PUC-RIO

INF1036 - Probabilidade Computacional

Material 3 - Técnicas de Contagem

*Material Adaptado dos Professores Hélio Lopes / Ana Carolina Letichevsky

Teoria das Probabilidades

A Teoria das Probabilidades é uma área da matemática que desenvolve modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos aleatórios.

A probabilidade de um evento é a medida ou chance desse evento ocorrer.

Definição clássica de Probabilidade (também chamada definição de Laplace). Sejam:

- S o conjunto de possíveis resultados (saídas) de um experimento, chamado espaço amostral;
- ζ os elementos de S, chamados de eventos elementares ou pontos amostrais;
- E um subconjunto possível do espaço amostral S, chamado evento.

A probabilidade do evento E ocorrer, ou simplesmente a probabilidade do evento E, é definida como a razão entre o números de elementos de E e o número de elementos de S.

Teoria das Probabilidades

Na definição de probabilidade de Laplace é preciso considerar que:

- Há um número finito (n) de elementos em S;
- A união de todos os eventos é S;
- Os pontos do espaço amostral são equiprováveis;
- Todo evento E é obtido a partir da união de m pontos do espaço amostral sendo $m \leq n$

$$P(E) = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis} = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{m}{n}$$

E, portanto, para todo evento E, $0 \leq P(E) \leq 1$.

Tipos de Espaço Amostral

- **Finito:** é aquele em que existe um número finito de possíveis saídas.

- **Discreto e infinito:** é aquele que possui um número infinito de possíveis saídas, porém esse conjunto de saídas é enumerável.

- **Contínuo:** é aquele em que as possíveis saídas constituem um conjunto contínuo.

Um conjunto é dito ser enumerável se ele possui uma correspondência biunívoca com o conjunto dos números inteiros.

Análise Combinatória

A Análise Combinatória é a parte da matemática que estuda estruturas e soluções discretas.

Uma das suas aplicações é resolver problemas de contagem (sem que seja necessário enumerar os elementos) de certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito.

Breve resumo de Teoria dos Conjuntos

Sejam:

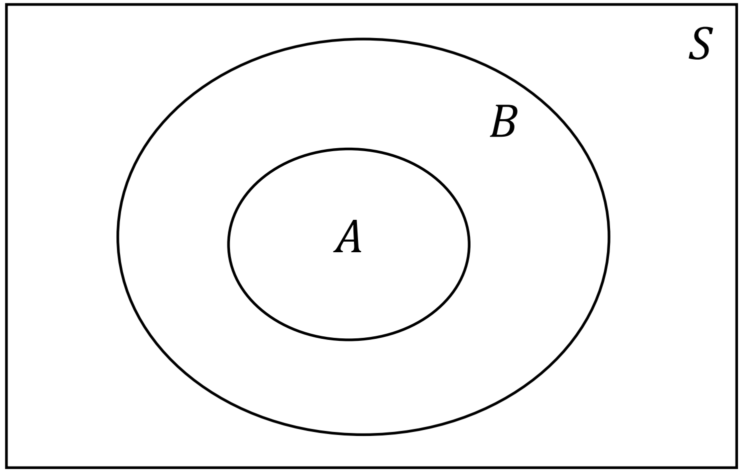
- A e B dois conjuntos;
- S o conjunto enumerável em uma determinada solução;
- $\emptyset$ o conjunto vazio.

Temos então que para todo conjunto $A \subset S$:

- $A \cup \emptyset = A$.
- $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Breve resumo de Teoria dos Conjuntos

Se todo elemento de A é também elemento de B, dizemos que A é subconjunto de B e representamos por $A \subset B$.

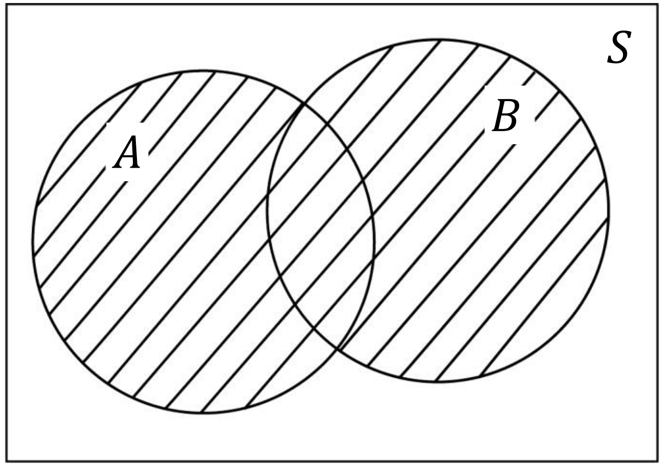


A é subconjunto de B.

Breve resumo de Teoria dos Conjuntos

O conjunto de todos os elementos que pertencem a A ou a B ou a ambos é representado por $A \cup B$.

$$A \cup B = \{\zeta \in S \mid \zeta \in A \; ou \; \zeta \in B\}$$

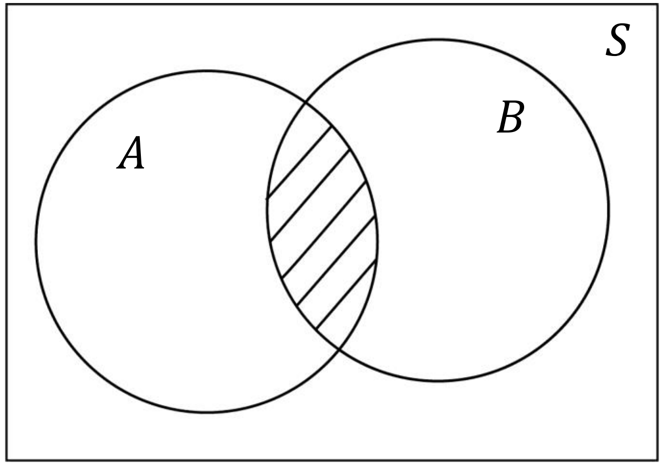


União de A com B.

Breve resumo de Teoria dos Conjuntos

O conjunto de todos os elementos que pertencem, simultaneamente, a A e a B é representado por $A \cap B$.

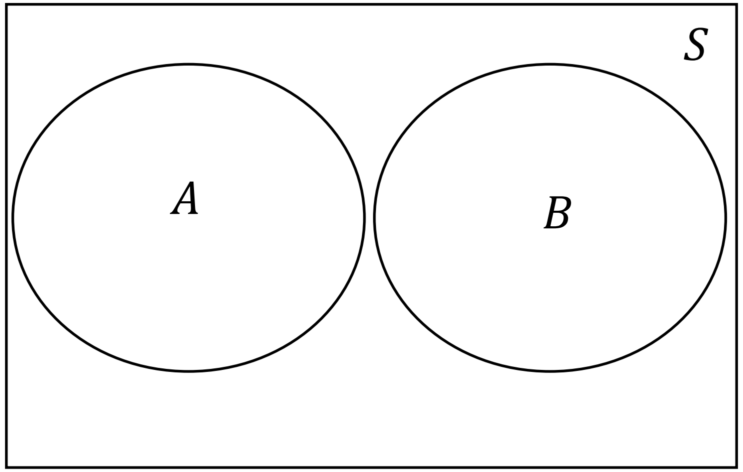
$$A \cap B = \{\zeta \in S \mid \zeta \in A \text{ e } \zeta \in B\}$$



Interseção de A com B.

Breve resumo de Teoria dos Conjuntos

Os conjuntos A e B são disjuntos se $A \cap B = \emptyset$. Os conjuntos que não possuem elementos comuns também são chamados de mutuamente exclusivos.



A e B são disjuntos.

Breve resumo de Teoria dos Conjuntos

Se temos n conjuntos A_1, A_2,..., A_n podemos estender a definição de união e interseção.

A união de n conjuntos é representada por:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

A interseção de n conjuntos é representada por:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

Dizemos que n conjuntos são disjuntos se eles forem disjuntos quando tomados 2 a 2.

Breve resumo de Teoria dos Conjuntos

Se temos infinitos conjuntos podemos estender a definição de união e interseção.

A união de infinitos conjuntos é representada por:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

A interseção de infinitos conjuntos é representada por:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$$

Breve resumo de Teoria dos Conjuntos

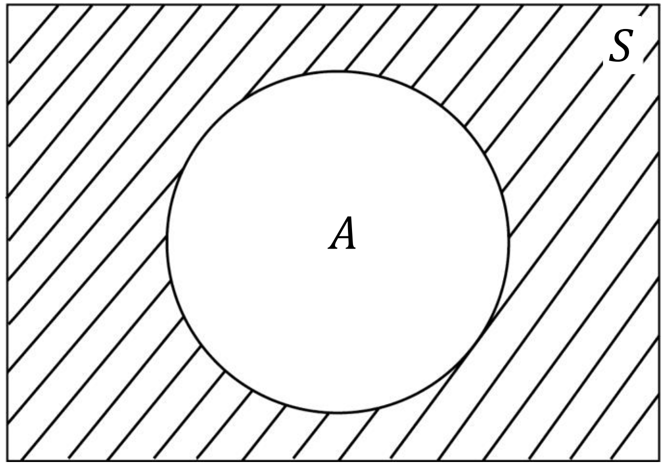
Se temos n conjuntos A_1, A_2,..., A_n, então:

- $A_i \subset A_j$, se somente se $A_i \cup A_j = A_j$
- $A_i \subset A_j$, se somente se $A_i \cap A_j = A_i$
- $A_i \cup (A_j \cup A_k) = (A_i \cup A_j) \cup A_k$
- $A_i \cap (A_j \cap A_k) = (A_i \cap A_j) \cap A_k$
- $A_i \cup (A_j \cap A_k) = (A_i \cup A_j) \cap (A_i \cup A_k)$

Breve resumo de Teoria dos Conjuntos

Chamamos de conjunto complementar de A o conjunto dos elementos de S que não pertencem a A e representamos por A^c ou por $\bar{A}$.

$$\bar{A} = \{\zeta \in S \mid \zeta \notin A\}$$



Complemento de A.

Breve resumo de Teoria dos Conjuntos

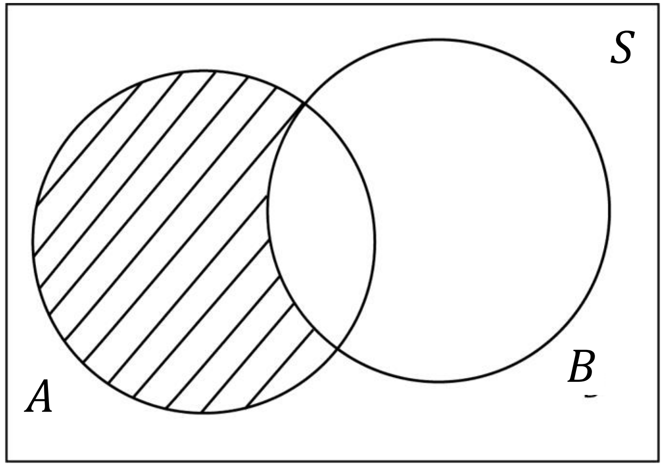
Algumas propriedades relacionadas ao conjunto complementar:

- $(A^c)^c = \bar{\bar{A}} = A$
- $A \cup \bar{A} = S$
- $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- $\bar{\emptyset} = S$
- $\bar{S} = \emptyset$
- $S \cup A = S$
- $S \cap A = A$

Breve resumo de Teoria dos Conjuntos

Conjunto diferença de A e B é representado por $A - B$:

$$A - B = A \cap \bar{B} = \{\zeta \in S \mid \zeta \in A \; e \; \zeta \notin B\}$$



Conjunto diferença de A e B.

Partição

Dizemos que uma coleção de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, todos não-vazios, é uma partição de um conjunto B finito e não-vazio se:

- $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = B$
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ quando $i \neq j$

Ou seja, uma partição de um conjunto B é uma coleção de subconjuntos disjuntos não-vazios de B, cuja união é igual a B.

$$B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

$\big\{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f, g\}\big\}$ é uma partição de B?

Produto Cartesiano

O par de elementos a e b, onde a é chamado de *primeiro* elemento e b de *segundo* elemento, é definido como um **par ordenado**, e é denotado por (a, b).

Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se e somente se $a = c$ e $b = d$.

Para quaisquer dois conjuntos A e B, o **produto cartesiano** de A e B, escrito como $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados dos elementos, onde o primeiro elemento do par é um elemento do conjunto A e o segundo elemento do par é um elemento do conjunto B:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \; e \; b \in B\}$$

Produto Cartesiano

Exemplo) Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{p, q\}$, então:

$$A \times B = \{(a, p), (a, q), (b, p), (b, q), (c, p), (c, q)\}$$

e

$$B \times A = \{(p, a), (p, b), (p, c), (q, a), (q, b), (q, c)\}$$

```
A = ['a', 'b', 'c']
B = ['p', 'q’]

W = [] # W é uma lista
for i in range(len(A)):
   for j in range(len(B)):
      elemento = (A[i], B[j]) # elemento é uma tupla
      W.append(elemento)
print(W)
```

Produto Cartesiano em R

Exemplo) Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{p, q\}$, então:

$$A \times B = \{(a, p), (a, q), (b, p), (b, q), (c, p), (c, q)\}$$

e

$$B \times A = \{(p, a), (p, b), (p, c), (q, a), (q, b), (q, c)\}$$

```
A = c('a', 'b', 'c')
B = c('p', 'q')

W = list() # W é uma lista
k = 1
for(i in 1: length(A)){
  for(j in 1: length(B)){
    W[[k]] = c(A[i], B[j])
    k = k + 1
  }
}
print(W)
```

Produto Cartesiano

Se temos n conjuntos A_1, A_2,..., A_n , então, o produto cartesiano:

$$A_{\boldsymbol{i}} \times A_{\boldsymbol{j}} \times \cdots \times A_{\boldsymbol{n}}$$

é definido como n-uplas $(a_i, a_j,..., a_n)$, onde:

$$a_i \in A_i, a_j \in A_j,..., a_n \in A_n$$

Produto Cartesiano

Algumas propriedades relacionadas ao produto cartesiano:

- $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
- $n(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = n(A_1) \times n(A_2) \times \cdots n(A_n)$
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Propriedades das Operações de Conjuntos

As operações de união e interseção também satisfazem as seguintes propriedades:

- **Comutatividade**:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

- **Associatividade**:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

- **Distributividade** :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Estendidas

$$A \cap \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} A \cap B_i$$

$$A \cup \bigcap_{i=1}^{n} B_i = \bigcap_{i=1}^{n} A \cup B_i$$

Propriedades das Operações de Conjuntos

- **Leis de De Morgan**:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Que podem ser estendidas nas seguintes formas:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

Técnicas de Contagem

Princípio de Adição:

Se A e B são dois conjuntos finitos tais que $A \cap B = \emptyset$ (disjuntos) com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Caso geral: sejam A_1, A_2,..., A_n, conjuntos dois a dois disjuntos

$$n\left(A_i \cup A_j \cup \cdots \cup A_n\right) = n(A_i) + n\left(A_j\right) + \cdots + n(A_n)$$

Princípio de Multiplicação:

Se uma decisão d_1 pode ser tomada de n maneiras e se, uma decisão d_2 pode ser tomada de m maneiras, então o número total de maneiras possíveis de se tomarmos as decisões d_1 e d_2 é $n \times m$.

Técnicas de Contagem

Exemplo 1) Quantos números naturais de 5 algarismos (na base 10) que sejam maiores que 6.000 e que não sejam divisíveis por 5, podem ser formados usando-se apenas os algarismos 4, 5, 6, 7 e 8?

Primeiro algarismo: 3 modos (pode ser 6, 7 ou 8)

Último algarismo: 4 modos (não pode ser 5)

Segundo algarismo: 5 modos

Terceiro algarismo: 5 modos

Quarto algarismo: 5 modos

$$3 \times 4 \times 5^3 = 1500$$

```
num = 3 * 4 * (5**3) # potenciação **
print(numeros)
```

```
num = 3 * 4 * (5**3) # potenciação ** ou ^
print(numeros)
```

Princípio de Inclusão-Exclusão

Se A e B são dois conjuntos, não obrigatoriamente disjuntos, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

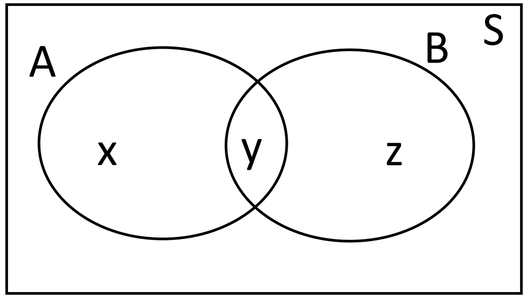
Seja:

y o número de elementos que pertencem a A e B.

x o número de elementos que pertencem a A e não pertencem a B.

z o número de elementos que pertencem a B e não pertencem a A.

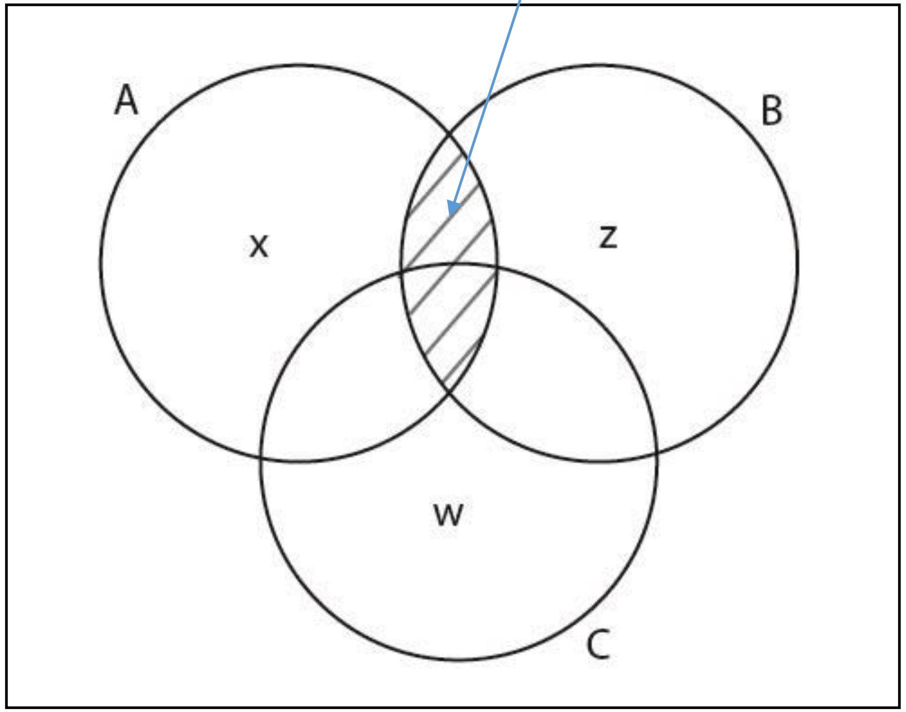
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = (x + y) + (y + z) - y = x + y + z$$



Princípio de Inclusão-Exclusão

Para 3 conjuntos temos

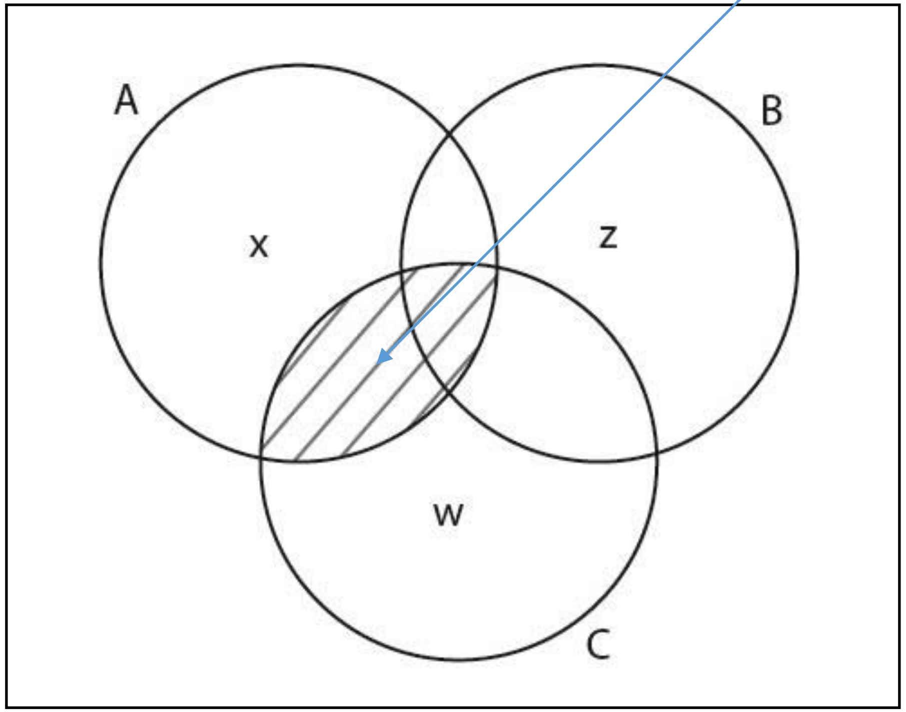
$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$



Princípio de Inclusão-Exclusão

Para 3 conjuntos temos

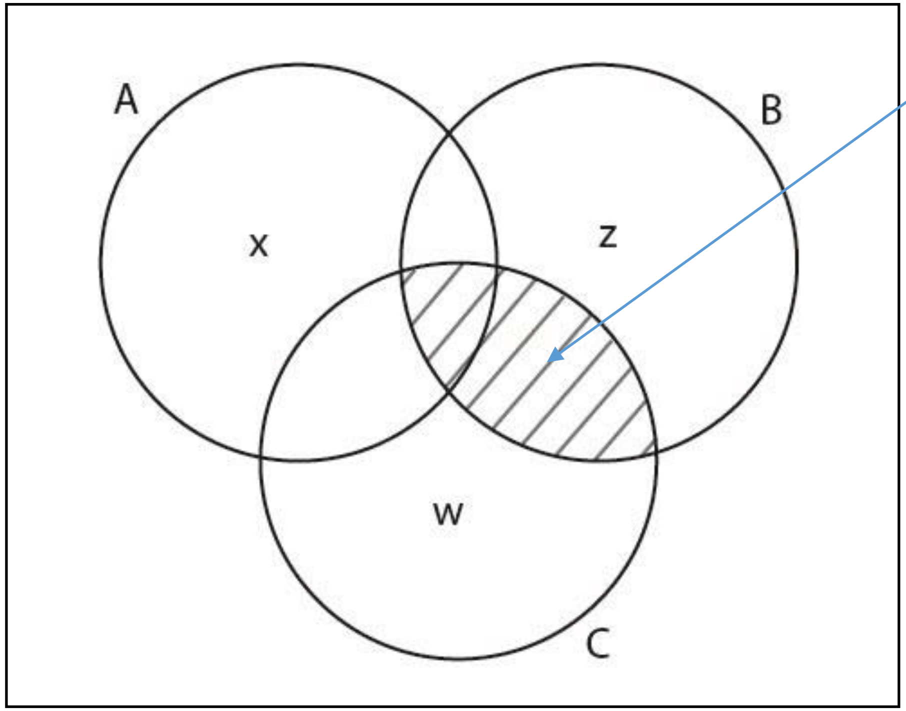
$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$



Princípio de Inclusão-Exclusão

Para 3 conjuntos temos

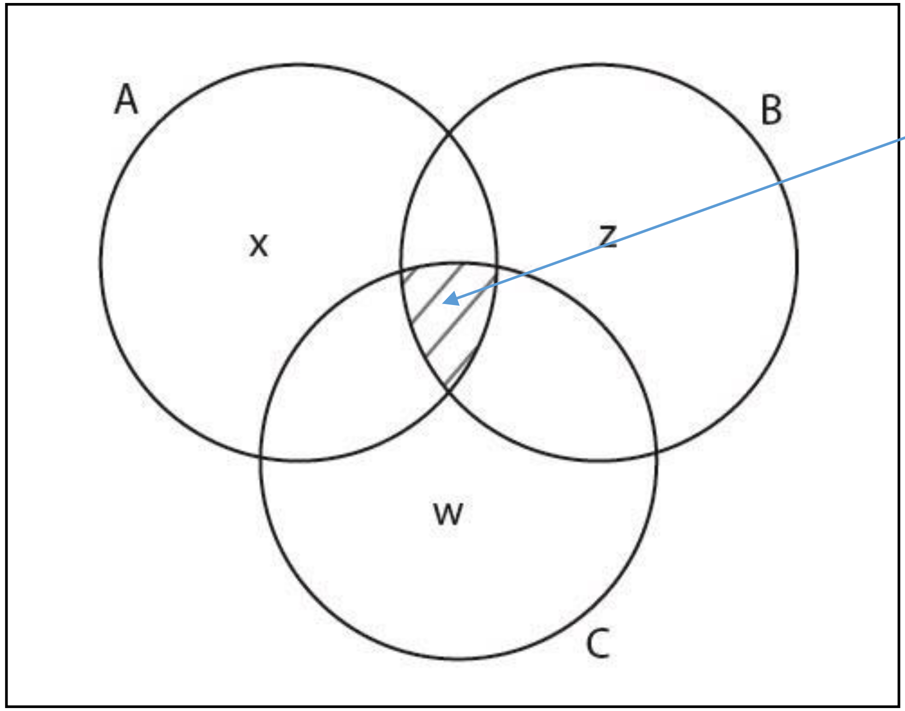
$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$



Princípio de Inclusão-Exclusão

Para 3 conjuntos temos

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$



Princípio de Inclusão-Exclusão

Exemplo 1) Sejam $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, b, f, g, h\}$, $C = \{b, c, g, h, i, j\}$

$n(A) = 5$

$n(B) = 5$

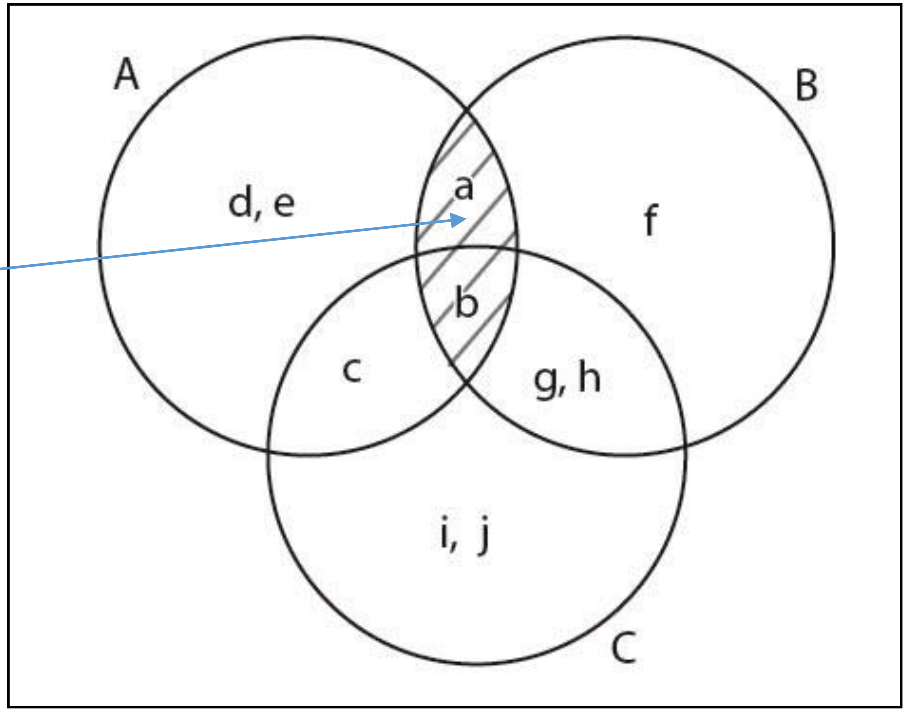
$n(C) = 6$

$n(A \cap B) = 2$

$n(A \cap C) = 2$

$n(B \cap C) = 3$

$n(A \cap B \cap C) = 1$



Princípio de Inclusão-Exclusão

Exemplo 1) Sejam $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, b, f, g, h\}$, $C = \{b, c, g, h, i, j\}$

$n(A) = 5$

$n(B) = 5$

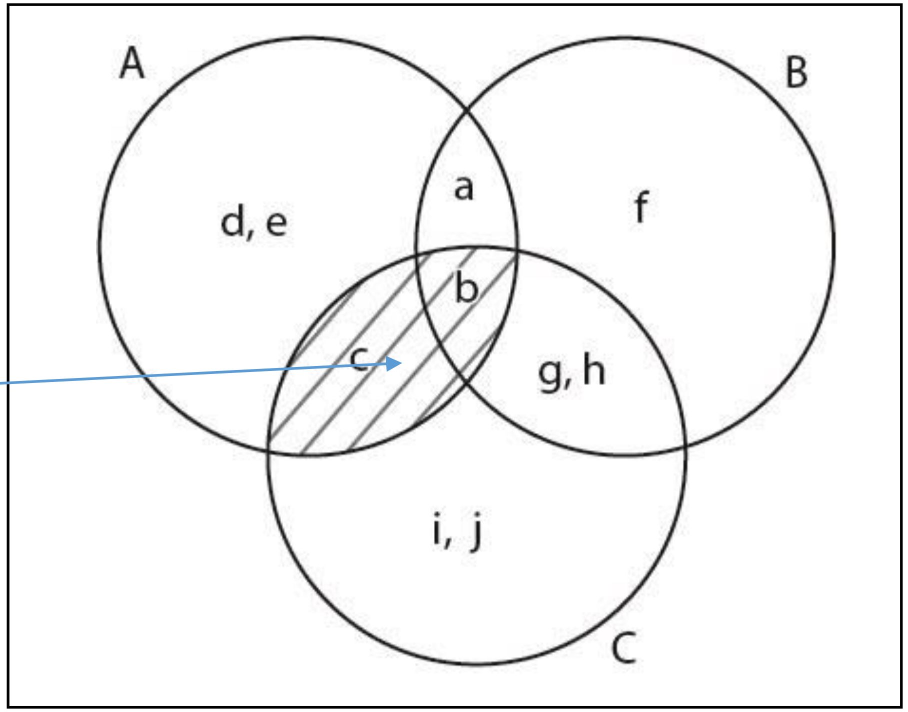
$n(C) = 6$

$n(A \cap B) = 2$

$n(A \cap C) = 2$

$n(B \cap C) = 3$

$n(A \cap B \cap C) = 1$



Princípio de Inclusão-Exclusão

Exemplo 1) Sejam $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, b, f, g, h\}$, $C = \{b, c, g, h, i, j\}$

$n(A) = 5$

$n(B) = 5$

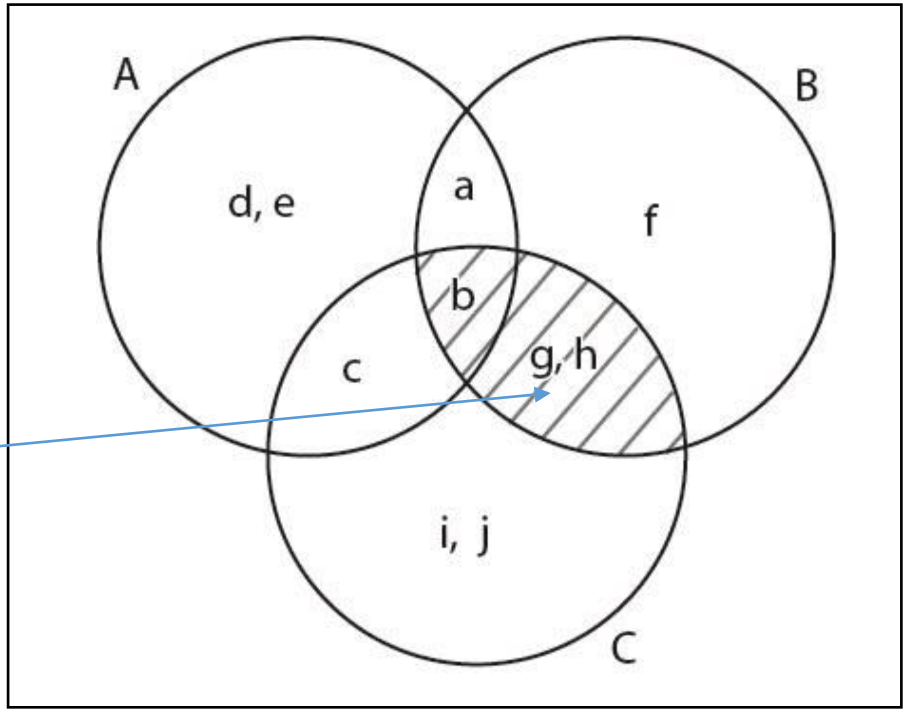
$n(C) = 6$

$n(A \cap B) = 2$

$n(A \cap C) = 2$

$n(B \cap C) = 3$

$n(A \cap B \cap C) = 1$



Princípio de Inclusão-Exclusão

Exemplo 1) Sejam $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, b, f, g, h\}$, $C = \{b, c, g, h, i, j\}$

$n(A) = 5$

$n(B) = 5$

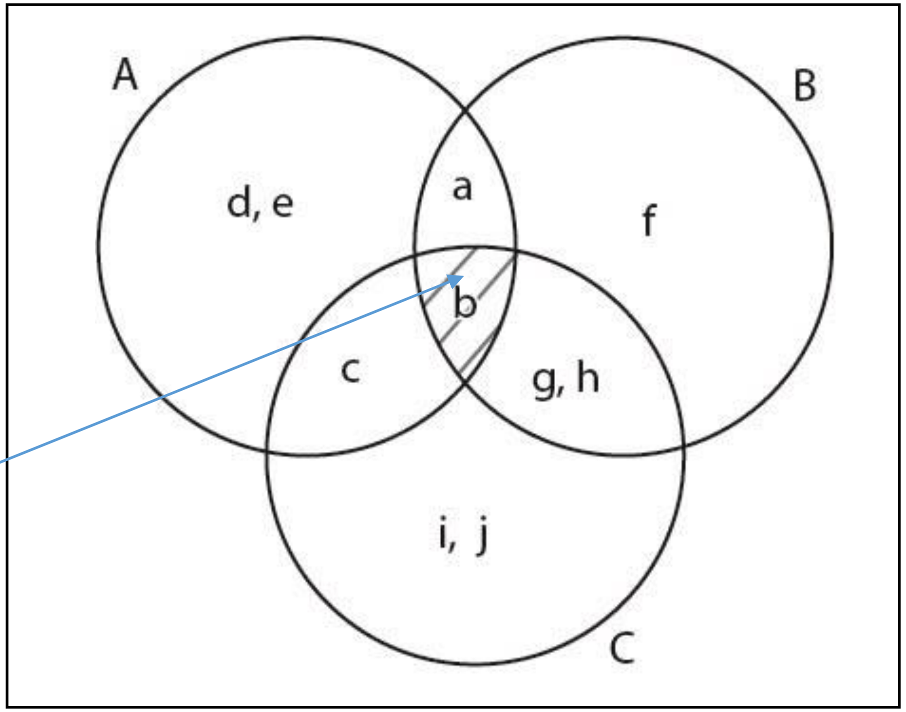
$n(C) = 6$

$n(A \cap B) = 2$

$n(A \cap C) = 2$

$n(B \cap C) = 3$

$n(A \cap B \cap C) = 1$



$n(A \cup B \cup C) = 5 + 5 + 6 - 2 - 2 - 3 + 1 = 10$

$A \cup B \cup C =$ { a, b, c, d, e , f , g, h, i, j}

Princípio de Inclusão-Exclusão

Se temos um conjunto S e n subconjuntos de S: $A_1, A_2, \ldots A_n$ o principio de **Inclusão-Exclusão** pode ser generalizado. O número de elementos de união de n conjuntos quaisquer é dada por:

$$
\begin{aligned}
n\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = {} & nA_1 + nA_2 + \ldots + nA_n \\
& -n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_1 \cap A_4) - \ldots - n(A_1 \cap A_n) \\
& -n(A_2 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_4) - \ldots - n(A_2 \cap A_n) \\
& \ldots \\
& -n(A_{n-1} \cap A_n) \\
& +n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_5) + \ldots + n(A_1 \cap A_2 \cap A_n) \\
& +n(A_2 \cap A_3 \cap A_4) + n(A_2 \cap A_3 \cap A_5) + \ldots + n(A_2 \cap A_3 \cap A_n) \\
& \ldots \\
& +n(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) \\
& \ldots \\
& +(-1)^{n-1} n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n)
\end{aligned}
$$

Análise Combinatória:

- Permutações Simples
- Permutações com Repetição
- Permutações Circulares
- Permutações Caóticas
- Arranjos
- Arranjos com Repetição
- Combinações Simples
- Combinações Completas

Permutações Simples

Considere n objetos distintos $o_1, o_2, \ldots, o_n$.

De quantos modos é possível ordená-los?

$$n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$$

O número de modos de ordenar n objetos distintos é representado por P_n.

$$P_n = n!$$

Cada ordenação possível dos n objetos é chamada de **permutação simples de n objetos**.

```
def fatorial(n):
    fat = 1
    i = 2
    while (i <= n):
        fat = fat * i
        i = i + 1
    return (fat)
```

```
def fatorial_recursivo(n):
    if (n == 0):
        return (1)
    else:
        return (n * fatorial_recursivo(n - 1))
```

Permutações Simples em R

Considere n objetos distintos $o_1, o_2, \dots, o_n$.

De quantos modos é possível ordená-los?

$$n(n-1)(n-2)\dots1 = n!$$

O número de modos de ordenar n objetos distintos é representado por P_n.

$$P_n = n!$$

Cada ordenação possível dos n objetos é chamada de **permutação simples de n objetos**.

```
fatorial <- function(n){
  fat = 1
  i = 2
  while (i <= n){
    fat = fat * i
    i = i + 1
  }
  return (fat)
}
```

```
fatorial_recursivo <- function(n){
  if (n == 0)
    return (1)
  else
    return (n * fatorial_recursivo(n - 1))
}
```

Permutações Simples

Exemplo 1) Quantos são os anagramas da palavra PERMUTA?

$$P_7 = 7!$$

```
anagramas = fatorial(7)
print(anagramas)
```


```
anagramas = fatorial(7)
print(anagramas)
```


Exemplo 2) Quantos são os anagramas da palavra PERMUTA que começam e terminam por vogal?

Primeira letra: 3 modos

Última letra: 2 modos

As 5 letras restantes: 5! modos

$3 \times 2 \times 5! = 720$

```
anagramas = 3 * 2 * fatorial(5)
print(anagramas)
```


```
anagramas = 3 * 2 * fatorial(5)
print(anagramas)
```

Permutações com Repetição

Exemplo 1) Quantos são os anagramas da palavra PROBABILIDADE?

Se todas as letras fossem distintas formaríamos $P_{13} = 13!$ anagramas.

Como temos 5 letras distintas e as letras B, A, I e D aparecem 2 vezes cada, precisamos eliminar os anagramas repetidos:

$$P_{13}^{2,\,2,\,2,\,2} = \frac{13!}{2!\,2!\,2!\,2!} = 389.188.800$$

```
anagramas = fatorial(13) / (fatorial(2)**4)
print(anagramas)
```

Outra forma de resolver seria:

$$C_{13}^{2} \,.\, C_{11}^{2} \,.\, C_{9}^{2} \,.\, C_{7}^{2} \,.\, 5! = 389.188.800$$

```
def combinacao(n, p):
    return (fatorial(n) / (fatorial(p) * fatorial(n - p)))

anagramas = combinacao(13, 2)*combinacao(11, 2)*combinacao(9, 2)*combinacao(7, 2)*fatorial(5)
print(anagramas)
```

Permutações com Repetição em R

Exemplo 1) Quantos são os anagramas da palavra PROBABILIDADE?

Se todas as letras fossem distintas formaríamos $P_{13} = 13!$ anagramas.

Como temos 5 letras distintas e as letras B, A, I e D aparecem 2 vezes cada, precisamos eliminar os anagramas repetidos:

$$P_{13}^{2,\,2,\,2,\,2} = \frac{13!}{2!\,2!\,2!\,2!} = 389.188.800$$

```
anagramas = fatorial(13) / (fatorial(2)**4)
print(anagramas)
```

Outra forma de resolver seria:

$$C_{13}^{2}\ .\ C_{11}^{2}\ .\ C_{9}^{2}\ .\ C_{7}^{2}\ .\ 5! = 389.188.800$$

```
combinacao <- function(n, p){
  return (fatorial(n) / (fatorial(p) * fatorial(n - p)))
}
anagramas = combinacao(13, 2)*combinacao(11, 2)*combinacao(9, 2)*combinacao(7, 2)*fatorial(5)
print(anagramas)
```

Permutações com Repetição

No caso geral teríamos:

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_s} = C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \ldots C_{n-n_1-n_2-\cdots-n_s}^{n_s} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_s!}$$

Também podemos utilizar a terminologia $i + j + k + \cdots + z = n$.

$$P_n^{i,j,k,\ldots z} = C_n^i C_{n-i}^j \ldots C_{n-i-j-k\ldots-z}^z = \frac{n!}{i! j! k! \ldots z!}$$

Permutações Circulares

De quantos modos podemos colocar n objetos distintos em n lugares equiespaçados em torno de um círculo? Vamos considerar equivalentes as disposições que possam coincidir por rotação.

O número de modos é presentados por $(PC)_n$.

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Uma permutação circular de n objetos distintos é qualquer distribuição desses n objetos em torno de um círculo.

Na permutação simples os lugares que os objetos ocupam importam.

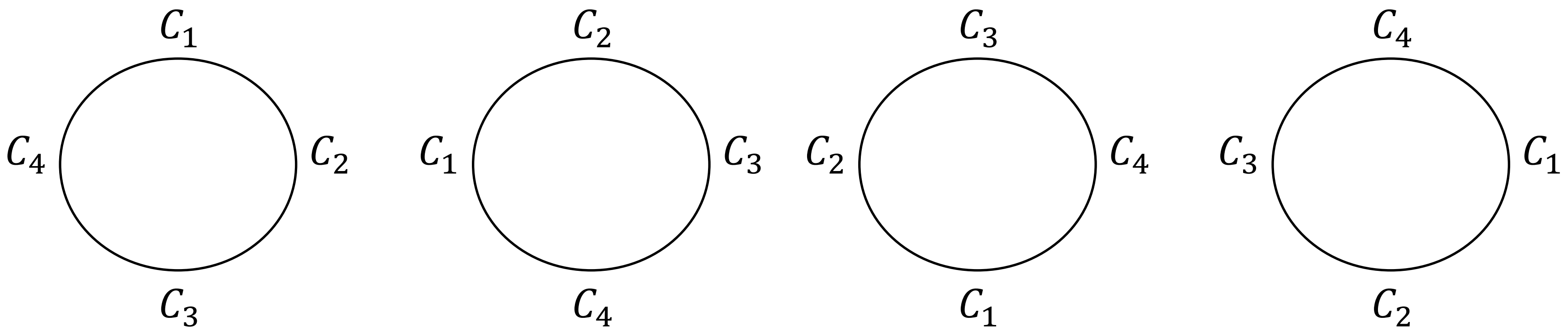
Na permutação circular apenas a posição relativa dos objetos entre si importa.

Permutações Circulares

Duas distribuições **circulares são iguais** se a posição relativa dos objetos é a mesma, ou seja, nenhuma pode ser obtida de outra por meio de uma rotação em torno do centro do círculo.

C_1	C_2	C_3	C_4
C_2	C_3	C_4	C_1
C_3	C_4	C_1	C_2
C_4	C_1	C_2	C_3

4 permutações simples



A posição relativa é a mesma nos 4 círculos

Permutações Circulares

Exemplo 1) De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 8 crianças:

a) De modo que 2 determinadas crianças não fiquem juntas?

Podemos formar $(PC)_6 = 5!$ com as 6 crianças que não apresentam restrição de lugar.

Há 6 modos de colocar a criança C na roda

Após colocar a criança C há 5 modos de colocar a criança C' na roda

$6 \times 5 \times (PC)_6 = 6 \times 5 \times 5! = 3600$

b) De modo que 2 determinadas crianças sempre fiquem juntas.

$2 \times (PC)_7 = 2 \times 6! = 1440$

Permutações Caóticas

Uma permutação de n elementos é caótica quando nenhum dos elementos está no seu lugar primitivo.

Ou seja, uma permutação dos objetos $o_1, o_2, \dots o_n$, inicialmente nessa ordem, é qualquer permutação desses objetos que não deixam nenhum deles na sua posição inicial.

Seja A_i o conjunto das permutações de $(1, 2, \dots n)$ em que o número i ocupa o i-ésimo lugar,

$i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Queremos calcular o número de elementos do conjunto S que pertencem a exatamente zero dos conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$.

$$S_0 = n(S) = n!;$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} (n(A_i)) = \sum_{i=1}^{n} (n - 1)! = n\,(n-1)! = n!;$$

…

Permutações Caóticas

$$S_0 = n(S) = n!;$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} (n(A_i)) = \sum_{i=1}^{n} (n - 1)! = n\,(n-1)! = n!\,;$$

$$S_2 = \sum_{1 \le i < j \le n} n(A_i \cap A_j) = \sum_{1 \le i < j \le n} (n - 2)! = C_n^2 (n - 2)! = \frac{n!}{2!};$$

$$S_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le n} n(A_i \cap A_j \cap A_k) = \sum_{1 \le i < j < k \le n} (n - 3)! = C_n^3 (n - 3)! = \frac{n!}{3!};$$

…

$$S_n = C_n^n (n - n)! = \frac{n!}{n!};$$

Permutações Caóticas

O número de elementos de S que pertencem a exatamente zero dos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é:

$$a_p = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k C_{p+k}^{k} S_{p+k};$$

p = 0

$$a_0 = \sum_{k=0}^{n-0} (-1)^k C_{0+k}^{k} S_{0+k}$$

Ou seja:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k;$$

$$= S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + \ldots + (-1)^n S_n$$

$$= n! - n! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!}$$

$$= n! \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

Logo, o número de permutações caóticas de $(1, 2, \ldots, n)$ é:

$$D_n = n! \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

$$= n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

Permutações Caóticas em R

O número de elementos de S que pertencem a exatamente zero dos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é:

$$D_n = n!\left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right] = n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}$$

```r
permutacao_caotica <- function(n){
  retorno = 0
  for(i in 0:n){
    retorno = retorno + (((-1)^i)/fatorial(i))
  }
  retorno = fatorial(n) * retorno
  return(retorno)
}
```

```python
def permutacao_caotica(n):
    retorno = 0
    for i in range(n + 1):
        retorno = retorno + (((-1)**i)/fatorial(i))
    retorno = fatorial(n) * retorno
    return (retorno)
```

Permutações Caóticas

Exemplo 1) Quantas são as permutações das letras a, b, c e d?

$$P_4 = 4! = 24$$

Exemplo 2) Quantas são as permutações das letras a, b, c e d, nesta ordem, que:

a) deixem
   i. a letra a fixa?
      $a\ b\ c\ d$, logo, 3!
   ii. a letra b fixa?
      $a\ b\ c\ d$, logo, 3!
   iii. a letra c fixa?
      $a\ b\ c\ d$, logo, 3!
   iv. a letra d fixa?
      $a\ b\ c\ d$, logo, 3!

a b c d
a b d c
a c b d
a c d b
a d c b
a d b c

b) deixem as letras c e d fixas?
   $a\ b\ c\ d$
   2!

c) deixem as letra a ou a letra b fixa?
   3! + 3! – 2!

Permutações Caóticas

Exemplo 1) Quantas são as permutações das letras a, b, c e d?

$$P_4 = 4! = 24$$

Exemplo 2) Quantas são as permutações das letras a, b, c e d, nesta ordem, que:

a) deixem

i. a letra a fixa?

$a\ b\ c\ d$, logo, 3!

ii. a letra b fixa?

$a\ b\ c\ d$, logo, 3!

iii. a letra c fixa?

$a\ b\ c\ d$, logo, 3!

iv. a letra d fixa?

$a\ b\ c\ d$, logo, 3!

a b c d
a b d c
a c b d
a c d b
a d c b
a d b c

a b c d
a b d c
c b a d
c b d a
d b a c
d b c a

a b c d
a b d c

b) deixem as letras c e d fixas?

$a\ b\ c\ d$

2!

c) deixem as letra a ou a letra b fixa?

3! + 3! – 2!

Permutações Caóticas

Exemplo 1) Quantas são as permutações das letras a, b, c e d?

$$P_4 = 4! = 24$$

Exemplo 2) Quantas são as permutações das letras a, b, c e d, nesta ordem, que:

a) deixem

i. a letra a fixa?

$a\ b\ c\ d$, logo, 3!

ii. a letra b fixa?

$a\ b\ c\ d$, logo, 3!

iii. a letra c fixa?

$a\ b\ c\ d$, logo, 3!

iv. a letra d fixa?

$a\ b\ c\ d$, logo, 3!

a b c d
a b d c
a c b d
a c d b
a d c b
a d b c

a b c d
a b d c
c b a d
c b d a
d b a c
d b c a

a b c d
a b d c

b) deixem as letras c e d fixas?

$a\ b\ c\ d$

2!

c) deixem as letra a ou a letra b fixa?

3! + 3! – 2!

Permutações Caóticas

d) deixem pelo menos um dos elementos fixos?

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4)$$
$$- n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_1 \cap A_4) - n(A_2 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_4) - n(A_3 \cap A_4)$$
$$+ n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + n(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + n(A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$
$$- n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = (C_1^4 3!) - (C_2^4 2!) + (C_3^4 1!) - (C_4^4 0!) = 15$$

e) não deixem nenhum algarismo fixo?

$$P_4 - 15 = 9$$

Permutações Caóticas

Exemplo 2) Seis casais participam de uma gincana. Em uma das etapas o grupo deve ser dividido em duplas sendo que não é permitido a formação de duplas de cônjuges. De quantas maneiras as duplas podem ser organizadas?

Se considerarmos os casais:

c_1 , c_2 , c_3 , c_4 , c_5 e c_6 , então não são permitidas formações como:

$$\begin{pmatrix} c_{1a} & c_{2a} & c_{3a} & c_{4a} & c_{5a} & c_{6a} \\ c_{1b} & c_{2b} & c_{3b} & c_{4b} & c_{5b} & c_{6b} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{1a} & c_{2a} & c_{3a} & c_{4a} & c_{5a} & c_{6a} \\ c_{1b} & c_{3b} & c_{2b} & c_{4b} & c_{5b} & c_{6b} \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} c_{1a} & c_{2a} & c_{3a} & c_{4a} & c_{5a} & c_{6a} \\ c_{2b} & c_{3b} & c_{1b} & c_{4b} & c_{6b} & c_{5b} \end{pmatrix}$$

$$D_6 = 6! \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right) = 265$$

```
duplas = permutacao_caotica(6)
print(duplas)
```

```
duplas = permutacao_caotica(6)
print(duplas)
```

Arranjos

Considere n objetos distintos $o_{\mathbf{1}}, o_{\mathbf{2}}, \ldots, o_{\boldsymbol{n}}$.

De quantos modos podemos ordenar p objetos, com $1 \leq p \leq n$?

$$n\,(n - 1)\,(n - 2)\ \ldots\ (n - p + 1)$$

O número de modos de ordenar p objetos distintos é representado por $A_{n,p}$.

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

```python
def arranjo(n, p):
    return (fatorial(n) / fatorial(n - p))
```

```r
arranjo <- function(n, p){
  return (fatorial(n) / fatorial(n - p))
}
```

Arranjos

Exemplo 1) Uma pessoa possui 8 livros distintos do mesmo tamanho. Em uma prateleira é possível guardar apenas 5 deles. De quantos modos 5 dos 8 livros podem ser escolhidos e colocados em uma pilha na prateleira?

$$A_{8,5} = \frac{8!}{(8-5)!} = 6720$$

```
pilha = arranjo(8, 5)
print(pilha)
```


```
pilha = arranjo(8, 5)
print(pilha)
```

Arranjos com Repetição

Considere n objetos distintos $o_1, o_2, \ldots, o_n$.

De quantos modos podemos ordenar p objetos, com $1 \leq p \leq n$?

$$(AP)_{n,p} = n \times n \times \ldots \times n = n^p$$

Combinações Simples

De quantos modos podemos escolher p objetos distintos entre n objetos distintos?

O que equivale a perguntar:

Quantos são os subconjuntos com p elementos do conjunto $\{o_1, o_2, \dots, o_n\}$?

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Cada subconjunto de p elementos é uma combinação simples de classe p dos n objetos.

```
def combinacao(n, p):
    return (fatorial(n) / (fatorial(p) * fatorial(n - p)))
```

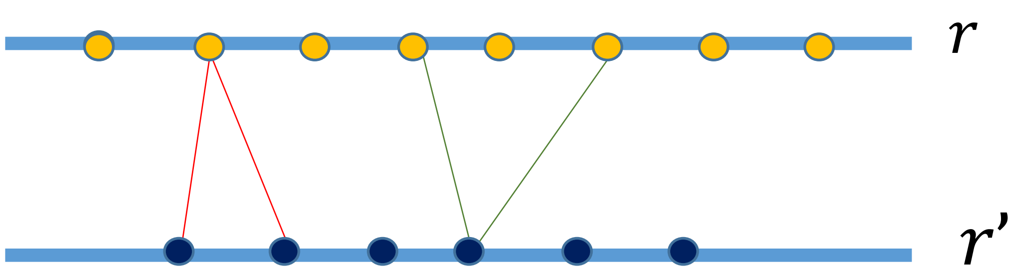
```
combinacao <- function(n, p) {
  return (fatorial(n) / (fatorial(p) * fatorial(n - p)))
}
```

Combinações Simples

Exemplo 1) Sejam r e r' duas retas paralelas. Marcam-se 8 pontos sobre a reta r e 6 pontos sobre a reta r'. Quantos triângulos existem com vértices em 3 desses 14 pontos?

Triângulos com um vértice em r e dois em r':

$$8\,C_6^2 = 8\left(\frac{6 \times 5}{2!}\right) = 120$$



Triângulos com um vértice em r' e dois em r:

$$6\,C_8^2 = 6\left(\frac{8 \times 7}{2!}\right) = 168$$

Resposta: $120 + 168 = 288$

```
triangulo = 8 * combinacao(6, 2) + 6 * combinacao(8, 2)
print(triangulo)
```


```
triangulo = 8 * combinacao(6, 2) + 6 * combinacao(8, 2)
print(triangulo)
```

Combinações Simples

Exemplo 2) De quantos modos é possível arrumar uma fila com 9 estudantes sendo 3 de engenharia, 3 de administração e 3 de direito, de modo que não fiquem dois estudantes do mesmo curso juntos?

Inicialmente vamos calcular quantas filas podemos formar ficando um aluno de engenharia e um de administração

$$\frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6 \text{ possibilidades}$$

Considere abaixo que **.** indica um local na fila no qual é possível incluir um aluno de direito (D) e **_** indica um local na fila no qual é necessário incluir um aluno de direito.

EA.E_E.A_A. C_3^1 = 3

EA.E.A.E.A. C_5^3 = 10

EA_A.E.A.E. C_4^2 = 6

EA_A.E_E.A. C_3^1 = 3

EA_A_A.E_E. C_2^0 = 1

EA.E.A_A.E. C_4^2 = 6

O aluno de direito pode ser encaixado em cada uma dessas filas de 28 modos.

Combinações Simples

Podemos replicar o raciocínio do slide anterior para as filas começando com $\mathtt{AE}$, $\mathtt{DA}$, $\mathtt{DE}$, $\mathtt{AD}$ e $\mathtt{ED}$.

Logo o número de filas será 174 sem contar as permutações entre os diferentes alunos do mesmo curso que será 3!

Logo teremos:

$$174\ (3!)^3 = 37.585$$

Combinações Complementares

Para cada combinação de p elementos a partir de um conjunto de n elementos é possível formar com os $n - p$ elemento restantes uma combinação complementar tal que:

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

```python
def combinacao_complementar(n, p):
    nc = n
    pc = n - p
    return (fatorial(nc) / (fatorial(pc) * fatorial(nc - pc)))
```

```r
combinacao_complementar <- function(n, p) {
  nc = n
  pc = n - p
  return (fatorial(nc) / (fatorial(pc) * fatorial(nc - pc)))
}
```

Combinações Completas (com Repetição)

De quantos modos podemos escolher p objetos, distintos ou não, entre n objetos distintos?

Outra forma de perguntar seria:

Qual o número de soluções para a equação $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$ em inteiros não negativos?

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^p$$

```python
def combinacao_completa(n, p):
    nc = n + p - 1
    pc = p
    return (fatorial(nc) / (fatorial(pc) * fatorial(nc - pc)))
```

```r
combinacao_completa <- function(n, p) {
  nc = n + p - 1
  pc = p
  return (fatorial(nc) / (fatorial(pc) * fatorial(nc - pc)))
}
```

Combinações Completas

De quantos modos é possível comprar 2 computadores em uma loja que oferece 3 modelos (todos com 2 unidades ou mais disponíveis)

x_1		x_2		x_3
CC	|	0	|	0
0	|	CC	|	0
0	|	0	|	CC
C	|	C	|	0
C	|	0	|	C
0	|	C	|	C

O total de incógnitas é 2 já que $\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} = 2$

O total de traços é 2.

O modo de arrumar em fila seria $P_4^{2,\,2} = \frac{4!}{2!2!} = C_4^2$

No caso geral temos p computadores e n – 1 traços, logo:

$$CR_n^p = P_{p+n-1}^{p,\, n-1} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = C_{n+p-1}^p$$

```
computador = combinacao_completa(3, 2)
print(computador)
```

```
computador = combinacao_completa(3, 2)
print(computador)
```

Generalização do Princípio de Inclusão-Exclusão

Agora que já vimos combinação é mais fácil formalizar a Generalização do Princípio de Inclusão-Exclusão.

Sejam S um conjunto, $A_1, A_2, \dots, A_n$ subconjuntos de S e

$$S_0 = n(S);$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} (n(A_i));$$

$$S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} n(A_i \cap A_j);$$

$$S_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} n(A_i \cap A_j \cap A_k);$$

$$\vdots$$

(Há C_n^1 parcelas S_1, C_n^2 parcelas em S_2 etc...)

Generalização do Princípio de Inclusão-Exclusão

Sejam S um conjunto, $A_1, A_2, \dots, A_n$ subconjuntos de S e

$$S_0 = n(S);$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} (n(A_i));$$

$$S_2 = \sum_{1 \le i < j \le n} n\left(A_i \cap A_j\right);$$

$$S_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le n} n\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right);$$

$$\vdots$$

Então:

a) O número de elementos de S que pertencem a exatamente $p(p \le n)$ dos conjuntos A_1, $A_2, \dots, A_n$ é

$$a_p = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k C_{p+k}^{k} S_{p+k};$$

Generalização do Princípio de Inclusão-Exclusão

Sejam S um conjunto, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subconjuntos de S e

$$S_0 = n(S);$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} (n(A_i));$$

$$S_2 = \sum_{1 \le i < j \le n} n(A_i \cap A_j);$$

$$S_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le n} n(A_i \cap A_j \cap A_k);$$

$$\vdots$$

Então:

b) O número de elementos de S que pertencem a pelo menos $p(p \le n)$ dos conjuntos A_1, A_2, ..., A_n é

$$b_p = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k C_{p+k-1}^{k} S_{p+k};$$

Generalização do Princípio de Inclusão-Exclusão

Sejam S um conjunto, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subconjuntos de S e

$$S_0 = n(S);$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} (n(A_i));$$

$$S_2 = \sum_{1 \le i < j \le n} n\left(A_i \cap A_j\right);$$

$$S_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le n} n\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right);$$

$$\vdots$$

Então:

c) O número de elementos do conjunto $A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n$ é

$$S_1 - S_2 + \ldots + (-1)^{n-1} S_n.$$

Exemplo 1) Quantos são os inteiros entre 1 e 10.000 (inclusive) que:

a) são divisíveis por exatamente dois dos números 2, 3, 5 e 7.

Define-se

$$S = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 10.000\}$$

$$A_1 = \{x \in S \mid 2 \; divide \; x\}$$

$$A_2 = \{x \in S \mid 3 \; divide \; x\}$$

$$A_3 = \{x \in S \mid 5 \; divide \; x\}$$

$$A_4 = \{x \in S \mid 7 \; divide \; x\}$$

Obs: Denotaremos a parte inteira de x por $\lfloor x \rfloor$

Generalização do Princípio de Inclusão-Exclusão

S_0 = n(S) = 10.000

S_1 = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) =

= $\left\lfloor\frac{10.000}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{10.000}{3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{10.000}{5}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{10.000}{7}\right\rfloor$ = 5000 + 3333 + 2000 + 1428 = 11.761

S_2 = n($A_1 \cap A_2$) + n($A_1 \cap A_3$) + n($A_1 \cap A_4$) + n($A_2 \cap A_3$) + n($A_2 \cap A_4$) + n($A_3 \cap A_4$) =

$\left\lfloor\frac{10.000}{6}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{10.000}{10}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{10.000}{14}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{10.000}{15}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{10.000}{21}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{10.000}{35}\right\rfloor$ = 1666 + 1000 + 714 + 666 + 476 + 285 = 4807

S_3 = n($A_1 \cap A_2 \cap A_3$) + n($A_1 \cap A_2 \cap A_4$) + n($A_1 \cap A_3 \cap A_4$) + n($A_2 \cap A_3 \cap A_4$) =

$\left\lfloor\frac{10.000}{30}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{10.000}{42}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{10.000}{14}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{10.000}{70}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{10.000}{105}\right\rfloor$ = 333 + 238 + 142 + 95 = 808

S_4 = n($A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$) = $\left\lfloor\frac{10.000}{210}\right\rfloor$ = 47

Generalização do Princípio de Inclusão-Exclusão

a) são divisíveis por exatamente dois dos números 2, 3, 5 e 7. (Continuação)

$$a_2 = \sum_{k=0}^{4-2} (-1)^k \, C_{2+k}^{k} \, S_{2+k} = (-1)^0 C_2^0 S_2 + (-1)^1 C_3^1 S_3 + (-1)^2 C_4^2 S_4$$

Como:

S_2 = 4807

S_3 = 808

S_4 = 47

Então:

$a_2 =$ 4807 – (3 x 808) + (6 x 47) = 2665

Generalização do Princípio de Inclusão-Exclusão

Exemplo 1) Quantos são os inteiros entre 1 e 10.000 (inclusive) que: (Continuação)

b) são divisíveis por no mínimo dois dos números 2, 3, 5 e 7?

Em outras palavras queremos calcular o número de elementos que pertencem a pelo menos dois dos conjuntos $A_1, A_2, A_3\ e\ A_4$.

$$b_2 = \sum_{k=0}^{4-2} (-1)^k\, C_{2+k-1}^{k}\, S_{2+k} \ = (-1)^0\, C_1^0 S_2 + (-1)^1 C_2^1 S_3 + (-1)^2 C_3^2 S_4$$

$=$ 4807 – (2 x 808) + (3 x 2665) = 3332

Conjunto Potência

O conjunto potência de um conjunto A, denotado por P(A) é o conjunto cujos membros são todos os possíveis subconjuntos de A.

Exemplos: Se $A = \{x, y\}$, então P$(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$.

Se $B = \{x, y, z\}$, então P$(B) = \{\emptyset$, {x}, {y}, {x, y}, {z}, {x, z}, {y, z}, {x, y, z} }

O número de subconjuntos é 2^n, onde n é número de elementos do conjunto.

Conjunto Potência

Observações da chamada recursiva:

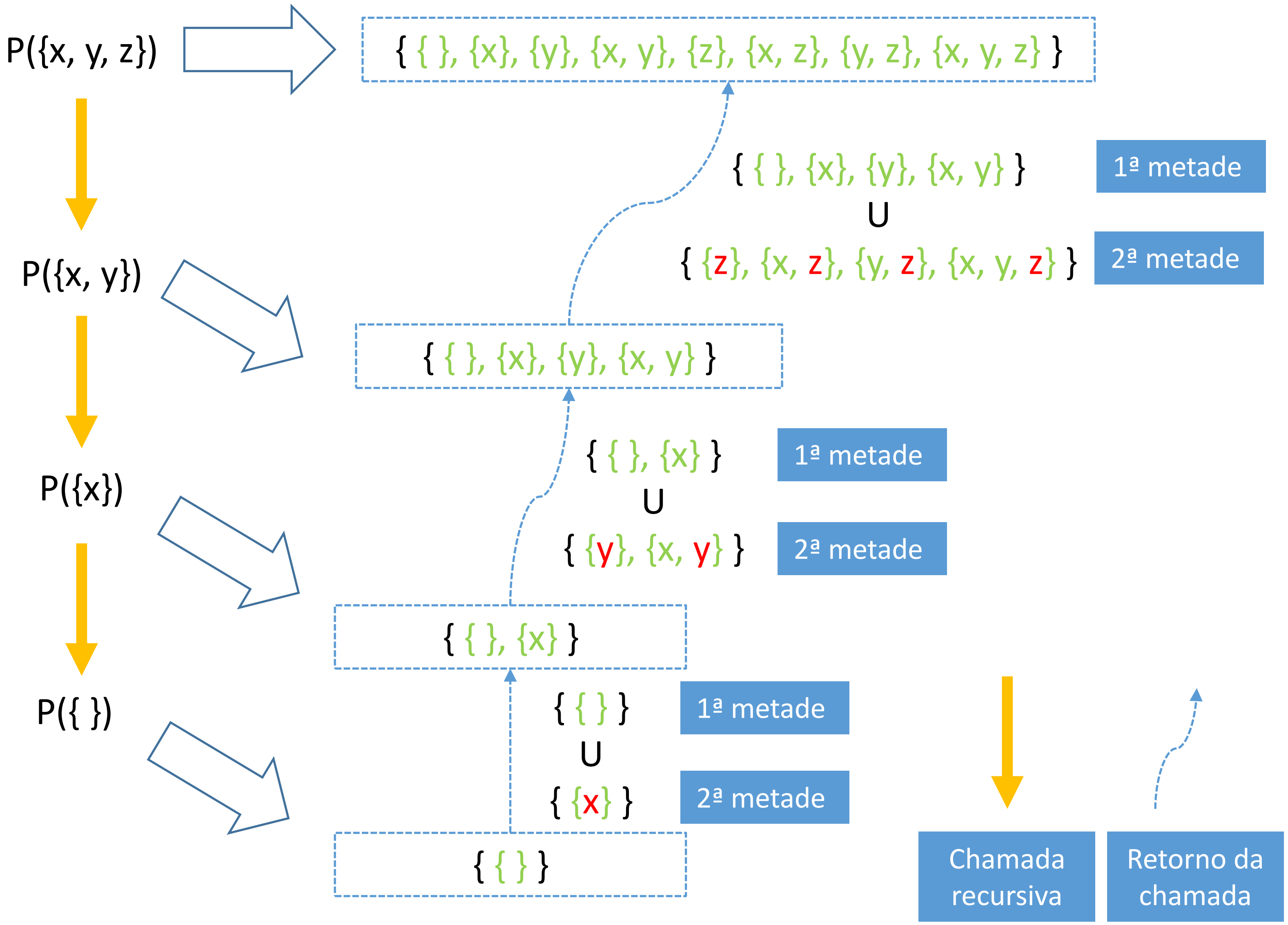
1. O resultado de P(x, y, z) possui o dobro de elementos de P(x, y).

2. A primeira metade do resultado de P(x, y, z) é composta pelos mesmos elementos do resultado de P(x, y).

3. A segunda metade do resultado de P(x, y, z) é composta pelos mesmos elementos do resultado de P(x, y) mas tendo a adição ao final de cada subconjunto do elemento z.

4. As observações acima também se aplicam aos demais conjuntos potência.

5. Analisando recursivamente, a cada rodada devemos fornecer como parâmetro da função recursiva um conjunto que contenha os elementos atuais menos o último elemento e o retorno da função deve ser um conjunto formado pelas duas metades indicadas nas observações 2 e 3.



Conjunto Potência

O conjunto potência de um conjunto A, denotado por P(A) é o conjunto cujos membros são todos os possíveis subconjuntos de A.

- Exemplos: Se $A = \{x, y\}$, então P$(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$.

  Se $B = \{x, y, z\}$, então P$(B) = \{\emptyset$, {x}, {y}, {x, y}, {z}, {x, z}, {y, z}, {x, y, z} }

Na linha $return\, r\ +\ [s\ +\ [c[-1]]\ for\ s\ in\ r]\ ,r$ armazena a lista obtida como resultado da chamada recursiva.

```
A = ['x', 'y']

def potencia_recursiva(c):
   if (len(c) == 0): # Caso base deve retornar um conjunto que contenha o conjunto vazio
      return [[]] # [[]]é uma lista que contém a lista vazia
   r = potencia_recursiva(c[:-1]) # Chamada recursiva removendo o último elemento
   return r + [s + [c[-1]] for s in r] # s representa todos os subconjuntos de r

P = potencia_recursiva(A)
print(P)
```

Conjunto Potência

O conjunto potência de um conjunto A, denotado por P(A) é o conjunto cujos membros são todos os possíveis subconjuntos de A.

- Exemplos: Se $A = \{x, y\}$, então P$(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$.

  Se $B = \{x, y, z\}$, então P$(B) = \{\emptyset$, {x}, {y}, {x, y}, {z}, {x, z}, {y, z}, {x, y, z} }

A expressão [… $for\ s\ in\ r$] é uma compressão de lista que permite que cada subconjunto s contido no conjunto r seja processado.

```
A = ['x', 'y']

def potencia_recursiva(c):
   if (len(c) == 0): # Caso base deve retornar um conjunto que contenha o conjunto vazio
      return [[]] # [[]]é uma lista que contém a lista vazia
   r = potencia_recursiva(c[:-1]) # Chamada recursiva removendo o último elemento
   return r + [s + [c[-1]] for s in r] # s representa todos os subconjuntos de r

P = potencia_recursiva(A)
print(P)
```

Conjunto Potência

O conjunto potência de um conjunto A, denotado por P(A) é o conjunto cujos membros são todos os possíveis subconjuntos de A.

- Exemplos: Se $A = \{x, y\}$, então P$(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$.

  Se $B = \{x, y, z\}$, então P$(B) = \{\emptyset$, {x}, {y}, {x, y}, {z}, {x, z}, {y, z}, {x, y, z} }

A expressão s + [c [−1]] na compressão de lista adiciona o último elemento do conjunto c (o elemento do índice −1) a cada subconjunto s.

```
A = ['x', 'y']

def potencia_recursiva(c):
   if (len(c) == 0): # Caso base deve retornar um conjunto que contenha o conjunto vazio
      return [[]] # [[]]é uma lista que contém a lista vazia
   r = potencia_recursiva(c[:-1]) # Chamada recursiva removendo o último elemento
   return r + [s + [c[-1]] for s in r] # s representa todos os subconjuntos de r

P = potencia_recursiva(A)
print(P)
```

Conjunto Potência

O conjunto potência de um conjunto A, denotado por P(A) é o conjunto cujos membros são todos os possíveis subconjuntos de A.

- Exemplos: Se $A = \{x, y\}$, então P$(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$.

  Se $B = \{x, y, z\}$, então P$(B) = \{\emptyset$, {x}, {y}, {x, y}, {z}, {x, z}, {y, z}, {x, y, z} }

A expressão completa r + [...] concatena as duas metades do resultado descrito nas observações 2 e 3.

```
A = ['x', 'y']

def potencia_recursiva(c):
   if (len(c) == 0): # Caso base deve retornar um conjunto que contenha o conjunto vazio
      return [[]] # [[]]é uma lista que contém a lista vazia
   r = potencia_recursiva(c[:-1]) # Chamada recursiva removendo o último elemento
   return r + [s + [c[-1]] for s in r] # s representa todos os subconjuntos de r

P = potencia_recursiva(A)
print(P)
```

Conjunto Potência em R

O conjunto potência de um conjunto A, denotado por P(A) é o conjunto cujos membros são todos os possíveis subconjuntos de A.

- Exemplo: Se $A = \{x, y\}$, então P$(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$.

```
potencia_recursiva <- function (posicao, vetor, vetoruso) {
  subconjunto <- NULL
  if (posicao > length(vetor)) { # Montamos o subconjunto
    for (i in 1:length(vetor)) # Escrevemos o subconjunto
      if (vetoruso[i])
        subconjunto <- c(subconjunto, vetor[i])
    print(subconjunto)
  } else { # Se não terminamos, continuar a gerar
    vetoruso[posicao] = T # Subconjuntos que incluem o elemento corrente
    potencia_recursiva(posicao + 1, vetor, vetoruso) # Chamada recursiva
    vetoruso[posicao] = F # Subconjuntos que não incluem o elemento corrente
    potencia_recursiva(posicao + 1, vetor, vetoruso) # Chamada recursiva
  }
}
A <- c("a","b","c")
uso <- rep(T, length(A))
potencia_recursiva (1, A, uso)
```

Sigma Álgebra

Seja S um espaço amostral, e considere que F seja uma coleção de subconjuntos de S com as seguintes propriedades:

1. Se $A \in$ F, então $\bar{A} \in$ F.
2. Se $A_i \in$ F, $i = 1,2, \ldots,$ então:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \text{F}.$$

Uma coleção que satisfaz essas duas propriedades é chamada de uma **σ-álgebra**. Os elementos que constituem essa coleção são chamados de **eventos aleatórios**.

Sigma Álgebra

Exemplos:

1. Como o conjunto potência de S, F $=$ P(S), é o conjunto de todos os subconjuntos possíveis de S, então P(S) é uma σ-álgebra. Em particular, essa é a maior σ-álgebra de S.

2. Se S é um conjunto qualquer, então F $= \{\emptyset, S\}$ é uma σ-álgebra de S. De fato, essa é a menor σ-álgebra de S.

3. Se A é um subconjunto qualquer de S, entãoF $= \{\emptyset, A, \bar{A}, S\}$ é uma σ-álgebra de S.

Exercício: Suponha que $S = \{a, b, c\}$. Liste 4 diferentes σ-álgebras de S.

F $= \left\{\emptyset, \{a, b, c\}\right\}$
F $= \left\{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\right\}$
F $= \left\{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\right\}$
F $=$ P$(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b\}, \{b, c\}, \{c\}, \{a, b, c\}\}$

Sigma Álgebra

Propriedades:

- Suponha que A pertença a uma σ-álgebra F de S. Então, pela definição, $\bar{A}$ ∈ F e $(A \cup \bar{A})$ ∈ F. Portanto S ∈ F.
- Também, pela definição de σ-álgebra, se S ∈ F, então $\bar{S} = \emptyset$ ∈ F.
- Usando a Lei de De Morgan é simples provar a seguinte proposição:

Se A_i ∈ F, $i = 1,2, \ldots$, então

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \text{F}.$$

Álgebra de Borel

Um exemplo de uma σ-álgebra de muito interesse para nós é a **álgebra de Borel**. Ela será denotada por B.

Aqui consideraremos a álgebra de Borel da reta real, mas existem também as álgebras de Borel do intervalo [0, 1], do plano $\mathbb{R}^2$, etc..

Álgebra de Borel

Para facilitar o entendimento da álgebra de Borel, vejamos o seguinte exemplo:

Suponha que $S = \{a, b, c, d\}$. É fácil checar que a coleção $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ não é uma σ-álgebra de S.

Considere agora, que possamos adicionar a essa coleção os conjuntos que justamente a fazem tornar uma σ-álgebra de S.

Teríamos, então, que adicionar os seguintes conjuntos:

1) $\overline{\{a\}} = \{b, c, d\}$, $\overline{\{a, b\}} = \{c, d\}$ => $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}\}$

2) $\{a\} \cup \{c, d\} = \{a, c, d\}$, $\{a\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$ => $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$

3) $\overline{\{a, c, d\}} = \{b\}$

Com isso, a coleção

$\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{c, d\}, \{b\}, \{a, b, c, d\}\}$ é uma σ-álgebra de S.

Álgebra de Borel

A σ-álgebra construída, conforme o exemplo anterior, a partir de uma dada coleção de subconjuntos C de S é chamada de **σ–álgebra gerada por** C. E ela corresponde a menor σ-álgebra de S que contém C.

Álgebra de Borel

Para construir a álgebra de Borel B da reta real faremos o seguinte algoritmo:

1. Inclua em B todos os intervalos do tipo $(-\infty, a]$, onde a é um número real qualquer.

2. Para B ser uma σ-álgebra, ela deve satisfazer a primeira condição. Isso implica que todos os intervalos na forma (a, ∞) devem estar em B.

3. Suponha que a e b sejam dois números reais, com $a < b$.

Como $(-\infty, b] \in$ B e $(a, \infty) \in$ B, então

$(-\infty, b] \cap (a, \infty) = (a, b]$ pertence a B.

Função de Euler

Considere a função de Euler representada por $\varphi(x)$, definida para um número natural x como sendo igual à quantidade de números menores ou iguais a x co-primos em relação a ele:

$$\varphi(x) = \{y \in \mathbb{N} \mid y \leq x \wedge mdc(y, x) = 1\}$$

O valor de $\varphi(x)$ pode ser calculado a partir da decomposição de x em fatores primos.

Se a decomposição de x em fatores primos é

$x = p_1^{j_1}, p_2^{j_2} \ldots p_r^{j_r}$ ($p_1, p_2, \ldots, p_r$ primos distintos),

Então:

$$\varphi(x) = x \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

Função de Euler

$$\varphi(x) = x\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

```
def funcao_Euler(n):
    retorno = 0
    fator = 2
    decomposicao = []
    produto = 1
    nfatorado = n
    while (nfatorado != 1):
        multiplicidade = 0
        while ((nfatorado % fator) == 0):
            nfatorado = nfatorado / fator
            multiplicidade = multiplicidade + 1
        if (multiplicidade != 0):
             decomposicao.append((fator, multiplicidade))
        fator = fator + 1
    for elemento in decomposicao:
         produto = produto * ( 1 - (1/elemento[0]))
    retorno = n * produto
    return (retorno)
```

Função de Euler

Exemplo 1) As decomposições de 120, 360 e 729 em fatores primos são:

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5;$$

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \text{ e}$$

$$729 = 3^6, \text{ temos}$$

$$\varphi(120) = 120\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 32;$$

$$\varphi(360) = 360\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 96 \text{ e}$$

$$\varphi(729) = 729\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 486$$

```
print(funcao_Euler(120))

print(funcao_Euler(360))

print(funcao_Euler(729))
```

Ou seja,

no conjunto $\{1, 2, \ldots, 120\}$ há 32 números co-primos em relação a 120,

no conjunto $\{1, 2, \ldots, 360\}$ há 96 números co-primos em relação a 360 e

no conjunto $\{1, 2, \ldots, 729\}$ há 486 números co-primos em relação a 729.

Função de Euler

Define-se:

S = Conjunto dos números positivos menores ou iguais a x;

A_i = Conjunto dos elementos de S que são múltiplos de p_i (1 ≤ i ≤ r)

Queremos determinar o número de elementos de S que são primos com x.

ϕ(x) é pois o número de elementos de S que pertencem a exatamente zero dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_r$.
Temos:

$A_i = \left\{p_i, 2p_i, \ldots, \frac{x}{p_i} p_i\right\}$

n(A_i) = $\frac{n}{p_i}$;

$A_i \cap A_j = \left\{p_i p_j, 2p_i p_j, \ldots, \frac{x}{p_i p_j} p_i p_j\right\}$,

n($A_i \cap A_j$) = $\frac{x}{p_i p_j}$ (i ≠ j);

e assim sucessivamente.

Logo:

$$S_0 = n(S) = x;$$

$$S_1 = \sum n(A_i) = \sum \frac{x}{p_i};$$

$$S_2 = \sum_{i<j} n(A_i \cap A_j) = \sum_{i<j} \frac{x}{p_i p_j};$$

$\vdots$

Função de Euler

Assim,

$\phi(x) = a_0$

$$= \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_{0+k}^{k} S_{0+k};$$

$= S_0 - S_1 + S_2$ - ... + $(-1)^r S_r$

= x - $\left(\frac{x}{p_1} + \frac{x}{p_2} + \ \ldots + \frac{x}{p_r}\right)$ +

$\left(\frac{x}{p_1 p_2} + \frac{x}{p_1 p_3} + \ \ldots + \frac{x}{p_r - 1 p_r}\right)$ - ...

+$(-1)^r \frac{x}{p_1 p_2 \ldots p_r}$

= x $\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$.

Função de Euler

$$\varphi(x) = x\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

```
funcao_Euler <- function (n) {
  retorno <- 0
  fator <- 2
  decomposicao <- NULL
  produto <- 1
  nfatorado <- n
  while (nfatorado != 1){
    multiplicidade = 0
    while ((nfatorado %% fator) == 0) {
      nfatorado = nfatorado / fator
      multiplicidade = multiplicidade + 1
    }
    if (multiplicidade != 0)
      decomposicao <- rbind (decomposicao, c(fator, multiplicidade))
    fator = fator + 1
  }
  for (i in seq(1:nrow(decomposicao)))
    produto = produto * ( 1 - (1/decomposicao[i, 1]))
  retorno = n * produto
  return (retorno)
}
```