Arturo Ruiz.

Cuentas para el simulador cuántico.

Expansión de $\hat{S}^4$ en términos de operadores creación y destrucción.

$$(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)^4 = aaaa + aaaa^\dagger + aaa^\dagger a + aa^\dagger aa + a^\dagger aaa$$
$$+ \overline{aaa^\dagger a^\dagger} + \overline{aa^\dagger aa^\dagger} + \overline{a^\dagger aaa^\dagger} + \overline{aa^\dagger a^\dagger a}$$
$$+ \underline{a^\dagger aa^\dagger a} + \underline{a^\dagger a^\dagger aa}$$
$$+ a^\dagger a^\dagger a^\dagger a + a^\dagger a^\dagger aa^\dagger + a^\dagger aa^\dagger a^\dagger + aa^\dagger a^\dagger a^\dagger$$
$$+ a^\dagger a^\dagger a^\dagger a^\dagger$$

h.c.

$$a^3 a^\dagger = a^2(1+a^\dagger a) = a^2 + a^2 a^\dagger a$$
$$= a^2 + a(1+a^\dagger a)a$$
$$= a^2 + a^2 + aa^\dagger a^2$$
$$= 2a^2 + (1+a^\dagger a)a^2$$
$$= 3a^2 + a^\dagger a^3.$$

$$a^2 a^\dagger a = 2a^2 + a^\dagger a^3$$
$$aa^\dagger a^2 = a^2 + a^\dagger a^3$$

$$aaa^\dagger a^\dagger = a(1+a^\dagger a)a^\dagger = aa^\dagger + aa^\dagger aa^\dagger$$
$$= 1+a^\dagger a + (1+a^\dagger a)aa^\dagger$$
$$= 1+a^\dagger a + aa^\dagger + a^\dagger a^2 a^\dagger$$
$$= 2(1+a^\dagger a) + a^\dagger a(1+a^\dagger a)$$
$$= 2(1+a^\dagger a) + a^\dagger a + a^\dagger(1+a^\dagger a)a$$
$$= 2+4a^\dagger a + a^{\dagger 2}a^2$$

$$aa^\dagger aa^\dagger = 1+3a^\dagger a + a^{\dagger 2}a^2$$
$$a^\dagger aaa^\dagger = 2a^\dagger a + a^{\dagger 2}a^2$$
$$a^\dagger aa^\dagger a = a^\dagger a + a^{\dagger 2}a^2$$
$$aa^\dagger aa^\dagger = aa^\dagger(1+a^\dagger a)$$
$$= aa^\dagger + aa^{\dagger 2}a = 1+a^\dagger a + aa^{\dagger 2}a$$

Reemplazando todo:

$$(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)^4 = a^4 + (3a^2+a^\dagger a^3) + (2a^2+a^\dagger a^3) + (a^2+a^\dagger a^3) + a^\dagger a^3$$
$$+ a^{\dagger 4} + (3a^{\dagger 2}+a^{\dagger 3}a) + (2a^{\dagger 2}+a^{\dagger 3}a) + (a^{\dagger 2}+a^{\dagger 3}a) + a^{\dagger 3}a$$
$$+ (2+4a^\dagger a + a^{\dagger 2}a^2) + (1+3a^\dagger a + a^{\dagger 2}a^2) + (2a^\dagger a + a^{\dagger 2}a^2)$$
$$+ (a^\dagger a + a^{\dagger 2}a^2) + a^{\dagger 2}a^2 + (2a^\dagger a + a^{\dagger 2}a^4)$$

$$\boxed{(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)^4 = a^4 + 4a^\dagger a^3 + 4a^{\dagger 3}a + 6a^{\dagger 2}a^2 + a^{\dagger 4} + 6a^2 + 6a^{\dagger 2} + 12a^\dagger a + 3}$$

↳ Double checked!

Arturo Ruiz

$$\boxed{(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)^4 = a^4 + 4a^\dagger a^3 + 4a^{\dagger 3}a + 6a^{\dagger 2}a^2 + a^{\dagger 4} + 6a^2 + 6a^{\dagger 2} + 12a^\dagger a + 3}$$

Podemos separarlo en tres partes (tiramos el término escalar):

$$\hat{x}^4 = \hat{O}_4 + \hat{O}_2 + \hat{O}_0$$

Siendo $\hat{O}_k$ la parte del operador que cambia el número de excitaciones en k ($\hat{O}|n\rangle \propto |n \pm k\rangle$).

$$\hat{O}_4 = a^4 + a^{\dagger 4}$$

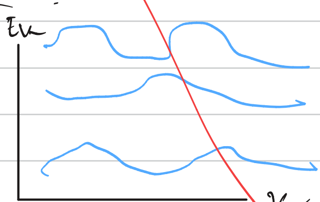
$$\hat{O}_2 = 4(a^{\dagger 3}a + a^\dagger a^3) + 6(a^2 + a^{\dagger 2})$$

$$\hat{O}_0 = \underbrace{6a^{\dagger 2}a^2}_{\text{No nulo sólo para } n \geq 2} + 12a^\dagger a$$

~~Transformación al espacio k:~~

~~Sean $\{b_n, b_n^\dagger\}$ operadores de creación y destrucción en el qubit j:~~

$$\boxed{b_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x_j} e^{ikx_j} b_{x_j}^\dagger}$$



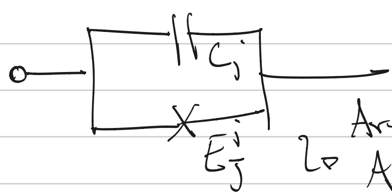
bandas.

Desarrollo del single transmon.

Consideremos el caso de los qubits sin acoplamiento al modo de cavidad:

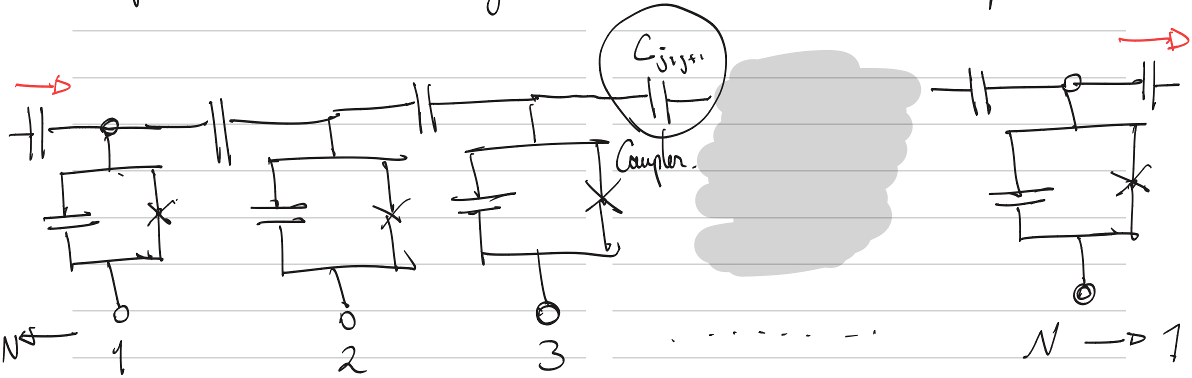
$$\boxed{\hat{H}_j = 4E_C^j \hat{n}_j^2 - E_J^j \cos \hat{\delta}_j}$$

Con $E_C^j = \dfrac{e^2}{C_j}$, $E_J^j = \dfrac{\hbar}{2e} I_c^j$



→ Artificial Atom.

Consideremos un array de estos acoplados capacitivamente a primeros vecinos y con condiciones de contorno periódicas:



El hamiltoniano de interacción por acople capacitivo es:

$$\boxed{\hat{H}_I^{j,j+1} = g_C^{j,j+1} \hat{n}_j \hat{n}_{j+1}}$$

Con $g_C^j = \dfrac{4e^2 C_{j,j+1}}{C_j \cdot C_{j+1}}$ → Capacitancia del coupler

$$g_C^j = \frac{4 E_C^j E_C^{j+1}}{E_C^{j,j+1}}$$

En términos del formalismo de segunda cuantización:

$$\hat{\varphi} = \left(\frac{2E_C}{E_J}\right)^{1/4} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}),$$

$$\hat{n} = \frac{i}{2}\left(\frac{E_J}{2E_C}\right)^{1/4} (\hat{b}^\dagger - \hat{b}).$$

(Blais)

Por lo que:

$$\boxed{\hat{H}_I^{j,j+1} = -\tilde{g}_C^{j,j+1} (b_j^\dagger - b_j)(b_{j+1}^\dagger - b_{j+1})}$$

Con: $\tilde{g}_C^{j,j+1} = \left(\dfrac{E_J^j}{2E_C^j}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\dfrac{E_J^{j+1}}{2E_C^{j+1}}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \dfrac{E_C^j E_C^{j+1}}{E_C^{j,j+1}}$

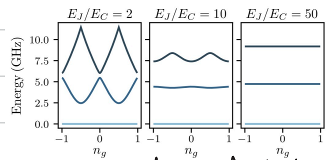
↳ Further simplification to be done.

Por tanto, el hamiltoniano total es:

$$\boxed{\hat{H}_{chain} = \sum_j \left(\hat{H}_j - g_c^{j,j+1} (b_j^\dagger - b_j)(b_{j+1}^\dagger - b_{j+1}) \right)}$$

Consideremos la aproximación en el régimen transmón ($E_J >> E_C$) la cual permite expresar

$$\cos\hat{\delta} \approx 1 - \frac{\hat{\delta}^2}{2} + \frac{\hat{\delta}^4}{24}$$



Lo consideran para el ruido de carga en el transmon.

De tal forma que: $\boxed{\hat{H}_j \approx \hbar\omega_j^0 b_j^\dagger b_j - \frac{E_C^j}{12}(b_j^\dagger + b_j)^4}$

Con $\hbar\omega_j^0 = \sqrt{8E_C^j E_J^j}$

Expandiendo y tirando términos constantes (y definiendo $\hbar\lambda_j = \frac{E_C^j}{12}$)

$$\hat{H}_j = \hbar\omega_j^0 b_j^\dagger b_j - \hbar\lambda_j[\hat{O}_4^j + \hat{O}_2^j + \hat{O}_0^j].$$

Con $\hat{O}_\ell$ definidos previamente.

TIGHT-BINDING.

Reemplazamos $b_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_j e^{ikj} b_j^\dagger \rightarrow \boxed{b_j^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_k e^{-ikj} b_k^\dagger}$

Y además consideraremos que los transmon tienen parámetros homogéneos:

$$\boxed{\begin{matrix} E_C^j = E_C \\ E_J^j = E_J \end{matrix}, \quad \forall j}$$

1er caso: red con hopping constante. $\rightarrow$ $E_C^{j,j+1} = E_g, \forall j$; $g_c^{j,j+1} = g_c$

Sean $|\psi_j^\ell\rangle$ tal que: $\hat{H}_j|\psi_j^\ell\rangle = \varepsilon^\ell|\psi_{j\ell}\rangle$

Entonces es posible encontrar el hamiltoniano en espacio k mediante:

$$H_{\mathbf{s}'L',\mathbf{s}L}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{R}} \langle \mathbf{0}, \mathbf{s}', L' | H | \mathbf{R}, \mathbf{s}, L \rangle e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}+\mathbf{s}-\mathbf{s}')}$$

$$S_{\mathbf{s}'L',\mathbf{s}L}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{R}} \langle \mathbf{0}, \mathbf{s}', L' | \mathbf{R}, \mathbf{s}, L \rangle e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}+\mathbf{s}-\mathbf{s}')}$$

[Notas topología Jorge].

$$\sum_{\mathbf{s},L} \Big(H_{\mathbf{s}'L',\mathbf{s}L}(\mathbf{k}) - \varepsilon_{\mathbf{k}n} S_{\mathbf{s}'L',\mathbf{s}L}(\mathbf{k}) \Big) c^{\mathbf{k}n}_{\mathbf{s}L} = 0$$

Bastante cuestionable.

Dado que $\boxed{\langle \psi_j^{l} | \psi_j^{l'} \rangle = \delta_{ll'}}$ (ortogonalidad de orbitales; independencia de variables en sitios distintos).

Producto interno en todas las variables.

Vemos que:

$$\hat{H}_{total} = \sum_{\vec{k}} \hat{H}(k),$$

Con

$$\hat{H}(k)_{l,l'} = \sum_{j} \langle \psi_0^l | \hat{H} | \psi_j^{l'} \rangle e^{ikj}$$

$$\hat{H}_{l,l'}(k) = \varepsilon_l \delta_{l,l'} \langle \psi_0^l | g_c (b_1^+ - b_1)(b_2^+ - b_2) | \psi_1^{l'} \rangle e^{ik}$$
$$- \langle \psi_0^l | g_c (b_1^+ - b_1)(b_N^+ - b_N) | \psi_N^{l'} \rangle e^{-ik}$$

Definimos. $\xi_{l,l'} = \langle \psi_j^l | (b_j^+ - b_j)(b_{j+1}^+ - b_{j+1}) | \psi_{j+1}^{l'} \rangle g_c$

Entonces: $\boxed{\hat{H}_{l,l'}(k) = \varepsilon_l \delta_{l,l'} - \xi_{l,l'} e^{ik} - \xi^*_{l,l'} e^{-ik}}$

Hamiltoniano tight-binding en espacio k.

Calculamos el elemento de matriz:

$$\langle \psi_j^{l} | (b_j^\dagger - b_j)(b_{j+1}^\dagger - b_{j+1}) | \psi_{j+1}^{l'} \rangle$$

$$= \langle \psi_j^{l} | b_j^\dagger b_{j+1}^\dagger | \psi_{j+1}^{l'} \rangle - \langle \psi_j^{l} | b_j^\dagger b_{j+1} | \psi_{j+1}^{l'} \rangle$$

$$- \langle \psi_j^{l} | b_j b_{j+1}^\dagger | \psi_{j+1}^{l'} \rangle + \langle \psi_j^{l} | b_j b_{j+1} | \psi_{j+1}^{l'} \rangle .$$

↳ **¿Cómo hago que esto no sea cero?**

↳ Tengo que aplicar alguna condición de contorno sobre mis variables: ¿Q constante?
¿Cómo varía Q mientras recorro el circuito?

Cosas para ver ahora:

1.- ~~Ver espectro transmon exacto y comparar con aproximación~~ → barrer parámetros?

2.- ~~Hacer lo mismo en función de la dimensión de truncamiento~~

3.- ~~Repetir lo mismo pero en el sistema completo~~ → ver bandas

4.- Ver la descomposición de las bandas en función de los orbitales localizados.

Actualización:
Después de hablar con Leandro, nos dimos cuenta que hay que plantear primero el Lagrangiano clásico y luego realizar la cuantización canónica. Después de eso recién podemos ver qué variables son pares conjugados.