

Содержание

1	Линейная алгебра и геометрия	2
2	Система линейных уравнений (СЛУ)	10
3	Операции над пространствами	16
4	Элементарные матрицы и метод Гаусса	19

1 Линейная алгебра и геометрия

Типичная система линейных уравнений: $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$; $a, b, c, d, e, f \in R$ – кольцо или $\in K$ – поле

Неизвестные здесь: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K \times K$

Множество линейных уравнений: $\{px + qy = r\}$

Операции:

- Их можно складывать
- Умножать на константу (элемент K)

Definition 1.1. Векторное пространство

K – поле. Векторное пространство над K это $(V, +, \cdot)$, где V – множество, $+: V \times V \rightarrow V$, $\cdot: K \times V \rightarrow V$

Аксиомы:

- 1-4. $(V, +)$ – абелева группа
5. $(ab)v = a(bv) \forall a, b \in K, v \in V$
6. $(a + b)v = av + bv \forall a, b \in K, v \in V$
7. $a(v + u) = av + au \forall a \in K, v, u \in V$
8. $1v = v \forall v \in V$

Lemma 1.1.

$$\begin{aligned} 0 \cdot v &= \vec{0} \quad \forall v \in V \\ (-1) \cdot v &= -v \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

Доказательство:

$$(0 + 0)v = 0v + 0v \Rightarrow 0v = 0v + 0v$$

$$(-0)v + 0v = (-0)v + 0v + 0v \Rightarrow \vec{0} = 0v$$

$$\text{Тогда } \vec{0} = 0v = (1 + (-1))v = 1v + (-1)v = v + (-1)v, \text{ т.е. } v + (-1)v = \vec{0} \Rightarrow (-1)v = -v$$

Remark 1.1.

$u + v = v + u \forall u, v \in V$ следует из остальных 7 аксиом пространства (упражнение)

Example 1.1.

Тут рисуночки, говорящие что два вектора задают пространство, в котором выполнены аксиомы 1-8

Заметим, что есть биекция $vec \leftrightarrow R^2$, т.е. $v \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Example 1.2. Самый главный пример

$$K^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in K \right\}$$

А еще тут выполнены все аксиомы (доказано методом очев): можем складывать, домножать итд

Это называем пространство столбцов

$${}^n K = \{(a_1, a_2 \dots a_n) \mid a_i \in K\}$$

А это то же самое, но называем пространством строк

Definition 1.2. Линейное отображение

V_1, V_2 – векторные пространства над K

$f : V_1 \rightarrow V_2$ – линейное отображение (гомоморфизм), если:

1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V_1$
2. $f(kv) = kf(v) \quad \forall k \in K, v \in V_1$

Definition 1.3. Изоморфизм

f – линейное отображение и биекция, тогда f – изоморфизм

$V_1 \cong V_2$ если существует изоморфизм $V_1 \rightarrow V_2$

А есть изоморфизм $vect_2 \cong R^2$, то есть вектор изоморфен его координатам

Example 1.3.

M – множество, $R \equiv K$

$V = HOM(M|R)$ – множество всех функций $M \rightarrow R$

$f_1, f_2 \in V$

$$(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$$

$$(kf)(x) := k \cdot f(x)$$

Значит V – векторное пространство

Example 1.4.

$$M = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$$

$$f \in V \leftrightarrow \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \in R^n$$

$$V \cong R^n$$

$$M = [0, 1]; (f : M \rightarrow R \text{ – непрерывная функция})$$

Example 1.5.

$$V = \{(a_1, a_2 \dots) | a_i \in R; a_{i+2} = a_i + a_{i+1}\}$$

Заметим, что если $a \in V$, то $ka \in V$. Более того, если и $b \in V$, то $a + b \in V$

Но любую фиббоначиеву последовательность можно задать двумя начальными элементами, т.е. $(a_i) \in V \leftrightarrow (a_1, a_2) \in R^2$

Тогда $V \cong R^2$ но этот изоморфизм не лучший

Example 1.6.

M – множество, $V = 2^M$

1. $|M| = n$;

2. $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

3. $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

4. $0A = \emptyset$

5. $1A = A$

$$1A + 1A = 2A \Rightarrow 1A + 1A = \emptyset$$

$$2A = \vec{0} \quad \forall A$$

Definition 1.4. Линейная комбинация

V – векторное пространство над K

$$x_1 \dots x_n \in V; a_1 \dots a_n \in K$$

Тогда $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ – линейная комбинация векторов $x_1 \dots x_n$ с коэффициентами $a_1 \dots a_n$

Definition 1.5. Подпространство

V – векторное пространство над K . $U \subseteq V$

U – подпространство V , если U – векторное пространство над K с теми же операциями

Remark 1.2.

U – подпространство $V \Leftrightarrow$

1. $\forall u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U$

2. $\forall u \in U, k \in K \Rightarrow ku \in U$

Где $U \neq \emptyset$

Example 1.7.

$U = \{V \parallel l\}$ – подпространство V

$$K^3, U \subset K^3$$

$U = \{(x, y, z) | x + y + z = 0\}$ – подпространство K^3

Definition 1.6. Линейная оболочка

V – векторное пространство над K

$V_1, \dots, V_n \in V$

Линейная оболочка $\langle V_1, \dots, V_n \rangle$ – их множество линейных комбинаций с произвольными коэффициентами

$$\langle V_1, \dots, V_n \rangle = \{a_1 V_1 + \dots + a_n V_n | a_i \in K\}$$

Remark 1.3.

1. $\langle V_1, \dots, V_n \rangle$ – подпространство V

$$\langle V_1, \dots, V_n \rangle < V$$

2. $U < V; V_1 \dots V_n \in U \Rightarrow \langle V_1, \dots, V_n \rangle \subset U$

Т.е. $\langle V_1, \dots, V_n \rangle$ – нелинейное подпространство содержит $V_1 \dots V_n$

Доказательство:

$$V_i = 0V_1 + \dots + 1V_i + \dots + 0V_n \Rightarrow V_i \in \langle V_1, \dots, V_n \rangle$$

$$u, w \in \langle V_1, \dots, V_n \rangle$$

$$ku + w \in \langle V_1, \dots, V_n \rangle$$

$$U < V \quad V_i \in U \Rightarrow a_i V_i \in U$$

$$a_1 V_1 \dots a_n V_n \in U \Rightarrow a_1 V_1 + \dots + a_n V_n \in U$$

Т.е. U содержит все линейные комбинации $V_1 \dots V_n$

Remark 1.4.

Аналогично определяется линейная оболочка для любого числа векторов

Definition 1.7. Порождающая система

M называется порождающей системой в V , если $\langle M \rangle = V$, т.е. $\forall v \in V$ – линейная комбинация векторов из M

Definition 1.8. Конечномерные пространства

V – векторное пространство над K

V называется конечномерным, если \exists конечная порождающая система. Будем изучать конечномерные пространства

Lemma 1.2.

$$\langle V_1 \dots V_n \rangle$$

$$\langle V_1 + \sum_2^n a_i V_i, V_2 \dots V_n \rangle = \langle V_1, V_2 \dots V_n \rangle$$

Доказательство:

$$V_1 + \sum_2^n a_i V_i \in \langle V_1, V_2 \dots V_n \rangle \text{ и } V_2 \dots V_n \in \langle V_1 \dots V_n \rangle$$

Тогда $\langle V_1 + \sum_2^n a_i V_i, V_2 \dots V_n \rangle = \langle V_1, V_2 \dots V_n \rangle$ по Rem2.

Definition 1.9. Линейная независимость

$$M \subset V$$

M называется линейно независимым, если $\forall v_1 \dots v_n \in M$ и $\forall a_1 \dots a_n \in K : \sum a_i v_i = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$

Т.е. никакая линейная комбинация элементов M не равна 0

Proposition 1.1.

$$v_1 \dots v_n \in V$$

Тогда $v_1 \dots v_n$ – линейно зависимы (не линейно независимы) $\Leftrightarrow \exists i : v_i \in \langle v_1 \dots v_{i-1}, v_{i+1} \dots v_n \rangle$

$$v_i = \sum_{j \neq i} a_j v_j$$

$$(-1)v_i + \sum_{j \neq i} a_j v_j = \vec{0} - \text{нетривиальная линейная комбинация}$$

Пусть $\sum a_i v_i = 0$ – нетривиальная линейная комбинация

$$\exists i : a_i \neq 0$$

$$-a_i v_i = \sum_{j \neq i} a_j v_j \Rightarrow v_i = \sum_{j \neq i} -\frac{a_j}{a_i} v_j$$

$$v_i \in \langle v_j \rangle$$

Remark 1.5.

K не поле (ассоциативное кольцо)

V над k (с теми же операциями) называется модулем над K . Для модулей это утверждение (и большинство других) неверно

Definition 1.10. Базис

V – векторное пространство над K

$v_1 \dots v_n$ – базис V , если это порождающая система и линейно независима

Definition 1.11. Размерность

V – конечномерное векторное пространство. Мощность его базиса называется размерностью V и обозначается $\dim(V)$

Example 1.8.

$$\dim(K^n) = n$$

Базис стандартный $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ итд

Definition 1.12.

$a_1 \dots a_n$ – координаты вектора v в базисе $v_1 \dots v_n$

Theorem 1.1.

Следующие условия равносильны:

1. $v_1 \dots v_n$ – базис V
2. $v_1 \dots v_n$ – порождающая линейно независимая система
3. $v_1 \dots v_n$ – максимальная по включению линейно независимая система
4. $\forall v \in V \exists! a_1 \dots a_n : v = \sum a_i v_i$

Theorem 1.2.

V – конечное векторное пространство

1. Базисы существуют
2. Любые два базиса равномощны

Доказательство:

- $1 \Rightarrow 2$ $v_1 \dots v_n$ – базис $\Rightarrow v_1 \dots v_n$ – порождающая система
 Почему лнз? $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$ и $\exists a_i \neq 0 \Rightarrow v_i = \sum_{j \neq i} c_j v_j \Rightarrow$
 $\Rightarrow \langle v_1 \dots v_n \rangle = \langle v_1 \dots v_{i-1}, v_{i+1} \dots v_n \rangle$
- $2 \Rightarrow 1$ $v_1 \dots v_n$ лнз
 Пусть не минимальная порождающая. НУО $v_2 \dots v_n$ – порождающая система, в частности $v_1 = \sum a_i v_i \Rightarrow v_1 \dots v_n$ – линейно зависима
- $2 \Rightarrow 4$ $v_1 \dots v_n$ – порождающая лнз
 Т.к. порождающая $\forall v = \sum a_i v_i$
 Единственность: пусть $\sum a_i v_i = \sum a'_i v_i : \sum (a_i - a'_i) v_i = 0 \Rightarrow a_i = a'_i \quad \forall i$
- $4 \Rightarrow 2$ $\forall v \exists a_i : v = \sum a_i v_i$, т.е. $v_1 \dots v_n$ – порождающая
 Лнз-ть: пусть $v_i = \sum_{j \neq i} a_j v_j$. Тогда $v_i = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 1 \cdot v_i + \dots + 0 \cdot v_n =$
 $= 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \dots + 0 \cdot v_n$

Exercise 1.1.

$$2 \Leftrightarrow 3$$

Lemma 1.3. Линейная зависимости линейных комбинаций

V – векторное пространство над K

$v_1 \dots v_n \in \langle u_1 \dots u_m \rangle; n > m$

Тогда $v_1 \dots v_n$ – линейно зависимы

Доказательство:

ММИ по m . База $m = 1$

$$\begin{cases} v_1 = a_1 u_1 \\ v_2 = a_2 u_1 \\ \dots \end{cases}$$

$a_2 v_1 - a_1 v_2 = 0$. Либо v_1, v_2 – линейно зависимы, либо $a_1, a_2 = 0 \Rightarrow v_1 = \bar{0} = v_2$

$1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \dots = 0 \Rightarrow v_1 \dots v_n$ – линейно зависимы

Переход: $m \rightarrow m + 1$

$$\begin{cases} v_1 = a_{11}u_1 + \dots + a_{1m+1}u_{m+1} \\ v_2 = a_{21}u_1 + \dots + a_{2m+1}u_{m+1} \\ \dots \\ v_n = a_{n1}u_1 + \dots + a_{nm+1}u_{m+1} \end{cases}$$

$$1. a_{1m+1} = a_{2m+1} = \dots = a_{nm+1} = 0$$

$$v_1 \dots v_n \in \langle u_1 \dots u_m \rangle$$

$$n > m + 1 \Rightarrow n > m \Rightarrow v_1 \dots v_n - \text{линейно зависимы}$$

$$2. \text{НУО } a_{1m+1} \neq 0$$

$$\text{Вычтем из } i \text{ равенства } (i = 2 \dots n) \text{ первое умноженное на } \frac{a_{im+1}}{a_{1m+1}}$$

$$\text{Тогда } \tilde{v}_i = v_i - \frac{a_{im+1}}{a_{1m+1}}v_1 = \sum_{k=1}^{m+1} (a_{ik} - \frac{a_{im+1}}{a_{1m+1}}a_{1k})u_k \in \langle u_1 \dots u_m \rangle$$

$$\tilde{v}_2 \dots \tilde{v}_n \in \langle u_1 \dots u_m \rangle, \text{ но } n > m + 1 \Rightarrow n - 1 > m \Rightarrow \tilde{v}_2 \dots \tilde{v}_n - \text{линейно зависимы}$$

$$\exists a_1 \dots a_n - \text{не все нули:}$$

$$0 = \sum a_i \tilde{v}_i = \sum a_i (v_i - \frac{a_{im+1}}{a_{1m+1}}v_1) = \sum a_i v_i + (\dots)v_1 \Rightarrow v_1 \dots v_n - \text{линейно зависимы}$$

Theorem 1.3. Следствие

$$v_1 \dots v_n - \text{базис и } u_1 \dots u_m - \text{базис} \Rightarrow n = m \text{ (теорема часть 2)}$$

Доказательство:

Пусть НУО $n > m$

$u_1 \dots u_m - \text{базис} \Rightarrow \text{порождающая} \Rightarrow v_1 \dots v_n \in \langle u_1 \dots u_m \rangle; \quad n > m \Rightarrow v_1 \dots v_n - \text{линейно зависимы} ???$

$$1. v_1 \dots v_s - \text{порождающая система (существует, т.к. } V \text{ конечномерно)}$$

Пусть $v_1 \dots v_s - \text{линейно зависимы}$

$$\exists i : v_i \in \langle v_j \rangle; \quad v_i = \sum_{j \neq i} a_j v_j$$

$$\text{НУО } i = 1$$

$$\text{Тогда } \langle v_1 \dots v_n \rangle = \langle v_1 - \sum_{j \neq 1} a_j v_j, v_2 \dots v_n \rangle = \langle v_2 \dots v_n \rangle$$

$v_2 \dots v_n - \text{порождающая система. Продолжаем выкидывать } v_i \text{ пока не получим базис}$

Example 1.9. За что мы боремся?

Векторные пространства \rightarrow абелевы группы

$$Z = \langle 1, 2, 3 \rangle = \langle 1, 2 \rangle = \langle 1 \rangle$$

С другой стороны $Z = \langle 1, 2, 3 \rangle = \langle 2, 3 \rangle - \text{минимальная порождающая система}$

2.

$\dim V = n$, если \exists базис $v_1 \dots v_n \Leftrightarrow$ в любом базисе n элементов

Lemma 1.4.

$V - \text{конечномерное пространство, } u_1 \dots u_k - \text{линейно независимы} \Rightarrow \exists u_{k+1} \dots u_n : u_1 \dots u_n - \text{базис}$

Доказательство:

$$u_1 \dots u_k - \text{не максимальная ЛНЗ. } \exists u_{k+1} : u_1 \dots u_{k+1} - \text{ЛНЗ}$$

$$u_1 \dots u_{k+1} - \text{не максимальная ЛНЗ. } \exists u_{k+2} : u_1 \dots u_{k+2} - \text{ЛНЗ ИТД}$$

Заметим: не может быть $u_1 \dots u_{n+1} - \text{ЛНЗ (по ЛЗЛК), } u_1 \dots u_{n+1} \in \langle v_1 \dots v_n \rangle$

\Rightarrow не позже n шага процесс закончится. На самом деле ровно на n шаге

Theorem 1.4. Следствие

$$n = \dim V, u_1 \dots u_m \in V$$

$m > n \Rightarrow u_1 \dots u_m$ – линейно зависимы

$m < n \Rightarrow u_1 \dots u_m$ – не порождающая система

Theorem 1.5. Следствие

$$U \leq V, \text{ тогда } \dim U \leq \dim V \text{ и } \dim U = \dim V \Leftrightarrow U = V$$

Theorem 1.6.

$$V - k\text{-мерное над } K. \dim V = n \Rightarrow V \cong K^n$$

Доказательство:

$v_1 \dots v_n$ – базис V . Рассмотрим отображение $p : K^n \rightarrow V$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \rightarrow a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

$$f(x+y) = f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}\right) = \sum (a_i + b_i) v_i = \sum a_i v_i + \sum b_i v_i = f(x) + f(y)$$

Exercise 1.2.

$$f(kx) = kf(x)$$

f – сюръективно и инъективно: по определению базиса

Example 1.10.

$$v = \{f \in K[x] | \deg(f) \leq 2\} = \langle 1, x, x^2 \rangle = \langle 1, 1+x, x^2 \rangle - \text{оба базисы}$$

Example 1.11. Числа Фибоначчи

$$V = \{(a_1 \dots) | a_{i+1} = a_i + a_{i-1}\}$$

$$V \leftrightarrow (a_1, a_2), V \cong R^2$$

Хороший базис:

$$\varphi_1 = (1, \varphi, \varphi^2 \dots) \in V$$

$$\varphi_2 = (1, (-\frac{1}{\varphi}), (-\frac{1}{\varphi})^2 \dots) \in V$$

φ_1, φ_2 – базис

$$f = a\varphi_1 + b\varphi_2$$

$$f \rightarrow u_n = a \cdot \varphi^n + b(-\frac{1}{\varphi})^n$$

$$a = b = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

2 Система линейных уравнений (СЛУ)

Definition 2.1. Линейное уравнение

Линейное уравнение: $a_1x_1 \dots a_nx_n = b$

где $a_1 \dots a_n, b \in K$, а $x_1 \dots x_n$ – переменные

Definition 2.2. Система линейных уравнений

СЛУ – это набор линейных уравнений: $\sum_{i=1}^n a_{ki}x_i = b_k, k = 1 \dots m$

СЛУ соответствует отображение $A : K^n \rightarrow K^m$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sum a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Это отображение уважает сложение (просто поверьте), и вообще A – линейное отображение

Definition 2.3. Ядро и образ

$A : U \rightarrow V$ – линейное

Ядро: $\ker(A) = \{x \in U \mid A(x) = \bar{0}\} \subset U$

$\operatorname{Im}(A) = \{A(x) \mid x \in U\} \subset V$

Example 2.1.

В нашем примере

$$\operatorname{Im}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \mid \text{СЛУ } A(x) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\}$$

$\operatorname{Ker}(A)$ = множество решений системы

$$\begin{cases} \sum a_{1i} x_i = 0 \\ \vdots \\ \sum a_{mi} x_i = 0 \end{cases}$$

Такие системы называются однородными

Lemma 2.1.

$A : U \rightarrow V$ – линейное отображение $\Rightarrow \operatorname{Ker}(A) \leq U$ и $\operatorname{Im}(A) \leq V$ – подпространство

Доказательство:

1. Надо проверить замкнутость
 $u_1, u_2 \in \operatorname{Ker}(A)$, т.е. $A(u_1) = 0$ и $A(u_2) = 0$
 $A(u_1 + ku_2) = A(u_1) + kA(u_2) = 0 + 0 = 0$
2. $v_1, v_2 \in \operatorname{Im}(A)$, $v_1 = A(u_1)$ и $v_2 = A(u_2)$
 $v_1 + kv_2 = A(u_1) + kA(u_2) = A(u_1 + ku_2) = A(u) \Rightarrow v_1 + kv_2 \in \operatorname{Im}(A)$

Proposition 2.1.

В нашем примере:

Множество решений однородной линейной системы – подпространство в K^n

Тривиальный случай: $\dim(\operatorname{Ker}(A)) = 0$, т.е. $\operatorname{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ – всегда решение однородной СЛУ (есть только тривиальное решение)

Theorem 2.1.

В однородной СЛУ

$n > m \Rightarrow \dim(\operatorname{Ker}(A)) > 1$, т.е. существует нетривиальное решение СЛУ

Доказательство:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$u_1 \dots u_n \in K^m$; $n > m \Rightarrow u_1 \dots u_n$ — лз, т.е. $\exists x_1 \dots x_n$ — не все нули: $\sum x_i u_i = 0$

$A: K^n \rightarrow K^m$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum a_{1i}x_i \\ \sum a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$$

Решить систему: найти A^{-1}

U, V — векторные пространства. $A: U \rightarrow V$ линейное отображение

Как описать A ?

Лемма 2.2.

$U_1, U_2 \dots U_n$ — базис U и $V_1, V_2 \dots V_n \in V$

Тогда $\exists!$ линейное отображение $A: U \rightarrow V: A(U_i) = V_i \quad \forall i = 1 \dots n$

Доказательство:

Уникальность: Пусть $A_1(U_i) = V_i$ и $A_2(U_i) = V_i$

? $A_1 = A_2 \Leftrightarrow A_1(u) = A_2(u) \quad \forall u \in U$

$u = \sum a_i u_i \quad a_i \in K$

Тогда $A_1(u) = A_1(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n) = A_1(a_1 u_1) + A_1(a_2 u_2) + \dots + A_1(a_n u_n) = a_1 A_1(u_1) + a_2 A_1(u_2) + \dots + a_n A_1(u_n) = a_1 V_1 + a_2 V_2 + \dots + a_n V_n$

Аналогично для A_2

Тогда $A_1(u) = A_2(u) \quad \forall u \in U$

Существование: Построим A . Рассмотрим какой-то $u \in U$

$\exists! a_1, a_2 \dots a_n: u = \sum a_i u_i$

Положим $A(u) = \sum a_i V_i$

$U_i = 0 \cdot u_1 + \dots + 1 \cdot u_i + \dots + 0 \cdot u_n \Rightarrow A(U_i) = 0 \cdot V_1 + \dots + 1 \cdot V_i + \dots + 0 \cdot V_n = V_i$

$u = \sum a_i u_i; \quad v = \sum b_i u_i$

$A(u + v) = A(\sum a_i u_i + \sum b_i u_i) = A(\sum (a_i + b_i) u_i) = \sum (a_i + b_i) V_i = \sum a_i V_i + \sum b_i V_i = A(u) + A(v)$

$A(kv) = kA(v)$ — очев

Definition 2.4. Матрица линейного отображения в базисах

Итак. $u_1, u_2 \dots u_n$ – базис U

Задать $A : U \rightarrow V \Leftrightarrow$ зафиксировать $A(u_1) \dots A(u_n) \in V$

$A : U \rightarrow V$ линейно $v_1, v_2 \dots v_m$ – базис V

$$A(u_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{m1}v_m$$

\vdots

$$A(u_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{mn}v_m$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ называется матрицей линейного отображения } A \text{ в базисах}$$

$\{u_i\}$ и $\{v_i\}$

Обозначение: $[A]_{\{u_i\}, \{v_i\}}$ – зависит от $\{u_i\}$ и $\{v_i\}$

Notation 2.1. Итог

Такая матрица:

- Отображение $\{1 \dots m\} \times \{1 \dots n\} \rightarrow R$ – R кольцо
- Отображение $I \times I \rightarrow R$ I, I – конечные множества

Обозначение: $M_{m,n}(R)$ – матрицы $m \times n$ над R

Изоморфизм:

K – поле, $M_{1,n} \cong^n K$ и $M_{n,1} \cong K^n$

$M_{m,n}(K)$ – векторное пространство над K

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})_{i=1 \dots m; j=1 \dots n}$$

$$k(a_{ij}) = (ka_{ij})_{i=1 \dots m; j=1 \dots n}$$

Операции:

$${}^n K \times K^n$$

$$((a_1 a_2 \dots a_n), \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}) \rightarrow \sum a_i b_i \text{ – умножение строки на столбец}$$

$$M_{m,n} \times K^n \rightarrow K^m \text{ – пример с прошлой лекции}$$

Theorem 2.2. Свойства:

$$(A, X) \rightarrow AX$$

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2$$

$$(A_1 + A_2)X = A_1X + A_2X$$

$$A(kX) = k(AX)$$

Доказательство:

$$m = 1$$

$$(a_1 + a'_1)b_1 + \dots + (a_n + a'_n)b_n = \sum a_i b_i + \sum a'_i b_i \text{ и наоборот } \sum (ka_i)b_i = \sum a_i(kb_i) = k \sum a_i b_i$$

В частности $A \in M_{m,n}$ – fix

$X \rightarrow AX$ – линейное отображение $K^n \rightarrow K^m$

Лемма 2.3.

$A : U \rightarrow V$, $\{u_i\}$ – базис U и $\{v_i\}$ – базис V

$A = [A]_{\{u_i\}, \{v_i\}}$

$u \in U$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – координаты u в базисе $\{u_i\}$

Тогда AX – координаты $A(u)$ в базисе $\{v_i\}$

Доказательство:

$$u = \sum x_i u_i$$

$$A(u) = \sum x_i A(u_i) = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^m a_{ji} v_j \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \right) v_j$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi} x_i \end{pmatrix} \text{ – координаты } A(u) \text{ в базисе } \{v_i\} \text{ и это } A \cdot X$$

Remark 2.1. Мораль

Любое линейное отображение при координатизации (отождествлении с K^n) превращается в умножение на матрицу

$$x \rightarrow A(x)$$

$$\tilde{x} \rightarrow A(\tilde{x})$$

$A : U \rightarrow V$ и знаем $\text{Ker} U, \text{Im} U$ – подпространства

$$\text{Ker} A = \{x | A(x) = 0_v\}$$

$$\text{Im} A = \{A(x) | x \in U\}$$

$$A : K^n \rightarrow K^m \quad X \rightarrow AX$$

$$A \in M_{m,n}(K)$$

$\text{Ker} A$ – множество решений однородной СЛУ с матрицей A

$$\text{Im} A = \{B | \exists x : Ax = B\}$$

$$u_1 \dots u_n \text{ – базис} \Rightarrow \text{Im} A = \langle A(u_1) \dots A(u_n) \rangle$$

$$A(u) = \sum a_i A(u_i)$$

e_i – стандартный базис ($i = 1 \dots n$)

$$\text{Im} A = \langle A_1 e_1 \dots A_n e_n \rangle$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \text{ – } i\text{-ый столбец } A$$

Theorem 2.3. Теорема о ядре и образе

$$A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Example 2.2.

1. A – поворот на $\frac{\pi}{2}$ – линейное отображение

Remark 2.2.

Параллельный перенос не линейное отображение

2. $A(x) = 0$
3. A – ортогональная проекция на Ox

1. $ImA = \mathbb{R}^2$
 $KerA = \{0\}$
2. $ImA = \{0\}$
 $KerA = \mathbb{R}^2$
3. $ImA = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$
 $KerA = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Theorem 2.4.

$A : U \rightarrow V$ – линейное

1. \exists базис $u_1 \dots u_n$ в U и $k \leq n$:
 $u_1 \dots u_k$ – базис $KerA$ и $u_{k+1} \dots u_n$ – базис ImA
2. $dimKerA + dimImA = dimU$

Доказательство:

$$1 \Rightarrow 2: k = dimKerA$$

$$n - k = dimImA$$

$$n = dimU$$

- 1: Выберем $u_1 \dots u_k$ – базис $KerA$

$u_1 \dots u_k$ – ЛНЗ \Rightarrow дополним до базиса: $u_1 \dots u_k, u_{k+1} \dots u_n$ – базис U

Осталось доказать: $A(u_{k+1}) \dots A(u_n)$ – базис ImA

1. $A(u_i) \in ImA$ по определению

2. Проверим $\langle A(u_{k+i}) \rangle = ImA$

$$v \in ImA \Rightarrow v = A(u) \quad u \in U, \quad a = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$$

$$A(u) = \sum a_i A(u_i) = \sum_{i=k+1}^n a_i A(u_i) \Rightarrow v \in \langle A(u_{k+i}) \rangle$$

3. Проверим ЛНЗ: пусть $\sum_{i=k+1}^n a_i A(u_i) = 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} a_i = 0 \quad \forall i$

$$\text{По линейности } 0 = \sum a_{k+i} A(u_{k+i}) = A(\sum a_{k+i} u_{k+i})$$

$$\text{То есть } \sum a_{k+i} u_{k+i} \in KerA = \langle u_1 \dots u_k \rangle$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n-k} a_{k+i} u_{k+i} = \sum_{i=1}^k (-a_i) u_i \right) \Rightarrow \sum a_i u_i = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$$

$$\text{В частности } a_{k+1} = \dots = a_n = 0$$

3 Операции над пространствами

Лемма 3.1.

$U_1, U_2 \leq U \Rightarrow U_1 \cap U_2 \leq U$. Д-во: очев

$U_1, U_2 \leq U \Rightarrow U_1 \cup U_2 \not\leq U$ (почти никогда)

$U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ – сумма по Минковскому

Сама лемма: $U_1, U_2 \leq U \Rightarrow U_1 + U_2 \leq U$

Доказательство:

$$x, y \in U_1 + U_2$$

$$x = x_1 + x_2; y = y_1 + y_2, \text{ где } x_1, y_1 \in U_1; x_2, y_2 \in U_2$$

$$x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \in U_1 + U_2$$

Definition 3.1. Прямая сумма

U_1, U_2 – векторные пространства над K

$U_1 + U_2 = U_1 \times U_2$ как множество с покомпонентными операциями – (внешняя) прямая сумма U_1 и U_2

Лемма 3.2.

$i_1 \dots u_n$ – базис U и $v_1 \dots v_m$ – базис V

Тогда $\{(u_1, 0) \dots (u_n, 0), (0, v_1) \dots (0, v_m)\}$ – базис $U + V$

Доказательство:

$$u \in U; v \in V$$

$$u = \sum a_i u_i; v = \sum b_i v_i$$

$$u + v = \sum a_i u_i + \sum b_i v_i = \sum (a_i u_i, 0) + \sum (0, b_i v_i)$$

Theorem 3.1. Следствие

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V$$

Theorem 3.2. Формула Грассмана

$U_1, U_2 \leq U$, U – в.п. над K

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

Доказательство:

Рассмотрим линейное отображение $A : U_1 + U_2 \rightarrow U$

$$\text{Im} A = \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\} = U_1 + U_2$$

$$\dim(\text{Im} A) = \dim(U_1 + U_2)$$

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2. \text{ Осталось понять: } \dim \text{Ker} A = \dim(U_1 \cap U_2)$$

$$\text{Тогда } \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

$\text{Ker} A = \{(u_1, u_2) | u_1 + u_2 = 0\} = \{(u_1, u_2) | u_1 = -u_2\} \Rightarrow$ отображение $U_1 \cap U_2 \rightarrow \text{Ker} A$ – изоморфизм векторного пространства

Definition 3.2. Канонический вид матрицы линейного отображения

$$A \mapsto CAD = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definition 3.3. Ранг линейного отображения

$$A : U \rightarrow V$$

$rkA = \dim ImA$ – размерность линейной оболочки столбцов матрицы $[A]$ (в любом базисе)

$$A = [A]; A = (c_1 | c_2 | \dots | c_n)$$

$rkA = \dim \langle c_1 \dots c_n \rangle$ – максимальное количество ЛНЗ столбцов матрицы

Theorem 3.3. Свойства ранга

1. $rk(A + B) \leq rkA + rkB$; $A, B \in M_{m,n}(K)$
2. $rk(A \cdot B) \leq \min(rkA, rkB)$; $A \in M_{m,n}(K), B \in M_{n,l}(K)$
3. Если в пункте 2 A или B обратимы (в том числе $(m = n)/(n = l)$), то $rk(A \cdot B) = rkA = rkB$
4. $rkA = rkA^T$

Remark 3.1.

Знаем: столбцы A^T – строки A , т.е. rkA – максимальное количество ЛНЗ строк

Строчный ранг совпадает со столбцовым

Доказательство:

1. $A = (c_1 | c_2 | \dots | c_n)$; $B = (d_1 | d_2 | \dots | d_n)$; $c_i, d_i \in K^m$

$$A + B = (c_1 + d_1 | c_2 + d_2 | \dots | c_n + d_n)$$

$$\dim \langle c_1 + d_1 \dots c_n + d_n \rangle \leq \dim \langle c_1 \dots c_n, d_1 \dots d_n \rangle \leq \dim \langle c_1 \dots c_n \rangle + \dim \langle d_1 \dots d_n \rangle$$

$$\text{Значит } rk(A + B) \leq rkA + rkB$$

2. $A \cdot B \leftrightarrow A \circ B$

$$\text{Хотим } rk(A \circ B) \stackrel{(1)}{\leq} rkA \\ \stackrel{(2)}{\leq} rkB$$

$$(1) rk(A \circ B) = \dim(Im(A \circ B)) = \dim\{A(B(x))\} \leq \dim\{A(y)\} = \dim(ImA) = rkA$$

$$(2) Im(A \circ B) = \{A(B(x)) | x \in \dots\} = \{A(y) | y \in ImB\} = Im(A|_{ImB}) = \dim ImB - \dim(Ker(A|_{ImB})) \leq \dim ImB = rkB$$

3. Пусть $\exists A^{-1}$

$$\text{Тогда } rk(AB) \leq rk(B) = rk(A^{-1}AB) \leq rk(AB) \Rightarrow rk(B) = rk(AB)$$

4. Найдем C, D – обратимые

$$CAD = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(CAD)^T = D^T A^T C^T = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_1^T$$

$$rk(A_1) = rk(A_1^T) = l$$

$e_1 \dots e_l$ – что-то из стандартного базиса для K^m

По пункту 3

$$l = rk(CAD) = rk(AD) = rk(A)$$

$$l = rk(D^T A^T C^T) = rk(A^T C^T) = rk(A^T) \Rightarrow rk(A) = rk(A^T)$$

Remark 3.2.

C – обратима $\Leftrightarrow C^T$ – обратима

$$CC^{-1} = C^{-1}C = E$$

$$E = E^T = (C^{-1}C)^T = \frac{(C^{-1})^T C^T}{C^T (C^{-1})^T} \Rightarrow (C^{-1})^T = (C^T)^{-1}, \text{ т.е. } C^T \text{ – обратима}$$

Remark 3.3. Полуобратимость

$C \in M_{m,n}(K); D \in M_{n,m}(K)$ (т.е. $\exists CD, DC$). Пусть $m < n$
 $\Rightarrow rkC \leq m \Rightarrow rk(DC) \leq m \Rightarrow DC \neq E_n$ ($rkE = n$)

Но может быть, что $CD = E_m$ – полуобратные матрицы

Theorem 3.4.

Следующие условия равносильны для $A \in M_n(K)$:

1. Строки A – ЛНЗ
2. Столбцы A – ЛНЗ
3. A обратима
4. $Ker A = \{0\}$
5. $Im A = K^n$
6. СЛУ с матрицей A имеет единственное решение для любой правой части

Доказательство:

$$1. 1 \Leftrightarrow rkA = n \Leftrightarrow 2$$

2. В две стороны:

$$3 \Rightarrow 2: n = rkE = rk(AA^{-1}) \leq rkA \leq n \Rightarrow rkA = n$$

$$2 \Rightarrow 3: \exists CAD = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$l = rkA = n \Rightarrow CAD = E$$

$$A \cdot (DC^{-1}) = E = (DC^{-1}) \cdot A \Rightarrow A \text{ обратима}$$

$$3. 3 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 5 \Leftrightarrow 6$$

Знаем: $A : K^n \rightarrow K^n$, т.е. A – инъекция ($Ker A = 0$) $\Leftrightarrow A$ – сюръекция ($Im A = K^n$) $\Leftrightarrow A$ – изоморфизм ($\exists A^{-1}$)

$$6. A \text{ – обратима СЛУ } AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

Если $\forall B \exists! X \text{ } AX = B \Rightarrow (x \mapsto AX) \text{ – биекция } \Leftrightarrow \exists A^{-1}$

Definition 3.4. ????

A называется обратимой/невырожденной/неособенной/неосовой матрицей полного ранга ...

Definition 3.5. Полная линейная группа

$(M_n(K))^* = GL(n, K)$ – полная линейная группа (обратимые матрицы относительно умножения)

4 Элементарные матрицы и метод Гаусса

Хотим: систему простых образующих $GL(n, K) = \langle \{s_i\} \rangle : \forall g \in GL(n, K) \ g = s_{i_1} \cdot s_{i_2} \cdot \dots \cdot s_{i_k}$ (не единственность разложения)

Приложение: $g^{-1} = (s_{i_1} \cdot \dots \cdot s_{i_k})^{-1} = s_{i_k}^{-1} \cdot \dots \cdot s_{i_1}^{-1}$ – алгоритм для вычисления g^{-1}

Definition 4.1. Трансвекция

$n \in N - \text{fix } (M_n(K)); i, j \in \{1 \dots n\}; i \neq j$

Трансвекция $t_{ij}(a) = E + aE_{ij}; e_{ij} \in M_n(K)$ и $(e_{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 & k = i, l = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

Example 4.1.

Пусть $x \in K^n; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$t_{ij}(a) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i + ax_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

К i -ой координате прибавляется j -ая, умноженная на a

$t_{ij}(a) \in GL(n)$

$(t_{ij}(a))^{-1} = t_{ij}(-a)$

Example 4.2. Действия на матрице

Слева $t_{ij}(a) \cdot A = t_{ij}(a)(c_1 | c_2 | \dots | c_m) = (t_{ij}(a) \cdot c_1 | \dots | t_{ij}(a) \cdot c_m) = \tilde{A}$

\tilde{A} получается из A прибавлением к i -ой строке j -ой строки, умноженной на a

Справа $A \cdot t_{ij}(a) = (A^T)^T ((t_{ij}(a))^T)^T = (t_{ij}(a)^T A^T)^T = (t_{ji}(a) A^T)^T$

К j -ому столбцу прибавляется i -ый, умноженный на a

Definition 4.2. Дилатация

$$m_i(a) = E + (a - 1)e_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & a & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Example 4.3.

$$m_i(a) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ ax_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$m_i(a) \in GL(n)$$

$$(m_i(a))^{-1} = m_i(a^{-1})$$

$m_i(a) \cdot A$ – умножение i -ой строки на a

$A \cdot m_i(a)$ – умножение i -ого столбца на a

Definition 4.3. Транспозиция

$$s_{ij} = E - e_{ii} - e_{jj} + e_{ij} + e_{ji}$$

$$s_{ij} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Умножение слева – перестановка строки, умножение справа – перестановка столбца

Proposition 4.1.

s_{ij} выражаема через трансвенции и дилатации

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+y \\ -x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$s_{12} = m_2(-1) \cdot t_{21}(1) \cdot t_{12}(-1) \cdot t_{21}(1)$$

Theorem 4.1. Метод Гаусса

1. $A \in M_{m,n}(K) \Rightarrow \exists$ элем. $e_1 \dots e_k : e_1 e_2 \dots e_k A$ – ступенчатая (типа треугольная но не очень)
2. $A \in GL(n, K) \Rightarrow \exists$ элем. $e_1 \dots e_s : e_1 e_2 \dots e_s A = E$
- 2'. $\forall A \in GL(n, K) \exists$ элем. $f_1 \dots f_s : A = f_1 f_2 \dots f_s$
3. $A \in M_{m,n}(K) \Rightarrow \exists$ элем. $e_1 \dots e_k, g_1 \dots g_l : e_1 e_2 \dots e_k A g_1 \dots g_l = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Доказательство:

$$2 \Rightarrow 2': e_1 e_2 \dots e_s A = E$$
$$A = e_s^{-1} \dots e_1^{-1} = f_1 f_2 \dots f_s; f_i = e_i^{-1}$$

Theorem 4.2. Следствие

$$e_1 \dots e_s A = E$$
$$(e_1 \dots e_s) = A^{-1}$$

Алгоритм для нахождения A^{-1} (если существует)

$$(A|E) \rightarrow (e_s A|e_s E) \rightarrow \dots \rightarrow (e_1 \dots e_s A|e_1 \dots e_s E) = (E|A^{-1})$$