

# Point Visibility

**Arturo González Peñaloza**

**Dulce Julieta Mora Hernández**

Universidad Nacional Autónoma de México

17 de mayo de 2024

## 1. Introducción

- 1.1 Definiciones Fundamentales
- 1.2 Algoritmo para cierre convexo en  $O(n)$
- 1.3 Cierre Convexo en  $O(n)$
- 1.4 Punto en polígono

## 2. Calculando la visibilidad de un punto

## 3. Algoritmo para calcular $V(q)$

- 3.1 Algoritmo
- 3.2 Complejidad
- 3.3 Ejemplo

# Introducción

---

## Polígono de visibilidad

El *polígono de visibilidad*  $V(q)$  de un punto  $q$  en un polígono simple  $P$  es el conjunto de todos los puntos de  $P$  que son visibles desde  $q$ .

$$V(q) = \{p \in P \mid q \text{ ve a } p\}$$

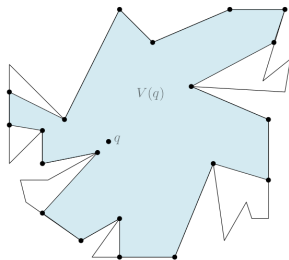


Figura: Polígono simple

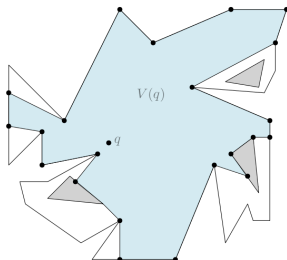


Figura: Polígono con hoyos

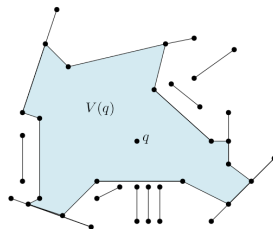


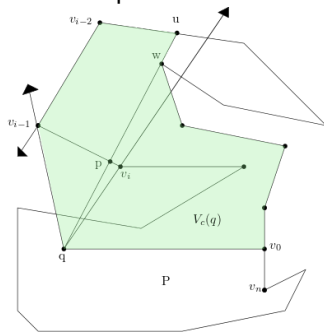
Figura: Conjunto de líneas

## Arista construida

Sea  $ab$  una arista en el perímetro de  $V(q)$  de manera que

- Ningún punto de  $ab$ , excepto  $a$  y  $b$ , pertenecen al perímetro de  $P$ .
- $q$ ,  $a$  y  $b$  son colineales.
- $a$  o  $b$  es un vértice de  $P$ .

La arista  $ab$  se llama *arista construida* de  $V(q)$

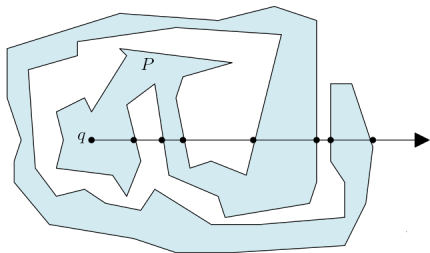


# Revoluciones

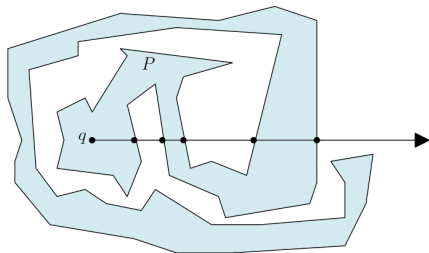
Para un polígono simple  $P$  y un punto  $z \in P$ , el *número de revoluciones* de  $P$  con respecto a  $z$  es el número de revoluciones que el perímetro de  $P$  hace alrededor de  $z$ .

Si el número de revoluciones de  $P$  respecto a  $z$  es uno,  $P$  es llamado *non-winding polygon*.

El número de revoluciones de  $P$  respecto a  $q$  es dos.



El número de revoluciones de  $P$  respecto a  $q$  es una.





# Algoritmo de Melkman

Los polígonos simples simplifican el proceso de calcular su cierre convexo. El algoritmo de Melkman es una herramienta que aprovecha esta propiedad.

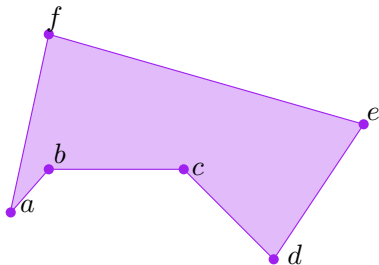


Figura: Polígono simple.

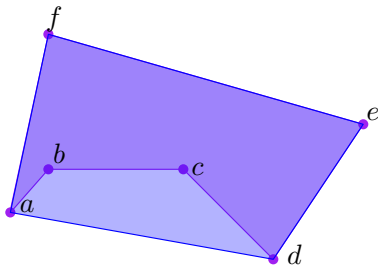


Figura: Polígono simple y cierre convexo asociado.

# Algoritmo de Melkman

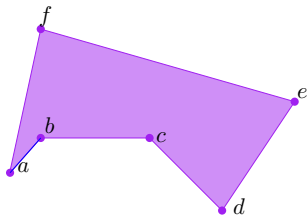
1.  $D \leftarrow (p_2, p_1, p_2)$  // Se agregan a una deque dos puntos consecutivos del polígono.
2. Para  $i \leftarrow 3$  a  $n$  hacer:
  - 2.1 Si  $p_i$  está fuera del ángulo  $v_{t-1}v_tv_{b+1}$ , entonces
    - 2.1.1 Mientras  $p_i$  esté a la izquierda de  $\overrightarrow{v_bv_{b+1}}$ , entonces se saca desde abajo de  $D$ .
    - 2.1.2 Mientras  $p_i$  esté a la derecha de  $\overrightarrow{v_tv_{t-1}}$ , entonces se saca desde arriba de  $D$ .
  - 2.2 Se agrega a  $p_i$ . al inicio y al final de  $D$ .

## Observación

Si tomamos los primeros tres vértices de la deque (leídos de izquierda a derecha), obtenemos una vuelta a la derecha. Si tomamos los últimos tres vértices de la deque (leídos de derecha a izquierda), obtenemos una vuelta a la izquierda.

## Ejemplo

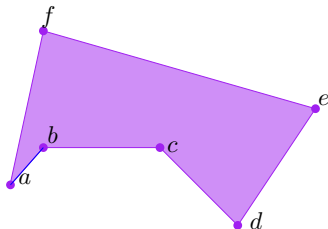
Se agrega a la deque dos puntos consecutivos del polígono.



$a$	$b$	$a$
-----	-----	-----

## Ejemplo

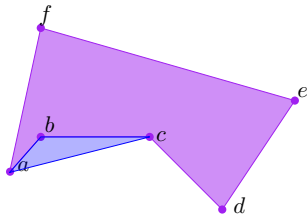
$c$  está a la derecha de  $\overrightarrow{ab}$ , entonces se saca desde abajo de  $D$ .



$a$	$b$
-----	-----

## Ejemplo

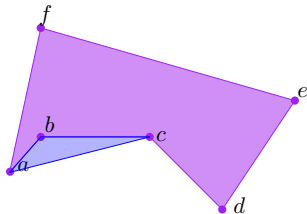
Se agrega a  $c$  al inicio y al final de la deque.



$c$	$a$	$b$	$c$
-----	-----	-----	-----

## Ejemplo

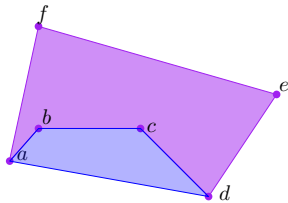
$d$  está a la izquierda de  $\overrightarrow{ca}$ , entonces se saca desde abajo de la deque.



$a$	$b$	$c$
-----	-----	-----

## Ejemplo

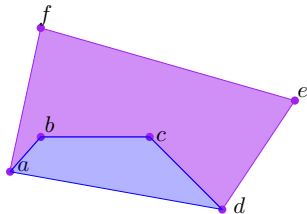
Se agrega a  $d$  al inicio y al final de la deque.



$d$	$a$	$b$	$c$	$d$
-----	-----	-----	-----	-----

## Ejemplo

e se encuentra a la derecha de  $\overrightarrow{dc}$ , entonces se saca desde arriba de la deque.

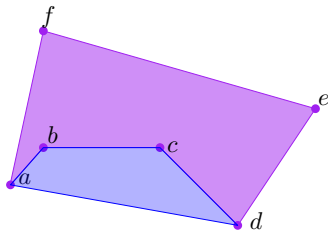


$d$	$a$	$b$	$c$
-----	-----	-----	-----



## Ejemplo

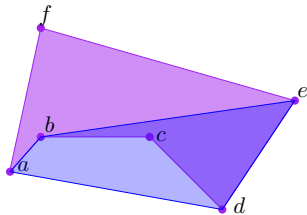
e se encuentra a la derecha de  $\overrightarrow{cb}$ , entonces se saca desde arriba de la deque.



$d$	$a$	$b$
-----	-----	-----

## Ejemplo

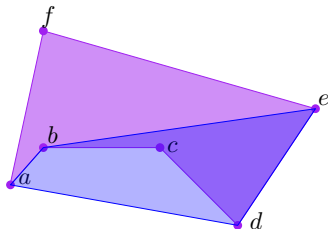
Se agrega a  $e$  al inicio y al final de la deque.



$e$	$d$	$a$	$b$	$e$
-----	-----	-----	-----	-----

## Ejemplo

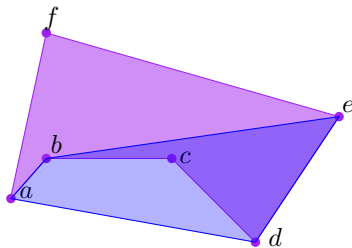
$f$  está a la derecha de  $\overrightarrow{eb}$ , así que se saca desde arriba de la deque.



$e$	$d$	$a$	$b$
-----	-----	-----	-----

## Ejemplo

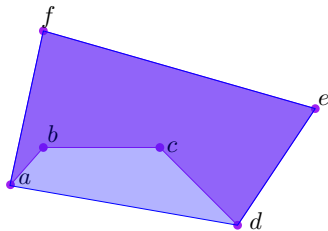
$f$  está a la derecha de  $\overrightarrow{ba}$ , así que se saca desde arriba de la deque.



$e$	$d$	$a$
-----	-----	-----

## Ejemplo

Se agrega a  $f$  al inicio y al final de la deque.



$f$	$e$	$d$	$a$	$f$
-----	-----	-----	-----	-----

# Complejidad

Si el polígono tiene  $n$  vértices, entonces se realizan a lo más  $2n$  inserciones y  $2n - 3$  eliminaciones. Así, el algoritmo es  $O(n)$ .

## Punto en polígono

Un problema geométrico es determinar si un punto específico está dentro o fuera de un polígono dado.

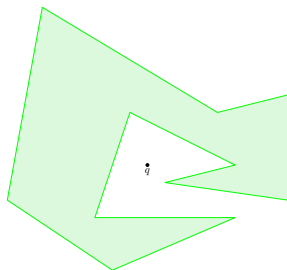


Figura: Punto  $q$  fuera de polígono.

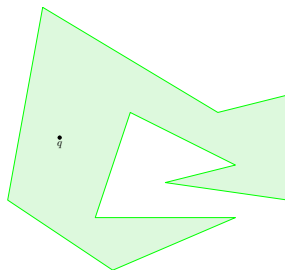
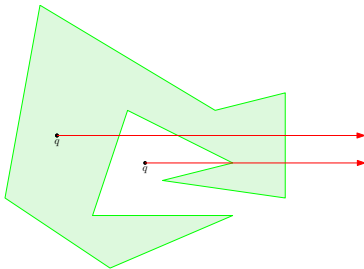


Figura: Punto  $q$  dentro de polígono.

# Método del rayo

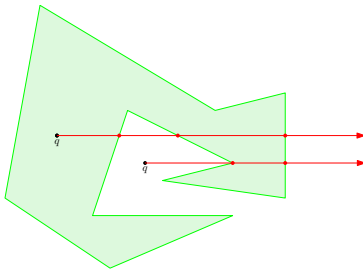
1. Se traza una línea horizontal desde el punto hacia la derecha a lo largo del eje x.





# Método del rayo

1. Se traza una línea horizontal desde el punto hacia la derecha a lo largo del eje x.
2. Se cuenta el número de intersecciones con las aristas del polígono:
  - 2.1 Si el número de intersecciones es par, entonces el punto está afuera del polígono.
  - 2.2 En otro caso, el punto está dentro del polígono.



# Complejidad

1. Se traza una línea horizontal desde el punto hacia la derecha a lo largo del eje x.  
 **$O(1)$**
2. Se cuenta el número de intersecciones con las aristas del polígono:  **$O(n)$** 
  - 2.1 Si el número de intersecciones es par, entonces el punto está afuera del polígono.  
 **$O(1)$**
  - 2.2 En otro caso, el punto está dentro del polígono.  **$O(1)$**

**Complejidad:**  $O(n)$

## Calculando la visibilidad de un punto

---

# El problema

**Non-winding polygon:  $O(n)$  algorithm**

El primer paso del algoritmo es determinar si  $q$  se encuentra dentro o fuera de  $P$ .

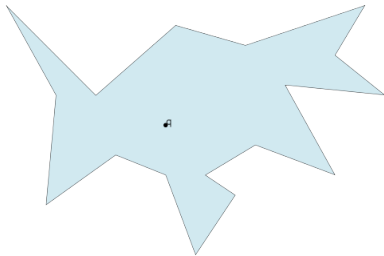


Figura:  $q$  se encuentra dentro de  $P$

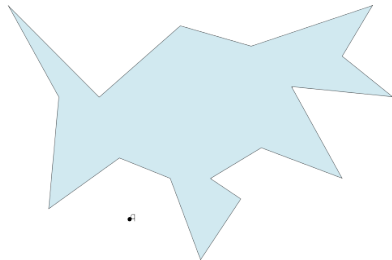


Figura:  $q$  se encuentra fuera de  $P$

Existen dos situaciones:

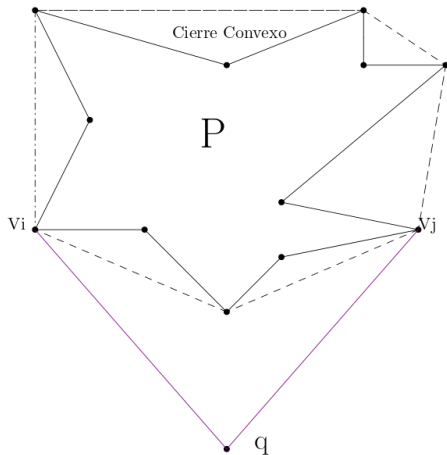
- $q$  se encuentra fuera del cierre convexo de  $P$
- $q$  se encuentra fuera de  $P$  pero dentro del cierre convexo de  $P$

## Si $q$ se encuentra fuera del cierre convexo de $P$

1. Trazamos dos tangentes (digamos,  $qv_i$  y  $qv_j$ ) a partir de  $q$  hacia el cierre convexo de  $P$ .
2. Ahora  $q$  es un punto interno de  $P'$ .

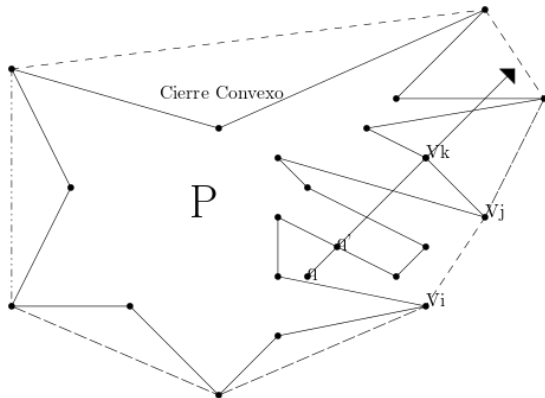
### Observación

Sea  $bd(P)$  el perímetro de  $P$ . Notemos que todos los puntos visibles del  $bd(P)$  a partir de  $q$  se encuentran entre  $v_i$  y  $v_j$  viendo hacia  $q$ .



## Si $q$ se encuentra fuera de $P$ pero dentro del cierre convexo de $P$

1. Trazamos una línea a partir de  $q$  que pase por cualquier vértice  $v_k$  de  $P$  (denotado como  $\overrightarrow{qv_k}$ ).
2. Sea  $q'$  el punto más cercano a  $q$  entre todos los puntos de las intersecciones de  $\overrightarrow{qv_k}$  con  $bd(P)$ .
3. A partir de  $q'$  recorremos  $bd(P)$  en el sentido de las manecillas del reloj (y en sentido contrario) hasta que un vértice  $v_i$  del cierre convexo (respectivamente,  $v_j$ ) se alcanza.
4. Ahora,  $q$  es un punto dentro de  $P'$





A partir de ahora, se considera que el punto  $q$  es un punto interno de  $P$ . Por lo que, de ahora en adelante, se asume que  $bd(P)$  no tiene *winding* alrededor de  $q$ .

**El problema es calcular  $V(q)$  de  $P$  de  $q$ .**

## Observación

Sea  $bd(v_j, v_k)$  el límite en sentido antihorario de  $P$  desde  $v_j$  hasta  $v_k$ .

También asumimos que los vértices (y los puntos finales de las *aristas construidas*) en  $bd(v_0 v_{i-1})$ , las cuales se encuentran para ser visibles desde  $q$  por el procedimiento, son colocadas en un stack en el orden en que son encontradas, donde  $v_0$  y  $v_{i-1}$  están en la parte inferior y superior del stack, respectivamente.

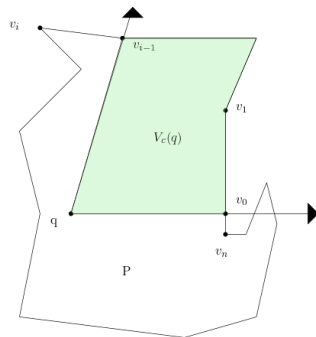
Contamos con los siguientes casos

1. El vértice  $v_i$  se encuentra a la izquierda de  $\overrightarrow{qv_{i-1}}$
2. El vértice  $v_i$  se encuentra a la derecha de  $\overrightarrow{qv_{i-1}}$ 
  - 2.1 El vértice  $v_i$  se encuentra a la derecha de  $\overrightarrow{v_{i-2}v_{i-1}}$
  - 2.2 El vértice  $v_i$  se encuentra a la izquierda de  $\overrightarrow{v_{i-2}v_{i-1}}$

# Caso 1

El vértice  $v_i$  se encuentra a la izquierda de  $\overrightarrow{qv_{i-1}}$

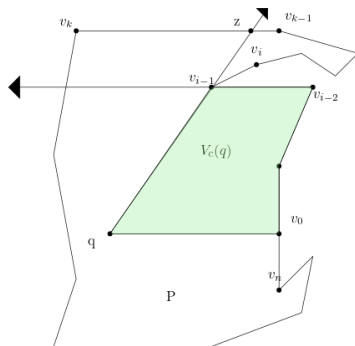
Como  $v_i$  y los vértices y puntos en el stack se encuentran ordenados por el ordenamiento angular respecto a  $q$ ,  $v_i$  es ingresado al stack.



## Caso 2

El vértice  $v_i$  se encuentra a la derecha de  $\overrightarrow{qv_{i-1}}$

Puede observarse que  $v_{i-1}$  y  $v_i$  no pueden ser visibles por  $q$  ya que  $qv_i$  es intersectado por  $bd(v_0, v_{i-1})$  o  $qv_{i-1}$  es intersectado por  $bd(v_{i+1}, v_n)$



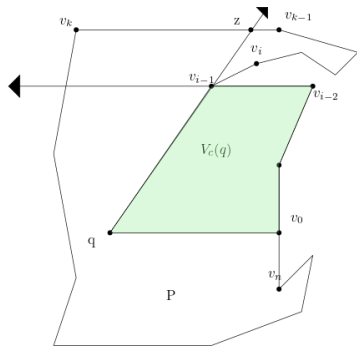
## Caso 2a

El vértice  $v_i$  se encuentra a la derecha de  $\overrightarrow{v_{i-2}v_{i-1}}$

El vértice  $v_i$  y algunos de los vértices subsecuentes de  $v_i$  (que serán revisados) no son visibles desde  $q$ .

Sea  $v_{k-1}v_k$  la primer arista desde  $v_{i+1}$  en  $bd(v_{i+1}, v_n)$ , en sentido antihorario de manera que  $v_{k+1}v_k$  intersecta  $\overrightarrow{qv_{i-1}}$ .

Sea  $z$  el punto de intersección.



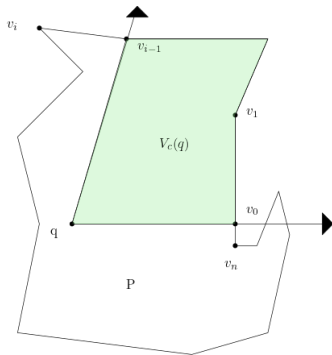


## Caso 2b

El vértice  $v_i$  se encuentra a la izquierda de  $\overrightarrow{v_{i-2}v_{i-1}}$

El vértice  $v_{i-1}$  y algunos de los vértices anteriores de  $v_i$  (quien está actualmente en el stack) no son visibles desde  $q$ . Sacamos a  $v_i$  del stack.

Sea  $u$  vértice que se encuentra en la parte superior del stack. La arista  $v_{i-1}v_i$  es conocida como *arista frontal*. Mientras  $v_{i-1}v_i$  intersecta  $uq$  y  $u$  es un vértice de  $P$ , realizamos pop al stack.





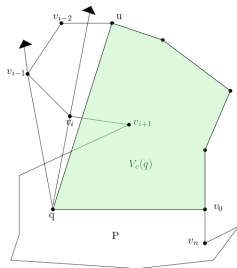
Después de ejecutar el backtracking, pueden suceder dos situaciones

- i.  $v_{i-1}v_i$  no interseca  $uq$
- ii.  $v_{i-1}v_i$  interseca  $uq$

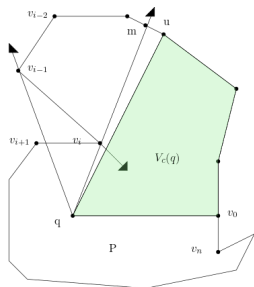
## Caso 2b.i

$v_{i-1}v_i$  **no intersecta**  $uq$

Si  $v_{i+1}$  se encuentra a la derecha de  $\overrightarrow{qv_i}$ , el backtracking continua con  $v_iv_{i+1}$  como la *arista frontal* actual.



De otra forma,  $v_{i+1}$  se encuentra a la izquierda de  $\overrightarrow{qv_i}$ .

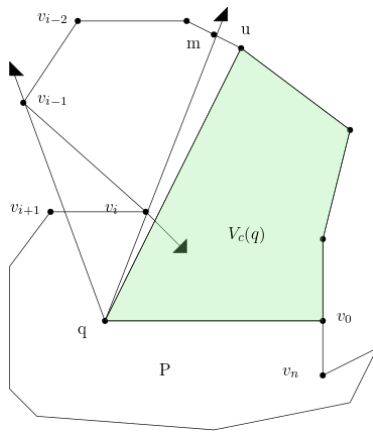


## Caso 2b.i

$v_{i-1}v_i$  **no interseca**  $uq$

Sea  $m$  el punto de intersección de  $\overrightarrow{qv_i}$  con la arista del polígono que contiene  $u$ .

Si  $v_{i+1}$  se encuentra a la derecha de  $\overrightarrow{v_{i-1}v_i}$ , entonces termina el backtracking.

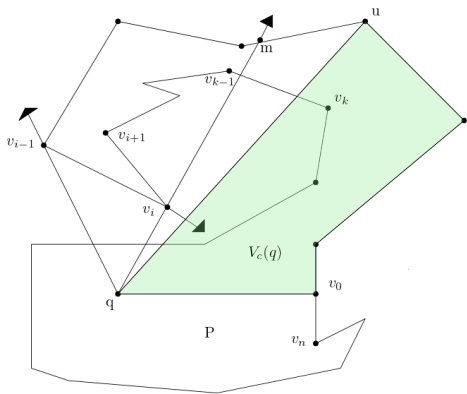


## Caso 2b.i

$v_{i-1}v_i$  **no interseca**  $uq$

Ingresamos  $m$  y  $v_{i+1}$  al stack y  $v_{i+1}$  se convierte en el nuevo  $v_i$ .

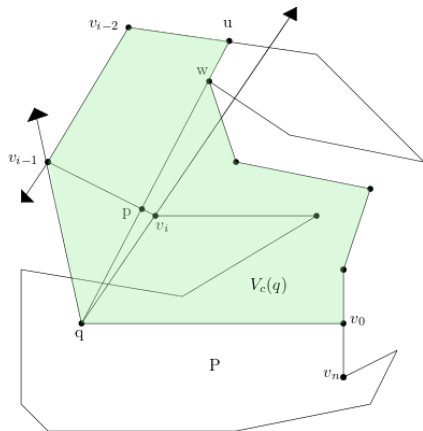
Si  $v_{i+1}$  se encuentra a la izquierda de  $\overrightarrow{v_{i-1}v_i}$ , revisamos  $bd(v_{i+1}, v_n)$  desde  $v_{i+1}$  hasta que un vértice  $v_k$  es encontrado de manera que la arista  $v_{k-1}v_k$  interseca  $mv_i$ . El backtracking continua con  $v_{k-1}v_k$  como la *arista frontal* actual.



## Caso 2b.ii

$v_{i-1}v_i$  **intersecta**  $uq$

$u$  no es un vértice de  $P$ . Sea  $w$  el vértice que se encuentra justo debajo de  $u$  en el stack. Por lo que,  $uw$  es una *arista construida*

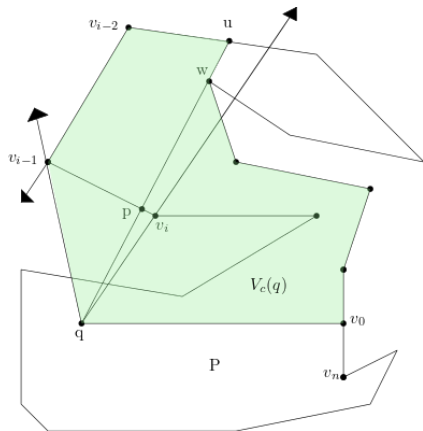


## Caso 2b.ii

$v_{i-1}v_i$  **intersecta**  $uq$

Sea  $p$  el punto de intersección de  $uq$  y  $v_{i-1}v_i$ . Si  $p \in qw$ , la visibilidad de ambos,  $u$  y  $w$  desde  $q$  esta bloqueada por  $v_{i-1}v_i$ . Vaciamos el stack.

El backtracking continua y  $v_{i-1}v_i$  permanece como la *arista frontal*.

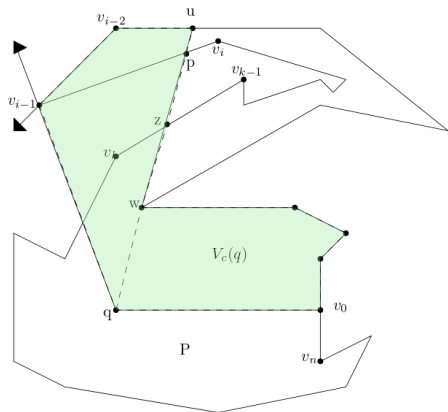


## Caso 2b.ii

$V_{j-1} V_j$  intersecta  $uq$

De otra forma,  $v_{i-1}v_i$  ha intersectado  $uw$  como  $p$  pertenece a  $uw$ .

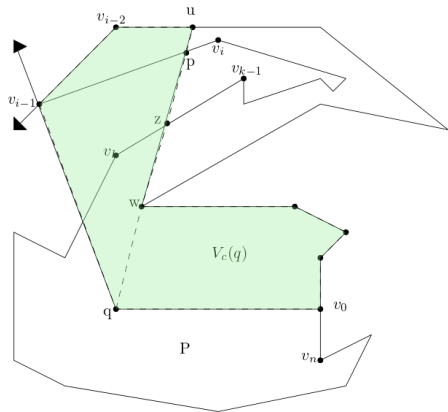
Checamos  $bd(v_{i+1}, v_n)$  desde  $v_{i+1}$  hasta encontrar un vértice  $v_k$  tal que la arista  $v_{k-1}v_k$  ha sido intersectada por  $w$  en algún punto (digamos,  $z$ ). Así que, todo  $bd(w, z)$  (a excepción de  $w$  y  $z$ ) no es visible por  $q$ . Vaciamos el stack.



## Caso 2b.ii

$v_{i-1}v_i$  **intersecta**  $uq$

Ingresamos a  $z$  y a  $v_k$  al stack. Por lo que,  $v_{k+1}$  se convierten en el nuevo  $v_i$ . Puede suceder que la *arista construida* que termina en  $u$  (digamos,  $uu'$ ) haya sido calculada por el Caso 2b al final de la fase de backtracking. Esto significa que el vértice  $u'$  es el último vértice en el stack que va a ser sacado en la fase de backtracking actual. Por lo tanto,  $q$ ,  $w$  y  $z$  no son colineales. Los sacamos del stack y notemos que nos encontramos la primera situación del backtracking actual.





## Algoritmo para calcular $V(q)$

---

## Algoritmo para calcular $V(q)$

1. Ingresamos a  $v_1$  al stack y  $i := i + 1$ . Si  $i = n + 1$  *Ir al Paso 8*.
2. Si  $v_i$  se encuentra a la izquierda de  $\overrightarrow{qv_{i-1}}$  entonces *Ir al Paso 1*
3. Si  $v_i$  se encuentra a la derecha de  $\overrightarrow{qv_{i-1}}$  y  $\overrightarrow{v_{i-2}v_{i-1}}$  entonces
  - 3.1 Checar desde  $v_{i+1}$  en sentido antihorario hasta encontrar un vértice  $v_k$  tal que  $v_{k-1}v_k$  intersecta  $\overrightarrow{qv_{i-1}}$ . Sea  $z$  el punto de intersección.
  - 3.2 Ingresamos  $z$  al stack.  $i := k$  e *Ir al Paso 1*.
4. Si  $v_i$  se encuentra a la derecha de  $\overrightarrow{qv_{i-1}}$  y a la izquierda de  $\overrightarrow{v_{i-2}v_{i-1}}$  entonces
  - 4.1 Sea  $u$  el elemento que se encuentra en la parte superior del stack. Realizamos *pop* al stack.
  - 4.2 Mientras  $u$  sea un vértice y  $v_{i-1}v_i$  intersecte  $uq$ , realizamos *pop* al stack.

5. Si  $v_{i-1}v_i$  no intersecta  $uq$  entonces
  - 5.1 Si  $v_{i+1}$  se encuentra a la derecha de  $\overrightarrow{qv_i}$  entonces  $i := i + 1$  e *Ir al Paso 4b.*
  - 5.2 Sea  $m$  el punto de intersección de  $\overrightarrow{qv_i}$  y la arista que contiene a  $u$ . Si  $v_{i+1}$  se encuentra a la derecha de  $\overrightarrow{v_{i-1}v_i}$  entonces ingresamos  $m$  al stack y *vamos al Paso 1.*
  - 5.3 Checamos desde  $v_{i+1}$  en orden antihorario hasta encontrar un vértice  $v_k$  tal que  $v_{k-1}v_k$  intersecte  $mv_i$ . Asignamos  $k$  a  $i$  y *vamos al Paso 4b.*
6. Sea  $w$  el vértice que se encuentra justo debajo de  $u$  en el stack. Sea  $p$  el punto de intersección entre  $v_{i-1}v_i$  y  $uq$ . Si  $p \in qw$  o  $q, w$  y  $u$  no son colineales entonces realizamos *pop* al stack y *vamos al paso 4b.*
7. Checamos desde  $v_{i+1}$  en sentido antihorario hasta encontrar un vértice  $v_k$  tal que  $v_{k-1}v_k$  intersecte  $wp$ . Insertamos el punto de intersección al stack, asignamos  $k$  a  $i$  y *vamos al Paso 1.*
8. Generamos  $V(q)$  sacando todos los vértices y puntos del stack y nos detenemos.

# Ejemplo

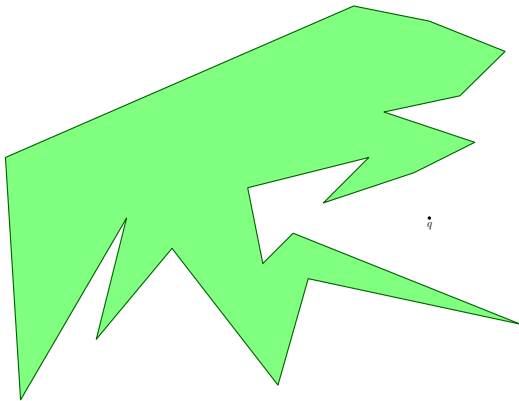
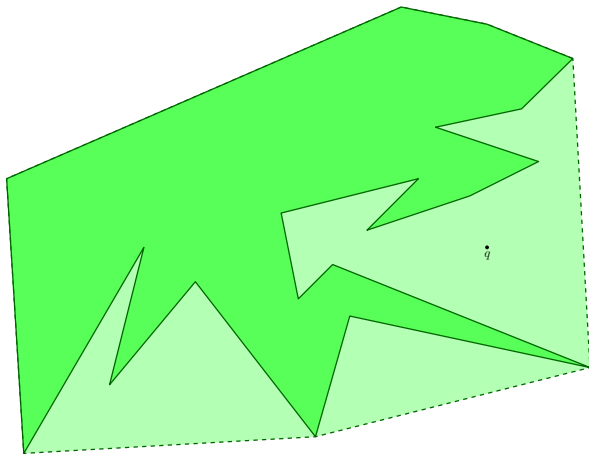


Figura: Polígono con punto  $q$

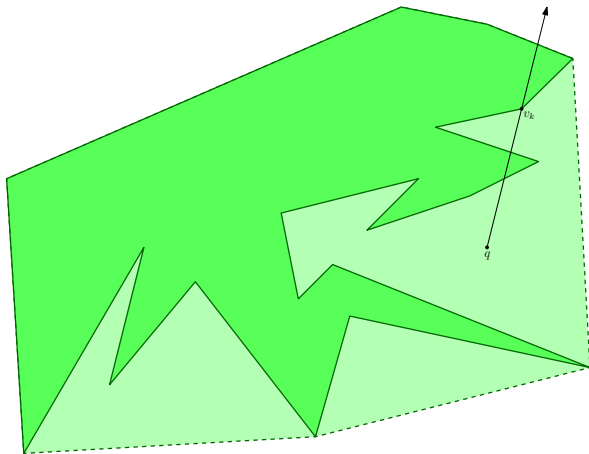
# Ejemplo

Calculamos el cierre convexo.



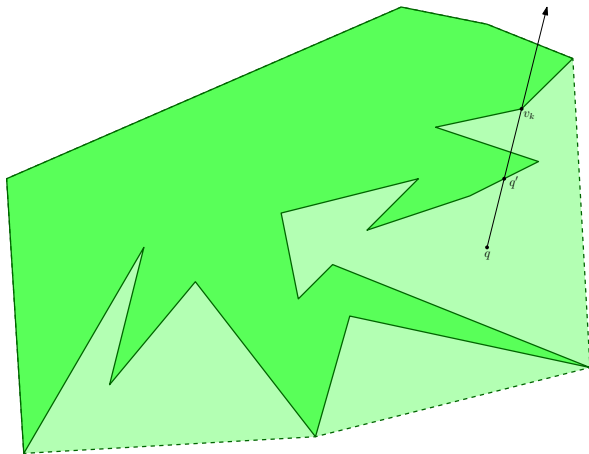
## Ejemplo

Trazamos una línea a partir de  $q$  que pase por un vértice de  $P$ .



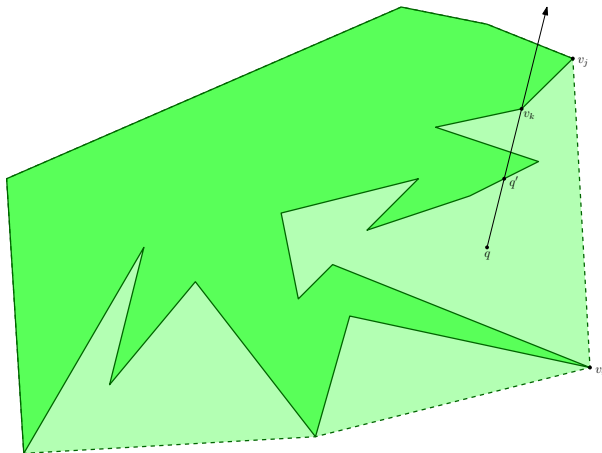
## Ejemplo

Encontramos al punto más cercano a  $q$  de las intersecciones de  $\overrightarrow{qv_k}$  con  $bd(P)$ .



# Ejemplo

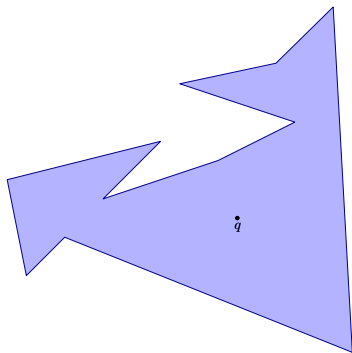
Encontramos a  $v_i$  y  $v_j$ .





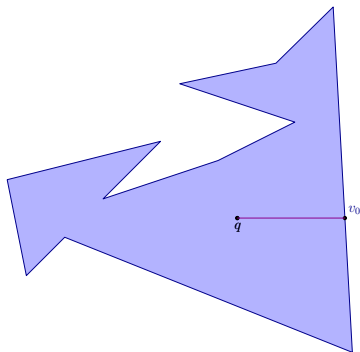
## Ejemplo

Ahora  $q$  es un punto interno del polígono conseguido.



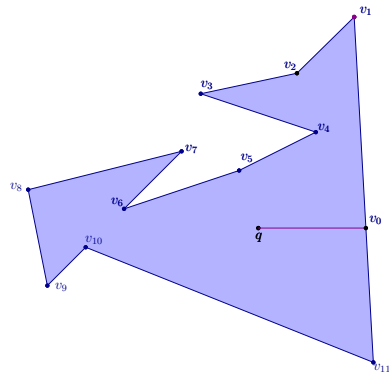
## Ejemplo

Se traza una línea horizontal desde el punto hacia la derecha a lo largo del eje  $x$ .



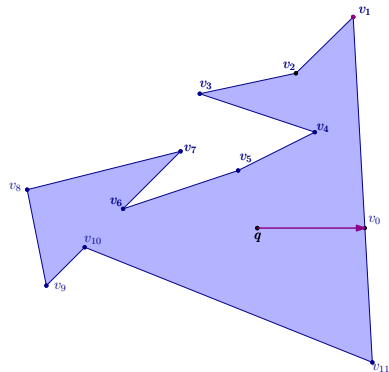
## Ejemplo

Asignamos identificadores a los vértices en sentido antihorario.



# Ejemplo

Insertamos a  $v_0$  a la pila.

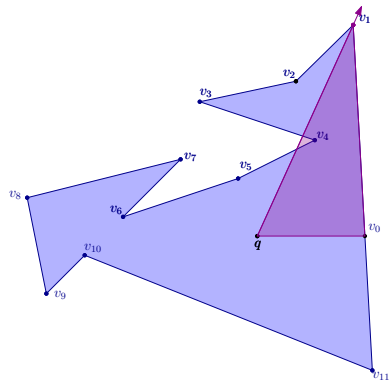


$v_0$

# Ejemplo

$v_1$  está a la izquierda de  $\overrightarrow{qv_0}$ , así que lo insertamos a la pila.

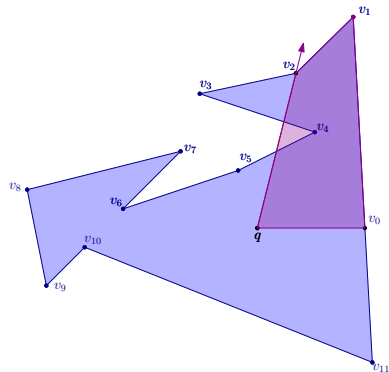
$v_1$
$v_0$



## Ejemplo

$v_2$  está a la izquierda de  $\overrightarrow{qv_1}$ , así que lo insertamos a la pila.

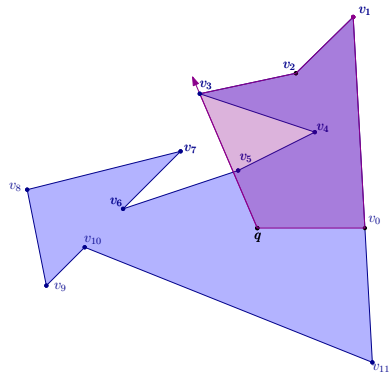
$v_2$
$v_1$
$v_0$



# Ejemplo

$v_3$  está a la izquierda de  $\overrightarrow{qv_2}$ , así que lo insertamos a la pila.

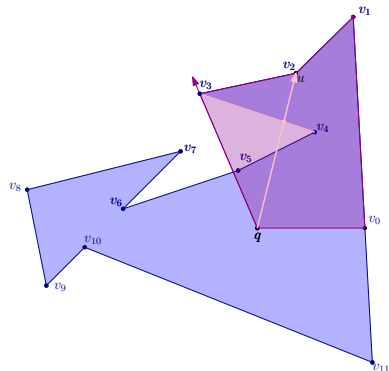
$v_3$
$v_2$
$v_1$
$v_0$



## Ejemplo

$v_4$  está a la derecha de  $\overrightarrow{qv_3}$  y está a la izquierda de  $\overrightarrow{v_2v_3}$ . Así que sacamos el primer elemento del stack. Sea  $v_3v_4$  la arista frontal y sea  $u$  el primer vértice de la pila.

$v_2$
$v_1$
$v_0$

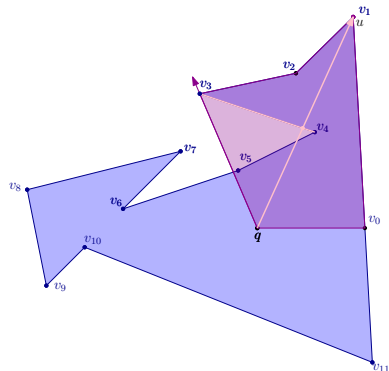




## Ejemplo

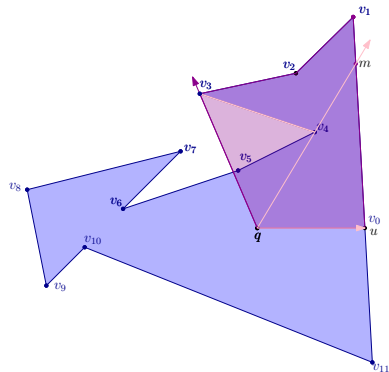
La arista frontal intersecta a  $uq$  y  $u$  es vértice de  $P$ , así que sacamos el primer elemento del stack. Ahora  $u$  es  $v_1$ .

$v_1$
$v_0$



## Ejemplo

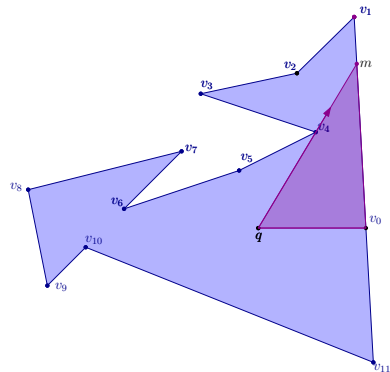
La arista frontal intersecta a  $uq$  y  $u$  es vértice de  $P$ , así que sacamos el primer elemento del stack. Ahora  $u$  es  $v_0$ . Sea  $m$  el punto de intersección de  $\overrightarrow{qv_4}$  con la arista que contiene a  $u$ .



# Ejemplo

Insertamos a  $m$  y  $v_4$  a la pila.

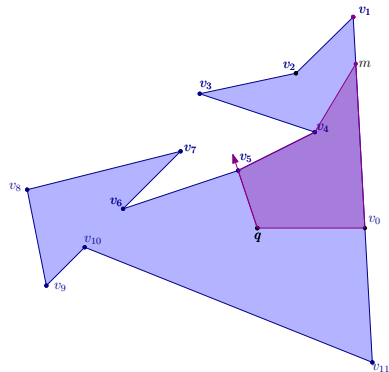
$v_4$
$m$
$v_0$



## Ejemplo

$v_5$  está a la izquierda de  $\overrightarrow{qv_4}$ , así que lo agregamos a la pila.

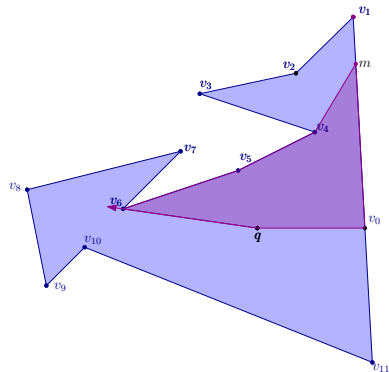
$v_5$
$v_4$
$m$
$v_0$



## Ejemplo

$v_6$  está a la izquierda de  $\overrightarrow{qv_5}$ , así que lo agregamos a la pila.

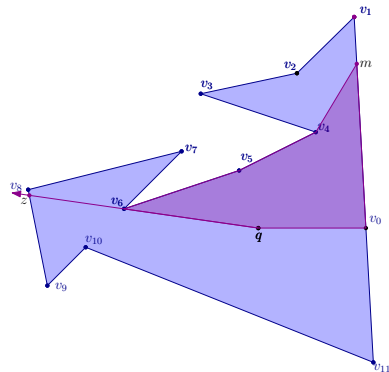
$v_6$
$v_5$
$v_4$
$m$
$v_0$



## Ejemplo

$v_7$  está a la derecha de  $\overrightarrow{qv_6}$  y a la derecha de  $\overrightarrow{v_5v_6}$ . Así, conseguimos la primer arista en orden antihorario que intersecte a  $\overrightarrow{qv_6}$  y sea  $z$  el punto de intersección.

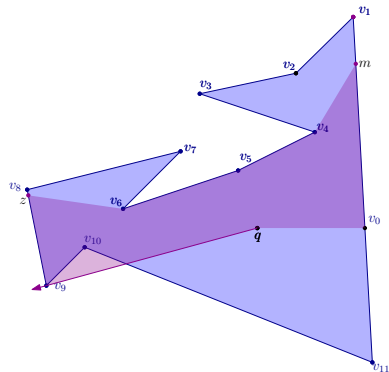
$v_6$
$v_5$
$v_4$
$m$
$v_0$



# Ejemplo

Insertamos a  $z$  y  $v_9$  a la pila.

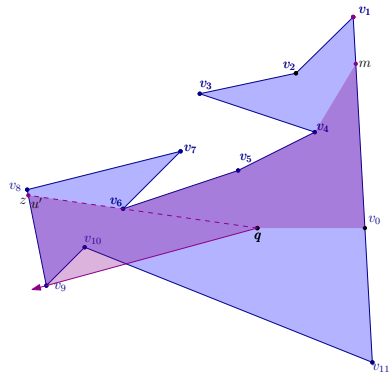
$v_9$
$z$
$v_6$
$v_5$
$v_4$
$m$
$v_0$



## Ejemplo

$v_{10}$  está a la derecha de  $\overrightarrow{qv_9}$  y a la izquierda de  $\overrightarrow{v_8v_9}$ , así que sacamos el primer elemento del stack. Sea  $v_9v_{10}$  la arista frontal y sea  $z$  el primer vértice de la pila.

$z$
$v_6$
$v_5$
$v_4$
$m$
$v_0$

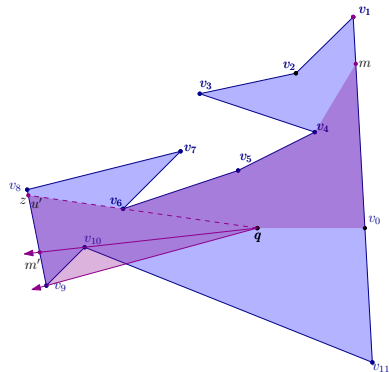




# Ejemplo

Sea  $m'$  el punto de intersección de  $\overrightarrow{qv_{10}}$  con la arista que contiene a  $u'$ .

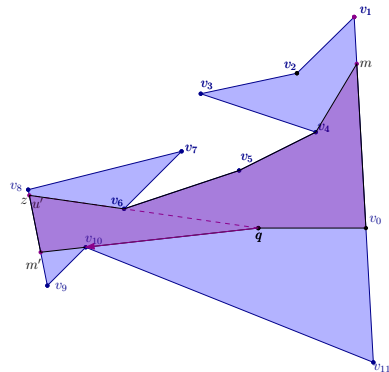
$z$
$v_6$
$v_5$
$v_4$
$m$
$v_0$



# Ejemplo

Insertamos a  $m'$  y a  $v_{10}$  a la pila.

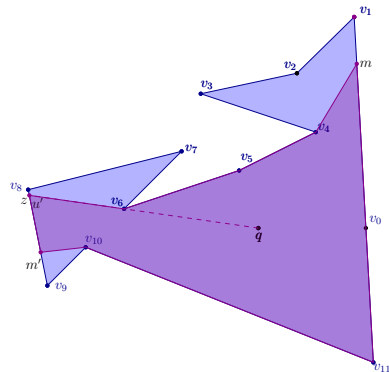
$v_{10}$
$m'$
$z$
$v_6$
$v_5$
$v_4$
$m$
$v_0$



## Ejemplo

$v_{11}$  está a la izquierda de  $\overrightarrow{qv_{10}}$  así que lo agregamos a la pila y terminamos.

$v_{11}$
$v_{10}$
$m'$
$z$
$v_6$
$v_5$
$v_4$
$m$
$v_0$



# Complejidad del algoritmo

## Invariante

El algoritmo mantiene una invariante de que los vértices y puntos en la pila en cualquier etapa están ordenados angularmente con respecto a  $q$ .

Revisemos paso a paso la complejidad del algoritmo

1. Inicialización:  $O(1)$
2. La ejecución recorre los  $n$  vértices una vez y para cada vértice se realizan operaciones en el stack:  $O(n)$

**Complejidad Total:**  $O(n)$

# Gracias por su atención

**Arturo González Peñaloza**

**Dulce Julieta Mora Hernández**

Universidad Nacional Autónoma de México

17 de mayo de 2024