Insper

Projeto – Curvas Parametrizadas

Matemática Multivariada

Professor: Thiago Tolosa

Adney Costa Moura

Ricardo Rodrigues Mourão Filho

Ykaro de Sousa Andrade

Sumário

Contextualização

O intuito desse projeto é o estudo da parametrização de uma curva que pode ser desenhada através de um brinquedo chamado *Spirograph*. Esse dispositivo de desenho produz curvas matemáticas conhecidas como hipotrocóides e epitrocóides, e foi inventado (versão comercializada como brinquedo) pelo engenheiro britânico Denys Fisher e vendido pela primeira vez em 1965.

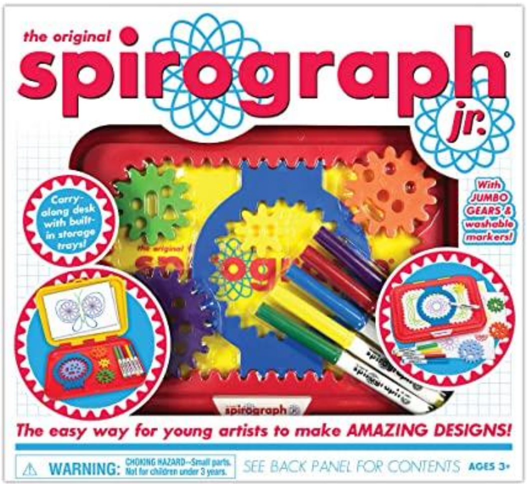


Figura 1-Spirograph comercializado como brinquedo

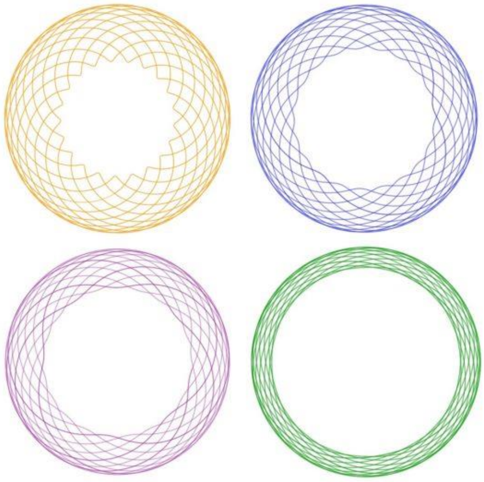


Figura 2-Curvas feitas com o spirograph

A curva sorteada para o nosso grupo foi:

$$\gamma(t) = \left(4\cos t - 6\cos\left(\frac{4t}{3}\right), 4\,\mathrm{sen}\, t - 6\,\mathrm{sen}\left(\frac{4t}{3}\right)\right), \qquad t \in [0,6\pi[$$

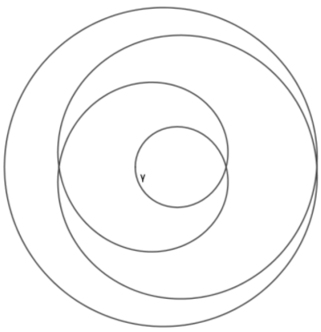


Figura 3-Desenho da curva

Dada a curva nós podemos começar a estudar sua parametrização. Nosso objetivo será dividido em Pontos Notáveis, pontos de auto interseção e pontos onde a derivada é zero, Área e comprimento.

Embasamento teórico

Para a realização dos cálculos nós iremos utilizar artifícios trigonométricos e algébricos não triviais. Portanto, preparamos um pequeno embasamento teórico para servir de auxílio nos cálculos matemáticos que serão realizados nos tópicos seguintes.

- $sen(a+b) = sen(a)\cos(b) + \cos(a)\,sen(b) \rightarrow$ Seno da soma

- $sen(a-b) = sen(a)\cos(a) - \cos(a)\,sen(b) \rightarrow$ Seno da subtração

- $sen^2(x) = \frac{(1-\cos(2x))}{2}$

- $sen(2a) = 2sen(a)\cos(a) \rightarrow$ Arco duplo seno

- $sen(2a) = 2sen(a)\cos(a) \rightarrow$ Arco duplo seno

- $cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 \rightarrow$ Arco duplo cosseno

- $sen(a) + sen(b) = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right) cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \rightarrow$ Soma de senos

- $sen(a) - sen(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) sen\left(\frac{a-b}{2}\right) \rightarrow$ Subtração de senos

- $cos(a) + cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \rightarrow$ Soma de cossenos

- $cos(a) - cos(b) = -2\,\mathrm{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right) sen\left(\frac{a-b}{2}\right) \rightarrow$ Subtração de cossenos

Pontos Notáveis

- **Pontos de auto interseção**

Um ponto de auto interseção ocorre quando temos dois valores distintos para o parâmetro t e obtemos um mesmo valor como resposta. Matematicamente temos: $\gamma(u) = \gamma(v)$, sendo $u \neq v$ e pertencentes ao intervalo $[0,6\pi[$. Substituiremos então u e v em $\gamma(t)$, e tentaremos achar os pontos de auto interseção da nossa curva.

$$\begin{cases} \gamma(u) = \left(4\cos u - 6\cos\left(\frac{4u}{3}\right), 4\,\mathrm{sen}\,u - 6\,\mathrm{sen}\left(\frac{4u}{3}\right)\right) \\ \gamma(v) = \left(4\cos v - 6\cos\left(\frac{4v}{3}\right), 4\,\mathrm{sen}\,v - 6\,\mathrm{sen}\left(\frac{4v}{3}\right)\right) \end{cases}$$

Igualando as componentes, x e y, da nossa curva para os parâmetros u e v temos:

$$\begin{cases} 4\cos u - 6\cos\left(\frac{4u}{3}\right) = 4\cos v - 6\cos\left(\frac{4v}{3}\right) \quad (I) \\ 4\,\mathrm{sen}\,u - 6\,\mathrm{sen}\left(\frac{4u}{3}\right) = 4\,\mathrm{sen}\,v - 6\,\mathrm{sen}\left(\frac{4v}{3}\right) \quad (II) \end{cases}$$

De (I) temos:

$$4\,(\cos u - \cos v) = 6\left(cos\left(\frac{4u}{3}\right) - cos\left(\frac{4v}{3}\right)\right)$$

Utilizando a subtração de cossenos temos *:

$$4\left(-2sen\left(\frac{u+v}{2}\right)sen\left(\frac{u-v}{2}\right)\right) = 6\left(-2sen\left(\frac{\frac{4u}{3}+\frac{4v}{3}}{2}\right)sen\left(\frac{\frac{4u}{3}-\frac{4v}{3}}{2}\right)\right) \therefore$$

$$\boxed{2\left(sen\left(\frac{u+v}{2}\right)sen\left(\frac{u-v}{2}\right)\right) = 3\left(sen\left(\frac{2(u+v)}{3}\right)sen\left(\frac{2(u-v)}{3}\right)\right) \quad (III)}$$

De (II) temos:

$$4\,(\mathrm{sen}\,u - \mathrm{sen}\,v) = 6\left(sen\left(\frac{4u}{3}\right) - sen\left(\frac{4v}{3}\right)\right)$$

Utilizando a subtração de senos temos *:

$$4\left(2cos\left(\frac{u+v}{2}\right)sen\left(\frac{u-v}{2}\right)\right) = 6\left(2cos\left(\frac{\frac{4u}{3}+\frac{4v}{3}}{2}\right)sen\left(\frac{\frac{4u}{3}-\frac{4v}{3}}{2}\right)\right) \therefore$$

$$2\left(cos\left(\frac{u+v}{2}\right)sen\left(\frac{u-v}{2}\right)\right) = 3\left(cos\left(\frac{2(u+v)}{3}\right)sen\left(\frac{2(u-v)}{3}\right)\right) \quad (IV)$$

Chamando $u+v=A$ e $u-v=B$, temos as equações (III) e (IV) respectivamente:

$$\begin{cases} 2\cdot \text{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\cdot \text{sen}\left(\frac{B}{2}\right) = 3\cdot \text{sen}\left(\frac{2A}{3}\right)\cdot \text{sen}\left(\frac{2B}{3}\right) \\ 2\cdot \cos\left(\frac{A}{2}\right)\cdot \text{sen}\left(\frac{B}{2}\right) = 3\cdot \cos\left(\frac{2A}{3}\right)\cdot \text{sen}\left(\frac{2B}{3}\right) \end{cases}$$

Supondo sen $\left(\frac{B}{2}\right) \neq 0$ e sen $\left(\frac{B}{2}\right) \neq 0$ (voltaremos depois para nesse passo para realizar as contas com o caso em que sen $\left(\frac{B}{2}\right) = 0$ e sen $\left(\frac{B}{2}\right) = 0$), nós podemos dividir (III) por (IV), logo:

$$\frac{sen\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)} = \frac{sen\left(\frac{2A}{3}\right)}{\cos\left(\frac{2A}{3}\right)} \therefore$$

$$sen\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{2A}{3}\right) = \cos\left(\frac{A}{2}\right)sen\left(\frac{2A}{3}\right) \therefore$$

$$sen\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{2A}{3}\right) - sen\left(\frac{2A}{3}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right) = 0$$

Utilizando o seno da subtração temos:

$$sen\left(\frac{A}{2}-\frac{2A}{3}\right) = 0 \therefore$$

$$sen\left(-\frac{A}{6}\right) = 0$$

Note que temos um ângulo cujo seno é zero, portanto ele deve estar contido na sequência $n\pi$, sendo n um número inteiro. Lembremos também que $A = u+v$, portanto temos:

$$-\frac{u+v}{6} = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$u+v = -6\cdot n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Dado que os parâmetros da nossa curva estão contidos no intervalo $[0,6\pi[$, devemos ter que a soma dos parâmetros u e v deve estar contida em $[0,12\pi[$, portanto n só poderá assumir o valor de -1. Temos, portanto:

$$\boxed{u+v = 6\pi \quad (V)}$$

Substituindo (V) em (IV) devemos ter:

$$2 \cdot \cos\left(\frac{6\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right) = 3 \cdot \cos\left(\frac{12\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2B}{3}\right) \therefore$$

$$2\cos(\overset{-1}{3\pi})\, sen\left(\frac{B}{2}\right) = 3\cos(\overset{1}{4\pi})\, sen\left(\frac{2B}{3}\right) \therefore$$

$$-2sen\left(\frac{B}{2}\right) = 3sen\left(\frac{2B}{3}\right) \therefore$$

$$-2sen\left(\frac{B}{2}\right) = 2sen\left(\frac{2B}{3}\right) + sen\left(\frac{2B}{3}\right) \therefore$$

$$-2\left(sen\left(\frac{B}{2}\right) + sen\left(\frac{2B}{3}\right)\right) = sen\left(\frac{2B}{3}\right)$$

Utilizando a soma de senos temos:

$$-4sen\left(\frac{7B}{12}\right)\cos\left(-\frac{B}{12}\right) = sen\left(\frac{2B}{3}\right)$$

A fim de simplificar os cálculos nós podemos fazer uma mudança de variável. Chamaremos $\frac{B}{12} = x$. Sabemos também que a função cosseno é uma função par e com isso devemos ter $\cos(-a) = \cos(a)$. Juntando essas informações devemos ter:

$$-4sen(7x)\cos(x) = sen(8x) \therefore$$

$$-4sen(3x + 4x)\cos(x) = sen(2 \cdot 4x)$$

Utilizando o seno da soma e o arco duplo do seno devemos ter:

$$-4\big(sen(4x)\cos(3x) + \cos(4x)\,sen(3x)\big) \cdot \cos(x) = 2sen(4x)\cos(4x)$$

Dividindo ambos os lados por $2sen(4x)\cos(4x)$:

$$-2\left(\frac{\cos(3x)\cos(x)}{\cos(4x)} + \frac{sen(3x)\cos(x)}{sen(4x)}\right) = 1 \therefore$$

$$\frac{2\cos(3x)\cos(x)}{\cos(4x)} + \frac{2sen(3x)\cos(x)}{sen(4x)} = -1$$

Note que nos numeradores das frações nós temos uma multiplicação de cossenos e na segunda fração temos uma multiplicação de seno com cosseno. O formato como estão organizados parece um pouco familiar? Sim! Note que na primeira fração nós temos o resultado de uma soma de cossenos e na segunda o resultado de uma soma de senos.

$$\begin{cases} 2\cos(3x)\cos(x) = \cos(4x) + \cos\,(2x) \\ 2sen(3x)\cos(x) = sen(4x) + \text{sen}(2\text{x}) \end{cases}$$

Voltando a nossa equação e substituindo os valores encontrados temos:

$$\frac{\cos(4x) + \cos\,(2x)}{\cos(4x)} + \frac{sen(4x) + sen(2x)}{sen(4x)} = -1 \;\therefore$$

$$\left(\frac{\cancel{\cos(4x)}}{\cancel{\cos(4x)}} + \frac{\cos(2x)}{\cos(4x)}\right) + \left(\frac{\cancel{sen(4x)}}{\cancel{sen(4x)}} + \frac{sen(2x)}{sen(4x)}\right) = -1 \;\therefore$$

$$1 + \frac{\cos(2x)}{\cos(4x)} + 1 + \frac{sen(2x)}{sen(4x)} = -1 \;\therefore$$

$$\frac{\cos(2x)}{\cos(2\cdot 2x)} + \frac{sen(2x)}{sen(2\cdot 2x)} = -3$$

Utilizando o arco duplo, tanto seno como cosseno temos:

$$\frac{\cos(2x)}{2\cos^2(2x) - 1} + \frac{\cancel{sen(2x)}}{2\cancel{sen(2x)}\cos(2x)} = -3 \;\therefore$$

$$\frac{\cos(2x)}{2\cos^2(2x) - 1} + \frac{1}{2\cos(2x)} = -3 \;\therefore$$

Multiplicando os dois lados da igualdade por $\left(2\cos^2(2x) - 1\right)\cdot(2\cos(2x))$ para deixarmos todos os termos com denominador igual a 1 temos:

$$\cos(2x)\cdot(2\cos(2x)) + (2\cos^2(2x) - 1) = -3\cdot(2\cos^2(2x) - 1)\cdot(2\cos\,(2x)) \;\therefore$$

$$2\cos^2(2x) + 2\cos^2(2x) - 1 = -12\cos^3(2x) + 6\cos(2x) \;\therefore$$

$$12\cos^3(2x) + 4\cos^2(2x) - 6\cos(2x) - 1 = 0$$

Utilizando outra mudança de variável, nós podemos chamar $\cos(2x) = k$. Logo:

$$12k^3 + 4k^2 - 6k - 1 = 0$$

Note que temos uma equação do 3° grau, teremos, portanto, 3 raízes para descobrir. Através do Jupyter Notebook foi possível extrair as raízes desse polinômio. O passo a passo para achar essas raízes está explicado no vídeo enviado juntamente com este relatório. Logo, temos as seguintes raízes:

$$\begin{cases} k_1 = -0{,}8194139999996956 \\ k_2 = -0{,}15791699999998793 \\ k_3 = 0{,}6439990000004026 \end{cases}$$

Com posse das raízes nós podemos achar o valor de B. Não esqueça que nossa variável de interesse é $u - v = B$, portanto nós podemos ir voltando de acordo com nossas variáveis intermediarias que foram criadas ao longo do processo. Temos que $k = \cos(2x)$, logo:

$$\begin{cases} k_1 = -0{,}8194139999996956 = \cos(2x_1) \\ k_2 = -0{,}17 = \cos(2x_2) \\ k_3 = 0{,}6439990000004026 = \cos(2x_3) \end{cases}$$

Utilizando a função inversa do cosseno, arco cosseno, temos:

$$\begin{cases} 2x_1 = arcos(-0{,}8194139999996956) \\ 2x_2 = arcos(-0{,}17) \\ 2x_3 = arcos(0{,}6439990000004026) \end{cases} \therefore$$

$$\begin{cases} 2x_1 = arcos(-0{,}8194139999996956) \\ 2x_2 = arcos(-0{,}17) \\ 2x_3 = arcos(0{,}6439990000004026) \end{cases}$$

Para não perdermos exatidão com nossas contas, faremos a resolução das próximas contas via Python com o auxílio do Jupyter Notebook. Portanto leitor, não se preocupe com a perda de informação com o restante dos cálculos.

$$\begin{cases} x_1 = 1{,}2655921351455217 \\ x_2 = 0{,}8646885767244906 \\ x_3 = 0{,}435541108515348 \end{cases}$$

Lembre-se que $\frac{B}{12} = x$. Logo, devemos ter:

$$\begin{cases} x_1 = 1{,}2655921351455217 = \dfrac{B_1}{12} \\ x_2 = 0{,}8708129979620005 = \dfrac{B_2}{12} \\ x_3 = 0{,}435541108515348 = \dfrac{B_3}{12} \end{cases} \therefore$$

$$\begin{cases} B_1 = 15{,}18710562174626 \\ B_2 = 10{,}376262920693888 \\ B_3 = 5{,}226493302184176 \end{cases}$$

Lembre-se também que $B = u - v$. Temos, portanto 3 equações com valores de $u - v$ e nós podemos montar um sistema com cada uma delas juntamente com a equação (V) e achar os valores de u e v. Para $u_1 - v_1 = B_1$

$$\begin{cases} u_1 - v_1 = 15{,}18710562174626 \\ u_1 + v_1 = 6\pi \quad (V) \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema via programação temos:

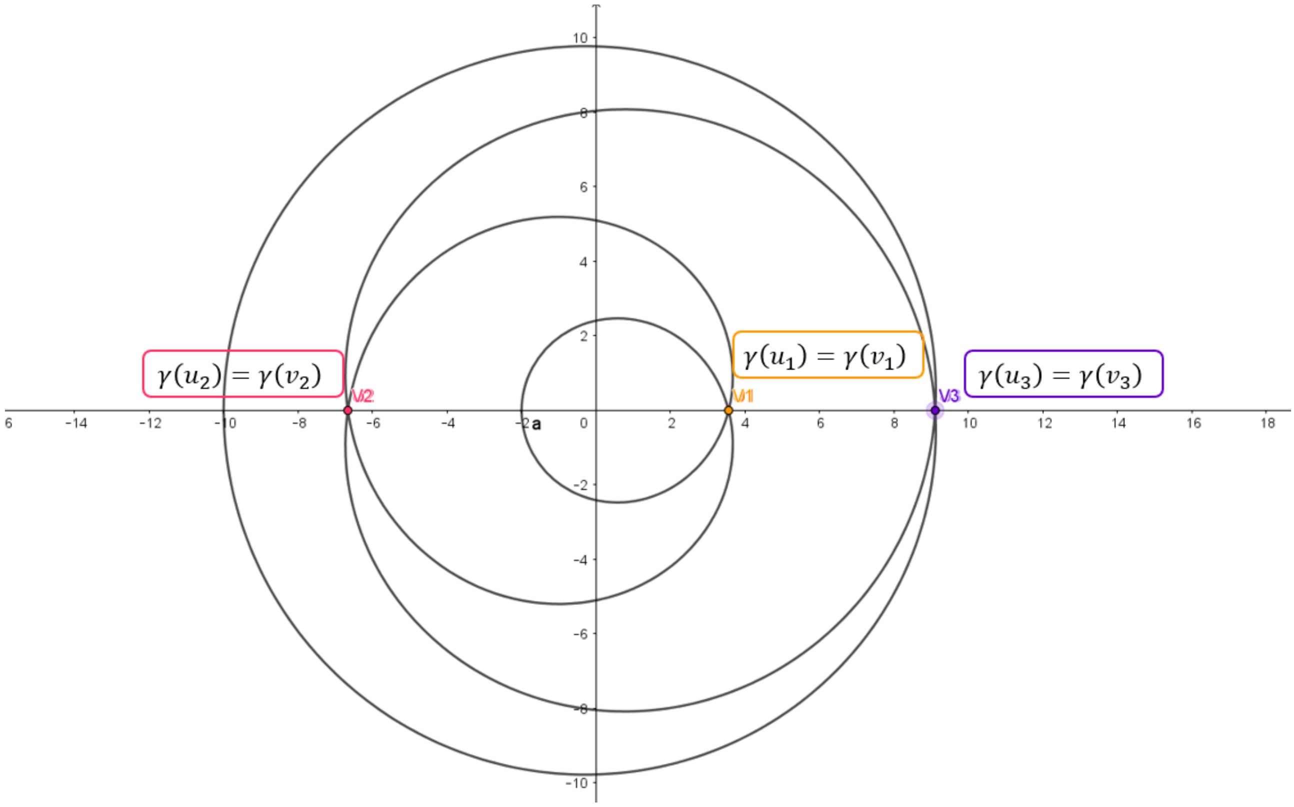
$$\begin{cases} u_1 = 17{,}01833077164151 \\ v_1 = 1{,}831225149896249 \end{cases}$$

De forma análoga resolvendo para $u_2 - v_2 = B_2$ e $u_3 - v_3 = B_3$, temos:

$$\begin{cases} u_2 = 14{,}612909421116324 \\ v_2 = 4{,}236646500422435 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_3 = 12{,}038024611861466 \\ v_3 = 6{,}811531309677291 \end{cases}$$

Substituindo os valores encontrados de u e v como parâmetros na nossa curva $\gamma(t)$ nós teremos os pontos de auto interseção.



- **<u>Pontos em que a derivada é zero</u>**

Nossa curva tem uma função que define o comportamento dela em relação ao eixo x, assim como uma função para o eixo y.

$$\gamma \ : \ \begin{cases} x = 4\cos t - 6\cos\left(\frac{4t}{3}\right) \\ y = 4\,\mathrm{sen}\, t - 6\,\mathrm{sen}\left(\frac{4t}{3}\right) \end{cases}$$

Nessa secção do projeto iremos analisar os pontos em que a derivada da nossa curva é zero, entretanto, nós podemos derivar a função em x ou em y. Quando derivamos a parte em x da nossa curva nós obteremos pontos em que a reta tangente é horizontal visto que nesse ponto nós não teremos uma inclinação em relação ao eixo x. De forma análoga, o procedimento se repete para a parte em y, porém, as retas tangentes serão verticais.

- <u>Pontos em que a reta tangente é vertical</u>

$$x = 4\cos t - 6\cos\left(\frac{4t}{3}\right) \ \therefore$$

$$\frac{dx}{dt} = -4sent + 6sen\left(\frac{4t}{3}\right) \cdot \frac{4}{3}$$

Agora que temos a derivada é necessário igualar a zero e achar os valores de t que satisfazem essa condição. Temos, portanto:

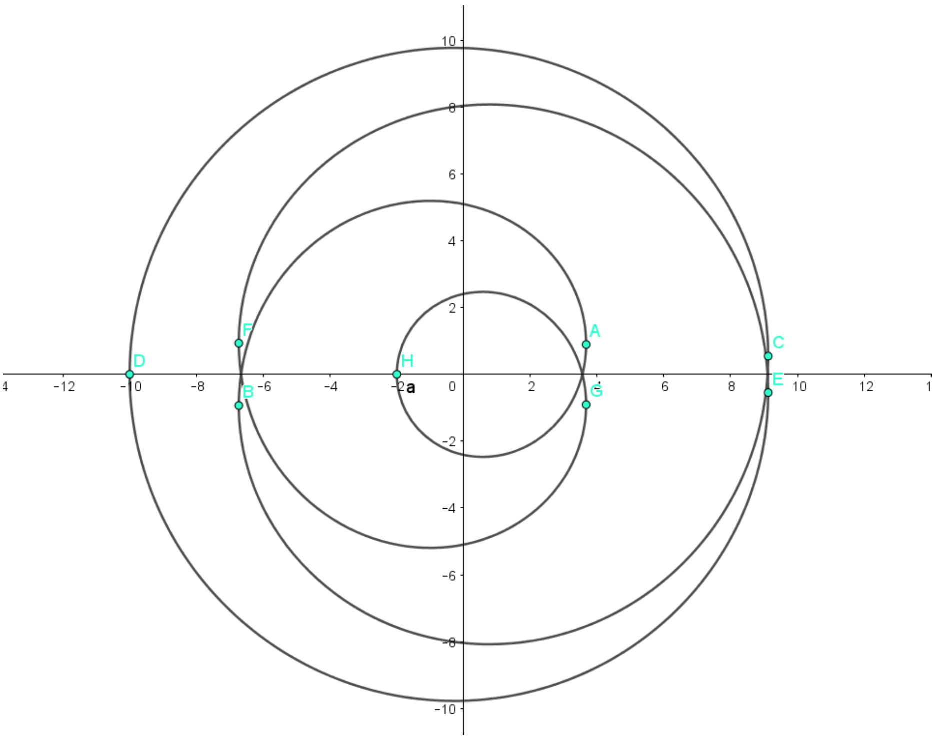
$$-4sent + 8sen\left(\frac{4t}{3}\right) = 0 \ \therefore$$

$$2sen\left(\frac{4t}{3}\right) - sent = 0$$

Considere a seguinte função $f(t) = 2sen\left(\frac{4t}{3}\right) - sent$. Para achar as raízes dessa função nós utilizaremos o método numérico explicado que será explicado no vídeo. Com ajuda da programação nós conseguimos chegar nas seguintes raízes:

$$\begin{cases} t = 0 \\ t = 2{,}0026900000000003 \\ t = 4{,}34785 \\ t = 6{,}8611 \\ t = 9{,}42478 \\ t = 11{,}988470000000001 \\ t = 14{,}501710000000001 \\ t = 16{,}846880000000002 \end{cases}$$

Colocando essas raízes como parâmetros da nossa curva temos:



- <u>Pontos em que a reta tangente é horizontal</u>

$$y = 4sent - 6sen\left(\frac{4t}{3}\right) \therefore$$

$$\frac{dy}{dt} = 4cost - 6\cos\left(\frac{4t}{3}\right) \cdot \frac{4}{3}$$

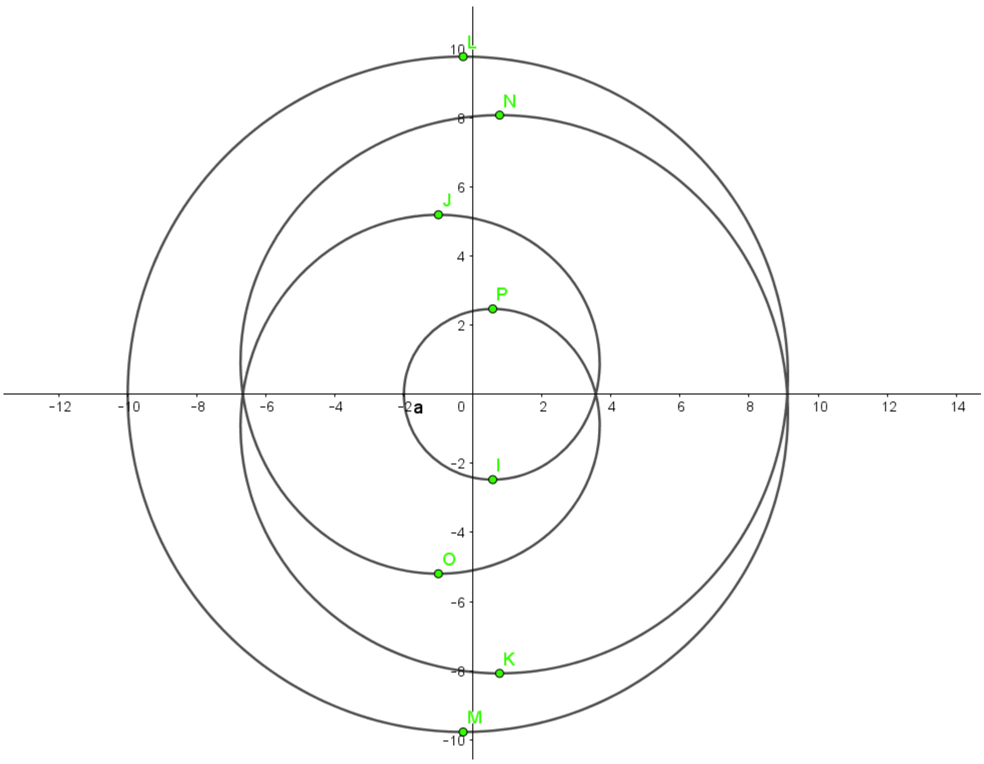
Agora que temos a derivada é necessário igualar a zero e achar os valores de t que satisfazem essa condição. Temos, portanto:

$$4cost - 8\cos\left(\frac{4t}{3}\right) = 0$$

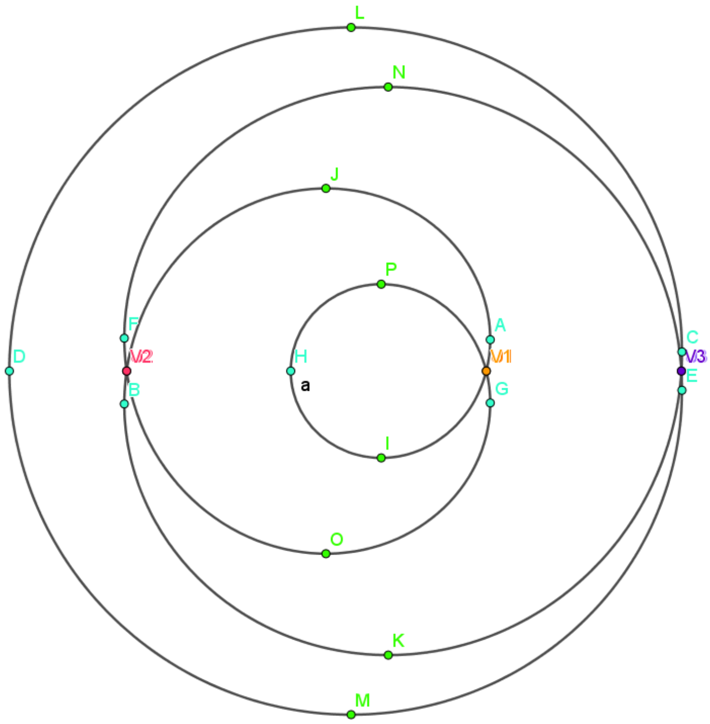
Considere a seguinte função $f(t) = 4cost - 8\cos\left(\frac{4t}{3}\right)$. Para achar as raízes dessa função nós utilizaremos o método numérico explicado que será explicado no vídeo. Com ajuda da programação nós conseguimos chegar nas seguintes raízes:

$$\begin{cases} t = 0{,}9599500000000001 \\ t = 3{,}1416000000000004 \\ t = 5{,}593500000000001 \\ t = 8{,}14039 \\ t = 10{,}709180000000002 \\ t = 13{,}256070000000001 \\ t = 15{,}707970000000001 \\ t = 17{,}88961 \end{cases}$$

Colocando essas raízes como parâmetros da nossa curva temos:



Com isso, nós conseguimos achar todos os pontos notáveis da nossa curva, sendo eles os pontos de auto interseção, pontos em que a reta tangente é horizontal e pontos onde a reta tangente é vertical. Colocando todos esses pontos encontrados na nossa curva, ficamos com a seguinte imagem:



Comprimento

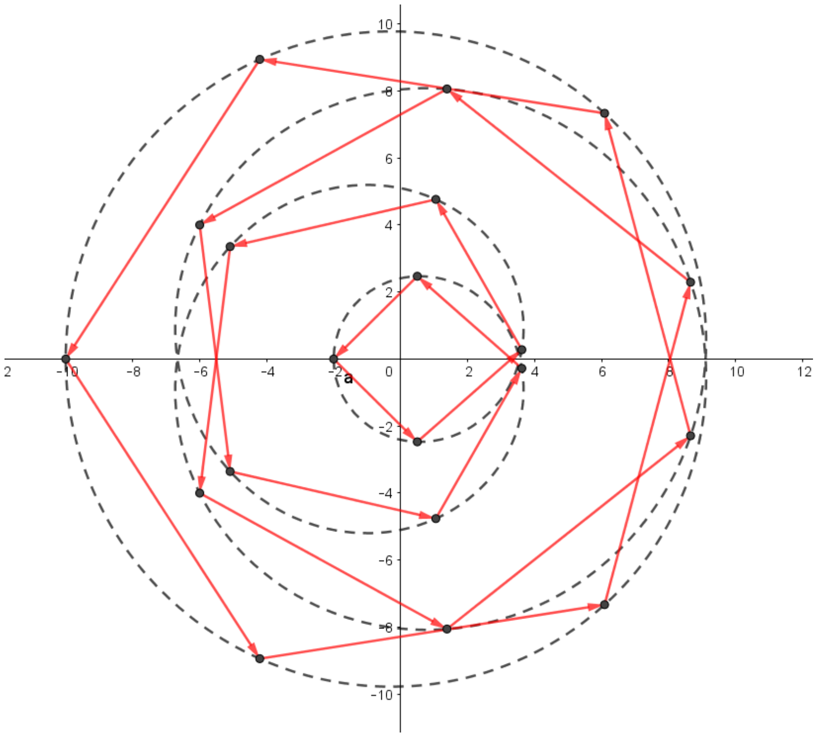
O comprimento de uma curva define a soma de pequenas retas que são formadas pela conexão de pontos espalhados pela curva, quanto maior a quantidade de pontos maior será a exatidão na hora de calcular o comprimento real da curva. Nesse estudo iremos calcular o comprimento da nossa curva de 3 maneiras diferentes, sendo elas aproximação poligonal, cálculo pela integral e através do software GeoGebra.

- **<u>Aproximação pela poligonal</u>**

Para encontrarmos o valor da curva com esse método, é preciso colocar pontos espalhados na nossa curva, ligarmos esses pontos por retas e somarmos os comprimentos dessas retas. Com isso, nós teremos um valor aproximado do tamanho real da nossa curva. A fim de entendermos melhor o funcionamento dessa técnica, vamos fracionar nosso domínio, $[0,6\pi[$, em 20 partes iguais. Feito isso, nós temos os seguintes parâmetros:

$$t \in \left\{0, \frac{3\pi}{10}, \frac{6\pi}{10}, \dots, \frac{57\pi}{10}\right\}$$

Dessa forma, nós obtemos 20 pontos sobre a nossa curva: $\gamma_1(0)$, $\gamma_2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$, $\gamma_3\left(\frac{6\pi}{10}\right)$, ..., $\gamma_{10}\left(\frac{57\pi}{10}\right)$. Colocando esses pontos sobre a nossa curva e ligando cada ponto com seu sucessor por uma reta temos:



Observando a figura nota-se que a quantidade de pontos não foi suficiente para conseguirmos gerar um polígono fiel a nossa curva. Portanto, com auxílio de programação explicada no vídeo, nós iremos fracionar nosso domínio em 1.000 partes iguais e calcular a soma dos comprimentos de retas formados. Com isso, obtivemos o seguinte resultado:

$$L \approx 160{,}378$$

- **<u>Obtenção da integral</u>**

Utilizando a fórmula do comprimento nós conseguimos achar o comprimento da nossa curva. Para isso nós precisamos fazer:

$$L = \int_0^{6\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \; dt$$

Nós já calculamos as derivadas da nossa curva quando fomos calcular os pontos em que a reta tangente é horizontal ou vertical. Portanto, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4sen(t) + 8sen\left(\dfrac{4t}{3}\right) \\ \dfrac{dy}{dt} = 4\cos(t) - 8\cos\left(\dfrac{4t}{3}\right) \end{cases}$$

Elevando ambos os lados da igualdade ao quadrado, temos:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 = 16sen^2(t) + 64sen^2\left(\dfrac{4t}{3}\right) - 64sen(t)sen\left(\dfrac{4t}{3}\right) \\ \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 = 16\cos^2(t) + 64\cos^2\left(\dfrac{4t}{3}\right) - 64\cos(t)\cos\left(\dfrac{4t}{3}\right) \end{cases}$$

Somando as equações:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 16\overbrace{(sen^2(t) + \cos^2(t))}^{1} + 64\overbrace{\left(sen^2\left(\frac{4t}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{4t}{3}\right)\right)}^{1} - 64\left(\cos(t)\cos\left(\frac{4t}{3}\right) + sen(t)sen\left(\frac{4t}{3}\right)\right)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 80 - 64\underbrace{\left(\cos(t)\cos\left(\frac{4t}{3}\right) + sen(t)sen\left(\frac{4t}{3}\right)\right)}_{\cos(a-b)}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 80 - 64\cos\left(\frac{4t}{3} - t\right)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 80 - 64\cos\left(\frac{t}{3}\right)$$

Substituindo na equação do comprimento, temos:

$$L = \int_0^{6\pi} \sqrt{80 - 64\cos\left(\frac{t}{3}\right)}\, dt$$

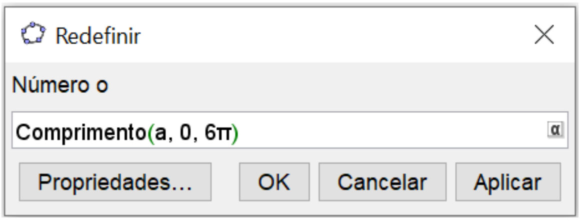
Essa integral não pode ser feita de forma analítica, então resolveremos ela de forma numérica. Com auxílio da programação, explicada em vídeo, obtivemos o seguinte resultado:

$$L \approx 160{,}378$$

- **<u>GeoGebra</u>**

Calculando o comprimento com o auxílio do GeoGebra, nós obtemos, aproximadamente, o mesmo resultado dos outros dois métodos utilizados para o cálculo do comprimento da nossa curva. Observe o resultado nas figuras abaixo:

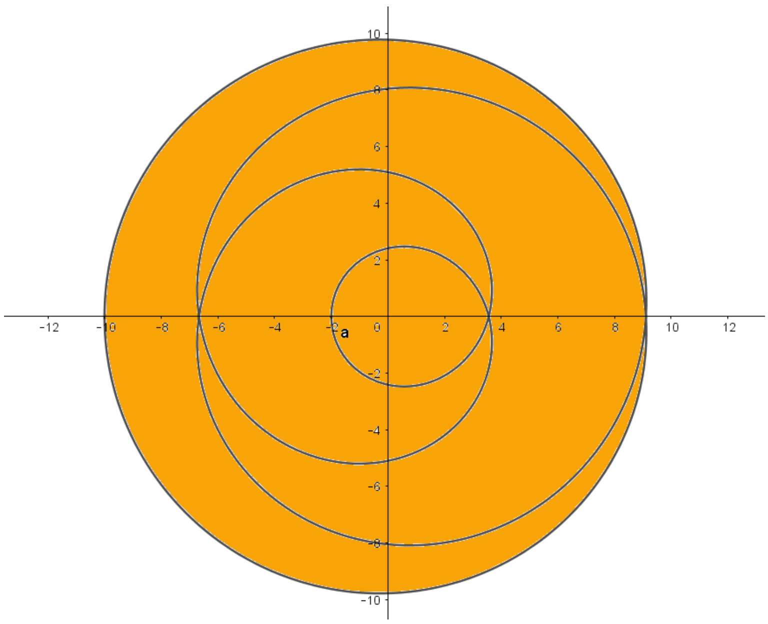
$$a: \left.\begin{array}{l} x = 4\cos(t) - 6\cos\left(4 \cdot \frac{t}{3}\right) \\ y = 4\,\mathrm{sen}(t) - 6\,\mathrm{sen}\left(4 \cdot \frac{t}{3}\right) \end{array}\right\} \quad 0 \le t \le 18.85$$



Comprimento = 160.38

Área

Iremos agora calcular a área delimitada pela nossa curva com os eixos ordenados. Embaixo podemos ver a área da nossa curva pintada em laranja:

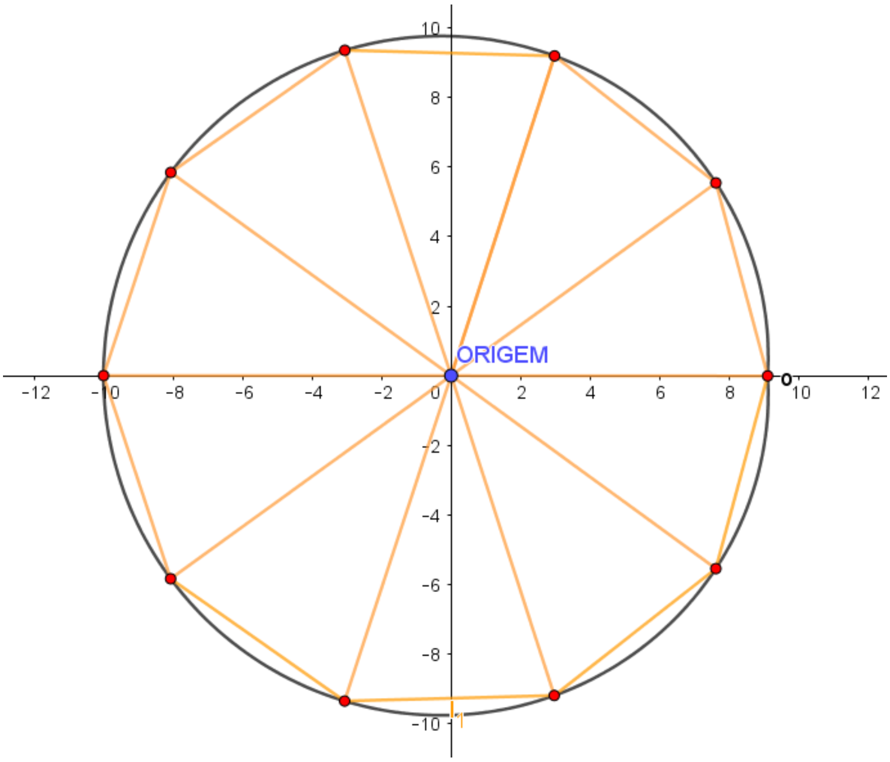


Nós calcularemos a área da nossa curva utilizando dois métodos distintos, sendo eles o método de aproximação por figuras mais simples e utilizando a forma analítica.

- **<u>Aproximação por figuras mais simples</u>**

Para calcular a área da nossa curva, nós precisamos primeiro tirar os traços internos a ela para que não corramos o risco de contar a mesma área duas vezes. Fracionaremos também o laço restante em vários pontos para, posteriormente, formamos as figuras geométricas que nos ajudarão no cálculo da área.

Para que tenhamos apenas o laço externo da nossa curva nós mudaremos seu intervalo, que agora será $t \in [6{,}811; 12{,}038]$, que são os parâmetros do nosso ponto de auto intersecção mais externo. Fracionaremos nosso novo intervalo em 10 partes iguais. Feito isso, nós formaremos pequenos triângulos, ligando cada ponto formado com seu sucessor e ligando cada ponto a origem do sistema de coordenadas, o ponto $(0{,}0)$. Feito isso, nós ficaremos com a seguinte figura:



Basta agora calcularmos a área de cada triangulo formado e assim obteremos um valor aproximado da área real da nossa curva. Com ajuda da programação, método explicado no vídeo, nós iremos fracionar nosso intervalo em 1000 e calcular a área de todos os triângulos formados. O resultado obtido após esse processo foi de:

$$Área \approx 295{,}508$$

- **Determinação analítica**

Para obtermos o valor da área, precisamos calcular a seguinte integral:

$$A = \int_{t_i}^{t_f} y(t) \cdot \left(x'(t)\right) dt$$

Sendo t_i e t_f, os valores dos parâmetros do ponto de intersecção mais externo da nossa curva. Como feito no cálculo da área por figuras mais simples, nós vimos que esse intervalo é $t \in [6{,}811; 12{,}038]$, portanto temos $t_i = 6{,}811$ e $t_f = 12{,}038$. Já calculamos também o valor de $x'(t)$. Nossa integral ficará então assim:

$$A = \int_{6,811}^{12,038} \left(4sen(t) - 6sen\left(\frac{4t}{3}\right)\right) \cdot \left(-4sen(t) + 8sen\left(\frac{4t}{3}\right)\right) dt \;\; \therefore$$

$$A = \int_{6,811}^{12,038} -16sen^2(t) + 32sen(t)sen\left(\frac{4t}{3}\right) + 24sen(t)sen\left(\frac{4t}{3}\right) - 48sen^2\left(\frac{4t}{3}\right)\, dt \;\; \therefore$$

$$A = \int_{6,811}^{12,038} -16sen^2(t) + 56\left(\cos\left(\frac{7t}{3}\right) - \cos\left(\frac{t}{3}\right)\right) - 48sen^2\left(\frac{4t}{3}\right)\, dt \;\; \therefore$$

$$A = \int_{6,811}^{12,038} -16sen^2(t) + 56\cos\left(\frac{7t}{3}\right) - 56\cos\left(\frac{t}{3}\right) - 48sen^2\left(\frac{4t}{3}\right)\, dt$$

Sabemos que a soma das integrais é a integral da soma, portanto iremos dividir a integral afim de facilitar os próximos cálculos e deixá-los mais organizados.

$$\begin{cases} I_1 = \int_{6,811}^{12,038} -16sen^2(t) \quad (VI) \\ I_2 = \int_{6,811}^{12,038} 56\cos\left(\frac{7t}{3}\right) \quad (VII) \\ I_3 = \int_{6,811}^{12,038} -56cos\left(\frac{t}{3}\right) \quad (VIII) \\ I_4 = \int_{6,811}^{12,038} -48sen^2\left(\frac{4t}{3}\right) \quad (IX) \end{cases}$$

Resolvendo primeiramente (VI), temos:

$$I_1 = \int_{6,811}^{12,038} -16sen^2(t) \;\; \therefore$$

$$I_1 = -16\int_{6,811}^{12,038} sen^2(t)$$

Como visto no embasamento teórico, sabemos que $sen^2(x) = \frac{(1-\cos(2x))}{2}$, logo:

$$I_1 = -16\int_{6,811}^{12,038} \frac{1-\cos(2t)}{2} \therefore$$

$$I_1 = -16\left(\int_{6,811}^{12,038} \frac{1}{2} - \int_{6,811}^{12,038} \frac{\cos(2t)}{2}\right) \therefore$$

$$I_1 = -16\frac{t}{2}\Big|_{6,811}^{12,038} + 16\frac{sen(2t)}{4}\Big|_{6,811}^{12,038}$$

Substituindo os limites temos:

$$I_1 = -41,816 - 6,964 \therefore$$

$$I_1 = -48,78$$

Resolveremos agora (VII):

$$I_2 = \int_{6,811}^{12,038} 56\cos\left(\frac{7t}{3}\right) \therefore$$

$$I_2 = 56\int_{6,811}^{12,038} \cos\left(\frac{7t}{3}\right) \therefore$$

$$I_2 = 56\, sen\left(\frac{7t}{3}\right)\cdot\frac{3}{7}\Big|_{6,811}^{12,038} \therefore$$

$$I_2 = 24\, sen\left(\frac{7t}{3}\right)\Big|_{6,811}^{12,038}$$

Substituindo os limites temos:

$$I_2 = 8,830$$

Resolvendo agora $(VIII)$:

$$I_3 = \int_{6,811}^{12,038} -56cos\left(\frac{t}{3}\right) \therefore$$

$$I_3 = -56\int_{6,811}^{12,038} \cos\left(\frac{t}{3}\right) \therefore$$

$$I_3 = -56\, sen\left(\frac{t}{3}\right)\cdot 3\,\Big|_{6,811}^{12,038} \therefore$$

$$I_3 = -168\, sen\left(\frac{t}{3}\right)\Big|_{6,811}^{12,038}$$

Substituindo os limites temos:

$$I_3 = 257{,}067$$

Resolvendo agora (IX):

$$I_4 \ = \int_{6{,}811}^{12{,}038} -48sen^2\left(\frac{4t}{3}\right) \ \therefore$$

$$I_4 \ = -48\int_{6{,}811}^{12{,}038} sen^2\left(\frac{4t}{3}\right)$$

$$I_4 = -48\int_{6{,}811}^{12{,}038} \frac{1-\cos\left(\frac{8t}{3}\right)}{2} \ \therefore$$

$$I_4 \ = -48\left(\int_{6{,}811}^{12{,}038}\frac{1}{2} - \int_{6{,}811}^{12{,}038}\frac{\cos\left(\frac{8t}{3}\right)}{2}\right) \ \therefore$$

$$I_4 = -48\frac{t}{2}\bigg|_{6{,}811}^{12{,}038} + 48\frac{sen\left(\frac{8t}{3}\right)}{2}\cdot\frac{3}{8}\Bigg|_{6{,}811}^{12{,}038}$$

$$I_4 = -24t|_{6{,}811}^{12{,}038} + 9\,sen\left(\frac{8t}{3}\right)\bigg|_{6{,}811}^{12{,}038}$$

Substituindo os limites temos:

$$I_4 = -125{,}448 + 11{,}404$$

$$I_4 = -114{,}044$$

Somando todos os valores das integrais calculadas, temos:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = -48{,}78 + 8{,}830 + 257{,}067 - 114{,}044$$

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 103{,}073$$

Com isso, temos:

$$Área \approx 103{,}073$$