



Instituto Balseiro, San Carlos de Bariloche,
Argentina

Apuntes Investigación 1: Phonon Cascade Diode - QCPL

Arturo Ruiz
Licenciatura en Física
arturo.ruiz@ib.edu.ar

Julio - Diciembre 2025

Índice

1. Solución general para las amplitudes y fases de un arreglo lineal de polaritones con acoplamiento optomecánico	1
1.1. Aproximaciones iniciales y balance energético en un sitio del arreglo	1
1.2. Potencial de interacción entre fonones y polaritones	5
1.3. Driving resonante	7
1.4. Driving no resonante	8
1.5. Balance de potencias en el sistema de dos sitios y no reciprocidad	8
1.6. Grados de libertad	9
1.7. Resumen, validez de los resultados y discusión	10
2. Exponentes de Lyapunov	12
2.1. Métodos numéricos para el cálculo de los exponentes de Lyapunov	13
2.1.1. Mayor exponente	13
2.1.2. Descomposición QR: todo el espectro	14

1. Solución general para las amplitudes y fases de un arreglo lineal de polaritoness con acoplamiento optomecánico

En esta sección se desarrollan un conjunto de ecuaciones para la resolución en RWA para las amplitudes y la dinámica de fase de un arreglo lineal de polaritoness con acoplamiento optomecánico. En lugar de trabajar con las ecuaciones originales

$$i\dot{a}_j = (\omega_j - i\frac{\gamma}{2})a_j + g_{j-1}x_{j-1}a_{j-1} + g_jx_ja_{j+1} + \text{driving} \quad (1)$$

$$\ddot{x}_j = -\Omega_j^2x_j - \Gamma_j\dot{x}_j - 4g_j\Omega_j\text{Re}(a_ja_{j+1}^*) \quad (2)$$

trabajaremos con la normalización dada por primero definir $\varphi_j = a_j e^{-i\omega_j t}$ y por otro lado dividiendo dichas cantidades por sus valores que adoptan en saturación¹. En ese caso el conjunto de ecuaciones puede reescribirse como

$$i\dot{\varphi}_j = -i\varphi_j + x_j\varphi_{j+1}e^{i(\Omega_j+\delta_j)t} + x_{j-1}\varphi_{j-1}e^{-i(\Omega_{j-1}+\delta_{j-1})t} + \text{driving} \quad (3)$$

$$\ddot{x}_j = -\Omega_j^2x_j - \Gamma_j\dot{x}_j - 2\Omega_j\Gamma_j\text{Re}\mathcal{F}_j \quad (4)$$

siendo $\delta_j = \omega_j - \omega_{j+1} - \Omega_j$ por lo que $\delta_j = 0$ corresponde a que los niveles j y $j + 1$ están sintonizados con una frecuencia de fonón de diferencia (no detuning) y $\mathcal{F}_j = \varphi_j\varphi_{j+1}^*e^{-i(\Omega_j+\delta_j)t}$. Trabajamos estas ecuaciones en el límite en que $\Gamma_j \ll 1 \ll \Omega_j$. Usando estas ecuaciones es posible encontrar también la dinámica en módulo y fase para un sistema sin driving

$$\frac{1}{2}\frac{d|\varphi_j|^2}{dt} = -|\varphi_j|^2 - x_j\text{Im}\mathcal{F}_j + x_{j-1}\text{Im}\mathcal{F}_{j-1} \quad (5)$$

$$-|\varphi_j|^2\dot{\theta}_j = U|\varphi_j|^4 + x_j\text{Re}\mathcal{F}_j + x_{j-1}\text{Re}\mathcal{F}_{j-1} \quad (6)$$

siendo $\varphi_j = |\varphi_j|e^{i\theta_j}$.

1.1. Aproximaciones iniciales y balance energético en un sitio del arreglo

A partir de las ecuaciones (3) es posible construir una ecuación de movimiento además para \mathcal{F}_j . Esta toma la forma

$$i\frac{d\mathcal{F}_j}{dt} - (\Omega_j + \delta_j)\mathcal{F}_j = -2i\mathcal{F}_j + x_j(|\varphi_{j+1}|^2 - |\varphi_j|^2) + \mathcal{P}_j - \mathcal{Q}_j \quad (7)$$

¹Consultar el informe de investigación I para mayores detalles en la normalización.

Siendo

$$\mathcal{P}_j = x_{j-1} \varphi_{j-1} \varphi_{j+1}^* e^{-i(\Omega_{j-1} + \delta_{j-1})t} e^{-i(\Omega_j + \delta_j)t} \quad (8)$$

$$\mathcal{Q}_j = x_{j+1} \varphi_j \varphi_{j+2}^* e^{-i(\Omega_{j+1} + \delta_{j-1})t} e^{-i(\Omega_j + \delta_j)t} \quad (9)$$

donde observamos que

$$|\varphi_j|^2 \mathcal{P}_j = x_{j-1} \mathcal{F}_{j-1} \mathcal{F}_j \quad (10)$$

$$|\varphi_{j+1}|^2 \mathcal{Q}_j = x_{j+1} \mathcal{F}_j \mathcal{F}_{j+1} \quad (11)$$

Ahora en adelante considereremos que el sistema se encuentra en estado estacionario por lo cual podemos considerar $|\varphi_k| \approx \text{const}$ y que $x_k \sim \cos(\omega_j t)$. Considerando que $\mathcal{F}_j \neq 0 \implies |\varphi_j|, |\varphi_{j+1}| \neq 0$ tenemos que

$$i \frac{d\mathcal{F}_j}{dt} = \mathcal{F}_j \left((\Omega_j + \delta_j) + \frac{x_{j-1} \mathcal{F}_{j-1}}{|\varphi_j|^2} - \frac{x_{j+1} \mathcal{F}_{j+1}}{|\varphi_{j+1}|^2} - 2i \right) - x_j (|\varphi_j|^2 - |\varphi_{j+1}|^2) \quad (12)$$

En caso de driving en los sitios j y $j+1$, se debe aumentar al lado derecho de (12) un término de la forma

$$\mathcal{D}_j = \begin{cases} \left(\frac{F_j}{\varphi_j} - \left(\frac{F_{j+1}}{\varphi_{j+1}} \right)^* \right) \mathcal{F}_j, & \text{driving resonante} \\ i(n_j - n_{j+1}) \mathcal{F}_j, & \text{driving no resonante} \end{cases} \quad (13)$$

Cuestión que la ecuación diferencial de \mathcal{F}_j tiene una pinta

$$i \frac{d\mathcal{F}_j}{dt} = \Lambda_j \mathcal{F}_j + \eta_j x_j \quad (14)$$

con $\Lambda_j \in \mathbb{C}$, $\eta_j \in \mathbb{R}$ y constantes si suponemos que podemos hacer uso de la RWA en los términos de la forma $\mathcal{F}_k x_k$. Considerando que el ancho de frecuencias de \mathcal{F}_j es mucho menor que $2\Omega_j$ se puede ver que el driving sobre \mathcal{F}_j proporcionado por el fonón solo excita el modo de frecuencia negativa por lo cual podemos suponer que la solución de \mathcal{F}_j es de la forma

$$\mathcal{F}_j = |\mathcal{F}_j| e^{-i\omega_j t} \quad (15)$$

siendo $\omega_j \sim \Omega_j$ la frecuencia de x_j ². Enfocándonos en los promedios temporales de las variables podemos dar una interpretación a las cantidades

²Esto debe ser así ya que $\text{Re}\mathcal{F}_j$ actúa como un driving en la ecuación del fonón y en el estado estacionario las frecuencias del fonón y el driving deben coincidir.

que aparecen. Si observamos que la forma funcional de \mathcal{F}_j da lugar a que $\frac{d}{dt}\mathcal{F}_j = -i\omega_j\mathcal{F}_j$ por lo cual $\text{Im}\mathcal{F}_j = \frac{1}{\omega_j} \frac{d}{dt}\text{Re}\mathcal{F}_j$, observamos que de la ecuación (5) podemos obtener

$$\langle|\varphi_j|^2\rangle = \frac{\langle x_{j-1} \frac{d}{dt}\text{Re}\mathcal{F}_{j-1}\rangle}{\omega_{j-1}} - \frac{\langle x_j \frac{d}{dt}\text{Re}\mathcal{F}_j\rangle}{\omega_j} \quad (16)$$

A partir de (4) es posible obtener que $\langle x_j \frac{d}{dt}\text{Re}\mathcal{F}_j\rangle = \frac{1}{2\Omega_j} \langle \dot{x}_j^2 \rangle$. Por tanto

$$\langle|\varphi_j|^2\rangle = \frac{\langle \dot{x}_{j-1}^2 \rangle}{2\Omega_{j-1} - 1\omega_{j-1}} - \frac{\langle \dot{x}_j^2 \rangle}{2\Omega_j\omega_j} \quad (17)$$

suponiendo movimiento armónico $\langle \dot{x}_j^2 \rangle = \omega_j^2 \langle x_j^2 \rangle$ por lo que usando que $\omega_j = \Omega_j + \mathcal{O}(\Gamma_j)$ vemos que

$$\langle|\varphi_j|^2\rangle = \frac{\langle x_{j-1}^2 \rangle}{2} - \frac{\langle x_j^2 \rangle}{2} \quad (18)$$

Observar que esta ecuación, que surge de un balance de energías, la amplitud en un sitio de polaritón crece con la del fonón anterior y decrece con la del siguiente. Esto sugiere que un fonón que el flujo de energía que transporta el fonón es siempre del sitio a mayor energía (mayor ω_j) al de menor energía. Esto también explicaría en parte porque un driving no puede excitar niveles superiores en energía. En la figura 1 se muestran las amplitudes en un sistema de dos sitios resonante cuando se excita el modo de menor energía en lugar del primero. En general, usando (15), encontramos que

$$\langle x_j \text{Im}\mathcal{F}_j \rangle = \frac{\langle x_j^2 \rangle}{2} \quad (19)$$

Se muestra comparación con las simulaciones numéricas en la figura 2.

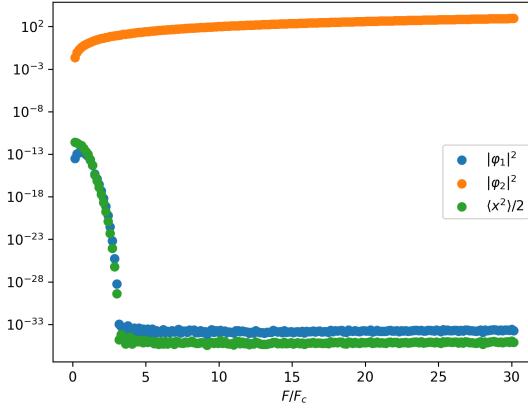


Figura 1: Amplitudes en escala logarítmica en un sistema de dos niveles con excitación en el sitio de menor energía.

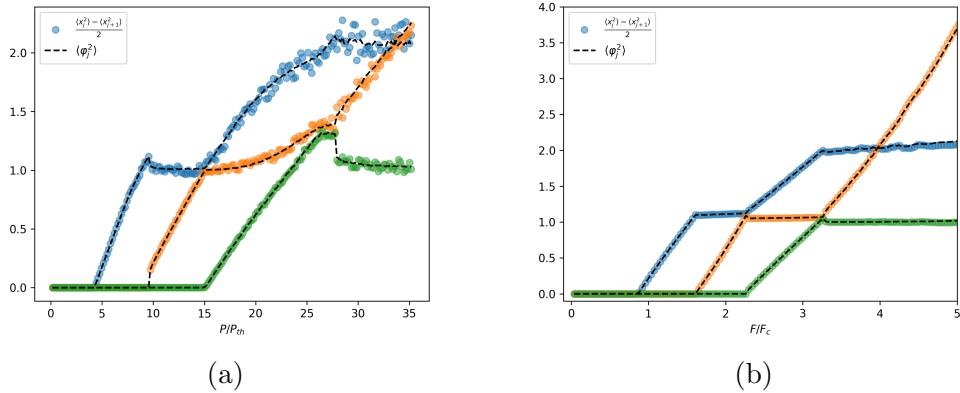


Figura 2: comparación de las amplitudes $|\varphi_j|^2$ en sitios no driveados con la diferencia de amplitudes de fonones vecinos. En 2a se muestra el caso de una cascada resonante mientras que en 2b se muestra una cascada resonante con distintos detunings respecto a resonancia en cada sitio.

Se ve que en el caso del driving no resonante, si bien los puntos obtenidos para $\frac{\langle x_{j-1}^2 \rangle}{2} - \frac{\langle x_j^2 \rangle}{2}$ están centrados alrededor de $|\varphi_j|^2$, se observa una varianza considerable. Se estima que esto se debe a los distintos tiempos de promediación utilizados en cada simulación para cada punto y que en un tiempo

mayor estos coincidan con $\langle |\varphi_j|^2 \rangle$.

1.2. Potencial de interacción entre fonones y polaritoness

Por otro lado, vemos que tomando promedios temporales de la ecuación (6), el efecto de los términos $x_j \text{Re} \mathcal{F}_j$ es la de introducir un potencial efectivo sobre los condensados de polaritoness ya que tienen el mismo efecto que el término de campo medio $U|\varphi_j|^2$. Por tanto esta cantidad *puede* ser interpretada como un potencial efectivo emergente por la interacción entre los condensados y los fonones. Este potencial actúa sobre ambas componentes de \mathcal{F}_j (es decir φ_j y φ_{j+1}) subiendo la energía de ambos por igual y a la vez contribuye a la renormalización de la frecuencia de oscilación del fonón. Multiplicando las ecuaciones (4) por x_j y promediando podemos obtener que

$$\langle x_j \text{Re} \mathcal{F}_j \rangle = \frac{\langle \dot{x}_j^2 \rangle - \Omega_j^2 \langle x_j^2 \rangle}{2\Omega_j \Gamma_j} \quad (20)$$

Utilizando que $\frac{\omega_j^2 - \Omega_j^2}{\Omega_j \Gamma_j} \approx \frac{\omega_j - \Omega_j}{\Gamma_j/2}$ para $\Omega_j \gg \Gamma_j$ obtenemos que

$$-|\varphi_j|^2 \dot{\theta}_j = U|\varphi_j|^4 + \left(\frac{\omega_j - \Omega_j}{\Gamma_j/2} \right) \frac{\langle x_j^2 \rangle}{2} + \left(\frac{\omega_{j-1} - \Omega_{j-1}}{\Gamma_{j-1}/2} \right) \frac{\langle x_{j-1}^2 \rangle}{2} \quad (21)$$

En particular, si φ_j no está driveado, por (18), vemos que $\dot{\theta}_j$ depende de las amplitudes de los fonones vecinos y la magnitud de estas interacciones está modulada por la magnitud de la normalización en frecuencia de los fonones. Especializando para dos sitios con driving no resonante y sin interacciones ($U = 0$), utilizando (18) observamos que $|\varphi_2|^2 = \frac{\langle x^2 \rangle}{2}$ por lo que (21) da

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\Omega - \omega}{\Gamma/2} \quad (22)$$

En la figura 3a se muestran los resultados numéricos obtenidos por los picos de la transformada de fourier de φ_2 y x . Además observando que las frecuencias de \mathcal{F}_j y x_j coinciden tiene que ser $\omega_j = \Omega_j + \delta_j + \dot{\theta}_{j+1} - \dot{\theta}_j$ (ver de la definición de \mathcal{F}_j). Esto se aprecia numéricamente en la figura 3b. Como $\omega_j = \Omega_j + \mathcal{O}(\Gamma_j)$ si $\delta_j = 0$ se tiene que cumplir $\dot{\theta}_{j+1} - \dot{\theta}_j \sim \Gamma_j$ por lo que $\dot{\theta}_j \approx \dot{\theta}_{j+1}$ por lo que las frecuencias de los sitios está lockeada. En particular para el sistema de dos sitios se tiene que cumplir $\frac{\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_2} = \frac{\Gamma}{2}$.

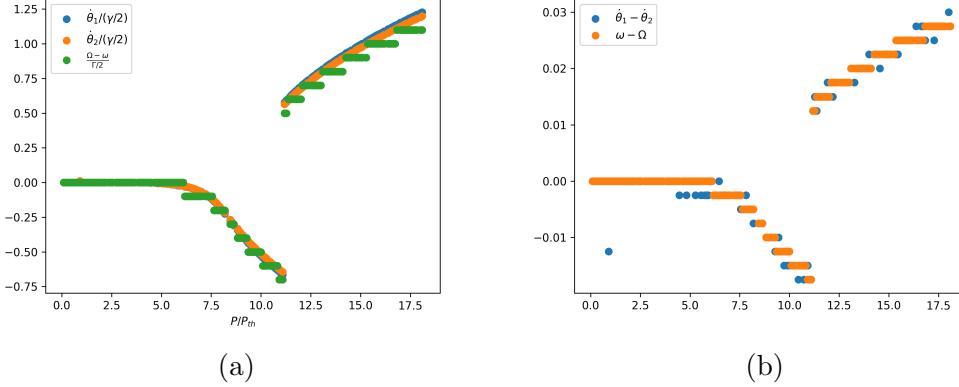


Figura 3: 3a picos de las transformadas de fourier de φ_2 y x en un sistema de dos sitios alimentados de forma no resonante. (3b) Comparación de la diferencia de frecuencias con la frecuencia del fonón.

Si proponemos como soluciones

$$\varphi_j(t) = \varphi_j^0 e^{i\dot{\theta}_j t} \quad (23)$$

$$x_j(t) = A_j e^{-i\omega_j t} + A_j^* e^{i\omega_j t} \quad (24)$$

podemos encontrar que

$$A_j = \frac{\varphi_j^0 (\varphi_{j+1}^0)^*}{\frac{\Omega_j^2 - \omega_j^2}{\Omega_j \Gamma_j} + i} \quad (25)$$

Por lo que se puede relacionar las amplitudes de los sitios con los de la fonón de la siguiente manera:

$$|A_j|^2 = \frac{|\varphi_j|^2 |\varphi_{j+1}^2|}{1 + \left(\frac{\dot{\theta}_{j+1} - \dot{\theta}_j + \delta_j}{\Gamma_j/2} \right)^2} \quad (26)$$

Por lo que identificando que $|A_j|^2 = \frac{\langle x_j^2 \rangle}{2}$. Es posible encontrar relaciones recursivas para las amplitudes de los polaritoness. En particular, si consideramos que $\dot{\theta}_j = 0$ (por ejemplo en un driving resonante sin detuning), se tiene que $|A_j|^2 = |\varphi_j|^2 |\varphi_{j+1}^2|$ que combinado con (18) es posible demostrar que se cumple

$$|A_j|^2 = (1 + |A_{j+1}|^2 - |A_{j+2}|^2)(1 + |A_{j+2}|^2 - |A_{j+3}|^2) \quad (27)$$

que es la misma relación de recurrencia que se encontró por funciones de Green para el sistema de cascada con driving resonante. Por tanto este approach está de acuerdo con resultados obtenidos previamente. Retornando a la ecuación (21), usando estos resultados y definiendo $\lambda_j = \frac{\dot{\theta}_{j+1} - \dot{\theta}_j + \delta_j}{\Gamma_j/2}$:

$$-\dot{\theta}_j = U|\varphi_j|^2 + \frac{\lambda_j}{1 + \lambda_j^2}|\varphi_{j+1}|^2 + \frac{\lambda_{j-1}}{1 + \lambda_{j-1}^2}|\varphi_{j-1}|^2 \quad (28)$$

de esta ecuación podemos hacer una asignación de $U_j = \frac{\lambda_j}{1 + \lambda_j^2}$ como un coeficiente que determina la intensidad de interacciones del sitio con sus vecinos. Si estas interacciones aumentan o disminuyen $\dot{\theta}_j$ depende solo del signo de los λ . Además vemos que $|U_j| \leq \frac{1}{2}$ usando la desigualdad $|x + \frac{1}{x}| \geq 2$ por lo que esta interacción está acotada. Por otra parte, usando (18), podemos obtener

$$\frac{|\varphi_{j-1}|^2}{1 + \lambda_{j-1}^2} - \frac{|\varphi_{j+1}|^2}{1 + \lambda_j^2} = 1 \quad (29)$$

1.3. Driving resonante

Consideremos que un sitio es driveado por un láser que tiene determinada frecuencia ω_d . Si $\omega_{\text{driving}} = \omega_k$ para algún k , se puede encontrar que

$$i\dot{\varphi}_k = -i\varphi_k + F_k + x_k \varphi_{k+1} e^{i(\Omega_j + \delta_j)t} + x_{k-1} \varphi_{k-1} e^{-i(\Omega_{k-1} + \delta_{k-1})t} \quad (30)$$

La frecuencia de este sitio debe coincidir con la del driving en tiempo estacionario por lo que podemos asumir que $\dot{\theta}_k = 0$. Entonces, la ecuación (28) se vuelve

$$0 = U|\varphi_k|^2 + \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k^2}|\varphi_{k+1}|^2 + \frac{\lambda_{k-1}}{1 + \lambda_{k-1}^2}|\varphi_{k-1}|^2 + \text{Re} \left(\frac{F_k}{\varphi_k} \right) \quad (31)$$

Y la ecuación (29) se ve modificada a

$$\frac{|\varphi_{k-1}|^2}{1 + \lambda_{k-1}^2} - \frac{|\varphi_{k+1}|^2}{1 + \lambda_k^2} = 1 - \text{Im} \left(\frac{F_k}{\varphi_k^0} \right) \quad (32)$$

Consideraremos el caso $\delta_j = 0$ y $U = 0$, por lo que podemos suponer $\dot{\theta}_j = 0, \forall j$, la ecuación (31) permite encontrar que $\text{Re} \frac{F_k}{\varphi_k^0} = 0$ por lo que $\frac{F_k}{\varphi_k^0} =$

$i\text{Im}\frac{F_k}{\varphi_k}$. En particular, si el driving se realiza en $k = 1$ (es decir donde no hay sitios de mayor energía), se obtiene que se debe cumplir la condición

$$|F|^2 = |\varphi_1|^2 (1 + |\varphi_2|^2)^2 \quad (33)$$

siendo la condición encontrada en el otro approach.

1.4. Driving no resonante

Suponiendo que en el sitio k se coloca un reservorio

$$i\dot{\varphi}_k = i(n_k - 1)\varphi_k + x_k\varphi_{k+1}e^{i(\Omega_j + \delta_j)t} + x_{k-1}\varphi_{k-1}e^{-i(\Omega_{k-1} + \delta_{k-1})t} \quad (34)$$

Se puede observar que el reservorio no introduce nueva dinámica sobre la fase del sitio por lo que la relación (28) se conserva. Sin embargo, vemos que la ecuación (29) requiere que se introduza un término más siendo

$$\frac{|\varphi_{k-1}|^2}{1 + \lambda_{k-1}^2} - \frac{|\varphi_{k+1}|^2}{1 + \lambda_k^2} = 1 - \frac{P_k}{1 + \alpha_k^2 |\varphi_k|^2} \quad (35)$$

habiendo sustituido el valor estacionario del reservorio n_k .

1.5. Balance de potencias en el sistema de dos sitios y no reciprocidad

Especializando al caso de dos sitios, cuando se retira el driving vemos que la ecuación para \mathcal{F}_j se reduce a

$$i\frac{d}{dt}\mathcal{F}_j - (\Omega_j + \delta_j)\mathcal{F}_j = -2i\mathcal{F}_j - x_j(|\varphi_j|^2 - |\varphi_{j+1}|^2) \quad (36)$$

la cual puede ser desacoplada en la parte real si tomamos la segunda derivada, de lo cual obtenemos que si $f_j = \text{Re}\mathcal{F}_j$

$$\ddot{f}_j = -((\Omega_j + \delta_j)^2 + 4)f_j - 4\dot{f}_j + (\Omega_j + \delta_j)(|\varphi_j|^2 - |\varphi_{j+1}|^2)x_j \quad (37)$$

por lo cual se puede entender el sistema como dos osciladores armónicos acoplados. En particular, nos interesa saber la dinámica de energía de este

sistema de osciladores donde cabe destacar que esta dinámica no es hamiltoniana. Esto se puede observar tras multiplicar por la primera derivada en las ecuaciones de f_j y x_j , de lo cual obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{f}_j^2}{2} + (\Omega_j^2 + 4) \frac{f_j^2}{2} \right) = -4\dot{f}_j^2 + (\Omega_j + \delta_j)(|\varphi_j|^2 - |\varphi_{j+1}|^2)x_j \dot{f}_j \quad (38)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}_j^2}{2} + \Omega_j^2 \frac{x_j^2}{2} \right) = -\Gamma \dot{x}_j^2 - 2\Omega_j \Gamma \dot{x}_j f_j \quad (39)$$

Los términos $\dot{x}_j f_j$ y $\dot{f}_j x_j$ me dan a entender que no hay un intercambio simétrico de energía ya que vienen acompañados de distintos coeficientes. Además los coeficientes tienen signo opuesto ($|\varphi_j|^2 > |\varphi_{j+1}|^2$). Esto impone la posibilidad de proponer un potencial de la forma $x_j f_j$ que daría lugar a un nuevo término en la energía que aparece en el lado izquierdo de estas ecuaciones.

1.6. Grados de libertad

Consideremos un arreglo de N condensados. Observamos que por cada uno hay una ecuación de la forma (28) y otra ecuación de la forma (29) añadiendo términos de driving correspondientes por lo que en total hay $2N$ ecuaciones. Por otro lado, vemos que en total hay $2N$ incógnitas: los $|\varphi_j|^2$ y los $\dot{\theta}_j$. En el caso del driving resonante, si bien por cada sitio driveado se fija el valor de $\dot{\theta}_k$ se añade como incógnita $\arg(\frac{F_k}{\varphi_k})$. Por tanto, este conjunto de ecuaciones es suficiente para determinar unívocamente todas estas ecuaciones. El hecho de que hayan biestableidades en el sistema a pesar de encontrar una única solución se debe a que en este approach se asignaron valores de acuerdo al promedio temporal a tiempo infinito $\langle \chi \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi(t) dt$. Dadas varias soluciones (atractores), si estas soluciones eventualmente decaen a una dada solución estable, este promedio temporal representa el valor que las variables adoptan en esta última. Es decir, en este promedio la solución más estable pesa infinitamente más que cualquiera de las otras soluciones metaestables. Por tanto este approach parece indicar que siempre hay una única solución totalmente estable siempre que se haya especificado el número de sitios activos (la estructura de cascada se puede demostrar también a partir de estas ecuaciones).

1.7. Resumen, validez de los resultados y discusión

Se encontraron un conjunto de $2N$ relaciones ((29), (28)) y sus respectivas versiones con driving) que determinan únicamente los valores estables de $\langle |\varphi_j|^2 \rangle$ y $\dot{\theta}_j$ asumiendo que las soluciones se pueden escribir aproximadamente como $\varphi_j(t) = \varphi_j^0 e^{i\dot{\theta}_j t}$ con φ_j^0 constante. Por otra parte las simulaciones también parecen sugerir que es más estable una solución que distribuye la potencia entregada por el driving a varios sitios comparada a una que tiene más sitios apagados. Se encontró que $|\varphi_j|^2$ depende solamente de las amplitudes que adoptan los fonones vecinos (ecuación (18)) cuando no está siendo alimentado. Se encontró que la energía de los polaritonones en un sitio se ve afectada por la aparición de un potencial efectivo surgido de la interacción fonón-polaritonón (6) y que este puede ser interpretado como una interacción indirecta entre los polaritonones (28). Se mostró que un par φ_1, φ_2 más un fonón x representa un sistema no recíproco ya que no existe el mismo balance de energía que otorga el fonón hacia los sitios y viceversa ((38) y (39)).

La validez de los resultados radica principalmente en la de la RWA. En general para poder mejorar la aplicabilidad se deben proponer soluciones de la forma $\varphi_j(t) = e^{i\dot{\theta}_j t} (\varphi_j^0 + \varphi_j^1 e^{i\omega_j t} + \varphi_j^2 e^{-i\omega_{j-1} t})$. *Conjetura:* probando en simulaciones me pareció ver que en general las componentes contrarotantes no crecen con el driving siempre que queden sitios por encenderse. En la figura 4a se observa que la predicción teórica usando este esquema sigue correctamente la simulación numérica hasta alrededor de $F/F_c \sim 2\sqrt{2}$ que es cuando se activa el último modo de polaritonón ($N = 5$). A partir de ahí se puede observar que la predicción del último sitio se queda ligeramente por debajo de la simulación y que la diferencia entre ambos va aumentando con F/F_c . En la figura 4b se ve que lo mismo sucede con el sitio 1 de un sistema de dos sitios con driving resonante, en la figura 4c se muestra que la solución puede pensarse como la propuesta al inicio de este párrafo (F es real así que el valor de equilibrio de φ_1 es $-i$) siendo φ_j^0 la obtenida bajo este método.

Quedan como pendientes los siguientes puntos

- Evaluar la estabilidad de las soluciones, confirmar el criterio de estabilidad conjeturado
- Son las componentes contrarotantes las sidebands? Que tan importante es incluir estas componentes a la solución para ver comportamientos

relevantes

- Optimización del sistema mediante parámetros calculados a partir de las ecuaciones obtenidas
- Generalización a un sistema con coupling de un fonón a varios pares de sitios
- Generalización a un sistema con parámetros no homogéneos (estas cuentas suponen parámetros iguales entre sitios debido a la normalización)
- Especializar los resultados obtenidos para un sistema de interés (quizá la cascada pero con driving no resonante)

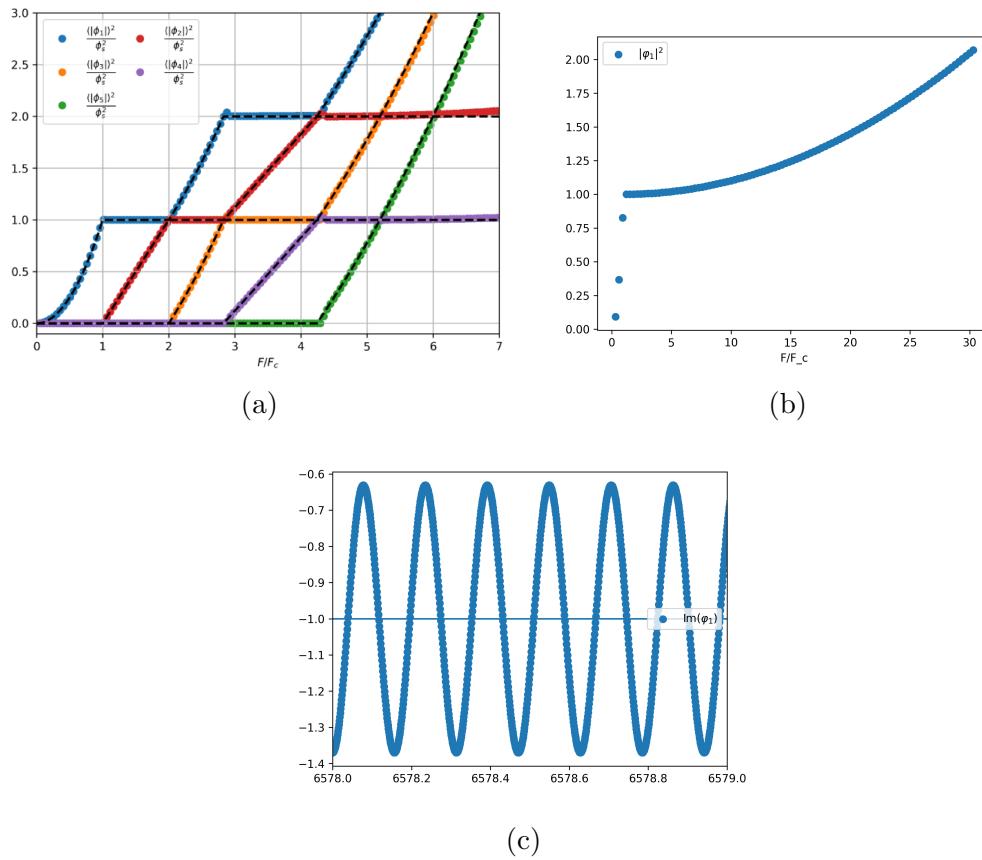


Figura 4: aparición y efectos de la componente contrarotante

2. Exponentes de Lyapunov

Dado que el sistema no posee puntos fijos no se puede realizar el análisis de estabilidad encontrando los autovalores del Hamiltoniano. Por otro lado, las soluciones no son periódicas por lo que tampoco es posible encontrar los multiplicadores de Floquet. El *approach* más general corresponde a encontrar los multiplicadores de Lyapunov del sistema.

Consideremos un sistema de ecuaciones de n variables de la forma

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{F}(\mathbf{U}, t) \quad (40)$$

con \mathbf{U} un vector n dimensional y \mathbf{F} define la evolución del vector. Si consideramos una pequeña perturbación sobre el sistema \mathbf{u} entonces esta evoluciona aproximadamente con el sistema linealizado

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \cdot \mathbf{u}(t) =: \mathbf{K}(\mathbf{U}, t)\mathbf{u} \quad (41)$$

Por lo cual que

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{H}(\mathbf{U}_0, t)\mathbf{u}(0) \quad (42)$$

siendo \mathbf{H} el operador evolución de la perturbación

$$\mathbf{H}(\mathbf{U}_0, t) = \exp \left(\int_0^t dt' \mathbf{K}(\mathbf{U}(t'), t') \right) \quad (43)$$

Si nos interesamos únicamente en el crecimiento de la perturbación, tenemos que fijarnos simplemente en la evolución del módulo de esta y vemos que

$$\|\mathbf{u}(t)\|^2 = \mathbf{u}^T(0) \underbrace{\mathbf{H}^T(t)\mathbf{H}(t)}_{\mathbf{M}(t)} \mathbf{u}(0) \quad (44)$$

por lo que solamente la matriz \mathbf{M} es relevante para la evolución de \mathbf{u} . El teorema de Oseledets afirma que bajo ciertas condiciones el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{M}(t))^{\frac{1}{2t}} = \mathbf{P} \quad (45)$$

existe y es una matriz n dimensional con autovalores positivos $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$. Los exponentes de Lyapunov están definidos por

$$\lambda_k = \log \mu_k \quad (46)$$

Alternativamente, estos exponentes se definen en términos de la evolución lineal de las perturbaciones por lo que

$$\lambda_k = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \frac{\|\mathbf{u}(t)\|}{\|\mathbf{u}(0)\|} \quad (47)$$

La perturbación inicial $\mathbf{u}(0)$ determina cual de todos los exponentes se calcula por la fórmula (47). Si todos los λ_k son distintos, entonces existe un conjunto de subespacios $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, $k = 1, \dots, n$ con dimensiones $n - k + 1$ respectivamente sobre los cuales actúan cada uno de los exponentes de Lyapunov de forma excluyente. Entonces si $\mathbf{u} \in \mathbb{D}^k - \mathbb{D}^{k-1}$ entonces \mathbf{u} crecerá con el exponente λ_k . Si hay igualdad entre exponentes, los subespacios \mathbb{D}^k no están bien definidos. Debido a esta propiedad una perturbación típica crecerá principalmente con λ_1 (el mayor exponente) ya que este actúa sobre todo el espacio de fases a excepción de un subespacio de dimensión menor. Dos vectores crecerán típicamente una componente con λ_1 y otra con λ_2 y así sucesivamente. Esto a su vez dificulta la búsqueda de los exponentes más pequeños, cosa que se puede remediar observando el sistema revertido en tiempo donde se encuentran exponentes $\tilde{\lambda} \rightarrow -\lambda$.

2.1. Métodos numéricos para el cálculo de los exponentes de Lyapunov

2.1.1. Mayor exponente

Debido a que una sola perturbación crítica crecerá con λ_1 es posible encontrar este valor con el siguiente algoritmo. Después de llegar a una trayectoria típica del sistema (cuasi punto fijo)

- Perturbación inicial $\mathbf{u}(0)$, $\|\mathbf{u}(0)\|^2 = 1$
- En adelante $\tilde{\mathbf{u}}(j+1) = \mathbf{J}(j)\mathbf{u}(j)$ con \mathbf{J} la matriz Jacobiana del sistema.
- Se normaliza para el siguiente paso $\mathbf{u}(j+1) = \frac{\tilde{\mathbf{u}}(j+1)}{\|\tilde{\mathbf{u}}(j+1)\|}$

después de una serie repetida de este procedimiento

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{j=1}^t \ln \|\tilde{\mathbf{u}}(j)\| \quad (48)$$

el método no es aplicable para el cálculo del resto de los exponentes ya que se requeriría que la perturbación fuera no típica a lo largo de un espacio de dimensión menor.

2.1.2. Descomposición QR: todo el espectro

Dado un volumen V_m de un paralelepípedo m -dimensional la tasa de crecimiento de este S_m cumple con

$$S_m := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln V_m}{t} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \quad (49)$$

dado que el paralelepípedo se alinea con mayor tendencia a lo largo del subespacio m dimensional de mayor crecimiento. Sea \mathbf{Q}_0 una matriz cuyas $m \leq n$ columnas de n elementos son ortogonales ante el producto interno complejo (en otras palabras, una matriz unitaria). La evolución de esta matriz está dada por

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{Q}_0 \quad (50)$$

Esta matriz admite una descomposición única con

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}\mathbf{R}, \quad \mathbf{Q} \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n \times m), \quad \mathbf{R} \in \text{Mat}(\mathbb{C}, m \times m) \quad (51)$$

Además \mathbf{R} es triangular superior. El determinante de esta última matriz \mathbf{R} está relacionado con el volumen V_m ya que \mathbf{Q} solo contiene rotaciones siendo

$$V_m = \prod_{i=1}^m R_{ii} \quad (52)$$

Por lo cual aplicando esta expresión sucesivamente sobre (49) con distintos valores de m se obtiene

$$\lambda_j := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln R_{jj}}{t} \quad (53)$$

Asumiendo que la integración se hace en L pasos de ancho τ , asignemos \mathbf{H}_k al operador resultante de la integración entre tiempos $(k-1)\tau$ y $k\tau$, entonces

$$\mathbf{P} = \prod_{k=1}^L \mathbf{H}_k \mathbf{Q}_0 \quad (54)$$

definiendo $\mathbf{P}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{Q}_{k-1}$, haciendo la descomposición $\mathbf{P}_k = \mathbf{Q}_k \mathbf{R}_k$ encontramos

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_L \prod_{k=1}^L \mathbf{R}_k \quad (55)$$

como la productoria es triangular superior y la descomposición es única, el cálculo de \mathbf{R} se puede descomponer en varios pasos de tamaño finito obteniendo λ_j como la suma de las contribuciones de los $\ln \mathbf{R}_{jj}$.