Содержание

1 План на 3 модуль (или 2 сем...) **2**

2 Множества **2**

1 План на 3 модуль (или 2 сем...)

1. Множества
2. ЧУМ
3. Исчисление высказываний
4. Исчисление предикатов
5. Теория кодирования

Почитать можно А. Х. Шеня

2 Множества

1. $x \in A$; $y \notin A$
2. Арифметика множеств: $\bigcup, \bigcap, \setminus, \triangle$
3. $\varnothing$
4. $A = \{a, b, c\}$; $B = \{d\} \bigcup A$
5. $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$

Remark 2.1.

Чисто синтаксически вот такой бред: $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ имеет смысл

X – множество: $X \neq \varnothing$. Рассмотрим $x \in X$

$Term(x)$ – проблема, потому что мы не знаем, к каким характеристикам обращаемся и вообще не понятно, что мы выбрали

Спасают аксиомы ZFC

Definition 2.1. Равномощность

A, B – равномощны $\Leftrightarrow \exists f : A \to B$ – биекция
А что с бесконечностями? Давайте возьмем функцию $f : N \to 2N$
Хотя множество четных чисел – подмножество всех, но они равномощны, т.к. f – биекция

Definition 2.2. Характеристическая функция

X – множество. Есть $\chi : X \to \{0, 1\}$, т.е. $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in X \\ 0, & x \notin X \end{cases}$ – характеристическая функция

А пусть $X \subset Y$

- произведение характеристических функций X и Y – это характеристическая функция $X \bigcap Y$
- $1 - \chi(x)$ – характеристическая функция дополнения X
- $max(\chi_X(x), \chi_Y(x))$ – характеристическая функция $X \bigcup Y$

- $|X| = \sum\limits_{x \in Y} \chi_X(x)$

Example 2.1.

Возьмем 2^N; $B = \{0, 1\}$ и B^∞

Равномощны ли они? Берем $x \in 2^N$, теперь $b_i = \begin{cases} 1, & i \in x \\ 0, & i \notin x \end{cases}$

Definition 2.3. Счетное множество

X – счетное, если X равномощно N

Example 2.2.

Например, множество целых чисел счетно, т.к. $x \in Z \Rightarrow \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x + 1, & x < 0 \end{cases}$

Proposition 2.1.

1. X – счетно и $Y \subset X \Rightarrow Y$ или счетно, или конечно
2. X – бесконечно. Тогда $\exists Y$ – счетное: $Y \subset X$
3. $X_1, \ldots X_n \ldots$ – конечные или счетные. Тогда $\bigcup X_i$ – конечное или счетное

Доказательство:

1. X – счетно, т.е. соответствует последовательности $\{x_1, \ldots x_n \ldots\} = \xi$
   Возьмем $\xi \cdot \chi(Y)$. Т.е. что-то типа $\{0, 0 \ldots x_{i_1}, 0 \ldots x_{i_2}, 0 \ldots\}$ который равносилен $y_1, y_2, \ldots y_n \ldots = Y$
   В свою очередь эта штука либо конечна, либо счетна, т.к. счетен X
2. Просто выбираем по 1 элементу из X. Если они кончатся на каком-то шаге – X не бесконечно
3. Рисуем табличку. Берем элемент (1, 1), потом (1, 2), потом (2, 1), потом (1, 3) и так далее. То есть по диагоналям. Так переберем вообще все элементы (если не понятно, погуглите метод Кантора)

Exercise 2.1.

В качестве следствия попробуйте построить явную биекцию между множеством рациональных чисел и натуральных

Theorem 2.1.

A – бесконечно, B – нбчс, т.е. B – конечно или счетно
$A \bigcup B$ равномощно A

Доказательство:

$\exists Y \subset A$ – счетное

Y и $Y \bigcup B$ – равномощны

$A \bigcup B = (A \backslash Y) \bigcup (Y \bigcup B)$

$A = Y \bigcup (A \backslash Y)$

Биекция между Y и $Y \bigcup B$ сущесвтует, значит A и $A \bigcup B$ равномощны

Example 2.3.

$[0;1]$ и B^{∞}. Равномощны ли? Да. Последовательность единиц и нулей – это бинпоиск числа
Проблема: $0,(9) = 1,(0)$
$b_1 \dots b_k, 1, 1, 1, 1, (1)$
$(b_1 \dots b_k) + 1$
$R \bigcup [0,1] \sim B^{\infty}$ и $R \bigcup [0,1] \sim [0,1] \Rightarrow [0,1] \sim B^{\infty}$

Example 2.4.

$[0,1] \sim [0,1] \times [0,1]$
$0, a_1 a_2 \dots a_k \dots$
$0, a_1 a_3 a_5 \dots$ и $0, a_2 a_4 a_6 \dots$

Exercise 2.2.

Проблема та же, что и в прошлом примере, но число уязвимых моментов кратно больше. Почините

Theorem 2.2. Кантор-Бернштейн

$A, B;\ A_1 \subset A;\ B_1 \subset B$
$A_1 \sim B, B_1 \sim A \Rightarrow A \sim B$

Доказательство:

A имеет мощность не больше B. Существует какое-то отображение. Нужна его биективность. А где-то по пути может докажем еще и полный порядок

$f : A \to B_1$ – биекция

$g : B \to A_1$ – еще одна биекция

Заметим, что $g(f(A)) = A_2$ – биекция, более того этот процесс можно продолжить до бесконечности

То есть имеем $A \supset A_1 \supset A_2 \dots$ и $A \sim A_2 \sim A_4 \dots$ и $A_1 \sim A_3 \sim A_5 \sim \dots$

Возьмем просто много вложенных C-шек таких, что $C \to C_2 \to C_4 \dots$ и $C_1 \to C_3 \dots$ при какой-то биекции h

Как построить биекцию из C_6 в C_7? Положим $D_i = C_i \setminus C_{i+1}$. Тогда $C_0 = D_0 \bigcup D_1 \bigcup D_2 \dots$

При этом $C_1 = D_1 \bigcup D_2 \bigcup D_3 \dots$

$D_2 = C_2 \setminus C_3;\ D_0 = C_0 \setminus C_1$. Ну тогда $C_2 = D_2 \bigcup C_3$ и $C_0 = D_0 \bigcup C_1$

При этом биекция h все еще существует. Можем сопоставить $D_{2k} \to D_{2(k+1)}$, а $D_{2k+1} \to D_{2k+1}$, т.е. построить биекцию между C_0 и C_1. Победа

Явная биекция: $q(x) = \begin{cases} x, x \in D_{2i+1} \\ h(x), x \in D_{2i} \end{cases}$

Theorem 2.3. Теорема Кантора

$B^{\inf}$ – не счетно

Доказательство:

Построили последовательность типа

1. $a_1, a_2 \dots$
2. $b_1, b_2 \dots$
3. $c_1, c_2 \dots$

Ну возьмем еще одну последовательность $a_1, b_2, c_3 \dots$ – она будет отличаться от всех предыдущих как минимум в одном элементе. Значит $B^{\inf}$ не счетно

Theorem 2.4. Обобщенная теорема Кантора

$\forall X,\ X \not\sim 2^X$

Доказательство:

Пусть $\exists \varphi : X \to 2^X$ – биекция

$Z = \{x | x \notin \varphi(x)\}$

$Z \subset X$

$\nexists z : \varphi(z) = Z \Rightarrow z \notin Z \Rightarrow z \in Z$

Theorem 2.5. Следствие

$|2^X| > |X|$
$\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, 2^{2^{\mathbb{N}}}, \dots$
$\aleph_0, \aleph_1, \dots$

Remark 2.2.

Почему не существует множества всех множеств?
Пусть существует и называется U
Посмотрим на U и 2^U
По Кантору-Бернштейну $U \sim 2^U$, но по теореме Кантора $|U| < |2^U|$????

Theorem 2.6.

A и B – множества
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ при $|A|, |B| < +\infty$
Если же $|A| = +\infty$, а $|B| < +\infty$, то $|A \cup B| = |A|$
Что если $|A| = +\infty$ и $|B| = +\infty$? Скажем, НУО $|A| \leq |B|$, тогда $|A \cup B| = |B|$

Remark 2.3.

Вообще мы умеем еще и $|A \times B|$, но там разница будет только в конечных множествах

Есть так же и возведение в степень. С нбчс работа очевидна, а вот с не нбчс уже не так просто
Что такое $|A|^{|B|}$? Такое описать нормально не получится

Definition 2.4.

Нечто абстрактное и «умозрительное» – $\aleph$
Так, например, $\aleph + n = \aleph$ и $\aleph \cdot n = \aleph$

Definition 2.5. $\geq$

X – множество
«$\geq$» $\subset X \times X$

1. $\forall x \in X \Rightarrow x \geq x$
2. $\forall x, y, z : x \geq y,\ y \geq z \Rightarrow x \geq z$
3. $\forall x, y : x \neq y,\ x \geq y \Rightarrow \overline{y \geq x}$

$\tilde{3}$ $\forall x, y \in X : x \geq y,\ y \geq x \Rightarrow x = y$

Theorem 2.7. Порядок

Заведем отношение $\geq$. Если оно существует для всех пар множества, то это порядок, иначе – частичный порядок
Заметим, что он нестрогий. Для строгого нужно добавить проверку на равенство

Definition 2.6. Частично упорядоченное множество

$(X, \geq_X)$ – ЧУМ

Example 2.5.

Взяли $\mathbb{N}$ и степенной порядок, т.е.

$a, b \in \mathbb{N};\ \exists x \in N\ (x > 1)\ : \begin{cases} a = x^k \\ b = x^m \end{cases}$

$a \geq b \Leftrightarrow k \geq m$

Definition 2.7. Индуцированный порядок

Рассмотрим $Y \subset X$. Если пользоваться тем же отношением порядка на $Y \times Y$, то можно смотреть на $\geq_Y = (\geq_X) \cap (Y \times Y)$ – индуцированный порядок

Remark 2.4.

Можно и на $X \times Y$ ввести $\geq_{X\times Y}$: $(x,y) \geq (a,b) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq a \\ \begin{cases} x < a \\ y \geq b \end{cases} \end{array}\right.$

Такой порядок называется лексикографическим (покоординатным), что в целом то же, что и $(X, \geq_X) + (Y, \geq_Y)$

Definition 2.8. Наибольший и максимальный элемент

$x \in X$ – наибольший элемент $\Leftrightarrow \forall y \in X : y < x$
$x \in X$. Если $\nexists y \in X : y > x$, то x – максимальный элемент

Remark 2.5.

Наибольший элемент – всегда максимальный, но не наоборот

Definition 2.9. Изоморфизм

$(X, \geq_X) \sim (Y, \geq_Y)$ – изоморфизм, если $\exists f : X \to Y$ – биекция, сохраняющая порядок

Что можно сказать про $(\mathbb{R}, \geq_\mathbb{R})$? Можно построить биекцию $x \mapsto x+1$ – это автоморфизм

А что с $\mathbb{R}_+, \geq_{\mathbb{R}_+}$? Тут уже не получится построить автоморфизм (т.к. из луча $(0, +\infty)$ уйдем в луч $(1, +\infty)$)

Remark 2.6.

Из существования биекции не следует существование автоморфизма
Берем X, Y; $h : X \to Y$ – биекция
И $\forall x, y \in X : x \geq y \Rightarrow h(x) \geq h(y)$
Смотрим на $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$. Пусть $\exists h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$
Рассмотрим двойку и тройку
$\nexists x \in \mathbb{Z} : 2 < x < 3$
$h(2) = y_2$; $h(3) = y_3$
$h^{-1}(\frac{y_2+y_3}{2}) = x$
Целого числа между 2 и 3 нет, но по биекции оно есть

Definition 2.10. Плотность

x – плотная точка, если
$\begin{cases} \forall y < x \ \exists z : y < z < x \\ \forall y > x \ \exists z : x < z < y \end{cases}$

Example 2.6.

Возьмем множество $\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{n} \dots\}$. В нем плотная точка – только 0

Theorem 2.8.

X – всюду плотное (нет соседних элементов), счетное, без наибольшего и наименьшего элемента
Это значит, что $X \cong \mathbb{Q}$

Доказательство:

Возьмем n точек из X и n точек из $\mathbb{Q}$. Построим между ними изоморфизм

Теперь нам нужен изоморфизм из $n+1$ отрезков из X в $n+1$ отрезок множества $\mathbb{Q}$. Далее идем рекурсивно

Получим для точки что-то типа системы стягивающихся отрезков

Exercise 2.3.

Попробуйте придумать явный изоморфизм между $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$

Remark 2.7.

$x \to x + 1$ – автоморфизм $\mathbb{Z}$
$h(\mathbb{N}) \neq \mathbb{N}$
Пусть есть изоморфизм $g(\mathbb{Z}) \to \mathbb{N}$
Применим прошлую функцию и получим $h(g(\mathbb{Z})) \to h(\mathbb{N})$
Но $g(h(\mathbb{Z})) = g(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$, а $h(\mathbb{N}) \neq \mathbb{N}$

Notation 2.1.

$\forall m < n;\ A(m)$ – истина $\Rightarrow A(n)$ (если $A(0)$)

Theorem 2.9.

X – ЧУМ

1. $\forall Y \subset X;\ \exists \min Y$
2. $\nexists x_1, x_2 \dots x_n \dots : x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n \dots$
3. Для X работает принцип индукции

Remark 2.8.

Переформулируем 3 пункт: A – какое-то произвольное свойство, тогда
$(\forall x (\forall y (y < x) \Rightarrow A(y)) \Rightarrow A(x)) \Rightarrow \forall x\ A(x)$

Доказательство:

$2 \Rightarrow 1$ Пусть $\exists Y$: в Y нет минимального элемента
Рассмотрим $X_1 \in Y \Rightarrow \exists x_2 < x_1 \Rightarrow \exists x_3 < x_2 \dots$

$1 \Rightarrow 2$ очев

$1 \Rightarrow 3$ Пусть $Y \neq \varnothing;\ \forall y \in Y\ \overline{A}(y)$
$X \setminus Y = A(x)$

$\exists y_0 = \min Y \Rightarrow \forall x < y_0\ A(x)$

Тут что-то было

$3 \Rightarrow 1$ Пусть $\exists Y : \nexists \min Y$

$A(x) \sim x \notin Y$

Смотрим на какой-то $x \in Y$. $\forall y < x\ A(y)$

Дословно: если для какого-то x выполнялось бы условие выше, то x был минимальным, а минимального нет, значит x нет

Notation 2.2. Необоснованная индукция

Это примеры, когда индукцию мы использовали, но что-то не так

1. Графы
2. Китайская теорема об остатках

Что не так? На самом деле, например, в КТО мы опирались не на $\mathbb{N}$, а на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Надо доказать, что оно фундированное, тогда использование индукции обосновано

Доказательство:

$$\langle a_1, b_1 \rangle < \langle a_2, b_2 \rangle \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 < a_2 \\ \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 < b_2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Рассмотрим $A \subset X$

$A_1 := \{a | \langle a, b \rangle \in A\}$

$A_1 \subset \mathbb{N} \Rightarrow \exists a_1$ – наименьший элемент A_1

$B_1 := \{b | \langle a_1, b \rangle \in A\}$

$B_1 \subset \mathbb{N} \Rightarrow \exists b_1$ – наименьший элемент B_1

Иными словами, в A есть элемент $\langle a_1, b_1 \rangle$. Про него мы знаем, что все остальные элементы из A либо больше его по первой координате, либо равны с ним по первой и больше по второй

Значит $\langle a_1, b_1 \rangle$ – наименьший, а тогда A – фундированное

Remark 2.9.

Это работает для $\mathbb{N}^k\ \forall k \in \mathbb{N}$

Theorem 2.10.

А что с $\mathbb{N} + \mathbb{N}$?

Возьмем их как $x_1 \dots x_n \dots$ и $y_1 \dots y_n \dots$. Далее $\forall x_i\ \forall y_i\ x_i < y_i$

Давайте докажем, что это множество тоже фундированное

Доказательство:

Пусть $\exists a_1 \dots a_n \dots \in \mathbb{N} + \mathbb{N} : a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$

Возьмем $b_1 \dots b_n \dots \in \mathbb{N}_1$

$\langle a_1 \dots a_n \dots \rangle \setminus \langle b_1 \dots b_n \dots \rangle$ – бесконечное количество

Example 2.7. Где используется?

Например, если хотим две разных индукции про одно и то же множество

Definition 2.11. Упорядоченное множество

X – фундированное, ρ – линейный порядок
(X, ρ) – (вполне) упорядоченное множество, а ρ в таком случае – полный порядок

Theorem 2.11. Свойства

1. $\forall x \in X\ \exists y \in X : y > x$ и $\nexists z : y > z > x$
2. Если $A \subset X$ и A ограниченное, то у него есть наибольший элемент (супремум достижим)
   А правда ли это? Смотрите попытку доказать

Доказательство:

1. На уровне очев
2. $\forall A \subset X : A$ – ограничено
   $\exists u = \sup A$
   $\exists a = \min\{x | x > A\}$
   А потом оказалось, что вообще нет. Возьмем $\mathbb{N} + \mathbb{N}$. Ноль второго подмножество будет больше любого элемента первого, но недостижим в нем

Exercise 2.4.

Построить вполне упорядоченное множество для рациональных чисел (нужен порядок, гарантирующий фундированность)

Начнем обозначать элементы какого-то множества как $0, 1, 2 \ldots$. Получили отображение на натуральный ряд. Если множество конечно, то процесс оборвется, иначе получим в точности натуральный ряд

Более того, можем вполне делать $\omega_1, \omega_1 + 1, \omega_1 + 2 \ldots$. А можем еще и $\omega_2, \omega_2 + 1, \omega_2 + 2 \ldots$

Definition 2.12. Начальный отрезок

A – вполне упорядоченное множество
Пусть $A = B \sqcup C$. При этом $\forall b \in B\ \forall c \in C\ b < c$
Тогда B – начальный отрезок A

Notation 2.3. Свойства:

1. Начальный отрезок – вполне упорядоченное множество
2. Начальный отрезок начального отрезка – начальный отрезок
3. Если рассмотрим $\{B | B$ – начальный отрезок $A\}$, то это множество упорядочено по включению

Definition 2.13. Трансфинитная индукция

В ВЕЛИКОЙ китайской теореме двигаемся по $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Тут понятие индукции неотделимо от рекурсии
А индукция в таком случае будет называться трансфинитной