Point Visibility

Arturo González Peñaloza
Dulce Julieta Mora Hernández

Universidad Nacional Autónoma de México

15 de mayo de 2024

Introducción

Polígono de visibilidad

El *polígono de visibilidad* $V(q)$ de un punto q en un polígono simple P es el conjunto de todos los puntos de P que son visibles desde q.

$$V(q) = \{p \in P \mid q \text{ sees } p\}$$

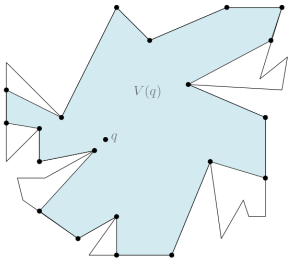


Figura: Polígono simple

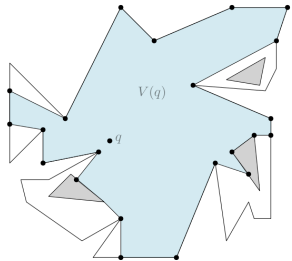


Figura: Polígono con hoyos

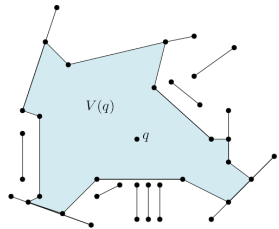
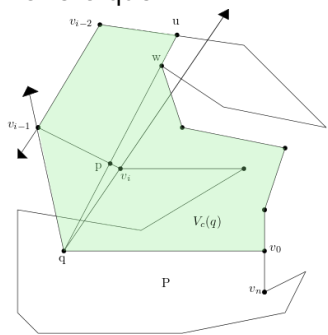


Figura: Conjunto de lineas

Arista construida

Sea ab una arista en el perímetro de $V(q)$ de manera que

- Ningún punto de ab, excepto a y b, pertenecen al perímetro de P
- q, a y b son colineales
- a o b es un vértice de P



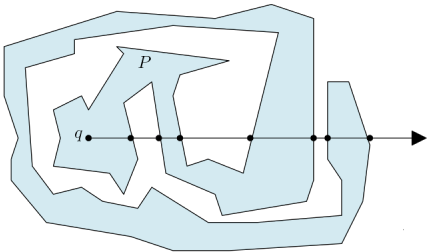
La arista ab se llama *arista construida* de $V(q)$

Revoluciones

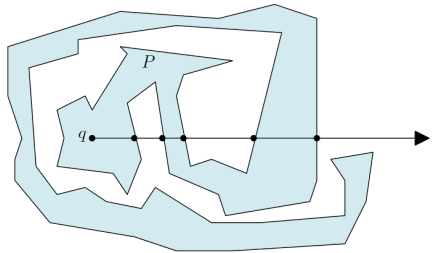
Para un polígono simple P y un punto $z \in P$, el *número de revoluciones* de P con respecto a z es el número de revoluciones que el perímetro de P hace alrededor de z.

Si el número de revoluciones de P respecto a z es uno, P es llamado *non-winding polygon*.

El número de revoluciones de P respecto a q es dos



El número de revoluciones de P respecto a q es una



Algoritmo para calcular CH en O(n)

1. t ← -1; b ← 0;
   v_1 ← input; v_2 ← input; v_3 ← input;
   if $(v_1, v_2, v_3) > 0$
   then begin push v_1; push v_2 ; end
   else begin push v_2; push v_1 ; end
   push v_3 ; insert v_3;
2. v ← input;
   until $(v, d_b, d_{b+1}) < 0$ or $(d_{t-1}, d_t, v) < 0$
   do v ← input end;
3. until $(d_{t-1}, d_t, v) > 0$ do pop d_t end;
   push v;
4. until $(v, d_b, d_{b+1}) > 0$ do remove d_b end;
   insert v;
   goto 2

Calculando la visibilidad de un punto

El problema

Non-winding polygon: O(n) algorithm

El primer paso del algoritmo es determinar si q se encuentra dentro o fuera de P.

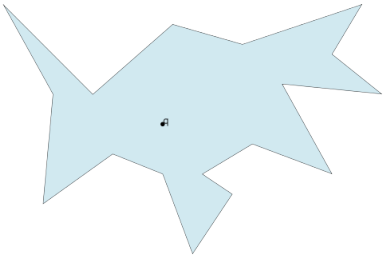


Figura: q se encuentra dentro de P

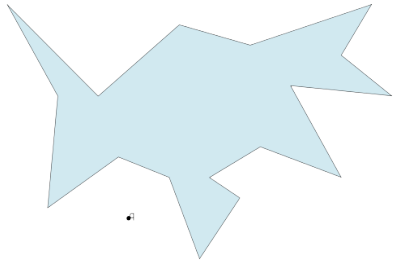


Figura: q se encuentra fuera de P

Existen dos situaciones dependiendo si q se encuentra dentro del cierre convexo de P o no.

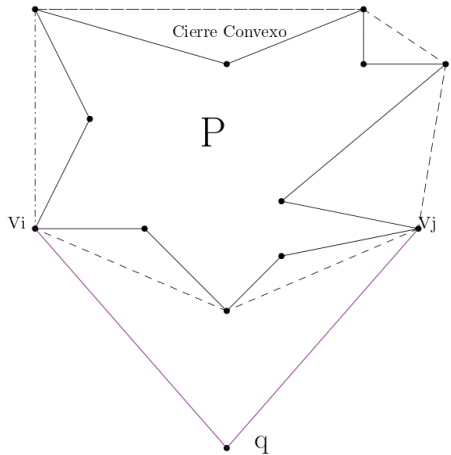
- q se encuentra fuera del cierre convexo de P
- q se encuentra fuera de P pero dentro del cierre convexo de P

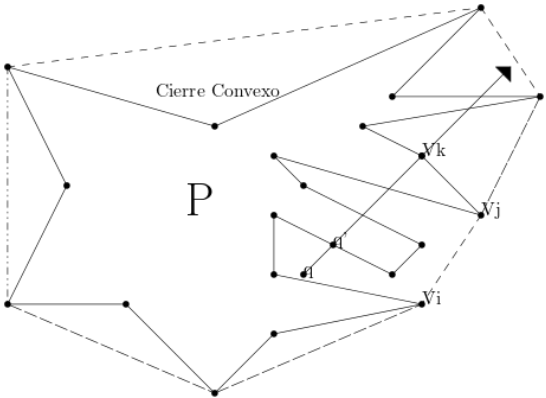
Si q se encuentra fuera del cierre convexo de P

1. Trazamos dos tangentes (digamos, qv_i y qv_j) a partir de q hacia el cierre convexo de P.
2. Ahora q es un punto interno de P'.

Observación

Sea $bd(P)$ el perímetro de P. Notemos que todos los puntos visibles del $bd(P)$ a partir de q se encuentran entre v_i y v_j viendo hacia q.





Si q se encuentra fuera de P pero dentro del cierre convexo de P

1. Trazamos una línea a partir de q que pase por cualquier vértice v_k de P (denotado como $\overrightarrow{qv_k}$).
2. Sea q' el punto más cercano a q entre todos los puntos de las intersecciones de $\overrightarrow{qv_k}$ con $bd(P)$.
3. A partir de q' recorremos $bd(P)$ en el sentido de las manecillas del reloj(y en sentido contrario) hasta que un vértice v_i del cierre convexo (respectivamente, v_j) se alcanza.
4. Ahora, q es un punto dentro de P'

A partir de ahora, se considera que el punto q es un punto interno de P. Por lo que, de ahora en adelante, se asume que $bd(P)$ no tiene *winding* alrededor de q.

El problema es calcular $V(q)$ de P de q.

Observación

Sea $bd(v_j, v_k)$ el límite en sentido antihorario de P desde v_j hasta v_k.

También asumimos que los vértices (y los puntos finales de las *aristas construidas*) en $bd(v_0 v_{i-1})$, las cuales se encuentran para ser visibles desde q por el procedimiento, son colocadas en un stack en el orden en que son encontradas, donde v_0 y v_{i-1} están en la parte inferior y superior del stack, respectivamente.

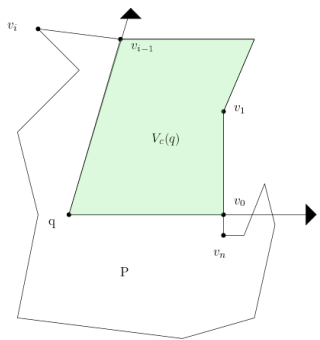
Contamos con los siguientes casos

1. El vértice v_i se encuentra a la izquierda de $\overrightarrow{qv_{i-1}}$
2. El vértice v_i se encuentra a la derecha de $\overrightarrow{qv_{i-1}}$
   - 2.1 El vértice v_i se encuentra a la derecha de $\overrightarrow{v_{i-2}v_{i-1}}$
   - 2.2 El vértice v_i se encuentra a la izquierda de $\overrightarrow{v_{i-2}v_{i-1}}$

Caso 1

El vértice v_i se encuentra a la izquierda de $\overrightarrow{qv_{i-1}}$

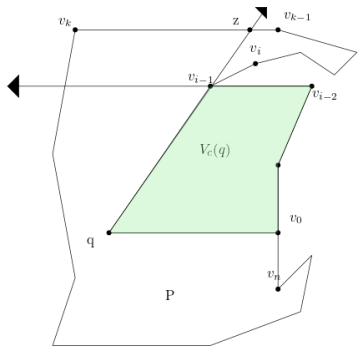
Como v_i y los vértices y puntos en el stack se encuentran ordenados por el ordenamiento angular respecto a q, v_i es ingresado al stack.



Caso 2

El vértice v_i se encuentra a la derecha de $\overrightarrow{qv_{i-1}}$

Puede observarse que v_{i-1} y v_i no pueden ser visibles por q ya que qv_i es intersectado por $bd(v_0, v_{i-1})$ o qv_{i-1} es intersectado por $bd(v_{i+1}, v_n)$



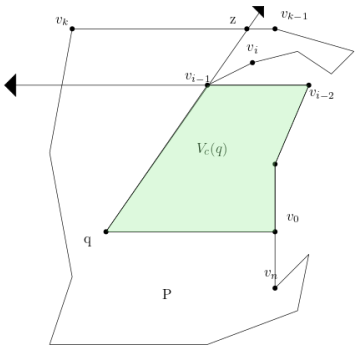
Caso 2a

El vértice v_i se encuentra a la derecha de $\overrightarrow{v_{i-2}v_{i-1}}$

El vértice v_i y algunos de los vértices subsecuentes de v_i (que serán revisados) no son visibles desde q.

Sea $v_{k-1}v_k$ la primer arista desde v_{i+1} en $bd(v_{i+1}, v_n)$, en sentido antihorario de manera que $v_{k+1}v_k$ intersecta $\overrightarrow{qv_{i-1}}$.

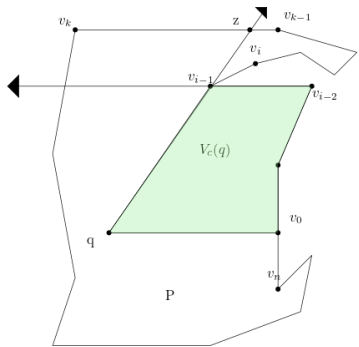
Sea z el punto de intersección.



Caso 2a

El vértice v_i se encuentra a la derecha de $\overrightarrow{v_{i-2}v_{i-1}}$

Veamos que v_k se encuentra a la izquierda de $\overrightarrow{qv_{v_{i-1}}}$ ya que $bd(P)$ does not wind around q. Entonces, ningún vértice de $bd(v_i, v_{v_{k-1}})$ es visible desde q y por consiguiente, z es el siguiente punto de v_{i-1} en $bd(v_{i-1}, v_n)$ visible desde q. Así que, v_iz es una *arista construida* de $V(q)$, donde q, v_{i-1} y z son puntos colineales.

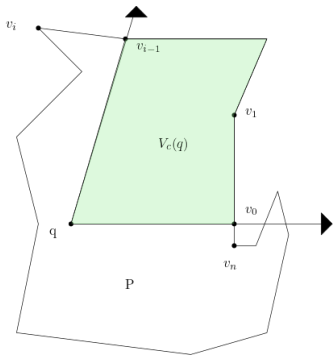


Caso 2b

El vértice v_i se encuentra a la izquierda de $\overrightarrow{v_{i-2}v_{i-1}}$

El vértice v_{i-1} y algunos de los vértices anteriores de v_i (quien está actualmente en el stack) no son visibles desde q. Sacamos a v_i del stack.

Sea u vértice que se encuentra en la parte superior del stack. La arista $v_{i-1}v_i$ es conocida como *forward edge*. Mientras $v_{i-1}v_i$ intersecta uq y u es un vértice de P, realizamos pop al stack.



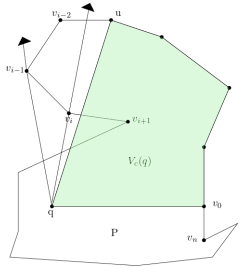
Después de ejecutar el backtracking, pueden suceder dos situaciones

i. $v_{i-1}v_i$ no intersecta uq
ii. $v_{i-1}v_i$ intersecta uq

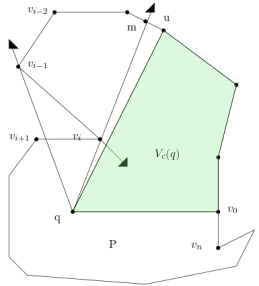
Caso 2b.i

$v_{i-1}v_i$ **no intersecta** uq

Si v_{i+1} se encuentra a la derecha de $\overrightarrow{qv_i}$, el backtracking continua con v_iv_{i+1} como la *forward edge* actual.



De otra forma, v_{i+1} se encuentra a la izquierda de $\overrightarrow{qv_i}$.

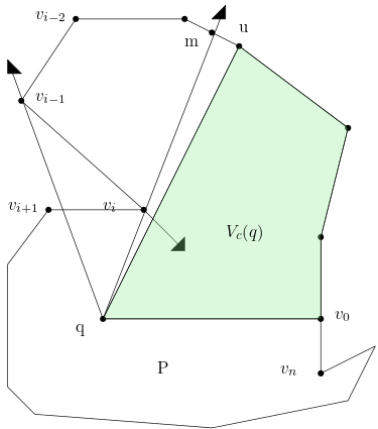


Caso 2b.i

$v_{i-1}v_i$ **no intersecta** uq

Sea m el punto de intersección de $\overrightarrow{qv_i}$ con la arista del polígono que contiene u.

Si v_{i+1} se encuentra a la derecha de $\overrightarrow{v_{i-1}v_i}$, entonces termina el backtracking.

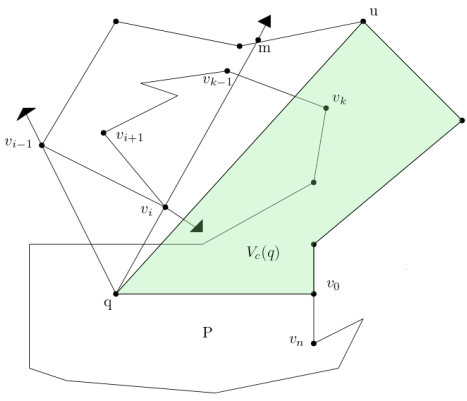


Caso 2b.i

$v_{i-1}v_i$ **no intersecta** uq

Ingresamos m y v_{i+1} al stack y v_{i+1} se convierte en el nuevo v_i.

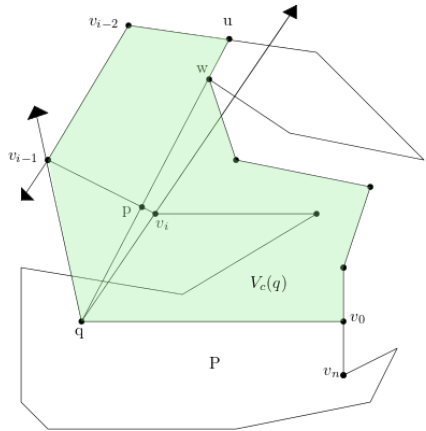
Si v_{i+1} se encuentra a la izquierda de $\overrightarrow{v_{i-1}v_i}$, revisamos $bd(v_{i+1}, v_n)$ desde v_{i+1} hasta que un vértice v_k es encontrado de manera que la arista $v_{k-1}v_k$ intersecta mv_i. El backtracking continua con $v_{k-1}v_k$ como la *forward edge* actual.



Caso 2b.ii

$v_{i-1}v_i$ **intersecta** uq

u no es un vértice de *P*. Sea *w* el vértice que se encuentra justo debajo de *u* en el stack. Por lo que, *uw* es una *arista construida*

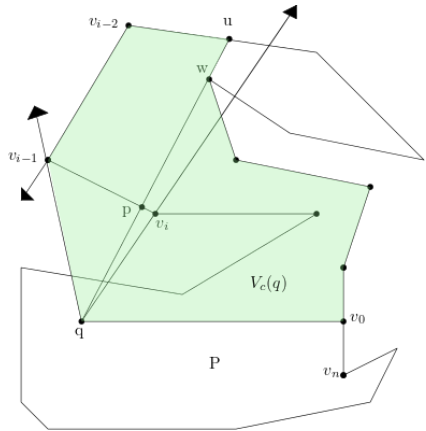


Caso 2b.ii

$v_{i-1}v_i$ **intersecta** uq

Sea p el punto de intersección de uq y $v_{i-1}v_i$. Si $p \in qw$, la visibilidad de ambos, u y w desde q esta bloqueada por $v_{i-1}v_i$. Vaciamos el stack.

El backtracking continua y $v_{i-1}v_i$ permanece como la *forward edge*.

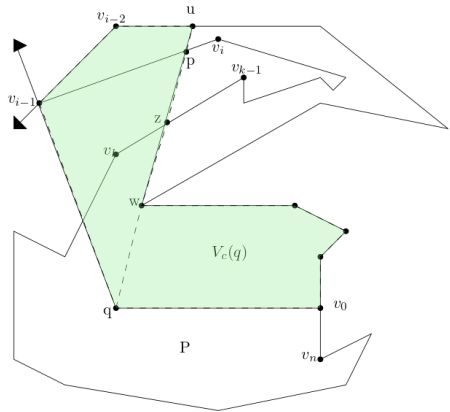


Caso 2b.ii

$v_{i-1}v_i$ **intersecta** uq

De otra forma, $v_{i-1}v_i$ ha intersectado uw como p pertenece a uw.

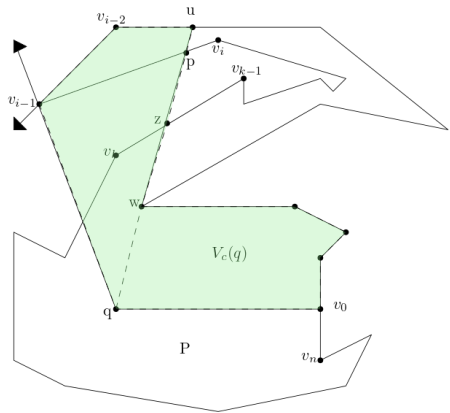
Checamos $bd(v_{i+1,v_n})$ desde v_{i+1} hasta encontrar un vértice v_k tal que la arista $v_{k-1}v_k$ ha sido intersectada por wp en algún punto (digamos, z). Así que, todo $bd(w,z)$(a excepción de w y z) no es visible por q. Vaciamos el stack.



Caso 2b.ii

$v_{i-1}v_i$ **intersecta** uq

Ingresamos a z y a v_k al stack. Por lo que, v_{k+1} se convierten en el nuevo v_i. Puede suceder que la *arista construida* que termina en u (digamos, uu') haya sido calculada por el Caso 2b al final de la fase de backtracking. Esto significa que el vértice u' es el último vértice en el stack que va a ser sacado en la fase de backtracking actual. Por lo tanto, q, w y z no son colineales. Los sacamos del stack y notemos que nos encontramos la primera situación del backtracking actual.



Algoritmo para calcular $V(q)$

Algoritmo para calcular $V(q)$

1. Ingresamos a v_1 al stack y $i := i + 1$. Si $i = n + 1$ *Ir al Paso 8*.
2. Si v_i se encuentra a la izquierda de $\overrightarrow{qv_{i-1}}$ entonces *Ir al Paso 1*
3. Si v_i se encuentra a la derecha de $\overrightarrow{qv_{i-1}}$ y $\overrightarrow{v_{i-2}v_{i-1}}$ entonces
   - 3.1 Checar desde v_{i+1} en sentido antihorario hasta encontrar un vértice v_k tal que $v_{k-1}v_k$ intersecta $\overrightarrow{qv_{i-1}}$. Sea z el punto de intersección.
   - 3.2 Ingresamos z al stack. $i := k$ e *Ir al Paso 1*.
4. Si v_i se encuentra a la derecha de $\overrightarrow{qv_{i-1}}$ y a la izquierda de $\overrightarrow{v_{i-2}v_{i-1}}$ entonces
   - 4.1 Sea u el elemento que se encuentra en la parte superior del stack. Realizamos *pop* al stack.
   - 4.2 Mientras u sea un vértice y $v_{i-1}v_i$ intersecte uq, realizamos *pop* al stack.

5. Si $v_{i-1}v_i$ no intersecta uq entonces
   - 5.1 Si v_{i+1} se encuentra a la derecha de $\overrightarrow{qv_i}$ entonces $i := i + 1$ e *Ir al Paso 4b*.
   - 5.2 Sea m el punto de intersección de $\overrightarrow{qv_i}$ y la arista que contiene a u. Si v_{i+1} se encuentra a la derecha de $\overrightarrow{v_{i-1}v_i}$ entonces ingresamos m al stack y *vamos al Paso 1*.
   - 5.3 Checamos desde v_{i+1} en orden antihorario hasta encontrar un vértice v_k tal que $v_{k-1}v_k$ intersecte mv_i. Asignamos k a i y *vamos al Paso 4b*.
6. Sea w el vértice que se encuentra justo debajo de u en el stack. Sea p el punto de intersección entre $v_{i-1}v_i$ y uq. Si $p \in qw$ o q, w y u no son colineales entonces realizamos *pop* al stack y *vamos al paso 4b*.
7. Checamos desde v_{i+1} en sentido antihorario hasta encontrar un vértice v_k tal que $v_{k-1}v_k$ intersecte wp. Insertamos el punto de intersección al stack, asignamos k a i y *vamos al Paso 1*.
8. Generamos $V(q)$ sacando todos los vértices y puntos del stack y nos detenemos.

Complejidad del algoritmo

Invariante

El algoritmo mantiene una invariante de que los vértices y puntos en la pila en cualquier etapa están ordenados angularmente con respecto a q.

Revisemos paso a paso la complejidad del algoritmo

1. Inicialización: $O(1)$
2. La ejecución recorre los n vértices una vez y para cada vértice se realizan operaciones en el stack: $O(n)$

Complejidad Total: $O(n)$

Teorema

Teorema

El polígono de visibilidad $V(q)$ de un punto dado q dentro de un polígono simple de n lados P de puede ser calculado en tiempo $O(n)$.

Gracias por su atención

Arturo González Peñaloza
Dulce Julieta Mora Hernández

Universidad Nacional Autónoma de México

15 de mayo de 2024