# 論理回路理論 中間課題

15_00265 朝倉 一希

**A.** 式変形により次の式が成り立つことを証明せよ。

**1.** $(x \vee y) \bigoplus (y \vee z) = (x \bigoplus z)\bar{y}$

証明

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= (x \vee y)\overline{(y \vee z)} \vee \overline{(x \vee y)}(y \vee z) \\
&= (x \vee y)(\bar{y}\bar{x}) \vee (\bar{x}\bar{y})(y \vee z) \\
&= x\bar{y}\bar{z} \vee y\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}y \vee \bar{x}\bar{y}z \\
&= x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \\
(\text{右辺}) &= (x\bar{z} \vee \bar{x}z)\bar{y} \\
&= x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z
\end{aligned}$$

ゆえに、与式は成り立つ。□

**2.** $xyz \leq (x \vee y)(y \vee z)(z \vee x)$

証明

与式は $\overline{xyz} \vee (x \vee y)(y \vee z)(z \vee x) = 1$ と同値であるため、この式が成り立つことを示せばよい。

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \overline{xyz} \vee (xy \vee zx \vee yy \vee yz)(z \vee x) \\
&= \overline{xyz} \vee (xyz \vee xxy \vee zzx \vee zxx \vee yyz \vee xyy \vee yzz \vee xyz) \\
&= \overline{xyz} \vee xyz \vee xy \vee yz \vee zx \\
&= 1 \vee xy \vee yz \vee zx = 1
\end{aligned}$$

ゆえに、与式は成り立つ。□

**B.** 論理関数 $F(w, x, y, z) = w \bigoplus x \bigoplus y \bigoplus x$ について、次の問いに答えよ。

**1.** 関数 $F$ を極小項表現で表せ。

**2.** 関数 $F$ を極大項表現で表せ。

関数 $F$ の真理値表および、各入力変数値の組に対応する極小項、極大項は表 1 の通りである。
よって、極小項表現は次式のようになる。

$$F(w, x, y, z) = \bar{w}\bar{x}\bar{y}z \vee \bar{w}\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{w}x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{w}xyz \vee w\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee w\bar{x}yz \vee wx\bar{y}z \vee wxy\bar{z}$$

表1　関数 $F$ の真理値表および、各入力変数値の組に対応する極小項、極大項

| $w$ | $x$ | $y$ | $z$ | $F(w,x,y,z)$ | 極小項 | 極大項 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ | $w \vee x \vee y \vee z$ |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | $\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$ | $w \vee x \vee y \vee \bar{z}$ |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | $\bar{w}\bar{x}y\bar{z}$ | $w \vee x \vee \bar{y} \vee z$ |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | $\bar{w}\bar{x}yz$ | $w \vee x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$ |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | $\bar{w}x\bar{y}\bar{z}$ | $w \vee \bar{x} \vee y \vee z$ |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | $\bar{w}x\bar{y}z$ | $w \vee \bar{x} \vee y \vee \bar{z}$ |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | $\bar{w}xy\bar{z}$ | $w \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee z$ |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | $\bar{w}xyz$ | $w \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$ |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | $w\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ | $\bar{w} \vee x \vee y \vee z$ |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | $w\bar{x}\bar{y}z$ | $\bar{w} \vee x \vee y \vee \bar{z}$ |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | $w\bar{x}y\bar{z}$ | $\bar{w} \vee x \vee \bar{y} \vee z$ |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | $w\bar{x}yz$ | $\bar{w} \vee x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$ |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | $wx\bar{y}\bar{z}$ | $\bar{w} \vee \bar{x} \vee y \vee z$ |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | $wx\bar{y}z$ | $\bar{w} \vee \bar{x} \vee y \vee \bar{z}$ |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | $wxy\bar{z}$ | $\bar{w} \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee z$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | $wxyz$ | $\bar{w} \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$ |

極大項表現は次式のようになる。

$$\begin{aligned}F(w,x,y,z) =& (w \vee x \vee y \vee z)(w \vee x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(w \vee \bar{x} \vee y \vee \bar{z})(w \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee z)\\ & (\bar{w} \vee x \vee y \vee \bar{z})(\bar{w} \vee x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{w} \vee \bar{x} \vee y \vee z)(\bar{w} \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})\end{aligned}$$

**C.** 論理関数 $F(x_4,x_3,x_2,x_1)$ について、$F(0,0,0,0) = F(0,0,1,0) = F(0,1,0,1) = F(1,1,0,0) = F(1,0,1,1) = 1$、また、$F(0,0,1,1) = F(1,1,0,1) = F(1,0,0,0) = F(1,0,1,0) = *$ である。それ以外は $F = 0$ である。この時、次の問いに答えよ。

**1.** 関数 $F$ の双対関数 $F_d$ の真理値表を作成せよ。

$F_d = \overline{F(\bar{x_4},\bar{x_3},\bar{x_2},\bar{x_1})}$ である。この論理関数の真理値表は表 2 の通りである。

**2. 1.** で求めた関数 $F_d$ について、カルノー図を利用して簡単化し、その論理式を **NOT-AND-OR** 形式 (積和標準形) で表せ。

関数 $F_d$ のカルノー図は図 1 の通りである。よって、$F_d$ は以下のように表せる。

$$F_d(x_4,x_3,x_2,x_1) = \bar{x_3}\bar{x_2} \vee x_4\bar{x_3}x_1 \vee x_3x_2\bar{x_1}$$

表 2　関数 $F$ とその相対関数 $F_d$ の真理値表

| $x_4$ | $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ | $F(x_4, x_3, x_2, x_1)$ | $F_d(x_4, x_3, x_2, x_1)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | $*$ |
| 0 | 0 | 1 | 1 | $*$ | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | $*$ |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | $*$ |
| 1 | 0 | 0 | 0 | $*$ | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | $*$ | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | $*$ |
| 1 | 1 | 0 | 1 | $*$ | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

| $x_4x_3 \backslash x_2x_1$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | 0 | $*$ |
| 01 | 0 | $*$ | $*$ | 1 |
| 11 | $*$ | 0 | 0 | 1 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 0 |

図 1　関数 $F_d$ のカルノー図

**3.** 関数 $F$ に対する **NOT-OR-AND** 形式 (和積標準形) の回路図を書け。

$F_d$ の双対関数を求めると、元の関数 $F$ に戻る。また、式の中の OR と AND、そして 0 と 1 を入れ替えることで双対関数が求まるので、$F$ の NOT-OR-AND 形式が得られることになる。

$$F(x_4, x_3, x_2, x_1) = (\bar{x_3} \vee \bar{x_2})(x_4 \vee \bar{x_3} \vee x_1)(x_3 \vee x_2 \vee \bar{x_1})$$

この関数の回路図は図 2 の通りである。

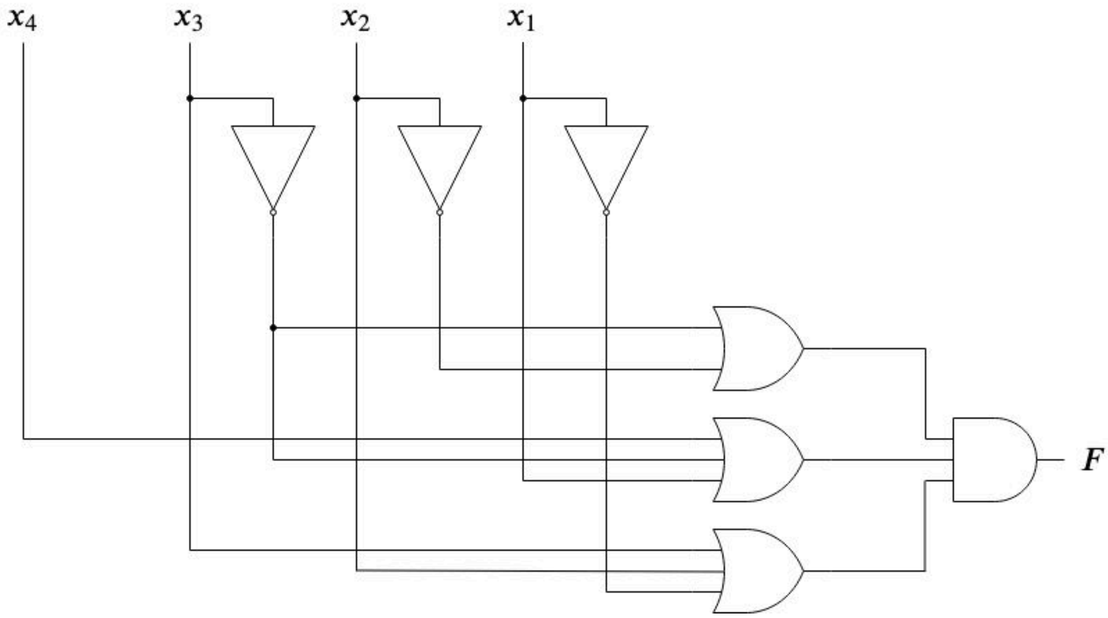


図 2　関数 $F$ に対する NOT-OR-AND 形式の回路図

**D. 論理関数** $F(x_4, x_3, x_2, x_1)$ **について、**$F(0,0,0,1) = F(1,1,1,0) = F(0,0,1,1) = F(0,1,1,0) = F(1,1,0,0) = F(0,1,0,0) = F(1,1,0,1) = F(0,1,0,1) = 1$**、また、**$F(0,1,1,1) = F(1,0,0,1) = F(1,0,1,1) = *$ **である。それ以外は** $F = 0$ **である。関数** $F$ **を、Quine-McCluskey 法を用いて簡単化し、その NOT-AND-OR 形式 (積和標準形) の論理式を求めよ。**

まず、ドントケアを 1 と解釈し、極小項の統合を行う。統合を行った結果を図 3 に示す。ここで、$p$ は肯定形変数の数であり、(a) から (c) の段階を経て統合される。この図でフラッグが立っていない項が主項である。

次に、ドントケアを 0 と解釈し、関数値を 1 とする入力変数の値の組に対する極小項と主項に対して包含図を構成する。その結果が図 4 である。この包含図を 2 段階の手法で簡約化する。第 1 段階では、ある極小項を包含する主項が 1 つしかないものを使用が確定した基本主項とし、基本主項とその主項が包含する極小項を除外する。第 1 段階簡約化した結果が図 5 である。第 2 段階では、ある極小項を包含する主項がいずれも別の極小項を包含する場合、後者の極小項を除外する。第 2 段階簡約化した結果が図 6 である。

ここで、図 6 の極小項を表現するのに必要な主項について $A = \bar{x_4}x_1$、$B = \bar{x_3}x_1$、$C = \bar{x_2}x_1$、$D = x_3\bar{x_2}$ とおくと、各極小項を表現しなければならないことを次の式で表せる。

$$(A \vee B)(C \vee D) = AC \vee AD \vee BC \vee BD$$

以上より、第 1 段階で除外した基本主項を OR で連結すると、論理関数 $F(x_4, x_3, x_2, x_1)$ を実現する NOT-AND-OR 形式の論理式が以下のように複数得られる。

$$\begin{aligned} F(x_4, x_3, x_2, x_1) &= \bar{x_4}x_1 \vee \bar{x_2}x_1 \vee x_3\bar{x_1} \\ &= \bar{x_4}x_1 \vee x_3\bar{x_2} \vee x_3\bar{x_1} \end{aligned}$$

(a)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $p=1$ | 0 | 0 | 0 | 1 | ✓ |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | ✓ |
| $p=2$ | 0 | 0 | 1 | 1 | ✓ |
| | 0 | 1 | 0 | 1 | ✓ |
| | 0 | 1 | 1 | 0 | ✓ |
| | 1 | 0 | 0 | 1 | ✓ |
| | 1 | 1 | 0 | 0 | ✓ |
| $p=3$ | 0 | 1 | 1 | 1 | ✓ |
| | 1 | 0 | 1 | 1 | ✓ |
| | 1 | 1 | 0 | 1 | ✓ |
| | 1 | 1 | 1 | 0 | ✓ |

(b)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $p=1$ | 0 | 0 | – | 1 | ✓ |
| | 0 | – | 0 | 1 | ✓ |
| | – | 0 | 0 | 1 | ✓ |
| | 0 | 1 | 0 | – | ✓ |
| | 0 | 1 | – | 0 | ✓ |
| | – | 1 | 0 | 0 | ✓ |
| $p=2$ | 0 | – | 1 | 1 | ✓ |
| | – | 0 | 1 | 1 | ✓ |
| | 0 | 1 | – | 0 | ✓ |
| | – | 1 | 0 | 1 | ✓ |
| | 0 | 1 | 1 | – | ✓ |
| | – | 1 | 1 | 0 | ✓ |
| | 1 | 0 | – | 1 | ✓ |
| | 1 | – | 0 | 1 | ✓ |
| | 1 | 1 | 0 | – | ✓ |
| | 1 | 1 | – | 0 | ✓ |

(c)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $p=1$ | 0 | – | – | 1 |
| | – | 0 | – | 1 |
| | – | – | 0 | 1 |
| | 0 | 1 | – | – |
| | – | 1 | – | 0 |
| | – | 1 | 0 | – |

図 3　極小項のグループ分けと統合

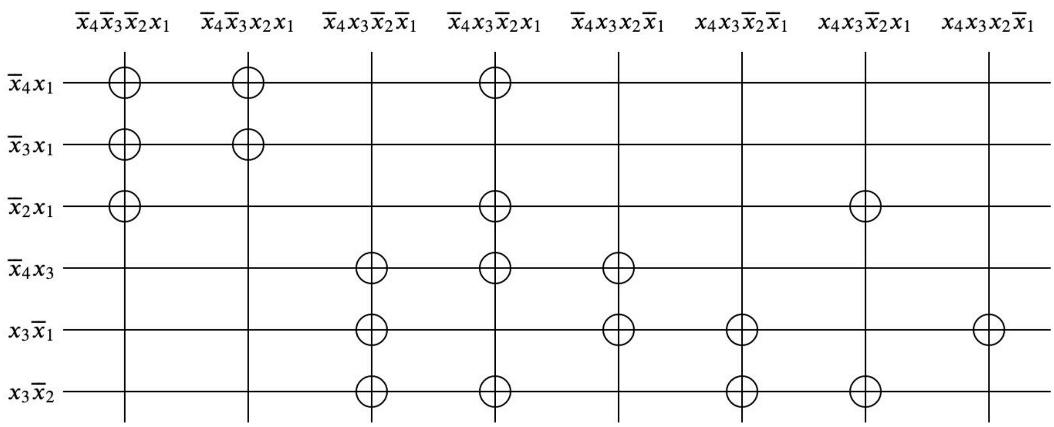


図 4　関数値 1 に対する極小項と主項の間の包含図

$$= \bar{x_3}x_1 \vee \bar{x_2}x_1 \vee x_3\bar{x_1}$$
$$= \bar{x_3}x_1 \vee x_3\bar{x_2} \vee x_3\bar{x_1}$$

これらの中で最も簡単なものを選ぶと、論理関数 $F(x_4, x_3, x_2, x_1)$ を簡単化した結果となる。

$$F(x_4, x_3, x_2, x_1) = \bar{x_3}x_1 \vee \bar{x_2}x_1 \vee x_3\bar{x_1} = \bar{x_3}x_1 \vee x_3\bar{x_2} \vee x_3\bar{x_1}$$

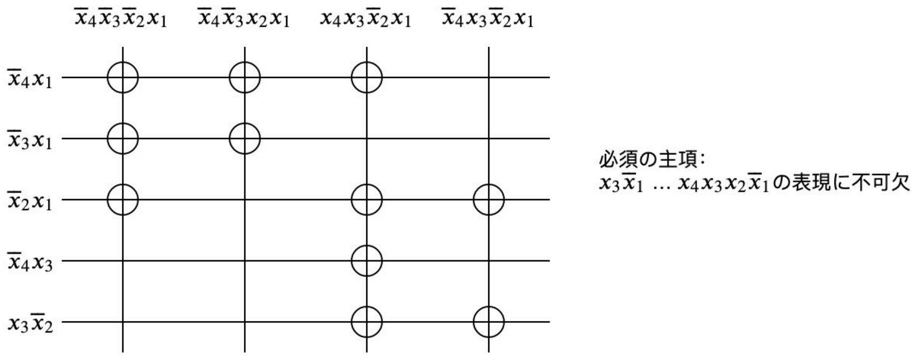


図 5　図 4 を第 1 段階簡約化したもの

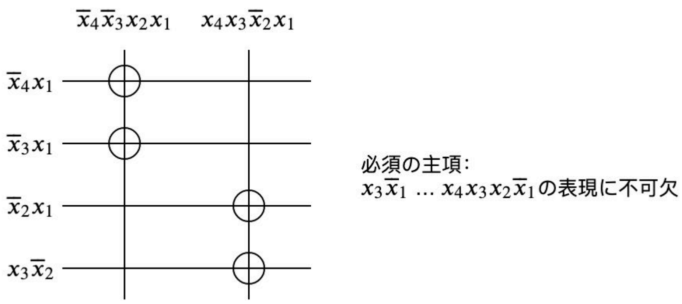


図 6　図 5 を第 2 段階簡約化したもの