \Rightarrow$ все $a_{ij} = 0$, т.к. $v_1^i \ldots v_{k_i}^i$ – ЛНЗ

7 Нильпотентные операторы

Definition 7.1. Нильпотентный оператор

$\mathcal{A}: V \to V$ – линейный оператор
$\mathcal{A}$ называется нильпотентным, если $\exists N : A^N = 0$

Remark 7.1.

$\mathcal{A}^N = 0 \Rightarrow \mathcal{A}^{\dim V} = 0$

Theorem 7.1. Свойство

λ – собственное число $\mathcal{A} \Rightarrow \lambda = 0$
$(K = \mathbb{C} \Rightarrow def \Leftrightarrow$ свойству$)$

Remark 7.2.

$\mathcal{A}$ – нильпотентен и диагонализуем $\Rightarrow \mathcal{A} \equiv 0$

Definition 7.2. Жорданова цепочка

Жорданова цепочка для оператора $\mathcal{A}$ – вектора $v_1 \dots v_k : \mathcal{A}v_i = v_{i+1};\ \mathcal{A}v_k = 0$

Theorem 7.2.

$\mathcal{A}$ – нильпотентный оператор на $V \Rightarrow \exists$ базис, состоящий из (непересекающихся) жордановых цепочек

Пусть цепочка одна

$\mathcal{A}v_1 = v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \dots$

Тогда $[\mathcal{A}]_{v_1 \dots v_k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \iota_k(0)$ – жорданов блок

В общем случае и сама матрица делится на блоки, идущие по диагонали (посмотрите запись пожалуйста...)

Доказательство:

Шаг 0: $v_1^0 \dots v_n^0$ – базис V

$\forall i\ v_i^0 \dots v_i^{k_i}$ – жорданова цепочка

$\mathcal{A}(v_i^{k_i}) = 0$

$\{v_i^j\}$ – порождающая система векторов, состоящая из набора цепочек, $\langle v_i^j \rangle = V$

Основной шаг: $\{v_i^j\}$ – ЛЗ $\Rightarrow$ преобразуем набор цепочек : количество $\{v_i^j\}$ уменьшается, а факт, что $\langle \{v_i^j\} \rangle = V$ сохраняется

$\Rightarrow$ за несколько шагов придем к ЛНЗ систеиме $\Rightarrow$ к базису, состоящему из жордановых цепочек

Notation 7.1. Детали

Пусть $\{v_i^j\}$ – ЛЗ $\Rightarrow \exists a_{ij}$ не все $0 : \sum a_{ij}v_i^j = 0$ – считаем, что здесь уже выкинули все нулевые

1. Можно считать: $\forall i$ $\exists$ не более 1 $j : a_{ij} \neq 0$
   Иначе будем применять $\mathcal{A}$ пока это не станет так

НУО все i различны. $\sum a_{is_i}v_i^{s_i} = 0$
$\sum a_{is_i}\mathcal{A}^{s_i}(v_i^0) = 0$ и $s_1 = \min\{s_i\}$
$\sum a_{is_i}\mathcal{A}^{s_1} \cdot (\mathcal{A}^{s_i - s_1}(v_i^0)) = 0$
$\mathcal{A}^{s_1}(\sum a_{is_i}\mathcal{A}^{s_i-s_1}(v_i^0)) = 0$
Распишем эту штуку: $\sum a_{is_i}\mathcal{A}^{s_i-s_1}(v_i^0) = a_{1s_1} \cdot v_1^0 + \sum\limits_2 a_{is_i}\mathcal{A}^{s_i-s_1}(v_i^0) = 0$. А теперь часть суммы (понятно какую) объявим как $(v_1^0)_{new}$
Заменяем: $v_1^0 \to (v_1^0)_{new}$ (и всю его цепочку)
$\mathcal{A}^{s_1}(v_1^0) \neq 0$, но $\mathcal{A}^{s_1}((v_1^0)_{new}) = 0 \Rightarrow$ первая цепочка укоротилась $\Rightarrow$ количество $\{v_i^j\}$ уменьшилось. Осталось доказать, что это все еще порождающая система
Надо проверить, что $(v_i^j)_{old} \in \langle\{v_i^j\}_{new}\rangle$
$(v_i^j)_{old} = (v_i^j)_{new}$ при $i > 1$. Остается одно значение: $(v_1^0)_{old} = (v_1^0)_{new} - \sum\limits_2 a_{is_i}v_i^{s_i-s_1}$

$(v_1^0)_{old} = \mathcal{A}^s(v_1^0) = \frac{(v_1^s)_{new} - \sum a_{is_i}(v_i^{s_i-s_1+s})_{new}}{a_{1s_1}}$

Notation 7.2. Матричная переформулировка

$A \in M_n(K);\ A^N = 0 \Rightarrow \exists C$ – обратимая, такая что

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} J_{k_1}(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{k_s}(0) \end{pmatrix}$$

$\sum k_i = n$
$J_k(0)$ – матрица нильпотентного оператора в базисе жордановой цепочки

Remark 7.3. Анонс

$\mathcal{A}X = \mu X \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\,\mathrm{Id})X = (\mu - \lambda)X$
λ – единственное собственное число $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A} : V \to V$ и V над $\mathbb{C}$) $\Rightarrow \mathcal{A} - \lambda\,\mathrm{Id}$ единсвтенное собственное число $0 \Rightarrow \mathcal{A}$ – нильпотентна $\Rightarrow \exists$ базис из жордановых цепочек

$$[\mathcal{A} - \lambda\,\mathrm{Id}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

Theorem 7.3. Теорема Гамильтона-Кэли

$\mathcal{A}^n = 0$ или $(\mathcal{A} - \lambda \operatorname{Id})^n = 0$ – знаем что делать. Хотим: какое-нибудь тождество $\forall \mathcal{A}$
Матричный язык: $(A - \lambda E)^n = 0$. $\mathcal{A}^n - C_n^1 \lambda \mathcal{A}^{n-1} + C_n^2 \lambda^2 \mathcal{A}^{n-2} - \ldots + (-1)^n \lambda^n E = 0$

Remark 7.4.

Бином Ньютона ОК

Бинок НЕОК $A, B \in M_n$ – не коммутируют, т.е. $(A+B)^2 \begin{matrix} \neq A^2 + 2AB + B^2 \\ = A^2 + AB + BA + B^2 \end{matrix}$

(т.к. $AB \neq BA$)
И вообще $f(\mathcal{A}) \circ g(\mathcal{A}) = (f \circ g)(\mathcal{A})$

Example 7.1.

$(\mathcal{A} - E)(\mathcal{A} - 2E) = \mathcal{A} \circ \mathcal{A} - 3\mathcal{A} + 2E$

$\mathcal{A}$ – оператор (A – матрица). $f = \chi_A(t)$. Тогда $f(\mathcal{A}) = 0$; $f(A) = 0$
$\chi_A(\mathcal{A}) = 0$

Доказательство:

Для двоичников: $\chi_A(t) = \det(\mathcal{A} - tE)$

$\det(A - \mathcal{A}) = \det(0) = 0$

Нормальное:

Reminder 7.1.

$(A - tE)^{Adj}$ – матрица, составленная из миноров матрицы $A - tE$ и такая, что
$(A - tE)^{Adj}(A - tE) = \det(A - tE)E = \chi_A(t)E$

$A - tE \in M_n(K[t])$; $A \in M_n(K)$

Или: $K[t] < K(t)$ – поле дробно-рациональных функций

Все формулы про det не использующие деления верны в любом коммутативном кольце

С другой стороны $(A - tE)^{Adj}(A - tE) \in M_n(K[t])$

$(A - tE)^{Adj}(A - tE) = (B_0 + tB_1 + t^2 B_2 + \ldots + t^{n-1} B_{n-1})(A - tE) = a_0 E + a_1 tE + a_2 t^2 E + \ldots + a_n t^n E$

$$\begin{cases} B_0 A = a_0 E \\ B_1 A - B_0 = a_1 E \\ B_2 A - B_1 = a_2 E \\ \ldots \\ -B_{n-1} = a_n E \end{cases}$$

Домножим на что-то (A^i) так, чтобы в правой части было $a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots = \chi_A(A)$

В левой части будет $B_0 A + (B_1 A^2 - B_0 A) + (B_2 A^3 - B_1 A^2) + \ldots + (-B_{n-1} A^n) = 0$

Example 7.2.

$n = 1$
$A = (a)$
$\chi_A(t) = a - t$ и $(a) - (a) = 0$
$n = 2$
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{pmatrix} = (a-t)(d-t)-bc = t^2-(a+d)t+ad-bc = t^2-\mathrm{Tr}(A)t+\det(A)$
Итого: $A^2 = (a+d)A - (ad-bc)E$

Remark 7.5.

В общем случае $\mathrm{Tr}(A) = \sum a_{ii}$ – след матрицы
$\mathrm{Tr}(A)$ – минус коэффициент при t^{n-1} в $\chi_A(t)$
$\mathrm{Tr}(A)$ – сумма корней $\chi_A(t)$ (сумма собственных чисел с учетом алгебраической кратности)

Reminder 7.2.

$\chi_A(A) = 0;\ \chi_A(t) = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$ (p_i – неразложимые и k – любое)
$\chi_A(t) = (t-\lambda_1)^{a_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)^{a_k};\ K = \mathbb{C}$
$p_i \neq p_j\ (i \neq j)\ (p_i, p_j) = 1$

Definition 7.3. Инвариантное подпространство

$\mathcal{A} : V \to V;\ U \leq V$ – называется инвариантным, если $\mathcal{A}(u) \in U\ \forall u \in U$. $(\mathcal{A}(U) \leq U)$

Remark 7.6.

$\mathcal{A}$ задает новый оператор $\mathcal{A}|_U : U \to U$

Lemma 7.1.

1. $\mathcal{A} : V \to V;\ U$ – инвариантное подпространство
   $v_1, v_2 \ldots v_k \ldots v_n$ – базис V (префикс до k – базис U)
   $[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} [\mathcal{A}|_U] & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$
2. Если $U = \langle v_{k+1} \ldots v_n \rangle$ – инвариантное подпространство, то
   $[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} [\mathcal{A}|_U] & 0 \\ 0 & [\mathcal{A}|_U] \end{pmatrix}$

Доказательство:

Очев: i-ый столбец $[\mathcal{A}]$ $(i \leq k)$

$\mathcal{A}(v_i) \in U = \langle v_1 \ldots v_k \rangle;\ \mathcal{A}(v_i) = a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k + 0 \cdot \ldots$

Пункт б аналогично (смотрим $\mathcal{A}(v_i); i > k$)

Remark 7.7.

$v_1 \dots v_{k_1}, v_{k_1+1} \dots v_{k_2}, \dots$ – базис V
И каждый блок $\forall i$ $\langle v_{k_i}+1\rangle \dots v_{k_{i+1}}$ – инвариантное подпространство

$$[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{A}_l \end{pmatrix}$$

Крайний случай: все v_i – одномерны $\Rightarrow$ базис из собственных векторов, т.е. блоки размером 1×1

Example 7.3.

$V \leq V$; $\{0\}$ – инвариантное подпространство
$\langle v\rangle$ – инвариантно $\Leftrightarrow v$ – собственный вектор
$\forall\lambda$ $v_\lambda = \{v \in V : \mathcal{A}(v) = \lambda v\}$ – собственное подпространство, соответствующее λ – инвариантно
При $\lambda = 0$ – ядро $\mathcal{A}$
$\Im\mathcal{A}$ – очевидно инвариантно

Reminder 7.3.

V – векторное пространство над K. $V_1 \dots V_k \leq V$
$V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k \to V$
$(V_1 \dots V_k) \mapsto V_1 + \dots + V_k$

Theorem 7.4.

Следующие условия равносильны:
1. F – изоморфизм векторных пространств
2. $V = V_1 + \dots + V_k$ и $V_i \cap (V_1 + \dots + V_{i-1} + V_{i+1} + \dots + V_k) = \{0\}$ $\forall i$

В этом случае говорят, что V – внутренняя прямая сумма своих подпространств

Доказательство:

F – сюръективно $\Leftrightarrow$ (1) по определению

F – инъективно $\Leftrightarrow$ (2) чуть менее прямо но тоже в общем совершенно понятно

F – не инъективно $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} F \neq \{0\} \Leftrightarrow \exists(v_1 \dots v_k) \neq (0 \dots 0)$

$F(v_1 \dots v_k) = 0 \Leftrightarrow v_k = -\sum\limits_{i \neq k} v_i$, т.е. $v_k \cap (v_1 \dots) \neq \{0\}$

TODO 04/07

8 Операторы над произвольными полями

Example 8.1.

$A \in M_n(\mathbb{R})$ $\chi_A(t) = t^n + t^3 + t^2 + t + 1$
Выберем $\forall v_1 \in \mathbb{R}^4,\ v_2 = Av_1,\ v_3 = Av^2,\ v_4 = Av^3,\ v_5 = A^4 v_1$
Скорее всего (если $v \in Z^4$ то точно) $v_1 \dots v_5$ – ЛНЗ (упражнение)
Т.к. $A^4 + A^3 + A^2 + A + E = 0 \Rightarrow v_5 = -v_4 - v_3 - v_2 - v_1$

$$\begin{cases} Av_1 = v_2 \\ Av_2 = v_3 \\ Av_3 = v_4 \\ Av_4 = -\sum v_i \end{cases} \Rightarrow \tilde{A} = [A]_{\{v_i\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ – Фробенисова форма матрицы}$$

Notation 8.1. Общий случай

$\mathcal{A} \in Lin(V, V)$, V над K
$v \in V$. Строим $v_1 = v, v_2 \dots v_k$, где $Av_{i+1} = \mathcal{A}(v_i)$ до тех пор пока $v_1 \dots v_k$ – ЛНЗ
$\Rightarrow v_{k+1} \in \langle v_1 \dots v_k \rangle;\ v_{k+1} = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = (a_1 Id + \dots + a_k \mathcal{A}^{k-1})(v_1)$
$(\mathcal{A}^k - a_k \mathcal{A}^{k-1} \dots - a_1 Id) v_1 = 0$
Заметим: $(\mathcal{A}^k - a_k \mathcal{A}^{k-1} \dots a_1 Id) v_2 = (\dots)\mathcal{A}(v_1) = \mathcal{A}((\dots)v_1) = 0$
Аналогично для $v_3 \dots v_k$

Definition 8.1. Циклическое подпространство

${}_{\mathcal{A}}\langle v \rangle = \langle v_1 \dots v_k \rangle$ – циклическое подпространство, порожденное v – инвариантное подпространство (очев)

Definition 8.2. Фробениусова клетка

$$[\mathcal{A}]_{v_1 \dots v_k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_k \end{pmatrix}$$

$\chi_A(t) = t^k - a_k t^{k-1} - \dots - a_2 t - a_1$

Exercise 8.1.

Знаем, что $\chi_A(\mathcal{A}(v_i)) = 0\ \forall i$
И для v_1 нет многочлена меньшей степени с тем же свойством (по построению)

Remark 8.1.

Если v выбран случайно, то скорее всего $\langle v \rangle = V$

Theorem 8.1. В общем случае верна следующая теорема

$\exists$ разложение V в прямую сумму циклических подпространств
$V = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle \ldots \oplus \langle v_k \rangle$ – многочленами
Иными словами $\forall$ оператора $\exists$ базис : $[A]$ состоит из фробениусовых клеток и $\chi_A = f_1 \ldots f_k$

9 Геометрия в векторных пространствах

Definition 9.1. Главная геометрическая операция

Это скалярное произведение векторов

Example 9.1.

В $\mathbb{R}^2$ – $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + x_2y_2$ – полилинейная

Definition 9.2. Билинейность

V – векторное пространство над K. Билинейная форма – это отображение $f : V \times V \to K$, линейное по каждому аргументу
$f(ax + by, z) = af(x, z) + bf(y, z)$

Example 9.2. Билинейная форма в координатах

$v_1 \ldots v_n$ – базис V
$x, y \in V$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ – координаты x и y в этом базисе
$f(x, y) = f(x_1v_1 + \ldots + x_nv_n, y_1v_1 + \ldots + y_nv_n) = \sum x_if(v_i, \sum y_jv_j) = \sum f(v_i, v_j)x_iy_j =$
$= \sum x_ia_{ij}y_j = (x_1 \ldots x_n) \begin{pmatrix} \sum a_{ij}y_j \\ \sum a_{ij}y_j \\ \vdots \\ \sum a_{ij}y_j \end{pmatrix} = (x_1 \ldots x_n)(a_{ij}) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x^TAy$

Definition 9.3.

$A = (f(v_i, v_j))$ – называется матрицей билинейной формы (матрица Грама) f относительно базиса $v_1 \ldots v_n$
$x \to Ax$ – линейное отображение
$(x, y) \to x^TAy$ – билинейная форма

Example 9.3.

$A = E$
$f(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$

Пусть $v_1 \ldots v_n$ – старый базис и $u_1 \ldots u_n$ – уовый C – матрица перехода $\begin{cases} x \to Cx \\ y \to Cy \end{cases}$

$f(x,y) = x^T A_{old} y = (Cx)^T A_{new} Cy = x^T C^T A_{new} Cy = x^T A_{old} y \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
$\Rightarrow C^T A_{new} C = A_{old}$
$A \to C^T AC$ (формула замены)
$A \to C^{-1}AC$ (формула для операторов)

Definition 9.4. Симметрическая билинейная форма

Симметрической билинейной формой называется f – билинейная на V такая, что $f(x,y) = f(y,x)$
$Byl(V,V)$ – билинейные формы
$Sym(V,V) \subset Byl(V,V)$ – симметрические

Remark 9.1.

$Byl(V,V)$ – векторное пространство над V
$Sym(V,V)$ – подпространство $Byl(V,V)$

Theorem 9.1. Утверждение

$f \in Byl(V,V)$, A_f – ее матрица Грама
f – симметричная $\Leftrightarrow$ $f(x,y) = f(y,x)$ $\Leftrightarrow$ $f(v_i,v_j) = f(v_j,v_i)$ для любых базисных $\Leftrightarrow$ $A_f = A_f^T$ – симметрическая матрица
$A = A^T \Rightarrow x^T Ay = (x^T Ay)^T = y^T A^t (x^T)^T = y^T Ax \Rightarrow f(x,y) = f(y,x)$

Remark 9.2.

Любая квадратная матрица задает билинейную форму, любая симметричная матрица задает симметричную билинейную форму
$(x,y) \to x^T Ay$ – очев билинейно

Definition 9.5.

f – билинейная форма на V
q_f – ее квадратичная форма: $q_f(v) = f(v,v)$
$q_f : V \to K$
Свойства:

1. $q_f(kv) = k^2 q_f(v)$

Theorem 9.2. Утверждение

f (симметричная) однозначно восстанавливается по q_f, т.е. $q_{f_1} = q_{f_2} \Rightarrow f_1 = f_2$
$2xy = (x+y)^2 - x^2 - y^2$

Remark 9.3.

$char K \neq 2$

Доказательство:

Заметим, что $\forall v_1, v_2 \in V$

$\frac{q_f(v_1+v_2)-q_f(v_1)-q_f(v_2)}{2} = \frac{f(v_1+v_2,v_1+v_2)-f(v_1,v_1)-f(v_2,v_2)}{2} = \frac{2f(v_1,v_2)}{2} = f(v_1, v_2)$

Т.е. f однозначно выражается через q_f

9.1 Евклидовы и унитарные пространства

$K = \mathbb{R}$

Definition 9.6. Евклидово пространство

Евклидово пространство – это пара (V, f), где V – векторное пространство над $\mathbb{R}$ и f – симметрическая билинейная форма и f – положительно определенная
Т.е. $\forall v \in V \setminus \{0\} f(v, v) > 0$ и $q_f(v) > 0$ (и $f(0, v) = 0$)

Notation 9.1.

Обозначим $f(x, y) = (x, y)$

Definition 9.7. Длина вектора (норма)

$||x|| = \sqrt{(x, x)}$
$(V, || \cdot ||)$ – (нормированное) метрическое пространство
$d(x, y) = ||x - y||$ – удовлетворяет неравенству треугольника
КБШ: $\forall x, y \in V \ |(x, y)|^2 \leq ||x|| \cdot ||y||$
$\arccos \frac{(x,y)}{||x||\cdot||y||} = \angle(x, y)$ – угол между векторами x и y

TODO 04/21

Notation 9.2. Какое-то резюме прошлых пар

$f((x_1 \dots x_n), (y_1 \dots y_n)) = \sum a_{ij} x_i y_j$ – билинейная форма на $\mathbb{R}^n$ и $A = (a_{ij})$
$f((x_1 \dots x_n), (y_1 \dots y_n)) = \sum x_i y_i \to (a_{ij}) = E$ – скалярное произведение (симметрично и положительно определено)
Знаем: f – симметрично положительно определено $\Rightarrow \exists$ ОНБ $\Rightarrow$ можно лом. координаты
$(\mathbb{R}^n, f)$ – евклидово пространство

$$f \to f_0; \quad \begin{aligned} x_i &= \sum_1^n c_{ij} x'_j \\ y_i &= \sum_1^n c_{ij} y'_j \end{aligned}$$

$f \to f_0 - \sum x'_i y'_i$ при этом f – симметрично положительно определено $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$ и все угловые миноры (a_{ij}) – положительны
Т.е. $\exists$ изоморфмизм $i : \mathbb{R}^n \to V$ векторное пространство и $f(i(x), i(y)) = f_0(x, y) = \sum x_i y_i$. Доказательство через сопоставление ОНБ

Пусть $\mathbb{C}^n$, хотим скалярное произведение на $\mathbb{C}^n$ – примерно с теми же свойствами, в частности $v \to ||v|| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ и $d(x, y) = ||x - y||$ – метрическое пространство
$((x_1 \dots x_n), (y_1 \dots y_n)) = \sum x_i y_i$ – плохо, потому что $||x|| = \sum x_i^2 \notin \mathbb{R}_{\geq 0}$
Правильная формула: $x_1 \to x_1 \cdot x_1$ – плохо, а вот $x_1 \to \overline{x_1} \cdot x_1$ – хорошо
Тогда $((x_1 \dots x_n), (y_1 \dots y_n)) = \sum x_i \overline{y_i}$ – скалярное произведение на $\mathbb{C}^n$

Definition 9.8. Полуторалинейная форма

V – векторно пространство над $\mathbb{C}$
$f : V \times V \to \mathbb{C}$ – полуторалинейная форма, если

1. $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$
2. $f(y, x_1 + x_2) = f(y, x_1) + f(y, x_2)$
3. $f(ax, y) = af(x, y)$
4. $f(x, ay) = \overline{a} f(x, y)$

(наш пример полуторолинеен)

Definition 9.9. Эрмитова форма

Полуторалинейная форма называется эрмитовой, если $\forall x, y \in V \; f(x, y) = \overline{f(y, x)}$

Definition 9.10.

Эрмитова форма – положительно определена, если $\forall x \neq 0 \; f(x, x) \in \mathbb{R}_+$

Remark 9.4.

f – полуторалинейная эрмитова, то $\forall x \; f(x, x) = \overline{f(x, x)} \in \mathbb{R}$

Definition 9.11.

Унитарным пространство называется пара (V, f), где V – векторное пространство над $\mathbb{C}$ и f – полуторалинейная эрмитова форма и положительно определена на V
f называется скалярным произведением

Example 9.4.

$V = \mathbb{C}^n;\ f((x_1 \dots x_n), (y_1 \dots y_n)) = \sum x_i \overline{y_i} \Rightarrow (V, f)$ – унитарное пространство
$\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ и $f|_{\mathbb{R}^n}$ – старое скалярное произведение

Notation 9.3.

$A = (f(v_i, v_j))$ – матрица Грама f в базисе $f_1 \dots f_n$
$f(x, y) = X^T A Y;\ X, \overline{Y}$ – координатры x, y в $(v_1 \dots v_n)$ (доказательство – упр)
При замене базиса $A \to C^T A \overline{C}$
V – унитарное пространство. $||v|| = \sqrt{(v, v)}$ – норма. $d(u, v) = ||u - v||$ – метрика (ничего не меняется)
Уточнение: $\cos\varphi = \frac{(x,y)}{||x||||y||}$. Можно доказать КБШ
$\angle(x, y) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ – угол между прямыми и $\angle(x, y) = \arccos|\frac{(x,y)}{||x||||y||}|$
Ортогональность, ОНБ – определяется как раньше
Ортогонализация Грама-Шмидта – как раньше $\to$ в любом унитарно V $\exists$ ОНБ $e_1 \dots e_n$
В координатах $(e_1 \dots e_n)$ $V = (\mathbb{C}^n;\ f_0);\ f_0$ – стандартное произведение
Теорема об ортогональных дополнениях сохраняется

10 Операторы в еклидовых и унитарных пространствах

Definition 10.1. Отображение

$\mathcal{A} : U \to V$ – линейное отображение. U, V – евклидовы или унитарные пространства
$\mathcal{B} : V \to U$ – называется сопряженным к $\mathcal{A}$, если $\forall u \in U, v \in V\ (\mathcal{A}(u), v) = (u, \mathcal{B}(v))$

Существование и единственность:

$u_1 \dots u_n$ и $v_1 \dots v_m$ – ОНБ в U и V

$\mathcal{B}$ – сопряженное к $\mathcal{A}$:

$\forall i \in 1 \dots n,\ j \in 1 \dots m\ (\mathcal{A}u_i, v_j) = (u_i, \mathcal{B}v_j)$

$(\sum a_{ki} v_k, v_j) = (u_i, \sum b_{lj} u_l)$

$a_{ji} = \overline{b_{ij}}$ (т.к. ортогональность + нормированность)

Получается $A^T = \overline{B}$ ($B = \overline{A^T} \Rightarrow$ единственность)

Существование:

$B = \overline{A^T} \Rightarrow (\mathcal{A}u_i, v_j) = (u_i, \mathcal{B}v_j) \Rightarrow (\mathcal{A}(\sum a_i u_i), \sum b_j v_j) = \sum a_i \overline{b_j} (\mathcal{A}(u_j), v_j) = \sum a_i \overline{b_j} (u_i, V b_j) = (\sum a_i v_i, \mathcal{B}(\sum b_j v_j))$

Обозначим $\mathcal{B} = \mathcal{A}^*$

$\mathcal{A} \in End(V, V)$

$\mathcal{A} : V \to V$ – линейный

$\mathcal{A}^* : V \to V$ – линейный

A – матрица $\mathcal{A}$ в ОНБ $\Rightarrow \overline{A^T}$ – матрица $\mathcal{A}^*$ в ОНБ

Theorem 10.1. Свойства сопряженного оператора

1. $0^* = 0$
2. $Id^* = Id$
3. $(A + B)^* = A^* + B^*$
4. $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$
5. $A^{**} = A$

Exercise 10.1.

Как выглядит формула для $[\mathcal{A}^*]$ в произвольном базисе?

Definition 10.2. Самосопряженные операторы

Оператор $\mathcal{A}$ называется самосопряженным, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$
В матрицах:

- V – евклидово (ОНБ). $A = A^T$ – симметрическая матрица
- V – унитарное. $A = \overline{A^T}$ ($\overline{A} = A^T$) – эрмитова матрица

Remark 10.1.

A – эрмитова – матрица Грама эрмитовой формы

Remark 10.2.

V – евклидово пространство $(\ ,\ )$ – стандартное скалярное произведение
A – матрица Грама в ОНБ (отн стандартного) другого скалярного произведения $f(\ ,\ )$
Тогда $f(x, y) = (Ax, y)$ (упражнение)

Lemma 10.1.

1. V – унитарна, $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \Rightarrow$ собственные числа $\mathcal{A}$ вещественны
2. V – евклидово, $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \Rightarrow \chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod(t - \lambda)\ \lambda_i \in \mathbb{R}$

Доказательство:

1. λ – собственное число ($v \neq 0$ – собственные вектор λ)
   $(\mathcal{A}v, v) = (v, \mathcal{A}^* v)$
   $(\mathcal{A}v, v) = (\lambda v, v) = (v, \lambda v)$
   $\lambda(v, v) = \overline{\lambda}(v, v) \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$
2. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$
   $A = A^T$ в $M_n(\mathbb{R})$
   $A = \overline{A^T}$ в $M_n(\mathbb{C})$ – матрица самосопряженного оператора $\Rightarrow$ все собственные числа вещественные корни $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in \mathbb{R}$

Lemma 10.2.

$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$; $\mathcal{A} : V \to V$ и $U \leq V$ – инвариантное подпространство
$\Rightarrow U^{\perp}$ – инвариантное подпространство

Доказательство:

$v \in U^{\perp}$. $?\mathcal{A}(v) \in U^{\perp}$

$\forall u \in U$ $(\mathcal{A}(v), u) = (v, \mathcal{A}u) = 0 \Rightarrow \mathcal{A}(v) \in U^{\perp}$

Theorem 10.2.

V – евклидово/унитарное пространство. $\mathcal{A} : V \to V$ – линейный
$\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \Leftrightarrow$ у $\mathcal{A}$ есть ОНБ из собственных векторов с вещественными собственными числами

Доказательство:

$\Leftarrow$ $e_1 \dots e_n$ – такой базис

в ОНБ $[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = A$

$A = \overline{A^T} \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{A}^*$

$\Rightarrow$ Индукция по $\dim V$

$n \to n+1$

$\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ собственное число $\Rightarrow \exists v_{n+1} \neq 0 : \mathcal{A}v_{n+1} = \lambda v_{n+1}$. $U = \langle v_{n+1} \rangle$ – инвариантно

По лемме $U^{\perp}$ – инвариантное подпространство, т.е. $\mathcal{A}|_{U^{\perp}} : U^{\perp} \to U^{\perp}$ и $\mathcal{A}|_{U^{\perp}}$ – самосопряженный $\Rightarrow \exists$ ОНБ $v_1 \dots v_n$ (по ИП)

$\mathcal{A}v_i = \lambda_i v_i$, $\forall i = 1 \dots n$. $\tilde{v_{n+1}} := \frac{v_{n+1}}{||v_{n+1}||}$

$\mathcal{A}v_{n+1} = \lambda_n v_{n+1} = \lambda_{n+1} v_{n+1}$

$\lambda_{n+1} \perp v_1 \dots v_n$, т.к. $\langle v_1 \dots v_n \rangle = (\langle v_{n+1} \rangle)^{\perp}$

Theorem 10.3. Следствие

Собственные вектора самосопряженного оператора, соответствующие различным собственным числам, ортогональны

Exercise 10.2.

Доказать (ясно)
Напрямую

Notation 10.1. Геометрическая формулировка

Самосопряженный оператор – композиция растяжений пространства в нескольких попарно перпендикулярных направлениях
Все вектора ОНБ переходят в себя, один из них $e_i \to \lambda_i e_i$

11 Самосопряженные оператора и квадратичные формы

Definition 11.1.

V – евклидово, $\mathcal{A}$ – самосопряженный
$f(x,y) = (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y);\ f : V \times V \to \mathbb{R}$ – симметричная билинейная форма
$q : V \to \mathbb{R}$ – квадратичная форма
$e_1 \dots e_n$ – ОНБ
$x \mapsto X \in \mathbb{R}^n;\ y \mapsto Y \in \mathbb{R}^n;\ \mathcal{A} \mapsto A \in M_n(\mathbb{R})$
$(\mathcal{A}x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} (Ax)_i y_i = (AX)^T Y = X^T AY$
Вывод: матрица $\mathcal{A}$ и матрица Грама $f_{\mathcal{A}}$ совпадают

Notation 11.1. Оценка квадратичной формы

f – положительно определенная квадратичная форма. $q(x) = f(x,x) > 0$ $(x \neq 0)$
Хотим: $M||x||^2 > f(x) > m||x||^2$
В координатах: $M(\sum x_i^2) > \sum a_{ij} x_i x_j > m(\sum x_i^2)$
$f(x,y) = x^2 + xy + y^2$. Тогда $\frac{3}{2}(x^2+y^2) \geq x^2 + xy + y^2 \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

Theorem 11.1.

$\lambda_{\max} \cdot ||x||^2 \geq q(x) \geq \lambda_{\min} \cdot ||x||^2$
Здесь $\lambda_{\min} > 0$ и константы нельзя улучшить

Доказательство:
$q(x) = (\mathcal{A}x, x);\ x = \sum c_i e_i;\ e_1 \dots e_n$ – собственный базис $\mathcal{A}$
$q(x) = (\mathcal{A}(\sum c_i e_i), \sum c_i e_i) = (\sum c_i \lambda_i e_i, \sum c_i e_i) = \sum c_i^2 \lambda_i$
$\lambda_{\min} = \min(\lambda_1 \dots \lambda_n);\ \lambda_{max} = \max(\lambda_1 \dots \lambda_n)$
$\lambda_{\min} \sum c_i^2 \leq \sum c_i^2 \lambda_i \leq \lambda_{\max} \sum c_i^2$
$||x||^2 = \sum c_i^2$ $(e_1 \dots e_n$ – ОНБ$)$
$\lambda_{\min} ||x||^2 \leq q(x) \leq \lambda_{\max} ||x||^2$

Remark 11.1.

x – собственный вектор для $\lambda_{\min}$ $(x = e_{min})$, то неравенство превращается в равенство
В частности $\lambda_{\min} > 0$

Remark 11.2.

Основное неравенство верно всегда

Notation 11.2.

V – евклидово/унитарное пространство, $e_1 \dots e_n$ – стандартный ОНБ

$\mathcal{A}$ – самосопряженный. В $f_1 \dots f_n$ – ОНБ $[\mathcal{A}]_{f_1 \dots f_n} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$

$A = [\mathcal{A}]_{e_1 \dots e_n}$. $\exists C : C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$

Что можно сказать о C – матрице перехода

Столбцы C – столбцы $f_1 \dots f_n$ в базисе $e_1 \dots e_n$

$f_i = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix}$; $f_j = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}$

Знаем, что $\delta_{ij} = (f_i, f_j) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{ki}\overline{c_{kj}}$

То есть столбцы C – ОНБ $\mathbb{R}^n/\mathbb{C}^n$

То есть $C \cdot \overline{C^T} = E \Leftrightarrow \overline{C^T} \cdot C = E$ или $C^T \cdot \overline{C} = E$ итд

Reminder 11.1.

$\overline{C^T} = C^*$ – матрица сопряженного оператора, т.е. $C^* = C^{-1}$

Notation 11.3.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = C^{-1}AC = C^*AC \begin{array}{l} = C^TAC \text{ евклидово} \\ = \overline{C^T}AC \text{ унитарное} \end{array}$$

$C^{-1}AC$ – формула для оператора, а C^TAC – формула для квадратичной формы

Итого: $\forall$ квадратичной формы существует замена переменных с матрицей $C : C^* = C^{-1}$ (ортогональная замена), т.ч. $q \to \sum x_l x_i^2$. При этом λ_i определены однозначно (собственные числа матрицы $\mathcal{A}$)

12 Ортогональные и унитарные операторы

Definition 12.1.

V – евклидово/унитарное пространство. C называется ортогональным/унитарным (или изометрией) ($C \in Lin(V, V)$), если выполнено одно из равносильных условий:

1. $\forall x, y\ (Cx, Cy) = (x, y)$
2. $\forall x\ ||Cx|| = ||x||$
3. В ОНБ $C^T = \overline{C^{-1}}$
4. C – матрица перехода от ОНБ к ОНБ
5. C переводит любой ОНБ в ОНБ
6. $\exists$ ОНБ $e_1 \dots e_n$, такой что $Ce_1 \dots Ce_n$ – ОНБ

"Доказательство":

$1 \Rightarrow 2$ $(Cx, Cx) = (x, x)$

$2 \Rightarrow 1$ $(x, y) = \frac{(x+y, x+y) - (x,x) - (y,y)}{2}$ (если V – евклидово, унитарное – упраженние)

$3 \Leftrightarrow 4$ Чуть выше

$4 \Leftrightarrow 6$ Очев. Матрица перехода от $\{e_i\}$ к $\{f_i\}$ = матрица отображения $(f_i \mapsto e_i)$

$5 \Rightarrow 6$ Очев

$6 \Rightarrow 1$ $Ce_i = f_i$, где $\{e_i\}, \{f_i\}$ – ОНБ

$\forall x, y\ (Cx, Cy) = (C(\sum a_i e_i), C(\sum b_i e_i)) = (C(\sum a_i f_i), C(\sum b_i f_i)) = \sum a_i b_i = (x, y)$

$1 \Rightarrow 5$ Очев

Example 12.1. Ортогональные/унитарные матрицы

$n = 1$. $\overline{C}C^T = E$ при $C = (c)$. Значит $\overline{C}C^T = (c\overline{c})$

C – ортогональная, значит $c = \pm 1$

C – унитарная, значит $c = (\cos\alpha + i \sin\alpha)$

$n = 2;\ K = \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ – ортогональная} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

В первом случае это матрица поворота на α, во втором – матрица симметрии

$C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$C(0) = 0$ и C – сохраняет расстояния $\Rightarrow C$ – поворот или симметрия

Theorem 12.1. Утверждение

Ортогональные/унитарные матрицы образуют группу. Обозначается $O_n(\mathbb{R})$ или $U_n(\mathbb{C})$

$O_n(\mathbb{R}) \leq GL_n(\mathbb{R})$ – обратимые матрицы и $|\det A| = 1$ для любой такой матрицы

Доказательство:

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – сохраняют скалярное произведение $\Rightarrow \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ – сохраняет скалярное произведение

Id – сохраняет скалярное произведение. $\mathcal{A}$ – сохраняет $\Rightarrow \mathcal{A}^{-1}$ – сохраняет

Почему $\mathcal{A}$ – ортогональный/унитарный $\Rightarrow \mathcal{A}$ – обратим?

$\mathcal{A}$ – необратима $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} \mathcal{A} \neq 0 \Leftrightarrow \exists x \neq 0 : \mathcal{A}x = 0$, но $0 = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (x, x) \neq 0$????

$A \cdot \overline{A^T} = E$

$\det(A) \cdot \det(\overline{A^T}) = \det(E) = 1$

$1 = \det(A) \cdot \det(\overline{A}) = \det(A) \cdot \overline{\det(A)} = |\det(A)|^2$

Notation 12.1. Ориентация

$e_1 \dots e_n$ и $f_1 \dots f_n$ – базисы V над $\mathbb{R}$
C – матрица перехода от $\{e_i\}$ к $\{f_i\}$
$\{e_i\}$ и $\{f_i\}$ – одинаково ориентированы, если $\det(C) > 0$
Очевидно, что одинаковая ориентированность – отношение эквивалентности

Theorem 12.2. Утверждение

Существует ровно 2 класса эквивалентности базисов

Доказательство:

$\{e_i\}, \{f_i\}, \{g_i\}$ – 3 базиса

Пусть $\{e_i\} \not\sim \{f_i\} \not\sim \{g_i\}$

$\det C_{e \to f} < 0$ и $\det C_{f \to g} < 0$

$\det C_{e \to g} = \det C_{e \to f} \cdot \det C_{f \to g} > 0 \Rightarrow \nexists$ 3 разных классов

Definition 12.2.

$\mathcal{A} \in Lin(V, V)$ – невырожденный
$\mathcal{A}$ сохраняет ориентацию, если переводит каждый класс базисов в себя
$\mathcal{A}$ меняет ориентацию, если он переставляет классы

05/19

Theorem 12.3. Предположение

V – векторное пространство над $\mathbb{R}$ $\mathcal{A} : V \to V$ – линейный невырожденный

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\mathcal{A} \text{ сохраняет все ориентации} \\ \mathcal{A} \text{ меняет все ориентации}\end{array}\right.$$

Доказательство:

$A = [\mathcal{A}]_{\{e_i\}}$

$C = [Id]_{\{u_i\}, \{e_i\}}$

$AC = [\mathcal{A}]_{\{u_i\}, \{e_i\}}$

Пусть $\det A > 0 \Rightarrow \{e_i\}$ и $\{\mathcal{A}(e_i)\}$ – одинаково ориентированы

Матрица перехода от $\{u_i\}$ к $\{\mathcal{A}(u_i)\}$ – это $C^{-1}AC$; $\det A > 0 \Rightarrow \det(C^{-1}AC) > 0 \Rightarrow \{u_i\}$ и $\{\mathcal{A}(u_i)\}$ – одинаково ориентированы. Аналогично $\det A < 0$

O_n – группа ортогональных операторов $\{\mathcal{A} : V \to V \mid \mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}\} \Rightarrow \det A = \pm 1$

$O_n = SO_n \cup SO_n^-$, с определителем 1 и -1 соответственно

Example 12.2.

В $\mathbb{R}^3 : \exists$ ОНБ $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$

1. $+1$ – повороты вокруг оси (сохраняют ориентацию)
2. -1 – повороты $+$ зеркальная симметрия (меняют ориентацию)

Notation 12.2.

Движение с неповоротной точкой $\sim$ ортогональные операторы. Возьмем неповоротную точку за ноль и далее ...

Remark 12.1.

Пусть $K = \mathbb{C}$, т.е. унитарный оператор на V – в.п. над $\mathbb{C}$
$V = \mathbb{C}^n;\ \mathcal{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n\ \mathcal{A}(x) = Ax;\ A^T = \overline{A}^{-1}$
Пусть $A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – ортогональный оператор
$A^T = A^{-1}$

Theorem 12.4.

V – унитарное пространство, $\mathcal{A} : V \to V$ – унитарный
Тогда $\exists$ ОНБ из собственный чисел для $\mathcal{A}$, причем $|\lambda = 1\ \forall \lambda$ – собственного числа $\mathcal{A}$
$\exists [\mathcal{A}]_{\{e_i\}} = \begin{pmatrix} z_{\alpha_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & z_{\alpha_n} \end{pmatrix}$
$z_\alpha = e^{i\alpha}$

Доказательство:

1. Пусть λ – собственное число A
   $\mathcal{A}x = \lambda x;\ x \neq 0\ x \in V$
   $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (x, x)$
   $(\lambda x, \lambda x) = (x, x) \Rightarrow \lambda\overline{\lambda}(x, x) = (x, x) \neq 0 \Rightarrow \lambda\overline{\lambda} = 1 \Rightarrow |\lambda|^2 = 1$
2. Докажем: $\mathcal{A}$ – ортогональный/унитарный на V. U – инвариантное подпространство $\Rightarrow U^\perp$ – инвариантное подпространство
   Надо проверить: $v \in U^\perp \Rightarrow \mathcal{A}v \in U^\perp$, т.е. $\forall u \in U\ (\mathcal{A}v, u) = 0$
   Знаем: $\mathcal{A}$ – обратим. $(\mathcal{A}v, u) = (\mathcal{A}v, \mathcal{A}(u')) = (v, u') = 0$, т.к. $v \in U^\perp;\ u' \in U$

   Remark 12.2.

   Использовали: $\mathcal{A} : V \to V$ – обратимый
   $U \leq V;\ \mathcal{A}(U) \subset U \Rightarrow \mathcal{A}^{-1}(U) \subset U$

   Далее как в случае $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ индукция по $\dim V$
   (Находим собственный вектор $e_1 : \mathcal{A}e_1 = \lambda e_1$. $U = \langle e_1 \rangle;\ \dim U^\perp = \dim V - 1$. По и.п $\exists e_2 \dots e_n$ – ОНБ из собственных в $U^\perp \Rightarrow e_1 \dots e_n$ – ОНБ из собственных в V)

Theorem 12.5.

Следующие условия равносильны:

1. $\mathcal{A}: V \to V$ – ортогонален
2. $\exists$ ОНБ $e_1 \dots e_n$ такой, что $[\mathcal{A}]_{e_i} = \begin{pmatrix} (B_1) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & (B_k) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \pm 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \pm 1 \end{pmatrix}$

   $B_i = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix}$ – матрица поворота

   Геометрически: $\forall$ ортогональное преобразование – композиция двумерных поворотов и зеркальных симметрий

Доказательство:

Сразу считаем $V = \mathbb{R}^n$; $\mathcal{A}(x) = Ax$

$V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$; $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}(x) = Ax$. $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ – унитарный оператор $\Rightarrow$ по предыдущей теореме $\exists$ ОНБ из собственных столбцов в $\mathbb{C}^n$

$V_\lambda = \{x \in \mathbb{C}^n \mid Ax = \lambda x\}$ – собственное подпространство

$\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_{-1} \oplus (V_{\lambda_1} \oplus V_{\overline{\lambda_1}}) \oplus \dots$

$\dim V_{\lambda_i}$ – кратность λ_i в $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in \mathbb{R}[t] \Rightarrow \dim V_{\lambda_i} = \dim V_{\overline{\lambda_i}}$

$V_\lambda \perp V_\mu$; $\lambda \neq \mu$; $(x, y) = 0\ \forall x \in V_\lambda,\ y \in V_\mu$

$V_\lambda = \langle e_{i_1} \dots e_{i_k} \rangle$; $V_\mu = \langle e_{j_1} \dots e_{j_k} \rangle$

$(e_{i_b}, e_{j_l}) = 0\ \forall b, l$

Идея: переделать e_i – объединение базисов V_λ в такой же ОНБ базис $\tilde{e_1} \dots \tilde{e_n}$, $\tilde{e_i} \in \mathbb{R}^n$

1. Пусть $\lambda = \pm 1$
   $\dim V_1 = k = \dim(\operatorname{Ker}(A^{\mathbb{C}} - E)) = n - \operatorname{rk}(A - E) = \dim \operatorname{Ker}(A - Id)$
   $\Rightarrow \exists \tilde{e_1} \dots \tilde{e_k}$ – ОНБ $\operatorname{Ker}(A - E)$ в $\mathbb{R}^n$
   Аналогично с $\lambda = -1$
   $\tilde{e_{k+1}} \dots \tilde{e_l}$; $(\tilde{e_i}, \tilde{e_{k+j}}) = 0$ $(i \leq k)$, т.к. $\tilde{e_i} \in \operatorname{Ker}(A^{\mathbb{C}} - E) = V_1$ и $\tilde{e_{k+j}} \in \operatorname{Ker}(A^{\mathbb{C}} + E) = V_{-1}$
2. Пусть теперь $\lambda \in \mathbb{R}$; $\{\lambda, \overline{\lambda}\}$ – зафиксировали λ
   $e_{j_1} \dots e_{j_p}$ – ОНБ $V_\lambda \in \mathbb{C}^n$
   $$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 i \\ \vdots \\ a_n + b_n i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$
   $w \in \mathbb{C}^n$; $w = u + iv$; $u, v \in \mathbb{R}^n$
   $e_{j_s} = u_s + iv_s$; $\lambda = \cos\alpha + i\sin\alpha$
   $\mathcal{A}(e_{j_s}) = \lambda e_{j_s}$, т.е. $\lambda(u_s + iv_s) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(u_s + iv_s) = (\cos\alpha u_s - \sin\alpha v_s) +$
   $+ i(\sin\alpha u_s + \cos\alpha v_s) = \mathcal{A}(u_s) + i\mathcal{A}(v_s)$
   Т.е. $\begin{cases} Au_s = \cos\alpha u_s - \sin\alpha v_s \\ Av_s = \sin\alpha u_s + \cos\alpha v_s \end{cases} \Rightarrow A(u_s - iv_s) = (\cos\alpha - i\sin\alpha)(u_s - iv_s)$, т.е. $u_s - iv_s \in V_{\overline{\lambda}}$
   $e_{j_1} \dots e_{j_p}$ – базис $V_\lambda \Rightarrow \overline{e_{j_1}} \dots \overline{e_{j_p}}$ – базис $V_{\overline{\lambda}}$
   Знаем $\dim V = \dim V_{\overline{\lambda}}$
   $\overline{e_{j_i}}$ – ЛНЗ

$\sum a_i\overline{e_{j_i}} = 0 = \sum \overline{a_i}e_{j_i} = 0 \Rightarrow \overline{a_i} = 0 \Rightarrow a_i = 0$
$e_{j_1}\dots e_{j_p}, \overline{e_{j_1}}, \dots, \overline{e_{j_p}}$ – базис $V_\lambda \oplus V_{\overline{\lambda}}$
$V_\lambda \oplus V_{\overline{\lambda}} = \bigoplus\langle e_{j_k}, \overline{e_{j_k}}\rangle = \bigoplus\langle u_k + iv_k, u_k - iv_k\rangle = \bigoplus\langle u_k, v_k\rangle$ очев. $u_k, v_k \in \mathbb{R}^n$
Сделав так для каждой пары $(\lambda, \overline{\lambda})$ получим базис для $\mathbb{R}^n$
Почему базис? Потому что эти вектора ЛНЗ в $\mathbb{C}^n$; $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_{-1} \oplus (V_{\lambda_1} \oplus V_{\overline{\lambda_1}}) \oplus \dots$

$$\begin{cases} Au_s = \cos\alpha u_s - \sin\alpha v_s \\ Av_s = \sin\alpha u_s + \cos\alpha v_s \end{cases} \Rightarrow [\mathcal{A}\mid_{\langle u_s, v_s\rangle}|_{[u_s,v_s]}] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \text{итого } [\mathcal{A}]_{\{\tilde{e_1}\dots e_{k+j}, \{u_i, v_i\}\}}$$

имеет требуемый вид
Ортонормируемость.
$V_1 \oplus V_{-1} \ni \tilde{e_1}\dots \tilde{e_{k+i}} \perp \{u_s, v_s\} \in \bigoplus(V_\lambda \oplus V_{\overline{\lambda}})$
Аналогично $u_s, v_s \perp u_i, v_i$ если они соответствуют разным парам $(\lambda, \overline{\lambda})$ и $(\mu, \overline{\mu})$
Что внутри $V_\lambda \oplus V_{\overline{\lambda}}$?

$$\begin{cases} \mathcal{A}(u_s) = \cos\alpha u_s - \sin\alpha v_s \\ \mathcal{A}(v_s) = \sin\alpha u_s + \cos\alpha v_s \end{cases}$$

$i \neq j \Rightarrow (u_i, u_j) = (e_i + \overline{e_i}, e_j + \overline{e_j}) = 0$
$(u_s, v_s) = (\frac{(u_s+iv_s)+(u_s-iv_s)}{2}, \frac{(u_s+iv_s)-(u_s-iv_s)}{2}) = \frac{1}{4}(e + \overline{e} + e - \overline{e}) = 0$
$e \perp \overline{e}$, т.к. $e \in V_\lambda$; $\overline{e} \in V_{\overline{\lambda}}$
$(u_s, u_s) = (e + \overline{e}, e + \overline{e}) = 2$
$u_s \to \frac{u_s}{\sqrt{2}}$; $v_s \to \frac{v_s}{\sqrt{2}}$ – теперь ОНБ

$$A_{u,v} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A_{\frac{u}{2}, \frac{v}{2}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Это было $1 \Rightarrow 2$

$$2 \Rightarrow 1: \begin{pmatrix} (B_1) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & (B_k) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \pm1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \pm1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (B_1)^T & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & (B_k)^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \pm1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \pm1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Definition 12.3. Параллельный перенос

$B \in \mathbb{R}^n$; $t_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; $t(x) = x + B$ – параллельный перенос на вектор B

Theorem 12.6. Свойства

1. Сохраняет расстояния
   $d(t(x), t(y)) = |t(x) - t(y)| = |(x + B) - (y + B)| = |x - y| = d(x, y)$
2. Не линейный оператор (если $B \neq 0$)
   $t_B(0) = B \neq 0$

Lemma 12.1.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – отображение, сохраняющее расстояния
Тогда $\exists B : f = t_B \circ g$; g – сохраняет расстояния и $g(0) = 0$

Доказательство:

t_B – биекция $\forall B$. Пусть $B = f(0)$

Рассмотрим $g = t_B^{-1}\circ$; f, t_B – сохраняют расстояния $\Rightarrow t_B^{-1}$ и $t_B^{-1} \circ f$ – тоже

При этом $g(0) = t_B^{-1}(f(0)) = t_B^{-1}(B) = B - B = 0$

Theorem 12.7.

Если f – сохраняет расстояния и $f(0) = 0$, то f – ортогональный оператор

Доказательство:

Пока нет (от Антипова нет) **TODO**

Notation 12.3.

Итого: $\forall$ движение – композиция параллельного переноса, двумерных поворотов и зеркальных симметрий

13 Полярное разложение

Definition 13.1. Положительные операторы

$\mathcal{A}$ – положительный оператор, если $\mathcal{A}$ – самосопряжен и $(\mathcal{A}x, x) > 0 \ \forall x \neq 0$
$\angle(\mathcal{A}x, x) < \frac{\pi}{2}$

Theorem 13.1. Утверждение

V – евклидово, $\mathcal{A}$ – самосопряжен $\Rightarrow$
$\mathcal{A} > 0 \Leftrightarrow$ все собственные числа $\mathcal{A}$ положительны

Доказательство:

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ – положительный, v – собственный вектор $\Rightarrow (\mathcal{A}v, v) = (\lambda v, v) = \lambda(v, v) > 0 \Rightarrow \lambda > 0$

$\Leftarrow$ $v_1 \dots v_n$ – собственный ОНБ. $\forall v = \sum a_i v_i$
$(\mathcal{A}v, v) = \sum \lambda_i a_i^2 > 0$

Theorem 13.2.

$\mathcal{A}$ – положительный оператор на $V \Rightarrow \exists!$ положительный оператор $\mathcal{B} : \mathcal{B} \circ \mathcal{B} = \mathcal{A}$

Доказательство:

Существование $\exists v_1 \dots v_n$ – ОНБ для $\mathcal{A}$
$\mathcal{A}(v_i) = \lambda_i v_i$
$\mathcal{B}(v_i) = \sqrt{\lambda_i} v_i \Rightarrow \forall i \ \mathcal{B}\mathcal{B}(v_i) = \mathcal{B}(\sqrt{\lambda_i} v_i) = \sqrt{\lambda_i}\mathcal{B}(v_i) = v_i \Rightarrow \mathcal{B} \circ \mathcal{B}(v) = \mathcal{A}(v) \ \forall v \in V$ по линейности
$\mathcal{B}$ – самосопряжен, т.к. диагонален в ОНБ. $\mathcal{B} > 0$, т.к. $\sqrt{\lambda_i} > 0$

Единственность Пусть $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$; $\mathcal{A}, \mathcal{B} > 0$
$V = V_{\lambda_1}^{\mathcal{A}} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}^{\mathcal{A}}$; $\lambda_1 \dots \lambda_k$ – различные собственные числа $\mathcal{A}$
Аналогично $V = V_{\mu_1}^{\mathcal{B}} \oplus \dots \oplus V_{\mu_s}^{\mathcal{B}}$; $\mu_1 \dots \mu_s$ – различные собственные числа $\mathcal{B}$
$\sum \dim V_{\lambda_i}^{\mathcal{A}} = \dim V = \sum \dim V_{\mu_i}^{\mathcal{B}}$

$\forall i\ \forall v \in V^{\mathcal{B}}_{\mu_i}\ \ \mathcal{B}^2 = \mu_i^2 v = \mathcal{A}v \Rightarrow \exists k_i : \mu_i^2 = \lambda_{k_i}$. Соответствие $\mu_i \mapsto \lambda_{k_i}$ – инъективно
И $V^{\mathcal{B}}_{\mu_i} \le V^{\mathcal{A}}_{\lambda_{k_i}}$. $V = \bigoplus V^{\mathcal{B}}_{\mu_i} \le \bigoplus V^{\mathcal{A}}_{\lambda_{k_i}} \le V \Rightarrow \forall i\ V^{\mathcal{B}}_{\mu_i} = V^{\mathcal{A}}_{\lambda_{k_i}}$ и все собственные числа $\mathcal{A}$ имеют вид λ_{k_i}
Итого: $\forall \lambda_i\ B\,|_{V^{\mathcal{A}}_{\lambda_i}}(v) = \sqrt{\lambda_i}v \Rightarrow \mathcal{B}$ – определен однозначно

Theorem 13.3. Полярное разложение

V – евклидово пространство, $\mathcal{A} : V \to V$ – невырожденный линейный оператор
Тогда $\exists! S, U : S > 0, U$ – ортогонален и $\mathcal{A} = S \circ U$
$\exists! S', U' : S' > 0, U'$ – ортогонален и $\mathcal{A} = U' \circ S'$

Доказательство:

Единственность $\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} > 0 : (\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A})^* = \mathcal{A}^* \circ A$
$(\mathcal{A}^*\mathcal{A}u, u) = (\mathcal{A}u, \mathcal{A}u) > 0$, т.к. $\mathcal{A}u \ne 0$ ($\mathcal{A}$ – невырожденный)
Пусть $\mathcal{A} = S \circ U$. $\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^* = (S \circ U) \circ (S \circ U)^* = S \circ \underbrace{U \circ U^*}_{=id} \circ S^* = S \circ S^* = S^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow S = \sqrt{\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^*}$
По предыдущей теореме $\exists! S > 0 : S^2 = \mathcal{A} \circ \mathcal{A}^* \Rightarrow S$ – определен однозначно
С другой стороны $U = S^{-1} \circ \mathcal{A}$ – определен однозначно ($\exists S^{-1}$, т.к. все собственные числа S положительны)

Существование Положим $S = \sqrt{\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^*}$; $S > 0$ $U = S^{-1}\mathcal{A}$
$S \circ U = SS^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{A}$ и $S > 0$ по построению
$U \circ U^* = (S^{-1}\mathcal{A})(S^{-1}\mathcal{A})^* = S^{-1}\mathcal{A}\mathcal{A}^* \underbrace{(S^{-1})^*}_{=S^{-1}} = S^{-1}S^2S^{-1} = id$

Remark 13.1.

S – самосопряженный. Скажем $S \ge 0$ если $(Sx, x) \ge 0$
Тогда $\forall \mathcal{A}\ \exists S \ge 0$ и U – ортогональный : $\mathcal{A} = S \circ U$
Единственности тут нет. Например $0 = 0 \circ U$, где U – любой ортогональный

14 Сингулярное разложение

Notation 14.1.

$\mathcal{A} : U \to V$ – линейное отображение

Reminder 14.1.

$\exists$ базисы U, V :

$$[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Пусть теперь U и V евклидовы и хотим $u_1 \dots u_k$; $v_1 \dots v_l$ – ОНБ

Theorem 14.1.

$\mathcal{A}: U \to V;\ U, V$ – евклидовы
$\exists u_1 \dots u_k;\ v_1 \dots v_l$ – ОНБ U и V такие, что
$[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix};\ \lambda_i > 0$

Доказательство:
Рассмотрим $\mathcal{A}^*\mathcal{A}: U \to U$

Reminder 14.2.

$\mathcal{A}: U \to V;\ \mathcal{A}^*: V \to U: \forall u \in U, v \in V\ (\mathcal{A}u, v) = (u, \mathcal{A}^*v)$
$[\mathcal{A}^*] = [\mathcal{A}]^T$ в ОНБ

$\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ – самосопряженный, ≥ 0 (как в полярном разложении)
$\exists$ ОНБ $U: \begin{cases} \mathcal{A}^*\mathcal{A}u_1 = \mu_1 u_1 \\ \dots \\ \mathcal{A}^*\mathcal{A}u_k = \mu_k u_k \\ \mathcal{A}^*\mathcal{A}u_n = 0 \qquad n > k \end{cases}$
$\tilde{v}_i := \mathcal{A}(u_i);\ i = 1 \dots k$
Заметим, что $i > k \Rightarrow 0 = (\underbrace{\mathcal{A}^*\mathcal{A}u_i}_{=0}, u_i) = (\mathcal{A}u_i, \mathcal{A}u_i) \Rightarrow \mathcal{A}u_i = 0$

При $i, j < k\ (\mathcal{A}(u_i), \mathcal{A}(u_j)) = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}u_i, u_j) = (\mu_i u_i, u_j) = \mu_i(u_i, u_j) = \left[\begin{matrix} 0 & i \neq j \\ \mu_i & i = j \end{matrix}\right. \Rightarrow$
$\Rightarrow \tilde{v}_1 \dots \tilde{v}_k$ – ортогональная система
$v_i = \frac{\tilde{v}_i}{||\tilde{v}_i||} = \frac{1}{\sqrt{\mu_i}}\tilde{v}_i$. Дополним $v_1 \dots v_k$ до ОНБ V
Итак: $u_1 \dots u_n$ – ОНБ U и $v_1 \dots v_s$ – ОНБ V
$\mathcal{A}(u_i) = 0$ при $i > k$
$\mathcal{A}(u_i) = \tilde{v}_i = \sqrt{\mu_i} v_i$ при $i \leq k$
Положим $\lambda_i = \sqrt{\mu_i}$ – сингулярные числа оператора $\mathcal{A}$
$[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Theorem 14.2.

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$\exists U, V$ – ортогональные матрицы и $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ такие, что

$A = UDV$. $U \in O_m(\mathbb{R})$; $V \in O_n(\mathbb{R})$

Доказательство:

$\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\mathcal{A}(x) = Ax$, где A – матрица $\mathcal{A}$ в стандартных ОНБ

$\exists$ другие ОНБ такие, что $[\mathcal{A}] = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Знаем, что $UDV = [\mathcal{A}] = D$, где U и V – матрицы перехода

Все базисы – ОНБ $\Rightarrow$ все матрицы перехода ортогональны