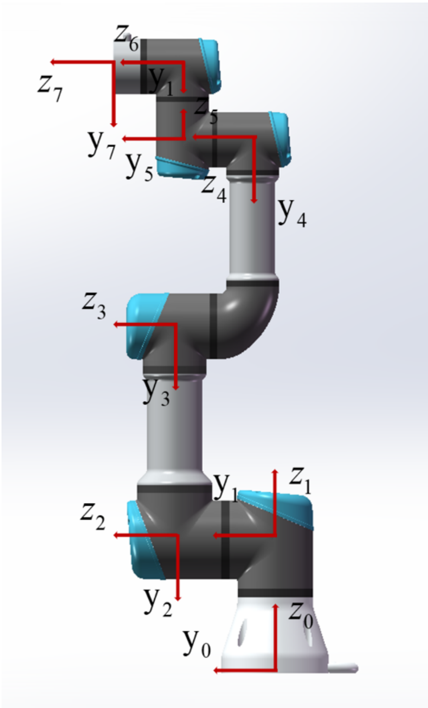
嵌入式机器人课程作业

2018 级数据科学班

赵呈亮 201800820179

1.坐标建立与 DH 参数求解

将 UR3 机械臂竖直放置，按照 DH 参数建立要求：以旋转轴为 Z 轴，建立坐标系 具体如下



所以根据题中所给的 UR3 机械臂各关节长度等参数，计算 **DH 参数**表如下

i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	$\pi/2$	0	151.9	θ_1
2	0	-243.7	86.85	θ_2
3	0	-213	-92.85	θ_3
4	$\pi/2$	0	83.4	θ_4
5	$-\pi/2$	0	83.4	θ_5
6	0	0	83.4	θ_6

2. 正运动学求解

根据 UR3 机器人得各连杆坐标系，已知两相邻间位置关系，按照从左到右得原则得到：

$$ {}^{i-1}_{i}T = Rot(x,\alpha_{i-1})Trans(x,a_{i-1})Rot(z,\theta_i)Trans(z,d_i) $$

变换矩阵展开得到：

$$ {}^{i-1}_{i}T = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i\cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i)\cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i\sin(\alpha_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

公式共 $i = 1,2,3,4,5,6$

为表示方便，在以下计算中采用以下记号：

$$ \begin{aligned} c_i &= \cos\theta_i \\ s_i &= \sin\theta_i \\ c_{ij} &= \cos(\theta_i+\theta_j) \\ s_{ij} &= \sin(\theta_i+\theta_j) \\ c_{ijk} &= \cos(\theta_i+\theta_j+\theta_k) \\ s_{ijk} &= \sin(\theta_i+\theta_j+\theta_k), \end{aligned} $$

讲 DH 参数表带入上述公式 分别得到如下矩阵

$$ {}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}_{4}^{3}T=\begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}_{5}^{4}T=\begin{bmatrix} c_5 & 0 & -s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}_{6}^{5}T=\begin{bmatrix} c_6 & -s_5 & 0 & 0 \\ s_6 & \mathrm{c}_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

相对于基坐标系的变换矩阵为：

$$ {}_{6}^{0}T={}_{1}^{0}T\,{}_{2}^{1}T\,{}_{3}^{2}T\,{}_{4}^{3}T\,{}_{5}^{4}T\,{}_{6}^{5}T=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

式中展开后各式结果如下：

$$ \begin{cases} n_x=c_6(s_1s_5+c_5c_1c_{234})-s_6c_1s_{234} \\ n_{\mathrm{y}}=c_6(c_5s_1c_{234}-c_1c_5)-s_6c_1s_{234} \\ n_z=c_5c_6s_{234}+c_{234}s_6 \\ o_x=-s_6(c_5c_1c_{234}+s_1s_5)-c_6c_1s_{234} \\ o_{\mathrm{y}}=-s_6(c_5s_1c_{234}-c_1c_5)-c_6s_1s_{234} \\ o_z=c_6c_{234}-c_5s_6s_{234} \\ a_x=-s_5c_1c_{234}+c_5c_1 \\ a_y=-s_5s_1c_{234}-c_1c_5 \\ a_z=-s_5c_{234} \\ p_x=d_5c_1s_{234}+d_4s_1+d_6(c_5s_1-s_5c_1c_{234})+a_2c_1c_2+a_3c_1c_{234} \\ p_{\mathrm{y}}=d_5c_1s_{234}-d_4s_1-d_6(s_5c_1c_{234}-c_5c_1)+a_2s_1c_2+a_3c_1c_{234} \\ p_z=d_1-d_5c_{234}+a_2s_2-d_6s_5s_{234} \end{cases} $$

3. 逆运动学求解

由第一问求得变换矩阵进行如下运算

3.1 关节 1 的求解：

已知${}_6^0T={}_1^0T\,{}_2^1T\,{}_3^2T\,{}_4^3T\,{}_5^4T\,{}_6^5T=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 所以

$${}_1^0T^{-1}\cdot T\cdot {}_6^5T^{-1}={}_5^1T={}_2^1T\cdot {}_3^2T\cdot {}_4^3T\cdot {}_6^5T$$

因为${}_1^0T^{\text{-}1}=\begin{bmatrix} \mathrm{c}_1 & \mathrm{s}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ \mathrm{s}_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}_6^5T^{\text{-}1}=\begin{bmatrix} \mathrm{c}_6 & \mathrm{s}_6 & 0 & 0 \\ -\mathrm{s}_6 & \mathrm{c}_6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

所以，${}_1^0T^{-1}\cdot T\cdot {}_6^5T^{-1}=$

$$\begin{bmatrix} c_6(n_xc_1+n_ys_1)-s_6(o_xc_1+o_ys_1) & s_6(n_xc_1+n_ys_1)+c_6(o_xc_1+o_ys_1) & a_xc_1+a_ys_1 & p_xc_1-d_6(a_xc_1+a_ys_1)+p_xs_1 \\ n_xc_6-o_zc_6 & o_zc_6+n_zs_6 & a_z & p_z-d_1-a_zd_6 \\ s_6(o_yc_1-o_xs_1)-c_6(n_yc_1+n_xs_1) & -s_6(n_yc_1-n_xs_1)-c_6(o_yc_1-o_xs_1) & a_xs_1-a_yc_1 & -p_xc_1+d_6(a_yc_1-a_xs_1)+p_xs_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

而${}_2^1T\cdot {}_3^2T\cdot {}_4^3T\cdot {}_5^4T=\begin{bmatrix} c_{234}c_5 & -s_{234} & -c_{234}s_5 & a_3c_{23}+a_2c_2+d_5s_{234} \\ s_{234}c_5 & c_{234} & -s_{234}s_5 & a_3s_{23}+a_2s_2-d_5c_{234} \\ s_5 & 0 & c_5 & d_2+d_3+d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

根据两式第三行第四列位置元素相等，有$d_2+d_3+d_4=-p_xc_1+d_6(a_yc_1-a_xs_1)+p_xs_1$

令$m=d_6a_y-p_y, n=a_xd_6-p_x$, 有

$$\theta_1=a\tan 2(m,n)-a\tan 2(d_2+d_3+d_4,\pm\sqrt{m^2+n^2-d_4^2})$$

共有两个解。

3.2 关节 5 的求解：

等式两边第三行第三列元素相等，$c_5 = a_x s_1 - a_y c_1$ ，得到

$$\theta_5 = \pm \arccos(a_x s_1 - a_y c_1)$$

关节 5 共有四个解

3.3 关节 6 的求解：

等式两边第三行第一列元素相等，有 $s_5 = s_6(o_y c_1 - o_x s_1) - c_6(n_y c_1 - n_x s_1)$

令 $m_2 = n_x s_1 - n_y c_1, n_2 = o_x s_1 - o_y c_1$,有

$$\theta_6 = a\tan 2(m_2, n_2) - a\tan 2(s_5, 0)$$

共关节 6 有四个解。

3.4 关节 3 的求解：

已知 ${}_6^0T = {}_1^0T\,{}_2^1T\,{}_3^2T\,{}_4^3T\,{}_5^4T\,{}_6^5T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 所以

${}_1^0T^{-1} \cdot T \cdot {}_6^5T^{-1} \cdot {}_5^4T^{-1} = {}_4^1T = {}_2^1T \cdot {}_3^2T \cdot {}_4^3T$

因为 ${}_5^4T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & \sin\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_5 \\ -\sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

所以，${}_1^0T^{-1} \cdot T \cdot {}_6^5T^{-1} \cdot {}_5^4T^{-1} =$

$$
\begin{bmatrix}
c_5(c_6(n_xc_1+n_ys_1)-s_6(o_xc_1+o_ys_1))-s_5(a_xc_1+a_ys_1) & s_5(c_6(n_xc_1+n_ys_1)-s_6(o_xc_1+o_ys_1))-c_5(a_xc_1+a_ys_1) & -(s_6(n_xc_1+n_ys_1)+c_6(o_xc_1+o_ys_1))a_xc_1+a_ys_1 & d_5(s_6(n_xc_1+n_ys_1)+c_6(o_xc_1+o_ys_1))+p_xc_1-d_6(a_xc_1+a_ys_1)+p_xs_1 \\
c_5(n_xc_6-o_zc_6)-s_5a_z & s_5(n_xc_6-c_zs_6)+c_5a_z & -(o_zc_6+n_zs_6) & d_5((o_zc_6+n_zs_6)+p_z-d_1-a_zd_6 \\
c_5(c_6(o_yc_1-o_xs_1)-c_6(o_xc_1-o_ys_1))-s_5(a_xc_1+a_ys_1) & s_5(s_6(o_yc_1-o_xs_1)-c_6(o_xc_1-o_ys_1))+c_5(a_xc_1-a_ys_1) & s_6(n_yc_1-n_xs_1)+c_6(o_yc_1-o_xs_1) & d_5(-s_6(n_yc_1-n_xs_1)-c_6(o_yc_1-o_xs_1))-p_xc_1+d_6(a_yc_1-a_xs_1)+p_xs_1 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

因为 ${}_2^1T \cdot {}_3^2T \cdot {}_4^3T=\begin{bmatrix} c_{234} & 0 & s_{234} & a_3c_{23}+a_2c_2 \\ s_{234} & 0 & -c_{234} & a_3s_{23}+a_2s_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2+d_3+d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

由等式第一行第四列元素相等，第二行第四列元素相等，有

$d_5(s_6(n_xc_1+n_ys_1)+c_6(o_xc_1+o_ys_1))+p_xc_1-d_6(a_xc_1+a_ys_1)+p_xs_1=a_3c_{23}+$
$a_2c_2d_5(o_zc_6+n_zs_6)+p_z-d_1-a_zd_6=a_3c_{23}+a_2c_2$

令 $\mathrm{m}_3=d_5(s_6(n_xc_1+n_ys_1)+c_6(o_xc_1+o_ys_1))+p_xc_1-d_6(a_xc_1+a_ys_1)+p_xs_1$

$n_3=d_5((o_zc_6+n_zs_6)+p_z-d_1-a_zd_6$

$$\theta_3=\pm\arccos(\frac{{m_3}^2+{n_3}^2-a_2^2-a_3^2}{2a_2a_3})$$

关节 3 共有 8 个解

3.5 关节 2 的求解：

同时，有 $s_2=\dfrac{(a_3c_3+a_2)n_3-a_3s_3m_3}{a_2^2+a_3^2+2a_2a_3c_3},c_2=\dfrac{m_3+a_3s_3s_2}{a_3c_3+a_2}$

得到

$$\theta_2=\mathrm{atan2}(\mathrm{s}_2,\mathrm{c}_2)$$

有关节 2 八个解

3.6 关节 4 的求解：

根据 ${}_1^0T^{-1}\cdot T\cdot {}_6^5T^{-1}={}_5^1T={}_2^1T\cdot{}_3^2T\cdot{}_4^3T\cdot{}_5^4T$，有

$$-s_{234} = s_6(n_x c_1 + n_y s_1) + c_6(o_x c_1 + o_y s_1)$$
$$c_{234} = o_z c_6 + n_z s_6$$

因此

$$\theta_4 = \text{atan2}(-s_6(n_x c_1 + n_y s_1) - c_6(o_x c_1 + o_y s_1) - o_z c_6 + n_z s_6) - \theta_2 - \theta_3$$

共有八个解