Probabilidade Computacional – Lista 1

Resolva de forma analítica os seguintes exercícios:

1) Para fazer uma viagem Rio –> São Paulo –> Rio, posso usar como transporte o trem, o ônibus ou o avião. De quantos modos posso escolher os transportes se não desejo usar na volta o mesmo meio de transporte usado na ida?

2) Quantos números naturais de 4 algarismos (na base 10), que sejam menores que 5.000 e divisíveis por 5, podem ser formados usando-se apenas os algarismos 2, 3, 4 e 5?

3) Quantos são os números naturais pares que se escrevem (na base 10) com três algarismos distintos?

4) De quantos modos 5 rapazes e 5 moças podem se sentar em 5 bancos de dois lugares cada, de modo que em cada banco fiquem um rapaz e uma moça?

5) De quantos modos podemos formar uma roda com 5 crianças?

6) A probabilidade de João resolver um problema é 2/3 e a probabilidade de Maria resolver o mesmo problema é 3/4. Se ambos tentarem resolver o problema independentemente qual a probabilidade do problema ser resolvido?

7) Seis bolas diferentes são colocadas em três urnas diferentes. Qual é a probabilidade de que todas as urnas estejam ocupadas (ou seja) com pelo menos uma bola?

8) Um número entre 1 e 300 é escolhido aleatoriamente. Calcular a probabilidade de que ele seja divisível por 3 ou por 5.

9) Sabe-se que 80% dos pênaltis marcados a favor do Brasil são cobrados por jogadores do Botafogo. A probabilidade de um pênalti ser convertido é de 40% se o cobrador for do Botafogo e de 70% caso contrário. Um pênalti a favor do Brasil acabou de ser marcado:
    a. Qual a probabilidade do pênalti ser cobrado por um jogador do Botafogo e ser convertido?
    b. Qual a probabilidade do pênalti ser convertido?
    c. Este pênalti acabou de ser desperdiçado. Qual é a probabilidade de que o cobrador tenha sido um jogador do Botafogo?

10) Calcule a probabilidade de:
    a. obter ao menos um 6 em 4 lances de um dado.
    b. Obter ao menos um duplo 6 em 24 lançamentos de um par de dados.

11) Calcule a probabilidade de numa turma de 30 alunos haver pelo menos uma coincidência de aniversário.

12) Marina quer enviar uma carta a Verônica. A probabilidade de que Marina escreva a carta é de 8/10. A probabilidade de que o correio não perca é de 9/10. A probabilidade de que o carteiro entregue é de 9/10. Dado que Verônica não recebeu a carta qual é a probabilidade de que Verônica não tenha escrito?

13) Quantas saladas contendo exatamente 4 frutas podemos formar se dispomos de 10 frutas diferentes?

14) De quantos modos podemos escolher 6 pessoas, incluindo pelo menos duas mulheres, em um grupo de 7 homens e 4 mulheres?

15) De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 7 crianças, de modo que duas determinadas dessas crianças não fiquem juntas?

16) Quantos anagramas possui a palavra "TÁRTARA"?

17) Quantos são os anagramas de "URUGUAI" que começam por vogal?

18) Quantos são os anagramas da palavra "PIRACICABA" que não possuem duas letras A juntas?

19) Em um evento há $\boldsymbol{n}$ lutadores de judô e seus respectivos treinadores (cada lutador tem um treinador diferente, portanto, há $\boldsymbol{2n}$ pessoas). O evento só acontece se houverem pelo menos **4** lutadores inscritos. Crie uma função chamada **calculaEvento** que receba $\boldsymbol{n}$, sendo $(\boldsymbol{n \geq 4})$, como parâmetro e retorna quatro valores a saber:

i. Número possível de filas que podem ser formadas com as $\boldsymbol{2n}$ pessoas do evento de tal forma que não haja um lutador do lado do outro, ou seja, entre um lutador e outro há sempre um treinador;
ii. Número possível de filas que podem ser formadas com as $\boldsymbol{2n}$ pessoas do evento de tal forma que os $\boldsymbol{n}$ primeiros lugares da fila sejam ocupados por lutadores;
iii. Número possível de filas que podem ser formadas com as $\boldsymbol{2n}$ pessoas do evento de tal forma que o $\boldsymbol{n}-$ é$\boldsymbol{simo}$ lugar da fila não seja ocupado por um lutador;
iv. Número possível de filas que podem ser formadas com as $\boldsymbol{2n}$ pessoas do evento de tal forma que o primeiro e o último lugar da fila sejam ocupados por treinadores.

Explique em forma de comentário no código a solução proposta para atender cada um dos quatro valores solicitados.

20) Os detectores de mentira já foram utilizados durante guerras para revelar riscos de segurança. Como é sabido, os detectores de mentira não são infalíveis. Suponhamos que haja uma probabilidade de 0,10 de um detector de mentiras não detectar uma pessoa que represente realmente um risco de segurança e uma probabilidade de 0,08 de o detector classificar incorretamente uma pessoa que não represente um risco. Se 2% das pessoas que são submetidas ao teste constituem efetivamente risco de segurança, calcule a probabilidade de que:

a) uma pessoa classificada pelo detector como constituindo um risco de segurança constitua realmente um risco de segurança;

b) uma pessoa liberada pelo detector realmente não constitua um risco de segurança.

21) Num certo estado onde os automóveis devem ser testados quanto à emissão de gases poluentes, 25% de todos os automóveis emitem quantidade excessivas de gases poluentes. Ao serem testados, 99% de todos os automóveis que emitem quantidades excessivas de gases poluentes são reprovados, mas 17% dos que não emitem quantidades excessivas de gases poluentes também são reprovados. Qual é probabilidade de um automóvel que é reprovado no teste efetivamente emitir uma quantidade excessiva de gases poluentes?

Resolva usando simulação os seguintes exercícios:

1) Em simulação estocástica, nos interessa ter uma sequência de números pseudoaleatórios distribuídos de forma uniforme entre 0 e 1. Cria-se, assim, uma outra sequência a partir da sequência gerada pelo LCG, por exemplo:

$$x_k = (a \times x_{k-1} + c) \; mod \; M$$

$$u_k = x_k / M$$

Construa um código (R ou Python) para realizar uma simulação com 10.000 lançamentos de duas moedas (honestas) e apresentar em quantos lançamentos o resultado foram duas caras.

2) Um par de dados não viciados deve ser rolado continuamente até que todos os resultados possíveis 2, 3,...12 tenham ocorrido pelo menos uma vez. Desenvolva um estudo de simulação para estimar o número esperado de rolagens de dados que são necessárias.

3) Suponha que há 3 moedas, cada uma de uma cor diferente, mas todas com probabilidades $\mathbf{3/5}$ de obter coroa e $\mathbf{2/5}$ de obter cara. Considere um experimento que consiste em lançar, em sequência, as moedas e os dois eventos a seguir:

A = "obter uma coroa e uma cara nos dois primeiros lançamentos, em qualquer ordem", e

B = "obter duas coroas nos dois últimos lançamentos".

Para o que foi exposto, resolva os itens abaixo:

a) Utilizando simulação calcule $P(A)$ e $P(B)$.

b) A e B são eventos independentes?

4) Suponha que em uma determinada feira de livros tenha sido distribuído 125 cupons de desconto para o almoço a seus visitantes. Um visitante não pode receber mais de um cupom, não há cupons iguais, e cada cupom é formado por 3 letras maiúsculas entre as 6 letras ABCDEF. Se Samuel e Catarina são dois visitantes escolhidos ao acaso, qual a probabilidade de que os cupons dos dois visitantes:

A. Não tenham letras em comum.
B. Tenham as mesmas três letras, mas em posições diferentes.
C. Comece por vogal.

5) Suponha que a fábrica de um certo equipamento fez uma pesquisa e classificou as 4 principais causas de defeito no equipamento, quando o mesmo possui entre 2 e três anos de uso como C1, C2, C3 e C4. Considere ainda que:

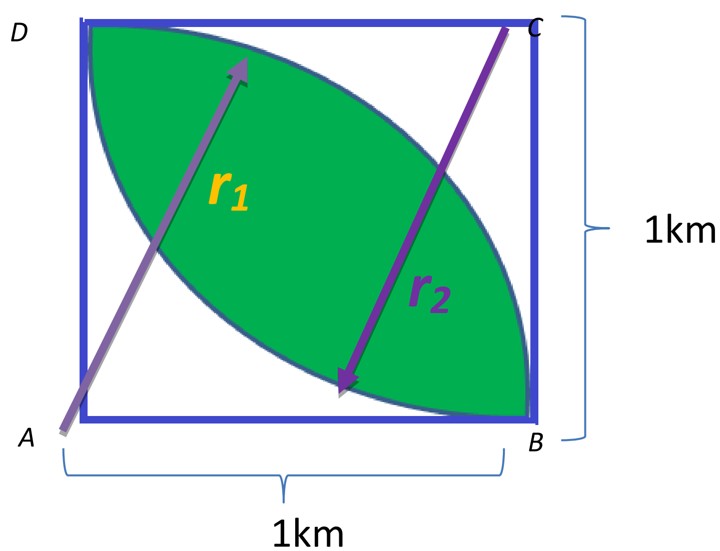
- sem a manutenção preventiva no período recomendado pela fábrica, o equipamento pode apresentar os defeitos C1, C2, C3 e C4, com as probabilidades, respectivamente, de 4%, 4%, 6% e 6%;
- realizar a manutenção preventiva no período indicado pela fábrica diminui o risco dos defeitos C3 e C4 em 50%, mas não afeta o risco de C1 e C2;
- as eventuais ocorrências de defeito (com ou sem manutenção) são independentes;

- 40% dos equipamentos realizam a manutenção preventiva no prazo certo.

Um equipamento é selecionado aleatoriamente. Calcule, usando simulação, a probabilidade de que entre dois e três anos:

A. o equipamento:
   i. apresente defeito;
   ii. apresente algum defeito se não for feita manutenção preventiva;
   iii. apresente algum defeito se for feita a manutenção preventiva.
B. tenha sido feita manutenção preventiva dado que o equipamento apresentou apenas o defeito:
   i. C 1;
   ii. C 3.

6) Na figura abaixo, a região verde representa a região cultivada de uma fazenda que está inserida em uma região quadrada de lado 1km e vértices A, B, C e D.



Na figura, temos que, r_1 e r_2 representam os raios de duas circunferências de raio 1km. O centro da circunferência de raio r_1 coincide com o vértice A da região quadrada, e o centro da circunferência de raio r_2 coincide com o vértice C da região quadrada. Considere que qualquer região que esteja dentro da região quadrada é um evento E e sua probabilidade coincide com a sua área.

Sabendo que, para adubar a área cultivada o fazendeiro precisa comprar 200 kg de adubo por quilômetro quadrado por mês, estime, por simulação a área cultivada, e a seguir calcule a quantidade de adubo que ele deverá comprar em 12 meses.

7) Em simulação estocástica, nos interessa ter uma sequência de números pseudoaleatórios distribuídos de forma uniforme entre 0 e 1.

Um possível algoritmo que pode ser utilizado para gerar a sequência desejada é o LCG, cuja relação de recorrência é apresentada a seguir:

$$x_k = (a \times x_{k-1} + c) \; mod \; M$$

$$u_k = x_k / M$$

Uma possível configuração para o algoritmo LCG assume os seguintes valores para as suas variáveis: $x_0 = 3$; $a = 39373$, $c = 0$; $M = 2147483647$.

Um algoritmo mais robusto que o apresentado acima é o Mersenne Twister que fornece uma geração rápida com alta qualidade de aleatoriedade.

A partir do que foi exposto e usando os conceitos de simulação:

a) Construa um código baseado no LCG para realizar uma simulação com $\mathbf{10.000}$ lançamentos de um dado de **dez** faces (numeradas de **1** a **10**), honesto, e apresentar em **quantos lançamentos** o resultado obtido foi a **face** $\mathbf{5}$. (1,0 pontos)

b) Construa um código baseado no LCG e no Mersenne Twister para realizar uma simulação com $\mathbf{10.000}$ lançamentos conjuntos de uma moeda e de um dado (**dez** faces numeradas de **1** a **10**), ambos viciados, e apresentar a **probabilidade** de se obter pelo menos um dos resultados: **cara** e **face** $\mathbf{6}$, simultaneamente; **coroa** e **face** $\mathbf{9}$, simultaneamente; **face 8** independentemente do resultado da moeda. O LCG deve ser utilizado para tratar o lançamento da moeda (probabilidade de obter **coroa** é **0.45**) e o Mersenne Twister para tratar o lançamento do dado (probabilidade de obter a **face** $\mathbf{2}$ é zero e é a mesma para as demais faces).

8) Considerando o evento com $\boldsymbol{n}$ lutadores de judô e seus respectivos treinadores descrito na questão 19 da primeira parte da lista, crie, **usando simulação**, uma função chamada **simulacaoEvento** que receba $\boldsymbol{n}$, sendo $(\boldsymbol{n} \geq \mathbf{4})$, como parâmetro e retorna quatro valores com as probabilidades de que em uma possível fila formada com os participantes:

i. não haja um lutador do lado do outro, ou seja, entre um lutador e outro há sempre um treinador;
ii. os $\boldsymbol{n}$ primeiros lugares da fila sejam ocupados por lutadores;
iii. o $\boldsymbol{n} - \text{é}\boldsymbol{simo}$ lugar da fila não seja ocupado por um lutador;
iv. o primeiro e o último lugar da fila sejam ocupados por treinadores.

A função deverá receber também como parâmetro o valor **nsamples** que define o número de simulações a serem realizadas.

9) Dois times irão disputar as partidas finais de um campeonato e será sagrado vencedor o que vencer três partidas primeiro. Com base no retrospecto dos resultados desses times estima-se que a cada partida as probabilidades de vitória de cada um seja de **0,4** e de **0,6**. Calcule usando simulação a probabilidade de(o): (3,0 pontos)

a) Cada time vencer o campeonato.

b) Haver mais de três partidas.

c) Time com menor probabilidade de vitória ser o vencedor do campeonato caso ele perca as duas primeiras partidas?