

# Модели стохастической волатильности

Лекция 1: Что такое волатильность?

<https://t.me/+iBSH9v7Qxcxi0Dg6>

Михаил Житлухин

## Содержание

1	Модель Блэка–Шоулса	3
1.1	Геометрическое броуновское движение . . . . .	3
1.2	Опционы и формула Блэка–Шоулса . . . . .	4
2	Модель Б.–Ш. не согласуется с историческими данными	7
2.1	Стилизованные факты распределения доходностей . . . . .	8
3	Модель Б.–Ш. не согласуется с будущими ценами	14
3.1	Предполагаемая волатильность . . . . .	14
3.2	Зачем нужно учитывать изменчивость волатильности? . . . . .	16
	Литература	17

# 1. Модель Блэка–Шоулса

## 1.1. Геометрическое броуновское движение

Рынок из двух активов:

- безрисковый актив с ценой  $B_t = e^{rt}$  (облигация),
- рисковый актив с ценой, задаваемой геометрическим броуновским движением (акция)

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \iff S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}.$$

Параметры:  $r$  – безрисковая ставка,  $\mu$  – снос,  $\sigma > 0$  – волатильность.

**Напоминание.**  $W_t$  обозначает броуновское движение. В частности,  $W_t \sim N(0, t)$ . Для геометрического броуновского движения

$$\ln \frac{W_{t+\Delta t}}{W_t} \sim N((\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t, \sigma^2 \Delta t)$$

## 1.2. Опционы и формула Блэка–Шоулса

**Определение.** **Опцион колл** – это контракт, дающий право купить акцию в момент  $T$  по заранее фиксированной цене  $K$ .

**Опцион пут** – это контракт, дающий право продать акцию в момент  $T$  по заранее фиксированной цене  $K$ .

Опцион можно отождествить со случайной величиной

$$X^{\text{call}} = (S_T - K)^+, \quad X^{\text{put}} = (K - S_T)^+$$

(сумма, которую продавец опциона выплачивает покупателю в момент  $T$ ).

**Вопрос:** какой должны быть справедливая стоимость опциона?

**Определение.** Справедливой (безарбитражной) ценой платежного обязательства называется стоимость начального портфеля торговой стратегии, **реплицирующей** платежное обязательство.

**Теорема (формула Блэка–Шоулса).** Пусть  $X$  – геометрическое броуновское движение со сносом  $r$  и волатильностью  $\sigma$ , т.е.

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = S_0.$$

Тогда для цен опционов верны формулы

$$V^{\text{call}} = e^{-rT} \mathbb{E}(X_T - K)^+, \quad V^{\text{put}} = e^{-rT} \mathbb{E}(K - X_T)^+.$$

**Замечание.** Не важно какой коэффициент сноса  $\mu$  у цены акции  $S_t$ . В формуле Б.–Ш. снос становится равен безрисковой ставке.

Интегрируя по плотности нормального распределения, получаем

$$V^{\text{call}} = S_0 \Phi(d_1) - e^{-rT} K \Phi(d_2), \quad V^{\text{put}} = e^{-rT} K \Phi(-d_2) - S_0 \Phi(-d_1),$$

где  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$  – нормальная функция распределения, и

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left( \ln \frac{S_0}{K} + \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right), \quad d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left( \ln \frac{S_0}{K} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right).$$

[Упражнение.](#) Проинтегрируйте.

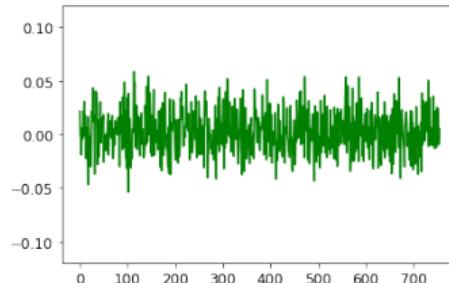
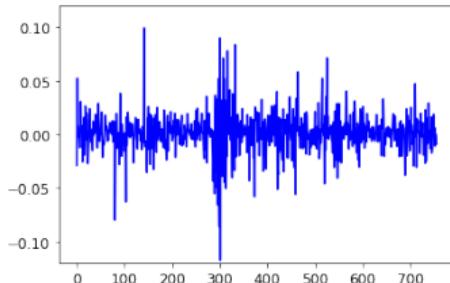
## 2. Модель Б.-Ш. не согласуется с историческими данными

Статья: R. Cont. *Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues* (2001)

Построим процесс логарифмической доходности какого-нибудь актива и такой же процесс для геометрического броуновского движения:

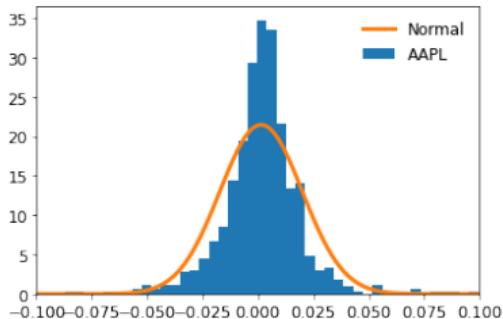
$$L_t = \ln \frac{X_{t+\Delta t}}{X_t}.$$

Визуально характер процессов весьма отличается.



## 2.1. Стилизованные факты распределения доходностей

### Тяжелые хвосты



Простой способ измерить отклонение от нормального распределения – коэффициент эксцесса

$$\kappa = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3,$$

где  $\mu_4 = E(X - E X)^4$ ,  $\sigma^4 = (E(X - E X)^2)^2$ .

Для нормального распределения  $\kappa = 0$ . Для примера выше  $\kappa = 6.3$ .

Тяжелые хвосты выражаются в том, что увеличивается вероятность экстремальных значений по сравнению с нормальным распределением.

**Пример.** Для дневных доходностей акций Meta (Facebook)

$$\mu \approx 0.001, \quad \sigma \approx 0.021.$$

Если бы доходность имела нормальное распределение, то

$$P(X \leq -0.25) \approx 10^{-33},$$

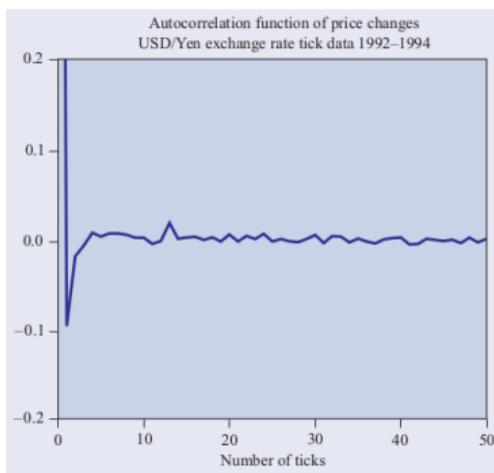
т.е. падение на 25% за день не должно произойти никогда.

## Отсутствие линейной автокорреляции доходностей

Пусть  $r(t, \Delta t) = X_{t+\Delta t} - X_t$ . Рыночные данные обычно обладают свойством

$$\text{Corr}(r(t, \Delta t), r(t + s, \Delta t)) \approx 0$$

где  $s$  – параметр (временной лаг).



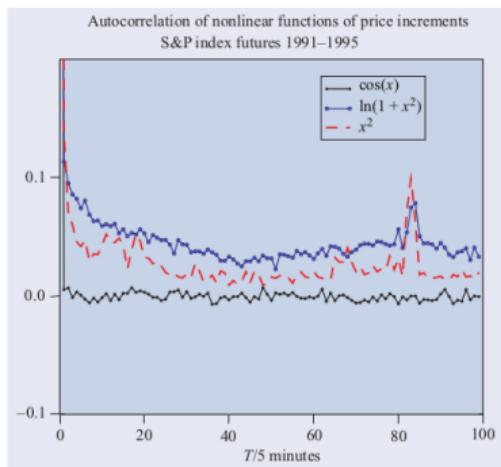
Следствие: нельзя “предсказать” будущую доходность.

## Присутствие нелинейной зависимости; кластеризация волатильности

С другой стороны, обычно

$$\text{Corr}(r(t, \Delta t)^2, r(t + \tau, \Delta t)^2) \neq 0,$$

что говорит о зависимости приращений цен (напоминание: из некоррелированности не следует независимость).

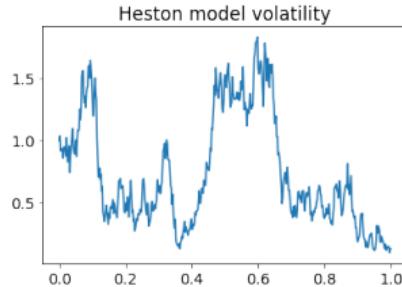
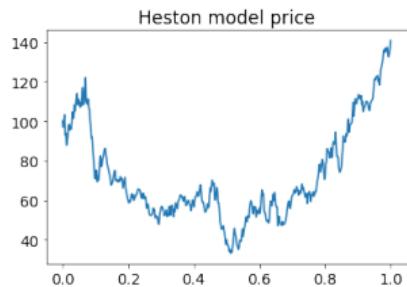
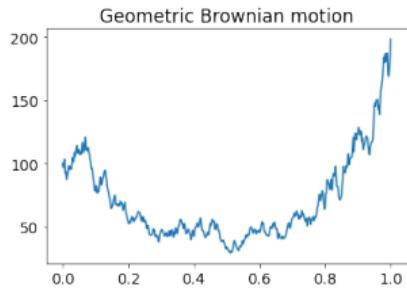


## Другие стилизованные факты

- Присутствие “скачков” в процессах цен
- Корреляция экстремальных значений между различными акциями
- Кластеризация волатильности (за большими изменениями цен следуют большие изменения, за малыми малые)
- Корреляция между волатильностью и ценой
- и др.

Как построить модель, которая бы отражала наблюдаемые факты?

Пример:  $dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t$ , где  $\sigma_t$  – случайный процесс (“**стохастическая волатильность**”).



### 3. Модель Б.–Ш. не согласуется с будущими ценами

#### 3.1. Предполагаемая волатильность

Рассмотрим формулу Блэка–Шоулса как уравнение

$$V = V(S, T, K, \sigma, r) \quad (*)$$

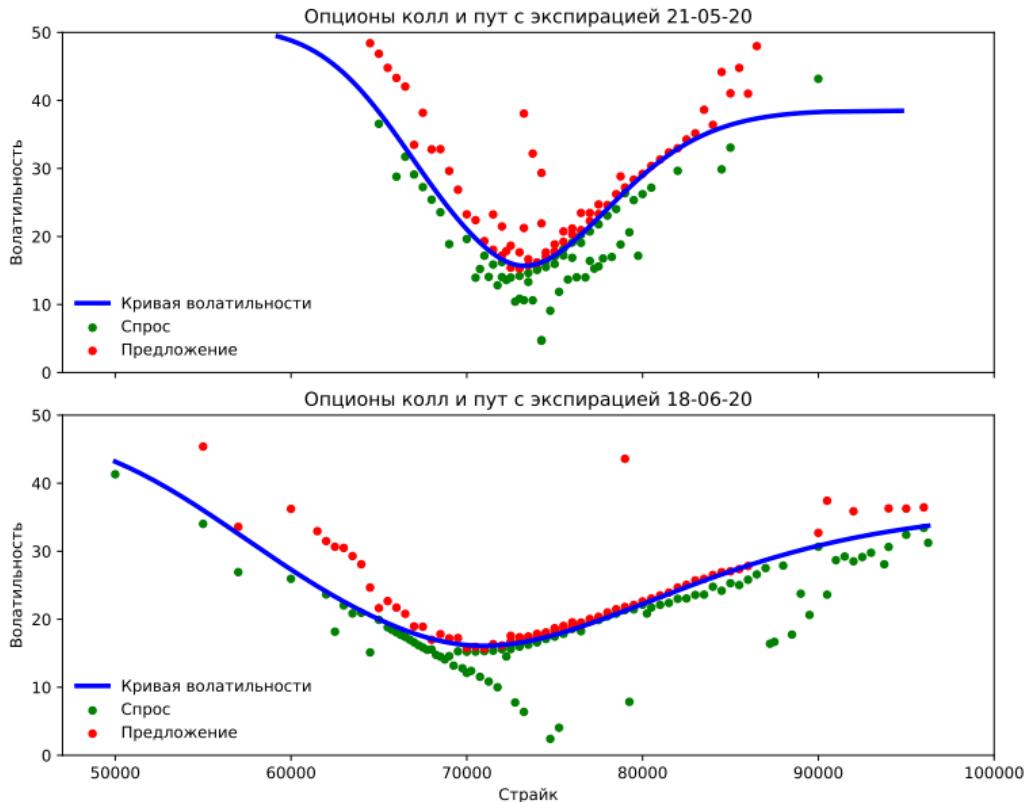
и решим его относительно  $\sigma$ , взяв в качестве  $V$  цены торгуемых опционов.

**Определение.** Предполагаемой волатильностью (implied volatility) называется решение  $\hat{\sigma}$  уравнения (\*).

**Упражнение.** Покажите, что (\*) имеет единственное решение.

В модели Б.–Ш. значение  $\hat{\sigma}$  было бы постоянным для всех торгуемых опционов на одну и ту же акцию (для всевозможных  $T, K$ ). Но в реальности это не так.

Предполагаемая волатильность опционов на курс доллара. Дата: 14-05-20



### 3.2. Зачем нужно учитывать изменчивость волатильности?

В модели Блэка–Шоулса деривативы можно хеджировать портфелем из акции и облигации, так чтобы

$$d(-V(t, S_t) + g_t S_t + h_t B_t) = 0 \cdot dt + 0 \cdot dS_t,$$

где  $V(t, S_t)$  – цена дериватива в модели (например, цена опциона). Т.е. стоимость портфеля не меняется при изменении цены  $S_t$  и с течением времени.

Но если волатильность может меняться, то  $V = V(t, S_t, \sigma_t)$  и

$$d(-V(t, S_t, \sigma_t) + g_t S_t + h_t B_t) = v_t d\sigma_t + \dots,$$

где может быть  $v_t \neq 0$ .

Следовательно, у портфеля возникает дополнительный источник риска из-за изменения волатильности.

## Литература

1. R. Cont. Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 2001.

## Структура курса

Три части:

1. Стохастический анализ
2. Классические модели волатильности
3. Новые направления

Оценка:

$$0.2K_1 + 0.2K_2 + 0.3E + 0.4S,$$

где  $K_i$  – оценка за  $i$ -ю контрольную/коллоквиум,  $E$  – оценка за экзамен,  $S$  – оценка за семинары и домашние задания.

# Модели стохастической волатильности

Лекция 2: Броуновское движение и интеграл Ито

Михаил Житлухин

## Содержание

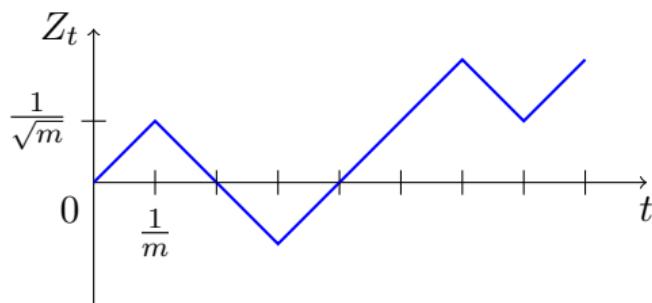
<b>1 Броуновское движение</b>	<b>3</b>
1.1 Предел случайных блужданий . . . . .	3
1.2 Определения, существование, единственность . . . . .	5
1.3 Свойства траекторий . . . . .	7
<b>2 Процессы на фильтрованном вероятностном пространстве</b>	<b>9</b>
2.1 Согласованные и предсказуемые процессы . . . . .	9
2.2 Обычные условия на фильтрацию . . . . .	11
2.3 Броуновское движение относительно фильтрации . . . . .	12
2.4 Определение мартингала . . . . .	13
2.5 Пространство квадратично интегрируемых мартингалов на $[0, T]$ . . .	15
2.6 Моменты остановки . . . . .	16
2.7 Локальные мартингалы . . . . .	20
<b>3 Интеграл Ито</b>	<b>22</b>
3.1 Интеграл для простых процессов . . . . .	22
3.2 Интеграл для предсказуемых процессов из $L_T^2$ . . . . .	25
3.3 Интеграл для процессов из $L_{T, \text{loc}}^2$ . . . . .	29
<b>Литература</b>	<b>31</b>

## 1. Броуновское движение

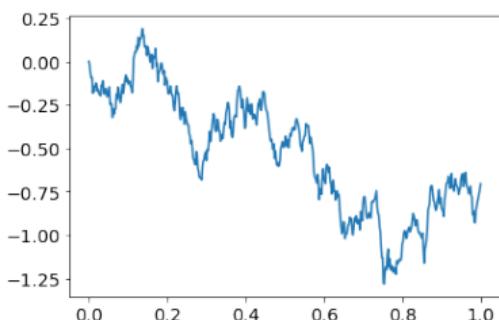
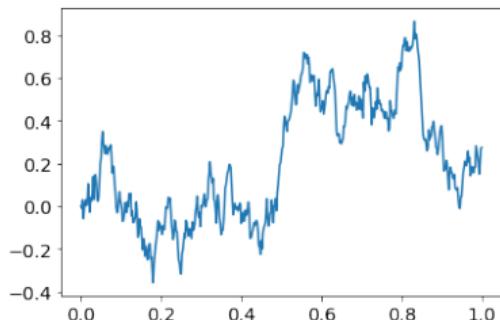
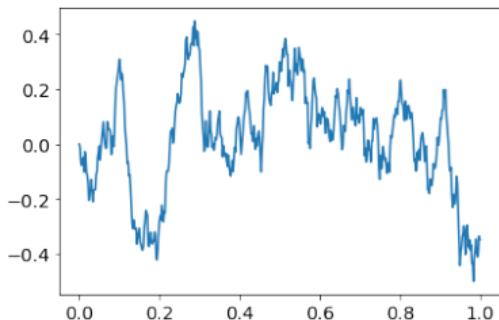
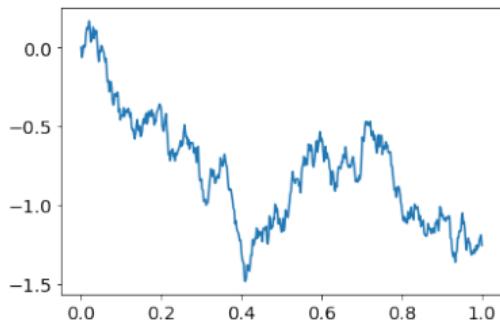
### 1.1. Предел случайных блужданий

Рассмотрим случайное блуждание  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , где  $X_i$  являются н.о.р. случайными величинами с  $E X_i = 0$ ,  $D X_i = 1$ . Построим ломаную линию  $Z_t$  с вершинами

$$\left( \frac{n}{m}, \frac{S_n}{\sqrt{m}} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



В пределе  $t \rightarrow \infty$  получается случайный процесс – броуновское движение.



Из ЦПТ следует, что  $B_t / \sqrt{t}$  имеет стандартное нормальное распределение.

## 1.2. Определения, существование, единственность

Случайным процессом  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  называется семейство случайных величин  $X_t(\omega)$ , заданных на одном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

**Определение.** Процесс  $(B_t)_{t \geq 0}$  называется **броуновским движением**, если

1.  $B_0 = 0$  п.н.;
2.  $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$  для любых  $t \geq s$  (**гауссовские приращения**);
3.  $B_{t_1} - B_{t_2} \perp\!\!\!\perp B_{t_2} - B_{t_3} \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp B_{t_{n-1}} - B_{t_n}$  для любых  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  (**независимые приращения**);
4. функция  $t \mapsto B_t(\omega)$  непрерывна для п.в.  $\omega$  (**непрерывные траектории**).

**Замечание.** Другое название – винеровский процесс. Другое обозначение –  $W_t$ .

**Упражнение.** Найдите в литературе другие определения броуновского движения.

- Предложение.** 1. Броуновское движение существует (т.е. найдется некоторое вероятностное пространство и заданное на нем броуновское движение).
2. Броуновское движение единственно по распределению (как случайный элемент  $B: \Omega \rightarrow C(\mathbb{R}_+)$ ).

**Замечание.** Под единственностью по распределению понимается следующее. На пространстве  $\mathcal{X} = C(\mathbb{R}_+)$  определим борелевскую  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{B}$ , т.е. порожденную открытыми множествами по метрике

$$d(f, g) = \sup_{t \geq 0} |f(t) - g(t)|.$$

Тогда если  $B$  и  $\tilde{B}$  – два броуновских движения, рассматриваемые как отображения из  $\Omega$  в  $\mathcal{X}$ , то  $P(B^{-1}(A)) = P(\tilde{B}^{-1}(A))$  для любого  $A \in \mathcal{B}$ , т.е. распределения  $B$  и  $\tilde{B}$  на  $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$  совпадают.

(Доказательства были/будут в курсе случайных процессов.)

### 1.3. Свойства траекторий

С вероятностью 1 траектории броуновского движения обладают следующими свойствами:

- не дифференцируемы ни в одной точке  $t \geq 0$ ;
- имеют неограниченную вариацию на любом промежутке  $[a, b]$ , где  $b > a$ ;
- не имеют точек возрастания или убывания;
- множество моментов пересечения любого уровня  $x \in \mathbb{R}$  является несчетным нигде не плотным замкнутым множеством без изолированных точек;
- выполнен закон повторного логарифма

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = -1 \quad \text{п.н.}$$

## Интеграл по броуновскому движению

Крайне важный и необходимый объект – интеграл по броуновскому движению

$$\int_0^T H_t dB_t,$$

где  $H_t$  – некоторый случайный процесс.

Для произвольных процессов  $H_t$  его нельзя определить потраекторно, т.е., например, как интеграл Римана–Стилтьеса

$$\sum_{i=0}^{n-1} H_{t_i}(\omega) (B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)) \not\rightarrow \text{п.н.}$$

Чтобы определить  $\int_0^T H_t dB_t$  нужен **интеграл Ито**.

**Замечание.** Достаточное условие существование интеграла Р.–С.  $\int_a^b f(x) dg(x)$ :  $f$  непрерывна,  $g$  имеет ограниченную вариацию (см. Колмогоров–Фомин, §VI.6).

## 2. Процессы на фильтрованном вероятностном пространстве

### 2.1. Согласованные и предсказуемые процессы

**Определение.** **Фильтрацией** на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  называется семейство  $\sigma$ -алгебр  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , где  $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$  для всех  $0 \leq s \leq t$ .

Процесс  $X_t$  называется **согласованным с фильтрацией  $\mathbb{F}$** , если  $X_t$  является  $\mathcal{F}_t$ -измеримой величиной для всех  $t \geq 0$ .

**Определение.** Предсказуемой  $\sigma$ -алгеброй  $\mathcal{P}$  на  $\Omega \times \mathbb{R}_+$ , называется  $\sigma$ -алгебра, которая порождена всеми согласованными непрерывными слева процессами  $X$  как отображениями  $X(\omega, t)$ .

Процесс  $X_t$  называется **предсказуемым относительно фильтрации  $\mathbb{F}$** , если отображение  $X(\omega, t)$  измеримо относительно  $\mathcal{P}$ .

**Упражнение.** Приведите пример 1) согласованного, но не предсказуемого процесса; 2) предсказуемого процесса, у которого есть разрыв(ы) слева.

## Другие классы измеримых процессов (\*)

**Определение.** Процесс процесс  $X$  называется

- **измеримым**, если отображение  $X(\omega, t) = X_t(\omega)$  из  $\Omega \times \mathbb{R}_+$  в  $\mathbb{R}$  является  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -измеримым;
- **неупреждающим**, если он измерим и согласован;
- **прогрессивно измеримым**, если для любого  $T \geq 0$  отображение  $X(\omega, t)$ , где  $t \in [0, T]$ , является  $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}([0, T])$ -измеримым;
- **опциональным**, если отображение  $X(\omega, t)$  измеримо относительно опциональной  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{O}$ , которая порождена всеми согласованными непрерывными справа процессами  $X$  как отображениями  $X(\omega, t)$ ;

**Предложение.** 1. Если  $X$  – измеримый процесс, то его траектории являются измеримыми функциями.

2. Верны соотношения между классами случайных процессов:

предсказуемые  $\subseteq$  опциональные  $\subseteq$  прог. измеримые  $\subseteq$  неупреждающие

## 2.2. Обычные условия на фильтрацию

**Определение.**  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  удовлетворяет **обычным условиям**, если

1.  $\mathcal{F}$  полна по мере  $P$  и  $\mathcal{F}_0$  содержит все множества нулевой вероятности;
2.  $\mathcal{F}_t = \cap_{s > t} \mathcal{F}_s$  для всех  $t \geq 0$  (непрерывность фильтрации справа).

Далее всегда считается, что все фильтрованные вероятностные пространства удовлетворяют обычным условиям.

**Пример (фильтрация не непрерывная справа).** Возьмем  $\Omega = C(\mathbb{R}_+)$ ,  $X_t(\omega) = \omega(t)$  и  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ . Тогда для  $A = \{\omega : \exists \frac{d^+}{dt} X_t(\omega) |_{t=0}\}$  имеем  $A \in \cap_{s > 0} \mathcal{F}_s$ , но  $A \notin \mathcal{F}_0$ .

**Предложение.** Любое фильтрованное вероятностное пространство можно расширить так, чтобы оно удовлетворяло обычным условиям.

## 2.3. Броуновское движение относительно фильтрации

**Определение.** Процесс  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  называется **броуновским движением** на фильтрованном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ , если

1.  $B_0 = 0$  п.н.;
2.  $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$  при  $s \leq t$ ;
3.  $B_t - B_s \perp \mathcal{F}_s$  при  $s \leq t$ ;
4. функция  $t \mapsto B_t(\omega)$  непрерывна для п.в.  $\omega$ .

**Замечание.** Броуновское движение в смысле первого определения является броуновским движением относительно своей естественной фильтрации  $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ , а также ее пополнения.

## 2.4. Определение мартингала

**Определение.** Случайный процесс  $X$  называется **мартингалом**, если

1.  $X$  согласован с фильтрацией  $\mathcal{F}_t$ ,
2.  $E|X_t| < \infty$  для всех  $t \geq 0$ ;
3.  $E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$  для всех  $0 \leq s \leq t$ .

Если заменить “=” на “ $\geq$ ” или “ $\leq$ ”, то получим **суб-** или **супермартингал**.

**Замечание.** Аналогично определяется мартингал на конечном временном интервале  $[0, T]$ . Далее у нас в основном будут рассматриваться только такие мартингалы.

## Примеры мартингалов

1. Броуновское движение
2. Любой процесс с независимыми приращениями и постоянным средним 0 (т.е.  $X_t - X_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$  при  $t \geq s$  и  $EX_t = c$  для всех  $t \geq 0$ )
3. Геометрическое броуновское движение:  $S_t = e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t}$ .
4. Мартингалы Леви:  $X_t = E(Y | \mathcal{F}_t)$ , где  $E|Y| < \infty$ .  
*Замечание.* Любой мартингал на  $[0, T]$  является мартингалом Леви:  $X_t = E(X_T | \mathcal{F}_t)$ .
5. Интеграл Ито  $\int_0^t H_s dB_s$  для “хорошего” процесса  $H_s$  (а если  $H_s$  плохой, то будет локальный мартингал).
6. Если  $X_t$  – мартингал, то  $|X_t|$  – субмартингал. Если  $X_t$  – мартингал и  $E X_t^2 < \infty$  для всех  $t$ , то  $X_t^2$  – субмартингал.  
*Доказательство.* По неравенству Йенсена.

## 2.5. Пространство квадратично интегрируемых мартингалов на $[0, T]$

**Определение.** Мартингал  $X_t$ ,  $t \in [0, T]$ , называется **квадратично интегрируемым**, если  $\mathbb{E} X_T^2 < \infty$ .

(Тогда по неравенству Йенсена также  $\mathbb{E} X_t^2 \leq \mathbb{E} X_T^2 < \infty$ .)

**Предложение.** Множество (классов эквивалентности) квадратично интегрируемых мартингалов образуют гильбертово пространство  $\mathcal{M}_T^2$  со скалярным произведением

$$(X, Y) = \mathbb{E}(X_T Y_T).$$

Непрерывные квадратично интегрируемые мартингалы образуют в нем замкнутое подпространство  $\mathcal{M}_T^{2,c}$ .

**Замечание.** В доказательстве второй части нужно неравенство Дуба для мартингалов:

$$\mathbb{E} \sup_{t \leq T} X_t^2 \leq 4 \mathbb{E} X_T^2.$$

## 2.6. Моменты остановки

**Определение.** Случайная величина  $\tau$  со значениями в  $[0, \infty]$  называется **моментом остановки** относительно фильтрации  $\mathcal{F}_t$ , если

$$\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ для всех } t \geq 0.$$

**Замечание.** Если заменить " $\leq t$ " на " $< t$ ", то получится эквивалентное определение (здесь нужна непрерывность фильтрации справа).

**Определение.** Для момента остановки  $\tau$  определим  $\sigma$ -алгебру "событий до момента  $\tau$ ":

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ для любого } t\}.$$

**Упражнение.** Докажите, что это  $\sigma$ -алгебра.

**Предложение.** Для любых моментов остановки  $\tau, \sigma$  выполнены свойства:

1.  $\tau + \sigma, \tau \wedge \sigma, \tau \vee \sigma, \tau + t$  являются моментами остановки;
2. если моменты остановки  $\tau_n \uparrow \tau$  п.н., то  $\tau$  является моментом остановки;
3.  $\tau$  является  $\mathcal{F}_\tau$ -измеримой величиной;
4. если  $\tau \leq \sigma$  п.н., то  $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_\sigma$ .

**Упражнение.** Докажите.

**Определение.** Для момента остановки  $\tau$  и процесса  $X$  определим **процесс  $X$  остановленный в момент  $\tau$**  соотношением  $X_t^\tau(\omega) = X_{t \wedge \tau(\omega)}(\omega)$ .

**Предложение.** Пусть  $\tau < \infty$  – момент остановки, и  $X$  – прогрессивно измеримый (или опционный, или предсказуемый) процесс. Тогда  $X_\tau = X_{\tau(\omega)}(\omega)$  является  $\mathcal{F}_\tau$ -измеримой случайной величиной, а процесс  $X^\tau$  является прогрессивно измеримым (опциональным/предсказуемым).

**Теорема Дуба (об остановке).** Пусть  $X_t$  – мартингал,  $\tau$  – момент остановки со значениями в некотором отрезке  $[s, t]$ . Тогда

$$\mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_s) = X_s.$$

**Следствие.** Если  $X_t$  – мартингал, а  $\tau$  – произвольный момент остановки, то  $X^\tau$  тоже является мартингалом.

**Замечание.** В теореме можно ослабить условие ограниченности  $\tau \leq t$ , но совсем убрать подобное условие нельзя.

**Упражнение:** приведите пример.

**Доказательство следствия.** Для  $s \leq t$  имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X_t^\tau \mid \mathcal{F}_s) &= \mathrm{E}(X_{t \wedge \tau} \mid \mathcal{F}_s) \\&= \mathrm{E}(X_{t \wedge \tau} \mathrm{I}(\tau > s) + X_{t \wedge \tau} \mathrm{I}(\tau \leq s) \mid \mathcal{F}_s) \\&= \mathrm{E}(X_{(t \wedge \tau) \vee s} \mathrm{I}(\tau > s) + X_{t \wedge \tau \wedge s} \mathrm{I}(\tau \leq s) \mid \mathcal{F}_s) \\&= \mathrm{E}(X_{(t \wedge \tau) \vee s} \mid \mathcal{F}_s) \mathrm{I}(\tau > s) + \mathrm{E}(X_{\tau \wedge s} \mid \mathcal{F}_s) \mathrm{I}(\tau \leq s) \\&= X_s(\tau > s) + X_{\tau \wedge s} \mathrm{I}(\tau \leq s) \\&= X_{s \wedge \tau} \\&= X_s^\tau.\end{aligned}$$

## 2.7. Локальные мартингалы

**Определение.** Процесс  $X$  называется **локальным мартингалом**, если найдется последовательность моментов остановки  $\tau_n$  такая, что

1.  $\tau_{n+1} \geq \tau_n$  п.н. и  $\tau_n \rightarrow \infty$  п.н.;
2.  $X^{\tau_n}$  является мартингалом.

Последовательность  $\tau_n$  называется **локализующей последовательностью**.

**Замечание.** Аналогично определяются другие локальные классы: локальные субмартингалы, локальные квадратично интегрируемые мартингалы и т.д.

**Упражнение.** Найдите пример локального мартингала, не являющегося мартингалом.

**Предложение.** Если  $X$  – непрерывный локальный мартингал, то он также является локальным квадратично интегрируемым мартингалом, т.е. найдется локализующая последовательность, такая, что  $X^{\tau_n}$  – квадратично интегрируемый мартингал.

**Доказательство.** Нужно рассмотреть локализующую последовательность  $\tau_n \wedge \sigma_n$ , где  $\tau_n$  локализует  $X$ , и  $\sigma_n$  – момент выхода на уровень  $\pm n$  (тогда  $X^{\sigma_n}$  ограничен).

**Предложение.** Пусть  $X \geq 0$  – локальный мартингал. Тогда  $X$  – супермартингал.

**Доказательство.** В неравенстве  $X_{s \wedge \tau_n} = \mathbb{E}(X_{t \wedge \tau_n} \mid \mathcal{F}_s)$  перейдем к пределу по лемме Фату.

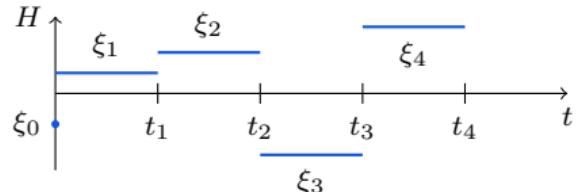
**Предложение.** Непрерывный локальный мартингал траектории которого п.н. имеют ограниченную вариацию на любом отрезке  $[0, t]$  равен константе.

### 3. Интеграл Ито

#### 3.1. Интеграл для простых процессов

Будем называть **простым** процесс, который представим в виде

$$H_t = \xi_0 \mathbf{I}(t = 0) + \sum_{i=1}^n \xi_i \mathbf{I}(t \in (t_{i-1}, t_i]),$$



где  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq \infty$  и  $\xi_i$  –  $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -измеримые и ограниченные случайные величины.

**Определение.** Для простого  $H$  определим интеграл Ито

$$\int_0^t H_s dB_s = \sum_{i=1}^n \xi_i (B_{t \wedge t_i} - B_{t \wedge t_{i-1}}), \quad t \in [0, T].$$

**Лемма.** Пусть  $G, H$  – простые процессы. Тогда

$$\int_0^t H_s dB_s \in \mathcal{M}_T^{2,c} \quad (1)$$

$$E\left(\int_0^t G_s dB_s \cdot \int_0^t H_s dB_s\right) = E \int_0^t G_s H_s ds. \quad (2)$$

**Доказательство.** (1) Интеграл линеен, а  $\mathcal{M}_T^{2,c}$  – линейное пространство. Поэтому достаточно рассмотреть

$$H_t = \xi I(t \in (s, u]),$$

где  $\xi$  –  $\mathcal{F}_s$ -измерима,  $|\xi| \leq c$  п.н. Тогда

$$E\left(\int_0^T H_t dB_t\right)^2 \leq c^2 E(B_u - B_s)^2 \leq cT.$$

(2) Можно считать  $t = T$ . По линейности достаточно рассмотреть два случая:  
1-й случай:

$$H_t = \xi I(t \in (s, u]), \quad G_t = \eta I(t \in (s, u]).$$

Тогда

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^T G_t dB_t \cdot \int_0^T H_t dB_t\right) &= E \xi \eta (B_u - B_s)^2 = E \xi \eta E((B_u - B_s)^2 | \mathcal{F}_s) \\ &= E \xi \eta (u - s) = E \int_0^T G_t H_t dt. \end{aligned}$$

2-й случай:

$$H_t = \xi I(t \in (s_1, u_1]), \quad G_t = \eta I(t \in (s_2, u_2]), \quad s_1 < u_1 \leq s_2 < u_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^T G_t dB_t \cdot \int_0^T H_t dB_t\right) &= E \xi \eta (B_{u_1} - B_{s_1})(B_{u_2} - B_{s_2}) \\ &= E \xi \eta (B_{u_1} - B_{s_1}) E((B_{u_2} - B_{s_2}) | \mathcal{F}_{s_2})) = 0 = E \int_0^T G_t H_t dt. \end{aligned}$$

### 3.2. Интеграл для предсказуемых<sup>1</sup> процессов из $L_T^2$

Введем пространство предсказуемых процессов  $L^2$  со скалярным произведением:

$$L_T^2 = \left\{ X : X \text{ предсказуем и } \mathbb{E} \int_0^T X_t^2 dt < \infty \right\}, \quad (X, Y) = \mathbb{E} \int_0^T X_t Y_t dt.$$

**Замечание.** Формально – пространство классов эквивалентности. Более точное обозначение –  $L^2(\Omega \times [0, T], \mathcal{P}, \mathbb{P} \otimes \lambda)$ , где  $\lambda$  – мера Лебега.

**Лемма.** 1.  $L_T^2$  является гильбертовым пространством.

2. Простые процессы образуют всюду плотное множество в  $L_T^2$ .

3. Для простых процессов интеграл Ито является **изометрией** из  $L_T^2$  в  $\mathcal{M}_T^{2,c}$ , т.е. сохраняет скалярные произведения (и, следовательно, нормы).

---

<sup>1</sup>Мы определим интеграл только для предсказуемых процессов (нам этого будет достаточно). Но класс интегрируемых процессов шире, см. раздел “Литература”.

**Определение.** Для процессов  $H \in L_T^2$  интеграл Ито определяется как единственное продолжение отображения  $L_T^2$  в  $\mathcal{M}_T^{2,c}$ , определенного на простых процессах.

Свойства интеграла:

1.  $\int_0^t H_s dB_s + \int_0^t G_s gB_s = \int_0^t (H_s + G_s) dB_s,$   
 $\int_0^t H_s dB_S + \int_t^u H_s dB_s = \int_0^u H_s dB_s,$   
и т.п.
2.  $E \int_0^t H_s dB_s = 0$  (следует из того, что интеграл является квадратично интегрируемым мартингалом)
3.  $D \int_0^t H_s dB_s = E \int_0^t H_s^2 ds$  (следует из изометрии).

Пример:  $\int_0^T B_t dB_t$

Докажем, что

$$\int_0^T B_t dB_t = \frac{B_T^2 - T}{2}.$$

**Замечание.** Отличие интеграла Ито от интеграла Римана–Стилтьеса видно в том, что для дифференцируемой функции  $f(t)$  имеет  $\int_0^T f(t) df(t) = \frac{f(t)^2}{2}$ .

Апроксимируем  $B_t$  простыми процессами  $H^n$ :

$$H_t^n = \sum_{i=1}^n B_{t_{i-1}} I(t \in (t_{i-1}, t_i]), \quad t_i = i \frac{T}{n}.$$

Это действительно аппроксимация, так как

$$\|H^n - B\|^2 = \mathbb{E} \int_0^T (H_t^n - B_t)^2 dt \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E} (B_{t_{i-1}} - B_{t_i})^2 \frac{T}{n} = \frac{T^2}{n^2} \rightarrow 0.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}\int_0^T H_t^n dB_t &= \sum_{i=1}^n B_{t_{i-1}} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{B_{t_i} + B_{t_{i-1}}}{2} - \frac{B_{t_i} - B_{t_{i-1}}}{2} \right) (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \\ &= \frac{B_T^2}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2}{2} \rightarrow \frac{B_T^2 - T}{2},\end{aligned}$$

где сходимость по закону больших чисел.

### 3.3. Интеграл для процессов из $L^2_{T,\text{loc}}$

Введем множество процессов

$$L^2_{T,\text{loc}} = \left\{ X : X \text{ предсказуем и } \int_0^T X_t^2 dt < \infty \text{ п.н.} \right\}.$$

**Теорема.** Для любого  $H \in L^2_{T,\text{loc}}$  существует единственный непрерывный локальный квадратично интегрируемый мартингал  $I_t$  такой, что для любого момента остановки  $\tau \leq T$ , если  $H^\tau \in L^2_T$ , то

$$I_t = \int_0^t H_s^\tau dB_s \quad \text{п.н. при } t \leq \tau.$$

**Определение.** Такой процесс  $I_t$  называется интегралом  $\int_0^t H_s dB_s$ .

## Достаточное условие интегрируемости

**Предложение.** Пусть  $X_t$  – непрерывный согласованный процесс. Тогда интеграл  $\int_0^t X_s dB_s$  определен для всех  $t \geq 0$ .

Если  $f(t, x)$  – ограниченная измеримая функция, то также определен интеграл  $\int_0^t f(s, X_s) dB_s$ .

**Доказательство.** Очевидно.

## Литература

1. Булинский, Ширяев. Теория случайных процессов (см. гл. II, VII)  
Свойства броуновского движения, конструкция интеграла Ито для процессов из  $L_T^2$  (без доказательства полноты простых процессов)
2. Липцер, Ширяев. Статистика случайных процессов (гл. 4)  
Полная конструкция интеграла Ито с доказательствами
3. Липцер, Ширяев. Статистика случайных процессов (гл. 5, §4)  
Интеграл по квадратично интегрируемому мартингалу
4. Курс лекций “Введение в теорию мартингалов”, лекции 7–10 (доступно на онлайн-диске)  
Построение интеграла от предсказуемого процесса по локальному квадратично интегрируемому мартингалу

# Модели стохастической волатильности

Лекция 3: Формула Ито и процессы Ито

Михаил Житлухин

## Содержание

<b>1</b>	<b>Формула Ито</b>	<b>3</b>
1.1	Формула Ито для броуновского движения . . . . .	3
1.2	Идея доказательства . . . . .	5
1.3	Примеры . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Процессы Ито</b>	<b>10</b>
2.1	Формула Ито для процессов Ито . . . . .	12
2.2	Пример: процесс Орнштейна–Уленбека . . . . .	13
2.3	Многомерный случай . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Стохастические дифференциальные уравнения</b>	<b>16</b>
3.1	Существование и единственность сильного решения . . . . .	16
3.2	Примеры . . . . .	21
3.3	Марковское свойство . . . . .	23
3.4	Формула Фейнмана–Каца . . . . .	24
3.5	Стохастическая экспонента . . . . .	28

# 1. Формула Ито

## Литература

- Оксендалль. Стохастические дифференциальные уравнения, гл. 4
- Булинский, Ширяев. Теория случайных процессов, гл. VIII

## 1.1. Формула Ито для броуновского движения

Теорема (**формула Ито**). Пусть  $f(t, x) \in C^{1,2}$ . Тогда п.н. для всех  $t \geq 0$

$$f(t, B_t) = f(0, 0) + \int_0^t \left( f'_t(s, B_s) + \frac{1}{2} f''_{xx}(s, B_s) \right) ds + \int_0^t f'_x(s, B_s) dB_s.$$

В сокращенной форме записи<sup>1</sup>:

$$df(t, B_t) = \left( f'_t(t, B_t) + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, B_t) \right) dt + f'_x(t, B_t) dB_t.$$

---

<sup>1</sup>Строгий смысл имеет только интегральная формула.

## Сущность формулы Ито

Формула Ито – это “разложение в ряд Тейлора” функции  $f(t, B_t)$  до членов порядка малости  $O(\Delta t)$ :

$$\begin{aligned} f(t + \Delta t, B_{t+\Delta t}) &= f(t, B_t) + f'_t(t, B_t)\Delta t + f'_x(t, B_t)\Delta B_t \\ &\quad + \frac{1}{2}f''_{xx}(t, B_t)(\Delta B_t)^2 + o(\Delta t), \end{aligned}$$

где  $\Delta B_t = B_{t+\Delta t} - B_t \approx O(\sqrt{\Delta t})$ .

## 1.2. Идея доказательства

### Полное доказательство

- Липцер, Ширяев. Статистика случайных процессов, § 4.3
- Введение в теорию мартингалов, лекция 11

**Лемма.** Пусть  $X_t$  – непрерывный согласованный процесс. Положим  $t_i = T \frac{i}{n}$ . Тогда

$$\sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \xrightarrow{\text{P}} \int_0^T X_t dt \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

**Доказательство.** Рассмотрим ограниченный процесс ( $|X_t| \leq c$  для всех  $t$ ), общий случай “получается локализацией”.

Пусть  $\Delta t = \frac{T}{n}$ . Так как  $\sum_i X_{t_i} \Delta t \rightarrow \int_0^T X_t dt$  п.н. (как интеграл Римана), то достаточно доказать

$$Z^n := \sum_{i=0}^n X_{t_i} ((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - \Delta t) \xrightarrow{\text{P}} 0.$$

Положим

$$X_t^n = \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} \mathbf{I}(t \in (t_i, t_{i+1}]), \quad B_t^n = \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i} \mathbf{I}(t \in (t_i, t_{i+1}]).$$

Из вычисления интеграла  $\int_0^t B_s dB_s$  следует, что

$$(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - \Delta t = 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} B_t dB_t - B_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

откуда

$$Z^n = 2 \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} \left( \int_{t_i}^{t_{i+1}} B_t dB_t - B_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \right) = 2 \int_0^T X_t^n (B_t - B_t^n) dB_t.$$

Из непрерывности и ограниченности  $X$ , подынтегральное выражение стремиться к 0 всюду и в  $L^2(\Omega \times [0, T])$ . Тогда  $Z^n \rightarrow 0$  в  $L^2(\Omega)$  (по изометрии Ито).

**Замечание.** Идея локализации состоит в следующем. Рассмотрим моменты остановки  $\tau_m = \inf\{t \geq 0 : |X_t| \geq m\} \rightarrow \infty$  п.н. и остановленные процессы  $X_t^m = Y_{t \wedge \tau_m}$ .

Для процессов  $X^m$  лемма верна (они ограничены), а также имеем при  $m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}^m (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 &\rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \text{ п.н.} \\ \int_0^T X_t^m dt &\rightarrow \int_0^T X_t dt \text{ п.н.} \end{aligned}$$

**Доказательство теоремы.** Рассмотрим только функции  $f(x) \in C^2$ .

Будем считать, что  $|f'(x)| \leq c$ , общий случай “получается локализацией”. Имеем

$$f(B_T) = f(B_0) + \sum_{i=0}^{n-1} \{f(B_{t_{i+1}}) - f(B_{t_i})\}.$$

Применяя формулу Тейлора,

$$f(B_T) - f(B_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ f'(B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \frac{1}{2}(f''(B_{t_i}) + \varepsilon_i)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right\},$$

где  $\varepsilon_i = f''(B_{\sigma_i}) - f''(B_{t_i})$  для некоторых  $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$ .

В силу дважды непрерывной дифференцируемости,  $\sup_i |\varepsilon_i| \rightarrow 0$  п.н. при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда

$$\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \xrightarrow{\text{P}} 0.$$

Положим

$$X_t^n = \sum_{i=0}^{n-1} f'(B_{t_i}) \mathbf{I}(t \in (t_i, t_{i+1}]) + f'(0) \mathbf{I}(t = 0).$$

Процесс  $X_t^n$  сходится к  $f'(B_t)$  всюду, и, следовательно, в  $L^2(\Omega \times [0, T])$ , т.к.  $f'$  ограничена.

Тогда

$$\sum_{i=0}^{n-1} f'(B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \int_0^T X_t^n dB_t \xrightarrow{L^2} \int_0^T f'_x(B_t) dB_t.$$

Наконец, по лемме

$$\sum_{i=0}^{n-1} f''(B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \xrightarrow{\text{P}} \int_0^T f''(B_t) dt.$$

### 1.3. Примеры

1. Имеем  $dB_t^2 = 2B_t dB_t + dt$ . Следовательно,

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{B_t^2 - t}{2}.$$

2. Рассмотрим процесс – **геометрическое броуновское движение**

$$S_t = se^{\sigma B_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}.$$

Применяя формулу Ито к

$$f(t, x) = se^{\sigma x + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t},$$

получаем что  $S_t$  удовлетворяет уравнению

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad S_0 = s.$$

## 2. Процессы Ито

Определение. Непрерывный согласованный процесс  $X_t$  называется **процессом Ито**, если он представим в виде

$$X_t = x + \int_0^t G_s ds + \int_0^t H_s dB_s, \quad t \in [0, T],$$

где  $G_s, H_s$  – некоторые интегрируемые случайные процессы (по Лебегу для п.в.  $\omega$  и по Ито, соответственно).

В дифференциальной форме записи

$$dX_t = G_t dt + H_t dB_t, \quad X_0 = x.$$

## Интеграл по процессу Ито

**Определение.** Для процесса  $V_t$  определим интеграл по процессу Ито  $X_t$  как процесс Ито

$$Y_t := \int_0^t V_s dX_s = \int_0^t V_s G_s ds + \int_0^t V_s H_s dB_s$$

(при условии, что интегралы корректно определены).

**Замечание.** Процесс  $A_t = \int_0^t G_s ds$  является процессом локально ограниченной вариации, а  $M_t = \int_0^t H_s dB_s$  является локальным мартингалом. Можно дать определения интегралов по таким процессам и в рассматриваемом случае они будут совпадать с определением выше.

(Подробнее см., например, лекции “Введение в теорию мартингалов”)

## 2.1. Формула Ито для процессов Ито

**Теорема.** Пусть  $X_t$  – процесс Ито,  $f(t, x) \in C^{1,2}$ . Тогда

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= f'_t(t, X_t)dt + f'_x(t, X_t)dX_t + f'_{xx}(t, X_t)(dX_t)^2 \\ &= \left( f'_t(t, X_t) + f'_x(t, X_t)G_t + \frac{1}{2}f''_{xx}(t, X_t)H_t^2 \right)dt + f'_x(t, X_t)H_t dB_t, \end{aligned}$$

где  $(dX_t)^2 = H_t^2 dt$ .

**Замечание.** Удобно запомнить формальное умножение дифференциалов:

$$dt \cdot dt = 0, \quad dt \cdot dB_t = 0, \quad dB_t \cdot dB_t = dt.$$

## 2.2. Пример: процесс Орнштейна–Уленбека

Процесс Орнштейна–Уленбека задается формулой

$$X_t = e^{-\mu t}x + \sigma e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu s} dB_s, \quad x > 0.$$

Применяя формулу Ито к  $f(t, Y_t)$

$$f(t, y) = e^{-\mu t}x + \sigma e^{-\mu t}y, \quad dY_t = e^{\mu t}dB_t, \quad Y_0 = 0,$$

получаем, что  $X_t$  удовлетворяет уравнению

$$dX_t = -\mu X_t dt + \sigma dB_t, \quad X_0 = x.$$

**Замечание.** Интерпретация – скорость частицы движущейся по прямой в среде с трением под действием случайной силы. Или процесс процентной ставки (модель Васичека).

## 2.3. Многомерный случай

Рассмотрим  $d$ -мерное броуновское движение  $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)$  с корреляционной матрицей  $\rho$ , т.е.

$$\mathbb{E}(B_t^i B_t^j) = \rho t.$$

**Упражнение.** Покажите, что для любой корреляционной матрицы соответствующее  $d$ -мерное броуновское движение существует.

Пусть  $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$  –  $d$ -мерный процесс Ито вида

$$dX_t^i = G_t^i dt + \sum_{j=1}^d H_t^{ij} dB_t^j,$$

где сумма дифференциалов понимается как сумма соответствующих интегралов, т.е.  $X_t^i = x^i + \int_0^t G_s^i ds + \sum_j \int_0^t H_s^{ij} dB_s^j$ .

**Замечание.** Об определении общего векторного интеграла см. Черный, Ширяев “Векторный стохастический интеграл и фундаментальные теоремы теории арбитража”, 2002.

**Теорема.** Пусть  $f(t, x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ . Тогда

$$df(t, X_t) = f'_t(t, X_t)dt + \sum_{i=1}^d f'_{x_i}(t, X_t)dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d f''_{x_i x_j}(t, X_t)dX_t^i dX_t^j,$$

где  $dX_t^i dX_t^j$  перемножается по правилу

$$dt \cdot dt = 0, \quad dt \cdot dB_t^i = 0, \quad dB_t^i dB_t^j = \rho_{ij} dt.$$

### 3. Стохастические дифференциальные уравнения

#### 3.1. Существование и единственность сильного решения

Пусть задано полное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  с броуновским движением  $B_t$ , измеримые функции  $a(t, x)$ ,  $b(t, x)$ , и  $\mathcal{F}_0$ -измеримая величина  $\xi$ .

**Определение.** *Сильным решением* стохастического дифференциального уравнения

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t, \quad X_0 = \xi, \quad (*)$$

называется непрерывный согласованный процесс  $X_t$  такой, что

$$\int_0^t |a(s, X_s)|ds < \infty, \quad \int_0^t b^2(s, X_s)ds < \infty \text{ для всех } t \geq 0.$$

и

$$X_t = \xi + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dB_s \text{ п.н. для всех } t \geq 0.$$

**Определение.** Говорят, что СДУ (\*) имеет **единственное сильное решение**, если для любых сильных решений  $X$  и  $\tilde{X}$  выполнено

$$X_t = \tilde{X}_t \text{ п.н. для всех } t \geq 0.$$

(и, следовательно, для п.в.  $\omega$  совпадают траектории  $X_t(\omega)$  и  $\tilde{X}_t(\omega)$ ).

**Упражнение.** Докажите, что для непрерывных процессов из равенства  $X_t = \tilde{X}_t$  п.н. для всех  $t$  следует совпадение траекторий п.н.

Аналогично определяется понятие сильного решения и сильной единственности в многомерном случае.

**Теорема (Ито).** Пусть для  $d$ -мерного СДУ

$$dX_t^i = a^i(t, X_t)dt + \sum_{j=1}^d b^{ij}(t, X_t)dB_t^j, \quad X_0^i = \xi^i, \quad (**)$$

существует константа  $C$  такая, что для всех  $x, y \in \mathbb{R}^d$ ,  $t \geq 0$  выполнено

$$\begin{aligned} \|a(t, x) - a(t, y)\| + \|b(t, x) - b(t, y)\| &\leq C\|x - y\|, \\ \|a(t, x)\| + \|b(t, x)\| &\leq C(1 + \|x\|), \end{aligned}$$

и  $\mathbf{E}\|\xi\|^2 < \infty$ . Тогда СДУ имеет единственное сильное решение.

**Замечание.** Броуновские движения  $B_t^j$  могут быть коррелированными.

## Идея доказательства

Полное доказательство: Булинский, Ширяев. Теория случайных процессов, § VIII.15.

Для простоты рассмотрим одномерный случай и  $a(x)$ ,  $b(x)$  не зависящие от  $t$ .

1. Определим последовательные приближения

$$X_t^{(0)} \equiv \xi, \quad X_t^{(n)} = \xi + \int_0^t a(X_s^{(n-1)}) ds + \int_0^t b(X_s^{(n-1)}) dB_s.$$

2. Доказывается оценка

$$\mathbb{E}(X_t^{(1)} - X_t^{(0)})^2 \leq K_1 t, \quad \mathbb{E}(X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)})^2 \leq K_2 \int_0^t \mathbb{E}(X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)})^2 ds,$$

откуда следует

$$\mathbb{E}(X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)})^2 \leq \frac{(K_3 t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

В частности, для каждого  $t \geq 0$  существует предел в  $L^2$

$$X_t^{(n)} \rightarrow X_t.$$

3. Используя неравенство Дуба для мартингалов, лемму Бореля-Кантелли, и оценки из пункта 2, доказывается, что последовательность  $X^{(n)}$  п.н. фундаментальна в пространстве  $C([0, T])$  по метрике

$$d(f, g) = \sup_{t \in [0, T]} |f(t) - g(t)|.$$

Следовательно,  $X_t^{(n)}$  сходится равномерно п.н. значит процесс  $X_t$  непрерывен.

4. Из полученных оценок и условия Липшица на  $a, b$  доказывается сходимость в  $L^2$  для каждого  $t \geq 0$

$$\int_0^t b(s, X_s^{(n)}) dB_s \rightarrow \int_0^t b(s, X_s) dB_s, \quad \int_0^t a(s, X_s^{(n)}) dB_s \rightarrow \int_0^t a(s, X_s) dB_s,$$

откуда следует, что  $X_t$  является решением.

5. Для доказательства единственности устанавливается оценка ( $X, \tilde{X}$  – два решения)

$$\mathbb{E}(X_t - \tilde{X}_t)^2 \leq K_4 \int_0^t \mathbb{E}(X_s - \tilde{X}_s)^2 ds.$$

Тогда по лемме Гронуолла  $\mathbb{E}(X_t - \tilde{X}_t)^2 = 0$ , значит  $X_t = \tilde{X}_t$  п.н.

### 3.2. Примеры

Решения существуют и единственны по теореме Ито:

1. Геометрическое броуновское движение
2. Процесс Орнштейна–Уленбека
3. Броуновский мост

$$dX_t = -\frac{X_t}{1-t}dt + dB_t, \quad X_0 = 0, \quad t \in [0, 1).$$

Решение (проверяется по формуле Ито):

$$X_t = (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-s} dB_s.$$

**Упражнение.** Докажите, что

1.  $X_t \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 1$ ;
2. Решение по распределению совпадает с процессом  $X'_t = B_t - tB_1$  (докажите, что процесс  $X_t$  гауссовский и найдите ковариационную функцию).

4. Решения не существует:

$$dX_t = -\operatorname{sgn}(X_t)dt, \quad X_0 = 0, \quad \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x \leq 0. \end{cases}$$

5. Существует сильное решение:

$$dX_t = -\operatorname{sgn}(X_t)dt + \sigma dB_t, \quad \sigma > 0.$$

Существование следует из теоремы Звонкина.

6. Сильного решения не существует, но “слабое” решение существует:

$$dX_t = \operatorname{sgn}(X_t)dB_t, \quad X_0 = 0.$$

Здесь решение является броуновским движением (по распределению), отличным от  $B_t$ .

Доказательства для этих примеров можно найти в Cherny, Engelbert, *Singular Stochastic Differential Equations*, § 1.2-1.3.

### 3.3. Марковское свойство

**Определение.** Согласованный процесс  $X_t$  называется **марковским**, если для любых  $t > s$  и события  $A \in \sigma(X_u, u \geq s)$  выполнено

$$P(A | \mathcal{F}_s) = P(A | X_s) \text{ п.н.}$$

**Теорема.** Пусть СДУ (в т.ч. многомерное) удовлетворяет условиям теоремы Ито о существовании и единственности. Тогда решение  $X_t$  является марковским процессом.

В частности, для любого  $T \geq 0$  и любой измеримой функции  $f(x)$ ,  $E|f(X_T)| < \infty$ , найдется функция  $g(t, x)$  такая, что

$$E(f(X_T) | \mathcal{F}_t) = g(t, X_t) \text{ п.н., } t \in [0, T].$$

**Доказательство.** Булинский, Ширяев, Теория случайных процессов, Теорема VIII.9.

### 3.4. Формула Фейнмана–Каца

Пусть заданы:

1. СДУ, которое удовлетворяет условиям теоремы Ито о существовании и единственности решения:

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t,$$

2. функция  $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$  такая, что для некоторой константы  $C$

$$|f(x)| \leq C(1 + x^2),$$

3. функция

$$v(t, x) = e^{-r(T-t)} \mathbf{E}_{t,x} f(X_T),$$

где  $r \in \mathbb{R}$  и  $\mathbf{E}_{t,x}(\cdot) = \mathbf{E}(\cdot \mid X_t = x)$ .

**Теорема.** При выполнении указанных условий,  $v(t, x)$  является непрерывной на  $[0, T] \times \mathbb{R}$  и  $v \in C^{1,2}([0, T) \times \mathbb{R})$  и является решением задачи Коши

$$\begin{cases} v'_t(t, x) + a(t, x)v'_x(t, x) + \frac{b^2(t, x)}{2}v''_{xx}(t, x) = rv(t, x), & t \in [0, T), \quad x \in \mathbb{R}^d \\ v(T, x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

**Замечание.** Справедливо также следующее обобщение: функция

$$v(t, x) = \mathbb{E}_{t,x} \left( f(X_T) e^{-\int_t^T r(u, X_u) du} + \int_t^T g(s, X_s) e^{-\int_t^s r(u, X_u) du} ds \right)$$

является решением задачи Коши

$$\begin{cases} v'_t + av'_x + \frac{b}{2}v''_{xx} = rv - g \\ v(T, x) = f(x) \end{cases}$$

## Идея доказательства

### Полное доказательство

- Оксендалль. Стохастические дифференциальные уравнения, § 8.2
- Karatzas, Shreve. Brownian motion and stochastic calculus, § 5.7.D

Рассмотрим процесс

$$Z_t = e^{-rt} v(t, X_t) = e^{-rT} \mathbb{E}(f(X_T) | X_t).$$

Тогда  $Z_t$  является мартингалом, так как

$$\mathbb{E}(Z_t | \mathcal{F}_s) = e^{-rT} \mathbb{E}(\mathbb{E}(f(X_T) | \mathcal{F}_t) | \mathcal{F}_s) = e^{-rT} \mathbb{E}(f(X_T) | \mathcal{F}_s) = v(s, X_s).$$

По формуле Ито

$$dZ_t = d(e^{-rt} v(t, X_t)) = \left( -rv + v'_t + av'_x + \frac{b^2}{2} v''_{xx} \right)(t, X_t) dt + (bv'_x)(t, X_t) dB_t.$$

Для мартингальности необходимо, чтобы коэффициент сноса был равен 0 для всех  $t, x$ , откуда следует утверждение теоремы.

## Пример: обратное уравнение теплопроводности

Решением уравнения

$$\begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(T, x) = f(x) \end{cases}$$

является

$$v(t, x) = \mathbb{E}_{t,x} f(X_T),$$

где  $X_T$  – броуновское движение, которое в момент  $t$  начинается из точки  $x$ ,  
т.е.

$$v(t, x) = \mathbb{E} f(B_{T-t} + x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y + x)}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{y^2}{2(T-t)}} dy.$$

### 3.5. Стохастическая экспонента

**Теорема.** Для любого процесса Ито  $X_t$  ( $dX_t = G_t dt + H_t dB_t$ ) существует единственное решение уравнения

$$dY_t = Y_t dX_t, \quad Y_0 = 1,$$

которое задается формулой

$$Y_t = \exp\left(X_t - X_0 - \frac{1}{2} \int_0^t H_s^2 ds\right).$$

и называется **стохастической экспонентой**  $X_t$ . Обозначение:  $Y = \mathcal{E}(X)$ .

**Доказательство.** Решение проверяется по формуле Ито. Единственность – см. Жакод, Ширяев, *Предельные теоремы для случайных процессов*, § I.4f.

**Замечание.** Стохастическая экспонента существует для любого семимартингала  $X_t$  – см. Жакод, Ширяев.

# Модели стохастической волатильности

Лекция 4: Модель Блэка–Шоулса

Михаил Житлухин

## Содержание

<b>1 Модель Блэка–Шоулса для рынка акций</b>	<b>3</b>
1.1 Процессы цен и стратегии . . . . .	3
1.2 Уравнение и формула Блэка–Шоулса . . . . .	8
1.3 Качественные свойства цен опционов по формуле Блэка–Шоулса . .	13
1.4 Предполагаемая волатильность . . . . .	15
<b>2 Модель Блэка для рынка фьючерсов</b>	<b>17</b>
2.1 Принцип расчетов по фьючерсу . . . . .	17
2.2 Справедливая цена фьючерса на акцию . . . . .	19
2.3 Модель фьючерсного рынка . . . . .	21
2.4 Уравнение и формула Блэка . . . . .	23
<b>3 Упражнения</b>	<b>26</b>
3.1 Модель Блэка–Шоулса с дивидендами . . . . .	26
3.2 Опционы с фьючерсным типом расчетов . . . . .	27
<b>Литература</b>	<b>29</b>

## 1. Модель Блэка–Шоулса для рынка акций

Задано пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T, P)$  и броуновское движение  $W_t$  на нем.  
Считаем  $\mathcal{F}_0 = \overline{\{\emptyset, \Omega\}}$ .

### 1.1. Процессы цен и стратегии

Два актива: безрисковый  $B_t$  и рисковый  $S_t$  (акция) с ценами

$$\begin{aligned} dB_t &= rB_t dt, & B_0 &= 1 && \text{(т.е. } B_t = e^{rt}), \\ dS_t &= S_t(\mu dt + \sigma dW_t), & S_0 &> 0. \end{aligned}$$

Предположения (см. статью Блэка и Шоулса):

1. Разрешены короткие продажи.
2. Нет транзакционных издержек, активы безгранично делимы.
3. Нет дивидендов.
4. Нет арбитражных возможностей.
5. Торговля ведется непрерывным образом.
6.  $\mu, r, \sigma$  постоянны.

**Определение.** Портфелем (стратегией) называется предсказуемый процесс  $\pi_t = (G_t, H_t)$ , где  $G_t, H_t$  – количество безрискового и рискового актива в портфеле момент  $t$ , такой, что

$$\int_0^T |G_t| dt < \infty, \quad \int_0^T H_t^2 dt < \infty \quad \text{п.н.}$$

Стоимостью портфеля называется процесс

$$V_t^\pi = G_t B_t + H_t S_t.$$

Портфель называется самофинансируемым, если

$$dV_t^\pi = G_t dB_t + H_t dS_t,$$

и называется допустимым, если  $V_t^\pi \geq -c$  п.н. для всех  $t$ , где  $c \in \mathbb{R}$ .

Далее все портфели считаются самофинансируемыми и допустимыми.

**Предложение.** Пусть  $\int_0^T H_t^2 dt < \infty$  п.н. Тогда для любого  $v_0$  стратегия  $\pi_t = (G_t, H_t)$ , где

$$G_t = v_0 + \int_0^t H_u dS_u^* - H_t S_t^*, \quad S_t^* = \frac{S_t}{B_t},$$

является самофинансируемой и  $V_0^\pi = v_0$ . При этом

$$V_t^\pi = B_t \left( v_0 + \int_0^t H_u dS_u^* \right), \quad G_t = \frac{V_t^\pi - H_t S_t}{B_t}.$$

**Замечание.**  $S_t^*$  называется дисконтированной ценой.

**Доказательство.** Обозначим  $V_t^{\pi,*} = V_t^\pi / B_t = G_t + H_t S_t^*$ . Тогда условия самофинансируемости эквивалентно

$$dV_t^{\pi,*} = H_t dS_t^*.$$

(проверяется по формуле Ито). Видно, что стратегия  $(G_t, H_t)$  ему удовлетворяет.

**Упражнение.** Покажите, что  $\int_0^T |G_t| dt < \infty$  п.н.

**Определение.** Платежное обязательство (дерииватив) Европейского типа отождествляется с функцией выплаты  $\mathcal{F}_T$ -измеримой случайной величиной

$$X = g(S_T),$$

которая равна выплате, которую продавец обязательства платит покупателю в момент  $T$ , где  $g$  – некоторая функция (может быть  $g(s) < 0$ ).

**Пример.** Для опционов колл и пут

$$g_c(s) = (s - K)^+, \quad g_p(s) = (K - s)^+.$$

**Определение.** Говорят, что стратегия  $\pi$  **реплицирует** (воспроизводит) платежное обязательство  $X$ , если

$$V_T^\pi = X \text{ п.н.}$$

**Определение.** Справедливой ценой реплицируемого платежного обязательства  $X$  в момент  $t$  называется стоимость портфеля реплицирующей стратегии

$$V_t(X) = V_t^\pi.$$

**Замечание.** Нужно еще показать, что цена  $V_t^\pi$  одинакова для всех реплицирующих стратегий (это верно в силу безарбитражности модели).

**Упражнение.** Условие допустимости легко приводит к существованию нереплицируемых  $X$  (приведите пример). Но отказаться от условия допустимости нельзя, так как иначе возникнет арбитраж (приведите пример). Его можно ослабить, например, до  $V_t^\pi \geq -Y$ , где  $E|Y| < \infty$ .

## 1.2. Уравнение и формула Блэка–Шоулса

**Теорема.** Пусть  $0 \leq g(s) \leq (1 + s)^p$  для  $p \geq 1$  и всех  $s > 0$ . Тогда цена платежного обязательства  $X = g(S_T)$  имеет вид  $V_t(X) = V(t, S_t)$ , где  $V(t, s)$  является решением задачи Коши

$$V'_t(t, s) + rsV'_s(t, s) + \frac{\sigma^2}{2}s^2V''_{ss}(t, s) = rV(t, s), \quad t \in [0, T], \quad s > 0 \quad (1)$$

$$V(T, s) = g(s), \quad s > 0, \quad (2)$$

а реплицирующая стратегия  $\pi_t = (G_t, H_t)$  имеет вид

$$H_t = V'_s(t, S_t). \quad (3)$$

**Замечание.** 1. Коэффициент сноса  $\mu$  не входит в уравнение.

2.  $G_t$  находится по формуле  $G_t = (V(t, S_t) - V'_s(t, S_t)S_t)/B_t$ , что следует из предложение выше.

## Идея доказательства

Из марковского свойства будем искать цену в виде  $V(t, S_t)$ .

Если  $\pi_t = (G_t, H_t)$  реплицирует  $X$ , то должно выполняться  $V_t^\pi = V(t, S_t)$ .  
Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= d(V_t^\pi - V(t, S_t)) = [\text{самофинансирование} + \text{формула Ито}] \\ &= G_t dB_t + H_t dS_t - V'_t(t, S_t)dt - V'_s(t, S_t)dS_t - \frac{1}{2}V''_{ss}(t, S_t)(dS_t)^2 \\ &= \left( rG_t B_t + \mu S_t(H_t - V'_s(t, S_t)) - V'_t(t, S_t) - \frac{\sigma^2}{2}V''_s(t, S_t)S_t^2 \right) dt \\ &\quad + \sigma S_t(H_t - V'_s(t, S_t))dW_t \end{aligned}$$

Если приравнять коэффициенты к нулю для всех  $(t, s)$  и подставить  $G_t B_t = V(t, S_t) - V'_s(t, S_t)S_t$ , то получим (1) и (3). Условие (2) очевидно.

## Доказательство

Существование решения задачи Коши (1)–(2) следует из общей теории. Возьмем самофинансируемую стратегию  $\pi_t = (G_t, H_t)$  с  $H_t = V'_s(t, S_t)$  и  $V_0^\pi = V(0, S_0)$ .

Используя формулу Ито и условие самофинансируемости (см. пред. стр.):

$$\begin{aligned} & d(V_t^\pi - V(t, S_t)) \\ &= \left( rG_t B_t + \mu S_t (H_t - V'_s(t, S_t)) - V'_t(t, S_t) - \frac{\sigma^2}{2} V''_s(t, S_t) S_t^2 \right) dt \\ &\quad + \sigma S_t (H_t - V'_s(t, S_t)) dW_t \\ &= \left( rV(t, S_t) - rV'_s(t, S_t) S_t - V'_t(t, S_t) - \frac{\sigma^2}{2} V''_s(t, S_t) S_t^2 \right) dt = 0. \end{aligned}$$

Следовательно  $V_t^\pi = V(t, S_t)$  для всех  $t$ . Из условия (2) следует, что  $\pi$  воспроизводит  $X$ .

**Следствие.** В условиях теоремы

$$V(t, s) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}(g(Y_T) \mid Y_t = s),$$

где  $dY_t = rY_t dt + \sigma Y_t dW_t$ .

**Доказательство.** По формуле Фейнмана–Каца.

**Замечание.** Формулу для цены  $V(t, s)$  можно записать по-другому:

$$V(t, s) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q(g(S_T) \mid S_t = s),$$

где вероятностная мера  $Q \sim P$  такова, что процесс  $S_t$  удовлетворяет уравнению

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\widetilde{W}_t,$$

где  $\widetilde{W}_t$  – броуновское движение относительно  $Q$ . Мера  $Q$  называется **эквивалентной маргинальной мерой** и характеризуется тем свойством, что относительно нее

$S_t^* = \frac{S_t}{B_t}$  является мартингалом ( $dS_t^* = \sigma S_t^* d\widetilde{W}_t$ ).

(Более подробно в следующих лекциях.)

**Следствие (формула Блэка–Шоулса).** Цены Европейских опционов колл и пут со страйком  $K$ , временем до исполнения  $T$ , ценой акции  $S$ , имеют вид

$$C = S\Phi(d_1) - e^{-rT}K\Phi(d_2), \quad P = e^{-rT}K\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1),$$

где  $\Phi(x)$  – стандартная нормальная функция распределения, и

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left( \ln \frac{S}{K} + \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right), \quad d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left( \ln \frac{S}{K} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right).$$

**Доказательство.** Вычисление ожиданий интегрированием по нормальной плотности.

### 1.3. Качественные свойства цен опционов по формуле Блэка–Шоулса

Свойства  $C$  как функции от  $S$  (при  $T > 0$ ):

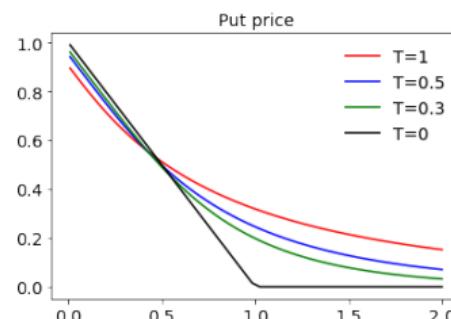
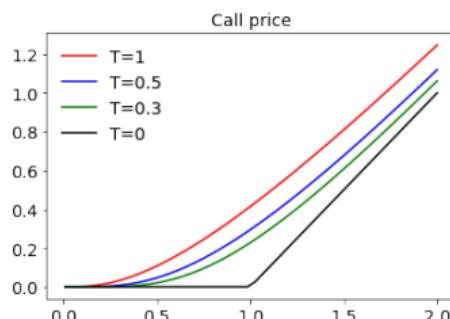
строго возрастает, строго выпукла,  $C > (S - e^{-rT}K)^+ \geq (S - K)^+$ ,

$C \rightarrow 0$  при  $S \rightarrow 0$ ,  $C - (S - e^{-rT}K) \rightarrow 0$  при  $S \rightarrow \infty$ .

Свойства  $P$  как функции от  $S$  (при  $T > 0$ ):

строго убывает, строго выпукла,  $P > (e^{-rT}K - S)^+$ ,

$P \rightarrow e^{-rT}K$  при  $S \rightarrow 0$ ,  $P \rightarrow 0$  при  $S \rightarrow \infty$ .



Монотонность по параметрам:

	$K$	$T$	$S$	$\sigma$
$C$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
$P$	$\uparrow$	$\uparrow (*)$	$\downarrow$	$\uparrow$

$\uparrow$  – возрастает  
 $\downarrow$  – убывает

(\*) цена опциона пут обычно убывает при уменьшении времени до экспирации, за исключением опционов пут глубоко в деньгах ( $S < K$ ) при  $r > 0$ .

**Предложение.** Для опционов колл и пут

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = \frac{\partial P}{\partial \sigma} = S\varphi(d)\sqrt{T}.$$

В частности  $C$  и  $P$  строго возрастают по  $\sigma$ .

## 1.4. Предполагаемая волатильность

Определение. Предполагаемой волатильностью (implied volatility) опциона колл с параметрами  $T, K$  и рыночной ценой  $\hat{C} > 0$  называется величина  $\hat{\sigma}$  такая, что

$$\hat{C} = C(T, K, S, r, \hat{\sigma}), \quad (4)$$

где  $C$  – функция из формулы Блэка–Шоулса.

(Аналогично для опциона пут.)

Упражнение. Найдите значения  $\hat{C}$ , для которых уравнение (4) имеет единственное решение (найдите  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} C$  и  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} C$ ).

Эмпирический факт: предполагаемая волатильность  $\hat{\sigma}$  разная для разных опционов на один и тот же базовый актив (т.е. зависит от  $T$  и  $K$ ) и, кроме того, она меняется со временем.

## Численное нахождение предполагаемой волатильности

Для фиксированных  $T, K, S, r$  уравнение  $\hat{C} = C(\sigma)$  можно численно решить, например, методом Ньютона:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{f(\sigma_n)}{f'(\sigma_n)}, \quad f(\sigma) = C(\sigma) - \hat{C}.$$

Тогда  $\sigma_n \rightarrow \hat{\sigma}$  при некоторых условиях.

Начальное приближение  $\sigma_0$  можно выбрать по формуле

$$\sigma_0 = \frac{\hat{C}}{S} \sqrt{\frac{2\pi}{T}},$$

которая получается из разложения  $\Phi(x)$  в формуле для  $C(\sigma)$  в ряд Тейлора до первого члена в окрестности  $S = e^{-rT}K$ .

(Brenner, Subrahmanyam "A simple formula to compute the implied standard deviation", 1988; см. Musiela, Rutkowski, *Martingale Methods in Financial Modelling*, § 7.1.4).

## 2. Модель Блэка для рынка фьючерсов

### 2.1. Принцип расчетов по фьючерсу

Фьючерс – это контракт на поставку актива  $S$  в момент исполнения  $T$ .

Принцип расчета – ежедневное перечисление прибыли или убытка из-за изменения фьючерсной цены в размере

$$M_t = F_t - F_{t-1} \quad (\text{для покупателя фьючерса}),$$

где  $F_t$  – фьючерсная цена в день  $t$  (цена последней сделки), и  $F_T = S_T$ .

Замечание. Базовый актив  $S$  не обязательно является торгуемым. Например, он может быть индексом.

## Пример



Прибыль покупателя:  $M_2 + M_3 - M_4 = F_{t_2} - F_{t_1}$ .

## 2.2. Справедливая цена фьючерса на акцию

**Определение.** Справедливая фьючерсная цена – это процесс Ито  $F_t$  такой, что  $F_T = S_T$ , где  $T$  – время исполнения фьючерса, и существует предсказуемые процессы  $G_t, H_t$  такие, что

$$G_t B_t + H_t S_t = 0, \quad dF_t = G_t dB_t + H_t dS_t.$$

**Интерпретация:** портфель  $(G_t, H_t)$  (вообще, не самофинансируемый) реплицирует фьючерс в том смысле, что

- его стоимость равна 0 (так как фьючерсную позицию можно открыть/закрыть бесплатно),
- его денежный поток равен денежному потоку фьючерса  $dF_t$ .

**Предложение.** Справедливая цена фьючерса с временем исполнения  $T$  равна

$$F_t = e^{r(T-t)} S_t.$$

**Идея доказательства.** Будем искать  $F_t$  в виде  $F(t, S_t)$ . Применяя формулу Ито и приравнивая коэффициенты при  $dt$  и  $dW_t$  получаем

$$\begin{aligned} F'_t + \mu S_t F'_s + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 F''_{ss} &= r B_t G_t + \mu S_t H_t \quad (\text{при } dt), \\ \sigma S_t F'_s &= \sigma S_t H_t \quad (\text{при } dW_t). \end{aligned}$$

Подставляя второе уравнение в первое и используя условие  $G_t B_t = -H_t S_t$  получаем

$$F'_t + r F'_s S_t + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 F''_{ss} = 0.$$

Очевидно, что  $F(t, s) = e^{r(T-t)} s$  удовлетворяет этому уравнению и условию  $F(T, s) = s$ .

**Упражнение.** Приведите строгое доказательство (аналогично уравнению Блэка–Шоулса).

## 2.3. Модель фьючерсного рынка

Рынок из безрискового актива  $B$  и фьючерса  $F$  с временем исполнения  $T_f$ :

$$\begin{aligned} dB_t &= rB_t dt, & B_0 &= 1, \\ dF_t &= F_t(\mu dt + \sigma dW_t), & F_0 &> 0 \end{aligned}$$

(фьючерс может быть не на акцию, его цена – самостоятельный процесс).

**Определение.** Портфелем (самофинансируемым и допустимым) называется предсказуемый процесс  $\pi_t = (G_t, H_t)$ , удовлетворяющий условиям

$$\begin{aligned} \int_0^{T_f} |G_t| dt &< \infty, & \int_0^{T_f} H_t^2 dt &< \infty \quad \text{п.н.,} \\ dV_t^\pi &= G_t dB_t + H_t dS_t, \\ V_t^\pi &\geq -c \quad \text{п.н. для всех } t \in [0, T_f], \end{aligned}$$

где стоимость портфеля  $V_t^\pi = G_t B_t$ .

**Определение.** Платежное обязательство европейского типа с временем исполнения  $T$  на фьючерс с временем исполнения  $T_f \geq T$  отождествляется с  $\mathcal{F}_T$ -измеримой величиной

$$X = g(F_T).$$

Ценой репликации называется стоимость реплицирующего портфеля

$$V_t(X) = V_t^\pi, \quad V_T^\pi = X.$$

**Пример.** Для опциона колл на фьючерс  $g(f) = (f - K)^+$ . При исполнении опциона его покупатель платит  $K$  и получает фьючерс. Аналогично для опциона пут.

## 2.4. Уравнение и формула Блэка

**Теорема.** Цена платежного обязательства  $X = g(F_T)$ ,  $0 \leq g(x) \leq (1 + |x|)^p$ , имеет вид  $V_t(X) = V(t, F_t)$ , где

$$\begin{aligned}V'_t(t, f) + \frac{\sigma^2}{2} f^2 V''_{ff}(t, f) &= rV(t, f) & t \in [0, T), \quad f > 0 \\V(T, f) &= g(f), & f > 0.\end{aligned}$$

В реплицирующей стратегии  $\pi = (G_t, H_t)$  процесс  $H_t = V'_f(t, F_t)$ .

**Идея доказательства.** Аналогично идеи доказательства уравнения Блэка–Шоулса:

$$\begin{aligned}0 &= d(V_t^\pi - V(t, F_t)) = [\text{самофинансирование} + \text{формула Ито}] \\&= G_t dB_t + H_t dF_t - V'_t dt - V'_f dF_t - \frac{1}{2} V''_{ff} (dF_t)^2 \\&= \left( rG_t B_t + \mu F_t (H_t - V'_f) - V'_t - \frac{\sigma^2}{2} V''_{ff} F_t^2 \right) dt + \sigma F_t (H_t - V'_f) dW_t.\end{aligned}$$

Далее нужно учесть, что  $G_t B_t = V(t, F_t)$  и приравнять коэффициенты к нулю.

**Следствие.** В условиях теоремы

$$V(t, f) = e^{-r(T-t)} \mathbf{E}^Q(g(F_T) \mid F_t = f),$$

где относительно меры  $Q \sim P$  процесс  $F_t$  является мартингалом

$$dF_t = \sigma F_t d\widetilde{W}_t.$$

**Замечание.** Если на рынке присутствуют акция и фьючерс на нее, то относительно одной и той же мартингальной меры  $Q$

$$S_t^* = \frac{S_t}{B_t} \text{ и } F_t = \frac{B_T}{B_t} S_t \text{ являются мартингалами.}$$

**Следствие (формула Блэка).** Цены европейских опционов колл и пут со страйком  $K$ , временем до исполнения  $T$  на фьючерс с ценой  $F$  и временем до исполнения  $T_f \geq T$  имеют вид

$$C = e^{-rT}(F\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)), \quad P = e^{-rT}(K\Phi(-d_2) - F\Phi(-d_1)),$$

где

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left( \ln \frac{F}{K} + \frac{\sigma^2}{2} T \right), \quad d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left( \ln \frac{F}{K} - \frac{\sigma^2}{2} T \right).$$

### 3. Упражнения

#### 3.1. Модель Блэка–Шоулса с дивидендами

Пусть цены  $B_t, S_t$  такие же, как в модели Блэка–Шоулса, но акция платит дивиденды с постоянной доходностью  $q$ . Тогда считается, что для самофинансируемого портфеля  $\pi_t = (G_t, H_t)$

$$\begin{aligned}V_t^\pi &= G_t B_t + H_t S_t, \\dV_t^\pi &= G_t dB_t + H_t dS_t + q H_t S_t dt.\end{aligned}$$

**Упражнение.** Докажите, что цены опционов колл и пут имеют вид

$$C = e^{-qT} S \Phi(d_1) - e^{-rT} K \Phi(d_2), \quad P = e^{-rT} K \Phi(-d_2) - e^{-qT} S \Phi(-d_1),$$

где

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left( \ln \frac{S}{K} + \left( r - q + \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right), \quad d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left( \ln \frac{S}{K} + \left( r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right).$$

### 3.2. Опционы с фьючерсным типом расчетов

Рассмотрим рынок из безрискового актива  $B$  и фьючерса  $F$ .

Для опциона с фьючерсным типом расчетов (**маржируемый опцион**) ежедневно начисляется изменение стоимости опциона.

Цена маржируемого опциона колл с временем исполнения  $T$  на фьючерс  $F$  – это процесс  $C_t$  такой, что  $C_T = (F_T - K)^+$  и существуют предсказуемые процессы  $G_t, H_t$  такие, что

- стоимость портфеля  $(G_t, H_t)$  равна 0,
- денежный поток портфеля  $(G_t, H_t)$  равен денежному потоку опциона.

Аналогично определяется цена маржируемого опциона пут  $P_t$ .

**Упражнение.** Докажите, что для реплицирующего портфеля  $G_t = 0$ , а цены опционов имеют вид

$$C_t = F_t \Phi(d_{1,t}) - K \Phi(d_{2,t}), \quad P_t = K \Phi(-d_{2,t}) - F_t \Phi(-d_{1,t})$$

где

$$d_{1,t} = \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} \left( \ln \frac{F_t}{K} + \frac{\sigma^2}{2} (T-t) \right), \quad d_{2,t} = \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} \left( \ln \frac{F_t}{K} - \frac{\sigma^2}{2} (T-t) \right)$$

(величина  $r$  в формулы не входит).

## Литература

### Статьи:

1. Black, Scholes, "The pricing of options and corporate liabilities", 1973.
2. Merton, "Theory of rational option pricing", 1973 (см. разделы 6, 7).
3. Black, "The pricing of commodity contracts", 1976.

### Современное изложение:

Musiela, Rutkowski, *Martingale methods in Financial Modelling*, § 3.1, 3.4.

# Модели стохастической волатильности

Лекция 5: Мартингальные методы в финансовой математике

Михаил Житлухин

## Содержание

<b>1 Теория арбитража</b>	<b>3</b>
1.1 Модель рынка . . . . .	3
1.2 Арбитраж и мартингальные меры – основные идеи (нестрого) . . . . .	5
1.3 Арбитраж и мартингальные меры – детали . . . . .	7
1.4 Первая фундаментальная теорема . . . . .	9
<b>2 Теорема Гирсанова</b>	<b>10</b>
2.1 Формулировка и доказательство . . . . .	10
2.2 Пример . . . . .	13
2.3 Многомерная теорема Гирсанова . . . . .	14
2.4 Условие Новикова . . . . .	15
<b>3 Полные и неполные рынки</b>	<b>16</b>
3.1 Теорема о мартингальном представлении . . . . .	16
3.2 Полный рынок . . . . .	18
3.3 Безарбитражные цены . . . . .	20
<b>4 Дополнение: эквивалентность вероятностных мер</b>	<b>21</b>
4.1 Свойства эквивалентных мер . . . . .	22
4.2 Процесс плотности эквивалентных мер . . . . .	23

# 1. Теория арбитража

## 1.1. Модель рынка

Задано пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T, P)$  и  $d$ -мерное броуновское движение  $W_t$  (возможно, с коррелированными компонентами). Считаем  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ .

Рынок состоит из 1 безрискового актива и  $n$  рисковых активов с ценами:

$$\begin{aligned} dB_t &= r_t B_t dt, & B_0 &= 1, \\ dS_t^i &= \mu_t^i dt + \sigma_t^i \cdot dW_t, \end{aligned}$$

где  $r_t \in [-a, \infty)$ ,  $\mu_t \in \mathbb{R}^n$ ,  $\sigma_t \in \mathbb{R}^{n \times d}$  – предсказуемые процессы для которых соответствующие интегралы корректно определены.

**Замечание.** Точка означает скалярное произведение, т.е.  $\sigma_t^i \cdot dW_t = \sum_{j=1}^d \sigma_t^{ij} dW_t^j$ .

**Определение.** Стратегия – предсказуемый процесс  $\pi_t = (G_t, H_t^1, \dots, H_t^n)$ , для которого определены интегралы

$$\int_0^t G_u dB_u, \quad \int_0^t H_u^i dS_u^i, \quad t \in [0, T].$$

Стоимостью портфеля стратегии называется процесс

$$V_t^\pi = G_t B_t + H_t \cdot S_t.$$

Стратегия называется самофинансируемой, если

$$dV_t^\pi = G_t dB_t + H_t \cdot dS_t,$$

и называется допустимой, если  $V_t^\pi \geq -c$  п.н. для всех  $t$ , где  $c \in \mathbb{R}$ .

Далее все стратегии считаются самофинансируемыми и допустимыми.

## 1.2. Арбитраж и мартингальные меры – основные идеи (нестрого)

Детали и строгие утверждения: Eberlein, Kallsen, *Mathematical Finance*, Ch. 11.7

Определение. Отсутствие арбитража (NA, no arbitrage) означает, что не существует стратегии  $\pi_t$  такой, что

1.  $V_0^\pi = 0$  п.н.,
2.  $V_T^\pi \geq 0$  п.н.,
3.  $P(V_T^\pi > 0) > 0$ .

Определение. Эквивалентной мартингальной мерой (ЭММ) называется вероятностная мера  $Q \sim P$  такая, что дисконтированные цены

$$S_t^{*,i} = \frac{S_t^i}{B_t} \text{ являются мартингалами по } Q, \quad i = 1, \dots, n.$$

## Главные результаты теоретической финансовой математики

1. Отсутствие арбитража эквивалентно существованию ЭММ ("первая фундаментальная теорема")
2. Справедливая цена реплицируемого платежного обязательства  $X$ :

$$V_t(X) = B_t \mathbb{E}^Q \left( \frac{X}{B_T} \mid \mathcal{F}_t \right) \quad (\text{ожидание по любой ЭММ } Q)$$

3. Интервал справедливых цен для нереплицируемого обязательства  $X$ :

$$\left( \inf_Q \mathbb{E}^Q \left( \frac{X}{B_T} \mid \mathcal{F}_t \right), \sup_Q \mathbb{E}^Q \left( \frac{X}{B_T} \mid \mathcal{F}_t \right) \right)$$

4. Безарбитражный рынок является полным, т.е. любое платежное обязательство воспроизводимо тогда и только тогда, когда ЭММ единственна ("вторая фундаментальная теорема")

**Замечание.** Все утверждения выше даны в нестрогой формулировке.

### 1.3. Арбитраж и мартингальные меры – детали

#### Литература

1. Eberlein, Kallsen. *Mathematical Finance*, Ch. 11.7
2. Ширяев. *Основы стохастической финансовой математики*, гл. VII.
3. Delbaen, Schachermayer. A general version of the fundamental theorem of asset pricing.

**Определение.** Отсутствие бесплатного ланча с исчезающим риском (NFLVR, no free lunch with vanishing risk), означает, что не существует последовательности  $X^n \in L^\infty(\mathcal{F}_T)$  такой, что

1.  $X^n \leq V_T^{\pi^n}$  п.н. для некоторых стратегий  $\pi^n$ ,  $V_0^{\pi^n} = 0$ ,
2.  $X^n \rightarrow X$  в  $L^\infty(\mathcal{F}_T)$ ,
3.  $X \geq 0$  п.н.,
4.  $P(X > 0) > 0$ .

**Предложение.** NFLVR  $\implies$  NA.

**Определение.** Эквивалентной локальной мартингальной мерой (ЭЛММ) называется вероятностная мера  $Q \sim P$  такая, что дисконтированная цена

$$S_t^{*,i} = \frac{S_t^i}{B_t} \text{ является локальным мартингалом по } Q, \quad i = 1, \dots, n.$$

**Эквивалентное определение.** ЭЛММ называется вероятностная мера  $Q \sim P$  такая, что для любой стратегии  $\pi_t$  дисконтированный капитал

$$V_t^{*,\pi} = \frac{V_t^\pi}{B_t} \text{ является локальным мартингалом по } Q.$$

**Доказательство эквивалентности.** Имеем  $dV_t^{*,\pi} = H_t \cdot dS_t^*$ , что следует из равенств

$$dV_t^{*,\pi} = V_t^\pi dB_t^{-1} + B_t^{-1} dV_t^\pi = V_t^\pi dB_t^{-1} + B_t^{-1} G_t dB_t + B_t^{-1} H_t \cdot dS_t,$$

$$H_t \cdot dS_t^* = (H_t \cdot S_t) dB_t^{-1} + B_t^{-1} H_t \cdot dS_t = V_t^\pi dB_t^{-1} - G_t B_t dB_t^{-1} + B_t^{-1} H_t \cdot dS_t.$$

Следовательно, если  $S_t^*$  – локальный мартингал, то  $V_t^{*,\pi}$  тоже.

## 1.4. Первая фундаментальная теорема

Теорема (Дельбан и Шахермайер). NFLVR равносильно существованию хотя бы одной ЭЛММ.

Доказательство  $\exists Q \implies \text{NFLVR}$

Если  $\exists Q$  и  $X^n \in L^\infty$  реализуют FLVR, то получаем противоречие:

$$0 \stackrel{(1)}{<} \mathbb{E}^Q \frac{X}{B_T} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^Q \frac{X^n}{B_T} \leqslant \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^Q \frac{V_T^{\pi^n}}{B_T} \stackrel{(2)}{\leqslant} \lim_{n \rightarrow \infty} V_0^{\pi^n} = 0,$$

где

- (1) так как  $X \geq 0$ ,  $P(X > 0) > 0$  и  $B_T > 0$ ,
- (2) так как  $V_t^{\pi^n}/B_t = V_t^{*,\pi}$  является локальным мартингалом и ограничен снизу, следовательно, является супермартингалом.

## 2. Теорема Гирсанова

Литература: Жакод, Ширяев, *Предельные теоремы для случайных процессов*, § III.3b

### 2.1. Формулировка и доказательство

Задано пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T, \mathbf{P})$  с броуновским движением  $W_t$ .

**Теорема.** Пусть  $\mu_t$  – предсказуемый процесс и  $\int_0^T \mu_t^2 dt < \infty$  п.н. Определим процесс

$$Z_t = \exp\left(-\int_0^t \mu_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \mu_s^2 ds\right) \quad (dZ_t = -\mu_t Z_t dW_t, \quad Z_0 = 1).$$

Тогда, если  $Z_t$  является мартингалом, то по мере  $dQ = Z_T d\mathbf{P}$  процесс

$$\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \mu_s ds \text{ является броуновским движением } (t \in [0, T]).$$

**Лемма 1 (о квадратической характеристике).** Пусть  $X_t$  – непрерывный локальный мартингал. Тогда существует единственный непрерывный неубывающий согласованный процесс  $\langle X \rangle_t$  такой, что  $\langle X \rangle_0 = 0$  и  $X_t^2 - \langle X \rangle_t$  является локальным мартингалом. Более того, для любого  $t > 0$

$$\sum_{i=1}^n \left( M_{i \frac{t}{n}} - M_{(i-1) \frac{t}{n}} \right)^2 \xrightarrow{\text{P}} \langle X \rangle_t \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Процесс  $\langle X \rangle$  называется **квадратической характеристикой** процесса  $X$ .

**Лемма 2 (теорема П. Леви).** Процесс  $X_t$  с  $X_0 = 0$  является броуновским движением тогда и только тогда, когда он является непрерывным локальным мартингалом и  $\langle X \rangle_t = t$ .

## Доказательство теоремы Гирсанова

1. Докажем, что  $\widetilde{W}_t$  –  $Q$ -локальный мартингал, для чего достаточно доказать, что  $Z_t \widetilde{W}_t$  –  $P$ -локальный мартингал (см. стр. 24).

По формуле Ито

$$\begin{aligned} d(Z_t \widetilde{W}_t) &= \widetilde{W}_t dZ_t + Z_t d\widetilde{W}_t + d\widetilde{W}_t dZ_t \\ &= \widetilde{W}_t dZ_t + Z_t(dW_t + \mu_t dt) - \mu_t Z_t dt = (-\mu_t Z_t \widetilde{W}_t + Z_t)dW_t, \end{aligned}$$

что является локальным мартингалом.

2. Далее,  $\langle \widetilde{W} \rangle_t = \langle W \rangle_t = t$  (из определения квадратической характеристики как предела по вероятности и эквивалентности  $Q \sim P$ ). Следовательно,  $\widetilde{W}$  – броуновское движение по теореме Леви.

## 2.2. Пример

Пусть относительно исходной меры  $P$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S_0 > 0.$$

Определим меру  $dQ = Z_T dP$ , где

$$Z_t = \exp\left(-\frac{\mu - r}{\sigma} W_t - \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2} t\right).$$

Тогда  $\widetilde{W}_t = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$  является  $Q$ -броуновским движением, следовательно

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t d\widetilde{W}_t.$$

Для процесса  $S_t^* = e^{-rt} S_t$  по формуле Ито

$$dS_t^* = \sigma S_t^* d\widetilde{W}_t.$$

Таким образом,  $Q$  – эквивалентная мартингальная мера.

## 2.3. Многомерная теорема Гирсанова

**Теорема.** Пусть  $W_t$  –  $d$ -мерное броуновское движение с независимыми компонентами и  $\mu_t$  –  $d$ -мерный предсказуемый процесс такой, что  $\int_0^T \|\mu_t\|^2 dt < \infty$  п.н. Определим процесс

$$Z_t = \exp \left( - \int_0^t \mu_s \cdot dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\mu_s\|^2 ds \right).$$

Тогда, если  $Z_t$  является мартингалом, то по мере  $dQ = Z_T dP$  процесс

$$\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \mu_s ds$$

является броуновским движением с независимыми компонентами.

## 2.4. Условие Новикова

Когда  $Z_t$  является мартингалом?

**Теорема.** Пусть

$$\mathbb{E} \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^T \|\mu_t\|^2 dt\right) < \infty.$$

Тогда процесс

$$Z_t = \exp\left(-\int_0^t \mu_s \cdot dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\mu_s\|^2 ds\right), \quad t \in [0, T],$$

является мартингалом.

### 3. Полные и неполные рынки

#### 3.1. Теорема о мартингальном представлении

Пусть на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  задано  $d$ -мерное броуновское движение  $W_t$  и фильтрация  $\mathcal{F}_t$  им порождена (а также пополнена и непрерывна справа).

**Теорема.** Любой локальный мартингал  $M_t$  относительно  $\mathcal{F}_t$  допускает представление

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s \cdot dW_s$$

с некоторым процессом  $H_t \in L^2_{\text{loc}}$ , единственным  $P \otimes \text{Leb}$ -п.н. В частности,  $M_t$  непрерывен.

**Доказательство.** См. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, Th. 16.10.

**Теорема.** Для любой случайной величины  $X \in L^2(\mathcal{F}_T)$  существует единственный  $d$ -мерный процесс  $H \in L_T^2$  такой, что

$$X = \mathbb{E} X + \int_0^T H_t \cdot dW_t.$$

**Упражнение.** Покажите, что если заменить условие  $H \in L_T^2$  на  $H \in L_{T,\text{loc}}^2$  то может пропасть единственность представления (указание: воспользуйтесь примером арбитража в модели Блэка–Шоулса без условия допустимости).

### 3.2. Полный рынок

**Определение.** Модель рынка называется **полной**, если любое ограниченное  $\mathcal{F}_T$ -измеримое платежное обязательство  $X$  реплицируемо.

**Предложение.** Модель Блэка–Шоулса полна (в случае, когда фильтрация порождена броуновским движением  $W_t$ ).

**Доказательство (для  $r = 0$ ).** Пусть  $\widetilde{W}_t = W_t + \frac{\mu}{\sigma}t$  – броуновское движение по ЭММ  $Q$ . По теореме о мартингальном представлении для ограниченного платежного обязательства  $X$

$$X = \mathbb{E}^Q X + \int_0^T H'_t d\widetilde{W}_t.$$

Возьмем самофинансируемую стратегию  $\pi_t = (G_t, H_t)$ , где  $H_t = H'_t / (\sigma S_t)$ ,  $V_0^\pi = \mathbb{E}^Q X$ . Тогда

$$X = \mathbb{E}^Q X + \int_0^T H_t \sigma S_t dW_t = \mathbb{E}^Q X + \int_0^T H_t dS_t = V_T^\pi.$$

**Упражнение.** Обобщите на случай  $r \neq 0$ .

**Теорема.** Пусть в модели рынка существует ЭММ. В этом случае рынок полон тогда и только тогда, когда ЭММ единственна.

**Доказательство.** См. Eberlein, Kallsen, *Mathematical Finance*, Th. 11.54.

**Замечание.** Определена ли цена репликации однозначно (как стоимость любого реплицирующего портфеля)?

- В общем случае нет, даже в модели Блэка–Шоулса – Eberlein, Kallsen, *Mathematical Finance*, Example 11.46 (см. также домашнее задание).
- Цена может быть определена однозначно, если сузить класс допустимых стратегий – Eberlein, Kallsen, *Mathematical Finance*, Example 11.56.

### 3.3. Безарбитражные цены

Пусть рынок с активами  $(B, S^1, \dots, S^n)$  безарбитражен (выполнено NFLVR).

**Определение.** Безарбитражной ценой платежного обязательства  $X$  называется процесс  $V_t$  (не обязательно единственный) такой, что

- $V_T = X$  п.н.,
- модель рынка  $(B, S^1, \dots, S^n, S^{n+1})$ , где  $S_t^{n+1} = V_t$ , безарбитражна.

**Предложение.** Если  $Q$  – ЭЛММ на исходном рынке, то для любого платежного обязательства  $X$  такого, что  $\mathbb{E}^Q |X| < \infty$ ,

$$V_t = B_t \mathbb{E}^Q \left( \frac{X}{B_T} \mid \mathcal{F}_t \right) \text{ является безарбитражной ценой } X.$$

**Доказательство.** Упражнение.

#### 4. Дополнение: эквивалентность вероятностных мер

Будем рассматривать пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T, P)$ .

**Определение.** Вероятностная мера  $Q$  на  $(\Omega, \mathcal{F})$  называется **эквивалентной мере  $P$**  (обозначение  $Q \sim P$ ), если для любого  $A \in \mathcal{F}$

$$P(A) = 0 \iff Q(A) = 0.$$

**Предложение (теорема Радона–Никодима).** Если  $Q \sim P$ , то существует единственная случайная величина  $Z > 0$  ( $P$ -п.н. и  $Q$ -п.н.) такая, что

$$Q(A) = E^P(Z I(A)) \text{ для любого } A \in \mathcal{F}.$$

$Z$  называется **плотностью  $Q$**  относительно  $P$ .

**Обозначение.**  $Z = \frac{dQ}{dP}$  и  $dQ = Z dP$ .

**Литература:** Жакод, Ширяев, *Пределевые теоремы для случайных процессов*, § III.3а

#### 4.1. Свойства эквивалентных мер

- Для любой случайной величины  $Z > 0$  (P-п.н.),  $E Z = 1$ , функция множеств

$$Q(A) = E^P(Z I(A)), \quad A \in \mathcal{F},$$

является вероятностной мерой, эквивалентной  $P$ , и  $Z = \frac{dQ}{dP}$ .

- Если  $Q \sim P$ , то  $P \sim Q$  и

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{\frac{dQ}{dP}}.$$

- Если  $Q \sim P$ , то для любой случайной величины  $X$

$$E^Q X = E^P \left( \frac{dQ}{dP} X \right)$$

(когда одно из ожиданий определено; в таком случае определено и второе).

## 4.2. Процесс плотности эквивалентных мер

Будем обозначать  $P_t = P | \mathcal{F}_t$ ,  $Q_t = Q | \mathcal{F}_t$  (сужения мер на  $\mathcal{F}_t$ ),  $t \in [0, T]$ .

**Предложение.** Если  $Q \sim P$ , то  $Q_t \sim P_t$  и **процесс плотности**

$$Z_t = \frac{dQ_t}{dP_t}$$
 является мартингалом.

Если  $(Z_t)_{t=0}^T$  – мартингал,  $Z_t > 0$ ,  $E Z_t = 1$ , то  $dQ = Z_T dP$  задает вероятностную меру  $Q \sim P$  и  $Z_t$  – ее процесс плотности относительно  $P$ .

**Теорема (о пересчете условных ожиданий).** Если  $Q \sim P$ , то для любой  $\mathcal{F}_T$ -измеримой случайной величины  $X$

$$E^Q(X | \mathcal{F}_t) = \frac{E^P(Z_T X | \mathcal{F}_t)}{Z_t}$$

(если определена левая часть, то определена и правая; и наоборот).

**Следствие.** Пусть  $Q \sim P$ . Тогда процесс  $X_t$  является  $Q$ -локальным мартингалом если и только если  $Z_t X_t$  является  $P$ -локальным мартингалом.

# Модели стохастической волатильности

Лекция 6: Стохастические дифференциальные уравнения

Михаил Житлухин

## Содержание

<b>1 Сильные и слабые решения</b>	<b>3</b>
1.1 Определения . . . . .	3
1.2 Теоремы Ямады–Ватанабе и Черного–Энгельберта . . . . .	6
<b>2 Достаточные условия существования и единственности</b>	<b>7</b>
2.1 Сильные решения . . . . .	7
2.2 Слабые решения . . . . .	10
<b>3 Примеры (не)существования и (не)единственности</b>	<b>13</b>
<b>4 Особые точки</b>	<b>17</b>
4.1 Определение особой точки . . . . .	17
4.2 Типы изолированной особой точки . . . . .	19
4.3 Типы точек $+\infty$ и $-\infty$ . . . . .	25
4.4 Существование и единственность решения с особой точкой . . . . .	27
<b>5 Примеры исследования особых точек</b>	<b>28</b>
5.1 Геометрическое броуновское движение . . . . .	28
5.2 Процесс Кокса–Ингерсолла–Росса . . . . .	30
5.3 Процесс Бесселя (упражнение) . . . . .	35

# 1. Сильные и слабые решения

## 1.1. Определения

Будем рассматривать одномерное<sup>1</sup> СДУ:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad X_0 = x. \quad (*)$$

**Определение.** Слабым решением уравнения (\*) называется пара непрерывных согласованных процессов  $(X_t, B_t)$ , заданных на некотором пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ , такая, что  $B_t$  является  $\mathcal{F}_t$ -броуновским движением и

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \text{ п.н. для всех } t \geq 0 \quad (**)$$

(причем интегралы должны быть корректно определены).

---

<sup>1</sup>Большинство результатов легко обобщаются и на многомерные уравнения.

**Определение.** Сильным решением уравнения (\*) называется слабое решение, в котором процесс  $X_t$  согласован с фильтрацией  $\mathcal{F}_t^B$ , порожденной  $B_t$  (и пополненной).

**Теорема.** Если (\*) имеет сильное решение, то существует отображение

$$\Phi: (C(\mathbb{R}_+), \mathcal{B}) \rightarrow (C(\mathbb{R}_+), \mathcal{B})$$

такое, что для любого пространства  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  с броуновским движением  $B_t$  пара  $(X_t, B_t)$ , где  $X_t = \Phi(B)_t$ , является сильным решением.

**Доказательство.** Cherny, Engelbert, "Singular Stochastic Differential Equations", Proposition 1.5.

**Определение.** Уравнение (\*) обладает **слабой единственностью** решения, если для любых двух решений  $(X_t, B_t)$  и  $(\tilde{X}_t, \tilde{B}_t)$  процессы  $X_t$  и  $\tilde{X}_t$  равны по распределению.

**Замечание.** Равенство по распределению понимается как равенство мер, порождаемых эти-ми процессами на  $(C(\mathbb{R}_+), \mathcal{B})$ . Эквивалентно, равны любые конечномерные распределения этих процессов.

**Определение.** Уравнение (\*) обладает **сильной единственностью** решения, если для любых двух решений  $(X_t, B_t)$  и  $(\tilde{X}_t, \tilde{B}_t)$ , заданных на одном веро-ятностном пространстве, выполнено  $X_t = \tilde{X}_t$  п.н. для всех  $t \geq 0$ .

## 1.2. Теоремы Ямады–Ватанабе и Черного–Энгельберта

**Теорема (Ямада, Ватанабе).** Из сильной единственности следует слабая единственность. Из сильной единственности и слабого существования следует сильное существование.

**Замечание.** Можно доказать больше: из сильной единственности следует существование отображения  $\Phi: C(\mathbb{R}_+) \rightarrow C(\mathbb{R}_+)$  такого, что процесс  $\Phi(B)$  является  $\mathcal{F}_t^B$ -согласованным и  $X = \Phi(B)$  для любого слабого решения  $(X, B)$ .

**Теорема (Черный, Энгельберт).** Из слабой единственности и сильного существования следует сильная единственность.

**Замечание.** Можно также доказать, что из слабой единственности следует, что у любых слабых решений  $(X, B)$  и  $(\tilde{X}, \tilde{B})$  совпадают совместные распределения:  $(X, B) \stackrel{d}{=} (\tilde{X}, \tilde{B})$ .

## 2. Достаточные условия существования и единственности

### 2.1. Сильные решения

**Теорема (Ито).** Для существования и единственности сильного решения достаточно выполнения условий

$$\begin{aligned}|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| &\leq C|x - y|, \\ |b(t, x)| + |\sigma(t, x)| &\leq C(1 + |x|).\end{aligned}$$

(Здесь и далее неравенства предполагаются выполненными для всех  $t, x, y$ , и  $C$  обозначает константу.)

**Теорема (Звонкин).** Для существования и единственности сильного решения достаточно выполнения условий:

1. функция  $b(t, x)$  ограничена,
2. функция  $\sigma(t, x)$  непрерывна,
3. выполнены неравенства

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq C\sqrt{|x - y|}, \quad |\sigma(t, x)| \geq \varepsilon > 0.$$

**Пример.** Уравнение

$$dX_t = -\operatorname{sgn} X_t dt + \varepsilon dB_t$$

имеет единственное сильное решение для любого  $\varepsilon \neq 0$  (а для  $\varepsilon = 0$  решения не существует).

**Теорема (Ямада, Ватанабе).** Для сильной единственности достаточно выполнения условий

$$|b(t, x) - b(t, y)| \leq C|x - y|, \quad |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq h(|x - y|)$$

с некоторой строго возрастающей функцией  $h$  такой, что  $\int_0^\varepsilon h^{-2}(x)dx = +\infty$  для любого  $\varepsilon > 0$ .

**Замечание.** Теорема не гарантирует существование.

## 2.2. Слабые решения

**Теорема (Скороход).** Для существования слабого решения достаточно непрерывности и ограниченности функций  $b(t, x)$ ,  $\sigma(t, x)$ .

**Замечание.** Теорема не гарантирует ни сильное существование (“пример Барлоу”), ни сильную слабую единственность (пример Гирсанова, стр. 16).

**Теорема (Струк, Варадан).** Для существования слабого решения и слабой единственности достаточно выполнения условий

1. функция  $b(t, x)$  ограничена,
2. функция  $\sigma(t, x)$  непрерывна,
3.  $\sigma(t, x) \neq 0$  для всех  $t, x$ .

**Определение.** СДУ называется **однородным**, если  $b$ ,  $\sigma$  не зависят от  $t$ , т.е. имеем

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t.$$

**Определение.** Для однородного СДУ определим функции

$$\rho(x) = \exp\left(-\int \frac{2b(x)}{\sigma^2(x)}dx\right), \quad s(x) = \int \rho(x)dx.$$

**Замечание.** 1.  $\rho(x)$  определена с точностью до умножения на положительную константу,  $s(x)$  с точностью до положительного аффинного преобразования.

2. Функция  $s(x)$  называется **шкалой**. С помощью формулы Ито можно показать, что если  $s(x) < \infty$  для всех  $x$ , то для любого слабого решения  $X_t$ , процесс  $s(X_t)$  является локальным мартингалом.

**Теорема (Энгельберт, Шмидт; случай “невзрывающегося” решения).** Для существования слабого решения и слабой единственности однородного СДУ достаточно выполнения условий

1.  $\sigma(x) \neq 0$ ,
2.  $\int_K \frac{1+|b(y)|}{\sigma^2(y)} dy < \infty$  для любого компакта  $K \subset \mathbb{R}$  (или любого отрезка),
3. выполнено

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(x) dx < \infty$$

или

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(x) dx = \infty, \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{|s(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)} dx = \infty.$$

**Замечание.** 1. Условие 3 – это критерий взрыва Феллера. Если оно не выполнено, то решение с положительной вероятностью уходит на бесконечность за конечное время.

2. Если убрать условие 3, то можно доказать существование и единственность решения “до момента взрыва”.

### 3. Примеры (не)существования и (не)единственности

Пример 1 (Танака): нет сильного решения

Определим  $\operatorname{sgn}(x) = 1$  при  $x > 0$  и  $\operatorname{sgn}(x) = -1$  при  $x \leq 0$ . Тогда для уравнения

$$dX_t = \operatorname{sgn} X_t dB_t, \quad X_0 = 0$$

имеем

$\exists W$	$\exists S$	$\mathbf{!}W$	$\mathbf{!}S$
+	-	+	-

Доказательство. Пусть  $X_t$  – броуновское движение,  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X$ . Положим

$$B_t = \int_0^t \operatorname{sgn} X_s dX_s.$$

$B_t$  является мартингалом. По формуле Ито  $B_t^2 - t$  тоже является мартингалом, значит  $\langle B \rangle_t = t$ . Тогда по теореме Леви  $B_t$  является броуновским движением. Кроме того,

$$\int_0^t \operatorname{sgn} X_s dB_s = \int_0^t (\operatorname{sgn} X_s)^2 dX_s = X_t,$$

значит  $(X, B)$  – слабое решение. Также из формулы Ито и теоремы Леви следует, что любое решение является броуновским движением, значит имеет место слабая единственность.

Чтобы показать, что сильное решение не существует, заметим, что если  $(X, B)$  – слабое решение, то

$$B_t = \int_0^t \operatorname{sgn} X_s dX_s.$$

Из этого можно доказать, что  $\mathcal{F}_t^B = \mathcal{F}_t^{|X|}$ . Так как  $\mathcal{F}_t^{|X|} \subsetneq \mathcal{F}_t^X$ , то сильного решения нет.

Сильной единственности нет по теореме Ямады–Ватанабе.

**Замечание.** Другое доказательство: сильной единственности нет, так как если  $(X, B)$  – решение, то  $(-X, B)$  – тоже решение. Поэтому сильного существования нет по теореме Черного–Энгельберта.

## Пример 2: нет сильной и слабой единственности

Уравнение

$$dX_t = I(X_t \neq 0) dB_t, \quad X_0 = 0,$$

имеет два сильных решения:  $(B, B)$ ,  $(0, B)$ , т.е.

$\exists W$	$\exists S$	$\neg W$	$\neg S$
+	+	-	-

Пример 3 (Гирсанов): нет сильной и слабой единственности

Для уравнение с параметром  $\alpha \in (0, 1/2)$

$$dX_t = |X_t|^\alpha dB_t, \quad X_0 = 0,$$

имеем

$\exists W$	$\exists S$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{S}$
+	+	-	-

**Доказательство.** Пусть  $W$  – броуновское движение. Определим

$$A_t = \int_0^t |W_s|^{-2\alpha} ds, \quad T_t = \inf\{t \geq 0 : A_s > t\}, \quad X_t = W_{\tau_t}.$$

Доказывается, что  $T_t < \infty$  п.н. непрерывен, строго возрастает, и  $A_t \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Далее,  $X_t$  является непрерывным  $\mathcal{F}_{T_t}^W$ -локальным мартингалом,  $\langle X \rangle_t = T_t$ , откуда

$$B_t = \int_0^t |X_s|^{-\alpha} dX_s$$

является непрерывным  $\mathcal{F}_{T_t}^W$ -локальным мартингалом с  $\langle B \rangle_t = t$ . Значит,  $B$  – броуновское движение и  $(X, B)$  – слабое решение. Кроме того,  $(0, B)$  – другое (сильное) решение.

**Замечание.** При  $\alpha \geq 1/2$  по теореме Ямады–Ватанабе существует единственное сильное решение, начинающееся из нуля (тождественно нулевое).

## 4. Особые точки

### 4.1. Определение особой точки

Будем рассматривать однородное СДУ с коэффициентом  $\sigma(x) \neq 0$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad X_0 = x.$$

**Определение.** Точка  $y \in \mathbb{R}$  называется **особой точкой** этого СДУ, если для любого  $\varepsilon > 0$

$$\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \frac{1 + |b(x)|}{\sigma^2(x)} dx = \infty.$$

Далее будем предполагать, что  $y = 0$  является единственной особой точкой.  
В частности, тогда

$$\int_K \frac{1 + |b(x)|}{\sigma^2(x)} dx < \infty$$

для любого компакта  $K \not\ni 0$ .

## Примеры уравнений с особой точкой в нуле

1. Геометрическое броуновское движение

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t.$$

2. Процесс Кокса–Ингерсолла–Росса (процесс CIR)

$$dX_t = (b - cX_t)dt + \sigma \sqrt{X_t} dB_t.$$

3. Процесс Бесселя размерности  $\delta > 1$

$$dX_t = \frac{\delta - 1}{2X_t} \mathbf{I}(X_t \neq 0) dt + dB_t.$$

**Замечание.** В примерах 1–2, чтобы было выполнено условие  $\sigma(x) \neq 0$  можно заменить коэффициент диффузии на  $\sigma(X_t + \mathbf{I}(X_t = 0))$  и  $\sigma(\sqrt{X_t} + \mathbf{I}(X_t = 0))$ .

Если 0 – особая точка, то мера времени пребывания решения в этой точке равна 0 п.н., следовательно индикатор можно убрать (Cherny, Engelbert, Th. 2.7).

## 4.2. Типы изолированной особой точки

Пусть 0 – единственная особая точка. Возьмем некоторое  $a > 0$  и определим функции

$$\rho(x) = \exp\left(\int_x^a \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)} dy\right), \quad x \in (0, a],$$

$$s(x) = \begin{cases} \int_0^x \rho(y) dy, & \text{если } \int_0^a \rho(y) dy < \infty, \\ -\int_x^a \rho(y) dy, & \text{если } \int_0^a \rho(y) dy = \infty \end{cases}$$

( дальнейшие результаты не зависят от выбора  $a > 0$ ).

Введем 7 **правых типов** особых точек (**левые типы** определяются по таким же формулам).

Тип 0:

$$\int_0^a \frac{1 + |b(x)|}{\sigma^2(x)} dx < \infty.$$

Тип 1:

$$\int_0^a \rho(x)dx < \infty, \quad \int_0^a \frac{1 + |b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)} dx = \infty, \quad \int_0^a \frac{1 + |b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)} s(x)dx < \infty.$$

Тип 2:

$$\int_0^a \rho(x)dx < \infty, \quad \int_0^a \frac{1 + |b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)} dx < \infty, \quad \int_0^a \frac{|b(x)|}{\sigma^2(x)} dx = \infty.$$

Тип 3:

$$\int_0^a \rho(x)dx = \infty, \quad \int_0^a \frac{1 + |b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}|s(x)|dx < \infty.$$

Тип 4:

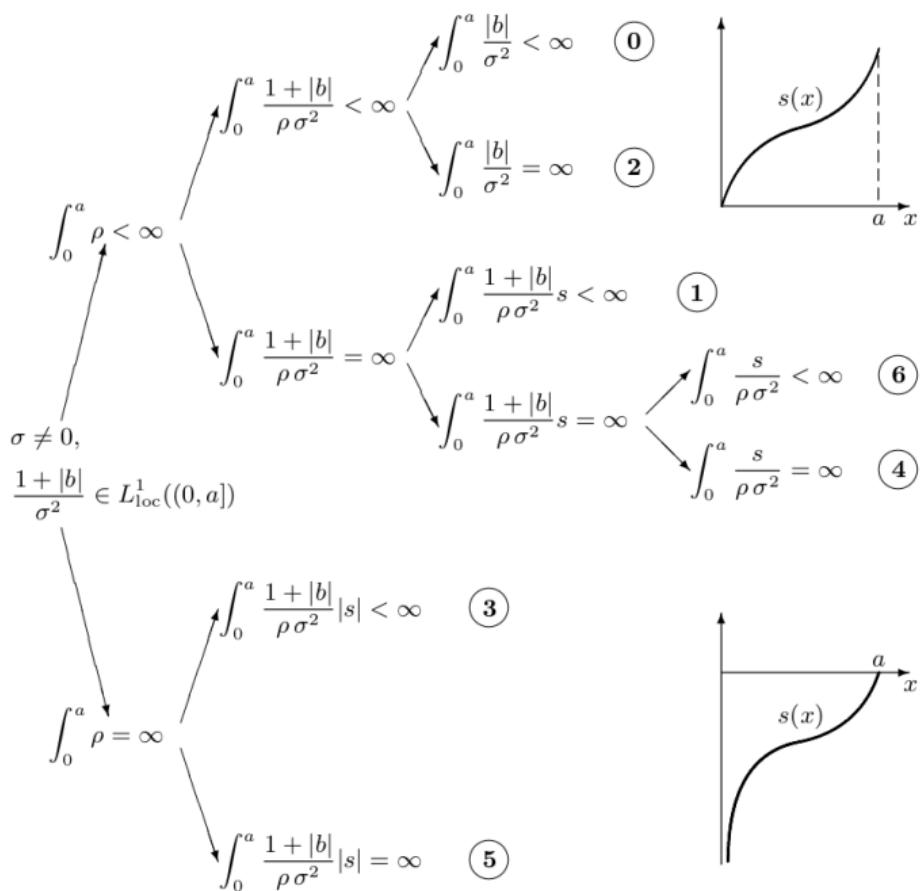
$$\int_0^a \rho(x)dx < \infty, \quad \int_0^a \frac{s(x)}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx = \infty.$$

Тип 5:

$$\int_0^a \rho(x)dx = \infty, \quad \int_0^a \frac{1 + |b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}|s(x)|dx = \infty.$$

Тип 6:

$$\int_0^a \rho(x)dx < \infty, \quad \int_0^a \frac{1 + |b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx = \infty, \quad \int_0^a \frac{|s(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx < \infty.$$



## Неформальное описание поведения решения в зависимости от типа точки

Пусть  $y = 0$  – единственная особая точка.

Если решение начинается в точке  $X_0 > 0$ :

- **Правые типы 0, 1, 2:** решение достигает нуля с положительной вероятностью
- **Правые типы 3, 4, 5:** решение не достигает 0 п.н.
- **Правый тип 6:** решение с положительной вероятностью достигает нуля и “умирает” при входе в 0 (существует строго до момента достижения нуля).

Если решение начинается в точке  $X_0 = 0$ :

- **Правые типы 0, 1, 4, 5, 6:** решение обязательно неположительно.
- **Правые типы 2, 3:** существует неотрицательное решение, выходящее из нуля.

## Двусторонние типы особой точки

**Определение.** Пусть 0 – единственная особая точка. Говорят, что она имеет **двустронний тип  $(i, j)$** , где  $i, j = 0, \dots, 6$ , если она имеет левый тип  $i$  и правый тип  $j$ .

**Замечание.** Тип  $(0, 0)$  невозможен (точка будет неособой), поэтому имеется 48 двусторонних типов.

### 4.3. Типы точек $+\infty$ и $-\infty$

Возьмем некоторое  $a > 0$  и определим функции

$$\rho(x) = \exp\left(-\int_a^x \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)} dy\right), \quad x \in [a, \infty)$$

$$s(x) = - \int_x^\infty \rho(y) dy, \quad x \in [a, \infty)$$

Введем 3 **типа точки  $+\infty$**  (для  $-\infty$  аналогично).

Тип А:

$$\int_a^\infty \rho(x) dx = \infty$$

Тип В:

$$\int_a^\infty \rho(x) dx < \infty, \quad \int_a^\infty \frac{|s(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)} dx = \infty.$$

Тип С:

$$\int_a^\infty \rho(x) dx < \infty, \quad \int_a^\infty \frac{|s(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)} dx < \infty.$$

## Неформальное описание поведения решения на бесконечности

Пусть 0 – единственная особая точка и решение начинается из точки  $X_0 > 0$ .

- **Тип А** – решение не взрывается и возвратно, т.е. не уходит на бесконечность за конечное время и достигает любой точки  $a \in (0, X_0)$ . Пример:

$$dX_t = \mu dt + dW_t, \quad \mu \leq 0.$$

- **Тип В** – решение не взрывается и невозвратно, т.е. не уходит на бесконечность за конечное время и с положительной вероятностью стремится к  $+\infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . Пример:

$$dX_t = \mu dt + dW_t, \quad \mu > 0.$$

- **Тип С** – решение взрывается (существует момент  $\tau$  такой, что  $P(\tau < \infty) > 0$  и  $P(\lim_{t \uparrow \tau} X_t = \infty) > 0$ ). Пример

$$dX_t = |X_t|^{1+\varepsilon} dt + dB_t, \quad \varepsilon > 0.$$

#### 4.4. Существование и единственность решения с особой точкой

Пусть 0 – единственная особая точка и начальное условие  $X_0 > 0$ . Тогда возможны следующие случаи для слабого решения (Cherny, Engelbert, p. 89):

Left type of zero	Right type of zero	Type of $-\infty$	Type of $+\infty$	Existence	Uniq-ness	Comments
			C	–	+	explosion into $+\infty$
0 1 4 5 6	0 1			–	+	killing at zero
2 3	0 1	A B	A B	+	+	passing through zero
2 3	0 1	C		–	+	explosion into $-\infty$
0 1 4 5 6	2		A B	+	+	reflection at zero
2 3	2	A B	A B	+	–	branching at zero
2 3	2	C	A B	+	+	reflection at zero
	3 4 5		A B	+	+	solution is strictly positive
	6			–	+	killing at zero

## 5. Примеры исследования особых точек

### 5.1. Геометрическое броуновское движение

Уравнение

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \quad X_0 = x > 0.$$

**Замечание.** См. стр. 18 по поводу обнуления коэффициента диффузии в нуле.

- Для определения правого типа точки 0, имеем  $\rho(x) = x^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}}$ ,  $s(x) = x^{1-\frac{2\mu}{\sigma^2}}$  ( $\rho(x)$  с точностью до умножения на константу,  $s(x)$  до аффинного преобразования).

Если  $2\mu < \sigma^2$ , то

$$\begin{aligned} \int_0^1 \rho(x) dx < \infty &\implies \int_0^1 \frac{1+\mu x}{\rho(x)\sigma^2 x^2} dx = \infty \\ &\implies \int_0^1 \frac{1+\mu x}{\rho(x)\sigma^2 x^2} s(x) dx = \infty \implies \int_0^1 \frac{s(x)}{\rho(x)\sigma^2 x^2} = 4 \implies \text{правый тип 4}. \end{aligned}$$

Если  $2\mu \geq \sigma^2$ , то

$$\int_0^1 \rho(x) dx = \infty \implies \int_0^1 \frac{1+\mu x}{\rho(x)\sigma^2 x^2} s(x) dx = \infty \implies \text{правый тип 5}.$$

- Левый тип точки 0 не имеет значения.
- Для определения типа  $+\infty$  имеем  $\rho(x) = x^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}}$ .  
Если  $2\mu \leq \sigma^2$ , то

$$\int_1^\infty \rho(x)dx = \infty \implies \text{тип A}.$$

Если  $2\mu > \sigma^2$ , то

$$s(x) = x^{1-\frac{2\mu}{\sigma^2}} \implies \int_1^\infty \frac{s(x)}{\rho(x)\sigma^2 x^2} dx = \infty \implies \text{тип B}.$$

- Итак, имеем

	правый тип 0	тип $+\infty$
$2\mu < \sigma^2$	4	A
$2\mu = \sigma^2$	5	A
$2\mu > \sigma^2$	5	B

- Таким образом, существует единственное строго положительное решение.

## 5.2. Процесс Кокса–Ингерсолла–Росса

Определение. Процесс Кокса–Ингерсолла–Росса (CIR) задается уравнением

$$dX_t = (b - cX_t)dt + \sigma\sqrt{|X_t|}dB_t, \quad X_0 = x > 0,$$

где  $b > 0, c > 0, \sigma > 0$  – параметры.

Следующее предложение показывает, что этот процесс является обобщением процесса суммы квадратов независимых процессов Орнштейна–Уленбека.

Предложение. Пусть

$$dY_t^i = -\alpha X_t^i dt + \beta dB_t^i,$$

где  $B_t^i$  – независимые броуновские движения,  $\alpha > 0, \beta > 0$  – параметры. Тогда для процесса  $X_t = \sum_i (Y_t^i)^2$  имеем

$$dX_t = (n\beta^2 - 2\alpha X_t)dt + 2\beta\sqrt{X_t}d\tilde{B}_t.$$

**Доказательство.** По формуле Ито

$$dX_t = (n\beta^2 - 2\alpha X_t)dt + 2\beta \sum_{i=1}^n Y_t^i dB_t^i.$$

Процесс  $\tilde{B}_t = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{X_s}} \sum_i Y_s^i dB_s^i$  является локальным мартингалом и

$$\langle \tilde{B} \rangle_t = \int_0^t \frac{1}{X_s} \sum_{i=1}^n (Y_s^i)^2 ds = t.$$

(нужно применить формулу Ито к  $d\tilde{B}_t^2$  и показать, что коэффициент сноса равен  $d\langle \tilde{B} \rangle_t$ ).

Тогда  $\tilde{B}_t$  является броуновским движением, откуда следует уравнение для  $X_t$ .

## Анализ решения уравнения CIR

- Для определения правого типа точки 0, имеем

$$\rho(x) = \exp\left(\int_x^1 \frac{2(b - cy)}{\sigma^2 y} dy\right) \simeq x^{-\frac{2b}{\sigma^2}} e^{\frac{2c}{\sigma^2}x}.$$

Если  $2b \geq \sigma^2$ , то

$$\int_0^1 \rho(x)dx = \infty \implies s(x) = - \int_x^1 \rho(y)dy \simeq x^{1-\frac{2b}{\sigma^2}} \text{ в нуле}$$

$$\implies \int_0^1 \frac{1 + |b - cx|}{\rho(x)\sigma^2|x|} |s(x)| dx < \infty \implies \text{правый тип 3.}$$

Если  $2b < \sigma^2$ , то

$$\int_0^1 \rho(x)dx < \infty \implies s(x) = \int_0^x \rho(y)dy \simeq x^{1-\frac{2b}{\sigma^2}} \text{ в нуле}$$

$$\implies \int_0^1 \frac{1 + |b - cx|}{\rho(x)\sigma^2 x} dx < \infty \implies \int_0^1 \frac{|b - cx|}{\sigma^2 x} dx = \infty \implies \text{правый тип 2.}$$

- В случае  $2b \geq \sigma^2$  левый тип точки 0 не важен, а в случае  $2b < \sigma^2$  для определения левого типа точки 0 имеем

$$\rho(x) = \exp\left(-\int_{-1}^x \frac{2(b-cy)}{\sigma^2|y|} dy\right) \simeq |x|^{\frac{2b}{\sigma^2}} e^{-\frac{2c}{\sigma^2}x}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \rho(x)dx < \infty &\implies s(x) = - \int_x^0 \rho(y)dy \simeq -x^{1+\frac{2b}{\sigma^2}} \text{ в нуле} \\ &\implies \int_{-1}^0 \frac{1+|b-cx|}{\rho(x)\sigma^2|x|} dx = \infty \implies \int_{-1}^0 \frac{1+|b-cx|}{\rho(x)\sigma^2|x|} |s(x)|dx < \infty \implies \text{левый тип 1}. \end{aligned}$$

- Для определения типа  $+\infty$  имеем

$$\rho(x) = \exp\left(-\int_1^x \frac{2(b-cy)}{\sigma^2 y} dy\right) \simeq x^{-\frac{2b}{\sigma^2}} e^{\frac{2c}{\sigma^2}x}.$$

Так как  $\int_1^\infty \rho(x)dx = \infty$ , то  $+\infty$  имеет **тип А**.

- Итак, имеем

	лев. тип 0	пр. тип 0	тип $+\infty$	
$2b \geq \sigma^2$		3	A	сл. реш. $\exists!$ , строго положительно
$2b < \sigma^2$	1	2	A	сл. реш. $\exists!$ , неотр., отражается в нуле

- Существование сильного решения и сильная единственность следуют из теорем Ямады–Ватанабе.

### 5.3. Процесс Бесселя (упражнение)

**Упражнение.** Пусть  $X_t = (B_t^1 + \dots + B_t^n)^{1/2}$ , где  $B_t^i$  – независимые броуновские движения,  $n \geq 2$ . Покажите, что

$$dX_t = \frac{n-1}{2X_t} dt + d\tilde{B}_t.$$

**Указание:** сначала рассмотрите процесс  $Y_t = X_t^2$  и докажите, что  $dY_t = ndt + 2\sqrt{Y_t}d\tilde{B}_t$ .

**Определение.** Процессом Бесселя размерности  $\delta \in (1, \infty)$  называется решение уравнения

$$dX_t = \frac{\delta - 1}{2X_t} \mathbf{I}(X_t \neq 0) dt + dB_t, \quad X_0 = x \geq 0.$$

**Упражнение.** Докажите, что имеет место следующая классификация точек

	левый тип 0	правый тип 0	тип $+\infty$
$1 < \delta < 2$	1	2	A
$\delta = 2$	1	3	A
$\delta > 2$	1	3	B

**Упражнение.** Докажите существование и единственность сильного решения (для доказательства сильной единственности примените теорему Ямады–Ватанабе к  $X_t^2$ ).

Для случая  $X_0 = 0$ , см. Cherny, Engelbert, p. 89.

## Литература

- Cherny, Engelbert, *Singular Stochastic Differential Equations*.  
На русском языке материал этой книги можно найти в диссертации А. Черного “Исследования по стохастическому анализу и сингулярным стохастическим дифференциальным уравнениям”.
- Rogers, Williams, *Diffusions, Markov Processes, and Martingales*, vol. 2, Ch. V.7.

# Модели стохастической волатильности

Лекция 7: Модель локальной волатильности

Михаил Житлухин

## Содержание

1	Идея воспроизведения поверхности волатильности	3
2	Формула Дюпира	5
2.1	Формулировка . . . . .	5
2.2	Доказательство . . . . .	7
2.3	Дополнение: оригинальное доказательство Дюпира . . . . .	10
3	Свойства локальной волатильности	12
3.1	Связь локальной и стохастической волатильности . . . . .	12
3.2	Динамика кривой волатильности . . . . .	14
4	Модель CEV (constant elasticity of variance)	21
5	Дополнение: локальное время случайного процесса	28
5.1	Локальное время броуновского движения . . . . .	28
5.2	Локальное время для непрерывных локальных мартингалов . . . . .	31

## 1. Идея воспроизведения поверхности волатильности

Мы построим модель, в которой

цены опционов в модели в точности равны рыночным ценам,

т.е. она воспроизводит поверхность предполагаемой волатильности.

Обозначения:

- $T$  – время экспирации,  $K$  – страйк,  $S_0$  – текущая цена базового актива,
- $\hat{C}(T, K)$  – цены опционов колл на рынке (наблюдаемые),
- $C(T, K)$  – цены опционов колл, вычисленные в модели.

Будем считать, что относительно мартингальной меры дисконтированная цена  $S_t^* = e^{-rt}S_t$  задается уравнением

$$dS_t^* = \sigma(t, S_t^*) S_t^* dW_t.$$

Цены опционов можно вычислить интегрированием по распределению  $S_T$  относительно мартингальной меры:

$$C(T, K) = e^{-rT} \mathbb{E}^Q(S_T - K)^+.$$

Тогда  $\sigma(t, x)$  можно найти так:

цены  $\widehat{C}(T, K) \Rightarrow$  плотность  $S_T$  относительно  $Q \Rightarrow$  функция  $\sigma(t, s)$ .

## 2. Формула Дюпира

### 2.1. Формулировка

Рассматриваем рынок из двух активов. Безрисковая ставка  $r = \text{const}$ . Исходная мера  $\mathbb{P}$  уже предполагается мартингальной.

**Определение.** Моделью локальной волатильности называется уравнение для цены актива (относительно мартингальной меры)

$$dS_t = rS_t dt + \sigma(t, S_t) S_t dW_t, \quad S_0 > 0. \quad (*)$$

**Определение.** Функция  $\sigma(t, s)$  такая, что цены опционов колл, задаваемые моделью (\*), совпадают с рыночными ценами  $\widehat{C}(T, K)$ , называется локальной волатильностью, т.е. для нее выполнено

$$\widehat{C}(T, K) = C(T, K) := e^{-rT} \mathbb{E}(S_T - K)^+, \quad T \in [0, T_{\max}], \quad K \in (0, \infty).$$

**Теорема (Дюпир).** Пусть выполнены условия:

1. функция  $\sigma$  такова, что  $(*)$  имеет решение (хотя бы слабое);
2.  $S_t$  имеет непрерывную плотность  $f(t, s)$  для всех  $t \in (0, T_{\max}]$ ;
3. функция  $C(T, K) = e^{-rT} E(S_T - K)^+$  принадлежит  $C^{1,2}$ .

Тогда выполнено уравнение

$$-C'_T(T, K) + \frac{K^2}{2}\sigma^2(T, K)C''_{KK}(T, K) = rKC'_K(T, K).$$

Следовательно, если выполнены условия теоремы и  $C''_{KK} \neq 0$ , то

$$\sigma^2(t, s) = \frac{2C'_T(t, s) + rsC'_K(t, s)}{s^2C''_{KK}(t, s)} \quad (\text{формула Дюпира}).$$

Если имеется функция рыночных цен  $\widehat{C}(T, K)$ , то можно найти  $\sigma(t, s)$  из формулы Дюпира (заменив  $C$  на  $\widehat{C}$ ).

## 2.2. Доказательство

Лемма 1 (формула Бридена–Литценбергера). Пусть случайная величина  $S$  имеет непрерывную плотность  $f(s)$  и  $E S^+ < \infty$ . Обозначим

$$C(K) = E(S - K)^+, \quad K \in \mathbb{R}_+.$$

Тогда  $C \in C^2(\mathbb{R}_+)$  и

$$f(s) = C''(s).$$

Доказательство.

$$C(K) = \int_K^\infty (s - K)f(s)ds \implies C'(K) = - \int_K^\infty f(s)ds \implies C''(K) = f(K)$$

Упражнение. Почему верен первый переход?

**Лемма 2.** Достаточно доказать теорему Дюпира для  $r = 0$ .

**Доказательство.** Пусть для  $r = 0$  теорема доказана. Процесс  $S_t^* = e^{-rt}S_t$  удовлетворяет уравнению (по формуле Ито)

$$dS_t^* = \tilde{\sigma}^*(t, S_t^*)S_t^*dW_t, \quad \tilde{\sigma}(t, s) = \sigma(t, se^{rt}).$$

Кроме того для  $\tilde{C}(T, K) = E(S_T^* - K)^+$  имеем

$$\tilde{C}(T, K) = C(T, Ke^{rT}).$$

Так как  $S_t^*$  тоже удовлетворяет условиям теоремы, то верно

$$\tilde{C}'_K(T, \tilde{K}) + \frac{\tilde{K}^2}{2}\tilde{\sigma}^2(T, \tilde{K})\tilde{C}''_{KK}(T, \tilde{K}) = 0.$$

Подставляя сюда  $\tilde{C}$ ,  $\tilde{\sigma}$ , получаем

$$-C'_T(T, \tilde{K}e^{rT}) - rKe^{rT}C'_K(T, \tilde{K}e^{rT}) + \frac{\tilde{K}^2e^{2rT}}{2}\sigma^2(T, \tilde{K}e^{rT})C''_{KK}(T, \tilde{K}e^{rT}) = 0,$$

откуда следует искомое уравнение после замены  $\tilde{K}e^{rT} = K$ .

[Доказательство теоремы \( \$r = 0\$ \)](#). По формуле Ито–Мейера (с. 32)

$$(S_T - K)^+ = (S_0 - K)^+ + \int_0^T \mathbf{I}(S_t \geq K) dS_t + \frac{1}{2} L_T^K(S),$$

где  $L_t^K(S)$  – локальное время. Следовательно

$$C(T, K) = (S_0 - K)^+ + \frac{1}{2} \mathbf{E} L_T^K(S).$$

По формуле времени пребывания для гладкой функции  $h(s)$  с компактным носителем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} h(K) C(T, K) dK &= c + \frac{1}{2} \mathbf{E} \int_0^T h(S_t) S_t^2 \sigma^2(t, S_t) dt \\ &= c + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} h(K) f(t, K) K^2 \sigma^2(t, K) dK dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(K) \left( (S_0 - K)^+ + \frac{1}{2} \int_0^T f(t, K) K^2 \sigma^2(t, K) dt \right) dK, \end{aligned}$$

где  $c = \int_{\mathbb{R}} h(K) (S_0 - K)^+ dK$ . Из произвольности функции  $h$  следует, что

$$C(T, K) = (S_0 - K)^+ + \frac{1}{2} \int_0^T f(t, K) K^2 \sigma^2(t, K) dt.$$

Дифференцируя по  $T$  и применяя лемму 1, получаем требуемое уравнение.

## 2.3. Дополнение: оригинальное доказательство Дюпира

Статья: B. Dupire, "Pricing with a smile", 1994.

Предложение (прямое уравнение Колмогорова). Пусть  $f(s, x, t, y)$  – переходная плотность процесса  $X_t$  вида

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t.$$

Тогда  $f$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}(\mu(t, y)f) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma^2(t, y)f)$$

(при условии, что  $\mu, \sigma$  достаточно “хорошие”).

[Доказательство формулы Дюпира \(для  \$r = 0\$ \).](#)

Пусть  $f(t, y)$  – плотность  $S_t$ . Тогда

$$C'_T(T, K) = \int_K^{\infty} (y - K) f'_T(T, y) dy = [\text{прямое уравнение Колмогорова}]$$

$$= \frac{1}{2} \int_K^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma^2 y^2 f)(y - K) dy = [\text{по частям}]$$

$$= -\frac{1}{2} \int_K^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} (\sigma^2 y^2 f) dy$$

$$= \frac{1}{2} \sigma^2(T, K) K^2 f(T, K) = [\text{формула Бридена–Литценбергера}]$$

$$= \frac{1}{2} \sigma^2(T, K) K^2 \frac{\partial^2 C(T, K)}{\partial K^2}.$$

### 3. Свойства локальной волатильности

#### 3.1. Связь локальной и стохастической волатильности

Предположим, что цена акции задается уравнением (относительно мартингальной меры; считаем  $r = 0$ )

$$d\tilde{S}_t = \sigma_t \tilde{S}_t dW_t,$$

где  $\sigma_t$  – некоторый предсказуемый случайный процесс (**стохастическая волатильность**), а мы пытаемся построить модель локальной волатильности для нее в виде

$$dS_t = \sigma(t, S_t) S_t dW_t.$$

Как найти функцию  $\sigma(t, s)$ , которая бы воспроизводила цены опционов  $\tilde{C}(T, K) = E(\tilde{S}_T - K)^+$ , т.е.  $C(T, K) = \tilde{C}(T, K)$ ?

**Теорема.** Пусть  $\mathbb{E} \sigma_t^2 < \infty$  для  $t \in [0, T_{\max}]$ , процесс  $\tilde{S}_t$  является мартингалом, функция  $\sigma(t, s)$  удовлетворяет условиям теоремы Дюпира, и  $C(T, K) = \tilde{C}(T, K)$  для всех  $T \in (0, T_{\max}]$ ,  $K > 0$ . Тогда

$$\sigma(t, s) = \mathbb{E}(\sigma_t^2 \mid S_t = s).$$

**Доказательство.** Аналогично с. 9,

$$\tilde{C}(T, K) = (S_0 - K)^+ + \frac{1}{2} \mathbb{E} L_T^K(\tilde{S}).$$

Тогда для любой гладкой функции  $h(s)$  с компактным носителем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} h(K) \tilde{C}(T, K) dK &= c + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^T h(\tilde{S}_t) \tilde{S}_t^2 \sigma_t^2 dt = c + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^T h(\tilde{S}_t) \tilde{S}_t^2 \mathbb{E}(\sigma_t^2 \mid \tilde{S}_t) dt \\ &= c + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} h(s) s^2 \mathbb{E}(\sigma_t^2 \mid \tilde{S}_t = s) \tilde{f}(t, s) ds dt, \end{aligned}$$

где  $c = \int_{\mathbb{R}} h(K) (S_0 - K)^+ dK$  и  $\tilde{f}(t, s)$  – плотность  $\tilde{S}_t$ . Из равенства  $C = \tilde{C}$  и формулы Бридена–Литценбергера следует  $f = \tilde{f}$ . Сравнивая равенство выше с формулой для  $\sigma(t, K)$  на с. 9, получаем утверждение теоремы.

### 3.2. Динамика кривой волатильности

Статья: Hagan, Woodward, "Equivalent Black volatilities", 1999.

Рассмотрим модель фьючерсного или форвардного рынка с ценой

$$dF_t = A(F)dW_t \quad (\text{относительно ЭММ}),$$

где  $A(f) \geq 0$  – некоторая достаточно “хорошая” функция.

**Предложение.** Пусть  $\hat{\sigma}(T, K)$  обозначает предполагаемую волатильность, вычисленную по формуле Блэка для опциона колл, и  $f = \frac{1}{2}(F_0 + K)$ . Тогда верна приближенная формула

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(T, K) = & \frac{A(f)}{f} \left\{ 1 + \frac{1}{24} \left[ \frac{A''(f)}{A(f)} - 2 \left( \frac{A'(f)}{A(f)} \right)^2 + \frac{2}{f^2} \right] (F_0 - K)^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{24} \left[ 2 \frac{A''(f)}{A(f)} - \left( \frac{A'(f)}{A(f)} \right)^2 + \frac{1}{f^2} \right] A^2(f)T + \dots \right\} \end{aligned}$$

**Следствие.** Модель локальной волатильности неверно отражает динамику кривой локальной волатильности.

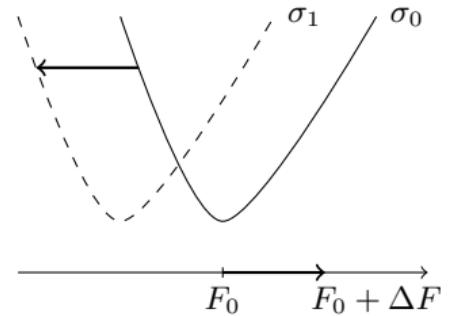
**Пояснение.** Пусть для фиксированного  $T$  наблюдаемая кривая предполагаемой волатильности есть  $\hat{\sigma}_0(K)$ . Тогда из предыдущего предложения (беря первый член справа)

$$A(f) \approx f\hat{\sigma}_0(2f - F_0).$$

Если цена  $F_0$  увеличится на величину  $\Delta F$ , то кривая волатильности, вычисленная по модели локальной волатильности, будет

$$\hat{\sigma}_1(K) \approx \frac{A(\frac{1}{2}(F_0 + \Delta F + K))}{\frac{1}{2}(F_0 + \Delta F + K)} \approx \hat{\sigma}_0(K + \Delta F).$$

Таким образом, если  $\Delta F > 0$  то кривая сдвигается влево, если  $\Delta F < 0$ , то вправо, а эмпирически наблюдается движение в другую сторону.



**Идея доказательства предложения.** Цена опциона колл  $V(t, f)$  со страйком  $K$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{cases} V'_t(t, f) + A^2(f)V'_{ff}(t, f) = 0, \\ V(T, f) = (f - K)^+. \end{cases}$$

Зафиксируем  $K$ , обозначим  $\varepsilon = A(K)$  и сделаем замену переменных

$$\tau = T - t, \quad x = \frac{f - K}{\varepsilon}, \quad Q(\tau, x) = \frac{V(t(\tau), f(x))}{\varepsilon}.$$

Тогда

$$\begin{cases} Q'_\tau(\tau, x) - \frac{\varepsilon^2}{2A^2(K)} A^2(K + \varepsilon x) Q'_{xx}(\tau, x) = 0, \\ Q(0, x) = x^+. \end{cases}$$

Представим

$$A(K + \varepsilon x) = A(K) \left( 1 + \varepsilon \nu_1 x + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \nu_2 x^2 + \dots \right),$$

$$Q(\tau, x) = Q^{(0)}(\tau, x) + \varepsilon Q^{(1)}(\tau, x) + \varepsilon^2 Q^{(2)}(\tau, x) + \dots,$$

где  $\nu_1 = A'(K)/A''(K)$ ,  $\nu_2 = A''(K)/A(K)$ , и т.д.

Подставляя эти формулы в уравнение для  $Q$  и рассматривая отдельно члены при  $\varepsilon^0$ ,  $\varepsilon^1$ ,  $\varepsilon^2$  и т.д., получаем уравнения

$$\begin{cases} Q_\tau^{(0)} - \frac{1}{2}Q_{xx}^{(0)} = 0 \\ Q^{(0)}(0, x) = x^+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_\tau^{(1)} - \frac{1}{2}Q_{xx}^{(1)} = \nu_1 x Q_{xx}^{(0)} \\ Q^{(1)}(0, x) = 0 \end{cases}$$

.....

Решая эти уравнения, находим

$$Q^0(\tau, x) = G(\tau, x) := x\Phi(x/\sqrt{\tau}) + \sqrt{\tau}\varphi(x/\sqrt{\tau})$$

$$Q^1(\tau, x) = \nu_1 \tau x G'_\tau(\tau, x),$$

...

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} Q(\tau, x) &= Q^{(0)} + \varepsilon Q^{(1)} + \varepsilon^2 Q^{(2)} + \dots \\ &= G + \varepsilon \nu_1 \tau x G'_\tau + \frac{1}{2} \varepsilon^1 \nu_1^2 \tau^2 x^2 G'_{\tau\tau} + \varepsilon^2 \left( \frac{4\nu_2 + \nu_1^2}{12} x^2 + \frac{2\nu_2 - \nu_1^2}{12} \tau \right) \tau G'_\tau + \dots = G(\tilde{\tau}, x), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\tau} = \tau \left( 1 + \varepsilon \nu_1 x + \varepsilon^2 \left( \frac{4\nu_2 + \nu_1^2}{12} x^2 + \frac{2\nu_2 - \nu_1^2}{12} \tau \right) + \dots \right).$$

Таким образом

$$V(t, f) = \varepsilon G(\tilde{\tau}, x) = G(\varepsilon^2 \tilde{\tau}, \varepsilon x) = G(\tau^*, f - K),$$

где

$$\tau^* = A(K) \sqrt{\tau} \left( 1 + \frac{1}{2} \nu_1 (f - K) + \frac{2\nu_1 - \nu_1^2}{12} (f - K)^2 + \frac{2\nu_2 - \nu_1^2}{24} A^2(K) \tau + \dots \right).$$

Далее раскладывая в ряд в точке  $\tilde{f} = \frac{1}{2}(f + K)$  получаем

$$\sqrt{\tau^*} = A(\tilde{f}) \sqrt{\tau} \left( 1 + \frac{\gamma_2 - 2\gamma_1^2}{24} (f - K)^2 + \frac{2\gamma_2 - \gamma_1^2}{24} A^2(\tilde{f}) + \dots \right).$$

где  $\gamma_1 = A'(\tilde{F})/A(\tilde{f})$ ,  $\gamma_2 = A''(\tilde{f})/A(\tilde{F})$  и т.д.

Аналогично, для модели Блэка (где  $A(f) = \hat{\sigma} f$ ) получаем

$$\sqrt{\tau_B^*} = \hat{\sigma} \tilde{f} \sqrt{\tau} \left( 1 - \frac{(f - K)^2}{12 \tilde{f}^2} - \frac{\hat{\sigma} \tau}{24} + \dots \right)$$

Тогда из равенства  $\sqrt{\tau_B} = \sqrt{\tau^*}$  находим  $\hat{\sigma}$ , которая и является искомой предполагаемой волатильностью.

## 4. Модель CEV (constant elasticity of variance)

Определение. В модели CEV цена задается процессом

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t^\gamma dW_t, \quad S_0 = s_0 > 0,$$

где  $r \geq 0$ ,  $\gamma > 0$  (при  $\gamma = 1$  имеем геометрическое броуновское движение).

**Замечание.** Предполагаем, что исходная мера  $P$  уже является локальной мартингальной мерой. Доказательство существования ЭЛММ см. Delbaen, Shirakawa, "A Note on Option Pricing for the Constant Elasticity of Variance Model" или Mijatovic, Urusov "On the martingale property of certain local martingales".

**Leverage effect:** локальная волатильность  $\sigma(s) = \sigma s^{\gamma-1}$

- убывает по  $s$  при  $\gamma < 1$ ;
- возрастает по  $s$  при  $\gamma < 1$ .

Далее для простоты рассмотрим случай  $r = 0$ ,  $\gamma \neq 1$ :

$$dS_t = \sigma S_t^\gamma dW_t, \quad S_0 > 0.$$

**Замечание.** Случай  $r \neq 0$  можно легко свести к  $r = 0$  заменой времени, см. Linetsky, Mendoza "The Constant Elasticity of Variance Model".

**Предложение.** Пусть

$$X_t = \frac{S_t^{2(1-\gamma)}}{\sigma^2(1-\gamma)^2}.$$

Тогда процесс  $X_t$  удовлетворяет уравнению

$$dX_t = \delta dt + 2\sqrt{X_t}dW_t, \quad \delta = \frac{1-2\gamma}{1-\gamma}.$$

**Доказательство.** По формуле Ито.

**Замечание.** Такому же уравнению удовлетворяет процесс  $Z_t^2$ , где  $Z_t$  – **процесс Бесселя** размерности  $\delta$  (в предыдущей лекции мы его определили для  $\delta > 1$ ; но приведенное уравнение для  $X_t$  имеет решение при любом  $\delta \in \mathbb{R}$  до момента достижения нуля).

**Следствие.** Пусть  $S_0 > 0$ . При  $\gamma \in (0, 1)$  процесс  $S_t$  достигает нуля с положительной вероятностью. При  $\gamma > 1$  процесс  $S_t$  строго положителен.

**Доказательство.** Следует из свойств процесса  $X_t$ , который нужно исследовать так же, как процесс Бесселя.

Далее для случая  $\gamma \in (0, 1)$  доопределим процесс  $S_t$  так, что он всегда остается в нуле после достижения нуля ("банкротство компании").

**Предложение.** При  $\gamma \in (0, 1)$  процесс  $S_t$  является мартингалом, при  $\gamma > 1$  локальным мартингалом (но не мартингалом).

**Доказательство.** Вытекает из следующего результата (см. Mijatovic, Urusov "On the martingale property of certain local martingales", corollary 4.3)

**Лемма.** Пусть  $Y_t$  – неотрицательный локальный мартингал (останавливаемый при достижении нуля), удовлетворяющий уравнению

$$dY_t = \sigma(Y_t)dW_t, \quad Y_0 > 0,$$

где  $\sigma(y) \neq 0$  и  $\int_a^b \sigma^{-2}(y)dy < \infty$  для любых  $0 < a < b$ . Тогда  $Y_t$  является мартингалом если и только если

$$\int_1^\infty \frac{y}{\sigma^2(y)} dy = \infty.$$

**Предложение.** Переходная плотность процесса  $S_t$  задается формулой

$$p(s_0, s, t) = \frac{s^{2(1-\gamma)-\frac{3}{2}} s_0^{\frac{1}{2}}}{\sigma^2 |1-\gamma| t} I_{|\nu|} \left( \frac{s^{1-\gamma} s_0^{1-\gamma}}{\sigma^2 (1-\gamma)^2 t} \right) \exp \left( -\frac{s^{2(1-\gamma)} + s_0^{2(1-\gamma)}}{2\sigma^2 (1-\gamma)^2 t} \right), \quad s > 0,$$

где  $\nu = 1/(2(1-\gamma))$  и  $I_\nu(x)$  – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка  $\nu$ .

В случае  $\gamma \in (0, 1)$  вероятность достижения нуля

$$P(S_t = 0) = G \left( \nu, \frac{s_0^{2(1-\gamma)}}{2\sigma^2 (1-\gamma)^2 t} \right), \quad G(\nu, x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_x^\infty u^{\nu-1} e^{-u} du,$$

где  $\Gamma(x)$  – гамма-функция.

**Доказательство.** Следует из известной формулы плотности для процесса Бесселя. По поводу последней, см. Revuz, Yor, "Continuous martingales and Brownian motion", Ch. XI.

**Предложение.** В случае  $\gamma \in (0, 1)$ ,  $r \geq 0$ , цена опциона колл имеет вид

$$C(T, K) = e^{-rT} E(S_T - K)^+ = S_0(1 - Q(\xi; 2\nu, y_0)) - e^{-rT} K(1 - Q(y_0; (1+\nu), \xi)),$$

где  $Q(z; v, k)$  – дополнительная функция распределения хи-квадрат с  $v$  степенями свободы и параметром нецентральности  $k$ , и

$$\xi = \frac{2rS_0^{2(1-\gamma)}}{\sigma^2(1-\gamma)(1-e^{2r(\gamma-1)T})}, \quad y_0 = \frac{2rK^{2(1-\gamma)}}{\sigma^2(1-\gamma)(e^{2r(1-\gamma)T}-1)}$$

(для  $r = 0$  нужно определить  $\xi$  и  $y_0$  по непрерывности при  $r \rightarrow 0$ ).

**Замечание.** Для целого  $v \geq 1$  и  $k = \mu_1^2 + \dots + \mu_v^2$  указанное распределение хи-квадрат есть распределение величины  $Z_1^2 + \dots + Z_v^2$ , где  $Z_i \sim N(\mu_i, 1)$  независимы.

### Больше результатов:

1. Cox "Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Variance Diffusions" (1975) – случай  $\gamma < 1$ ,
2. Emanuel, MacBeth, "Further Results on the Constant Elasticity of Variance Call Option Pricing Model" (1982) – случай  $\gamma > 1$ ,
3. Linetsky, Mendoza "The Constant Elasticity of Variance Model" (2009) – обзор различных формул, в т.ч. для цены опционов.

**Упражнение.** Постройте кривую предполагаемой волатильности (по формуле Блэка) для цен опционов в модели CEV, вычисленных по аналитической формуле, и сравните с приближенной формулой из статьи Hagan et al. (2009):

$$\hat{\sigma} = \frac{\sigma}{\tilde{s}^{1-\gamma}} \left( 1 + \frac{(1-\gamma)(2+\gamma)}{24} \left( \frac{s-K}{\tilde{s}} \right)^2 + \frac{(1-\gamma)^2}{24} \frac{\sigma^2 T}{\tilde{s}^{2(1-\gamma)}} + \dots \right)$$

где  $\tilde{s} = \frac{1}{2}(s + K)$ .

## 5. Дополнение: локальное время случайного процесса

Литература: Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations*, § IV.7

### 5.1. Локальное время броуновского движения

**Теорема.** Пусть  $W_t$  – броуновское движение. Тогда для любого  $a \in \mathbb{R}$  существует непрерывный неубывающий согласованный процесс  $L_t^a$  такой, что

$$|W_t - a| = |a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(W_s - a) dW_s + L_t^a, \quad (*)$$

причем

$$L_t^a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbf{I}(W_s \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]) ds \text{ п.н.}$$

Процесс  $L_t^a$  называется **локальным временем** броуновского движения на уровне  $a$ . Формула (\*) называется **формулой Танака**.

**Теорема.** Можно выбрать процесс  $L_t^a$  так, чтобы он был непрерывным по  $(t, a)$  п.н. Кроме того, для любой измеримой функции  $f(a)$  верна **формула времени пребывания**

$$\int_0^t f(W_s)ds = \int_{\mathbb{R}} f(a)L_t^a da$$

(при условии, что интеграл слева существует п.н.).

**Замечание.** Если  $f(a) = I(a \in A)$  для  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , то

$$\text{Leb}\{s \leq t : W_s \in A\} = \int_A L_t^a da,$$

где  $\text{Leb}\{\dots\}$  – мера Лебега времени пребывания в множестве  $A$  до момента  $t$ . Таким образом,  $L_t^a$  является плотностью меры времени пребывания.

**Теорема (формула Ито-Мейера).** Пусть  $f(x)$  – выпуклая функция,  $f'(x)$  – ее правая производная,  $\mu(dx)$  – мера, задаваемая равенством

$$\mu_f((a, b]) = f'(b) - f'(a).$$

Тогда

$$f(W_t) = f(0) + \int_0^t f'(W_s)dW_s + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} L_t^a \mu_f(da).$$

**Напоминание.** Выпуклая функция на  $\mathbb{R}$  непрерывна и имеет неубывающую правую (и левую) производную. Правая производная непрерывна справа, левая непрерывна слева.

**Пример.** Для  $f(x) = |x - a|$  имеем  $\mu_f(A) = 2 I(a \in A)$  – мера, “сидящая” в точке  $a$ . Отсюда следует формула Танака.

## 5.2. Локальное время для непрерывных локальных мартингалов

Далее  $X_t$  – непрерывный локальный мартингал вида

$$dX_t = H_t dB_t$$

(но приведенные ниже результаты с небольшими изменениями обобщаются на случай произвольного семимартингала).

**Определение.** *Локальным временем*  $X_t$  на уровне  $a$  называется неубывающий согласованный процесс  $L_t^a(X)$  такой, что

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s + L_t^a(X).$$

**Теорема.**  $L_t^a(X)$  существует и может быть выбрано непрерывным по  $t, a$ .

**Теорема (формула времени пребывания).** Для измеримой функции  $f(x)$

$$\int_0^t f(X_s) H_s^2 ds = \int_{\mathbb{R}} f(a) L_t^a(X) da$$

(считая, что интеграл слева существует п.н. – например, если  $f$  ограничена).

**Теорема (формула Ито–Мейера).** Для выпуклой функции  $f(x)$

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} L_t^a \mu_f(da)$$

# Модели стохастической волатильности

Лекция 8: Модель Хестона

Михаил Житлухин

## Содержание

<b>1 Модель</b>	<b>3</b>
1.1 Уравнения для процессов цены и волатильности . . . . .	3
1.2 Мартингальность процесса цены . . . . .	6
<b>2 Вычисление цены опционов колл</b>	<b>9</b>
2.1 Представление цены опциона через вероятности исполнения . . . . .	10
2.2 Вычисление характеристических функций . . . . .	12
2.3 Обращение характеристических функций . . . . .	18
2.4 Итоговый результат . . . . .	19
2.5 Замечание: другое представление характеристической функции . . .	21
<b>3 Дополнение: уравнение Риккати</b>	<b>22</b>
<b>Литература</b>	<b>24</b>

## 1. Модель

### 1.1. Уравнения для процессов цены и волатильности

Пусть на  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$  заданы два коррелированных броуновских движения,

$$dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt.$$

Будем предполагать, что мера  $P$  уже является мартингальной и рассмотрим рынок с безрисковым активом  $B_t = e^{rt}$  и акцией с ценой

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^1, \quad S_0 > 0, \tag{1}$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^2, \quad v_0 > 0. \tag{2}$$

Параметры модели:  $r \geq 0$ ,  $\kappa > 0$ ,  $\theta > 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\rho \in (-1, 1)$ .

Процесс  $\sigma_t = \sqrt{v_t}$  представляет собой **стохастическую волатильность**.

**Предложение.** Система уравнений (1)–(2) имеет единственное сильное решение. При  $\kappa\theta > \sigma^2$  процесс  $v_t$  строго положителен; при  $\kappa\theta \leq \sigma^2$  отражается в нуле.

**Доказательство.** Существование и единственность решения уравнения для  $v_t$  (процесс CIR) доказано в лекции 6. Существование и единственность для  $S_t$  следуют из того, что это стохастическая экспонента.

Свойства строгой положительности и отражения также доказаны в лекции 6.

Замечание: модель относительно немартингальной меры

Часто модель Хестона задают относительно произвольной меры  $P$ :

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^1, \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^2, \\ dW_t^1 dW_t^2 &= \rho dt. \end{aligned}$$

Затем по теореме Гирсанова (при выполнении, например, условия Новикова) можно заменить коэффициент сноса:

$$dW_t^1 = \frac{r - \mu}{\sqrt{v_t}} dt + d\widetilde{W}_t^1, \quad dW_t^2 = -\frac{\lambda(t, S_t, v_t)}{\sigma \sqrt{v_t}} dt + d\widetilde{W}_t^2,$$

где  $\lambda$  – произвольная функция (“price of volatility risk”, см. Heston (1993)), и получить

$$\begin{aligned} dS_t &= r S_t dt + \sqrt{v_t} S_t d\widetilde{W}_t^1, \\ dv_t &= (\kappa(\theta - v_t) - \lambda(t, S_t, v_t)) dt + \sigma \sqrt{v_t} d\widetilde{W}_t^2. \end{aligned}$$

## 1.2. Мартингальность процесса цены

**Предложение.** Дисконтированная цена  $S_t^* = e^{-rt}S_t$ , где  $S_t$  задается уравнением (1), является мартингалом.

**Идея доказательства.** Имеем

$$dS_t^* = \sqrt{v_t} S_t^* dW_t^1.$$

Так как  $S_t^*$  – стохастическая экспонента, то для мартингальности достаточно проверить условие Новикова

$$\mathbb{E} \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^T v_t dt\right) < \infty.$$

Для этого достаточно найти  $\varepsilon > 0$  такое, что для всех  $t \in [0, T - \varepsilon]$  выполнено

$$\mathbb{E} \exp\left(\frac{1}{2} \int_t^{t+\varepsilon} v_s ds\right) < \infty$$

(см. Karatzas, Shreve, *Brownian motion and Stochastic Calculus*, Corollary 5.14).

## По неравенству Йенсена

$$\mathbb{E} \exp\left(\frac{1}{2} \int_t^{t+\varepsilon} v_s ds\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} \mathbb{E} e^{\frac{\varepsilon}{2} v_s} ds.$$

Далее нужно оценить  $\mathbb{E} e^{\frac{\varepsilon}{2} v_s}$ . Положим  $n = 4\lceil\kappa\theta\rceil$ ,  $\alpha = \kappa\theta/2$  и рассмотрим процесс  $v'_t$

$$dv'_t = (n/4 - 2\alpha v'_t)dt + \sqrt{v'_t} dW_t^2, \quad v'_0 = v_0.$$

Так как  $n/4 - 2\alpha v \geqslant \kappa(\theta - v)$  для всех  $v \geqslant 0$ , то по теореме сравнения для решений СДУ

$$v'_t \geqslant v_t \text{ п.н. для всех } t \geqslant 0.$$

**Замечание.** О теореме сравнения см., например, Yamada “On a comparison theorem for solutions of stochastic differential equations and its applications”.

Можно представить (см. лекцию 6)

$$v'_t = \sum_{i=1}^n (Y_t^i)^2,$$

где

$$dY_t^i = -\alpha Y_t^i dt + \frac{1}{2} dB_t^i, \quad \sum_{i=1}^n (Y_0^i)^2 = v'_0,$$

с независимыми броуновскими движениями  $B_t^i$ .

Так как процессы Орнштейна–Уленбека  $Y_t^i$  гауссовские, то для произвольной константы  $c > 1$  и всех  $t \in [0, T]$  найдется достаточно малое  $\varepsilon > 0$  такое, что

$$\mathbb{E} e^{\frac{\varepsilon}{2}(Y_t^i)^2} < c.$$

Следовательно  $\mathbb{E} e^{\frac{\varepsilon}{2}v_t} \leq c'$  для некоторой константы  $c'$ .

## 2. Вычисление цены опционов колл

### План

1. Представить цену опциона через вероятности исполнения по мартингальной мере  $P$  и по мере  $\tilde{P}$ , относительно которой  $B_t/S_t$  является мартингалом.
2. Найти характеристические функции распределения цены по мерам  $P$  и  $\tilde{P}$ .
3. Обратить характеристические функции и найти вероятности исполнения.

### Обозначения

- Логарифм цены акции:  $X_t = \ln S_t$ ,  $x = \ln s$ .
- Цена опциона колл:  $V_t = V(t, \ln S_t, v_t)$ , где функцию  $V(t, x, v)$  нужно найти.
- Условное ожидание:  $E_{t,x,v}^P(\cdot) = E(\cdot | X_t = x, v_t = v)$ ;  
условная вероятность:  $P_{t,x,v}(\cdot) = P(\cdot | X_t = x, v_t = v)$ .

## 2.1. Представление цены опциона через вероятности исполнения

Пусть исходная мера  $P$  является мартингальной. Определим новую меру

$$d\tilde{P} = e^{-rT}(S_T/S_0)dP.$$

**Лемма.** Для цены опциона  $V_t = V(t, X_t, v_t)$  выполнено равенство

$$V(t, x, v) = e^x \tilde{P}(t, x, v) - e^{-r(T-t)} K P(t, x, v),$$

где  $P, \tilde{P}$  – условные вероятности исполнения опциона:

$$P(t, x, v) = P(X_T \geq \ln K \mid X_t = x, v_t = v),$$

$$\tilde{P}(t, x, v) = \tilde{P}(X_T \geq \ln K \mid X_t = x, v_t = v).$$

**Упражнение.** Покажите, что по мере  $\tilde{P}$  цена безрискового актива, дисконтированная на стоимость акции, т.е.  $B_t^* = e^{rt}/S_t$ , является мартингалом.

**Доказательство.** Имеем

$$\begin{aligned} V(t, x, v) &= e^{-r(T-t)} \mathbf{E}_{t,x,v}^{\mathbf{P}}(S_T - K)^+ \\ &= e^{-r(T-t)} (\mathbf{E}_{t,x,v}^{\mathbf{P}} S_T \mathbf{I}(S_T \geq K) - K \mathbf{P}_{t,x,v}(S_T \geq K)), \end{aligned}$$

Тогда определим

$$P(t, x, v) = \mathbf{P}_{t,x,v}(S_T \geq K),$$

и определим (используя формулу пересчета для условных ожиданий)

$$\tilde{P}(t, x, v) = \frac{\mathbf{E}_{t,s,v}^{\mathbf{P}}(e^{-rT} S_T \mathbf{I}(S_T \geq K))}{e^{-rt} s} = \tilde{\mathbf{P}}_{t,x,v}(S_T \geq K).$$

С такими  $P$ ,  $\tilde{P}$  и получаем утверждение леммы.

## 2.2. Вычисление характеристических функций

Определим условные характеристические функции

$$\varphi(t, x, v; u) = \mathbf{E}_{t,x,v}^P e^{iuX_T}, \quad \tilde{\varphi}(t, x, v; u) = \mathbf{E}_{t,x,v}^{\tilde{P}} e^{iuX_T}.$$

Шаг 1: дифференциальные уравнения для  $\varphi$  и  $\tilde{\varphi}$

Лемма. Выполнено соотношение

$$\tilde{\varphi}(t, x, v; u) = \frac{\varphi(t, v, x; u - i)}{\varphi(t, v, x; -i)}.$$

Функция  $\varphi$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\sigma^2 v}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \rho \sigma v \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial v} + \left(r - \frac{1}{2}v\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \kappa(\theta - v) \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0, \\ \varphi(T, x, v; u) = e^{iux}. \end{cases}$$

**Доказательство.** Зафиксируем  $t, x, v$  и пусть  $s = e^x$ . Тогда

$$\tilde{\varphi}(u) = \mathbf{E}_{t,x,v}^{\tilde{\mathbf{P}}} e^{iuX_T} = \frac{\mathbf{E}_{t,x,v}^{\mathbf{P}} e^{-rT} S_T e^{iuX_T}}{e^{-rt} s} = \frac{\mathbf{E}_{t,x,v}^{\mathbf{P}} e^{i(u-i)X_T - rT}}{e^{-rt+x}} = \frac{\varphi(u-i)}{\varphi(-i)},$$

так как  $\varphi(-i) = \mathbf{E}_{t,x,v} e^{X_T} = \mathbf{E}_{t,x,v} S_T = s e^{r(T-t)}$ .

Дифференциальное уравнение следует из формулы Фейнмана–Каца.

## Шаг 2: сведение к уравнению Риккати

Обозначим далее  $\tau = T - t$  – время до исполнения опциона.

**Лемма.** Выполнено равенство

$$\varphi(t, x, v; u) = \exp(C(\tau, u) + D(\tau, u) + iux),$$

где функции  $C, D$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial \tau} &= \rho\sigma iuD - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\sigma^2D^2 - \frac{1}{2}iu - \kappa D, & D(0, u) &= 0 \\ \frac{\partial C}{\partial \tau} &= riu + \kappa\theta D, & C(0, u) &= 0\end{aligned}$$

**Замечание.** Уравнение для  $D$  – это уравнение Риккати.

**Доказательство.** Подставляя  $\varphi$  такого вида в уравнение в предыдущей лемме, получаем уравнение

$$v \left( -\frac{\partial D}{\partial \tau} + \rho \sigma i u D - \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 D^2 - \frac{1}{2} i u - \kappa D \right) + \left( -\frac{\partial C}{\partial \tau} + r i u + \kappa \theta D \right) = 0.$$

Если приравнять к нулю каждую скобку, то получим искомые уравнения. Легко проверить, что эти уравнения имеют решения, тогда в силу единственности характеристической функции получаем утверждение леммы.

### Шаг 3: решение уравнения Риккати

Зафиксируем  $u$ . Тогда имеем уравнение для  $D(\tau, u)$  (штрих обозначает производную по  $\tau$ )

$$D' = \alpha + \beta D + \gamma D^2, \quad D(0, u) = 0,$$

где

$$\alpha = -\frac{iu + u^2}{2}, \quad \beta = \rho\sigma iu - \kappa, \quad \gamma = \frac{\sigma^2}{2}.$$

Корни соответствующего характеристического уравнения:

$$r_{\pm} = \frac{\beta \pm d}{2}, \quad d = \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} = \sqrt{(\rho\sigma iu - \kappa)^2 + \sigma^2(iu + u^2)}.$$

Отсюда получаем

$$D(\tau) = -\frac{1}{\gamma} \left( \frac{K_1 r_+ e^{r_+\tau} + K_2 r_- e^{r_-\tau}}{K_1 e^{r_+\tau} + K_2 e^{r_-\tau}} \right).$$

Чтобы было выполнено условие  $D(0, \phi) = 0$  можно взять константы

$$K_1 = 1, \quad K_2 = -\frac{r_+}{r_-}.$$

Тогда получаем формулу для  $D$ , и, интегрируя ее, также получаем  $C$ :

$$D(\tau, u) = \frac{\kappa - \rho\sigma i u - d}{\sigma^2} \left( \frac{1 - e^{-d\tau}}{1 - g e^{-d\tau}} \right), \quad \text{где } g = \frac{r_+}{r_-},$$

$$C(\tau, u) = ri u \tau + \frac{\kappa \theta}{\sigma^2} \left( (\kappa - \rho\sigma i - d)\tau - 2 \ln \left( \frac{1 - g e^{-d\tau}}{1 - g} \right) \right).$$

**Замечание.** Условие  $\beta^2 \neq 4\alpha\gamma$ , нужное для представления решения уравнения Риккати в указанном виде, здесь можно не учитывать: оно может не выполняться только для конечного числа значений  $u$ , где характеристические функции нужно доопределить по непрерывности.

## 2.3. Обращение характеристических функций

Предложение (Gil-Pelaez, 1951). Пусть  $\varphi(u)$  – характеристическая функция распределения  $F(x)$ , т.е.  $\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} dF(x)$ . Тогда

$$F(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left( \frac{e^{-iux} \varphi(u)}{iu} \right) du.$$

Отсюда получаем

$$P(t, x, v) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left( \frac{e^{-iu \ln K} \varphi(t, x, v; u)}{iu} \right) du,$$

$$\tilde{P}(t, x, v) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left( \frac{e^{-iu \ln K} \tilde{\varphi}(t, x, v; u)}{iu} \right) du.$$

## 2.4. Итоговый результат

Пусть модель задается уравнениями (1)–(2). Определим характеристические функции

$$\varphi(t, x, v; u) = \exp(C(T - t, u) + D(T - t, u) + iux),$$

$$\tilde{\varphi}(t, x, v; u) = \frac{\varphi(t, x, v; u - i)}{\varphi(t, x, v; -i)},$$

где

$$C(\tau, u) = riu\tau + \frac{\kappa\theta}{\sigma^2} \left( (\kappa - \rho\sigma i - d(u))\tau - 2 \ln \left( \frac{1 - g(u)e^{-d(u)\tau}}{1 - g(u)} \right) \right),$$

$$D(\tau, u) = \frac{\kappa - \rho\sigma iu - d(u)}{\sigma^2} \left( \frac{1 - e^{-d(u)\tau}}{1 - g(u)e^{-d(u)\tau}} \right),$$

$$d(u) = \sqrt{(\rho\sigma iu - \kappa)^2 + \sigma^2(iu + u^2)}, \quad g(u) = \frac{\rho\sigma iu - \kappa + d(u)}{\rho\sigma iu - \kappa - d(u)}.$$

**Теорема (Хестон, 1993).** Для опциона колл со страйком  $K$  и временем исполнения  $T$  цена в момент  $t$  имеет вид  $V_t = V(t, \ln S_t, v_t)$ , где

$$V(t, x, v) = e^x \tilde{P}(t, x, v) - e^{-r(T-t)} K P(t, x, v),$$

и функции  $\tilde{P}, P$  определены по формулам

$$P(t, x, v) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{Re} \left( \frac{e^{-iu \ln K} \varphi(t, x, v; u)}{iu} \right) du,$$

$$\tilde{P}(t, x, v) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{Re} \left( \frac{e^{-iu \ln K} \tilde{\varphi}(t, x, v; u)}{iu} \right) du.$$

## 2.5. Замечание: другое представление характеристической функции

В статье Хестона функции  $C, D$  заданы немного по-другому:

$$C' = ri\tau + \frac{\kappa\theta}{\sigma^2} \left( (\kappa - \rho\sigma i + d)\tau - 2 \ln \left( \frac{1 - ge^{+d\tau}}{1 - g} \right) \right),$$
$$D' = \frac{\kappa - \rho\sigma i u + d}{\sigma^2} \left( \frac{1 - e^{+d\tau}}{1 - ge^{+d\tau}} \right), \quad g = \frac{\rho\sigma i u - \kappa - d}{\rho\sigma i u - \kappa + d}.$$

Выражение для  $C', D'$  получаются если при решении уравнения Риккати на с. 17 взять  $K_1 = -\frac{r_-}{r_+}$ ,  $K_2 = 1$ ,

**Упражнение.** Проверьте по свойствам комплексных чисел  $C' = C$ ,  $D' = D$ .

Известно, что использование  $C', D'$  может приводить к неустойчивости численных методов для вычисления цен, а использование  $C, D$  не приводит.

**Статья:** Albrecher, Mayer, Schoutens, Tistaert, “The little Heston trap”.

### 3. Дополнение: уравнение Риккати

Определение. Дифференциальным **уравнением Риккати** с постоянными коэффициентами называется уравнение:

$$y'(x) = \alpha + \beta y(x) + \gamma y(x)^2 \quad (\gamma \neq 0). \quad (*)$$

Предложение. Пусть  $\beta^2 - 4\alpha\gamma \neq 0$ . Тогда решением уравнения (\*) является

$$y(x) = -\frac{1}{\gamma} \left( \frac{K_1 r_+ e^{r_+ x} + K_2 r_- e^{r_- x}}{K_1 e^{r_+ x} + K_2 e^{r_- x}} \right),$$

где  $K_1, K_2$  – константы, а  $r_{\pm} \in \mathbb{C}$  – корни уравнения  $r^2 + \beta r + \alpha\gamma = 0$ :

$$r_{\pm} = \frac{\beta \pm d}{2}, \quad d = \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}.$$

**Доказательство.** Легко проверить, что если  $z(x)$  решает уравнение

$$z'' - \beta z' + \alpha\gamma z = 0,$$

то

$$y(x) = -\frac{z'(x)}{\gamma z(x)},$$

решает уравнение Риккати.

Решение уравнения для  $z(x)$  имеет вид

$$z(x) = K_1 e^{r+x} + K_2 e^{r-x}.$$

## Литература

1. Статья Хестона:  
Heston, "Solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options", 1993.
2. Более подробное доказательство формулы для цены опционов:  
Rouah, *The Heston Model and Its Extensions in Matlab and C#*, Chapter 1;  
Gatheral, *Volatility Surface*, Chapter 2.

# Модели стохастической волатильности

Лекция 9: Численные методы для модели Хестона

Михаил Житлухин

# Содержание

<b>1 Быстрое преобразования Фурье для оценки опционов</b>	<b>3</b>
1.1 Обзор метода Карра–Мадана . . . . .	3
1.2 Аналитическая формула . . . . .	5
1.3 Численное обращение преобразования Фурье . . . . .	8
1.4 Быстрое преобразование Фурье . . . . .	9
1.5 Дополнения . . . . .	11
<b>2 Качественное поведение модели Хестона</b>	<b>12</b>
2.1 Оценка параметров . . . . .	14
<b>3 Симуляция цен в модели Хестона</b>	<b>16</b>
3.1 О методах Монте–Карло . . . . .	16
3.2 Метод Броади–Кая (точный, но медленный и трудный) . . . . .	20
3.3 Схема Эйлера для модели Хестона (быстрая, но не точная) . . . . .	24
3.4 Метод Андерсена для модели Хестона (самый эффективный) . . . . .	26
<b>4 Дополнение: схемы дискретизации СДУ</b>	<b>33</b>
4.1 Схемы Эйлера и Мильштейна . . . . .	34
4.2 Порядок сходимости схем аппроксимации СДУ . . . . .	37

# 1. Быстрое преобразования Фурье для оценки опционов

Статья: Carr, Madan, "Option valuation using the fast Fourier transform".

## 1.1. Обзор метода Карра–Мадана

Вычисление цен опционов в модели Хестона сводилось к нахождению

$$P(t, x, v) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left( \frac{e^{-iu \ln K} \varphi(t, x, v; u)}{iu} \right) du.$$

Использование этой формулы оказывается медленным если нужно вычислить цены нескольких опционов для разных страйков.

- В подходе, предложенном Карром и Маданом, преобразование Фурье  $\psi_T(u)$  цены опциона  $C_T(K)$  выражается через  $\varphi_T(u)$ . Затем  $\psi_T(u)$  обращается численно с использованием быстрого преобразования Фурье.
- Так как функция  $C_T(K)$  не интегрируема на отрицательной полуоси, то нужно рассматривать функцию  $e^{\alpha K} C_T(K)$ , где  $\alpha > 0$  – параметр, который нужно подобрать.

## Обозначения

Пусть исходная мера  $P$  уже является мартингальной. Обозначим:

- $X_t = \ln S_t$  – логарифм цены,
- $C_T(k) = e^{-rT} \mathbb{E}(e^{X_T} - e^k)^+$  – цена опциона колл с лог-страйком  $k$ ,
- $p_T(x)$  – плотность  $X_T$  по мартингальной мере,
- $\varphi_T(u) = \mathbb{E} e^{iuX_T}$  – характеристическая функция  $X_T$ .

## 1.2. Аналитическая формула

**Предложение.** Пусть  $c(k) := e^{\alpha k} C_T(k) \in L^1$  для некоторой константы  $\alpha > 0$ . Тогда для преобразования Фурье

$$\psi(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iuk} c(k) dk$$

верна формула

$$\psi(u) = \frac{e^{-rT} \varphi_T(u - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - u^2 + i(2\alpha + 1)u}.$$

**Следствие.** Для цены опциона верна формула

$$C_T(k) = \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^\infty e^{-ivu} \psi(u) du.$$

## Доказательство предложения.

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \int_{\mathbb{R}} e^{iuk} \int_k^{\infty} e^{\alpha k} e^{-rT} (e^x - e^k) p_T(x) dx dk \\&= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} p_T(x) \int_{-\infty}^x (e^{x+\alpha k} - e^{(1+\alpha)k}) e^{iuk} dk dx \\&= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} p_T(x) \left( \frac{e^{(\alpha+1+iu)x}}{\alpha + iu} - \frac{e^{(\alpha+1+iu)x}}{\alpha + 1 + iu} \right) dx \\&= \frac{e^{-rT} \varphi_T(u - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - u^2 + i(2\alpha + 1)u}.\end{aligned}$$

**Упражнение.** Докажите следствие используя формулу обращения. (И почему интеграл берется по  $\mathbb{R}_+$ , а не  $\mathbb{R}$  как в формуле обращения?)

## Как выбрать $\alpha$ ?

Для корректной определенности  $\psi(u)$  необходимо

$$\int_0^\infty c(k) < \infty \iff |\psi(0)| < \infty \iff \varphi_T(-i(\alpha+1)) < \infty \iff \mathbb{E} S_T^{\alpha+1} < \infty.$$

Простой метод выбора  $\alpha$  (Carr, Madan): найти максимальное  $\alpha_{\max}$  такое, что  $\mathbb{E} S_T^{\alpha+1} < \infty$  и взять

$$\alpha = \frac{\alpha_{\max}}{4}.$$

### 1.3. Численное обращение преобразования Фурье

Пусть  $S_0 = 1$ . Для вычисления цен опционов со страйком  $K$  близким к 1 (т.е.  $k = 0$ ) возьмем значения

$$u_n = n\Delta u, \quad k_m = -\frac{N\Delta k}{2} + m\Delta k, \quad m, n = 0, \dots, N-1,$$

где  $\Delta u > 0$ ,  $\Delta k > 0$  – параметры, и приблизим интеграл суммой

$$C_T(k_m) = \frac{e^{-\alpha k_m}}{\pi} \int_0^\infty e^{-iuk_m} \psi(u) du \approx \frac{e^{-\alpha k_m}}{\pi} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-iu_n k_m} \psi(u_n).$$

Если подобрать  $\Delta u, \Delta k$  так, что  $\Delta u \Delta k = 2\pi/N$ , то эту сумму можно вычислить используя быстрое преобразование Фурье:

$$C_T(k_m) \approx \frac{e^{-\alpha k_m}}{\pi} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} nm} x_n, \quad x_n = (-1)^n \psi(u_n).$$

## 1.4. Быстрое преобразование Фурье

Определение. **Дискретным преобразованием Фурье (ДПФ)** последовательности  $x_n \in \mathbb{C}$ , где  $n = 0, \dots, N - 1$ , называется последовательность  $X_m$

$$X_m = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} nm} x_n, \quad m = 0, \dots, N - 1.$$

Упражнение. Докажите формулу обращения  $x_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} nm} X_m$ .

**Быстрое преобразование Фурье (БПФ)** – это алгоритм, который позволяет вычислить последовательность  $X_m$  за  $O(N \log N)$  операций вместо  $O(N^2)$ .

## Алгоритм Кули–Тьюки для $N = 2^L$

- Заметим, что для  $m = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$

$$\begin{aligned} X_m &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} e^{-\frac{2\pi i}{N/2} nm} + e^{-\frac{2\pi i}{N} m} \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} e^{-\frac{2\pi i}{N/2} nm} \\ &= E_m + e^{-\frac{2\pi i}{N} m} O_m, \end{aligned} \tag{1}$$

$$X_{\frac{N}{2}+m} = E_m - e^{-2\pi i \frac{m}{N}} O_m, \tag{2}$$

$E_m, O_m$  – ДПФ подпоследовательностей с четными/нечетными индексами.

- Если известны  $E_m, O_m$  для  $m = 0, \dots, N/2 - 1$ , то последовательность  $X_m$  можно вычислить за  $O(N)$  операций по формулам (1)–(2).
- Последовательности  $E_m, O_m$  вычисляются по такому же алгоритму.
- Продолжая рекурсивно, за  $L = \log_2 N$  шагов сводим задачу к ДПФ последовательности длины 1.

## 1.5. Дополнения

- Использование БПФ для опционов с близкой датой исполнения: Carr, Madan, “Option valuation...”
- Контроль погрешности: Lee, “Option Pricing by Transform Methods: Extensions, Unification, and Error Control”

Также изложение этого материала можно найти в Rouah, *The Heston Model and Its Extensions in Matlab and C#*, Chapter 3.

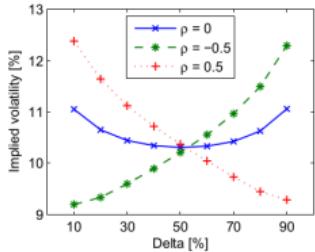
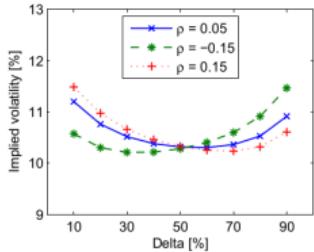
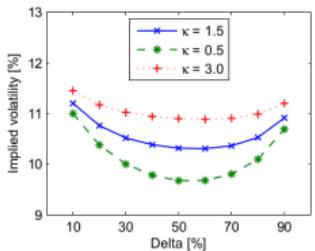
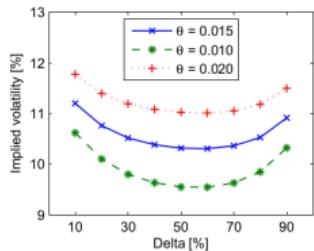
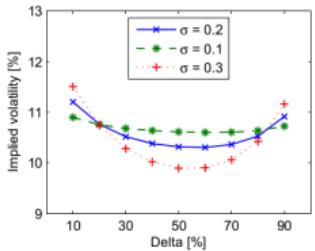
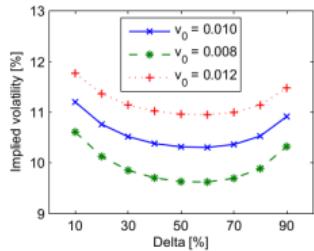
## 2. Качественное поведение модели Хестона

Статья: Janek et al. (2010), "FX smile in the Heston model", arXiv:1010.1617.

Рассмотрим модель Хестона с  $r = 0$ :

$$\begin{aligned} dS_t &= \sqrt{V_t}dW_t^1, \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_t^2. \end{aligned}$$

На графиках далее синяя кривая показывает предполагаемую волатильность для параметров  $v_0 = 0.01$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $\kappa = 1.5$ ,  $\theta = 0.015$ ,  $\rho = 0.05$ , а другие кривые получаются из нее изменением одного параметра.



## 2.1. Оценка параметров

Пусть  $\hat{\sigma}(T, K)$  – рыночная предполагаемая волатильность,  $\sigma(T, K; v_0, \kappa, \theta, \sigma, \rho)$  – предполагаемая волатильность в модели Хестона.

Для нахождения оптимальных параметров нужно численно минимизировать функцию ошибки

$$\sum_{T, K} (\hat{\sigma}(T, K) - \sigma(T, K; v_0, \kappa, \theta, \sigma, \rho))^2 \xrightarrow{v_0, \kappa, \theta, \sigma, \rho} \min,$$

где сумма берется по страйкам и временам исполнения из доступных данных по ценам опционов (иногда рассматривают также другие функции штрафа).

Обычно используют алгоритм минимизации методом градиентного спуска. Для выбора начальных значений параметров можно использовать следующие оценки:

- $v_0 = \hat{\sigma}(T, S_0)$  – предполагаемая волатильность ATM (at the money) для некоторого  $T$ ,
- $\kappa = 1, \kappa = 2$  или  $\kappa = 3$ ,
- Из графиков выше видно, что  $v_0$  и  $\theta$ ,  $\sigma$  и  $\kappa$  оказывают схожий эффект на форму кривой волатильности, поэтому можно некоторые из этих параметров зафиксировать, например  $v_0$  и  $\kappa$ ,
- $\rho = -0.5$  или оценить по прошлым данным.

### 3. Симуляция цен в модели Хестона

#### 3.1. О методах Монте–Карло

**Определение.** Для случайной величины  $X$  **метод Монте–Карло** вычисления  $\mathbb{E} X$  состоит в симулировании выборки  $x_1, \dots, x_m$  из распределения  $X$  и приближении

$$\mathbb{E} X \approx \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i.$$

**Напоминание (обоснование метода).** Выборка – это реализация н.о.р. величин  $X_1, \dots, X_m$  с распределением  $X$ . Пусть  $\mathbb{E} X^2 < \infty$ . Согласно ЗБЧ,

$$\bar{X} := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i \rightarrow \mathbb{E} X \text{ п.н. при } \rightarrow \infty.$$

Обозначим выборочную дисперсию  $S^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2$ . Тогда по ЦПТ

$$P(\bar{X} \in [\mathbb{E} X - \varepsilon, \mathbb{E} X + \varepsilon]) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{S/\sqrt{m}}\right) - 1.$$

## Как симулировать случайную величину

**Лемма (преобразование Смирнова).** Пусть  $X$  имеет непрерывную функцию распределения  $F$ , строго возрастающую на множестве  $\{x : 0 < F(x) < 1\}$ , и  $U$  имеет равномерное распределение на  $[0, 1]$ . Тогда

$$F^{-1}(U) \stackrel{\text{d}}{=} X.$$

Таким образом, выборку  $x_1, \dots, x_m$  можно получить из равномерной выборки  $u_1, \dots, u_m$  по формуле  $x_i = F^{-1}(u_i)$ .

**Замечание.** Это универсальный метод, но часто для конкретных распределений есть более эффективные методы симуляции.

## Монте–Карло для случайных процессов

Нас будет интересовать случай, когда

$$X = f(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})$$

является некоторой функцией от марковского процесса  $S$ , вычисленного в точках  $0 \leq t_1 < \dots < t_n = T$ .

### Примеры

1. Барьерный опцион колл up-and-in со страйком  $K$  и барьером  $B$ :

$$X = (S_T - K)^+ \mathbf{I}(\exists i \leq n : S_{t_i} \geq B).$$

2. Опцион клике:

$$X = K \max \left( 1 + f, 1 + \sum_{i=1}^n \min(c, R_i^+) \right), \quad R_i = \frac{S_{t_i} - S_{t_{i-1}}}{S_{t_{i-1}}},$$

где  $f, c > 0$  – параметры (“floor” и “cap” доходность).

## Симулирование по переходной вероятности

Если для марковского процесса имеется эффективный метод симулирования значений из условного распределения

$$P(S_t \leq x \mid S_u = s),$$

то можно симулировать траекторию последовательно в точках  $0, t_1, t_2, \dots$

**Пример.** Для броуновского движения

$$B_0 = 0, \quad B_{t_1} = \sqrt{t_1} \xi_1, \quad B_{t_2} = B_{t_1} + \sqrt{t_2 - t_1} \xi_2, \dots,$$

где  $\xi_i$  – н.о.р. стандартные нормальные случайный величины.

### 3.2. Метод Броади–Кая (точный, но медленный и трудный)

Статья: Broadie, Kaya, "Exact simulation of stochastic volatility and other affine jump diffusion processes"

Из уравнений модели Хестона следует, что для  $t > u$

$$S_t = S_u \exp \left( r(t-u) - \frac{1}{2} \int_u^t v_s ds + \rho \int_u^t \sqrt{v_s} dW_s^1 + \sqrt{1-\rho^2} \int_u^t \sqrt{v_s} dW_s^2 \right),$$
$$v_t = v_u + \kappa \theta (t-u) - \kappa \int_u^t v_s ds + \sigma \int_u^t \sqrt{v_s} dW_s^1.$$

Для симуляции  $(S_t, v_t)$  при заданных значениях  $(S_u, v_u)$  нужно:

1. получить  $v_t$  при заданном  $v_u$ ;
2. получить  $\int_u^t v_s ds$  при заданных  $v_t$  и  $v_u$ ;
3. выразить  $\int_u^t \sqrt{v_s} dW_s^1$  из уравнения для  $v_t$ ;
4. получить  $S_t$ .

## Шаг 1: симулирование $v_t$

Известно, что

$$\text{Law}(v_t \mid v_u = v) = \frac{\sigma^2(1 - e^{-\kappa(t-u)})}{4\kappa} \tilde{\chi}_d^2 \left( \frac{4\kappa e^{-\kappa(t-u)}}{\sigma^2(1 - e^{-\kappa(t-u)})} v \right), \quad d = \frac{4\theta\kappa}{\sigma^2},$$

где  $\chi_d'^2(\lambda)$  – нецентральное распределение хи-квадрат с  $d$  степенями свободы и параметром нецентральности  $\lambda$ .

Для симулирования  $\chi_d'^2(\lambda)$  можно воспользоваться тем фактом, что

$$\chi_d'^2(\lambda) \sim \chi_{d+2N}^2,$$

где  $\chi_k^2$  – распределение хи-квадрат с  $k$  степенями свободы,  $N$  – случайная величина с распределением Пуассона со средним  $\lambda/2$ .

**Упражнение.** Докажите последний факт, воспользовавшись известной формулой плотности распределения  $\tilde{\chi}^2$ .

Шаг 2: симулирование  $\int_u^t v_s ds$

Обозначим

$$V_{u,t} = \int_u^t v_s ds.$$

Известно аналитическое выражение для характеристической функции (см. формулу (13) в статье Broadie, Kaya)

$$\varphi(a; x, y) = \mathbb{E}(e^{iaV_{u,t}} \mid v_u = x, v_t = y).$$

Тогда, пользуясь преобразованием Смирнова, для получения значения  $V_{u,t}$  при заданных значениях  $v_u, v_t$  нужно получить равномерно распределенную величину  $U$  и численно решить уравнение

$$F(V) = U,$$

где  $F = \mathbb{P}(V_{u,t} \leq V \mid v_u = x, v_t = y)$  находится с помощью обращения  $\varphi$ .

### Шаг 3

Имея значения  $v_u, v_t, V_{u,t}$  полагаем (согласно уравнению для  $v_t$ )

$$I_{u,t}^1 := \int_u^t \sqrt{v_s} dW_s^1 = \frac{1}{\sigma} \left( v_t - v_u - \kappa \theta(t-u) + \kappa V_{u,t} \right).$$

Далее симулируем

$$I_{u,t}^2 := \int_u^t \sqrt{v_s} dW_s^2,$$

пользуясь тем, что процессы  $v$  и  $W^2$  независимы и, следовательно,  $I_{t,u}^2$  имеет нормальное распределение со средним 0 и дисперсией  $V_{u,t}$ .

Наконец, получаем

$$S_t = S_u \exp \left( r(t-u) - \frac{1}{2} V_{u,t} + \rho I_{u,t}^1 + \sqrt{1-\rho^2} I_{t,u}^2 \right).$$

### 3.3. Схема Эйлера для модели Хестона (быстрая, но не точная)

Согласно общему алгоритму схемы Эйлера, будем аппроксимировать траекторию процесса  $(S_t, v_t)$  в точках  $t_i = i\Delta t$ ,  $i = 0, \dots, n$ , где  $\Delta t = T/n$ .

“Наивная” аппроксимация

$$\begin{aligned}\hat{S}_{t_{i+1}} &= \hat{S}_{t_i} + r\hat{S}_{t_i}\Delta t + \sqrt{\hat{v}_{t_i}}\hat{S}_{t_i}(\rho\Delta W_{t_{i+1}}^1 + \sqrt{1-\rho^2}\Delta W_{t_{i+1}}^2), \\ \hat{v}_{t_{i+1}} &= \hat{v}_{t_i} + \kappa(\theta - \hat{v}_{t_i})\Delta t + \sigma\sqrt{\hat{v}_{t_i}}\Delta W_{t_{i+1}}^1\end{aligned}$$

приводит к неудовлетворительным результатам, так как в ней значения  $\hat{S}_t$ ,  $\hat{v}_t$  могут оказаться отрицательными.

Лучше использовать следующую аппроксимацию для  $(X_t, v_t)$ , где  $X_t = \ln S_t$ :

$$\widehat{X}_{t_{i+1}} = \widehat{X}_{t_i} + (r - \widehat{v}_{t_i}^+/2)\Delta t + \sqrt{\widehat{v}_{t_i}^+}(\rho\Delta W_{t_{i+1}}^1 + \sqrt{1-\rho^2}\Delta W_{t_{i+1}}^2),$$

$$\widehat{v}_{t_{i+1}} = \widehat{v}_{t_i} + \kappa(\theta - \widehat{v}_{t_i}^+)\Delta t + \sigma\sqrt{\widehat{v}_{t_i}^+}\Delta W_{t_{i+1}}^1,$$

$$\widehat{S}_{t_{i+1}} = \exp(\widehat{X}_{t_{i+1}})$$

(здесь процесс  $\widehat{v}_t$  может стать отрицательным, но при нахождении в отрицательном значении будет иметь положительный снос без броуновской части).

**Замечание.** Приближение для  $X_t$  следует из того, что  $dX_t = (r - \frac{1}{2}v_t)dt + \sqrt{v_t}dW_t$ .

### 3.4. Метод Андерсена для модели Хестона (самый эффективный)

Статья: Andersen, "Efficient simulation of the Heston stochastic volatility model" (в этой лекции рассматривается только "схема QE" без "мартингальной поправки").

Идея метода:

1. Получить  $\hat{v}_{t_{i+1}}$  из приближения условного распределения при условии  $\hat{v}_{t_i}$ .
2. Получить  $\hat{X}_{t_{i+1}} = \ln \hat{S}_{t_{i+1}}$  по формуле аналогичной методу Броади–Кая (но без обращения характеристической функции).

Для реализации шага 1 используются следующие факты:

- при достаточно большом  $\lambda$  распределение  $\chi_d'^2(\lambda)$  хорошо приближается степенной функцией от нормального распределения;
- при малом  $\lambda$  распределение  $\chi_d'^2(\lambda)$  близко к центральному распределению хи-квадрат, которое имеет плотность

$$f_d(x) = \frac{1}{2^{d/2}\Gamma(d/2)} e^{-x/2} x^{d/2-1}.$$

На практике оказывается, что  $d \ll 2$ , поэтому можно аппроксимировать эту плотность суммой дельта-функции и экспоненты вблизи 0.

## Шаг 1: симулирование $v_t$

- Для “больших” значений  $\hat{v}_{t_i}$  будем симулировать

$$\hat{v}_{t_{i+1}} = a(b + Z)^2, \quad (*)$$

где  $a, b$  – параметры, зависящие от  $\hat{v}_{t_i}$ , и  $Z \sim N(0, 1)$ .

- Для “маленьких” значений  $\hat{v}_{t_i}$  будем симулировать  $\hat{v}_{t_{i+1}}$  из распределения

$$P(\hat{v}_{t_{i+1}} = 0) = p, \quad P(\hat{v}_{t_{i+1}} \in [x, x + dx]) = \beta(1 - p)e^{-\beta x} \text{ при } x > 0 \quad (**)$$

(масса в нуле и плотность при  $x > 0$ ), где  $p, \beta$  – параметры.

Параметры  $a, b, p, \beta$  нужно выбрать так, чтобы получить те же ожидание и дисперсию, что у настоящего условного распределения  $\text{Law}(v_{t_{i+1}} | v_{t_i})$ .

**Предложение.** Для процесса  $v_t$  имеем

$$\mathbb{E}(v_{t+\Delta t} \mid v_t = v) = m(v), \quad \mathbb{D}(v_{t+\Delta t} \mid v_t = v) = s^2(v).$$

где

$$m(v) = \theta + (v - \theta)e^{-\kappa\Delta t},$$

$$s^2(v) = \frac{v\sigma^2 e^{-\kappa\Delta t}}{\kappa} (1 - e^{-\kappa\Delta t}) + \frac{\theta\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-\kappa\theta})^2.$$

**Доказательство.** См. статью Андерсена.

**Предложение.** Пусть  $\psi(v) = s^2(v)/m^2(v)$ . Тогда  $E(\hat{v}_{t_{i+1}} \mid \hat{v}_{t_i} = v) = m(v)$ ,  $D(\hat{v}_{t_{i+1}} \mid \hat{v}_{t_i} = v) = s^2(v)$  в следующих случаях:

1. если  $\psi(v) \leq 2$  и  $\hat{v}_{t_{i+1}}$  определяется по формуле (\*) с параметрами

$$b^2 = \frac{2}{\psi(v)} - 1 + \sqrt{4 - 2\psi(v)}, \quad a = \frac{m(v)}{1 + b^2};$$

2. если  $\psi(v) \geq 1$  и  $\hat{v}_{t_{i+1}}$  определяется по формуле (\*\*) с параметрами

$$p + \frac{\psi(v) - 1}{\psi(v) + 1}, \quad \beta = \frac{1 - p}{m}.$$

**Доказательство.** Упражнение.

Таким образом, для симуляции  $\hat{v}_{t_{i+1}}$  можно использовать формулу (\*) если  $\psi(\hat{v}_{t_i}) \leq 1.5$  и формулу (\*\*) если  $\psi(\hat{v}_{t_i}) \geq 1.5$ .

## Шаг 2: симулирование $X_t = \ln S_t$

Из уравнений модели Хестона имеем

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (r - v_s/2) ds + \rho \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v_s} dW_s^1 + \sqrt{1 - \rho^2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v_s} dW_s^2,$$
$$v_{t_{i+1}} = v_{t_i} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \kappa(\theta - v_s) ds + \sigma \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v_s} dW_s^1.$$

Выражая из второго уравнения интеграл по  $dW_s^1$ , получаем

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + \frac{\rho}{\sigma} (V_{t_{i+1}} - V_{t_i} - \kappa\theta\Delta t)$$
$$+ \left( \frac{\kappa\rho}{\sigma} - \frac{1}{2} \right) \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_s ds + \sqrt{1 - \rho^2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v_s} dW_s^2.$$

Далее можно аппроксимировать

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} v_s ds \approx v_{t_i} \Delta t, \quad \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v_s} dW_s^2 \approx \sqrt{v_{t_i} \Delta t} Z_i,$$

где  $Z_i$  – последовательность н.о.р. величин  $N(0, 1)$ , не зависящих от  $v_s$  (так как интеграл по  $dW_s^2$  имеет условно-гауссовское распределение при условии, когда фиксирована траектория  $v_s$ ).

Таким образом, будем симулировать  $\hat{X}_{t_{i+1}}$  следующим образом:

$$\hat{X}_{t_{i+1}} = \hat{X}_{t_i} + K_0 + K_1 \hat{v}_{t_i} + K_2 \hat{v}_{t_{i+1}} + \sqrt{K_3 \hat{v}_{t_i}} Z_i,$$

где

$$K_0 = -\frac{\rho \kappa \theta}{\sigma} \Delta t, \quad K_1 = \left( \frac{\kappa \rho}{\sigma} - \frac{1}{2} \right) \Delta t - \frac{\rho}{\sigma}, \quad K_2 = \frac{\rho}{\sigma}, \quad K_3 = (1 - \rho^2) \Delta t.$$

## 4. Дополнение: схемы дискретизации СДУ

**Литература:** 1. Glasserman, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Ch. 6 (кратко).  
2. Kloeden, Platen, *Numerical Solutions of Stochastic Differential Equations*, Part IV–VI (подробно).

Для одномерного и однородного СДУ

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t, \quad X_0 = x_0,$$

рассмотрим способы симулирования траектории процесса  $X_t$  в точках

$$t_i = i\Delta t, \quad i = 0, \dots, n, \quad \text{где } \Delta t = \frac{T}{n}.$$

Далее будем предполагать, что СДУ имеет единственное сильное решение.

**Замечание.** Результаты, приводимые далее, аналогично обобщаются на многомерные и неоднородные СДУ.

#### 4.1. Схемы Эйлера и Мильштейна

Пусть  $(\hat{X}_i)_{i=0}^n$  обозначают симулированные значения траектории в точках  $t_i$ , а  $\Delta W_{t_i} = W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$  – приращения броуновского движения.

**Определение.** В **схеме Эйлера** (или **схеме Эйлера–Маруямы**) полагается

$$\hat{X}_{t_{i+1}} = \hat{X}_{t_i} + a(\hat{X}_{t_i})\Delta t + b(\hat{X}_{t_i})\Delta W_{t_{i+1}}.$$

В **схеме Мильштейна** полагается

$$\hat{X}_{t_{i+1}} = \hat{X}_{t_i} + a(\hat{X}_{t_i})\Delta t + b(\hat{X}_{t_i})\Delta W_{t_{i+1}} + \frac{1}{2}b'(\hat{X}_{t_i})b(\hat{X}_{t_i})((\Delta W_{t_{i+1}})^2 - \Delta t).$$

Для практической реализации в качестве  $\Delta W_{t_i}$  нужно взять последовательность н.о.р. величин с распределением  $N(0, \Delta t)$ .

## Обоснование схемы Мильштейна

По формуле Ито для любого  $s \in [t_i, t_{i+1}]$  имеем

$$a(X_s) = a(X_{t_i}) + \int_{t_i}^s \left( a'(X_u)a(X_u) + \frac{1}{2}a''(X_u) \right) du + \int_{t_i}^s a'(X_u)b(X_u)dW_u,$$

и аналогичная формула верна для  $b(X_s)$ . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} X_{t_{i+1}} &= X_{t_i} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} a(X_s)ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(X_s)dW_s = \\ &= X_{t_i} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} a(X_{t_i})ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(X_{t_i})dW_s \\ &\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^s b'(X_u)b(X_u)dW_udW_s + \dots, \end{aligned}$$

где “ $\dots$ ” содержит слагаемые порядка меньше чем  $dt$  ( $dt \cdot dW_t$  и  $(dt)^2$ ).

Последний интеграл можно аппроксимировать так:

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^s b'(X_u) b(X_u) dW_u dW_s &\approx b'(X_{t_i}) b(X_{t_i}) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^s dW_u dW_s \\ &= b'(X_{t_i}) b(X_{t_i}) \cdot \frac{(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 - \Delta t}{2}. \end{aligned}$$

Аппроксимируя два других интеграла аналогично схеме Эйлера, получаем схему Мильштейна.

## 4.2. Порядок сходимости схем аппроксимации СДУ

Пусть  $W_t$  – броуновское решение. Построим по нему два процесса:

1.  $X_t$  – решение СДУ;
2.  $\widehat{X}_t^{(n)}$  – кусочно-линейная аппроксимация траектории по симулированным значениям  $\widehat{X}_{t_0}, \dots, \widehat{X}_{t_n}$ , в которой  $\Delta W_{t_i}$  берется для того же самого броуновского движения.

**Определение.** Схема аппроксимации имеет **сильный порядок сходимости**  $\beta$  если найдется константа  $c > 0$  и номер  $N \in \mathbb{N}$  такие, что для всех  $n \geq N$

$$\mathbb{E} |\widehat{X}_T^{(n)} - X_T| \leq c(\Delta t)^\beta.$$

Численная схема имеет **слабый порядок сходимости**  $\beta$  если для любого многочлена  $f(x)$  найдутся  $c > 0$ ,  $N \in \mathbb{N}$  такие, что для всех  $n \geq N$

$$|\mathbb{E} f(\widehat{X}_T^{(n)}) - \mathbb{E} f(X_T)| \leq c(\Delta t)^\beta.$$

**Предложение.** Схема Эйлера имеет слабый порядок сходимости 1 и сильный порядок сходимости  $1/2$ . Схема Мильштейна имеет слабый порядок сходимости 1 и сильный порядок сходимости 1.

(Это выполнено при некоторых условиях на гладкость коэффициентов СДУ; см. детали в книге Кледена и Платена.)

**Замечание 1.** В чем отличие сильного и слабого порядка сходимости?

- Слабый порядок гарантирует сходимость только распределения в один момент времени. Соответствующая оценка скорости сходимости применима для опционов, выплата которых не зависит от траектории процесса цены.
- Сильный порядок гарантирует сходимость траекторий. Оценка скорости сходимости в сильном порядке применима для опционов, зависящих от траекторий процесса цены.

**Замечание 2.** Как оказывается сильный порядок  $1/2$  схемы Эйлера–Маруямы на скорость симуляции?

- Чтобы увеличить точность в  $t$  раз, нужно увеличить количество точек разбиения в  $t^2$  раз, что на практике может существенно увеличить время работы алгоритма.

# Модели стохастической волатильности

Лекция 10: Модели SABR и SVI

Михаил Житлухин

## Содержание

<b>1</b>	<b>Модель SABR</b>	<b>3</b>
1.1	Формула Хэгана . . . . .	4
1.2	Качественное поведение кривой предполагаемой волатильности . . .	10
1.3	Оценка параметров . . . . .	13
1.4	Возможный арбитраж в модели SABR . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Модель SVI</b>	<b>15</b>
2.1	Сырая параметризация . . . . .	15
2.2	Естественная параметризация и связь с моделью Хестона . . . . .	18
2.3	Асимптотика предполагаемой волатильности (формула Ли) . . . . .	20

## 1. Модель SABR

Статья: Hagan, Kumar, Lesniewski, Woodward, "Managing smile risk", 2002.

Определение. Модель SABR (stochastic alpha, beta, rho) для цены форварда задается уравнениями

$$\begin{aligned} dF_t &= \alpha_t F_t^\beta dW_t^1, & F_0 = f > 0, \\ d\alpha_t &= \nu \alpha_t dW_t^2, & \alpha_0 = \alpha > 0, \\ dW_t^1 dW_t^2 &= \rho dt \end{aligned}$$

(определенными до момента достижения нуля одним из процессов).

Эта модель популярна потому, что есть удобная приближенная формула для вычисления предполагаемой волатильности Блэка  $\widehat{\sigma}_B$ .

## 1.1. Формула Хэгана

**Теорема.** Для опциона колл верна приближенная формула

$$\hat{\sigma}_B(T, K) = \frac{\alpha}{(fK)^{(1-\beta)/2} \left\{ 1 + \frac{(1-\beta)^2}{24} \ln^2 \frac{f}{K} + \frac{(1-\beta)^4}{1920} \ln^4 \frac{f}{K} + \dots \right\}} \cdot \left( \frac{z}{x(z)} \right) \cdot \\ \cdot \left\{ 1 + \left[ \frac{(1-\beta)^2}{24} \frac{\alpha^2}{(fK)^{1-\beta}} + \frac{\rho\beta\nu\alpha}{4(fK)^{(1-\beta)/2}} + \frac{2-3\rho^2}{24} \nu^2 \right] T + \dots \right\},$$

где

$$z = \frac{\nu}{\alpha} (fK)^{(1-\beta)/2} \ln \frac{f}{K}, \quad x(z) = \ln \left\{ \frac{\sqrt{1 - 2\rho z + z^2} + z - \rho}{1 - \rho} \right\}.$$

В частности для опциона при деньгах ( $K = f$ ) верно

$$\hat{\sigma}_B(T, f) = \frac{\alpha}{f^{1-\beta}} \left\{ 1 + \left[ \frac{(1-\beta)^2}{24} \frac{\alpha^2}{f^{2-2\beta}} + \frac{\rho\beta\alpha\nu}{4f^{1-\beta}} + \frac{(2-3\rho^2)\nu^2}{24} \right] T + \dots \right\}.$$

## Схема доказательства

Для простоты будем считать  $r = 0$ , но возьмем более общую функцию  $C(F)$  вместо  $F^\beta$ .

Введем маленький параметр  $\varepsilon$  и рассмотрим модель

$$\begin{aligned} dF_t &= \varepsilon \alpha_t C(F_t) dW_t^1, & F_0 &= f, \\ d\alpha_t &= \varepsilon \nu \alpha_t dW_t^2, & \alpha_0 &= \alpha, & dW_t^1 dW_t^2 &= \rho dt \end{aligned}$$

(потом в получаемых формулах заменим  $\varepsilon \alpha \rightarrow \alpha$  и  $\varepsilon \nu \rightarrow \nu$ , т.е. возьмем  $\varepsilon = 1$ ).

Используя формулу Фейнмана–Каца и алгебраические преобразования, доказывается, что цена опциона колл  $V(t, f, \alpha)$  имеет вид

$$V(t, f, \alpha) = (f - K)^+ + \frac{\varepsilon^2 C^2(K)}{2} \int_0^{\tau_{\text{ex}}} P(\tau, f, \alpha; K) d\tau,$$

где  $\tau_{\text{ex}} = T - t$  – время до исполнения, и функция

$$P(\tau, f, \alpha; K) = \int_{\mathbb{R}} a^2 p(t, f, \alpha; \tau, K, a) da$$

удовлетворяет уравнению

$$\begin{cases} P'_\tau = \frac{\varepsilon^2 \alpha^2 C^2(f)}{2} P''_{ff} + \varepsilon^2 \rho \nu \alpha^2 C(f) P''_{f\alpha} + \frac{\varepsilon^2 \nu^2 \alpha^2}{2} P''_{\alpha\alpha}, & \tau > 0, \\ P = \alpha^2 I(f = K), & \tau = 0. \end{cases}$$

Раскладывая в ряд, находим, что с точностью до порядка  $\varepsilon^2$  верно равенство

$$V(t, f, \alpha) = (f - K)^+ + \frac{|f - K|}{4\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\tau_{\text{ex}}} - \varepsilon^2 \theta}^{\infty} \frac{e^{-q}}{q^{3/2}} dq, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \theta &= \ln \left( \frac{\varepsilon \alpha z}{f - K} \sqrt{C(f)C(K)} \right) + \ln \left( \frac{x I^{1/2}(\varepsilon \nu z)}{2} \right) + \frac{1}{4} \varepsilon^2 \rho \nu \alpha b_1 z^2, \\ I(\zeta) &= \sqrt{1 - 2\rho\zeta + \zeta^2}, \quad z = \frac{1}{\varepsilon \alpha} \int_K^f \frac{df'}{C(f')}. \end{aligned}$$

Далее найдем нормальную предполагаемую волатильность (т.е. волатильность в модели Башелье), а потом найдем предполагаемую волатильность Блэка, которая дает такую же нормальную волатильность.

Для модели Башелье

$$dF_t = \sigma_N dW_t$$

верна формула (нужно взять  $C(f) = 1$ ,  $\varepsilon\alpha = \sigma_N$ ,  $\nu = 0$ )

$$V(t, f) = (f - K)^+ + \frac{|f - K|}{4\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(f-K)^2}{2\sigma_N^2 \tau_{\text{ex}}}}^{\infty} \frac{e^{-q}}{q^{3/2}} dq.$$

Приравнивая  $V(t, f)$  к формуле (1) для цены в модели SABR, получаем предполагаемую нормальную волатильность для модели SABR

$$\hat{\sigma}_N = \frac{f - K}{x} \left\{ 1 + \varepsilon^2 \frac{\theta}{x^2} \tau_{\text{ex}} + \dots \right\}.$$

Раскладывая в ряд, получаем

$$\widehat{\sigma}_N = \frac{\varepsilon\alpha(f - K)}{\int_K^f \frac{df'}{C(f')}} \cdot \left( \frac{\zeta}{\widehat{x}(\zeta)} \right) \cdot \left\{ 1 + \left[ \frac{2\gamma_2 - \gamma_1^2}{24} \alpha^2 C^2(f_{\text{av}}) + \frac{1}{4} \rho\nu\alpha\gamma_1 C(f_{\text{av}}) + \frac{2 - 3\rho^2}{24} \nu^2 \right] \varepsilon^2 \tau_{\text{ex}} + \dots \right\}, \quad (2)$$

где

$$f_{\text{av}} = \sqrt{fK}, \quad \gamma_1 = \frac{C'(f_{\text{av}})}{C(f_{\text{av}})}, \quad \gamma_2 = \frac{C''(f_{\text{av}})}{C(f_{\text{av}})},$$

$$\zeta = \frac{\nu}{\alpha} \frac{f - K}{C(f_{\text{av}})}, \quad \widehat{x}(\zeta) = \ln \left( \frac{\sqrt{1 - 2\rho\zeta + \zeta^2} - \rho + \zeta}{1 - \rho} \right).$$

В частном случае формулы (2) для модели Блэка

$$dF_t = \varepsilon \sigma_B F_t dW_t,$$

получаем формулу (нужно взять  $C(f) = f$ ,  $\alpha = \sigma_B$ ,  $\nu = 0$ )

$$\hat{\sigma}_N = \frac{\varepsilon \sigma_B (f - K)}{\ln f / K} \left\{ 1 - \frac{1}{24} \varepsilon^2 \sigma_B^2 \tau_{\text{ex}} + \dots \right\}.$$

Приравнивая  $\hat{\sigma}_N$  в модели SABR и модели Блэка, получаем нужную формулу для  $\hat{\sigma} = \sigma_B$ .

## 1.2. Качественное поведение кривой предполагаемой волатильности

Для анализа качественного поведения предполагаемой волатильности, удобно формулу Хэгана приблизить (когда  $K$  не слишком далеко от  $f$ , а  $T$  мало) формулой

$$\hat{\sigma}(T, K) = \frac{\alpha}{f^{1-\beta}} \left\{ 1 - \frac{1}{2}(1 - \beta - \rho\lambda) \ln \frac{K}{F} + \frac{1}{12} [(1 - \beta)^2 + (2 - 3\rho^2)\lambda^2] \ln^2 \frac{K}{F} + \dots \right\},$$

где

$$\lambda = \frac{\nu}{\alpha} f^{1-\beta}.$$

Тогда

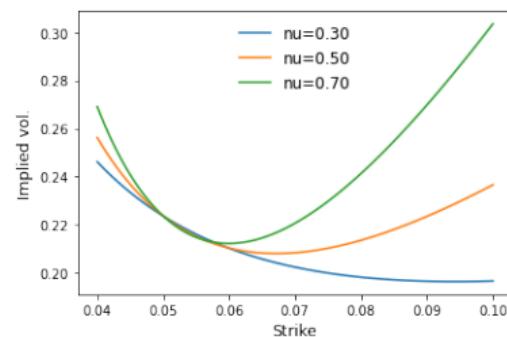
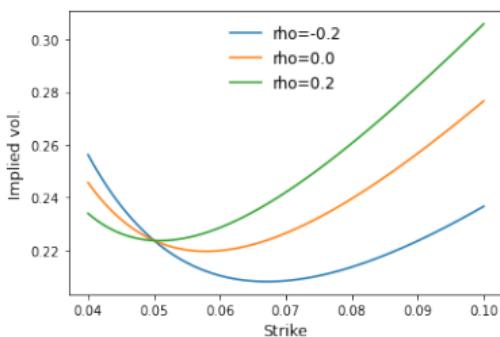
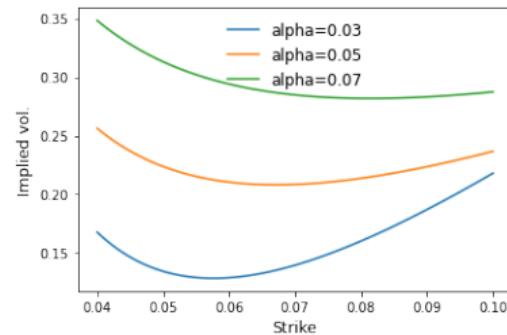
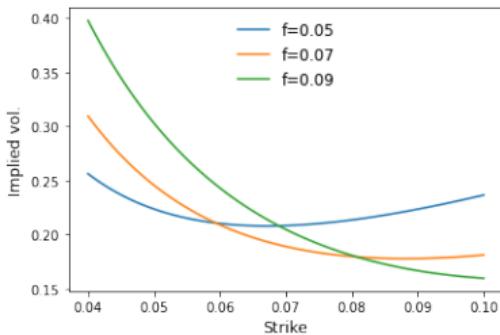
- $\hat{\sigma}(f, f) = \frac{\alpha}{f^{1-\beta}}$  – волатильность опционов at the money (**backbone**).
- Величина  $-\frac{1}{2}(1 - \beta - \rho\lambda) \ln \frac{K}{F}$  представляет наклон (**skew**) волатильности.

На следующих графиках за основу взяты значения параметров

$$\alpha = 0.05, \quad \beta = 0.5, \quad \rho = -0.2, \quad \nu = 0.5, \quad f = 0.05.$$

Качественно параметры модели оказывают следующее влияние на кривую предполагаемой волатильности:

- $\alpha$  главным образом контролирует вертикальное расположение кривой,
- $\rho$  главным образом контролирует наклон,
- $\nu$  главным образом контролирует выпуклость (“улыбку”).



### 1.3. Оценка параметров

Сначала рекомендуется оценить  $\beta$ :

- можно оценить  $\beta$  по историческим ценам опционов ATM, применяя формулу на с. 4,
- можно выбрать  $\beta$  "из личных предпочтений", попробовав, например,  $\beta = 0$  ( $\approx$  броуновское движение),  $\beta = 1/2$  ( $\approx$  процесс CIR),  $\beta = 1$  ( $\approx$  геометрическое броуновское движение).

Далее оценить  $\alpha, \rho, \nu$  минимизируя отклонение от наблюдаемой предполагаемой волатильности

$$\sum_{T,K} (\hat{\sigma}(T, K) - \sigma(T, K; \alpha, \beta, \rho, \nu))^2 \rightarrow \min,$$

(удобным оказывает тот факт, что параметры  $\alpha, \rho, \nu$  оказывают качественно разное влияние на  $\hat{\sigma}$ ).

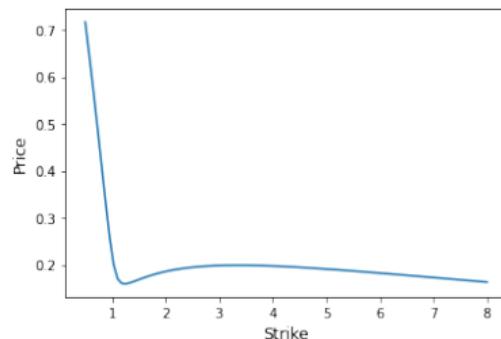
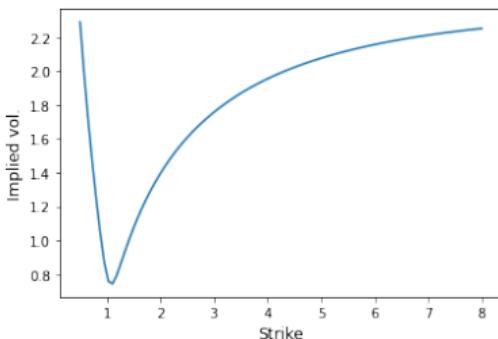
## 1.4. Возможный арбитраж в модели SABR

**Предложение.** В любой безарбитражной модели функция цены опциона колл  $C(T, K)$  не возрастает по  $K$ .

**Доказательство.** Упражнение.

Если использовать приближенную формулу для SABR, то может не получиться невозрастающая функция.

**Пример.** Возьмем  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0$ ,  $\rho = -0.3$ ,  $\nu = 4$ ,  $f = 1$ ,  $T = 0.5$



## 2. Модель SVI

**Доклад:** J. Gatheral, "A parsimonious arbitrage-free implied volatility parameterization with application to the valuation of volatility derivatives", 2004.

**Статья:** Gatheral, Jacquier, "Arbitrage-free SVI volatility surfaces", 2014.

### 2.1. Сырая параметризация

Введем обозначения:

- $T$  – время до исполнения опциона,
- $x = \ln(K/F_0)$  – лог-денежность (log-moneyness),
- $\hat{\sigma}$  – предполагаемая волатильность,
- $w = T\hat{\sigma}^2$  – полная предполагаемая дисперсия.

В таких обозначениях формула Блэка для опциона колл принимает вид

$$C = e^{-rT}(F_0\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)), \quad d_1 = -\frac{x}{\sqrt{w}} + \frac{\sqrt{w}}{2}, \quad d_2 = -\frac{x}{\sqrt{w}} - \frac{\sqrt{w}}{2}.$$

**Модель SVI** (stochastic volatility inspired) – это некоторая функция, которая используется для приближения кривой предполагаемой волатильности.

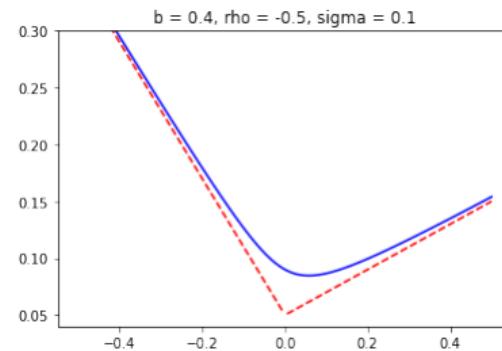
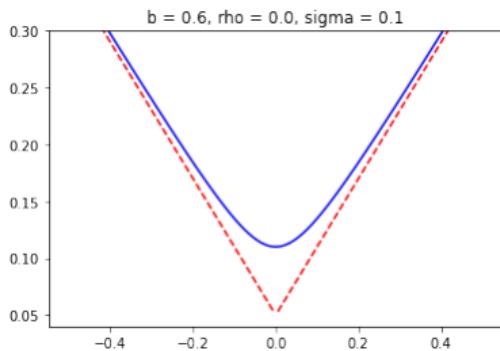
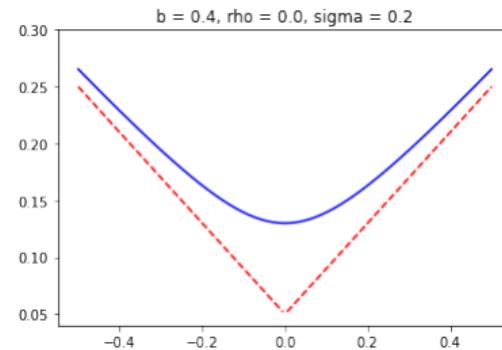
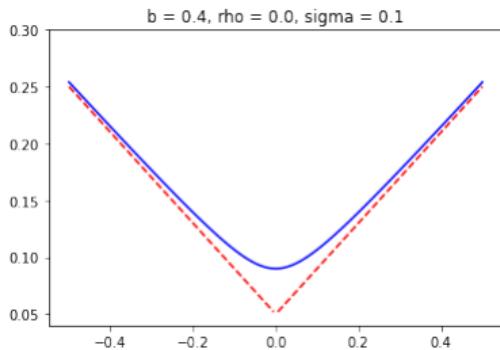
**Определение.** Модель SVI в сырой параметризации (**raw parametrization**) с параметрами  $a, b, \rho, m, \sigma$  (где  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \geq 0$ ,  $|\rho| < 1$ ,  $m \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$ ) имеет вид

$$w(x) = a + b \left( \rho(x - m) + \sqrt{(x - m)^2 + \sigma^2} \right)$$

( $T$  предполагается фиксированным).

### Смысл параметров

- $a$  и  $m$  задают положение кривой по вертикали и горизонтали,
- $b$  задает угол между левой и правой асимптотой для  $x \rightarrow \pm\infty$ :  
 $w(x) \sim a - b(1 - \rho)(x - m)$  при  $\rightarrow -\infty$ ,     $w(x) \sim a + b(1 + \rho)(x - m)$  при  $\rightarrow +\infty$ ,
- $\sigma$  задает “степень выпуклости” при вершине,
- $\rho$  задает “поворот” кривой.



## 2.2. Естественная параметризация и связь с моделью Хестона

**Определение.** Модель SVI в естественной параметризации (**natural parametrization**) с параметрами  $\Delta, \mu, \rho, \omega, \zeta$  ( $\omega \geq 0, \Delta, \mu \in R, |\rho| < 1, \zeta > 0$ ) имеет вид

$$w(x) = \Delta + \frac{\omega}{2} \left( 1 + \zeta \rho (x - \mu) + \sqrt{(\zeta(x - \mu) + \rho)^2 + 1 - \rho^2} \right).$$

**Предложение.** Сырая и естественная параметризации эквивалентны (задают один и тот же класс кривых) и выполнено соотношение между параметрами

$$(a, b, \rho, m, \sigma) = \left( \Delta + \frac{\omega}{2}(1 - \rho^2), \frac{\omega\zeta}{2}, \rho, \mu - \frac{\rho}{\zeta}, \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{\zeta} \right).$$

**Доказательство.** Проверяется непосредственно.

**Предложение.** В модели Хестона обозначим за  $\sigma_H(\tilde{x})$  предполагаемую волатильность опциона колл со страйком  $K$ , где  $\tilde{x} = \frac{1}{T} \ln(K/F_0)$ . Предположим, что  $r = 0$  и для параметров модели Хестона выполнено условие  $\kappa - \rho\sigma > 0$ . Тогда

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sigma_H^2(\tilde{x}) = \frac{w_1}{2} \left( 1 + w_2 \rho \tilde{x} + \sqrt{(w_2 \tilde{x} + \rho)^2 + 1 - \rho^2} \right),$$

где  $w_1, w_2$  – некоторые величины, которые можно явно выразить через параметры модели Хестона.

**Замечание.** Выражение для предела является частным случаем модели SVI (это видно из естественной параметризации).

**Доказательство.** Gatheral, Jacquier, “Convergence of Heston to SVI”, 2010.

## 2.3. Асимптотика предполагаемой волатильности (формула Ли)

Статья: Lee, "The moment formula for implied volatility at extreme strikes", 2004.

Рассмотрим произвольную безарбитражную модель рынка с  $r = \text{const}$ , в которой исходная мера  $\mathbb{P}$  является мартингальной.

Пусть  $\hat{\sigma}(x)$  – предполагаемая волатильность Блэка для опциона колл с лог-денежностью  $x = \ln(K/F_0)$ , и  $w(x) = T\hat{\sigma}^2(x)$ , где время до исполнения  $T$  фиксировано.

Теорема (формула Ли для правого крыла). Определим

$$\tilde{p} = \sup\{p > 0 : \mathbb{E} S_T^{1+p} < \infty\}, \quad \beta_R = \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{w(x)}{x}.$$

Тогда

$$\beta_R = 2 - 4(\sqrt{\tilde{p}^2 + \tilde{p}} - \tilde{p}) \in [0, 2].$$

Теорема (формула Ли для левого крыла). Определим

$$\tilde{q} = \sup\{q > 0 : \mathbb{E} S_T^{-q} < \infty\}, \quad \beta_L = \limsup_{x \rightarrow -\infty} \frac{w(x)}{|x|}.$$

Тогда

$$\beta_L = 2 - 4(\sqrt{\tilde{q}^2 + \tilde{q}} - \tilde{q}) \in [0, 2].$$

Предложение. Модель SVI не противоречит формуле Ли для правого и левого крыла при выполнении условия  $(1 + |\rho|)b \leq 2$  в сырой параметризации.

Доказательство предложения. Упражнение.

## Доказательство формулы Ли для правого крыла (для левого аналогично)

Для простоты рассмотрим случай  $r = 0$  и обозначим цену опциона в модели

$$C(K) = \mathbb{E}(S_T - K)^+.$$

**Лемма 1.** Для всех  $p > 0$ ,  $K > 0$  выполнено неравенство

$$C(K) \leq \frac{\mathbb{E} S_T^{p+1}}{p+1} \left( \frac{p}{p+1} \right)^p \frac{1}{K^p}.$$

**Доказательство.** Для всех  $s \geq 0$  выполнено

$$s - K \leq \frac{s^{p+1}}{p+1} \left( \frac{p}{p+1} \right)^p \frac{1}{K^p},$$

так как левая часть является касательной к правой части в точке  $s = (p+1)K/p$ , а правая часть выпукла по  $s$ . Далее левую часть нужно заменить на  $(s - K)^+$  и взять ожидание.

**Лемма 2.** Существует  $x^* > 0$  такое что для всех  $x > x^*$  выполнено  $w(x) < 2x$ .

**Доказательство.** В силу монотонности формулы Блэка  $C_B(x, \sigma)$  по  $\sigma$ , достаточно доказать

$$C_B(x, \hat{\sigma}(x)) < C_B(x, \sqrt{2x/T}) \text{ при } x > x^*$$

(тогда  $\hat{\sigma}(x) < \sqrt{2x/T}$ , следовательно  $w(x) = T\hat{\sigma}^2(x) < 2x$ ).

В силу определения  $\hat{\sigma}(x)$  для  $x = \ln(K/F_0)$  имеем  $C_B(x, \hat{\sigma}(x)) = C(K)$ . Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} C_B(x, \hat{\sigma}(x)) = \lim_{K \rightarrow \infty} C(K) = \lim_{K \rightarrow \infty} E(S_T - K)^+ = 0.$$

Кроме того, используя формулу Блэка в форме на стр. 15, получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} C_B(x, \sqrt{2x/T}) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_0(\Phi(0) - e^x \Phi(-\sqrt{2x})) = \frac{F_0}{2}.$$

Значит искомое  $x^*$  существует.

**Следствие.** Выполнено неравенство  $\beta_R \in [0, 2]$ .

**Доказательство теоремы.** Доказываемая формулы эквивалента тому, что

$$\tilde{p} = \frac{f(\beta_R)}{2}, \text{ где } f(\beta) = \frac{1}{\beta} + \frac{\beta}{4} - 1.$$

1) Докажем  $\tilde{p} \leq f(\beta_R)/2$ . В силу убывания  $f(\beta)$  достаточно доказать, что если  $\tilde{p} > f(\beta)/2$ , то  $\beta > \beta_R$ .

Возьмем  $\beta$  такое, что  $\tilde{p} > f(\beta)/2$ , и произвольное  $p \in (f(\beta)/2, \tilde{p})$ . Из леммы 1 следует, что  $C(K) = O(K^{-p}) = O(e^{-px})$  при  $x \rightarrow \infty$ . Тогда

$$\frac{C_B(x, \hat{\sigma}(x))}{C_B(x, \sqrt{\beta x/T})} = \frac{C(K)}{C_B(x, \sqrt{\beta x/T})} = \frac{O(e^{-px})}{C_B(x, \sqrt{\beta x/T})} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty,$$

где предел можно найти по правилу Лопитала:

$$\frac{e^{-cx}}{C(x, \sqrt{\beta x/T})} \rightarrow \begin{cases} 0, & c > f(\beta)/2, \\ \infty, & c \leq f(\beta)/2. \end{cases}$$

Из монотонности  $C_B(x, \sigma)$  по  $\sigma$  следует, что  $\hat{\sigma}(x) < \sqrt{\beta x/T}$  при больших  $x$ . Значит  $\beta > \beta_R$ .

2) Докажем  $\tilde{r} \geq f(\beta_R)/2$ . Для этого достаточно доказать, что  $E S_T^{p+1} < \infty$  для любого  $p \in (0, f(\beta_R)/2)$ .

Возьмем такое  $p$  и произвольное  $\beta > \beta_R$  такое, что  $Q := f(\beta)/2 \in (p, f(\beta_R)/2)$ . Тогда

$$\frac{C(K)}{e^{-Qx}} = \frac{C_B(x, \hat{\sigma}(x))}{e^{-Qx}} \leq \frac{C_B(x, \sqrt{\beta x/T})}{e^{-Qx}} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Следовательно найдется  $K_*$  такое, что  $C(K) < K^{-Q}$  при  $K > K_*$  (где  $e^{-Qx} = (K/F_0)^{-Q}$ ). Тогда

$$\begin{aligned} E S_T^{1+p} &= E \int_0^\infty (p+1)pK^{p-1}(S_T - K)^+ dK \\ &\leq p(p+1) \left( \int_0^{K_*} K^{p-1} C(K) dK + \int_{K_*}^\infty K^{p-Q-1} dK \right) < \infty, \end{aligned}$$

**Упражнение.** Докажите первое равенство в последней формуле (нужно два раза проинтегрировать по частям в равенстве  $g(s) = \int_0^\infty g(u)\mu(du)$ , где  $g(s) = s^{1+p}$  и мера  $\mu$  имеет единичную массу в точке  $s$ ).

# Модели стохастической волатильности

Лекция 11: Отсутствие статического арбитража

Михаил Житлухин

## Содержание

1	Понятие статического арбитража	3
2	Теорема Келлерера	6
2.1	Эквивалентная формулировка . . . . .	8
3	Условия отсутствия статического арбитража	10
3.1	Условия для поверхности цены . . . . .	10
3.2	Условия для поверхности волатильности . . . . .	13
3.3	Проверка условий в модели SVI . . . . .	17

## 1. Понятие статического арбитража

Будем далее везде считать  $r = 0$ .

**Определение.** Поверхность цен опционов колл  $\sigma(T, K) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  не допускает **статического арбитража**, если существует мартингал  $X_t$ , заданный на некотором вероятностном пространстве, такой, что

$$C(T, K) = \mathbb{E}(X_T - K)^+ \quad \text{для всех } T, K.$$

**Замечание.** Отличие статического арбитража от динамического:

- отсутствие динамического арбитража (= отсутствие арбитражной стратегии) зависит от того, какое вероятностное пространство рассматривается,
- отсутствие статического арбитража означает лишь то, что цены в принципе согласуются с какой-то моделью, в которой нет динамического арбитража.

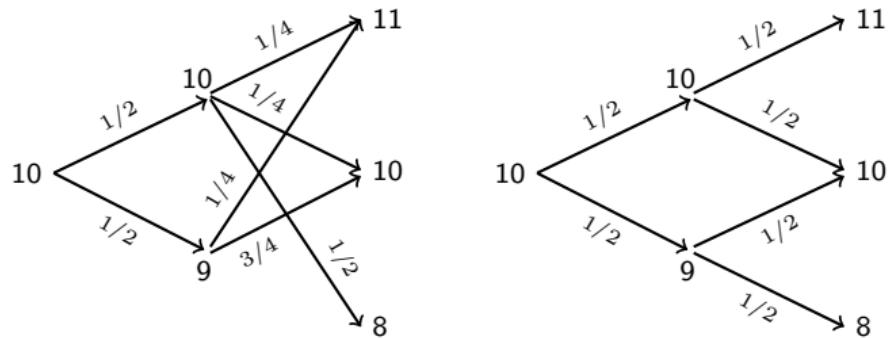
**Определение.** Поверхность волатильности  $\sigma(T, K) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  не допускает **статического арбитража**, если существует поверхность цен  $C(T, K)$ , не допускающая статического арбитража, такая, что

$$C(T, K) = C_B(T, K, \sigma(T, K)) \text{ для всех } T, K,$$

где  $C(T, K, \sigma)$  – цена по формуле Блэка–Шоулса.

## Пример

На левом рисунке есть динамический арбитраж, но нет статического арбитража. На правом рисунке показан соответствующий мартингал  $X_t$ .



## 2. Теорема Келлерера

Книга: Hirsch, Profeta, Roynette, Yor. *Peacocks and associated martingales, with explicit constructions*, 2011.

**Определение.** Процесс  $X_t$  называется **павлином**, если

1.  $\mathbb{E}|X_t| < \infty$  для всех  $t \geq 0$ ,
2. для любых  $0 \leq s \leq t$  и выпуклой функции  $f(x)$  выполнено

$$\mathbb{E} f(X_s) \leq \mathbb{E} f(X_t).$$

**Замечание**

1. Павлин – от англ. peacock, от фр. PCOC = Processus Croissant pour l'Ordre Convexe (процесс, возрастающий в отношении выпуклого порядка)
2. Из неравенства Йенсена следует, что  $\mathbb{E} f(X_s) \in (-\infty, +\infty]$ .
3. Если  $X_t$  – павлин, то  $\mathbb{E} X_s = \mathbb{E} X_t$  для всех  $t, s$  (нужно взять  $f(x) = x$  и  $f(x) = -x$ ).

**Теорема (Келлерер, 1972).** Процесс  $X_t$  является павлином тогда и только тогда, когда на некотором вероятностном пространстве существует мартингал  $X'_t$  такой, что

$$X_t \stackrel{d}{=} X'_t \text{ для всех } t \geq 0.$$

Более того, в этом случае можно выбрать  $X'_t$  так, что он будет марковским процессом.

**Упражнение.** Докажите, что если  $X_t$  – мартингал, то он павлин.

## 2.1. Эквивалентная формулировка

**Определение.** Для вероятностных мер  $\mu, \nu$  на  $\mathbb{R}_+$ , имеющих конечное ожидание, будем говорить, что  $\mu$  меньше или равна  $\nu$  в **отношении выпуклого порядка**, если для любой выпуклой функции  $f(x)$

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(x) \mu(dx) \leq \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \nu(dx).$$

Обозначение:  $\mu \preceq \nu$ .

**Замечание.** “Имеет конечное ожидание” означает  $\int_{\mathbb{R}_+} x \mu(dx) < \infty$ . Если  $\mu \preceq \nu$ , то  $\int_{\mathbb{R}_+} x \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}_+} x \nu(dx)$ .

**Теорема.** Для любого неубывающего семейства вероятностных мер  $(\mu_t)_{t \geq 0}$  на  $\mathbb{R}_+$  с равными (и конечными) ожиданиями существует мартингал  $X_t$  такой, что  $\text{Law}(X_t) = \mu_t$ .

Для проверки условия  $\mu \preceq \nu$  удобно использовать следующий результат.

**Лемма.** Для вероятностных мер  $\mu, \nu$  на  $\mathbb{R}_+$  с конечными ожиданиями выполнено  $\mu \preceq \nu$  тогда и только тогда, когда

$$\int_{\mathbb{R}_+} x\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}_+} x\nu(dx)$$

и

$$\int_{\mathbb{R}_+} (x - K)^+ \mu(dx) \leq \int_{\mathbb{R}_+} (x - K)^+ \nu(dx) \text{ для любого } K \geq 0.$$

**Доказательство.** Foellmer, Schied, *Stochastic Finance*, Corollary 2.62.

**Упражнение.** Докажите утверждение " $\Rightarrow$ ".

### 3. Условия отсутствия статического арбитража

#### 3.1. Условия для поверхности цены

**Теорема 1.** Пусть функция  $C(T, K)$  определена на  $\mathbb{R}_+^2$ , причем  $C(T, \cdot) \in C([0, \infty)) \cap C^1((0, \infty))$  при каждом  $T > 0$ , и выполнены следующие условия:

- (1)  $C(T, K)$  не убывает по  $T$ ,
- (2)  $C(T, K)$  выпукла по  $K$ ,
- (3)  $\lim_{K \rightarrow \infty} C(T, K) = 0$ ,
- (4)  $C(T, 0) = s$ , где  $s > 0$  – некоторая константа,
- (5)  $C(0, K) = (s - K)^+$ .

Тогда существует мартингал  $X_t \geq 0$  такой, что  $X_0 = s$  и

$$C(T, K) = \mathbb{E}(X_T - K)^+.$$

## Интерпретация условий (1)–(3)

- Условие (1) – отсутствие календарного арбитража. Если оно не выполнено, то

$$C(T_1, K) > C(T_2, K) \text{ для некоторых } T_1 < T_2 \text{ и } K > 0.$$

Тогда можно получить арбитраж, продав опцион колл  $(T_1, K)$  и купив опцион колл  $(T_2, K)$ .

- Условие (2) – отсутствие арбитража на бабочках. Если оно не выполнено, то

$$C(T, K_1) + C(T, K_3) < 2C(T, K_2) \text{ для } T > 0 \text{ и } K_1 < K_2 < K_3.$$

Можно получить арбитраж, купив по одному опциону колл  $(T, K_1)$ ,  $(T, K_3)$ , и продав два опциона колл  $(T, K_2)$ .

**Упражнение.** Покажите, почему получается арбитраж.

- Если условие (3) не выполнено, т.е.  $\lim_{K \rightarrow \infty} C(T, K) > 0$ , то можно продать опцион с большим стррайком  $K$ , который исполнится с вероятностью, стремящейся к 0 (не арбитраж, но тоже слишком хорошо, чтобы быть правдой).

**Доказательство теоремы.** Для  $t > 0$  определим функцию

$$F_t(x) = 0 \text{ при } x < 0, \quad F_t(x) = 1 + C'_K(t, x) \text{ при } x \geq 0.$$

Из условий (2)–(3) следует, что  $C'_K(t, x)$  не убывает и  $C'_K(t, x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Значит  $F_t$  является функцией распределения. Пусть  $\mu_t$  обозначает соответствующую меру. Используя (4), получаем

$$C(t, K) = s + \int_0^K C'_K(t, x) dx.$$

Следовательно,

$$s = - \int_0^\infty C'_K(t, x) dx = \int_0^\infty (1 - F_t(x)) dx = \int_0^\infty x \mu_t(dx). \quad (*)$$

Таким образом, у всех мер  $\mu_t$  равные ожидания. Кроме того,

$$C(t, K) = s + \int_0^K C'_K(t, y) dy = s - \int_0^\infty \int_0^K I(y < x) dy \mu_t(dx) = \int_0^\infty (x - K)^+ \mu_t(dx).$$

Следовательно, из условия (1) имеем

$$\int_0^\infty (x - K)^+ \mu_u(dx) \leq \int_0^\infty (x - K)^+ \mu_t(dx) \text{ при } u \leq t. \quad (**)$$

Из (\*), (\*\*) и леммы получаем  $\mu_u \preceq \mu_t$  для  $0 < u \leq t$ , а из (5) получаем  $\mu_0 \preceq \mu_t$ , где  $\mu_0 = \delta_s$  (единичная масса в  $s$ ). Дальше остается применить теорему Келлерера.

### 3.2. Условия для поверхности волатильности

Пусть текущая цена фиксирована и равна  $s$ . Для краткости будем использовать следующую замену переменных  $T, K, \sigma$ :

$$x = \ln(K/s), \quad \theta = \sigma\sqrt{T}, \quad d_1 = -\frac{x}{\theta} + \frac{\theta}{2}, \quad d_2 = d_1 - \theta.$$

Тогда формула Блэка–Шоулса (для  $r = 0$ ) принимает вид

$$C_B(T, K, \sigma) = C_B(x, \theta) = s\Phi(d_1) - se^x\Phi(d_2).$$

Далее поверхности волатильности  $\sigma(T, K)$  будем эквивалентно задавать функциями  $\theta(T, x)$ .

**Теорема 2.** Пусть функция  $\theta(T, x) \in C^{1,2}((0, \infty) \times \mathbb{R})$  для всех  $T > 0, x \in \mathbb{R}$  удовлетворяет условиям

- (A)  $\theta > 0,$
- (B)  $\theta'_T \geq 0,$
- (C)  $g(T, x) := \left(1 - \frac{x}{\theta}\theta'_x\right)^2 - \frac{\theta^2}{4}(\theta'_x)^2 + \theta\theta''_{xx} \geq 0$  (условие Даррлемана),
- (D)  $\lim_{x \rightarrow \infty} d_1(x, \theta(T, x)) = -\infty,$
- (E)  $\lim_{T \rightarrow 0} \theta(T, x) = 0.$

Тогда следующая поверхность цены не допускает статического арбитража:

$$C(T, K) = \begin{cases} C_B(x, \theta(T, x)) \Big|_{x=\ln \frac{K}{s}}, & T > 0, K > 0, \\ (s - K)^+, & T = 0, K \geq 0, \\ s, & T \geq 0, K = 0. \end{cases}$$

**Доказательство.** Проверим условия (1)–(6) теоремы 1.

(B) $\Rightarrow$ (1) Монотонность  $C(T, K)$  при  $T > 0$  следует из монотонности  $C_B(x, \theta)$  по  $\theta$ , так как  $(C_B)'_\theta = se^x \varphi(d_2)$ .

(C) $\Rightarrow$ (2) Выпуклость при  $K > 0$  следует из непосредственного дифференцирования:

$$C''_{KK} = \frac{s\varphi(d_1)}{K^2\theta} g(T, x) \geq 0.$$

(E) $\Rightarrow$ (3) Для  $T = 0$  очевидно  $C(0, K) \rightarrow 0$  при  $K \rightarrow \infty$ . Для  $T > 0$  имеем

$$C(T, K) = s\Phi(d_1) - se^x\Phi(d_2).$$

Если  $K \rightarrow \infty$ , то  $x \rightarrow \infty$ , следовательно  $d_1 \rightarrow -\infty$  и  $s\Phi(d_1) \rightarrow 0$ . Используя неравенство об арифметическом и геометрическом средних,

$$d_2 = -\frac{x}{\theta} - \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{2x}{\theta} + \theta \right) \leq -\sqrt{2x}.$$

По правилу Лопитала  $e^x\Phi(-\sqrt{2x}) \rightarrow 0$ . Значит  $C(T, K) \rightarrow 0$  при  $K \rightarrow \infty$ .

Условия (4), (5) очевидны из определения  $C(T, K)$ .

Осталось распространить условие (1) на  $T = 0$  и условие (2) на  $K = 0$ .

(1): при  $K > 0$ , если  $T \rightarrow 0$ , то  $\theta(x, T) \rightarrow 0$  по условию (E), где  $x = \ln(K/s)$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} C(T, K) &= C_B(x, \theta^2(T, x)) = s\Phi(d_1) - se^x\Phi(d_2) \\ &= s\Phi\left(-\frac{x}{\theta} + \frac{\theta}{2}\right) - K\Phi\left(-\frac{x}{\theta} - \frac{\theta}{2}\right) \xrightarrow{T \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & x > 0 \\ s - K, & x \leq 0 \end{cases} = C(0, K). \end{aligned}$$

В силу монотонности при  $T > 0$ , получаем  $C(T, K) \geq C(0, K)$ .

(2): при  $T > 0$ , если  $K \rightarrow 0$ , то  $x \rightarrow -\infty$  и аналогично предыдущему пределу получаем

$$C(T, K) \rightarrow s \quad \text{при } K \rightarrow 0,$$

где использовали то, что при фиксированном  $T$  функция  $\theta(T, x)$  отделена от нуля в силу выпуклости и условия (A). Следовательно  $C(T, K)$  непрерывна на  $\mathbb{R}_+$  и выпуклость сохраняется и на  $\mathbb{R}_+$ .

### 3.3. Проверка условий в модели SVI

Модель SVI в сырой параметризации (одно сечение поверхности волатильности для фиксированного  $T > 0$ ):

$$\theta^2(x) = a + b \left( \rho(x - m) + \sqrt{(x - m)^2 + \sigma^2} \right).$$

При подгонке параметров модели условия (A), (D), (E) проблем не вызывают, так как этими свойства обладают наблюдаемые цены опционов.

Условие (B) (отсутствие календарного арбитража) и условие (C) (отсутствие арбитража в бабочках) нужно проверить для подобранных параметров модели, так как для некоторых комбинаций параметров они могут быть не выполнены.

**Статья:** Gatheral, Jacquier, "Arbitrage-free SVI volatility surfaces", 2013.  
(Модификация SVI, дающая безарбитражную поверхность волатильности)