Содержание

1 План на 3 модуль (или 2 сем...)

1. Множества
2. ЧУМ
3. Исчисление высказываний
4. Исчисление предикатов
5. Теория кодирования

Почитать можно А. Х. Шеня

2 Множества

1. $x \in A$; $y \notin A$
2. Арифметика множеств: $\bigcup, \bigcap, \setminus, \triangle$
3. $\varnothing$
4. $A = \{a, b, c\}$; $B = \{d\} \bigcup A$
5. $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$

Remark 2.1.

Чисто синтаксически вот такой бред: $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ имеет смысл

X – множество: $X \neq \varnothing$. Рассмотрим $x \in X$

$Term(x)$ – проблема, потому что мы не знаем, к каким характеристикам обращаемся и вообще не понятно, что мы выбрали

Спасают аксиомы ZFC

Definition 2.1. Равномощность

A, B – равномощны $\Leftrightarrow \exists f : A \to B$ – биекция
А что с бесконечностями? Давайте возьмем функцию $f : N \to 2N$
Хотя множество четных чисел – подмножество всех, но они равномощны, т.к. f – биекция

Definition 2.2. Характеристическая функция

X – множество. Есть $\chi : X \to \{0, 1\}$, т.е. $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in X \\ 0, & x \notin X \end{cases}$ – характеристическая функция

А пусть $X \subset Y$

- произведение характеристических функций X и Y – это характеристическая функция $X \bigcap Y$
- $1 - \chi(x)$ – характеристическая функция дополнения X
- $max(\chi_X(x), \chi_Y(x))$ – характеристическая функция $X \bigcup Y$

- $|X| = \sum\limits_{x \in Y} \chi_X(x)$

Example 2.1.

Возьмем 2^N; $B = \{0, 1\}$ и B^∞

Равномощны ли они? Берем $x \in 2^N$, теперь $b_i = \begin{cases} 1, \ i \in x \\ 0, \ i \notin x \end{cases}$

Definition 2.3. Счетное множество

X – счетное, если X равномощно N

Example 2.2.

Например, множество целых чисел счетно, т.к. $x \in Z \Rightarrow \begin{cases} 2x, \ x \geq 0 \\ -2x + 1, \ x < 0 \end{cases}$

Proposition 2.1.

1. X – счетно и $Y \subset X \Rightarrow Y$ или счетно, или конечно
2. X – бесконечно. Тогда $\exists Y$ – счетное: $Y \subset X$
3. $X_1, \ldots X_n \ldots$ – конечные или счетные. Тогда $\bigcup X_i$ – конечное или счетное

Доказательство:

1. X – счетно, т.е. соответствует последовательности $\{x_1, \ldots x_n \ldots\} = \xi$
   Возьмем $\xi \cdot \chi(Y)$. Т.е. что-то типа $\{0, 0 \ldots x_{i_1}, 0 \ldots x_{i_2}, 0 \ldots\}$ который равносилен $y_1, y_2, \ldots y_n \ldots = Y$
   В свою очередь эта штука либо конечна, либо счетна, т.к. счетен X
2. Просто выбираем по 1 элементу из X. Если они кончатся на каком-то шаге – X не бесконечно
3. Рисуем табличку. Берем элемент (1, 1), потом (1, 2), потом (2, 1), потом (1, 3) и так далее. То есть по диагоналям. Так переберем вообще все элементы (если не понятно, погуглите метод Кантора)

Exercise 2.1.

В качестве следствия попробуйте построить явную биекцию между множеством рациональных чисел и натуральных

Theorem 2.1.

A – бесконечно, B – нбчс, т.е. B – конечно или счетно
$A \bigcup B$ равномощно A

Доказательство:

$\exists Y \subset A$ – счетное

Y и $Y \bigcup B$ – равномощны

$A \bigcup B = (A \backslash Y) \bigcup (Y \bigcup B)$

$A = Y \bigcup (A \backslash Y)$

Биекция между Y и $Y \bigcup B$ сущесвтует, значит A и $A \bigcup B$ равномощны

Example 2.3.

$[0;1]$ и B^∞. Равномощны ли? Да. Последовательность единиц и нулей – это бинпоиск числа
Проблема: $0,(9) = 1,(0)$
$b_1 \dots b_k, 1, 1, 1, 1, (1)$
$(b_1 \dots b_k) + 1$
$R \bigcup [0,1] \sim B^\infty$ и $R \bigcup [0,1] \sim [0,1] \Rightarrow [0,1] \sim B^\infty$

Example 2.4.

$[0,1] \sim [0,1] \times [0,1]$
$0, a_1 a_2 \dots a_k \dots$
$0, a_1 a_3 a_5 \dots$ и $0, a_2 a_4 a_6 \dots$

Exercise 2.2.

Проблема та же, что и в прошлом примере, но число уязвимых моментов кратно больше. Почините

Theorem 2.2. Кантор-Бернштейн

$A, B;\ A_1 \subset A;\ B_1 \subset B$
$A_1 \sim B, B_1 \sim A \Rightarrow A \sim B$

Доказательство:

A имеет мощность не больше B. Существует какое-то отображение. Нужна его биективность. А где-то по пути может докажем еще и полный порядок

$f : A \to B_1$ – биекция

$g : B \to A_1$ – еще одна биекция

Заметим, что $g(f(A)) = A_2$ – биекция, более того этот процесс можно продолжить до бесконечности

То есть имеем $A \supset A_1 \supset A_2 \dots$ и $A \sim A_2 \sim A_4 \dots$ и $A_1 \sim A_3 \sim A_5 \sim \dots$

Возьмем просто много вложенных C-шек таких, что $C \to C_2 \to C_4 \dots$ и $C_1 \to C_3 \dots$ при какой-то биекции h

Как построить биекцию из C_6 в C_7? Положим $D_i = C_i \setminus C_{i+1}$. Тогда $C_0 = D_0 \bigcup D_1 \bigcup D_2 \dots$

При этом $C_1 = D_1 \bigcup D_2 \bigcup D_3 \dots$

$D_2 = C_2 \setminus C_3;\ D_0 = C_0 \setminus C_1$. Ну тогда $C_2 = D_2 \bigcup C_3$ и $C_0 = D_0 \bigcup C_1$

При этом биекция h все еще существует. Можем сопоставить $D_{2k} \to D_{2(k+1)}$, а $D_{2k+1} \to D_{2k+1}$, т.е. построить биекцию между C_0 и C_1. Победа

Явная биекция: $q(x) = \begin{cases} x, x \in D_{2i+1} \\ h(x), x \in D_{2i} \end{cases}$

Theorem 2.3. Теорема Кантора

B^{inf} – не счетно

Доказательство:

Построили последовательность типа

1. $a_1, a_2 \dots$
2. $b_1, b_2 \dots$
3. $c_1, c_2 \dots$

Ну возьмем еще одну последовательность $a_1, b_2, c_3 \dots$ – она будет отличаться от всех предыдущих как минимум в одном элементе. Значит B^{inf} не счетно

Theorem 2.4. Обобщенная теорема Кантора

$\forall X,\ X \not\sim 2^X$

Доказательство:

Пусть $\exists \varphi : X \to 2^X$ – биекция

$Z = \{x | x \notin \varphi(x)\}$

$Z \subset X$

$\nexists z : \varphi(z) = Z \Rightarrow z \notin Z \Rightarrow z \in Z$

Theorem 2.5. Следствие

$|2^X| > |X|$
$\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, 2^{2^{\mathbb{N}}}, \dots$
$\aleph_0, \aleph_1, \dots$

Remark 2.2.

Почему не существует множества всех множеств?
Пусть существует и называется U
Посмотрим на U и 2^U
По Кантору-Бернштейну $U \sim 2^U$, но по теореме Кантора $|U| < |2^U|$????