PUC-RIO

INF1036 - Probabilidade Computacional

Material 5 – Probabilidade Condicional

*Material Adaptado dos Professores Hélio Lopes / Ana Carolina Letichevsky

Probabilidade Condicional

A **probabilidade condicional** de um evento Adado o evento B, denotada por $P(A|B)$, é definida por:

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, com $P(B) > 0$,

onde $P(A \cap B)$ é a probabilidade conjunta de A e B.

Similarmente,

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, com $P(A) > 0$,

é a probabilidade condicional de B dado A.

Probabilidade Condicional

Utilizando as equações de $P(A|B)$ e de $P(B|A)$, podemos escrever:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

Regra de Bayes: Se A e B são dois eventos em S, então:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Probabilidade Condicional

Exemplo 1) Considere um experimento que consiste em lançar um dado não viciado.

Sejam:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$A = \{2, 4, 6\}$$
$$B = \{1, 2, 5\}$$

Temos:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

```
PA = probabilidade(A, S)
print(PA)
```

```
PB = probabilidade(B, S)
print(PB)
```

$P(B)$ é a probabilidade de B *a priori*, antes que o evento se realize.

$P(A)$ é a probabilidade de A *a priori*, antes que o evento se realize.

Probabilidade Condicional

Exemplo 1, continuação) Considere um experimento que consiste em lançar um dado não viciado.

Sejam:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{1, 2, 5\}$$

Temos:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

```
nsamples <- 1000
S <- sample(c(1,2,3,4,5,6), nsamples, replace = T)
A <- S [(S == 2) | (S == 4) | (S == 6)]
PA <- (length(A)/nsamples)
print(PA)
```

```
nsamples <- 1000
S <- sample(c(1,2,3,4,5,6), nsamples, replace = T)
B <- S [(S == 1) | (S == 2) | (S == 5)]
PB <- (length(B)/nsamples)
print(PB)
```

nsamples	P(A)	P(B)
100	0,55000	0,48000
1000	0,49600	0,50200
10000	0,50550	0,49960
100000	0,50128	0,49988

Probabilidade Condicional

Exemplo 1, continuação) Considere um experimento que consiste em lançar um dado não viciado.

Sejam:

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$A = \{2,4,6\}$$

$$B = \{1,2,5\}$$

Temos:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

```
nsamples = 1000
S = []
for i in range(nsamples):
    S.append(random.choice([1,2,3,4,5,6]))
A = list(filter(lambda x: (x == 2) or (x == 4) or (x == 6), S))
B = list(filter(lambda x: (x == 1) or (x == 2) or (x == 5), S))
PA = (len(A)/nsamples)
PB = (len(B)/nsamples)
print(PA)
print(PB)
```

Probabilidade Condicional

Exemplo 1, continuação) Considere um experimento que consiste em lançar um dado não viciado.

```
nsamples <- 100000; cont.2 <- 0; cont.a <- 0
for (i in 1:nsamples) {
  face <- sample(c(1,2,3,4,5,6), 1, replace = T)
  if ((face == 2) | (face == 4) | (face == 6)) {
    cont.a <- cont.a + 1
    if (face == 2) {
      cont.2 <- cont.2 + 1
    }
  }
}
PBdadoA <- (cont.2 / cont.a)
print(PBdadoA)
```

Sejam:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{1, 2, 5\}$$

Suponhamos que ao realizar o experimento alguém nos informe que o resultado do mesmo é um número par, ou seja, que A acorreu.

Com essa informação sabemos que B só pode ocorrer se o resultado tiver sido 2.

$$P(B|A) = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} = \frac{1}{3}$$

$P(B|A)$ é a probabilidade *a posteriori* de B dado que A ocorreu.

Probabilidade Condicional

Exemplo 1, continuação) Considere um experimento que consiste em lançar um dado não viciado.

```
import random
nsamples = 100000
cont2 = 0
conta = 0
for i in range(nsamples):
  face = random.choice([1,2,3,4,5,6])
  if ((face == 2) or (face == 4) or (face == 6)):
    conta = conta + 1
    if (face == 2):
      cont2 = cont2 + 1
PBdadoA = (cont2 / conta)
print(PBdadoA)
```

Sejam:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{1, 2, 5\}$$

Suponhamos que ao realizar o experimento alguém nos informe que o resultado do mesmo é um número par, ou seja, que A acorreu.

Com essa informação sabemos que B só pode ocorrer se o resultado tiver sido 2.

$$P(B|A) = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} = \frac{1}{3}$$

$P(B|A)$ é a probabilidade *a posteriori* de B dado que A ocorreu.

Probabilidade Condicional

Propriedades:

- $P(\emptyset \mid A) = 0$
- $P(S \mid A) = 1$
- $0 \leq P(A \mid B) \leq 1$
- $P((A \cup C) \mid B) = P(A|B) + P(C|B)$, se $A \cap C = \emptyset$

Teorema de Bayes

Se $E_1, E_2, \dots, E_n$ são eventos mutuamente exclusivos e exaustivos em S e B um evento qualquer em S com $P(B) > 0$, então:

$$P(E_i|B) = \frac{P(B|E_i)P(E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|E_i)P(E_i)} \ ,$$

para $i \in \{1, \dots, n\}$.

As probabilidades $P(E_i)$ são chamadas de probabilidades ***a priori***, e $P(E_i|B)$ de probabilidade ***a posteriori***.

Probabilidade Total

Os eventos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ são chamados de **eventos mutuamente exclusivos e exaustivos** se

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S \text{ e } E_i \cap E_j = \emptyset \text{ quando } i \neq j$$

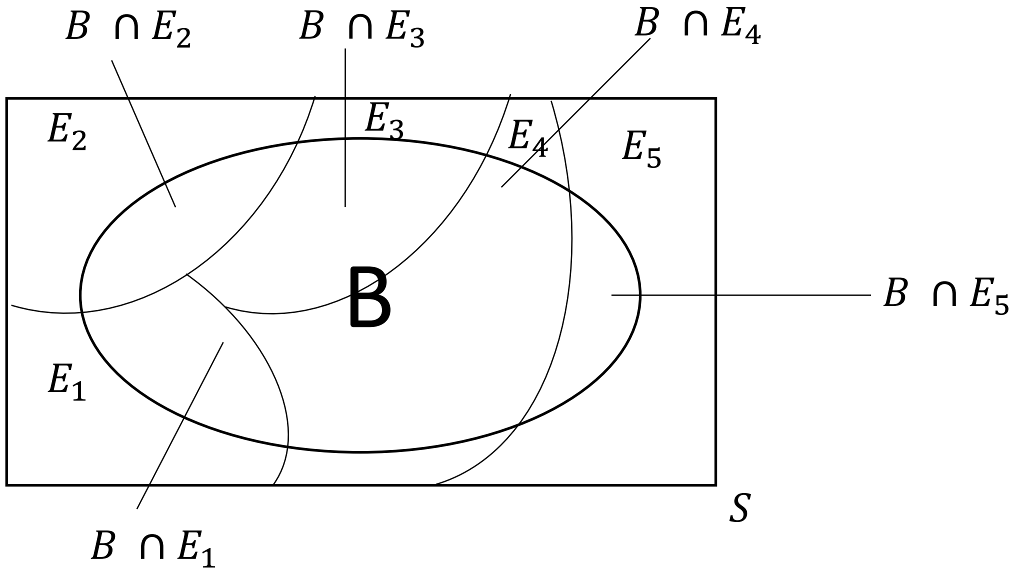
Seja B qualquer evento em S. Então

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid E_i)P(E_i),$$

que é chamada de **probabilidade total** de B.

Probabilidade Total

Se $i = 5$, em termos de diagrama de Venn temos:



Nesse caso:

$$P(B) = P(B|E_1)(E_1) + P(B|E_2)(E_2) + P(B|E_3)(E_3) + P(B|E_4)(E_4) + P(B|E_5)(E_5)$$

Eventos Independentes

Dois eventos A e B são ditos **estatisticamente independentes** se e somente se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Imediatamente, isso implica em:

$P(A|B) = P(A)$ e

$$P(B|A) = P(B)$$

Os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são ditos **estatisticamente independentes** se e somente se

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_n)$$

Finalmente, dizemos que um conjunto infinito de eventos são independentes se e somente se qualquer subconjunto finito desses eventos é independente.

Probabilidade Condicional

Exemplo 1) Em uma instituição 20% dos funcionários tem problemas visuais, 8% tem problemas auditivos e 4% tem problemas visuais e auditivos.

a) Os eventos "ter problemas auditivos" e "ter problemas visuais" são independentes?

b) Ao selecionar um funcionário ao acaso qual a probabilidade dele ter problemas auditivos se ele tem problemas visuais?

c) Ao selecionar um funcionário ao acaso qual a probabilidade dele não ter problemas visuais ou ter problemas auditivos?

Na resolução vamos considerar:

E_1: "o funcionário tem problema visual"

E_2: "o funcionário tem problema auditivo"

Probabilidade Condicional

Exemplo 1, continuação) Em uma instituição 20% dos funcionários tem problemas visuais, 8% tem problemas auditivos e 4% tem problemas visuais e auditivos.

a) Os eventos "ter problemas auditivos" e "ter problemas visuais" são independentes?

$$P(E_1) = 0{,}20$$

$$P(E_2) = 0{,}08$$

$$P(E_1 \cap E_2) = 0{,}04$$

$$P(E_1)\, P(E_2) = 0{,}016$$

Como

$P(E_1 \cap E_2) \neq P(E_1)\, P(E_2)$ os eventos E_1 e E_2 não são independentes.

Probabilidade Condicional

Exemplo 1, continuação) Em uma instituição 20% dos funcionários tem problemas visuais, 8% tem problemas auditivos e 4% tem problemas visuais e auditivos.

a) Os eventos "ter problemas auditivos" e "ter problemas visuais" são independentes?

```
nsamples <- 1000000
contvisualauditivo <- 0
for (i in 1:nsamples) {
  visual <- sample(c(T, F), 1, prob = c(0.2, 0.8))
  auditivo <- sample(c(T, F), 1, prob = c(0.08, 0.92))
  if (visual & auditivo) {
    contvisualauditivo <- contvisualauditivo + 1
  }
}
print(contvisualauditivo/nsamples)
```

Probabilidade Condicional

Exemplo 1, continuação) Em uma instituição 20% dos funcionários tem problemas visuais, 8% tem problemas auditivos e 4% tem problemas visuais e auditivos.

b) Ao selecionar um funcionário ao acaso qual a probabilidade dele ter problemas auditivos se ele tem problemas visuais?

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{0{,}04}{0{,}20} = 0{,}20$$

Probabilidade Condicional

Exemplo 1, continuação) Em uma instituição 20% dos funcionários tem problemas visuais, 8% tem problemas auditivos e 4% tem problemas visuais e auditivos.

b) Ao selecionar um funcionário ao acaso qual a probabilidade dele ter problemas auditivos se ele tem problemas visuais?

```
nsamples <- 1000000
contvisual <- 0
contvisualauditivo <- 0
for (i in 1:nsamples) {
  visual <- sample(c(T, F), 1, prob = c(0.2, 0.8))
  if (visual) {
    contvisual <- contvisual + 1
    visualauditivo <- sample(c(T, F), 1, prob = c(0.04, 0.96))
    if (visualauditivo) {
      contvisualauditivo <- contvisualauditivo + 1
    }
  }
}
print(contvisualauditivo/contvisual)
```

Probabilidade Condicional

Exemplo 1, continuação) Em uma instituição 20% dos funcionários tem problemas visuais, 8% tem problemas auditivos e 4% tem problemas visuais e auditivos.

c) Ao selecionar um funcionário ao acaso qual a probabilidade dele não ter problemas visuais ou ter problemas auditivos?

$$P(\overline{E_1}\ U\ E_2) = P(\overline{E_1}) + P(E_2) - P(\overline{E_1} \cap E_2)$$

$$= 1 - P(E_1) + P(E_2) - P(E_2)P(\overline{E_1} \mid E_2)$$

$$= 1 - P(E_1) + P(E_2) - P(E_2)(1 - P(E_1 \mid E_2))$$

$$= 1 - P(E_1) + P(E_2) - P(E_2)\left[1 - \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}\right]$$

$$= 1 - 0{,}20 + 0{,}08 - 0{,}08\left[1 - \frac{0{,}04}{0{,}08}\right] = 0{,}84$$

Probabilidade Condicional

Exemplo 1, continuação) Em uma instituição 20% dos funcionários tem problemas visuais, 8% tem problemas auditivos e 4% tem problemas visuais e auditivos.

c) Ao selecionar um funcionário ao acaso qual a probabilidade dele não ter problemas visuais ou ter problemas auditivos?

```
nsamples <- 1000000; contnvisual <- 0; contauditivo <- 0; contvisualauditivo <- 0
for (i in 1:nsamples) {
  visual <- sample(c(T, F), 1, prob = c(0.2, 0.8))
  auditivo <- sample(c(T, F), 1, prob = c(0.08, 0.92))
  visualauditivo <- sample(c(T, F), 1, prob = c(0.04, 0.96))
  if (visual == F) {
    contnvisual <- contnvisual + 1
  }
  if (auditivo) {
    contauditivo <- contauditivo + 1
  }
  if (visualauditivo) {
    contvisualauditivo <- contvisualauditivo + 1
  }
}
print((contnvisual + contauditivo - contvisualauditivo)/nsamples)
```

Eventos Mutuamente Exclusivos / Eventos Independentes

1. Se $\{E_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$ é uma sequência de eventos mutuamente exclusivos, então:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

2. Se $\{E_i\ , i = 1, 2, \ldots, n\}$ é uma sequência de eventos independentes, então:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(E_i)$$

Probabilidade Condicional

Exemplo 2) Para uma empresa, um grupo de funcionários está classificado da seguinte forma:

Tempo na Empresa	fala inglês	fala alemão	fala francês
até 5 anos	82	30	37
5 anos ou mais	101	23	27

Escolhe-se um funcionário ao acaso. Sabendo-se que este funcionário fala francês, qual é a probabilidade de que ele tenha até 5 anos na empresa?

Sejam A e B os eventos:

A: “o funcionário escolhido fala francês”; e

B: “o funcionário escolhido tem até 5 anos de empresa”.

$P(A) = \frac{37+27}{300} = \frac{64}{300}$, $\quad P(A \cap B) = \frac{37}{300}$, $\quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{37}{64}$

Como todos os pontos do espaço amostral são igualmente prováveis também poderíamos fazer.

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{37}{64}$$

Probabilidade Condicional

Exemplo 2, continuação) Para uma empresa, um grupo de funcionários está classificado da seguinte forma:

```
nsamples <- 10000
ate5falamingles <- 82; ate5falamalemao <- 30; ate5falamfrances <- 37
mais5falamingles <- 101; mais5falamalemao <- 23; mais5falamfrances <- 27
probfalamingles <- (ate5falamingles + mais5falamingles) / totalfuncionario
probfalamalemao <- (ate5falamalemao + mais5falamalemao) / totalfuncionario
probfalamfrances <- (ate5falamfrances + mais5falamfrances) / totalfuncionario
probfalamfranceate5 <- ate5falamfrances / (ate5falamfrances + mais5falamfrances)
probfalamfrancemais5 <- mais5falamfrances / (ate5falamfrances + mais5falamfrances)
contfala <- 0; contate5 <- 0
for (i in 1:nsamples) {
  fala <- sample(c("I", "A", "F"), 1, prob = c(probfalamingles, probfalamalemao, probfalamfrances))
  if (fala == "F") {
    contfala <- contfala + 1
    ate5 <- sample(c(T, F), 1, prob = c(probfalamfranceate5, probfalamfrancemais5))
    if (ate5) {
      contate5 <- contate5 + 1
    }
  }
}
prob <- (contate5/contfala)
print(prob)
```

Probabilidade Condicional

Exemplo 3) Um aluno realiza uma prova com 10 questões do tipo verdadeiro-falso. Calcule a probabilidade dele:

a) acertar todas as questões ao escolher aleatoriamente as respostas;

b) acertar todas as questões sabendo que há mais respostas "verdadeiras" do que "falsas";

c) errar pelo menos uma questão;

d) errar pelo menos uma questão sabendo que há mais respostas "verdadeiras" do que "falsas".

Probabilidade Condicional

Exemplo 3, continuação) Um aluno realiza uma prova com 10 questões do tipo verdadeiro-falso. Calcule a probabilidade dele:

a) acertar todas as questões ao escolher aleatoriamente as respostas,

Há $2^{10} = 1024$formas possíveis de escolher as respostas, logo $P[\text{acertar as 10 perguntas}] = \frac{1}{1024}$.

```
nsamples <- 1000000; cont.acerto <- 0; cont.gabaritou <- 0; nquestao <- 10
gabarito <- c("V","F","V","V","F","V","F","V","F","F") # um gabarito qualquer
for (i in 1:nsamples) {
  cont.acerto <- 0
  for (questao in 1:nquestao) { # escolhe as 10 respostas
    resposta <- sample(c("V","F"), 1, replace = T)
    if (resposta == gabarito[questao]) { # verifica se acertou a resposta
      cont.acerto <- cont.acerto + 1
    }
  }
  if (cont.acerto == nquestao) { # verifica a quantidade de acertos
    cont.gabaritou <- cont.gabaritou + 1
  }
}
prob <- (cont.gabaritou/nsamples)
print(prob)
```

Probabilidade Condicional

Exemplo 3, continuação) Um aluno realiza uma prova com 10 questões do tipo verdadeiro-falso. Calcule a probabilidade dele:

a) acertar todas as questões ao escolher aleatoriamente as respostas,

Há $2^{10} = 1024$formas possíveis de escolher as respostas, logo $P[\text{acertar as 10 perguntas}] = \frac{1}{1024}$.

```
nsamples <- 1000000
cont.gabaritou <- 0
nquestao <- 10
gabarito <- c("V","F","V","V","F","V","F","V","F","F") # um gabarito qualquer
for (i in 1:nsamples) {
  respostas <- sample(c("V","F"), nquestao, replace = T) # monta vetor de respostas
  acertos <- (respostas == gabarito) # retorna um vetor com T onde respostas[i] é igual ao gabarito[i]
  cont.acerto <- length(acertos[(acertos == T)]) # filtra elementos com T e pega o tamanho do vetor
  if (cont.acerto == nquestao) { # verifica a quantidade de acertos
    cont.gabaritou <- cont.gabaritou + 1
  }
}
prob <- (cont.gabaritou/nsamples)
print(prob)
```

Probabilidade Condicional

Exemplo 3, continuação) Um aluno realiza uma prova com 10 questões do tipo verdadeiro-falso. Calcule a probabilidade dele:

a) acertar todas as questões ao escolher aleatoriamente as respostas,

Há $2^{10} = 1024$formas possíveis de escolher as respostas, logo $P[\text{acertar as 10 perguntas}] = \frac{1}{1024}$.

```
import random
nsamples = 1000000
contacerto = 0
contgabaritou = 0
nquestao = 10
gabarito = ["V","F","V","V","F","V","F","V","F","F"] # um gabarito qualquer
resposta = ""
for i in range(nsamples):
  contacerto = 0
  for questao in range(nquestao): # escolhe as 10 respostas
    resposta = random.choice(["V","F"])
    if (resposta == gabarito[questao]): # verifica se acertou a resposta
      contacerto = contacerto + 1
  if (contacerto == nquestao): # verifica a quantidade de acertos
    contgabaritou = contgabaritou + 1
prob = (contgabaritou/nsamples)
print(prob)
```

Exemplo 3, continuação) Um aluno realiza uma prova com 10 questões do tipo verdadeiro-falso. Calcule a probabilidade dele:

b) acertar todas as questões sabendo que há mais respostas “verdadeiras” do que “falsas”.

Seja C o conjunto de todas as opções possíveis de respostas com mais “V” do que “F”.

$$n(A) = \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10}$$

$$= 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 386$$

$$P[\text{acertar todas as 10 questões} \mid \text{há mais "V" do que "F"}] = \frac{1}{386}$$

Probabilidade Condicional

```
nsamples <- 1000000
cont.gabarito.v <- 0
cont.gabaritou <- 0
nquestao <- 10
for (i in 1:nsamples) {
  ngabarito.v <- 0
  while (ngabarito.v <= 5) { # gabarito com mais "V" do que "F"
    gabarito <- sample(c("V","F"), nquestao, replace = T)
    ngabarito.v <- length(gabarito[(gabarito == "V")])
  }
  nresposta.v <- 0
  while (nresposta.v <= 5) { # devido à regra do gabarito, as respostas possuem também mais "V" do que "F"
    resposta <- sample(c("V","F"), nquestao, replace = T)
    nresposta.v <- length(resposta[(resposta == "V")])
  }
  acertos <- (resposta == gabarito) # retorna um vetor com T onde a resposta[i] é igual ao gabarito[i]
  nacerto <- length(acertos[(acertos == T)]) # filtra T e pega o tamanho do vetor
  if (nacerto == nquestao) { # verifica a quantidade de acertos
    cont.gabaritou <- cont.gabaritou + 1
  }
}
print(cont.gabaritou/nsamples)
```

Probabilidade Condicional

```
import random

nsamples = 1000000
gabarito = []
contgabaritou = 0
nquestao = 10
for i in range(nsamples):
  ngabaritov = 0
  while (ngabaritov <= 5): # gabarito com mais "V" do que "F"
    gabarito = random.choices(["V","F"], k = nquestao)
    ngabaritov = len(list(filter(lambda x: (x == "V"), gabarito)))
  nrespostav = 0
  while (nrespostav <= 5): # devido à regra do gabarito, as respostas possuem também mais "V" do que "F"
    resposta = random.choices(["V","F"], k = nquestao)
    nrespostav = len(list(filter(lambda x: (x == "V"), resposta)))
  if (resposta == gabarito): # compara os dois vetores elemento por elemento e retorna T se são iguais
    contgabaritou = contgabaritou + 1

print(contgabaritou/nsamples)
```

Probabilidade Condicional

Exemplo 3, continuação) Um aluno realiza uma prova com 10 questões do tipo verdadeiro-falso. Calcule a probabilidade dele:

c) errar pelo menos uma questão.

$$1 - P[\text{acertar todas as questões}] = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$$

```
nsamples <- 1000000
cont.ngabaritou <- 0
nquestao <- 10
gabarito <- c("V","F","V","V","F","V","F","V","F","F")
for (i in 1:nsamples) {
  respostas <- sample(c("V","F"), nquestao, replace = T)
  acertos <- (respostas == gabarito) # retorna um vetor com T onde são iguais
  cont.acerto <- length(acertos[(acertos == T)]) # filtra T e pega o tamanho do vetor
  if (cont.acerto != nquestao) { # diferença na lógica para o item a
    cont.ngabaritou <- cont.ngabaritou + 1
  }
}
prob <- (cont.ngabaritou/nsamples)
print(prob)
```

Probabilidade Condicional

Exemplo 3, continuação) Um aluno realiza uma prova com 10 questões do tipo verdadeiro-falso. Calcule a probabilidade dele:

c) errar pelo menos uma questão.

$$1 - P[\text{acertar todas as questões}] = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$$

```
import random
nsamples = 1000000
contacerto = 0
contngabaritou = 0
nquestao = 10
gabarito = ["V","F","V","V","F","V","F","V","F","F"] # um gabarito qualquer
resposta = ""
for i in range(nsamples):
  contacerto = 0
  for questao in range(nquestao): # monta as 10 respostas de uma prova
    resposta = random.choice(["V","F"])
    if (resposta == gabarito[questao]):
      contacerto = contacerto + 1
  if (contacerto != nquestao): # diferença na lógica para o item a
    contngabaritou = contngabaritou + 1
prob = (contngabaritou/nsamples)
print(prob)
```

Probabilidade Condicional

Exemplo 3, continuação) Um aluno realiza uma prova com 10 questões do tipo verdadeiro-falso. Calcule a probabilidade dele:

d) errar pelo menos uma questão sabendo que há mais respostas "verdadeiras" do que "falsas".

$$1 - P[\text{acertar todas as } 10 \text{ questões} \mid \text{há mais "V" do que "F"}] = 1 - \frac{1}{386} = \frac{385}{386}$$

Probabilidade Condicional

```
nsamples <- 1000000
cont.gabarito.v <- 0
cont.gabaritou <- 0
nquestao <- 10
for (i in 1:nsamples) {
  ngabarito.v <- 0
  while (ngabarito.v <= 5) { # gabarito com mais "V" do que "F"
    gabarito <- sample(c("V","F"), nquestao, replace = T)
    ngabarito.v <- length(gabarito[(gabarito == "V")])
  }
  nresposta.v <- 0
  while (nresposta.v <= 5) { # devido à regra do gabarito, as respostas possuem também mais "V" do que "F"
    resposta <- sample(c("V","F"), nquestao, replace = T)
    nresposta.v <- length(resposta[(resposta == "V")])
  }
  acertos <- (resposta == gabarito) # retorna um vetor com T onde são iguais
  nacerto <- length(acertos[(acertos == T)]) # filtra T e pega o tamanho do vetor
  if (nacerto != nquestao) { # diferença na lógica para o item b
    cont.gabaritou <- cont.gabaritou + 1
  }
}
print(cont.gabaritou/nsamples)
```

Probabilidade Condicional

```
import random

nsamples = 1000000
gabarito = []
contgabaritou = 0
nquestao = 10
for i in range(nsamples):
  ngabaritov = 0
  while (ngabaritov <= 5): # gabarito com mais "V" do que "F"
    gabarito = random.choices(["V","F"], k = nquestao)
    ngabaritov = len(list(filter(lambda x: (x == "V"), gabarito)))
  nrespostav = 0
  while (nrespostav <= 5): # devido à regra do gabarito, as respostas possuem também mais "V" do que "F"
    resposta = random.choices(["V","F"], k = nquestao)
    nrespostav = len(list(filter(lambda x: (x == "V"), resposta)))
  if (resposta != gabarito): # diferença na lógica para o item b
    contgabaritou = contgabaritou + 1

print(contgabaritou/nsamples)
```

Probabilidade Condicional

Exemplo 4) Uma gincana possui 100 participantes, cada um dos participantes recebe uma identificação diferente, composta por 2 dígitos entre 0 e 9. Dois participantes da gincana, P1 e P2 são escolhidos ao acaso, qual a probabilidade de que:

a) suas identificações contenham exatamente os mesmos 2 dígitos, com diferença apenas na ordem?

b) não haja nenhuma coincidência entre os 2 dígitos da identificação de ambos?

c) o primeiro dígito das duas identificações sejam iguais?

d) o primeiro dígito das suas identificações sejam diferentes?

Probabilidade Condicional

Exemplo 4, continuação) a) suas identificações contenham exatamente os mesmos 2 dígitos, com diferença apenas na ordem?

De quantas formas podemos escolher as identificações de P1 e P2?

- Podemos escolher a identificação de P1 de 10*10 formas.
- Dado que escolhemos a identificação de P1 podemos escolher a de P2 de 100-1 formas.
- Podemos escolher as identificações de P1 e de P2 de 100*99 formas.

Quantos pares de identificações atendem ao requisito?

- Não podemos ter dígitos repetidos.
- Dado que uma identificação foi escolhida há apenas uma que atende o requisito.
- Formas de escolher as identificações de P1 e P2 atendendo ao requisito: 9 * 10 * 1: 90.

Seja A o evento: “o par de identificações contem exatamente os mesmos 2 dígitos”

$$P(A) = 90/9900$$

Probabilidade Condicional

Exemplo 4, continuação) a) suas identificações contenham exatamente os mesmos 2 dígitos, com diferença apenas na ordem?

```
nsamples <- 100000 # número de simulações
letra.a <- numeric(nsamples) # inicializados com 0

for (i in 1:nsamples) {
  P1 <- sample(0:9, 2, replace = T) # identificação de P1
  P2 <- sample(0:9, 2, replace = T) # identificação de P2
  while ((P1[1] == P2[1]) & (P1[2] == P2[2])) { # while que garante P1 diferente de P2
    P2 <- sample(0:9, 2, replace = T)
  }
  if ((P1[1] == P2[2]) & (P1[2] == P2[1])) {
    letra.a[i] <- 1 # como atende o item a) coloco 1
  }
}
Prob.a <- (sum(letra.a)/nsamples)
print(Prob.a)
```

Exemplo 4, continuação) a) suas identificações contenham exatamente os mesmos 2 dígitos, com diferença apenas na ordem?

```
import random
nsamples = 100000 # número de simulações
letraa = []

for i in range(nsamples):
  P1 = random.choices(list(range(10)), k = 2) # identificação de P1
  P2 = random.choices(list(range(10)), k = 2) # identificação de P2
  while ((P1[0] == P2[0]) and (P1[1] == P2[1])): # while que garante P1 diferente de P2
    P2 = random.choices(list(range(10)), k = 2)
  if ((P1[0] == P2[1]) and (P1[1] == P2[0])):
    letraa.append(1) # como atende o item a) coloco 1

Proba = (sum(letraa)/nsamples)
print(Proba)
```

Probabilidade Condicional

Exemplo 4, continuação) b) não haja coincidência entre os 2 dígitos da identificação de ambos?

Pares de identificações que atendem ao requisito:

- Caso 1: identificação de P1 possui dois números iguais.

  Identificações possíveis de P1: 10*1: 10; Identificações possíveis de P2: 9 * 9: 81.

- Caso 2: identificação de P1 possui dois números diferentes.

  Identificações possíveis de P1: 10*9: 90; Identificações possíveis de P2: 8 * 8: 64.

- Pares de identificação atendem ao requisito: (81*10) + (90*64) = 6570.

Pares de identificação possíveis de P1 e de P2 foi vista no item a):

- Formas de escolher as identificações de P1 e P2: 9900.

Seja B o evento: “não há coincidência entre os 2 dígitos da identificação de P1 e P2”

$$P(B) = 6570/9900$$

Probabilidade Condicional

Exemplo 4, continuação) b) não haja coincidência entre os 2 dígitos da identificação de ambos?

```
nsamples <- 100000 # número de simulações
letra.a <- numeric(nsamples) # inicializados com 0

for (i in 1:nsamples) {
  P1 <- sample(0:9, 2, replace = T) # identificação de P1
  P2 <- sample(0:9, 2, replace = T) # identificação de P2
  while ((P1[1] == P2[1]) & (P1[2] == P2[2])) {# while que garante P1 diferente de P2
    P2 <- sample(0:9, 2, replace = T)
  }
  if ((P1[1] != P2[1]) & (P1[1] != P2[2]) & (P1[2] != P2[1]) & (P1[2] != P2[2])) {
    letra.b[i] <- 1 # como atende o item b) coloco 1
  }
}
prob.b <- (sum(letra.b)/nsamples)
print(prob.b)
```

Probabilidade Condicional

Exemplo 4, continuação) b) não haja coincidência entre os 2 dígitos da identificação de ambos?

```
import random
nsamples = 100000 # número de simulações
letrab = []

for i in range(nsamples):
  P1 = random.choices(list(range(10)), k = 2) # identificação de P1
  P2 = random.choices(list(range(10)), k = 2) # identificação de P2
  while ((P1[0] == P2[0]) and (P1[1] == P2[1])): # while que garante P1 diferente de P2
    P2 = random.choices(list(range(10)), k = 2)
  if ((P1[0] != P2[0]) and (P1[0] != P2[1]) and (P1[1] != P2[0]) and (P1[1] != P2[1])):
    letrab.append(1) # como atende o item b) coloco 1

Probb = (sum(letrab)/nsamples)
print(Probb)
```

Probabilidade Condicional

Exemplo 4, continuação) c) o primeiro dígito das duas identificações sejam iguais?

Quantos pares de identificações atendem ao requisito?

- Podemos escolher a identificação de P1 de 10*10 formas.
- Dado que escolhemos a identificação de P1 podemos escolher a de P2 de 9 formas.
- Formas de escolher as identificações de P1 e P2 atendendo ao requisito: 100 * 9: 900.

Pares de identificação possíveis de P1 e de P2 foi vista no item a):

- Formas de escolher as identificações de P1 e P2: 9900.

Seja C o evento: “o primeiro dígito das duas identificações é igual”

$$P(C) = 900/9900$$

Probabilidade Condicional

Exemplo 4, continuação) c) o primeiro dígito das duas identificações sejam iguais?

```
nsamples <- 100000 # número de simulações
letra.c <- numeric(nsamples) # inicializados com 0
for (i in 1:nsamples) {
  P1 <- sample(0:9, 2, replace = T) # identificação de P1
  P2 <- sample(0:9, 2, replace = T) # identificação de P2
  while ((P1[1] == P2[1]) & (P1[2] == P2[2])) { # while que garante P1 diferente de P2
    P2 <- sample(0:9, 2, replace = T)
  }
  if (P1[1] == P2[1]) {
    letra.c[i] <- 1
  }
}
prob.c <- (sum(letra.c)/nsamples)
print(prob.c)
```

Exemplo 4, continuação) c) o primeiro dígito das duas identificações sejam iguais?

```
import random
nsamples = 100000 # número de simulações
letrac = []

for i in range(nsamples):
  P1 = random.choices(list(range(10)), k = 2) # identificação de P1
  P2 = random.choices(list(range(10)), k = 2) # identificação de P2
  while ((P1[0] == P2[0]) and (P1[1] == P2[1])): # while que garante P1 diferente de P2
    P2 = random.choices(list(range(10)), k = 2)
  if (P1[0] == P2[0]):
    letrac.append(1)

Probc = (sum(letrac)/nsamples)
print(Probc)
```

Probabilidade Condicional

Exemplo 4, continuação) d) o primeiro dígito das suas identificações sejam diferentes?

Pares de identificações que atendem ao requisito:

- Caso 1: identificação de P1 possui dois números iguais.

  Identificações possíveis de P1: 10*1: 10; Identificações possíveis de P2: 9 * 10: 90.

- Caso 2: identificação de P1 possui dois números diferentes.

  Identificações possíveis de P1: 10*9: 90; Identificações possíveis de P2: 9 * 10: 90.

- Pares de identificação atendem ao requisito: (90*10) + (90*90) = 9000.

Pares de identificações possíveis de P1 e de P2 foi vista no item a):

- Formas de escolher as identificações de P1 e P2: 9900.

Seja C o evento: “o primeiro dígito das duas identificações é diferente”

$P(D) = 9000/9900$ ou $P(D) = 1 - P(C) = 1 - 900/9900$

Probabilidade Condicional

Exemplo 4, continuação) d) o primeiro dígito das suas identificações sejam diferentes?

```
nsamples <- 100000 # número de simulações
letra.d <- numeric(nsamples) # inicializados com 0
for (i in 1:nsamples) {
  P1 <- sample(0:9, 2, replace = T) # identificação de P1
  P2 <- sample(0:9, 2, replace = T) # identificação de P2
  while ((P1[1] == P2[1]) & (P1[2] == P2[2])) { # while que garante P1 diferente de P2
    P2 <- sample(0:9, 2, replace = T)
  }
  if (P1[1] != P2[1]) {
    letra.d[i] <- 1
  }
}
prob.d <- (sum(letra.d)/nsamples)
print(prob.d)
```

Exemplo 4, continuação) d) o primeiro dígito das suas identificações sejam diferentes?

```
import random
nsamples = 100000 # número de simulações
letrad = []

for i in range(nsamples):
  P1 = random.choices(list(range(10)), k = 2) # identificação de P1
  P2 = random.choices(list(range(10)), k = 2) # identificação de P2
  while ((P1[0] == P2[0]) and (P1[1] == P2[1])): # while que garante P1 diferente de P2
    P2 = random.choices(list(range(10)), k = 2)
  if (P1[0] != P2[0]):
    letrad.append(1)

Probd = (sum(letrad)/nsamples)
print(Probd)
```