Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ
Instituto de Ciências Exatas - ICE
Departamento de Matemática - DEMAT
Primeira Prova - IC242 Cálculo II - T01 Data: 08/09/2025

Aluno: ______________________ Matricula: ______________

Questão 1: (2 ½ pontos)

Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região R entre a função $f(x) = x^3$ no intervalo $[1,2]$ e a reta $y = 0$, em torno:

(a) (1 ponto) do eixo x;

> ***Solução:*** *Vamos calcular o volume usando o método dos discos, ou seja*
>
> $$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx.$$
>
> *No caso:*
>
> $$V = \pi \int_1^2 (x^3)^2\, dx = \pi \int_1^2 x^6\, dx = \pi \left[\frac{x^7}{7}\right]_{x=1}^{x=2} = \pi\left(\frac{128-1}{7}\right).$$
>
> *Logo, o volume do sólido vale*
>
> $$V = \frac{127\pi}{7}\ u.v.$$

(b) (1 ½ pontos) da reta $x = 3$.

> ***Solução:*** *Agora vamos calcular o volume usando casca cilíndrica, i.e.*
>
> $$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$
>
> *Aqui,*
>
> $$44V = 2\pi \int_1^2 (3-x)x^3\, dx.$$
>
> *Expandindo:*
>
> $$V = 2\pi \int_1^2 \left(-x^4 + 3x^3\right) dx.$$
>
> *Resolvendo:*
>
> $$V = 2\pi\left[-\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{4}\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{101\pi}{10}.$$
>
> *Portanto, o volume do sólido vale*
>
> $$V = \frac{101\pi}{10}\ u.v.$$

Questão 2: (2 ½ pontos)

Obtenha um valor $a > 1$ de tal forma que ao girarmos em torno da reta $y = 0$ (eixo dos x) a região compreendida entre as curvas $y = 1$, $x = a$, $x = 1$, e $y = \sqrt{x}$, o sólido gerado tenha volume igual a 2π u.v. (unidades de volume).

> ***Solução:*** *Seja a região limitada por $y = \sqrt{x}$ e $y = 1$, com $x = 1$ até $x = a$. Vamos calcular o volume do sólido de revolução em torno do eixo y, usando cascas cilíndricas:*
>
> $$V = 2\pi \int_1^{\sqrt{a}} y(a - y^2)\, dy.$$

Fazendo a substituição $u = a - y^2$, $du = -2y\,dy$, temos:

$$V = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int (a - y^2)(2y\,dy) = \pi \int (a - y^2)\,du.$$

Resolvendo:

$$V = 2\pi \left[-\frac{(a-y^2)^2}{4} \right]_{x=1}^{x=\sqrt{a}} = \frac{\pi(a-1)^2}{2}.$$

Sabemos que $V = 2\pi$. Assim,

$$\frac{\pi(a-1)^2}{2} = 2\pi \quad \Rightarrow \quad (a-1)^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 3.$$

Questão 3: (2 ½ pontos)

Calcule as integrais impróprias explicitando os cálculos;

(a) (1 ponto) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$

Solução:*Seja*

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_{x=1}^{x=t}.$$

Logo,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2} \right) = \frac{1}{2}.$$

(b) (1 ½ pontos) $\displaystyle\int_1^{+\infty} te^{-st}\,dt$, para $s > 0$.

Solução:*Agora:*

$$\int_1^{\infty} te^{-st}\,dt = \lim_{a\to\infty} \int_1^{a} te^{-st}\,dt.$$

Usando integração por partes:

$$u = t \;\Rightarrow\; du = dt, \quad dv = e^{-st}dt \;\Rightarrow\; v = \frac{e^{-st}}{-s}.$$

Assim,

$$\int te^{-st}\,dt = -\frac{t}{s}e^{-st} + \frac{1}{s}\int e^{-st}\,dt = -\frac{t}{s}e^{-st} - \frac{1}{s^2}e^{-st}.$$

Portanto,

$$\int_1^{\infty} te^{-st}\,dt = \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{t}{s}e^{-st} - \frac{1}{s^2}e^{-st} \right]_{t=1}^{t=a}.$$

No limite:

$$= \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \right) e^{-s} = \left(\frac{s+1}{s^2} \right) e^{-s}.$$

Questão 4: (2 ½ pontos)

Esboce o gráfico de $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ onde

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \le 0 \\ e^{-t}, & \text{se } t > 0 \end{cases}.$$

Solução:*Seja a função $f(t)$ dada pela função degrau exponencial. Para $x \leq 0$:*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0.$$

Para $x > 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = 1 - e^{-x}.$$

Portanto,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

Não se pode ensinar nada a um homem. Só é possível ajudá-lo a encontrar a coisa dentro de si. (Galileu)

Boa Prova!