Point Visibility

Arturo González Peñaloza
Dulce Julieta Mora Hernández

Universidad Nacional Autónoma de México

17 de mayo de 2024

Introducción

Polígono de visibilidad

El *polígono de visibilidad* $V(q)$ de un punto q en un polígono simple P es el conjunto de todos los puntos de P que son visibles desde q.

$$V(q) = \{p \in P \mid q \text{ ve a } p\}$$

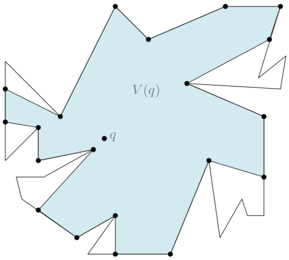


Figura: Polígono simple

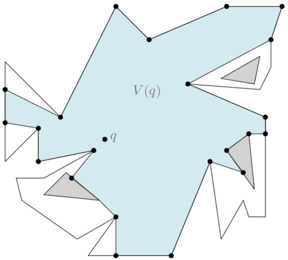


Figura: Polígono con hoyos

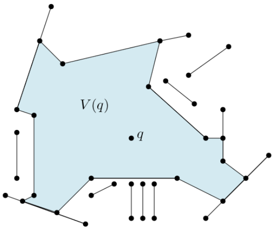
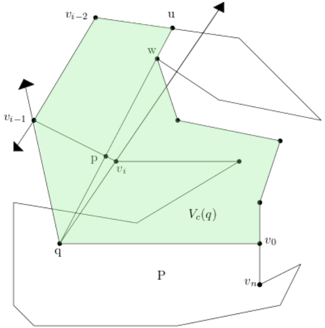


Figura: Conjunto de lineas

Arista construida

Sea ab una arista en el perímetro de $V(q)$ de manera que

- Ningún punto de ab, excepto a y b, pertenecen al perímetro de P
- q, a y b son colineales
- a o b es un vértice de P



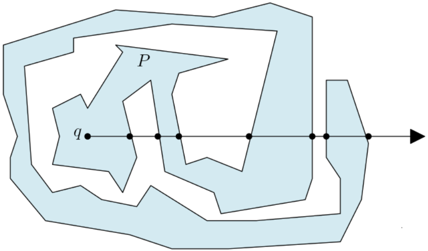
La arista ab se llama *arista construida* de $V(q)$

Revoluciones

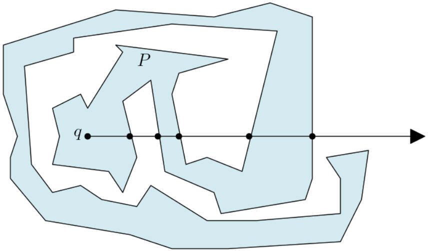
Para un polígono simple P y un punto $z \in P$, el *número de revoluciones* de P con respecto a z es el número de revoluciones que el perímetro de P hace alrededor de z.

Si el número de revoluciones de P respecto a z es uno, P es llamado *non-winding polygon*.

El número de revoluciones de P respecto a q es dos



El número de revoluciones de P respecto a q es una



Algoritmo de Melkman

Los polígonos simples simplifican el proceso de calcular su cierre convexo. El algoritmo de Melkman es una herramienta que aprovecha esta propiedad.

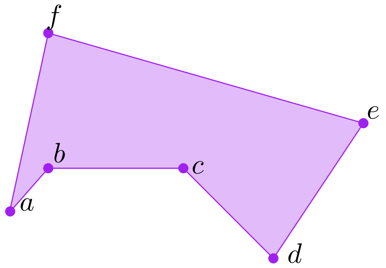


Figura: Polígono simple.

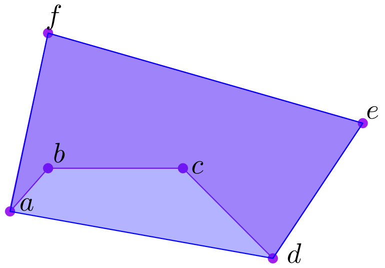


Figura: Polígono simple y cierre convexo asociado.

Algoritmo de Melkman

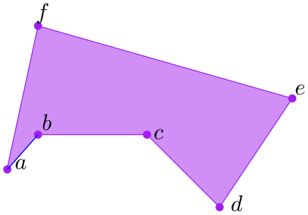
1. $D \leftarrow (p_2, p_1, p_2)$// Se agregan a una deque dos puntos consecutivos del polígono.
2. Para $i \leftarrow 3$ a n hacer:
   2.1 Si p_i está fuera del ángulo $v_{t-1}v_tv_{b+1}$, entonces
      2.1.1 Mientras p_i esté a la izquierda de $\overrightarrow{v_bv_{b+1}}$, entonces se saca desde abajo de D.
      2.1.2 Mientras p_i esté a la derecha de $\overrightarrow{v_tv_{t-1}}$, entonces se saca desde arriba de D.
   2.2 Se agrega a p_i. al inicio y al final de D.

Observación

Si tomamos los primeros tres vértices de la deque (leídos de izquierda a derecha), obtenemos una vuelta a la derecha. Si tomamos los últimos tres vértices de la deque (leídos de derecha a izquierda), obtenemos una vuelta a la izquierda.

Ejemplo

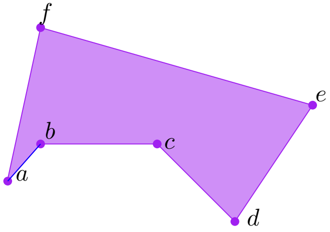
Se agrega a la deque dos puntos consecutivos del polígono.



a	b	a

Ejemplo

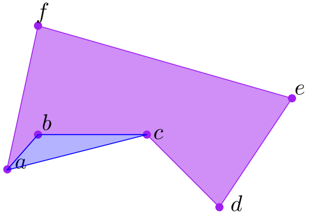
c está a la derecha de $\overrightarrow{ab}$, entonces se saca desde abajo de la deque.



a	b

Ejemplo

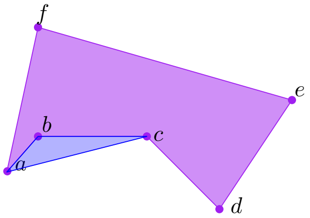
Se agrega a c al inicio y al final de la deque.



c	a	b	c

Ejemplo

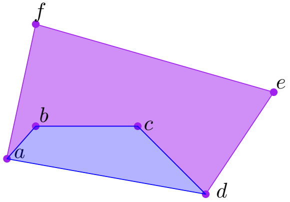
d está a la izquierda de $\overrightarrow{ca}$, entonces se saca desde abajo de la deque.



a	b	c

Ejemplo

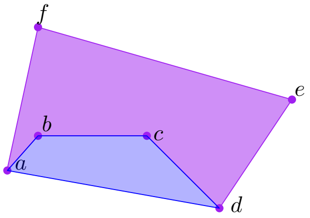
Se agrega a *d* al inicio y al final de la deque.



d	a	b	c	d

Ejemplo

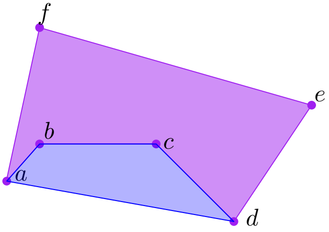
e se encuentra a la derecha de $\overrightarrow{dc}$, entonces se saca desde arriba de la deque.



d	a	b	c

Ejemplo

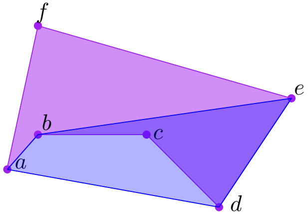
e se encuentra a la derecha de $\overrightarrow{cb}$, entonces se saca desde arriba de la deque.



d	a	b

Ejemplo

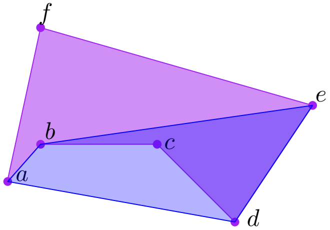
Se agrega a e al inicio y al final de la deque.



e	d	a	b	e

Ejemplo

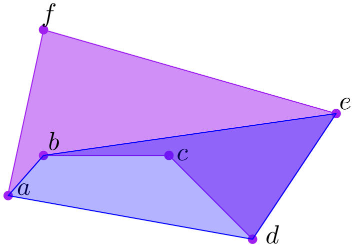
f está a la derecha de $\overrightarrow{eb}$, así que se saca desde arriba de la deque.



e	d	a	b

Ejemplo

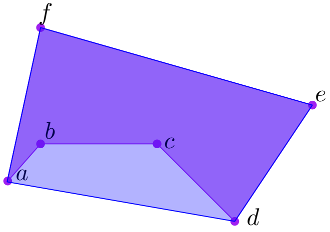
f está a la derecha de $\overrightarrow{ba}$, así que se saca desde arriba de la deque.



e	d	a

Ejemplo

Se agrega a f al inicio y al final de la deque y terminamos.



f	e	d	a	f

Complejidad

Si el polígono tiene n vértices, entonces se realizan a lo más $2n$ inserciones y $2n-3$ eliminaciones. Así, el algoritmo es $O(n)$.

Punto en poligono

Un problema geométrico es determinar si un punto específico está dentro o fuera de un polígono dado.

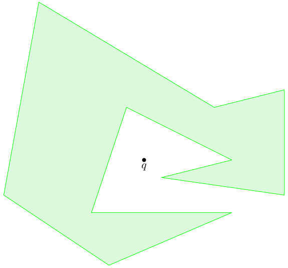


Figura: Punto q fuera de polígono.

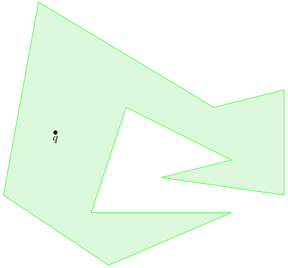
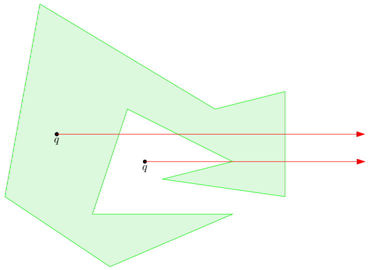


Figura: Punto q dentro de polígono.

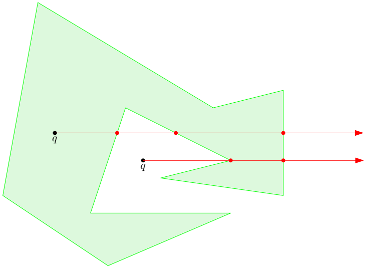
Método del rayo

1. Se traza una línea horizontal desde el punto hacia la derecha a lo largo del eje x.



Método del rayo

1. Se traza una línea horizontal desde el punto hacia la derecha a lo largo del eje x.
2. Se cuenta el número de intersecciones con las aristas del polígono:
    2.1 Si el número de intersecciones es par, entonces el punto está afuera del polígono.
    2.2 En otro caso, el punto está dentro del polígono.



Complejidad

1. Se traza una línea horizontal desde el punto hacia la derecha a lo largo del eje x. **O(1)**
2. Se cuenta el número de intersecciones con las aristas del polígono: **O(n)**
   2.1 Si el número de intersecciones es par, entonces el punto está afuera del polígono. **O(1)**
   2.2 En otro caso, el punto está dentro del polígono. **O(1)**

Complejidad: O(n)

Calculando la visibilidad de un punto

El problema

Non-winding polygon: O(n) algorithm

Presentamos el algoritmo de Lee, el cual permite determinar el polígono de visibilidad $V(q)$ de un polígono simple P con n vértices desde un punto q en tiempo $O(n)$.

El primer paso del algoritmo es determinar si q se encuentra dentro o fuera de P.

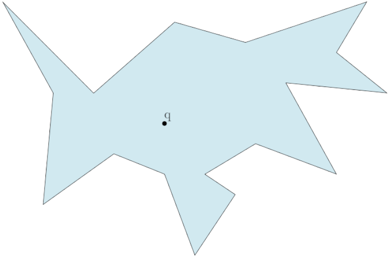


Figura: q se encuentra dentro de P

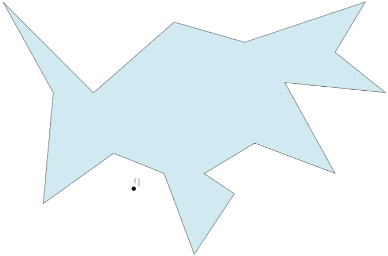
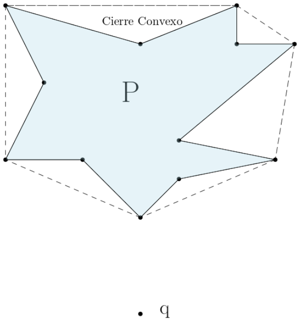
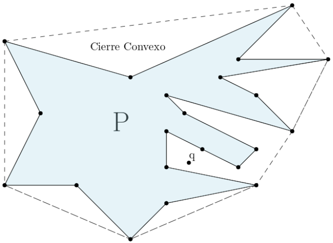


Figura: q se encuentra fuera de P

Existen dos situaciones:

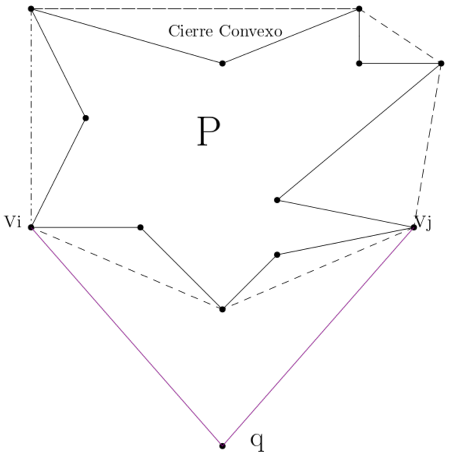
- q se encuentra fuera del cierre convexo de P
- q se encuentra fuera de P pero dentro del cierre convexo de P





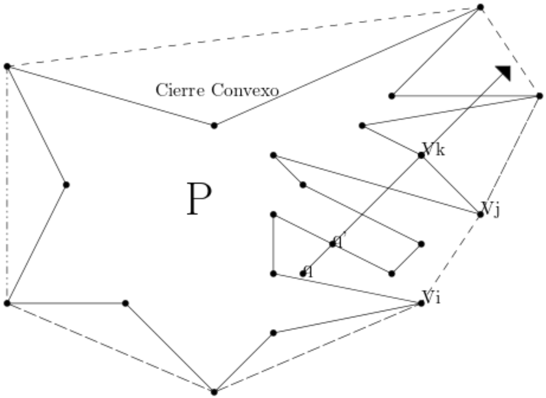
Si q se encuentra fuera del cierre convexo de P

1. Trazamos dos tangentes (digamos, qv_i y qv_j) a partir de q hacia el cierre convexo de P.
2. Ahora q es un punto interno de P'.



Observación

Sea $bd(P)$ el perímetro de P. Notemos que todos los puntos visibles del $bd(P)$ a partir de q se encuentran entre v_i y v_j viendo hacia q.

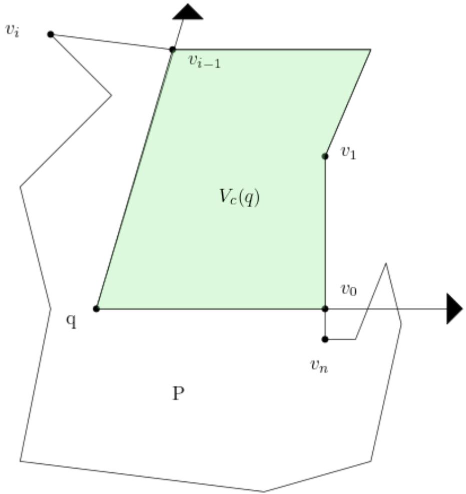


Si q se encuentra fuera de P pero dentro del cierre convexo de P

1. Trazamos una línea a partir de q que pase por cualquier vértice v_k de P (denotado como $\overrightarrow{qv_k}$).
2. Sea q' el punto más cercano a q entre todos los puntos de las intersecciones de $\overrightarrow{qv_k}$ con $bd(P)$.
3. A partir de q' recorremos $bd(P)$ en el sentido de las manecillas del reloj(y en sentido contrario) hasta que un vértice v_i del cierre convexo (respectivamente, v_j) se alcanza.
4. Ahora, q es un punto dentro de P'

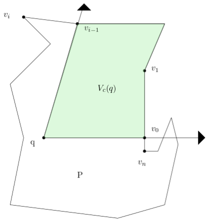
A partir de ahora, se considera que el punto q es un punto interno de P. Por lo que, de ahora en adelante, se asume que $bd(P)$ no tiene *winding* alrededor de q.

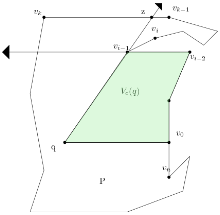
El problema es calcular $V(q)$ de P de q.

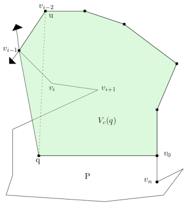

v_i
v_{i-1}
v_1
$V_c(q)$
v_0
q
v_n
P

Contamos con los siguientes casos

1. El vértice v_i se encuentra a la izquierda de $\overrightarrow{qv_{i-1}}$
2. El vértice v_i se encuentra a la derecha de $\overrightarrow{qv_{i-1}}$
   2.1 El vértice v_i se encuentra a la derecha de $\overrightarrow{v_{i-2}v_{i-1}}$
   2.2 El vértice v_i se encuentra a la izquierda de $\overrightarrow{v_{i-2}v_{i-1}}$



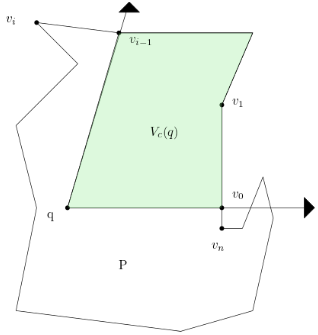




Caso 1

El vértice v_i se encuentra a la izquierda de $\overrightarrow{qv_{i-1}}$

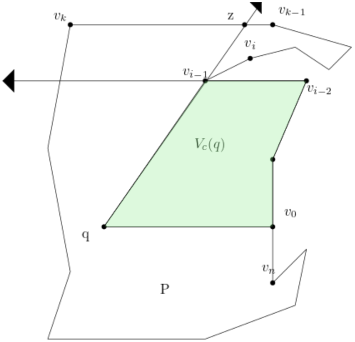
Como v_i y los vértices y puntos en el stack se encuentran ordenados por el ordenamiento angular respecto a q, v_i es ingresado al stack.



Caso 2

El vértice v_i se encuentra a la derecha de $\overrightarrow{qv_{i-1}}$

Puede observarse que v_{i-1} y v_i no pueden ser visibles por q ya que qv_i es intersectado por $bd(v_0, v_{i-1})$ o qv_{i-1} es intersectado por $bd(v_{i+1}, v_n)$



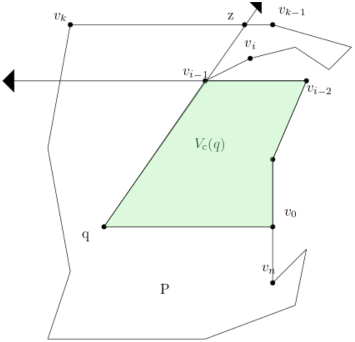
Caso 2a

El vértice v_i se encuentra a la derecha de $\overrightarrow{v_{i-2}v_{i-1}}$

El vértice v_i y algunos de los vértices subsecuentes de v_i (que serán revisados) no son visibles desde q.

Sea $v_{k-1}v_k$ la primer arista desde v_{i+1} en $bd(v_{i+1}, v_n)$

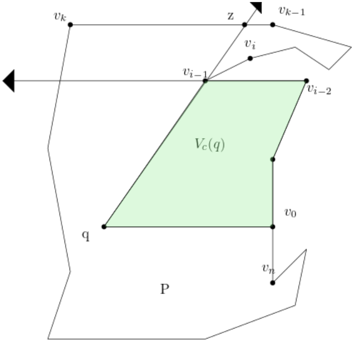
Sea z el punto de intersección.



Caso 2a

El vértice v_i se encuentra a la derecha de $\overrightarrow{v_{i-2}v_{i-1}}$

Veamos que v_k se encuentra a la izquierda de $\overrightarrow{qv_{v_{i-1}}}$ ya que $bd(P)$ no hace *winding* alrededor de q.

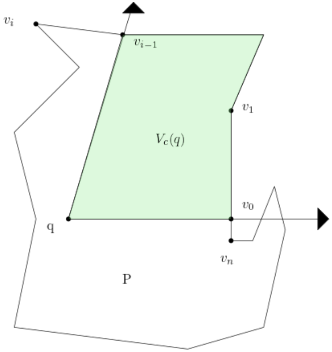


Caso 2b

El vértice v_i se encuentra a la izquierda de $\overrightarrow{v_{i-2}v_{i-1}}$

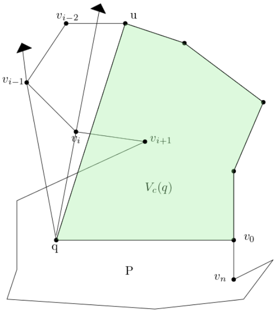
El vértice v_{i-1} y algunos de los vértices anteriores de v_i (quien está actualmente en el stack) no son visibles desde q. Sacamos a v_i del stack.

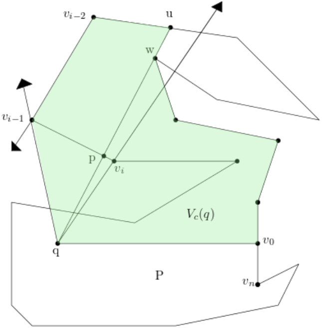
Sea u el vértice que se encuentra en la parte superior del stack. La arista $v_{i-1}v_i$ es conocida como *arista frontal*. Mientras $v_{i-1}v_i$ intersecta uq y u es un vértice de P, realizamos pop al stack.



Después de ejecutar el backtracking, pueden suceder dos situaciones

i. $v_{i-1}v_i$ no intersecta uq
ii. $v_{i-1}v_i$ intersecta uq

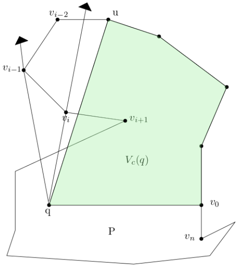




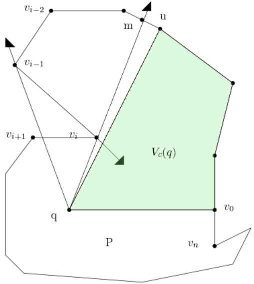
Caso 2b.i

$v_{i-1}v_i$ no intersecta uq

Si v_{i+1} se encuentra a la derecha de $\overrightarrow{qv_i}$, el backtracking continua con v_iv_{i+1} como la *arista frontal* actual.



De otra forma, v_{i+1} se encuentra a la izquierda de $\overrightarrow{qv_i}$.

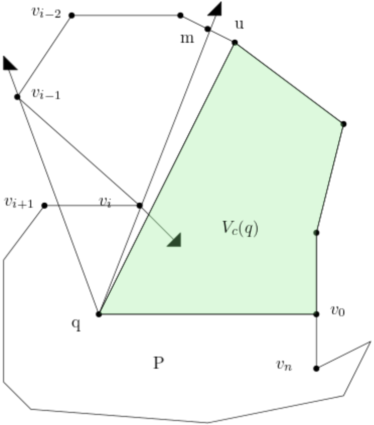


Caso 2b.i

$v_{i-1}v_i$ no intersecta uq

Sea m el punto de intersección de $\overrightarrow{qv_i}$ con la arista del polígono que contiene u.

Si v_{i+1} se encuentra a la derecha de $\overrightarrow{v_{i-1}v_i}$, entonces termina el backtracking.

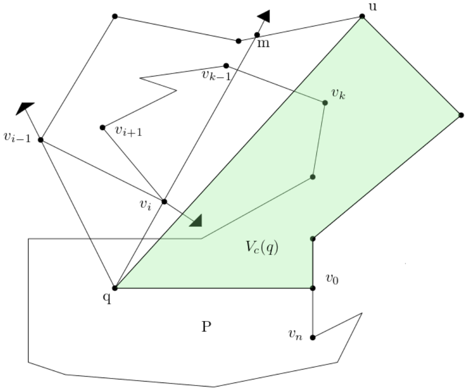


Caso 2b.i

$v_{i-1}v_i$ no intersecta uq

Ingresamos m y v_{i+1} al stack y v_{i+1} se convierte en el nuevo v_i.

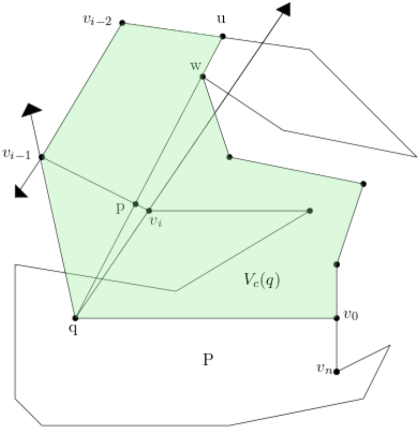
Si v_{i+1} se encuentra a la izquierda de $\overrightarrow{v_{i-1}v_i}$, revisamos $bd(v_{i+1}, v_n)$ desde v_{i+1} hasta que un vértice v_k es encontrado de manera que la arista $v_{k-1}v_k$ intersecta mv_i. El backtracking continua con $v_{k-1}v_k$ como la *arista frontal* actual.



Caso 2b.ii

$v_{i-1}v_i$ **intersecta** uq

En este caso, u no es un vértice de P y w es el vértice que se encuentra justo debajo de u en el stack. Por lo que, uw es una *arista construida*

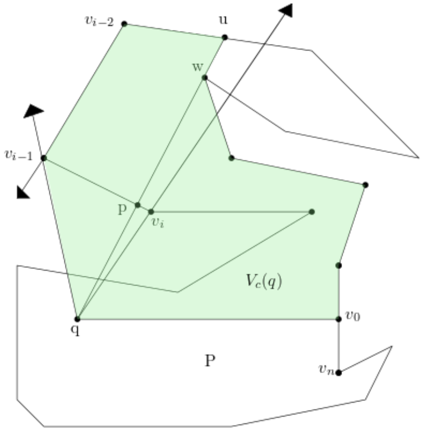


Caso 2b.ii

$v_{i-1}v_i$ **intersecta** uq

Sea p el punto de intersección de uq y $v_{i-1}v_i$. Si $p \in qw$, la visibilidad de ambos, u y w desde q esta bloqueada por $v_{i-1}v_i$. Realizamos *pop* al stack.

El backtracking continua y $v_{i-1}v_i$ permanece como la *arista frontal*.



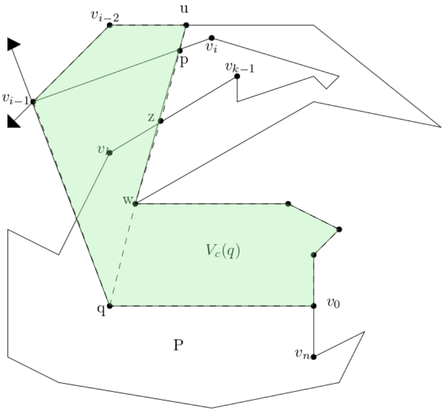
Caso 2b.ii

$v_{i-1}v_i$ **intersecta** uq

De otra forma, $v_{i-1}v_i$ ha intersectado uw como p pertenece a uw.

Checamos $bd(v_{i+1,v_n})$ desde v_{i+1} hasta encontrar un vértice v_k tal que la arista $v_{k-1}v_k$ ha sido intersectada por wp en algún punto (digamos, z). Ingresamos a z

y a v_k al stack. Por lo que, v_{k+1} se convierten en el nuevo v_i.



Algoritmo para calcular $V(q)$

Algoritmo para calcular $V(q)$

1. Ingresamos a v_1 al stack y $i := i + 1$. Si $i = n + 1$ *Ir al Paso 8.*
2. Si v_i se encuentra a la izquierda de $\overrightarrow{qv_{i-1}}$ entonces *Ir al Paso 1*
3. Si v_i se encuentra a la derecha de $\overrightarrow{qv_{i-1}}$ y $\overrightarrow{v_{i-2}v_{i-1}}$ entonces
   3.1 Checar desde v_{i+1} en sentido antihorario hasta encontrar un vértice v_k tal que $v_{k-1}v_k$ intersecta $\overrightarrow{qv_{i-1}}$. Sea z el punto de intersección.
   3.2 Ingresamos z al stack. $i := k$ e *Ir al Paso 1.*
4. Si v_i se encuentra a la derecha de $\overrightarrow{qv_{i-1}}$ y a la izquierda de $\overrightarrow{v_{i-2}v_{i-1}}$ entonces
   4.1 Sea u el elemento que se encuentra en la parte superior del stack. Realizamos *pop* al stack.
   4.2 Mientras u sea un vértice y $v_{i-1}v_i$ intersecte uq, realizamos *pop* al stack.

5. Si $v_{i-1}v_i$ no intersecta uq entonces
    5.1 Si v_{i+1} se encuentra a la derecha de $\overrightarrow{qv_i}$ entonces $i := i + 1$ e *Ir al Paso 4b*.
    5.2 Sea m el punto de intersección de $\overrightarrow{qv_i}$ y la arista que contiene a u. Si v_{i+1} se encuentra a la derecha de $\overrightarrow{v_{i-1}v_i}$ entonces ingresamos m al stack y *vamos al Paso 1*.
    5.3 Checamos desde v_{i+1} en orden antihorario hasta encontrar un vértice v_k tal que $v_{k-1}v_k$ intersecte mv_i. Asignamos k a i y *vamos al Paso 4b*.
6. Sea w el vértice que se encuentra justo debajo de u en el stack. Sea p el punto de intersección entre $v_{i-1}v_i$ y uq. Si $p \in qw$ o q, w y u no son colineales entonces realizamos *pop* al stack y *vamos al paso 4b*.
7. Checamos desde v_{i+1} en sentido antihorario hasta encontrar un vértice v_k tal que $v_{k-1}v_k$ intersecte wp. Insertamos el punto de intersección al stack, asignamos k a i y *vamos al Paso 1*.
8. Generamos $V(q)$ sacando todos los vértices y puntos del stack y nos detenemos.

Ejemplo

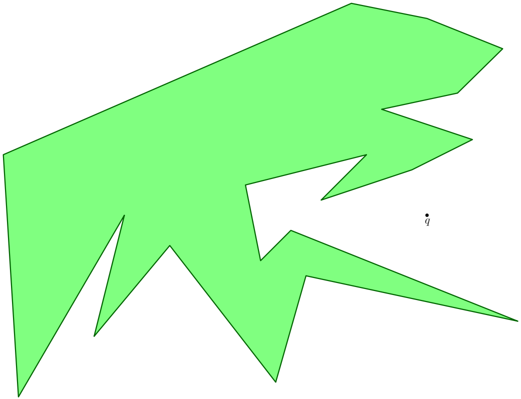
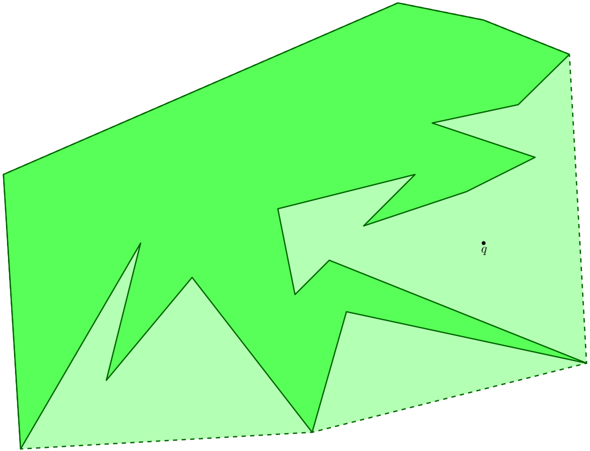


Figura: Polígono con punto q

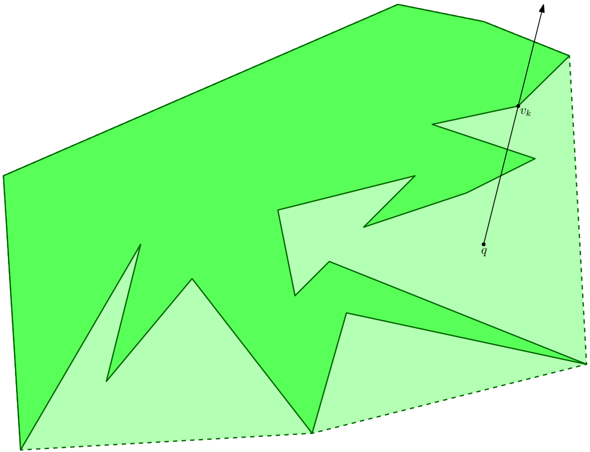
Ejemplo

Calculamos el cierre convexo.



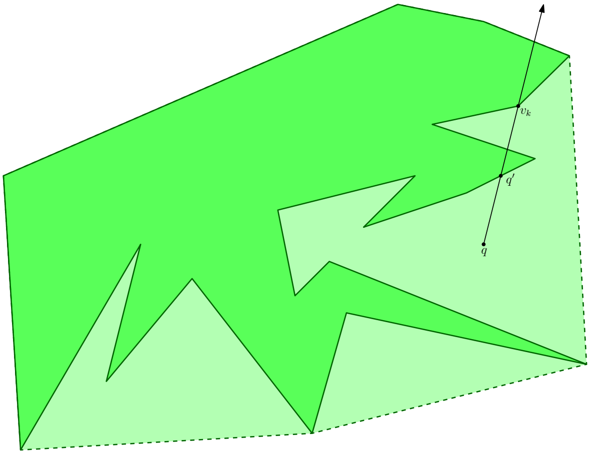
Ejemplo

Trazamos una línea a partir de q que pase por un vértice de P.



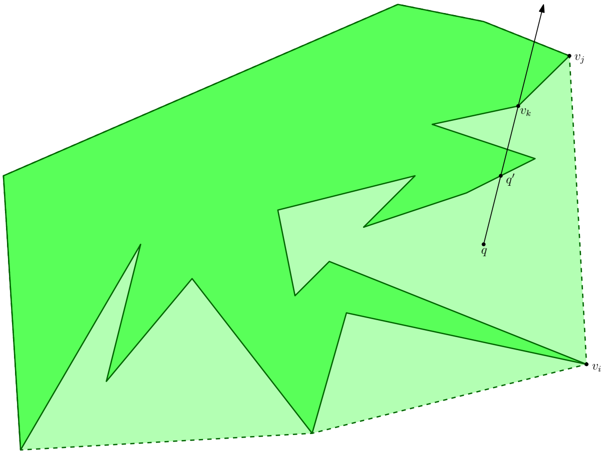
Ejemplo

Encontramos al punto más cercano a q de las intersecciones de $\overrightarrow{qv_k}$ con $bd(P)$.



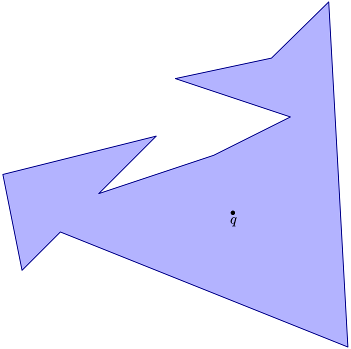
Ejemplo

Encontramos a v_i y v_j.



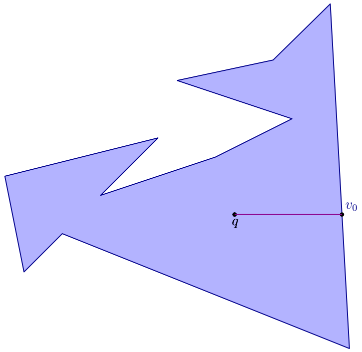
Ejemplo

Ahora q es un punto interno del polígono conseguido.



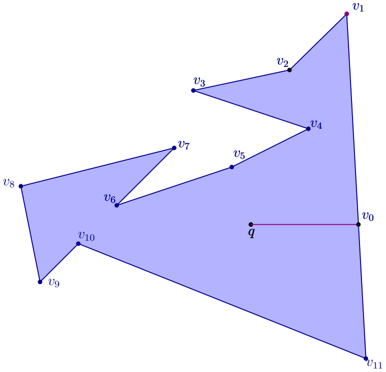
Ejemplo

Se traza una línea horizontal desde el punto hacia la derecha a lo largo del eje x.



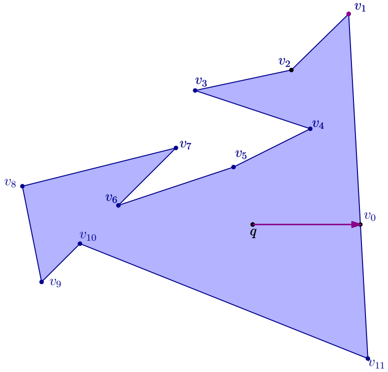
Ejemplo

Asignamos identificadores a los vértices en sentido antihorario.



Ejemplo

Insertamos a v_0 a la pila.

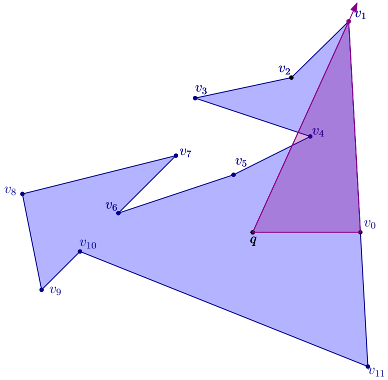


$\boxed{v_0}$

Ejemplo

v_1 está a la izquierda de $\overrightarrow{qv_0}$, así que lo insertamos a la pila.

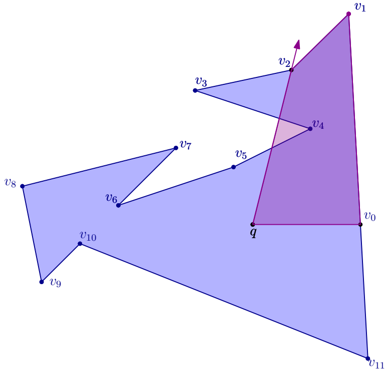
v_1
v_0



Ejemplo

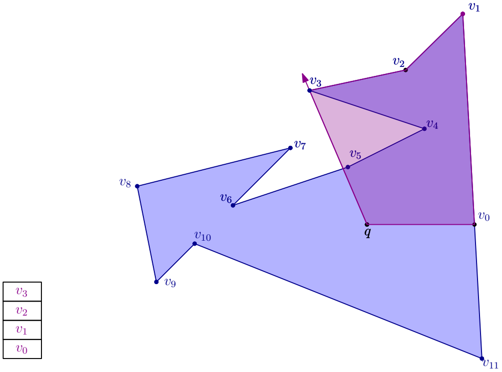
v_2 está a la izquierda de $\overrightarrow{qv_1}$, así que lo insertamos a la pila.

v_2
v_1
v_0



Ejemplo

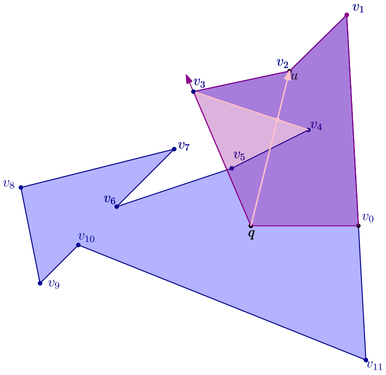
v_3 está a la izquierda de $\overrightarrow{qv_2}$, así que lo insertamos a la pila.



Ejemplo

v_4 está a la derecha de $\overrightarrow{qv_3}$ y está a la izquierda de $\overrightarrow{v_2v_3}$. Así que sacamos el primer elemento del stack. Sea v_3v_4 la arista frontal y sea u el primer vértice de la pila.

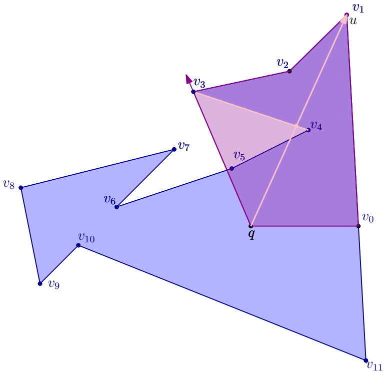
v_2
v_1
v_0



Ejemplo

La arista frontal intersecta a uq y u es vértice de P, así que sacamos el primer elemento del stack. Ahora u es v_1.

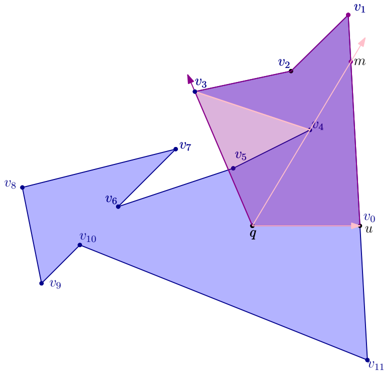
v_1
v_0



Ejemplo

La arista frontal intersecta a uq y u es vértice de P, así que sacamos el primer elemento del stack. Ahora u es v_0. Sea m el punto de intersección de $\overrightarrow{qv_4}$ con la arista que contiene a u.

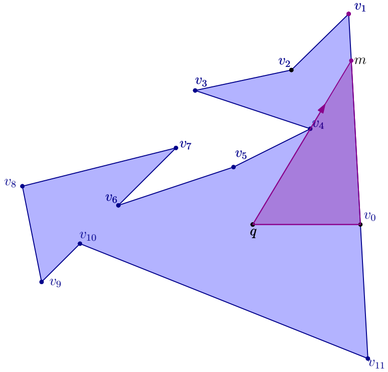
$\boxed{v_0}$



Ejemplo

Insertamos a m y v_4 a la pila.

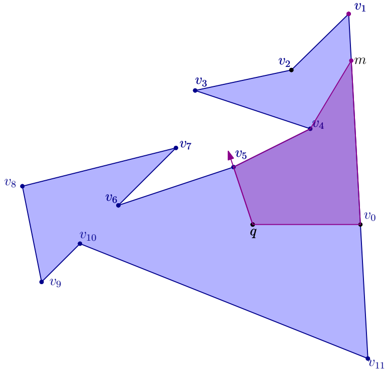
v_4
m
v_0



Ejemplo

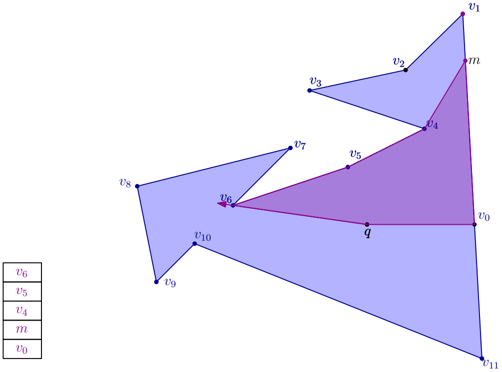
v_5 está a la izquierda de $\overrightarrow{qv_4}$, así que lo agregamos a la pila.

v_5
v_4
m
v_0



Ejemplo

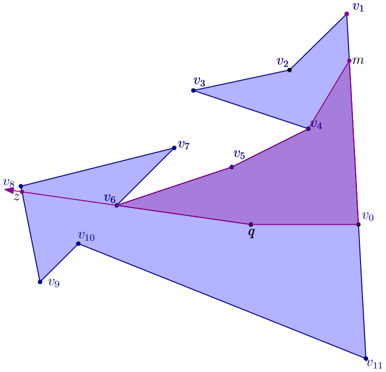
v_6 está a la izquierda de $\overrightarrow{qv_5}$, así que lo agregamos a la pila.



Ejemplo

v_7 está a la derecha de $\overrightarrow{qv_6}$ y a la derecha de $\overrightarrow{v_5 v_6}$. Aí, conseguimos la primer arista en orden antihorario que intersecte a $\overrightarrow{qv_6}$ y sea z el punto de intersección.

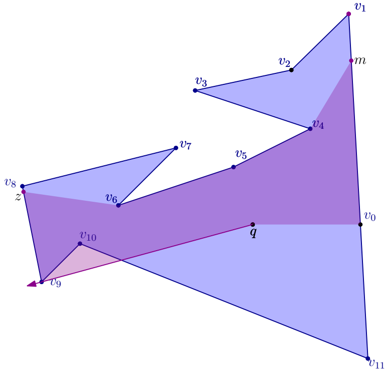
v_6
v_5
v_4
m
v_0



Ejemplo

Insertamos a z y v_9 a la pila.

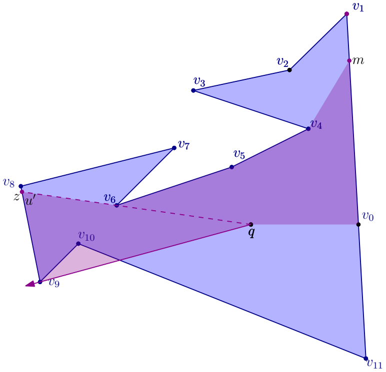
v_9
z
v_6
v_5
v_4
m
v_0



Ejemplo

v_{10} está a la derecha de $\overrightarrow{qv_9}$ y a la izquierda de $\overrightarrow{v_8v_9}$, así que sacamos el primer elemento del stack. Sea v_9v_{10} la arista frontal y sea z el primer vértice de la pila.

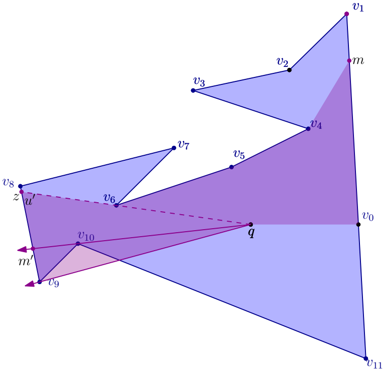
z
v_6
v_5
v_4
m
v_0



Ejemplo

Sea m' el punto de intersección de $\overrightarrow{qv_{10}}$ con la arista que contiene a u'.

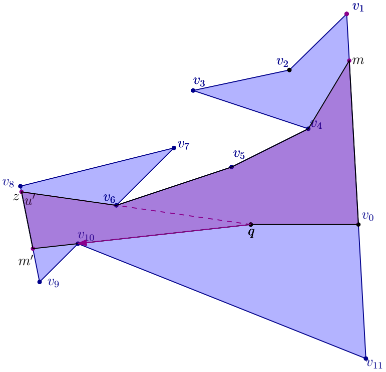
z
v_6
v_5
v_4
m
v_0



Ejemplo

Insertamos a m' y a v_{10} a la pila.

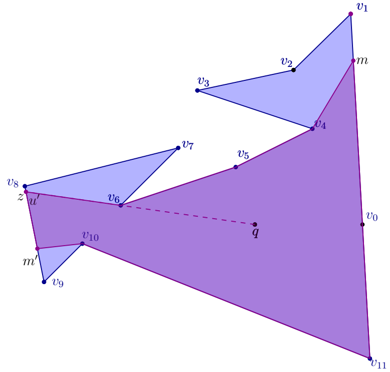
v_{10}
m'
z
v_6
v_5
v_4
m
v_0



Ejemplo

v_{11} está a la izquierda de $\overrightarrow{qv10}$ así que lo agregamos a la pila y terminamos.

v_{11}
v_{10}
m'
z
v_6
v_5
v_4
m
v_0



Complejidad del algoritmo

Notemos que cada vértice de P es considerado una vez por el algoritmo mientras se *escanea* de v_0 hasta v_n.

Si algún vértice v_i es ingresado al stack, v_i permanece en el stack a menos que sea removido durante el backtracking.

Una vez que v_i es removido del stack, v_i no es considerado de nuevo por el algoritmo. Como esto sucede para cualquier vértice, tenemos que la complejidad del algoritmo es $O(n)$.

Complejidad Total: $O(n)$

Gracias por su atención

Arturo González Peñaloza
Dulce Julieta Mora Hernández

Universidad Nacional Autónoma de México

17 de mayo de 2024