ԳԼՈՒԽ 1

ՍՓԼԱՅՆՆԵՐ ԵՎ ԲԵԶՅԵԻ ԿՈՐԵՐ

1.1 Սփլայններ

Սահմանում 1.1: *Սփլայն է կոչվում այն կորը, որը կառուցված է $p_0, \dots, p_n$ կետերի համախմբությամբ, որոնք կոչվում են սփլայնի բնութագրիչ կամ հենքային կետեր: Պահանջվում է, որպեսզի $r = r(t)$ սփլայնը անցնի տրված $t_0 \leq \dots \leq t_n$ պարամետրի տրված արժեքների դեպքում $r(t_i) = p_i, 0 \leq i \leq n$: $t_i (0 \leq i \leq n)$ պարամետրի արժեքները կոչվում են հանգուցային, իսկ $t_0, \dots, t_n$ կետերը R առանցքի վրա սփլայնի հանգույցներ:*

Բերենք սփլայնների օրինակներ.

1. **Բեկյալ**, որի գագաթները p_i կետերն են՝

$$r(t) = p_i(1 - \omega) + p_{i+1}\omega$$

որտեղ $\omega = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}$ և $t_i \leq t \leq t_{i+1}$: ω պարամետրը անվանում են $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ միջակայքում լոկալ պարամետր:

Եթե $t_i = i$, ապա բեկյալի պարամետրացումը անվանում են հավասարաչափ: Այս դեպքում բեկյալի $T = t_n - t_0$ պարամետրական երկարությունը հավասար կլինի n-ի այսինքն՝ հենքային կետերի քանակից մեկով պակաս, եթե բոլոր $p_0, \dots, p_n$ հենքային կետերը տարբեր են:

Եթե $p_0 = p_n$, այսինքն բեկյալը փակ է, ապա նրա պարամետրական երկարությունը հավասար է հենքային կետերի քանակին(ենթադրելով որ $p_0, \dots, p_{n-1}$ կետերը տարվեր են):

2. Էրմիտի սփլայն:

Ենթադրենք հարթության վրա տրված են $(m + 1)$ քանակի կետեր, և նրանցից յուրաքանչյուրում տրված է $r(t)$ կորի շառավիղ-վեկտորի ածանցյալը, այսինքն՝ տրված են $r'(t_0), \dots, r'(t_m)$: Այդ դեպքում, գոյություն ունի այսպես կոչված Էրմիտի սփլայնը, t-ից կախված $(2m + 1)$ աստիճանի բազմանդամի տեսքով, որն անցնում է տրված կետերով և այդ կետերում ունի տրված $r'(t_0), \dots, r'(t_m)$ ածանցյալները: Այդ բազմանդամն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$r(t) = \alpha_{2m+1} t^{2m+1} + \dots + \alpha_1 t + \alpha_0, \quad \alpha_i \in R^2$$

Եթե $m = 1$, տրված է երկու կետ և այդ կետերում ածանցյալները, ապա գոյություն ունի երրորդ կարգի Էրմիտի սփլայն, որը գնում է r_0-ից r_1 կետ և ծայրերում ունի տրված ածանցյալները [3;4]:

1.2. Էրմիթի սփլայնների կառուցումը

Խնդրի դրվածք: Ենթադրենք տրված են երկու կետ $r(0) = r_0$; $r(1) = r_1$: Պահանջվում է կառուցել $r = r(t), 0 \le t \le 1$ կոր, այնպիսին, որ նրա մինչև m-րդ կարգի ածանցյալները (ներառյալ նաև m-ը) $0 \le t \le 1$ միջակայքի ծայրերում ընդունեն հետևյալ արժեքները՝

$$\begin{cases} \left.\dfrac{d^k r(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = r_0^{(k)} \\ \left.\dfrac{d^k r(t)}{dt^k}\right|_{t=1} = r_1^{(k)} \end{cases} \quad 0 \le k \le m$$

Այստեղ $r_0^{(k)}, r_1^{(k)}$, $0 \le k \le m$ տրված վեկտորներ են, որտեղ $r_0^{(0)} = r_0$, $r_1^{(0)} = r_1$:

Պահանջվում է, որպեսզի $r(t)$-ի յուրաքանչյուր բաղադրիչի կախվածությունը ունենա $(2m + 1)$-րդ կարգի բազմանդամի տեսք: Այդպիսի բազմանդամն ունի $(2m + 2)$ գործակիցները, որոնք կարելի է որոշել (1.1) համակարգից, որը բաղկացած է $(2m + 2)$ հավասարումներից:

Պնդում 1.1: *Տրված խնդրի լուծումը գոյություն ունի: Այն t-ից կախված (2m + 1)-րդ աստիճանի բազմանայում է վեկտորական գործակիցներով.*

$$r(t) = \sum_{i=0}^{m} (g_i(t, m) r_0^i + h_i(t, m) r_1^i),$$

որտեղ $g_i(t, m)$, $h_i(t, m), 0 \le i \le m$, *t-ից կախված* $(2m + 1)$*-րդ աստիճանի բազմանդամներ են, որոնց գործակիցները որոշվում են* (1.1) *հավասարումների համակարգից և ունեն հետևյալ տեսքը՝*

$$\begin{cases} g_i(t,m) = \dfrac{1}{i!}\sum_{j=0}^{m-i} C_{2m+1-i}^{j} t^{i+j}(1-t)^{2m+1-(i+j)}; \\ h_i(t,m) = (-1)^i \dfrac{1}{i!}\sum_{j=0}^{m-i} C_{2m+1-i}^{j} t^{2m+1-(i+j)}(1-t)^{i+j}; \end{cases} \tag{1.3}$$

Ապացույց: Պնդման ճշմարտացիությունը ստուցվում է (1.3)-ը (1.2)-ում տեղադրելով:

(1.3)-ից հետևում է, որ $g_i(t,m)$ և $h_i(t,m)$ ֆունկցիաները կապված են հետևալ հարաբերակցությամբ՝

$$g_0(t,m) + h_0(t,m) = (t + 1 - t)^{2m+1} = 1;$$

$$h(t,m) = (-1)^i g_i(1-t,m):$$

Սակայն գործնականում (1.3)) բանաձևերի կիրառությունը սահմանափակվում է, որպես կանոն, միայն այն դեպքերով, երբ անհրաժեշտ է արդեն գոյություն ունեցող տրված ողորկության աստիճանով կորի բացթողումները լրացնել: Եթե անհրաժեշտ է կառուցել նոր կոր, որն անցնում է տրված n կետերով, ապա այդ կետերում ածանցյալները, որպես կանոն, տրված չեն: Այդ պատճառով էլ դրանք անհրաժեշտ է որոշել այլ պայմաններից: Օրինակ, եթե անհրաժեշտ է գտնել $2m + 1 = 3$ $(m = 1)$ կարգի էրմիտի բաղադրյալ սփլայնը՝ $p_0 \dots p_n \in R^2$ հենքային կետերի հաջորդականության համար(կամ, ավելի ընդհանուր $p_0 \dots p_n \in R^l$), ապա $p_t \dots p_{n-t}$ ներքին կետերում q_i անհայտ ածանցյալները կարելի է որոշել այս բանաձևով՝

$$q_i = \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \qquad (1 \le i \le n-1) \tag{1.4}$$

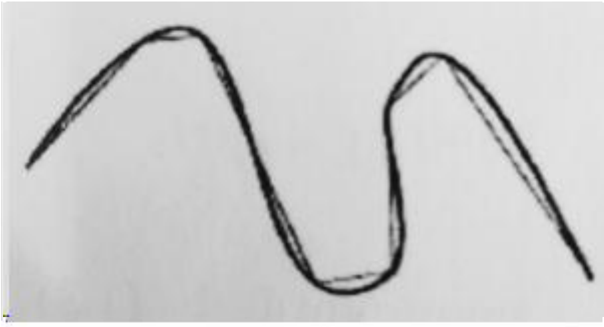
Եթե հենքային կետերը հավասարաչափ չեն բաշխված, ապա այսպիսի եղանակը կարող է բերել Էրմիտի սփլայնում հանգույցների ավելացմանը:Այդ պատճառով էլ օգտվում են q_i-ն որոշելու այլ միջոցներից: Օրինակ, կարելի է տեղադրել՝

$$q_i = s_{i+1}\frac{p_i - p_{i-1}}{s_i + s_{i+1}} + s_i\frac{p_{i+1} - p_i}{s_i + s_{i+1}} \tag{1.5}$$

կամ

$$q_i = s_i \frac{p_i - p_{i-1}}{s_i + s_{i+1}} + s_{i+} \frac{p_{i+1} - p_i}{s_i + s_{i+1}} \qquad (1 \le i \le n-1) \qquad (1.6)$$

որտեղ $s_i = |p_i - p_{i-1}|$; $s_{i+1} = |p_{i+1} - p_i|$:



Նկ. 1,1

Նկար 1.1-ում պատկերված են բեկյալ և վերը նշված եղանակով կառուցված Էրմիտի սփլայնը: Եթե p_0 և p_n Նկար 1.1-ում պատկերված են բեկյալ և վերը նշված եղանակով կառուցված Էրմիտի սփլայնը: Եթե p_0 և p_n եզրային կետերում՝ ածանցյալները տրված չեն ինչ-որ պայմաններով, ապա դրանք կարելի է գտնել այն պայմա-նից, որ r(t)-ի երրորդ կարգի ածանցյալները ծայրակետերում 0 են՝

$$r^3(t_0) = 0; \quad r^3(t_n) = 0 \qquad (1.7)$$

Օրինակ 1: $p_0 \dots p_n$ կետերի հաջորդականու-թյան համար երրորդ կարգի Էրմիտի սպլայնն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{aligned} r(t) &= g_0(\omega, 1)p_i + g_1(\omega, 1)q_i + h_0(\omega, 1)p_{i+1} + h_1(\omega, 1)q_{i+1} = \\ &= g_0(\omega)p_i + g_1(\omega)q_i + h_0(\omega)p_{i+1} + h_1(\omega)q_{i+1,} \end{aligned} \qquad (1.8)$$

որտեղ $\omega = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}$, $0 \le \omega \le 1$ լոկալ պարամետր է $t_i \le t \le t_{i+1}$ միջակայքում: Այստեղ՝

$$g_0(\omega) = 1 - 3\omega^2 + 2\omega^3; \qquad g_1(\omega) = \omega - 2\omega^2 + \omega^3;$$

$$h_0(\omega) = 3\omega^2 - 2\omega^3; \qquad h(\omega) = -\omega^2 + \omega^3; \qquad (1.9)$$

q_i արժեքները $1 \le i \le n-1$ դեպքում, կարող են որոշվել, օրինակ (1.4), (1.5) կամ (1.6) բանաձևերից որևէ մեկով: q_0-ի և q_n-ի արժեքները գտնում են (1.7) պայմաններից, որը տալիս է՝

$$\begin{aligned} q_0 &= 2(p_1 - p_0) - q_1; \\ q_n &= 2(p_n - p_{n-1}) - q_{n-1}; \end{aligned} \qquad (1.10)$$

(1.10) հավասարությունները ստացվում են (1.8)-ը (1.7)-ում տեղադրելով;

Այժմ դիտարկենք կոնկրետ օրինակ.

Էրմիթի սփլայն (առաջին դեպք)

Դիցուք սփլայնը պետք է անցնի ոչ միայն այդ p_i կետերով, այլ այդ կետերից որոշներում $\vec{r}(t)$-ն պետք է ունենա առաջին կամ երկրորդ կարգի ածանցյալները:

		$r'(t)$	$r''(t)$
t_0	$\bar{p}_0$	$r'(t_0)$	
t_1	$\bar{p}_1$	$r'(t_1)$	
t_2	$\bar{p}_2$		
			$r''(t_{n-1})$
t_n	$\bar{p}_n$		$r''(t_n)$

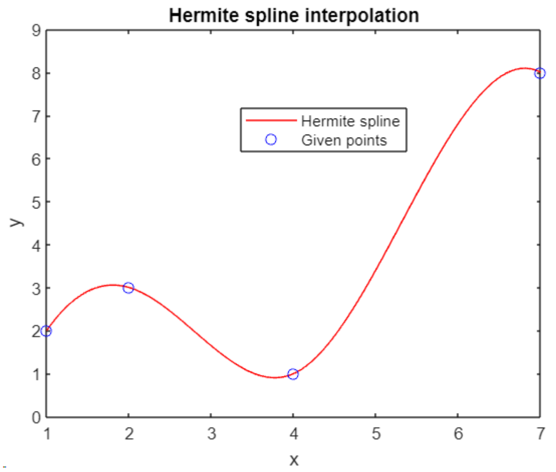
Ունենք $(n+1)+k_1+k_2$ հատ պայման:

Պարզ է, որ փնտրվող $r(t)$ բազմանդամը պետք է ունենա $n+k_1+k_2=N$ աստիճան:

$$\vec{r}(t)=\bar{a}_0+\bar{a}_1 t+\bar{a}_2 t^2+\cdots+\bar{a}_N t^N \qquad (**)$$

$(**)$-ի մեջ ունենք $(N+1)$ հատ $\vec{r}(t)$-ի վրա դրված պայման: Այդ պայմանները օգտագործելով կստացվի $(N+1)$ հատ հավասարումներից կազմված $(N+1)$ հատ անհայտ պարունակող հավասարումների համակարգ: Լուծելով այն կգտնենք անհայտ վեկտորները:

Դիտարկենք Էրմիթի սփլայնի կառուցման հետևյալ խնդիրը:



	x	y	$r'(t)$	$r''(t)$
p_0	1	2	$tg70^0$	
p_1	2	3		
p_2	4	1	0	
p_3	7	4		-1

$$r(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6$$

$$r'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+6a_6x^5$$

$$r''(x)=2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20a_5x^3+30a_6x^4$$

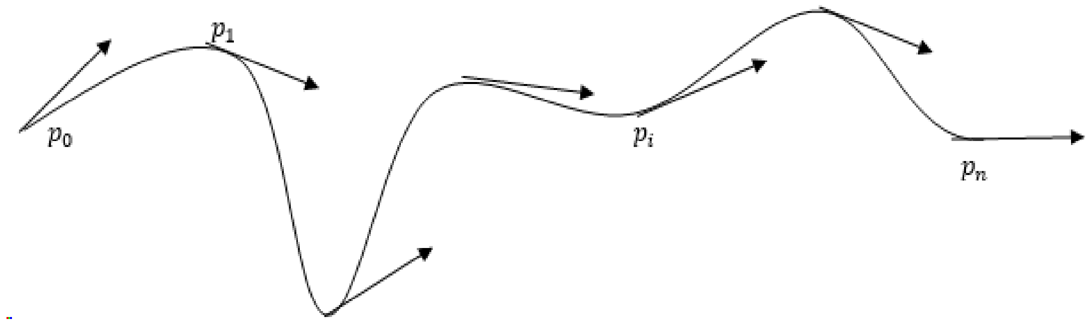
$$
\begin{cases}
a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 2 \\
a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + 2^3a_3 + 2^4a_4 + 2^5a_5 + 2^6a_6 = 3 \\
a_0 + 4a_1 + 4^2a_2 + 4^3a_3 + 4^4a_4 + 4^5a_5 + 4^6a_6 = 1 \\
a_0 + 7a_1 + 7^2a_2 + 7^3a_3 + 7^4a_4 + 7^5a_5 + 7^6a_6 = 4 \\
a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 = 2.74748 \\
a_1 + 4 * 2a_2 + 4^2 * 3a_3 + 4^3 * 4a_4 + 4^4 * 5a_5 + 4^5 * 6a_6 = 0 \\
2a_2 + 6a_3 * 7 + 12a_4 * 7^2 + 20a_5 * 7^3 + 30a_6 * 7^4 = -1
\end{cases}
$$

$$
\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.04 \\ 4.44 \\ 0.93 \\ -1.85 \\ 0.58 \\ -0.07 \\ 0.003 \end{pmatrix}
$$

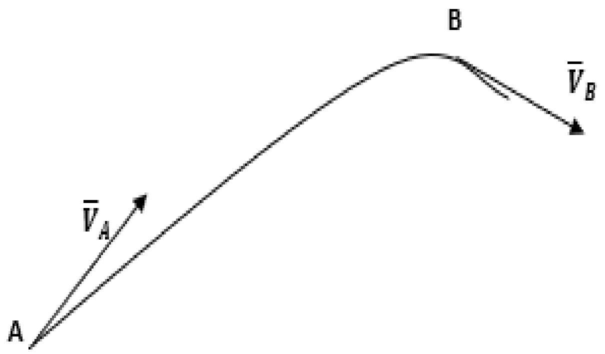
p_i կետերը, որոնցով պետք է անցնի սփլայնը կոչվում են սփլայնի հենակետեր իսկ պարամետրի t_i կետերը հանգուցային կետեր:

Բաղադրյալ Էրմիթի սփլայն (երկրորդ դեպք դեպք)

Էրմիթի բաղադրյալ սփլայնը կդիտարկենք հարթության վրա: Խնդիրը կայանում է հետևյալում՝ տրված են ոչ միայն p_0 կետերը, այլ նաև այդ կետերում $r'(t)$-ները: Բաղադրյալ Էրմիթի սփլայնը պետք է կառուցել այնպես, որ կորի ածանցյալը կետերում հավասար լինի տվյալ վեկտորին:



Նմանատիպ բաղադրյալ սփլայնը կառուցելու համար բավարար է նկարագրել 2 հանգուցային կետերը միացնող սփլայնը [1;2]:



$A(x_A, y_A)$,

$B(x_B, y_B)$,

$\bar{V}_A(V_A^1, V_A^2)$,

$\bar{V}_B(V_B^1, V_B^2)$,

$$\bar{r}(t) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\ b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 \end{pmatrix} \qquad t \in [0,1]$$

$$\bar{r}'(t) = \begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 \\ b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{r}(0) = A;\ \bar{r}'(0) = \bar{V}_A;\ \bar{r}(1) = B;\ \bar{r}'(1) = \bar{V}_B$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ b_0 + b_1 + b_2 + b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^1{}_A \\ V^2{}_A \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 + 3a_3 \\ b_1 + 2b_2 + 3b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^1{}_B \\ V^2{}_B \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_0 = x_A \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = x_B \\ a_1 = V^1{}_A \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = V^1{}_B \end{cases}$$

$$a_2 + a_3 = x_B - x_A - V^1{}_A$$

$$\begin{cases} 2a_2 + 3a_3 = V^1{}_B - V^1{}_A \\ 2a_2 + 2a_3 = 2x_B - 2x_A - 2V^1{}_A \end{cases}$$

$$a_3 = V^1{}_B - V^1{}_A + 2x_B - 2x_A - V^1{}_A - V^1{}_B = -3x_A + 3x_B - 2V^1{}_A - V^1{}_B$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ V^1{}_A \\ V^1{}_B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ V^2{}_A \\ V^2{}_B \end{pmatrix}$$

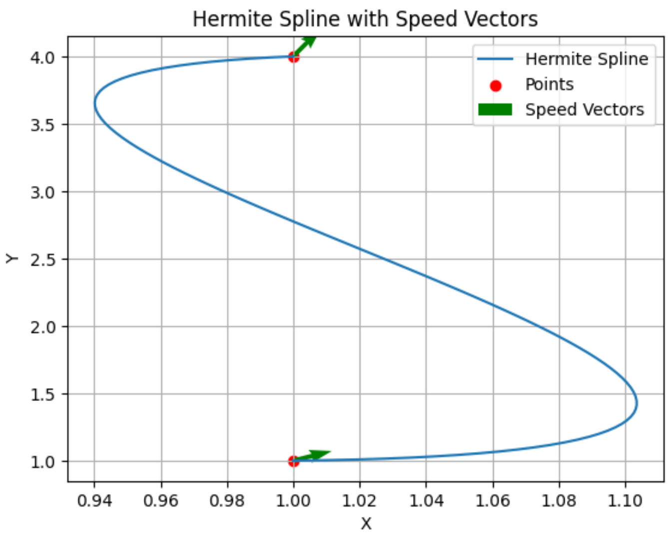
որտեղ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ մատրիցը կոչվում է Էրմիթի մատրից:

Դիտարկենք կոնկրետ օրինակ: Տրված են $A(1,1)$, $B(1,4)$, $\bar{V}_A(1,0)$, $\bar{V}_B(1,0)$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = 1 + t - 3t^2 + 2t^3 \\ y(t) = 1 + 8t^2 - 5t^3 \end{cases}$$



$$\mathrm{r}'(\mathrm{t}) = \begin{pmatrix} 1 + t - 3t^2 + 2t^3 \\ 1 + 8t^2 - 5t^3 \end{pmatrix}$$

1.3. Խորանարդային սփլայններ: Խորանարդային սփլայնների կառուցումը

Ենթադրենք տրված են $n+1$ կետեր՝ $p_0, \ldots, p_n \in R^2$: Պահանջվում է այս կետերով կառուցել C^2 դասի կոր, այսինքն ունենալով շառավիղ-վեկտորի առաջին և երկրորդ կարգի անընդհատ ածանցյալները հետևյալ պարամետրով՝ $r = r(t)$, $r(t_i) = p_i, i = 0, \ldots, n$, և $\dot{r}(t)$, $\ddot{r}(t)$ անըն-դհատ t-ով: Այս խնդրի լուծումը կարելի է տալ խորանարդային սպլայնների միջոցով: Յուրաքանչյուր $[t_i, t_{i+1}]$ միջակայքում այդպիսի սպլայնը նկարագրվում է t-ից կախված երրորդ կարգի բազմանդամով: Բազմանդամային ինտերպոլյացիայի ժամանակ տրված խնդրում բազմանդամի աստիճանը ընդհանրապես ասած, չի կարող լինել երեքից պակաս: Այդ պատճառով էլ խորանարդային սպլայնը խնդրի տվյալ ներկայացման մեջ ունի ամենափոքր աստիճանը և որոշվում է միարժեք:

Ենթադրենք փնտրվող սփլայնը տրվում է $r = r(t)$, պարամետրական հավասարումնե-րով: Նշանակենք $s_i = \ddot{r}(t_i)$ $i = 0, \ldots, n$: Քանի որ սփլայնը խորանարդային է, ապա շառավիղ-վեկտորի երկրորդ կարգի ածանցյալը կլինի գծային ֆունկցիա յուրաքանչյուր $[t_i, t_{i+1}]$ միջակայքում՝

$$\frac{d^2r}{dt^2} = s_i \frac{t_{i+1} - t_i}{t_{i+1} - t_i} + s_{i+1} \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \tag{1.11}$$

Ինտեգրենք (1.11)-ը երկու անգամ: Կստանանք

$$r(t) = s_i \frac{(t_{i+1} - t_i)^3}{6(t_{i+1} - t_i)} + s_{i+1} \frac{(t - t_i)^3}{6(t_{i+1} - t_i)} + c_1 t + c_2 \tag{1.12}$$

c_1 և c_2 հաստատունները կորոշենք տվյալ միջակայքում կորի եզրերում տրված պայմաններից՝

$$\begin{cases} r(t_i) = p_i \\ r(t_{i+1}) = p_{i+1} \end{cases} \tag{1.13}$$

(1.12) -ի տեղադրումը (1.13)-ում և c_1-ի ու c_2-ի հաշվումը բերում է հետևյալ պատասխանի՝

$$\begin{aligned} r(t) = {} & s_i \frac{(t_{i+1} - t_i)^3}{6(t_{i+1} - t_i)} + s_{i+1} \frac{(t - t_i)^3}{6(t_{i+1} - t_i)} + \\ & + \left(\frac{p_i}{t_{i+1} - t_i} - s_i \frac{t_{i+1} - t_i}{6}\right)(t_{i+1} - t_i) + \\ & + \left(\frac{p_{i+1}}{t_{i+1} - t_i} - s_{i+1} \frac{t_{i+1} - t_i}{6}\right)(t - t_i) \end{aligned} \tag{1.14}$$

(1.14)-ի առաջին մասը խորանարդային բազմանդամ է կախված t-ից՝ $[t_i, t_{i+1}]$ միջակայ-քում: Այն պարունակում է երկու անհայտ վեկտորային պարամետրեր՝ s_i և s_{i+1}: Դրանք կարելի է որոշել ՝ $[t_i, t_{i+1}]$ միջակայքի ծայրերում առաջին կարգի ածանցյալների համաձայնեցվածու-թյան պայմանից $[t_i, t_{i+1}]$ միջակայքի ձախ ծայրում կունենանք՝

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=t_i} = -\frac{(2s_i + s_{i+1})(t_{i+1} - t_i)}{6} + \frac{p_{i+1} - p_i}{t_{i+1} - t_i} \qquad (1.15)$$

Նման ձևով $[t_i, t_{i+1}]$ միջակայքի աջ ծայրում t_i կետում կունենանք՝

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=t_i} = \frac{(2s_i + s_{i-1})(t_i - t_{i-1})}{6} + \frac{p_i - p_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \qquad (1.16)$$

Հավասարեցնելով (1.15)-ի և (1.16)-ի աջ մասերը կստանանք $(n-1)$ հատ հավասարում ներքին $i = 1, \dots, n-1$ կետերի համար:

$$\begin{gathered} s_{i-1}(t_i - t_{i-1}) + 2s_i(t_{i+1} - t_{i-1}) + s_{i+1}(t_{i+1} - t_i) = \\ = 6\frac{p_{i+1} - p_i}{t_{i+1} - t_i} - 6\frac{p_i - p_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}, \qquad i = 1, \dots, n-1 \end{gathered} \qquad (1.17)$$

(1.17) համակարգը իրենից ներկայացնում է $(n-1)$ վեկտորային հավասարումների համակարգ (կամ, որ նույնն է, $2(n-1)$ սկալյար հավասարումների) ժապավենային երեք անկյունագծով մատրիցով և $(n+1)$ վեկտորային անհայտներով՝ $s_0, \dots, s_n$ (ինչը համապատասխանում է $2(n+1)$ սկալյար անհայտներին): Եթե կորը փակ է, ապա $s_0 = s_n$, և (1.17) համակարգում ավելացվում է ևս մեկ հավասարում $i = n$-ի համար՝

$$s_{n+1} = s_1:$$

Այսպիսով, փակ կորի համար անհայտների թիվը հավասար է հավասարումների թվին և համակարգն ունի միակ լուծում:

Եթե կորը փակ չէ, ապա անհրաժեշտ է տալ սահմանային պայմաններ: Օրինակ, եթե սփլայները դիտարկենք՝ որպես ճկուն թել, որի ծայրերը չունեն կորություն, ապա կստանանք այսպիսի պայման՝

$$s_0 = s_n = 0 \qquad (1.18)$$

Սահմանային պայմանների ևս մեկ հնարավոր տարբերակ՝

$$s_0 = s_1; \quad s_n = s_{n-1} \qquad (1.19)$$

Այս դեպքում կորի ծայրային տեղամասերը կունենան մշտական կորություն:

(1.17) համակարգից և (1.18) կամ (1.19) տեսքի սահմանային պայմաններից (կամ խնդրի դրվածքից հետևող այլ տեսքից) կստանանք $[t_i, t_{i+1}]$ միջակայքում փնտրվող խորանարդային սպլայնի բանաձևը՝

$$r(t) = (1-\omega)p_i + \omega p_{i+1} +$$
$$+\left((-2\omega + 3\omega^2 - \omega^3)s_i + (-\omega + \omega^3)s_{i+1}\right)\frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{6},$$

որտեղ $\omega = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}$ միջակայքում լոկալ պարամետր է [3]:

1.4. Լագրանժի սփլայն

Ենթադրենք տրված են $(n+1)$ հենքային կետեր՝ $p_i = (x_i, y_i) \in R^2$, $0 \le i \le n$: Պահանջվում է գտնել t-ից կախված բազմանդամային կոր $r = r(t) = p^n(t)$, այնպիսին, որ $r(t_i) = p_i, 0 \le i \le n$, տրված պարամետրային արժեքներով՝ $t_0 \le \dots \le t_n$: Խնդրի լուծումը փնտրենք հետևյալ տեսքով՝

$$r(t) = \sum_{i=0}^{n} L(t_i)p_i,$$

որտեղ

$$L_i(t_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \ne j \end{cases} \qquad 0 \le i, j \le n$$

Այսպիսի հատկություններով օժտված են բազմանդամները

$$L_i(t) = \frac{(t - t_0)\dots(t - t_{i-1})(t - t_{i+1})\dots(t - t_n)}{(t_i - t_0)\dots(t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i+1})\dots(t_i - t_n)} =$$
$$= \frac{\prod_{j=0, j\ne i}^{n}(t - t_j)}{\prod_{j=0, j\ne i}^{n}(t_i - t_j)}$$

որոնց օգնությամբ էլ ստանում ենք Լագրանժի սփլայնը՝

$$r(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\prod_{j=0, j\ne i}^{n}(t - t_j)}{\prod_{j=0, j\ne i}^{n}(t_i - t_j)} p_i$$

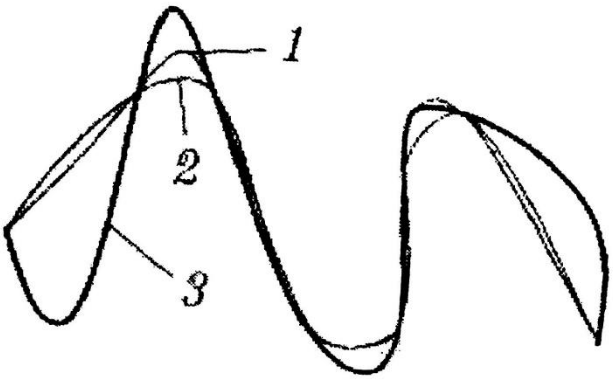
կամ

$$r(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega_{0,n}(t)}{(t - t_i)\omega_{0,n}(t_i)} p_i$$

որտեղ

$$\omega_{0,n} = (t - t_0)\dots(t - t_n);$$

$$\omega'_{0,n}(t_i) = \frac{d\omega_{0,n}}{dt} = (t_i - t_0) \dots (t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i+1}) \dots (t_i - t_n):$$



Նկ.1.2

Նկար 1.2-ում պատկերված են՝ խորանարդային սփլայն (1), Էրմիտի սփլայն (2) և Լագրանժի սփլայ-նը (3)՝ կառուցված միևնույն 8 հանգուցային կետերով [1]:

1.5. Բեզյեի կորեր

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը: Կամայական $(n+1)$ հենքային կետերի $p_0, \dots, p_n \in R^3$, հավաքածուի համար անհրաժեշտ է գտնել ֆունկցիա $f_0(t), \dots, f_n(t)$, որը կախված չէ $p_0, \dots p_n$ –ից և ունի t -ից կախված բազմանդամի տեսք, այնպես որ

$$r(t) = p_0 f_0(t) + \cdots + p_n f_n(t), \qquad t \in [0,1], \tag{1.20}$$

կորն ունենա հետևյալ հատկությունները՝

1) $r(0) = p_0, r(n) = p_n$:

2) (1.20) կորի տեսքը կախված չէ R^3-ում դեկարտյան համակարգի ընտրությունից:

3) եթե բոլոր $p_0, \dots, p_n$, հենքային կետերը գտնվում են միևնույն հարթությունում, ապա (1.20) կորը հարթ է և ընկած է $p_0, \dots, p_n$ հենքային կետերի ուռուցիկ թաղանթի ներսում:

Պնդում 1.2: *1) - 3) հատկությունները համարժեք են հետևյալ պայմաններին՝*

ա)$\sum_{i=0}^{n} f_i(t) = 1$ ցանկացած $t_i \in [0,1]$ կետի համար;

բ)$f_i(t) \geq 0$ ցանկացած $t \in [0,1]$;

գ) $f_0(0) = 1, f_i(0) = 0$ ցանկացած $0 \leq i \leq n$ և $f_n(1) = 1, f_i(1) = 0,$ բոլոր $0 \leq i \leq n-1$

Ապացույց: Ենթադրենք 1) - 3) հատկությունները տեղի ունեն:

ա) Եթե $p_0 = p_1 = \cdots = p_n$, ապա 3)-ից հետևում է որ $r(t) = p_0$, $t \in [0,1]$: Այդ պատճառով էլ $\sum_{i=0}^{n} f_i(t) = 1$:(Օգտվել ենք նրանից, որ $f_0(t), \dots f_n(t)$ ֆունկցիաները կախված չեն $p_0, \dots, p_n$-ից:)

բ)Ենթադրենք հակառակը: Ենթադրենք $f_j(t^*) < 0$, ինչ որ $t^* \in [0,1]$ համար: $0x$ առանցքից ընտրենք $p_0, \dots, p_{j-1}, p_j, \dots, p_n$ հենքային կետեր, իսկ p_j-ն վերին կիսահարթությունից: Ունենք՝ $r(t) = \big(x(t), y(t)\big); p_i = (x_i, y_i)$: Հետևաբար, $y_i = 0$, եթե $i \neq j$,

$y_j > 0$: Կորի շառավիղ-վեկտորի երկրորդ բաղադրիչի համար t^*կետում ունենք $r_2(t^*)$=$y(t^*) = \sum_{i=0}^{n} f_i(t^*)y_i = f_i(t^*)y_j < 0$, քանի որ $f_i(t^*) < 0$ ենթադրության համաձայն: Հետևաբար $y(t^*) < 0$, այդ պատճառով էլ $r(t)$ կորը մտնում է ստորին $y < 0$ կիսահարթություն և ընկած չէ $p_0, ..., p_n$ կետերի ուռուցիկ թաղանթում, որը գտնվում է վերին կիսահարթությունում (օգտվել ենք (2) հատկությունից՝ կորը անկախ է ընտրված կոորդինատային համակարգից):

գ) Հետևում է 1)-ից, եթե վերցնենք p_0 և p_n կետերը տարբեր, իսկ $p_0, ..., p_{n-1}$ կետերը համընկնող կոորդինատների սկզբի հետ:

Այժմ ենթադրենք տեղի ունեն ա)- գ) պայմանները:

1) Հետևում է գ)-ից:

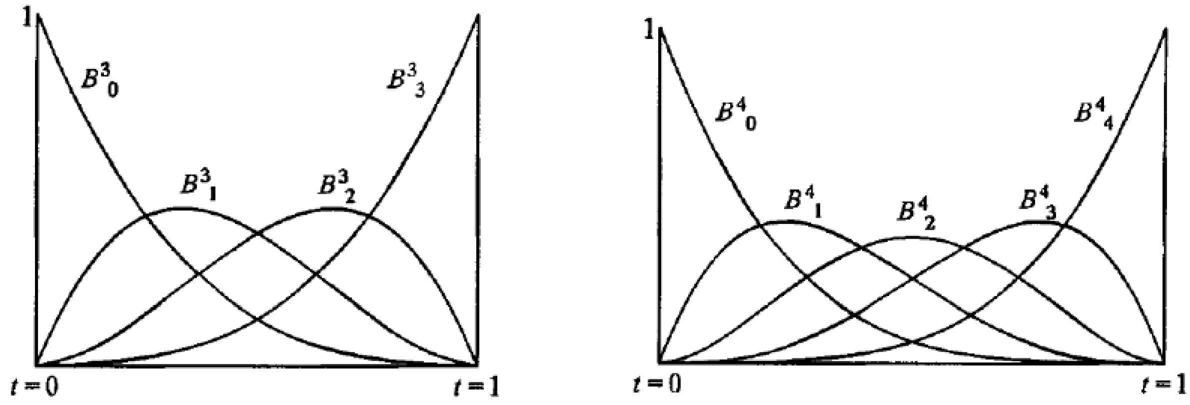
2) Ենթադրենք տրված է հետևյալ տեսքի կոր՝ $r(t) = \sum_{i=0}^{n} f_i(t)p_i$: Եթե A-ն տարածության շարժն է, Եթե A-ն տարածության շարժն է, ապա այն՝ տարածության շարժի խմբի մասին թեորեմի՝ կարելի է ներկայացնել համադրույթի տեսքով. $A = OL$, որտեղ O-ն պըտույտն է, L-ը տեղաշարժը: Ունենք $O\big(r(t)\big) = O(\sum_{i=0}^{n} f_i(t)p_i) = \sum_{i=0}^{n} f_i(t)p_i$, քանի որ պտույտը գծային ձևափոխություն է: Այնուհետև, $L\big(r(t)\big) = r(t) + b$ որոշ $b \in R^3$ համար $b = const$: Հետևաբար ա)-ից ստանում ենք.

$$L(r(t)) = \sum_{i=0}^{n} f_i(t)p_i + b = \sum_{i=0}^{n} f_i(t)p_i + \sum_{i=0}^{n} f_i(t)b = \sum_{i=0}^{n} f_i(t)(p_i + b) = \sum_{i=0}^{n} f_i(t)L(p_i)$$

(քանի որ $\sum_{i=0}^{n} f_i(t) = 1$): Հետևաբար, $r(t) = \sum_{i=0}^{n} f_i(t)p_i$ կորը չի փոխվի, եթե նրա հաշվարկի ժամանակ տարածությունում օգտվենք այլ դեկարտյան կոորդինատային համակարգից:

3) $p_0, ..., p_n$ կետերի ուռուցիկ թաղանթը դա ուռուցիկ բազմանկյուն է, որն ընկած է այն ուղղի մի կողմում, որը շարունակում է կողերից ցանկացածը: Եվ հակառակը՝ համապատասխան կիսահարթությունների հատման տիրույթը, որն առաջացել է այս ուղիղներով, համընկնում է $p_0, ..., p_n$ կետերի ուռուցիկ թաղանթի հետ:

Վերցնենք այդ բազմանկյան կողերից որևէ մեկը և ընտրենք OX առանցքը այդ կող ուղղությամբ, իսկ Oy-ը ուղղված այն կիսահարթությունով, որտեղ ընկած է բազմանկյունը: Այդ դեպքում, եթե $p_i = (x_i, y_i)$, ապա $y_i \geq 0$ ցանկացած կողմի համար, ապա $r(t)$-ն ամբողջովին պատկանում է այդ ուռուցիկ թաղանթին:



Նկ 1,3

Սահմանում 1.2: Ֆիքսենք ամբողջ $n > 0$: $[0,1]$ միջակայքում Բեռնշտեյնի բազիս կոչվում է $(n+1)$ հատ n աստիճանի բազմանդամներից կազմված համակարգը, տրված հետևյալ բանաձևերով՝

$$B_i^n(t) = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}, \qquad 0 \le i \le n:$$

Նկար 1.3-ում ներկայացված են երրորդ և չորրորդ աստիճանի Բերնշտեյնի բազմանդամները:

Պնդում 1.3: Բեռնշտեյնի բազիսը բավարարում է ա), գ) պայմաններին, ներկայաց-ված 1.2 պնդումում:

Ապացույց: ա) Նյուտոնի բինոմի համաձայն, ունենք $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$: Վերցնենք այստեղ $a = t$, $b = 1 - t$: Կստանանք՝

$$1 = 1^n = (t + 1 - t)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k (1-t)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} B_k^n(t):$$

Հետևաբար $\sum_{k=0}^{n} b_k^n(t) = 1$:

բ) $B_i^t(t) \geq 0 \geq 0$ պայմանը $[0,1]$ միջակայքում ակնհայտ է:

գ) $B_0^n(0) = C_n^0 0^0 (1-0)^0 = 1$; $B_i^n(0) = C_n^i 0^i (1-0)^{n-i} = 0$, եթե $i > 0$: Նմանապես ապացուցվում է, որ $B_n^n(1) = 1$, $B_i^n(1) = 0$, եթե $i > 0$:

Սահմանում 1.3: Ենթադրենք տրված են $(n+1)$ հատ $p_0, \ldots, p_n$ հենքային կետեր: Այդ դեպքում Բեզյեի կոր, որոշված $p_0, \ldots, p_n$ կետերով, կոչվում է հետևյալ կորը՝

$$r_B(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) p_i \qquad t \in [0,1]$$

(6.2) և (6.3) պնդումներից հետևում է, որ Բեզյեի կորը վերը ձևակերպված խնդրի լուծումն է (իհարկե, ոչ միակը):

Լեմմա 1.1: B" (t) Բեռնշտեյնի բազմանդամը բավարարում է հետևյալ հարաբերակցությանը՝

$$\mathrm{B_i^n(t) = tB_{i-1}^{n-1}(t) + (1-t)B_i^{n-1}(t)}$$

ցանկացած $t \in [0,1]$ և $n \geq 1$, կամ բաց թողնելով t արգումենտը՝

$$\mathrm{B_i^n = tB_{i-1}^{n-1} + (1-t)B_i^{n-1}} \qquad (1.21)$$

Ապացույց: Ունենք՝

$$\mathrm{tB_{i-1}^{n-1}(t) + (1-t)B_i^{n-1}(t)} = \frac{i}{n}\frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{i!\,(n-i)!}}\mathrm{t^i(1-t)^{n-i}} + \frac{n-i}{n}\frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{i!\,(n-i)!}}\mathrm{t^i(1-t)^{n-i} = B_i^n}:$$

1.6. Դե Կաստելյեի ալգորիթմը

Դե Կաստելյեի ալգորիթմը թույլ է տալիս կառուցել Բեզյեի կոր (1.21) անդրադարձ առնչության միջոցով:

Ենթադրենք տրված են $\mathrm{p_0, ..., p_n}$, հենքային կետերը: Նշանակենք $r_i(t,k)$-ով Բեզյեի կորը, որը կառուցված է $\mathrm{p_i, ..., p_{i+k}}$ $(i+k) \leq n$ կետերի միջոցով:

Այդ դեպքում փնտրվող Բեզյեի կորը դա $r_0(t,n)$ կորն է: Ունենք՝$r_i(t,0) = p_i$, $(0 \leq i \leq n)$: Ներկայացնենք $r_0(t,n) = r(t)$-ն որոշելու համար ռեկուրենտ բանաձևեր՝ ելնելով նախնական տվյալներից $r_i(t,0) = p_i$, $(0 \leq i \leq n)$: Ունենք՝

$$r(t) = p_0(1-t)^n + p_n t^n + \sum_{i=0}^{n}(\mathrm{tB_{i-1}^{n-1} + (1-t)B_i^{n-1}})p_i =$$

$$= (1-t)\left(p_0(1-t)^{n-1} + t\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{B_i^{n-1}}p_i\right) + t\left(p_n t^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{B_{i-1}^{n-1}}p_i\right) =$$

$$= (1-t)\sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{B_i^{n-1}}p_i + t\sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{B_i^{n-1}}p_{i+1} = (1-t)r_0(t;n-1) + tr_1\,(t;n-1):$$

Այստեղից էլ ստանում ենք Բեզյեի կորը հաշվելու դե Կաստելյեի ռեկուրենտ բանաձևը՝

$$r_i(t;k) = (1-t)r_i(t;k-1) + tr_{i+1}(t;k-1), \qquad (1.22)$$

որտեղ$i + k \leq n$:

(1.22) բանաձևով, սկսած r $r_i(t;0) = p_i$ արժեքներից, ստանում ենք հաջորդական $r_i(t;0), 1 \leq k \leq n$ արժեքները: Վերջին քայլում հաշվում ենք $r_0(t;n) = r(t)$: Սա էլ հենց դե Կաստելյեի ալգորիթմն է [4;5]:

1.7. Հենքային կետերի թվի ավելացումը առանց Բեզյեի կորի տեսքը փոխելու

Բեզյեի կորի հենքային կետերը օգտագործվում են այդ կորը կառավարելու համար, իսկ հենքային կետերից որոշները, ինչպես արդեն նշվել էր, այս կամ այն նկատառումներով, պետք է մնան իրենց տեղերում և չեն կարող մասնակցել կորի կառավարմանը: Այդ դեպքում էլ առաջանում է անհրաժեշտություն ավելացնել տվյալ Բեզյեի կորի հենքային կետերը:

$\mathrm{p}_0, \ldots, \mathrm{p}_\mathrm{n}$ հենքային կետերով Բեզյեի կորի համար ունենք՝

$$r(t) = r_0(t;n) = (1 - t + Et)^n p_0$$

Կամ

$$r(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{i}(1-\mathrm{t})^{\mathrm{n}-\mathrm{i}}\,\mathrm{t}^\mathrm{i} p_i:$$

Հենքային կետերի քանակը մեկով ավելացնելու նպատակով Բեզյեի կորի պարամետրական ներկայացումում կատարենք հետևյալ ձևափոխումները՝ առանց փոփոխելու կորի տեսքը.

$$r(t) = (1 - t + t)\sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{i}(1-\mathrm{t})^{\mathrm{n}-\mathrm{i}}\,\mathrm{t}^\mathrm{i} p_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{i}(1-\mathrm{t})^{\mathrm{n}-\mathrm{i}+1}\,\mathrm{t}^\mathrm{i} p_i + \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{i}(1-\mathrm{t})^{\mathrm{n}-\mathrm{i}}\,\mathrm{t}^{\mathrm{i}+1} p_i =$$

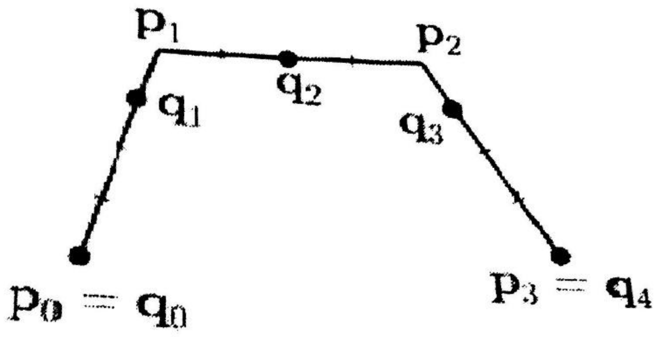
$$= \sum_{i=0}^{n+1} \mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{i}(1-\mathrm{t})^{\mathrm{n}+1-\mathrm{i}}\,\mathrm{t}^\mathrm{i}\left(\frac{C_n^i}{C_{n+1}^i}\big(1-\delta_{(n+1)i}\big)p_i + \frac{C_n^{i-1}}{C_{n+1}^i}(1-\delta_{0i})p_{i-1}\right),$$

որտեղ δ_{ij}-ն Կրոնեկեր-Կապպելլիի սիմվոլն է՝

$$\delta_{0i} = \begin{cases} 1, & \text{եթե } \; i = j \\ 0, & \text{եթե } \; i \neq j \end{cases}$$

Այժմ ենթադրենք՝

$$q_i = \frac{n+1-i}{n+1} p_i \left(1 - \delta_{(n+1)i}\right) + \frac{i}{n+1} p_{i-1} (1 - \delta_{0i}), \quad i = 0, \dots, n+1$$



Նկ. 1.4

Նշենք, որ $p_n + 1$ և p_{-1}-ը զրոյական գործակիցներով մտնում են վերջին հավասարման մեջ, այդ պատճառով էլ անհրաժեշտություն չկա վերաորոշել այդ կետերը:

Նկար 1.4-ում ցույց է տրված Բեզյեի կորի հենքային կետերի թվի ավելացումը:

ԳԼՈՒԽ 3

ՀՐԹԻՌԻ ՀԵՏԱԳԾԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ ՍՓԼԱՅՆԵՐԻ ՄԻՋՈՑՈՎ

Հրթիռի հետագծման կանխատեսում էրմիթի սփլայնով նախագիծ է, որն ուղղված է Հրթիռի սահուն հետագծերի կանխատեսման և ստեղծման համակարգի մշակմանը, օգտագործելով հերմիթյան սփլայն ինտերպոլացիայի տեխնիկան:

Ծրագրի ակնարկ

1. Խնդրի հայտարարություն:

1) Ծրագիրը նպատակ ունի լուծելու հրթիռի՝ կանխորոշված ճանապարհային կետերի կամ դինամիկ փոփոխվող միջավայրերի միջոցով արդյունավետ և սահուն նավարկելու անհրաժեշտությունը:
2) Այն կենտրոնանում է հետագծերի կանխատեսման վրա, որոնք և՛ իրագործելի են, և՛ օպտիմիզացված հրթիռի նավիգացիոն առաջադրանքների համար:

2. Նպատակը:

1) Մշակել համակարգ, որը կարող է կանխատեսել անօդաչու թռչող սարքերի հետագծերը՝ հիմնվելով տվյալ մուտքային պարամետրերի վրա, ինչպիսիք են սկզբնական և վերջնական դիրքերը, արագությունները, արագացումները և սահմանափակումները:
2) Իրականացնել էրմիթյան սփլայն ինտերպոլացիայի ալգորիթմներ՝ ստեղծելու հարթ և շարունակական հետագծեր, որոնք կհամապատասխանեն սահմանված սահմանափակումներին և նպատակներին:

3. Հիմնական բաղադրիչները:

1) Մուտքային տվյալներ. Սահմանենք սկզբնական և վերջնական դիրքերը, արագությունները, արագացումները և հետագծի կանխատեսման համար պահանջվող ցանկացած սահմանափակում կամ ճանապարհակետ:
2) Էրմիթյան սփլայն. Իրականացնել ալգորիթմներ հարթ հետագծեր ստեղծելու համար՝ օգտագործելով էրմիթի սփլայն ինտերպոլացիայի տեխնիկան: Սա ներառում է հսկիչ կետերի, շոշափող վեկտորների և գծային կորերի ինտերպոլացիա:

3) Հետագծի կանխատեսման մոդուլ. Մշակեք մոդուլ կամ ալգորիթմ, որն ընդունում է մուտքային տվյալները և օգտագործում է հերմիտյան սպլայն ինտերպոլացիա հրթիռների հետագծերը կանխատեսելու համար:
4) Վիզուալիզացիա. Ստեղծենք վիզուալիզացիայի բաղադրիչ՝ կանխատեսված հետագծերը քարտեզի կամ 3D միջավայրի վրա ցուցադրելու համար, որը թույլ է տալիս օգտվողներին պատկերացնել հրթիռի ուղին:

Ծրագիր

JS ծրագրավորման լեզվով գրված մասը

```
let map;

let i = 0;

const points = [

   {lat: 40.19003, lng: 44.52147},//NPUA

   {lat: 40.18815, lng: 44.51901},//Paplavok

   {lat: 40.19109, lng: 44.51561},//Cascade

   {lat: 40.18755, lng: 44.51058},//Bryusov

   {lat: 40.18602, lng: 44.51515},//Opera

   {lat: 40.18437, lng: 44.51914},//Church

   {lat: 40.18413, lng: 44.52231},//Loft

   {lat: 40.18178, lng: 44.52559},//YSU

   {lat: 40.180814, lng: 44.516991},//Somewhere between hotels

   {lat: 40.17772, lng: 44.51263}// Republic Square

]

const tangents = [

   {lat: 0.8, lng: 0.1},
```

```
    {lat: 0.1, lng: 0.8},
    {lat: 0.1, lng: -0.8},
    {lat: 0.8, lng: 0.1},
    {lat: 0.8, lng: 0.1},
    {lat: 0.8, lng: 0.01},
    {lat: 0.1, lng: 0.8},
    {lat: -0.8, lng: 0.01},
    {lat: 1, lng: 0.001},
    {lat: 1, lng: 0}
]
function drawPoints(map) {
    points.forEach(value =>
        new google.maps.Marker({
            position: value,
            map: map,
        })
    )
    buttonsVisibilityChange("points", "spline");
}
function drawSpline(map) {
    // Discretize the spline (adjust the number of segments for smoothness)
    const segments = 100;
    // Create an empty array to store polylines
```

```
const polylines = [];
// for (let i = 0; i < points.length - 1; i++) {
for (let j = 0; j < segments; j++) {
  const {
    p0,
    p1,
    p2,
    p3
  } = calculateBezierPoints(points[i], points[i + 1], tangents[i], tangents[i + 1], j / segments);
  const segmentPoints = sampleBezierCurve(p0, p1, p2, p3, 100); // Sample 100 points for
smoother curve
  const polyline = new google.maps.Polyline({
    path: segmentPoints,
    strokeColor: "#0000FF", // Example color, adjust as needed
    strokeOpacity: 0.8,
    strokeWeight: 2,
    map: map,
  });
  polylines.push(polyline);
}
// }
i++;
document.getElementById("spline").innerText = `Draw part ${i + 1}`
```

```
    console.log(i)
    if (i === points.length - 1) {
        buttonsVisibilityChange("spline", "reset");
    }
}
function buttonsVisibilityChange(hideId, visibleId) {
    const hideButton = document.getElementById(hideId);
    hideButton.style.display = 'none';
    const visibleButton = document.getElementById(visibleId);
    visibleButton.style.display = 'block';
}
function initMap() {
    // Define the map center and zoom level
    const mapCenter = {lat: 40.1852, lng: 44.5185};
    const zoomLevel = 15;
    // Create a map object
    map = new google.maps.Map(document.getElementById("map"), {
        center: mapCenter,
        zoom: zoomLevel,
    });
}
// Function to calculate Bézier control points using de Casteljau's algorithm
function calculateBezierPoints(start, end, t0, t1, t) {
```

```
const p0 = start;

const p3 = end;

// Use linear interpolation to find intermediate points

const p1 = {

  lat: p0.lat + t0.lat * (p3.lat - p0.lat),

  lng: p0.lng + t0.lng * (p3.lng - p0.lng),

};

const p2 = {

  lat: p3.lat + t1.lat * (p0.lat - p3.lat),

  lng: p3.lng + t1.lng * (p0.lng - p3.lng),

};

// Use linear interpolation again to find points on the final segment

const q0 = {

  lat: p0.lat + t.lat * (p1.lat - p0.lat),

  lng: p0.lng + t.lat * (p1.lng - p0.lng),

};

const q1 = {

  lat: p1.lat + t.lat * (p2.lat - p1.lat),

  lng: p1.lng + t.lat * (p2.lng - p1.lng),

};

const q2 = {

  lat: p2.lat + t.lat * (p3.lat - p2.lat),

  lng: p2.lng + t.lat * (p3.lng - p2.lng),
```

```
    };
    // Final interpolated point on the Bézier curve
    const p = {
        lat: q0.lat + t.lat * (q1.lat - q0.lat),
        lng: q0.lng + t.lat * (q1.lng - q0.lng),
    };
    return {p0, p1, p2, p3};
}
// Function to sample points from a Bézier curve using linear interpolation
function sampleBezierCurve(p0, p1, p2, p3, numSamples) {
    const curvePoints = [];
    for (let i = 0; i <= numSamples; i++) {
        const t = i / numSamples;
        const x = (1 - t) ** 3 * p0.lng + 3 * (1 - t) ** 2 * t * p1.lng + 3 * (1 - t) * t ** 2 * p2.lng + t ** 3 *
p3.lng;
        const y = (1 - t) ** 3 * p0.lat + 3 * (1 - t) ** 2 * t * p1.lat + 3 * (1 - t) * t ** 2 * p2.lat + t ** 3 *
p3.lat;
        curvePoints.push({lat: y, lng: x});
    }
    return curvePoints;
}
```

CSS ծրագրավորման լեզվով գրված մասը

```
#map {
    width: 100%;
```

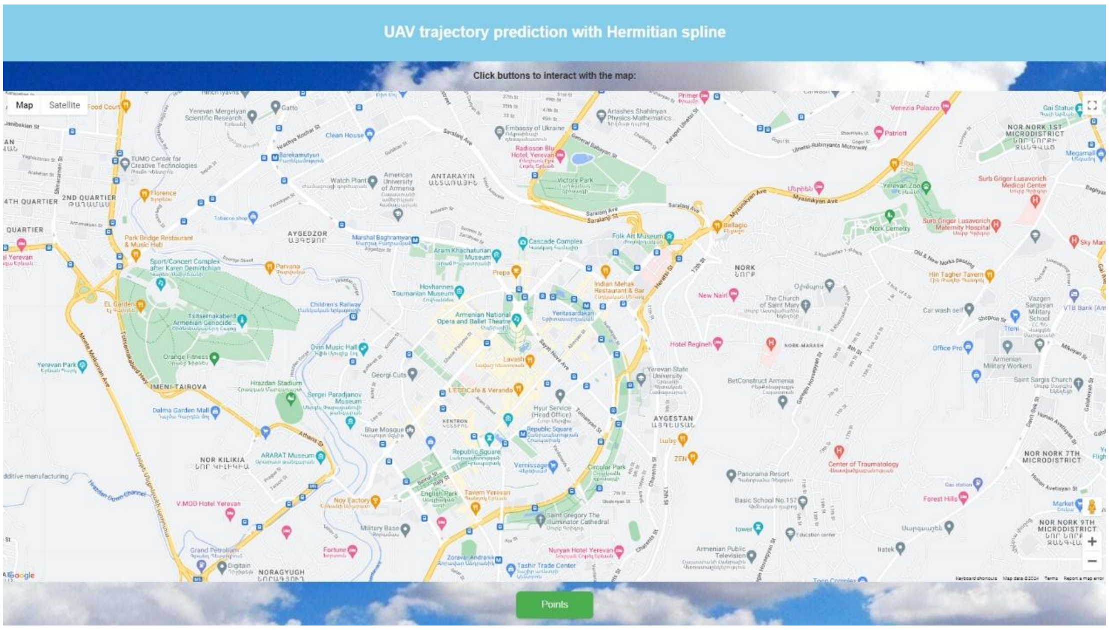
```
    height: 90vh;
}
#spline {
    display: none;
}
#reset {
    display: none;
}
```

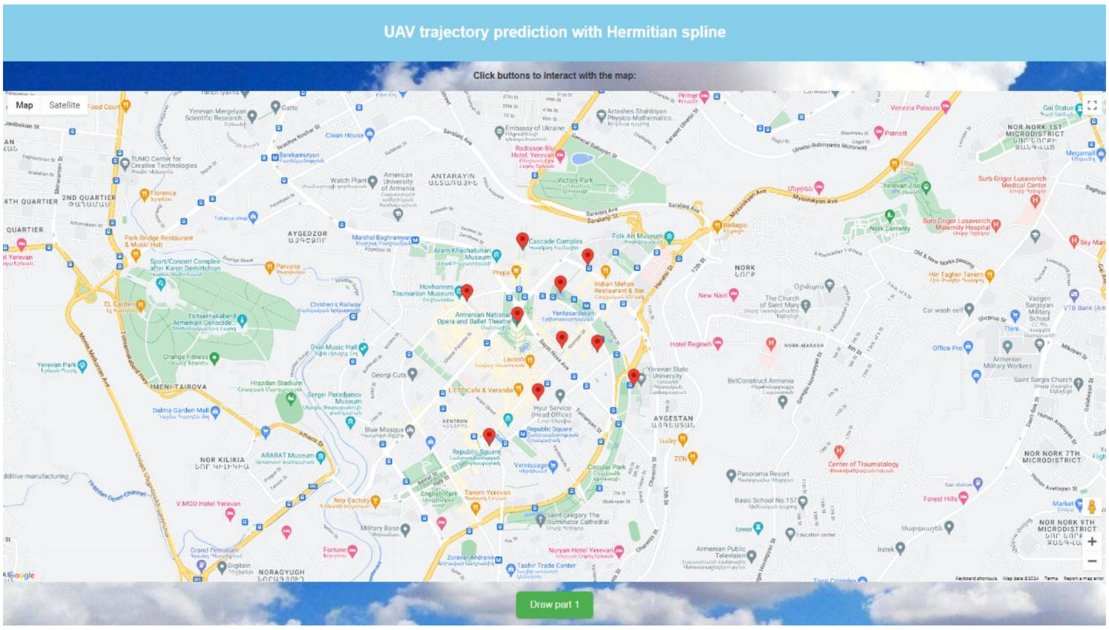
HTML ծրագրավորման լեզվով գրված մասը

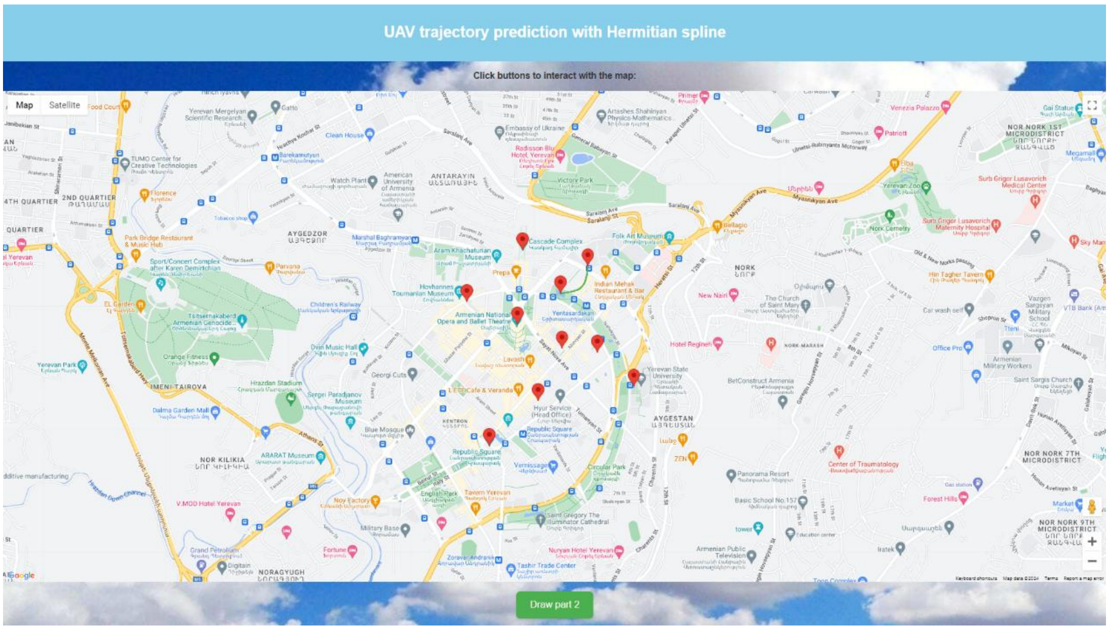
```
<!DOCTYPE html>
<html lang="en">
<head>
    <meta charset="UTF-8">
    <title>Title</title>
    <link rel="stylesheet" href="./spline-map.css">
</head>
<body>
<div id="map"></div>
<script src="spline.js"></script>
<script async defer
src="https://maps.googleapis.com/maps/api/js?callback=initMap&key=API_KEY "
        type="text/javascript">
</script>
```

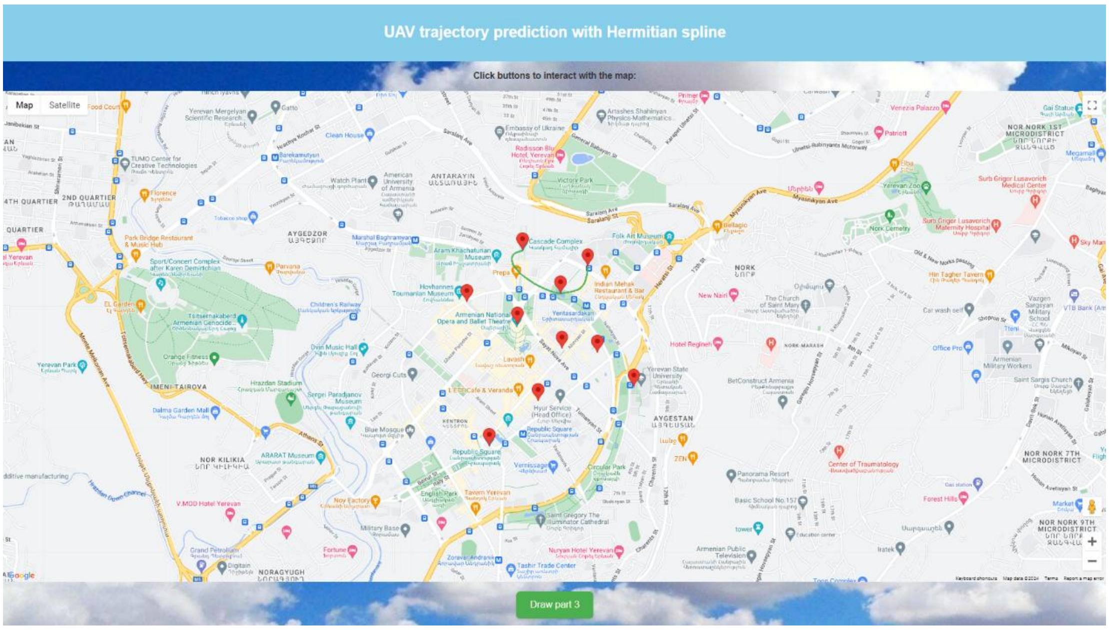
```
<button type="button" onclick="drawPoints(map)" id="points">Points</button>

<button type="button" onclick="drawSpline(map)" id="spline">Draw part 1</button>

<button type="button" onclick="reset(map)" id="reset">Reset Map</button>

</body>

</html>
```

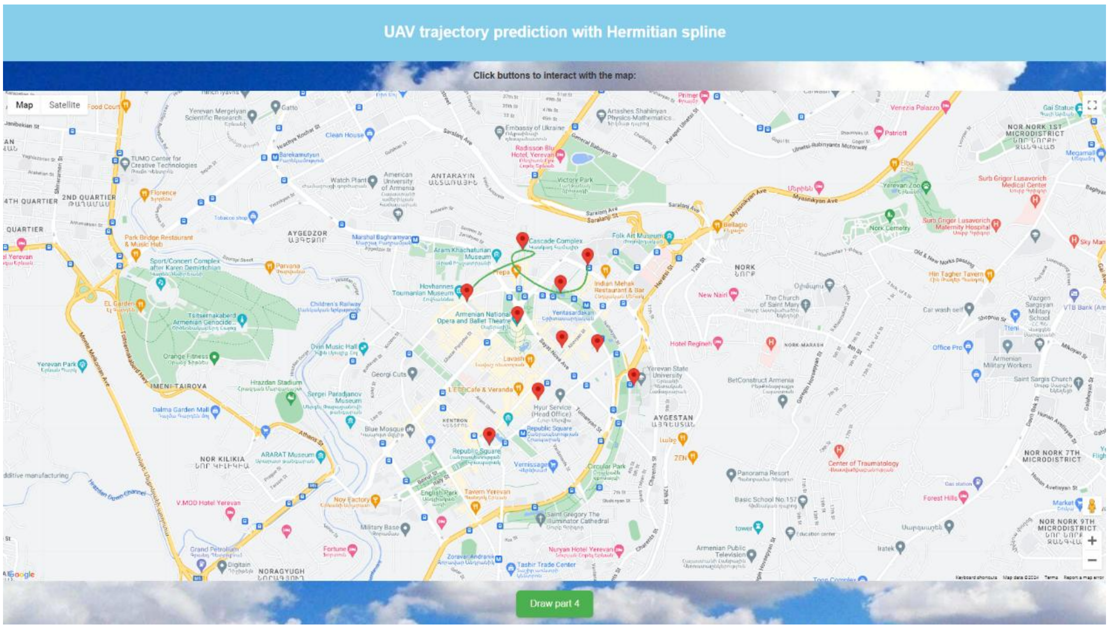
Դիտարկենք ծրագրի աշխատանքի օրինակ Երևանում վերցնելով 10 կետ։

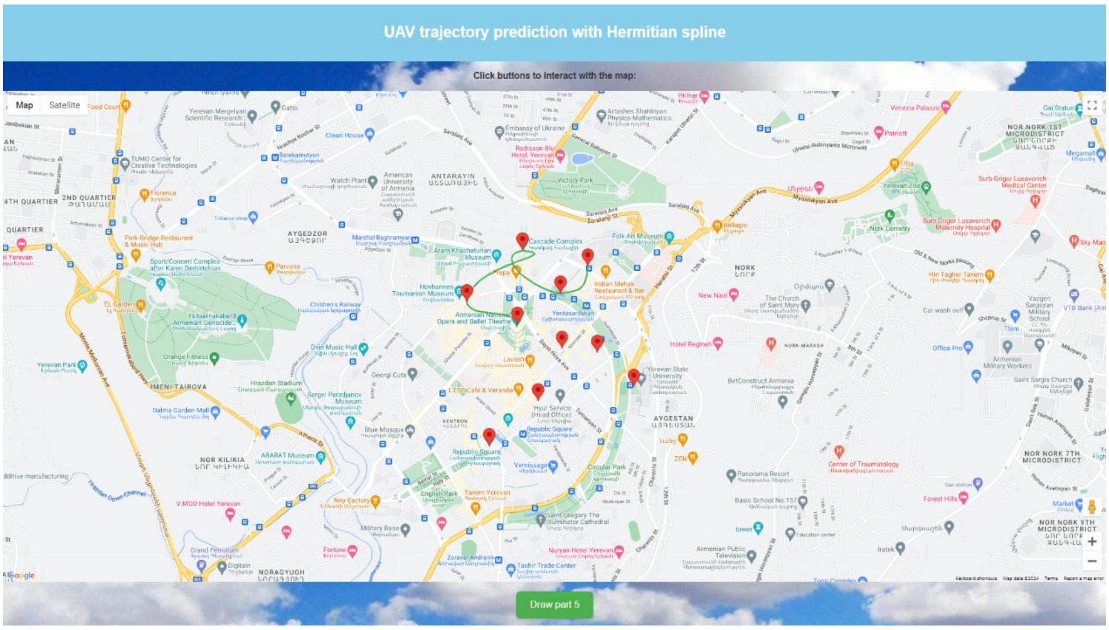


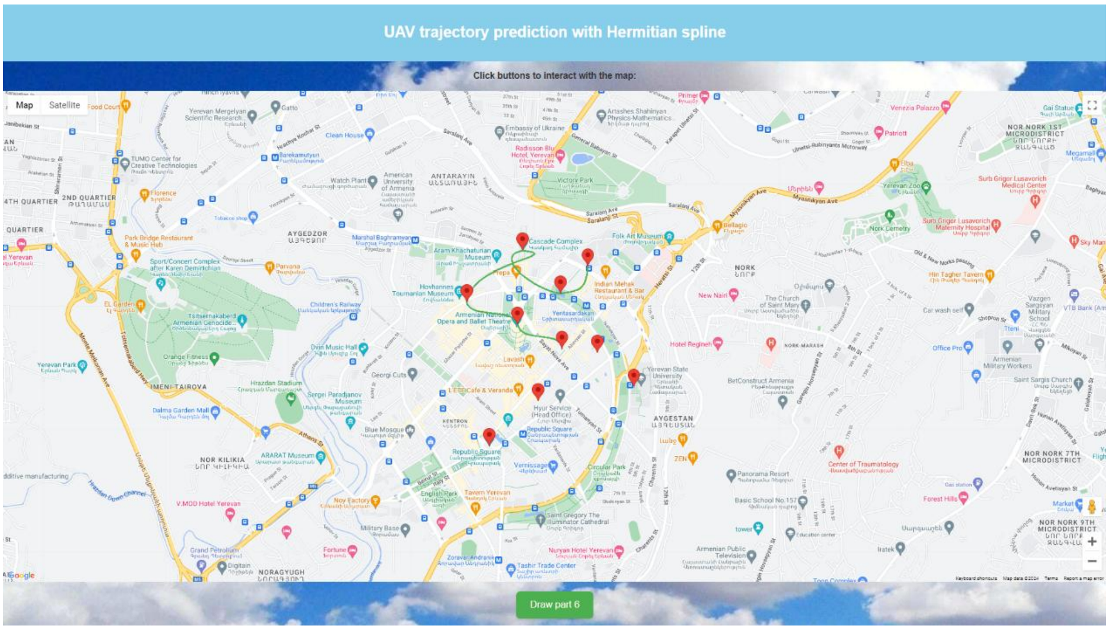


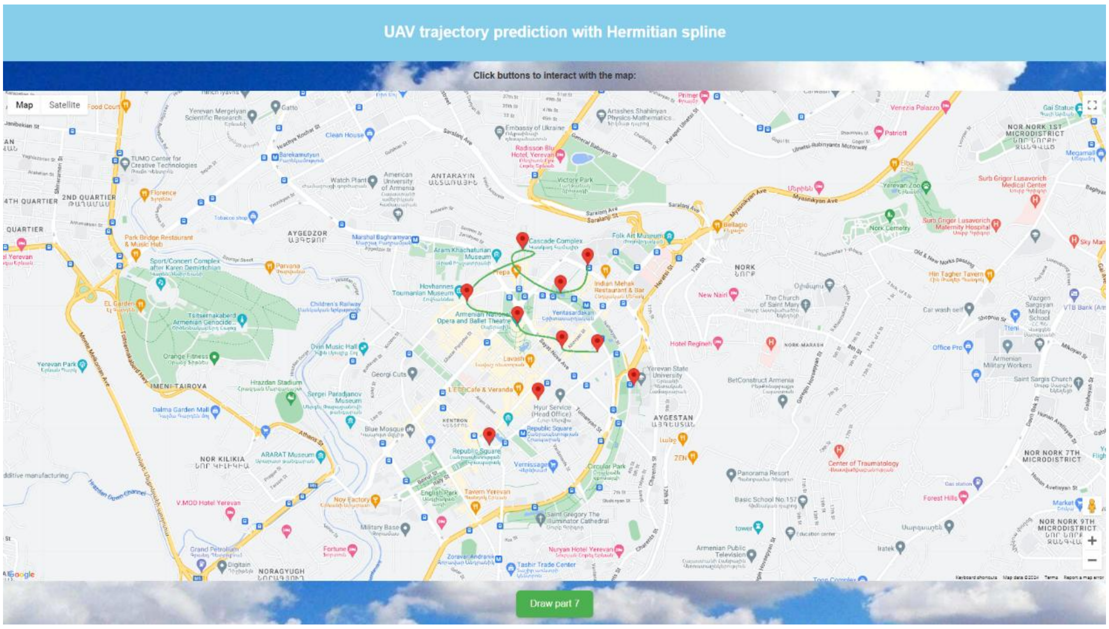

UAV trajectory prediction with Hermitian spline
Click buttons to interact with the map:
Map
Satellite
Draw part 2

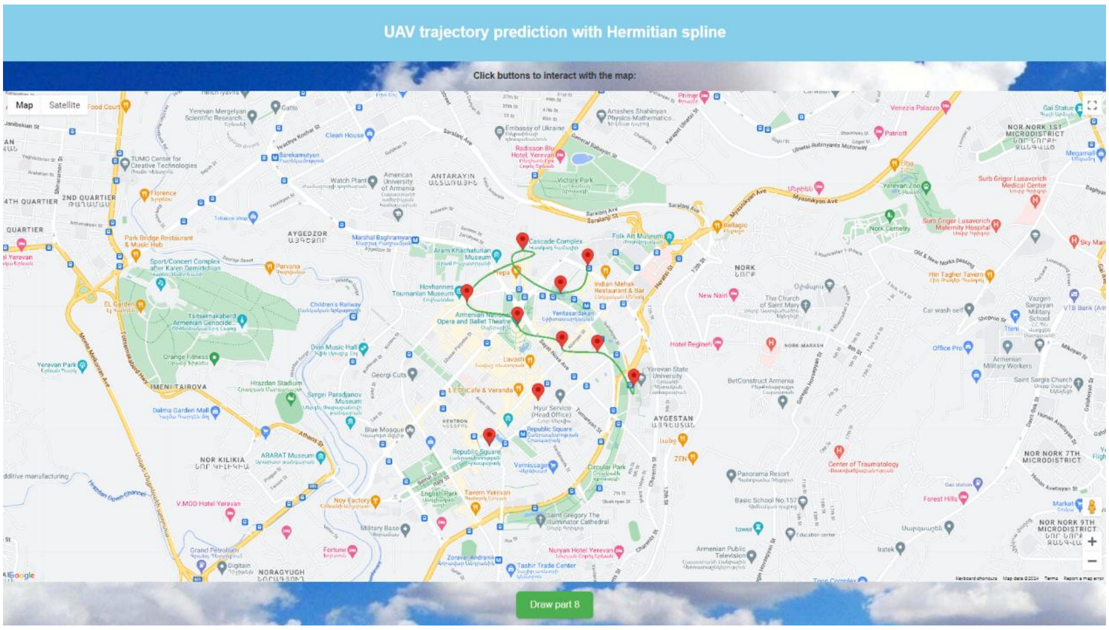

UAV trajectory prediction with Hermitian spline
Click buttons to interact with the map:
Map
Satellite
Draw part 3

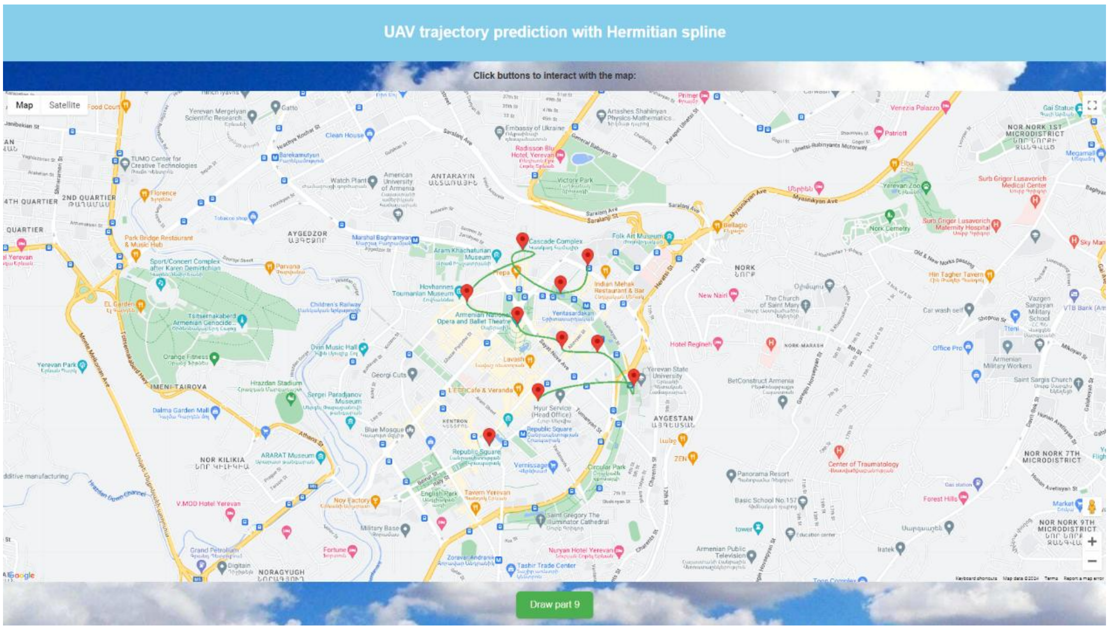

UAV trajectory prediction with Hermitian spline
Click buttons to interact with the map:
Map
Satellite
Draw part 4

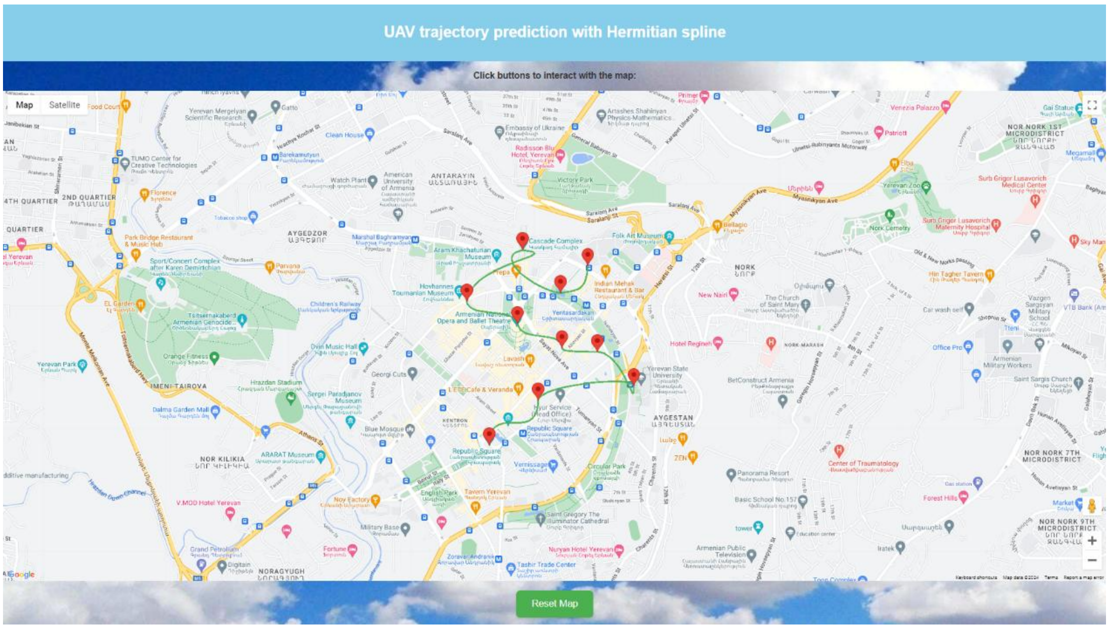

UAV trajectory prediction with Hermitian spline
Click buttons to interact with the map:
Draw part 5


UAV trajectory prediction with Hermitian spline
Click buttons to interact with the map:
Draw part 6


UAV trajectory prediction with Hermitian spline
Click buttons to interact with the map:
Draw part 7


UAV trajectory prediction with Hermitian spline
Click buttons to interact with the map:
Map
Satellite
Draw part 8


UAV trajectory prediction with Hermitian spline
Click buttons to interact with the map:
Map
Satellite
Draw part 9


UAV trajectory prediction with Hermitian spline
Click buttons to interact with the map:
Map
Satellite
Reset Map