a

Analyse II

Arthur Herbette
Prof. Lachowska Anna

Mercredi 30 avril 2025

Table des matières

Liste des cours

Chapitre 1

Introduction

Le but de se document est d'y faire un résumé qui se trouve entre les notes de Joachim Favre (Dont j'ai utilisé le template) et Les résumé des théorèmes disponible sur moodle. Je vais essayer de me tenir a environ une à 2 pages par cours

Chapitre 2

Equations différentielles ordinaires

Lundi 17 février 2025 — **Cours 1 : Equa Diff**

2.1 definition

Définition 1 ***Une équation différentielle ordinaire*** *est une expression*

$$E(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

où E est une expression fonctionnelle, $n \in \mathbb{N}_0$, et $y = y(x)$ est une fonction inconnue de x On cherche un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ de classe C^n telle que l'équation donnée est satisfaite $\forall x \in I$.

Equation à variable séparées

Une équation à variables séparées est une équation du type $f(y) \cdot y' = g(x)$ est une **EDVS** où :

- $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$
- $g : J \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $J \subset \mathbb{R}$

Une fonction $y : J' \subset J \to \mathbb{R}$ de classe C' satisfaisant l'équation $f(y) \cdot y' = g(x)$ est une solution

Remarque personnelle

Ce type d'équation se résoudre très rapidement car on peut transformer le y' en $\frac{dy}{dx}$ et "mettre le dx de l'autre côté" :

$$f(y) \cdot \frac{dy}{dx} = g(x) \implies \int f(y) dy = \int g(x) dx$$

Et il suffit donc t'intégrer les deux côtés et le tour est joué.

Terminologie

Soit $E(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$ (*) une équation différentielle (ED) :

- **Def :** un nombre naturel $n \in \mathbb{N}_+$ est **l'ordre** de l'équation $(*)$ si n est l'ordre maximal de dérivée de $y(x)$ dans l'équation.

- **Def :** Si (*) est de la forme $\alpha_0(x)y+\alpha_1(x)y'+\alpha_2(x)y''+\cdots+\alpha_n(x)y^{(n)} = b(x)$ alors l'équation est dire **linéaire** où $\alpha_i(x)$, $b(x)$ dont des fonctions continues
- **Def** Si l'expression (*) ne contient pas de x l'équation (*) est dire **autonome**

Problème de Cauchy

Définition 2 *Résoude* ***Le problème de Vauchy (ED avec des conditions initiales)*** *pour l'équation $E(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$ c'est de trouver l'intervalle ouvert $I\subset\mathbb{R}$ et une fonction $y:I\to\mathbb{R}$ de classe $C^n(I)$, telle que $E(x,y,\dots,y^{(n)})=0$ sur I et $y(x_0)=b_0$, $y_(x)=B,\dots,y'(x_2)=\dots$*

Le nombre des conditions initiales depend du type de l'ED

C'est ce qui se passe en physique lorsqu'on a une forme et que l'on chercher la position au court du temps :

$$\begin{aligned} ma &= F \\ a &= \frac{F}{m} \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{F}{m} \\ x = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 + c_1t + c_0 \end{aligned}$$

Et le but est de trouver ses constantes qui sont les conditions initiales.

Définition 3 *Une solution d'un problème de Cauchy est* ***maximale*** *si elle est définie sur le plus grand intervalle possible.*

2.2 Existence et unicit d'une solution de EDVS

Théorème

Théorème 1 *Soit*

- *$f:I\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(y)\neq 0\ \ \forall y\in I$*
- *$g:J\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout couple $(x_0\in J, b_0\in I)$, l'équation $f(y)\cdot y'=g(x)(**)$ admet une solution $y: J'\subset J\to I$ vérifiant la condition initiale $y(x_0)=b_0$*

Si $y_1:J_1\to I$ et $y_2:J_2\to I$ sont deux solutions telles que $y_1(x_0)=y_2(x_0)=b_0$, alors $y_1(x)=y_2(x)$ pour tout $x\in J_1\cap J_2$
(Demonstration la prochaine fois

Introduction

Définition 4 *Une* ***proposition*** *est un énoncé qui peut être vrai ou faux.*

Définition 5 *Une* ***démonstration*** *est une suite d'implication logique qui sert à dériver la proposition en question à partir des axiomes (propositions admises comme vraies) et des propositions préalablement obtenue*

2.3 Méthode de démonstration

Méthode 1

Démonstration direct :
$\underbrace{P}_{\text{condition donnée}} \implies$ implications logiques/axiomes/propositions connues $\implies \underbrace{Q}_{\text{proposition désirée}}$

> *Remarque personnelle* C'est pas vraiment très claire comme ça mais en gros ça veut juste dire que pour prouver quelque chose on y va en mode brute force (tout les nombres entiers sont des nombres réels (propositions connues) et par exemple est ce que 23 est un réel ?)

Raisonnement par contraposée

Comme vu en AICC on sait que $P \implies Q \equiv \neg P \implies \neg Q$

Mercredi 19 février 2025 — **Cours 2 : EDO**

2.3.1 Théorème Existence et unicité d'une solution de EDVS

Théorème

Théorème 2 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(y) \neq 0 \ \forall y \in I$*
$g : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout coupe $(x_0 \in J, b_0 \in I)$, l'équation

$$f(y) \cdot y'(x) = g(x)$$

admet une solution $y : J' \subset J \to I$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = b_0$.
Si $y_1 : J_1 \to I$ et $y_2 : J_2 \to I$ sont deux solutions telles que $y_1(x_0) = y_2(x_0) = b_0$, alors $y_1(x) = y_2(x)$ pour tout $x \in J_1 \cap J_2$

Démonstration

Idée : $\int f(y)dy = \int g(x)dx \implies F(y) = G(x) \implies y(x) = F^{-1}(G(x))$

Le reste de la preuve se trouve sur les pdf de Joachim Favre.

Résumé

Résumé 1 *EDVS : $f(y) \cdot y' = g(x)$ où $f : I \to \mathbb{R}$ continue (respectivement J pour g),*
Pour résoudre $\int f(y)dy = \int g(x)dx$ où $\int f(y)dy$ est une primitive (sans constante) et $\int g(x)dx$ est une primitive générale (avec une constante)

Exemple

Exemple 1 $\frac{y'(x)}{y^2(x)} = 1$ EDVS : $\frac{1}{x^2}$ est contiue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$
On a aussi que $g(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. on fait donc :

$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int dx \implies -\frac{1}{y} = x + C$$
$$y = -\frac{1}{x+C} \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

la solution générale sur $]-\infty, -C[$ et $]-C, \infty[$.
Condition initiale $y(0) = b_0 \in \mathbb{R}^* \implies y(0) = -\frac{1}{C} = b_0 \implies C = -\frac{1}{b_0}$

- Si $b_0 > 0 \implies \frac{1}{b_0} > 0 \implies y(x) = -\frac{1}{x-\frac{1}{b_0}}$ sur $]-\infty, \frac{1}{b_0}[$
  - la solution particulière
- Et vis versa pour $b_0 < 0$

2.3.2 Solution maximale

Solution maximale

Définition 6 *Une solution* ***solution maximale*** *de l'EDVS avec la condition initiale $y(x_0) = b_0$, $x \in J, b_0 \in I$ est une fonction $y(x)$ de classe C^1 satisfaisant l'équation, la condition initiale et qui est définie sur le plus* ***grand*** *intervalle possible.*
Le théorème sur EDVS dit que si $f(y) \neq 0$ sur I, alors il existe une unique solution maximale. Toute solution avec la même condition initiale est une restriction de la solution maximale

Exemple 2 L'équation différentielle $2yy' = 4x^3$ avec la condition initiale $y(0) = 0$ possède :

1. Une seul solution sur $\mathbb{R}$
2. 2 solutions sur $\mathbb{R}$
3. 3 solutions sur $\mathbb{R}$
4. 4 solutions sur $\mathbb{R}$

En premier lieu il faudra résoudre :

$$\int 2ydy = \int 4x^3 dx$$
$$y^2 = x^4 + C \quad \forall C \in \mathbb{R}$$
$$y = \pm\sqrt{x^4 + C}$$
$$y(0) = \pm\sqrt{C'} = 0 \implies C' = 0$$
$$y(x) = \pm\sqrt{x^4} = \pm x^2$$

On voit ici qu'il y a 4 solutions à cause des $\pm$ qui se rajoute entre eux :

- $y(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$
- $y(x) = -x^2, x \in \mathbb{R}$
- $y(x) = \begin{cases} -x^2, x \leq 0 \\ x^2, x > 0 \end{cases}$

- $y(x) = \begin{cases} x^2, x \leq 0 \\ -x^2, x > 0 \end{cases}$

2.4 Equation différentielle linéaire du premier ordre (EDL1)

Definition

Définition 7 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Une équation de la forme :*

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x), \text{ où } p, f : I \to \mathbb{R} \text{ sont continues}$$

est une ***équation différentielle linéaire du premier ordre (EDL1)***

Une solution est une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 satisfaisant l'équation.

Comment résoudre une EDL1

Considérant l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = 0$
Elle s'appelle **l'équation homogène associée** à l'EDL1 $y' + py = f$ qui nous amène :

$$\begin{cases} y(x) = 0 \;\; \forall x \in I \\ \frac{y'(x)}{y(x)} = -p(x) \quad EDVS \implies \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \end{cases}$$

Ce qui implique que $\ln|y| = -P(x) + C_1$ où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$, $C_1 \in \mathbb{R}$, ensuite, $|y| = e^{-P(x)+C_1} = e^{C_1}e^{-P(x)} \implies y(x) = \pm C_2 e^{-P(x)}, C_2 \in \mathbb{R}_+^*$
Mais on a aussi $y(x) = 0$ sur I ce qui implique que

$$y(x) = Ce^{-P(x)}$$

où $C \in \mathbb{R}$, $x \in I$ est la solution générale de l'équation homogène associée $y' + py = 0$ sur I

2.4.1 Principe de superposition de solutions

Principe

Soit $I \subset \mathbb{R}$ ouvert, $p, f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ fonctions continues
Supposons que $v_1 : I \to \mathbb{R}$ de classe C' est une solution

$$y' + p(x)y(x) = 0$$

Méthode de la variation de constante

On cherche une solution particulière de $y'(x)+p(x)y(x) = f(x) : p, f : I \underbrace{\to \mathbb{R}}_{\text{continue}}$

sout la forme :
Ansatz :

$$v(x) = C(x)e^{-P(x)}$$

où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ sur I
Si $v(x)$ est une solution $\implies v'(x) + p(x)v(x) = f(x)$ ce qui implique que

$$C'e^{-P(x)} + C(x)(-e^{-P(x)}) \cdot p(x) + p(x)Ce^{-P(x)} = f(x)$$

Ce qui revient a dire

$$C'(x) = f(x)e^{P(x)} \implies c(x) = \int f(x)e^{P(x)}dx$$

une solution particulière de l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$ est $v(x) = \left(\int f(x)e^{P(x)}dx\right) \cdot e^{-P(x)}$ où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ sur I

2.4.2 Théorème à savoir pour l'examen

Proposition Soit $p_1, f : I \to \mathbb{R}$ fonctions continues. Supposons que $v_0 : I \to \mathbb{R}$ est une solution partiulière de l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$
Alors la solution générale de cette équation est :

$v(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}$, pour tout $C \in \mathbb{R}$, où $P(x)$ est une primitive de p(x) sur I

Démonstration **(1)**
Soit $v_1(x)$ une solution de $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$. On va démontrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $v_1(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}$, où $v_0(x)$ est une solution de $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$.
Ce qui est équivalent à $\exists C \in \mathbb{R} : v_1(x) - v_0(x) = Ce^{-P(x)}$
(2)
Par le principe de **superposition des solutions**, la fonction $v_1(x) - v_0(x)$ est une solution de l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$ est $v(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}$ où $C \in \mathbb{R}, x \in I$
(3)
$y'(x) + p(x)y(x) = 0$ est EDVS $\implies$ la solution générale de cette équation est $v(x) = Ce^{-P(x)}$, $C \in \mathbb{R}$ et $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ sur I.
(4)
Donc, par la définition $v(x)$ est la **solution générale**.

Lundi 24 février 2025 — **Cours 3 : EDL1 Et Méthode de démonstration**

2.4.3 Rappel : Equation différentielles linéaires du premier ordre (EDL1)

Rappel

$$y' + p(x)y = f(x)$$

Où $p, f : I \to \mathbb{R}$ fonctions continues. Alors la solution générale est donnée par la formule :

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_{part}(x)$$

Où $y_{hom}(x)$ est la solution générale de l'équation générale de l'équation homogène associée : $y' + p(x)y = 0$ et $y_{part}(x)$ est une solution particulière de l'équation donnée : $y' + p(x)y = f(x)$.

- $y_{hom}(x) = Ce^{-P(x)}$, où $P(x) = \int p(x)dx$ est une primitive (sans constante), $C \in \mathbb{R}$.
- $y_{part}(x) = \left(\int f(x)e^{P(x)}dx\right)e^{-P(x)}$

Théorème 3 *La solution générale de l'EDL1 :*

$$y(x) = Ce^{-P(x)} + \left(\int f(x)e^{P(x)}dx\right)e^{-P(x)}$$

Attention avec le signe moins qui se trouve dans la solution homogène mais pas dans la solution particulière.

Ex1 $y' - \underbrace{\frac{2}{x}}_{p(x)} y = \underbrace{x^3+1}_{f(x)}$ avec $p :] - \infty, o[$ et $]0, \infty[\to \mathbb{R}$ continue,
$f : \mathbb{R} \to R$ est continue.
$P(x) = \int -\frac{2}{x} = -2\ln|x| \implies P(x) = -2\ln|x|$ avec $x \neq 0$
On a donc comme solution homogène :

$$y_{hom}(x) = Ce^{-P(x)} = Ce^{--2\ln|x|} = Ce^{--\ln|x|^2} = Ce^{--\ln x^2} = Cx^2$$

Sur $] - \infty, 0[\cap]0, \infty[$
On cherche maintenant une solution particulière de l'équation complète :

$$y' + \frac{-2}{x}y = x^3 + 1$$

On utilise la méthode de la variation des constantes :

$$\begin{aligned}
\int f(x)e^{P(x)}dx &= \int (x^3+1)e^{-\ln x^2}dx \\
&= \int \frac{x^3+1}{x^2}dx \\
&= \int (x + \frac{1}{x^2})dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} \quad \text{pas de constante}
\end{aligned}$$

Ce qui implique donc que :

$$y_{part}(x) = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x})e^{-(-\ln x^2)} = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x})x^2 = \frac{1}{2}x^4 - x$$

Verification :

$$\begin{aligned}
y'_{part}(x) - \frac{2}{x}y_{part} &= 2x^3 - 1 - \frac{2}{x}(\frac{1}{2}x^4 - x) \\
&= 2x^3 - 1 - x^3 + 2 = x^3 + 1
\end{aligned}$$

Solution générale de l'équation originale :

$$y(x) = Cx^2 + \frac{1}{2}x^4 - x$$

Sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$

Si on mulitplie par x l'équation de base :

$$xy' - 2y = x^4 + x$$

Alors, la solution va sur $\mathbb{R}$
$\Longrightarrow y(x) = Cx^2 + \frac{1}{2}x^4 - x$ sur $\mathbb{R}$

Ex2 $y' - (\tan x)y = \cos x$ $\tan(x)$ n'est pas continue en $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Puisque $0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\Longrightarrow$ on considère l'équation sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $p, f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ continues.

1. Solution générale de l'équation homogène associée.

$$\begin{aligned} & y' + (-\tan x)y = 0 \\ P(x) &= \int (-\tan x)dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x} \\ &\underbrace{=}_{\int \frac{du}{u}} \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \ln|\cos x| \\ &\Longrightarrow P(x) = \ln(\cos x) \text{ sur }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{aligned}$$

On a donc :

$$y_{hom}(x) = Ce^{-P(x)} = Ce^{-\ln\cos x} = \frac{C}{\cos x}, x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, C \in \mathbb{R}$$

Vérification :

$$-\frac{C}{\cos^2 x} \cdot (-\sin x) - \tan x \cdot \frac{C}{\cos x} = C\frac{\sin x}{\cos^2 x} - C\frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0$$

2. Solution particulière de l'équation complète :

$$y' - \tan xy = \cos x$$

Selon la même méthode :

$$\begin{aligned} \int f(x)e^{P(x)}dx = \int \cos xe^{\ln\cos x}dx &= \int \cos^2 x\ dx \\ &= \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} y_{part}(x) &= (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x) \cdot e^{-P(x)} \\ &= (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x)\frac{1}{\cos x} \\ &= \frac{1}{2}\frac{x}{\cos x} + \frac{1}{4}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x} \\ y_{part}(x) &= \frac{1}{2}\frac{x}{\cos x} + \frac{1}{2}\sin x,\ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{aligned}$$

2.4.4 Application de EDVS (EDL1) : Croissance et decroissance exponentielle

Exemple

Soit $y = y(t)$ tel que $y' = ky, k \in \mathbb{R}$; $y = 0$ est une solution
EDVS : $\int \frac{dy}{y} = \int kdt \implies \ln|y| = kt + C_1 \implies |y| = e^{C_1}e'kt \implies y(t) = Ce^{kt}$
Condition initiales :

- $y(0) = C = y_0 > 0$
- $y(t) = y_0 e^{kt}$

La solution maximale satisfaisant la condition initiale $y(0) = y_0$ est :

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

2.5 Méthodes de démonstration

Méthode 3 : Raisonnement par disjonction des cas

Définition 8 *Soient P, Q deux propositions. Pour montrer que $P \implies Q$ on sépare l'hypothèse de P de départ en différent cas possibles et on montre que l'implication est vraie dans chacun des cas. Il est très important de considérer* ***tous les cas possibles***

Ex1 Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a :

$$||x| - |y|| \leq ||x - |$$

1. $|x| \geq |y| \implies$

$$\begin{aligned} ||x| - |y|| &= |x| - |y| \\ &= |x - y + y| - |y| \\ &\overbrace{\leq}^{\Delta} |x - y| + |y| - |y| = |x - y| \end{aligned}$$

2. $|x| < |y| \implies$

$$\begin{aligned} ||x| - |y|| &= -|x| + |y| \\ &= -|x| + |y - x + x| \\ &\overbrace{\leq}^{\Delta} -|x| + |y - x| + |x| = |y - x| \\ &= |x - y| \end{aligned}$$

Ex2 Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $2n^2 + n + 1$ n'est pas divisible par 3. 3 Cas :

1. $n \equiv 0 \mod 3 \iff n = 3k,\ k \in \mathbb{Z}$

$$2n^2 + n + 1 = 2(3k)^2 + (3k) + 1 \equiv 1 \mod 3$$

2. $n \equiv 1 \mod 3 \iff n = 3k+1,\ k \in \mathbb{Z}$

$$\implies 2n^2+n+1 = 2(3k+1)^2+(3k+1)+1 \equiv 2+1+1 \equiv 1 \mod 3$$

3. $n \equiv 2 \mod 3, n = 3k+2, k \in \mathbb{Z}$

$$2n^2+n+1 = 2(3k+2)^2+(3k+2)+1 \equiv 8+2+1 \equiv 2 \mod 3$$

Finalement, $2n^2+n+1$ n'est pas divisible par 3 $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Méthode 4 : Comment démontrer les propositions de la forme $P \iff Q$

Deux méthode existent :

1. $P \implies Q$ **ET** $Q \implies P$
2. Suite d'équivalences : $P \iff R_1 \iff R_2 \iff \cdots \iff Q$

Pour la deuxième méthodes, il faut vérifier que chaque implication est une **équivalence**.

Ex3

Soit $a, b \in \mathbb{N}$:

- $P : \{ab+1 = c^2$ pour un nombre naturel $c\}$
- $Q : \{a = b \pm 2\}$

Proposition $P \iff Q$
Démonstration

$$\underbrace{ab+1=c^2}_{P} \iff ab = c^2-1 \iff ab$$

$$= (c+1)(c-1) \underbrace{\iff}_{\text{Faux}} \begin{cases} \begin{cases} a = c-1 \\ b = c+1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = c+1 \\ b = c-1 \end{cases} \end{cases}$$

Néanmoins, Contre exemple : $a = 3, b = 8$ on a que $24+1 = 25 = 5^2 = c^2$, P est vrai, Q est faux
Proposition qui est vraie : $Q \implies P$ Soient $a, b \in \mathbb{N} : a = b \pm 2$, Alors $ab+1 = c^2, c \in \mathbb{N}$
Démonstration

$$\begin{aligned} a = b \pm 2 \implies ab+1 &= b(b \pm 2)+1 \\ &= b^2 \pm 2b + 1 \\ &= (b \pm 1)^2 = c^2 \end{aligned}$$

Ex4

Soient $z = \rho \underbrace{e^{i\varphi}}_{\rho>0} \in \mathbb{C}^*$, $P : \{z^2 \in \mathbb{R}^*\}$, $Q : \{\varphi = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$
On cherche ici à savoir la relation entre P ?? Q
Démonstration $Q \implies P$:
Soit $z = \rho e^{i\varphi}, \varphi = \frac{\pi}{2}k \implies z^2 = \rho^2 e^{2i\varphi} = \rho^2(-1)^k \in \mathbb{R}^*$.
Démonstration $P \implies Q$
Soit $z = \rho e^{i\varphi}, \rho > 0 \implies z^2 = \rho^2 e^{2i\varphi}$

2.6 Equation différentielle du second ordre

Définition

Définition 9 *Soit I un intervalle ouvert. On appelle* ***équation différentielle linéaire de second ordre*** *une équation de la forme :*

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)$$

où $p, q, f : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues

Définition 10 *Une équation de la forme*

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

est dire EDL2 homogène.

On cherche une solution de cette équation de classe C^2

Ex1 $y'' = 5 \implies y' = 5x + C, x \in \mathbb{R}, \forall C, \in \mathbb{R}$
Ce qui implique

$$y(x) = \frac{5}{2}x^2 + C_1x + C_2 \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall C_1, C_2, \in \mathbb{R}$$

EDL2 homogène à coefficients constants

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0, \ \ p, q \in \mathbb{R}$$

$$y''(x) - (a+b)y'(x) + aby(x) = 0, \ \ \text{où a, b sont des racines de l'équation } \lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

Par un changement de variables :

$$(\underbrace{(y'(x) - ay(x))}_{z(x)})' - b(\underbrace{y'(x) - ay(x)}_{z(x)}) = 0$$

$$\begin{aligned} z'(x) - bz(x) = 0 &\implies \text{ EDVS pour } z \\ &\implies z(x) = C_1e^{bx} \\ &\implies z(x) = y'(x) - ay(x) = C_1e^{bx} \end{aligned}$$

Ce qui est une EDL1.

$$\begin{aligned} &= y'(x) - ay(x) = C_1e^{bx}, \ \ p(x) = -a, \ f(x) = C_1e^{bx} \\ &\implies P(x) = \int -adx = -ax, \\ &= y_{hom}(x) = C_2e^{ax} \quad \text{solution générale de l'équation homogène} \end{aligned}$$

On a alors pour $C(x)$:

$$C(x) = \int C_1e^{bx}e^{-ax}dx = C_1\int e^{(b-a)x}dx = \begin{cases} \frac{1}{b-a}C_1e^{(b-a)x}, \ \text{si } b \neq a \\ C_2e^{ax} + C_1xe^{ax} \ \text{si } a = b \end{cases}$$

Si $a \neq b$ sont des racines complexes, $a, b \notin \mathbb{R} \implies a = \hat{b}$ Ce qui implique que : $y(x) = Ce^{ax} + \hat{C}e^{\hat{a}x}$ pour avoir une solution réelle, $a = \alpha + i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$
Soit $C = \frac{1}{2}(C_2 - iC_4) \implies \hat{C} = \frac{1}{2}(C_3 + iC_4), C_3, C_4 \in \mathbb{R}$
Alors on a que :

$$\begin{aligned}
y(x) = Ce^{ax} + \hat{C}e^{\hat{a}x} &= \frac{1}{2}(C_3 - iC_4)e^{\alpha x}e^{i\beta x} + \frac{1}{2}(C_3 + iC_4)e^{\alpha x}e^{-i\beta x} \\
&= C_3 e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + C_4 e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}
\end{aligned}$$

Résumé

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$$

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ les racines de l'équation $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$
Alors la solution générale est :

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx} \text{ , si } a \neq b, a, b \in \mathbb{R} \ \ \forall C_1, C_2, \in \mathbb{R} \\ C_1 e^{ax} + C_2 x e^{bx} \text{ , si } a = b \\ C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x \text{ , si } a = \alpha + i\beta = \hat{b} \notin \mathbb{R} \ \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

oui

Exemple 2

$$y'' + 9y = 0$$

Equation caractéristique : $\lambda^2 + 9 = 0 \implies a = 3i, b = -3i$ Ce qui donne : $a = 3i = \alpha + \beta i$
Ce qui donne comme solution générale :

$$y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$$

Vérification : $y'(x) = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x \implies y'' = -9C_1 \cos 3x - 0C_2 \sin 3x \implies y'' + 9y = 0$

Exemple 3

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

Même procédé avec l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \implies \lambda = 3$$

Ce qui donne comme solution :

$$y(x) = C_1 e^{ax} + C_2 e^{ax}$$

2.6.1 Unicité d'un EDL2

Considérons l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$

Théorème

Théorème 4 *Une EDL2 homogène admet une seule solution $y(x) : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2 satisfaisant $y(x_0) = t$ et $y'(x_0) = s$ pour un $x_0 \in I$ et les nombres arbitraires $s, t \in \mathbb{R}$.*

La démonstration n'est pas vu dans ce cours car trop fastidieuse

Remarque (1) **Superposition des solutions** Si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont 2 solutions de EDL2 **homogènes** alors

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$$

Est aussi une solution, où $A, B \in \mathbb{R}$

Dépendance linéaire de fonctions

Définition 11 *Deux solutions $y_1(x), y_2(x) : I \to \mathbb{R}$ sont linéairement indépendants s'il n'existe pas de constante $c \in \mathbb{R}$ tel que $y_2(x) = cy_1(x)$*

Remarque Cela implique, en particulier, que $y_1(x)$ et $y_2(x)$ ne sont pas triviallement $= 0$ sur I

Comment résoudre

Comment résoudre $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$?
Supposons que $v_1(x)$ est une solution de cette équation, telle que On sait trouver une autre solution linéairement dépendante.

Ansatz $v_2(x) = c(x)v_1(x)$
Telle que $c(x) \neq const$. Alors :

$$v_2'(x) = c'(x)v_1(x) + c(x)v_1'(x)$$

Si on cherche la seconde dérivée de v_2 :

$$v_2''(x) = c''(x)v_1(x) + c'(x)v_1'(x) + c'(x)v_1'(x) + c(x)v_1''(x)$$

Si on simplifie l'expression :

$$\implies c''(x)v_1(x) + 2c'(x)v_1'(x) + c(x)v_1''(x) + p(x)c'(x)v_1(x) \\ + p(x)c(x)v_1'(x) + q(x)c(x)v_1(x) = 0$$

On peut trouver vu que $v_1(x)$ est solution que :

$$c(x)(v_1''(x) + p(x)v_1'(x) + q(x)v_1(x)) = 0$$

Ce qui revient pour notre équation :

$$c''(x)v_1(x) + 2c'(x)v_1'(x) + p(x)c'(x)v_1(x) = 0$$

On suppose que $v_1(x) \neq 0$ sur I et $c'(x) \neq 0$ sur I. (Une condition en plus, de toute façon, si $c'(x) = 0$ on peut juste enlever le 0 de l'intervalle et ensuite peut être le rajouter après). On peut donc diviser ce qui donne :

$$\frac{c''(x)}{c'(x)} = -p(x) - 2\frac{v_1'(x)}{v_1(x)} \implies \text{EDVS pour } c'(x)$$

Ce qui revient :

$$\begin{aligned}\ln c'(x) &= \underbrace{-P(x)}_{\ln e^{-P(x)}} -2\ln v_1(x) + \ln C, \quad C \in \mathbb{R}_+^* \\ &= \ln \frac{Ce^{-P(x)}}{v_1^2(x)}\end{aligned}$$

On cherche la dérivée de $c(x)$:

$$\begin{aligned}c'(x) &= \pm\frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} \\ &= C_1\frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} \quad C_1 \in \mathbb{R}^*, C_1 = \pm C \\ c(x) &= \int C_1\frac{e'-P(x)}{v_1^2(x)}dx + C_2\end{aligned}$$

$\implies v(x) = c(x)v_1(x)$ est une solution.

Si on prend $C_1 = 1$ et $C_2 = 0$ on obtient $v_2(x)$ linéairement dépendante de $v_1(x)$:

Théorème 5

$$v_2(x) = c(x)v_1(x) = v_1(x)\int\frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)}dx$$

Lundi 3 mars 2025 — **Cours 5 : Equation différentielle**

2.6.2 Rappel : Equation différentielle linéaires du second ordre (EDL2)

EDL2 homogène

$$y''(x) + p(x)y'(X) + q(x)y(x)$$

avec, $p, q : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues

EDL2 à coefficient constants

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = f(x)$$

avec $p, q \in \mathbb{R}, f : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues

EDL2 homogène a coefficient constant

$$y''(X) + py'(x) + qy(x) = 0$$

avec $p, q \in \mathbb{R}$
La solution générale de cette dernière : $\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \implies a, b \implies 3$ cas qui sont solution générale Pour un EDL2 homogène, si $v_1(x)$ est une solution et $v_1(x) \neq 0$ sur $I \to v_2(x) = v_1(x) \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx$ est une solution linéairement indépendante, où $P(x) = \int p(x)dx$ est une primitive.

2.6.3 Caractérisation des 2 solutions de EDL2 linéairement indépendante

Définition 12 *Si $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $I \subset \mathbb{R}$ alors la fonction $W[v_1, v_2], I \to \mathbb{R}$ définie par*

$$W[v_1, v_2] = \det \begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} = v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x)$$

est appelée le ***Wronskien*** *de v_1 et v_2*

Exemple

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \implies \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

qui donne comme solution $\lambda_{1,2} = 3$ qui nous donne :

$$v(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{2x}, \text{ avec } x \in \mathbb{R}$$

On calcule le wronskien :

$$W[e^{3x}, xe^{3x}] = \det \begin{pmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & e^{3x} + 3xe^{3x} \end{pmatrix} u = e^{6x} + 3xe^{6x} - 3x^{6x} = e^{6x}$$

On a donc :

$$e^{6x} = W[e^{3x}, xe^{3x}] \neq 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

2.6.4 Démonstration à savoir

Proposition

Théorème 6 *Soient $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions de l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$, Alors $v_1(x)$ et $v_2(x)$ sont linéairement indépendantes si et seulement si $W[v_1, v_2] \neq 0 \; \forall x \in I$*

Nous allons le prouver par contraposée :

$$\neg P \implies \neg Q \wedge \neg Q \implies \neg P$$

(1)$\neg P \implies \neg Q$	$\neg P \implies \neg Q$ les solutions sont linéairement indépendante	
	$\implies$ sans perte de généralité, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $v_2(x) =$	

$cv_1(x)\ \forall x \in I$ Alors on a :

$$W[v_1, v_2](x) = \det\begin{pmatrix} v_1(x) & cv_1(x) \\ v_1'(x) & cv_1'(x) \end{pmatrix} = cv_1(x)v_1'(x) - cv_1(x)v_1'(x) = 0\ \forall x \in I$$

Et donc :

$$W[v_1, v_2](x) = 0\ \ \forall x \in I$$

(2) $\neg Q \implies \neg P$

Supposons qu'il existe $x_0 \in I : W[v_1, v_2](x_0) = 0$. Alors cela implique que :

$$\det\begin{pmatrix} v_1(x_0) & v_2(x_0) \\ v_1'(x_0) & v_2'(x_0) \end{pmatrix} = 0$$

Cela implique qu'il existe un vecteur non nul $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} v_1(x_0) & v_2(x_0) \\ v_1'(x_0) & v_2'(x_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit $v(x) = av_1(x) + bv_2(x)$ Alors $v(x)$ est une solution de l'EDL2 homogène et de plus $v(x_0) = 0$ et $v'(x_0) = 0$. Par le théorème de l'existence et unicité d'une solution de l'EDL2 homogène satisfaisant les conditions initiales. $y(x_0) = 0$ et $y'(x_0) = 0$, puisque la solution triviale $y(x) = 0\ \forall x \in I$ satisfait l'équation et les mêmes conditions initiales $\implies v(x) = av_1(x) + bv_2(x) = 0$ et cela pour tout x dans I.
Puisque a et b ne sont pas tous les deux nuls :

$$\begin{cases} v_1(x) & = -\frac{b}{a}v_2(x)\ \ \forall x \in I \\ v_2(x) & = -\frac{a}{b}v_1(x)\ \ \forall x \in I \end{cases} \implies v_1(x) \text{ et } v_2(x) \text{ sont linéairement indépendan}$$

Exemple

EDL2 homogène a coefficient constants $y''(x)+py'(x)+qy(x) = 0 \implies \lambda^2 + p\lambda + q = 0$ telle que les racines sont $a = \overline{b} = \alpha + \beta i \notin \mathbb{R}$
Montrer que $W[e^{\alpha y}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x] \neq 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$

2.6.5 Théorème aussi à savoir

Théorème

Théorème 7 *Soit $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solution linéairement indépendantes de l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ alors la solution générale de cette équation est de la forme :*

$$v(x) = C_1v_1(x) + C_2v_2(x),\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in I$$

Démonstration
Soit $\sim v(x)$ une solution de l'équation donnée (arbitraire), soit $x_0 \in I$ alors

$v(x_0) = a_0 \in \mathbb{R}$, et $\sim v'(x_0) = b_0 \in \mathbb{R}$
On a deux solution linéairement indépendantes $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ Alors par la proposition précédente on sait que $W[v_1, v_2] \neq 0, \forall x \in I \implies W[v_1, v_2](x_0) \neq 0$ implique que $\exists$ unique constantes c_1, c_2 tel que le noyau de la matrice est donne par le "point" $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$
Considérons la fonction $v(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x)$

Superposition des solutions Si $v(x)$ est une solution de des EDL2, et $u(x)$ une solution de l'équation homogène associée : $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$, alors $v(x) + u(x)$ est une solution de l'équation (1) (exercice)

Méthode de la variation de constante On cherche une solution particulière de (1) supposant qu'on connait deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène associée : $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ (ce qui implique $W[v_1, v_2](x) \neq 0 \ \ \forall x \in I$)

Ansatz posons :

$$v_0(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x)$$

Où $c_1(x)$ et $c_2(x)$sont des fonctions de classe C^2 sur I
Condition sur $c_1(x)$ et $c_2(x)$?
$v_0'(x) = \underbrace{c_1'(x)v_1(x) + c_2'(x) + v_2(x)}_{\text{Supposons }=0} + c_1(x)v_1'(x) + c_2(x)v_2'(x)$
On cherche la dérivé seconde :

$$v_0''(x) = c_1'(x)v_1'(x) + c_2'(x)v_2'(x) + c_1 v_1''(x) + c_2(x)v_2''(x)$$

$$v_0''(x) + p(x)v_0'(x) + q(x)v_0(x) = f(x)$$

$$\begin{aligned} c_1'(x)v_1'(x) + c_2'(x)v_2'(x) + c_1(x)v_1''(x) + c_2(x)v_2''(x) \\ +p(x)c_1(x)v_1'(x) + p(x)c_2(x)v_2(x) + q(x)c_1(x)v_1(x) \\ +q(x)c_2(x)v_2(x) = f(x) \\ \implies c_1'(x)v_1'(x) + c_2'(x)v_2'(x) = f(x) \\ \begin{cases} c_1'(x)v_1(x) + c_2'(x)v_2'(x) = f(x) \\ c_1'(x)v_1'(x) + c_2'(x)v_2'(x) = f(x) \end{cases} \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

Qui est un système pour $c_1'(x)$ et $c_2'(x)$, On sait que $W[v_1, v_2](x) \neq 0$ sur I, $\det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix}(x) \neq 0 \ \forall x \in I$
On écrit ce qu'on cherche :

$$\begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Implique qu'il existe une unique solution $\forall x \in I$
En faisant l'inverse de la matrice de gauche :

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{W[v_1, v_2]} \begin{pmatrix} v_2' & -v_2 \\ -v_1' & v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} = \frac{1}{W[v_1, v_2]} \begin{pmatrix} -v_2 f \\ v_1 f \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2(x)f(x) \\ v_1(x)f(x) \end{pmatrix} \frac{1}{W[v_1, v_2]x}$$

Ce qui implique :

$$\boxed{\begin{gathered} c_1(x) = -\int \frac{f(x)v_2(x)}{W[v_1, v_2]} dx \\ \\ c_2(x) = \int \frac{f(x)v_1(x)}{W[v_1, v_2]} dx \end{gathered}}$$

On a donc que $v_0(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x)$ est une solution de (1), la solution générale de (1) est :

$$v(x) = v_0(x) + c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) \text{ où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in I$$

Exemple Trouver la solution générale de l'équation :

$$y''(x) - \frac{1}{x(\ln x - 1)} y'(x) + \frac{1}{x^2(\ln x - 1)} y(x) = \ln x - 1$$

sur $]e, \infty[$

(1) Essayons de trouver une solution non nulle de l'équation homogène associée :

$$y''(x) - \frac{1}{x \ln x - 1)} y'(x) + \frac{1}{x^2(\ln x - 1)} y(x) = 0$$

Essayons avec $y = x$:

$$y = x \implies y' = 1, y'' = 0 = -\frac{1}{x(\ln x - 1)} + \frac{x}{x^2(\ln x - 1)} = 0 \ \ \forall x \in]e, \infty[$$

(2) Trouver une autre solution de l'équation, linéairement indépendante

$$v_2(x) = c(x)v_1(x) \text{ où } c(x) = \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx, P(x) = \int p(x) dx$$

On cherche $P(x)$:

$$\begin{aligned} p(x) = -\frac{1}{x(\ln x - 1)} \implies P(x) &= -\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)} \\ &= -\int \frac{d(\ln x - 1)}{\ln x - 1} \\ &= -\ln(\ln x - 1) \end{aligned}$$

On cherche donc maintenant $c(x)$:

$$\begin{aligned} c(x) &= \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx = \int \frac{e^{+\ln(\ln x - 1)}}{x^2} dx = \int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx \\ &= -\int (\ln x - 1) d\frac{1}{x} = -\frac{\ln x - 1}{x} + \int \frac{1}{x}\frac{1}{x} dx = -\frac{\ln x - 1}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{\ln x}{x} \end{aligned}$$

On a donc que

$$v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x) = C_1 x + C_2 \ln x$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in]e, \infty[$
Est la solution générale de l'équation homogène.

(3) On cherche maintenant une solution particulière de l'équation complète :

$$y''(x) - \frac{1}{x(\ln x - 1)} y'(x) + \frac{1}{x^2(\ln x - 1)} y(x) = \ln x - 1$$

On prends :

$$v_0(x) = c_1(x) v_1(x) + c_2(x) v_2(x)$$

où :

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\int \frac{f(x) v_2(x)}{W[v_1, v_2]} dx \\ c_2(x) &= +\int \frac{f(x) v_1(x)}{W[v_1, v_2]} dx \end{aligned}$$

On cherche le Wronskein :

$$W[v_1, v_2] = \det \begin{pmatrix} x & -\ln x \\ 1 & -\frac{1}{x} \end{pmatrix} = -1 + \ln x = \ln x - 1 \neq 0 \text{ sur }]e, \infty[$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\int \frac{(\ln x - 1)(-\ln x)}{\ln x - 1} dx = +\int \ln x dx \\ &= x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x \end{aligned}$$

Pour $c_2(x)$:

$$c_2(x) = \int \frac{(\ln x - 1) \cdot x}{\ln x - 1} dx = \int x dx = \frac{1}{2} x^2$$

On trouve finalement :

$$\begin{aligned} v_0(x) &= c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x) \\ &= x(\ln x - 1)x + \frac{1}{2}x^2(-\ln x) \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - x^2 \end{aligned}$$

(4) On cherche finalement la solution générale de l'équation complète

$$v(x) = C_1 x + C_2 \ln x + \frac{1}{2}x^2 \ln x - x^2$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in]e, \infty[$

Jeudi 6 mars 2025 — **Cours 6 : EDL2**

2.6.6 Méthode de résolution de EDL2

Rappel (Méthode de la variation des constantes) En premier lieu on calcule le Wronskien de $v_1(x)$ et $v_2(x)$,

$$W[v_1, v_2] = \det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix}$$

Ensuite, On calcule les fonctions $c_1(x)$ et $c_2(x)$:

$$c_1(x) = -\int \frac{f(x)v_2(x)}{W[v_1, v_2]}dx$$
$$c_2(x) = \int \frac{f(x)v_1(x)}{W[v_1, v_2]}dx$$

Méthode de calcul Pour des fonctions $f(x)$ spéciales, une méthode alternative existe :

Case 1 si $f(x)$ est de la forme :

$$f(x) = e^{cr}R_n(x)$$

avec $R_n(x)$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$.
Alors la solution est donné par :

$$\implies y_p(x) = x^r e^{cx} T_n(x)$$

Avec $r = 0, 1$ ou 2 la multiplicité de la racine c dans l'équation caractéristique, $\boldsymbol{T_n(x)}$ un polynôme à déterminer de degré n.

Cas 2

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\alpha x}(\cos(\beta x)P_k(x) + \sin(\beta x)Q_n(x)); \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ \implies y_p(x) &= x^r e^{\alpha x}(\cos(\beta x)T_n(x) + \sin(\beta x)S_n(x)) \end{aligned}$$

Avec $r = 1$ si $\alpha + i\beta$ est racine de l'équation caractéristique, et $r = 0$ sinon, $T_n(x)$ et $S_n(x)$ des polynômes à déterminer de degré $n = \max(k, m)$

Pour déterminer les **coefficients des polynômes inconnus** :

- Calculer les dérivées de la solution particulière
- Remplacer dans l'équation initiale, et résoudre l'équation.

Exemple

$$y'' + 2y' + 10y = 40e^x \sin(3x)$$

Solution homogène :

$$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = \frac{-2 \pm i6}{2}$$
$$= -1 \pm i3$$

On cherche maintenant $y_h(x)$:

$$y_h(x) = C_1 e^{-2x}\cos(3x) + C_2 e^{-x^2}\sin(3x)$$

Coefficient indeterminé
$f(x) = 40 \cdot e^x \sin(3x)$, on cherche donc une fonction qui rempli ce critère :

$$f(x)e^{\alpha x}(\cos(\beta x)\underbrace{P_k(x)}_{=A} + \sin(\beta x)\underbrace{Q_m(x)}_{=B})$$

On sait que $\beta = 3$ et que $\alpha = 1$:

Il n'y a pas de rapport direct entre ce $\alpha = 1$ et la solution de l'équation caractéristique.
On observe la fonction $f(x)$ qui ici à pour l'exponentielle $e^x = e^{1\cdot x}$, c'est de là que vient notre α

$$\alpha + i\beta = 1 + i3 \implies r = 0$$

Comme $r = 0$ on sait donc que le polynôme n'est qu'une constante qu'on va noter $T_n(x) = A$ et $S_n(x) = B$
On peut noter donc notre fonction pour laquelle on cherche les coefficients :

$$y_p(x) = e^3(\cos(3x)A + \sin(3x)B)$$

On va dérivée tout ce beau monde :

$$y_p'(x) = e^x(\cos(3x)A + \sin(3x)B - r\sin(3x)A + 3\cos(3x)B)$$
$$y_p''(x) = e^x(\cos(3x)(A+3B) + \sin(3x)(B-3A) - 3(A+3B)\sin(3x) + 3\cos(3x)(B-3A))$$
$$= e^x(\cos(3x)(6B-8A) + \sin(3x)(-8B-6A))$$

On injecte tout ca dans l'EDL2 :
On peut tout diviser par e^x car il se trouve partout et n'est jamais égal à 0.

$$\begin{aligned}\cos(3x)(6B - 8A + 2(A+3B) + 10A) + \sin(3x)(-8B - 6A)\\ +2(B-3A) + 10B) = 40\sin(3x)\end{aligned}$$

On voit ici que tout la partie du $\cos(x)$ est égal à 0, c'est comme ci on avait deux équation, la partie avec le $\cos(x)$ et la partie avec le $\sin(x)$:

$$\implies \begin{cases}12B + 4A = 0\\ 4B - 12A = 40\end{cases} \implies \begin{cases}A = -3B\\ 4B + 36B = 40\end{cases} \implies \begin{cases}A = -3\\ B = 1\end{cases}$$

On obtient donc que la solution particulière :

$$y_p(x) = e^x(-3\cos(3x) + \sin(3x))$$

Et pour la solution générale :

$$y = C_1e^{-x}\cos(3x) + C_2e^{-x^2}\sin(3x) + e^x(-3\cos(3x) + \sin(3x))$$

Exemple

$$y'' + 2y' - 3y = (x+1)e^{-3x}$$

Ici nous somme dans le cas numéro 1 :

$$f(x) = e^{cx}R_n(x) \implies c = -3, n = 1$$

$$\begin{aligned}y_p(x) = x^re^{-3x}(Ax+B) \text{ où } r = 1\\ y_p(x) = e^{-3x}(Ax^+Bx)\end{aligned}$$

Ici on a pris un polynôme R_n de puissance 1 c'est pour cela qu'on peut l'écrire comme nous l'avons fait ci-dessus.
Donc ici on va dérivée y_p deux fois et tout remettre dans l'équation de base et ensuite résoudre :

$$\begin{aligned}y_p'(x) &= e^{-3x}(-3(Ax^2 + Bx) + 2Ax + B) = e^{-3x}(-3Ax^2 + (2A-3B)x + B)\\ y_p''(x) &= e^{-3x}(9Ax^2 + (-6A+9B)x - 3B + (-6A)x + (2A-3B))\\ &=^{-3x}(9A + (-12A + 9B)x + 2A - 6B)\end{aligned}$$

On divide l'EDL2 par e^{-3x} ce qui nous donne :

$$9Ax^2 + (-12A+9B)x + 2A - 6B + 2(-3Ax^2 + (2A-3B)x + B) - 3Ax^2 + Bx = x + 1$$

$$\implies \begin{cases}(9A - 6A - 3A)x^2 = 0x^2\\ (-2A + 9B + 9A - 6B - 3B)x = x\\ (2A - 6B) + 2B = 1\end{cases}$$

$$\implies \begin{cases}-8A = 1\\ 2A - 4B = 1\end{cases} \implies \begin{cases}A = -\frac{1}{8}\\ B = -\frac{5}{16}\end{cases}$$

On obtient finalement pour la solution particulière :

$$y_p(x) = e^{-3x}\left(-\frac{x^2}{8} - \frac{5x}{16}\right)$$
$$y_h(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

2.6.7 Méthode de démonstration par l'absurde

Méthode On a une relation tel que :

$$T \implies Q \equiv \neg Q \implies F$$

Exemple $\neg\exists \in \mathbb{Z}$ tel que $18x - 54y = 21$:
Supposons $\neg Q$ tel qu'il existe x, y tel que :

$$18x - 54y = 21$$

Comme cela est impossible, alors la il ne peux exister de $x, y \in \mathbb{Z}$ tel que la relation tienne :

$$\neg Q \implies \neg P$$

Euclide

Théorème 8 *soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers alors :*

$$\mid \mathbb{P} \mid = \infty$$

Démonstration
Supposons $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\mid \mathbb{P} \mid = n < \infty$

$$\mathbb{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$$

Soit $k = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$, alors, $k \notin \mathbb{P}$ car $k > p_i \forall i = i \ldots n$ (Il ne peux pas être dans $\mathbb{P}$ car il est plus grand que tout les éléments de $\mathbb{P}$)
Et donc, il existe un éléments dans $\mathbb{P}$ tel qu'il divise k :

$$\exists p_j \neq k \text{ tel que } p_j \mid k$$

Si on note

$$\underbrace{k - p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n}_{\text{divisible par} p_j} = \underbrace{1}_{\text{pas div}}$$

Ce qui est une contradiction logique.

la partie $k - p_1 p_2 \ldots p_n$ est divisible par p_j car de (1) on n'a dit que k l'était (juste au dessus) et le produit de tout les p_n est forcement divisible par p_j vu que $p_j \in \mathbb{P}$. L'addition de deux nombre divisible par un nombre est forcement divisible par ce dernier.

Lundi 10 mars 2025 — **Cours 7 : Espace $\mathbb{R}^n$**

Chapitre 3

Espace $\mathbb{R}^n$

3.0.1 $\mathbb{R}^n$ espace vectoriel normé

Définition

Définition 13 $\mathbb{R}^n$ *est un ensemble de tout les* $n-$ *tuples ordonnés de nombre réels.*

$$\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Il y a donc toute les propriétés d'un espace vectoriel dont l'addition et l'action scalaire :

1. $+ : \overline{x} = (x_1, \ldots, x_n), \overline{y} = (y_1, \ldots, y_n) \implies \overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n, y_n)$
2. Multiplication par un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \implies \lambda \cdot \overline{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

Et par conséquent, les opérations présentées ci-dessus satisfont :

- $(\lambda_1 \lambda_2)\overline{x} = \lambda_1(\lambda_2 \overline{x}) \ \ \forall \overline{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$
- $1 \cdot \overline{x} = \overline{x}$
- $(\lambda_1 + \lambda_2)\overline{x} = \lambda_1 \overline{x} + \lambda_2 \overline{x}$
- $\lambda(\overline{x} + \overline{y}) = \lambda \overline{x} + \lambda \overline{y} \ \ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
- $\lambda(\overline{x} + \overline{y}) = \lambda \overline{x} + \lambda \overline{y} \ \ \forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$

Base

On a une base canonique :

$$\{\overline{e}_i = (0, 0, \ldots, \overbrace{1}^{i}, \ldots, 0)\}_{i=1}^{n} \implies \overline{e}_i \underbrace{\in}_{\forall i = 1, \ldots, n} \mathbb{R}^n$$

Produit scalaire

On introduit le **produit scalaire** dans $\mathbb{R}^n$:

Définition 14

$$< \overline{x}, \overline{y} >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

*Et par la suite la **norme euclidienne** :*

$$\| \overline{x} \| = (< \overline{x}, \overline{x} >)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}} \implies \mathbb{R}^n \text{ est un espace vectoriel normé}$$

Propriétés de la norme euclidienne

1. $\| \overline{x} \| \geq 0$ et $\| \overline{x} \| = 0 \implies \overline{x} = (0, 0, \ldots, 0)$
2. $\overline{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \implies \| \lambda \cdot \overline{x} \| = | \lambda | \cdot \| \overline{x} \|$
3. Cauchy-Schwartz : $|< \overline{x}, \overline{y} >| \leq \| \overline{x} \| \cdot \| \overline{y} \|$
4. Inégalité triangulaire : $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n \implies \| \overline{x} + \overline{y} \| \leq \| \overline{x} \| + \| \overline{y} \|$
5. $\implies$ 4, $\| \overline{x} + \overline{y} \|^2 = < \overline{x}, \overline{x} > +2 < \overline{x}, \overline{y} > + < \overline{y}, \overline{y} >$
   Qui après plusieurs opération fini par :
   $$\| \overline{x} \| + \| \overline{y} \| \geq \| \overline{x} + \overline{y} \|$$
6. Un autre inégalité triangulaire : $\| \overline{x} - \overline{y} \| \geq | \| \overline{x} \| - \| \overline{y} \| |$

Pour cette égalité, Nous pouvons faire une démonstration par disjonction des cas (vu au cours 3)

Distance

Définition 15 *L'expression $\| \overline{xy} \| = d(\overline{x}, \overline{y})$ est appelée **la distance** entre $\overline{x}$ et $\overline{y}$ dans $\mathbb{R}^n$.*

Alors :

- $d(\overline{x}, \overline{y}) = d(\overline{x}, \overline{y})$
- $d(\overline{x}, \overline{y}) = 0 \iff \overline{x} = \overline{y}$
- $d(\overline{x}, \overline{y}) \leq d(\overline{x}, \overline{z}) + d(\overline{z}, \overline{y})$

$$\| \overline{x} - \overline{y} \| = \| \overline{x} - \overline{z} + \overline{z} - \overline{y} \| \leq \| \overline{x} - \overline{z} \| + \| \overline{z} - \overline{y} \|$$

3.0.2 Sous-ensemble ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$

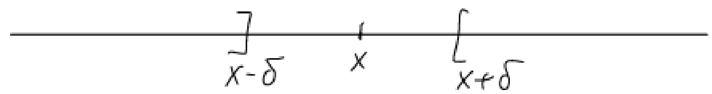
Définition 16 *Pour tout $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $\delta > 0$, soit $B(\overline{x}, \delta) = \{\overline{y} \in \mathbb{R}^n : \| \overline{x} - \overline{y} \| < \delta\}$. Alors $B(\overline{x}, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ est appelé **la boule ouverte** de centre $\overline{x}$ et de rayon δ.*

Boule ouverte

Définition 17 *$E \subset \mathbb{R}^n$ est **ouvert** si et seulement si :*

1. *$E = \emptyset$*
2. *$E \neq \emptyset$ et pour tout $\overline{x} \in E$ il existe $\delta > 0$ tel que $B(\overline{x}, \delta) \subset E$*

Exemple Une boule ouverte dans $\mathbb{R}$ $B(x,\delta) = \{y \in \mathbb{R} :| x - y |< \delta\} =]x-\delta, x+\delta[$



Intérieur d'une boule

Définition 18 *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide. Alors $\overline{x} \in E$ est un* ***point intérieur*** *de E s'il existe $\delta > 0$ tel que $B(\overline{x},\delta) \subset E$. L'ensemble des points intérieurs est appelé* ***intérieure*** *de E. Notation $\mathring{E}$*

Remarque personnelle On voit ici clairement que $\mathring{E} < E$. Cette relation est vrai grâce au δ qui rend *"plus petit"* notre point $\overline{x}$

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide. Alors $Esubset\mathbb{R}^n$ est ouvert $\iff$ $E = \mathring{E}$

Exemple 1 La boule ouverte $B(\overline{x},\delta) = \{\overline{y} \in \mathbb{R}^n :|| \overline{x} - \overline{y} ||< \delta\}$ est un sous-ensemble ouvert.
Soit $\overline{y} \in B(\overline{x},\delta)$ Alors $\delta = \frac{1}{2}(\delta- || x-y ||) > 0$ implique que :

$$\implies B(\overline{y}_1, \delta_1) \subset B(\overline{x},\delta)$$
$$\implies B(\overline{x},\delta) \subset \mathbb{R}^n$$

est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ $\forall \overline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \delta > 0$

Exemple 2 Soit $n \geq 2$, $E = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0, x_i > 0, i = 2, \dots n\} \subset \mathbb{R}^n$
Ici, nous voulons monter qu'il n'est pas ouvert.
Prenons le point $\overline{y} = (0, y_2, \dots, y_n)$ où $y_2, \dots, y_n > 0$. Alors pour tout $\delta > 0$:

$$B(\overline{y},\delta) \ni (\frac{\delta}{2}, y_2, \dots, y_n) \notin E$$

Exemple 3 $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$ sont des sous-ensembles ouverts.
Ici on a deux cas de figure,

- *emptyset* : alors le sous-ensemble est ouvert par définition
- Sinon, soit $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ alors $B(\overline{x},\delta) \subset \mathbb{R}^n$ et cela : $\forall \delta > 0$

Exemple 4 $E = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : x_i > 0 \forall i = 1, \dots, n\}$
Soit $\overline{y} \in E$. Alors, nous pouvons prendre $B(\overline{y}, \text{min}(y_i)) \subset E$.

Propriétés

Ici on remarque deux grandes propriétés :

1. Toute réunion $\bigcup_{i \in I} E_i$ des sous-ensembles ouverts est un sous-ensemble ouvert.

$$\overline{x} \in \bigcup_{i \in I} E_i \implies \exists j : \overline{x} \in E_j, \quad E_j \text{ est ouvert } \implies \exists \delta > 0 : B(\overline{x},\delta) \subset E_j$$
$$\implies B(\overline{x},\delta) \subset \bigcup_{i \in I} E_i$$

2. Toute intersection **finie** $\bigcap_{i=1}^n E_i$ des sous-ensembles ouverts est un sous-ensemble ouvert :

$$\overline{x} \in \bigcap_{i \in I} E_i \implies \forall j \overline{x} \in E_j \text{ ouvert } \implies \exists \delta_j > 0 : B(\overline{x}, \delta_j) \subset E_j$$

$$\implies B(\overline{x}, \min_j \delta_j) \subset E_j \forall j \implies B(\overline{x}, \min \delta_j) \subset \bigcap_{i=1}^n E_i = E$$

Une intersection infinie des sous-ensembles ouvert de $\mathbb{R}^n$

Sous-ensemble fermé

Définition 19 *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble. Alors E est* ***Fermé*** *dans $\mathbb{R}^n$ si son complément $CE = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : \overline{x} \notin E\} = \mathbb{R}^n - E$ est ouvert*

$$CB(\overline{x}, \delta) = E \subset \mathbb{R}^n \text{ est fermé} : E = \{\overline{y} \in \mathbb{R}^n : \mid \overline{x} - y \mid \geq \delta\}$$

Puisque $C(CB(\overline{x}, \delta)) = B(\overline{x}, \delta)$ est ouvert.

Exemples

$$E = \{\overline{x}\} \subset \mathbb{R}^n$$

Ceci est **fermé**, car si on prends le complément :

$$CE = \{\overline{y} \in \mathbb{R}^n : || \overline{y} - \overline{x} || > 0\}$$

$$\forall \overline{y} \in CE \text{ la boule} \overline{B}(\overline{y}, \frac{1}{2} || \overline{y} - \overline{x} || \subset CE$$

Question pendant le cours

Soient A et B deux sous-ensembles ouverts non-vides de $\mathbb{R}^n$ Soit $A \setminus B = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : \overline{x} \in A \text{ et } \overline{x} \notin B\}$ non-vide.

$A \setminus B$ peut être ouvert, fermé ou ni ouvert ni fermé

1. $A \setminus$ est soit ouvert, soit fermé
2. $A \setminus$ ne peut pas être ouvert
3. $A \setminus$ ne peut pas être fermé

Il n'y a qu'une seul possibilité et pour la trouver il faut des contre exemples.

Exemple

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \tan(x + y) \geq 1\}$$

Et on se pose la question A ouvert, fermé, ni ouvert, ni fermé ?
Déjà on va trouver tout les valeurs possiblie pour x et y c'est à dire la définition de tan :

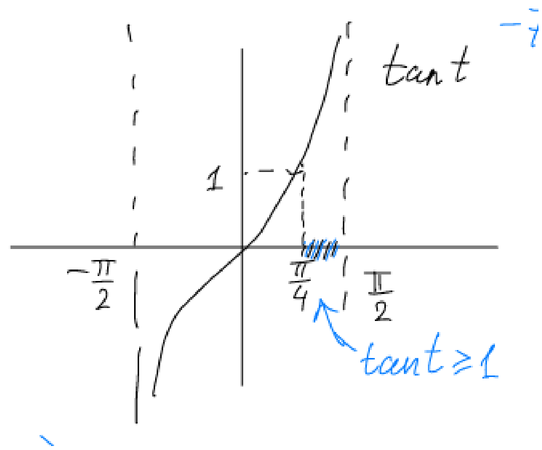
$$\implies \tan u \text{ existe } \implies u \in]-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k[\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan u \geq 1 \implies u \in [\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k[\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

On a donc comme dit auparavant :

$$x + y \in [\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k[$$
$$\frac{\pi}{4} + \pi k \leq x + y < \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$
$$\frac{\pi}{4} + \pi k - x \leq y < \frac{\pi}{2} + \pi k - x$$

Ici A n'est ni ouvert ni fermé :



Explications :

1. A n'est pas ouvert : $(x,y) = (0, \frac{\pi}{4}) = p \in A$

$$\forall \delta > 0 \ \ B(\overline{p}, \delta) \text{ contient } (0, \frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2}) \notin A$$

2. A n'est pas fermé : $(x,y) = (0, \frac{\pi}{2}) = q \in CA$

$$\forall \delta > 0 B(\overline{q}, \delta) \text{ contient } (0, \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}) \in A \implies (0, \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}) \notin CA$$

Et comme CA n'est pas ouvert, alors A n'est pas fermé.

3.0.3 Méthodes de démonstration : Démonstration par le principe des tiroirs

Principes des tiroirs

Si $(n+1)$ objets sont placés dans n tiroirs, alors au moins un tiroir contient 2 objets ou plus.
Plus généralement :

Théorème 9 *Si n objets sont placés dans k tiroirs, alors au moins un tiroir contient $\frac{n}{k}$ =min$\{m \in \mathbb{N} : m \geq \frac{n}{k}\}$ objets, ou plus.*

Ceci est exactement la même méthode que celle vu en AICC I qu'on appelait le pigeon hole principle, Les preuves sont exactement les mêmes est le but est exactement le même.

Mercredi 12 février 2025 — **Cours 8 : Suite d'élément de $\mathbb{R}^n$**

Rappel : Sous-ensembles ouvert et fermé dans $\mathbb{R}^n$

Définition 20 *Soit E un ensemble tel que $E \subset \mathbb{R}^n$ Alors :*

$$E \subset \mathbb{R}^n \iff \begin{cases} E = \emptyset \\ E \neq \emptyset \text{et pour chaque point} \overline{x} \in E \text{Il existe} \delta > 0 \text{ tel que } B(\overline{x}, \delta) \subset E \end{cases}$$

Définition 21 *$E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé $\iff$ son complémentaire $CE = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : \overline{x} \notin E\}$ est ouvert*

3.0.4 L'adhérence et la frontière d'un sous-ensemble $\mathbb{R}^n$

Adhérence

Définition 22 *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ sous-enesemble non vide. Alors l'intersection de tous les sous-ensembles fermés contenant E est appelée **l'adhérence de E**.*

Notation $\overline{E}$ est **l'adhérence** de E dans $\mathbb{R}^n$.

Si notre sous-ensemble est déjà fermé alors l'adhérence est égal à lui même :

$$E \subset \mathbb{R}^n \text{fermé} \iff E = \overline{E}$$

Définition 23 *$E \subset \mathbb{R}^n$ non-vide. $E \neq \mathbb{R}^n$. Un point $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ est un point de **frontière** de E si toute la boule ouverte de centre x cotient au moins un point de E et au moins un point de CE*

L'ensemble des points frontières de E est **la frontière de E** Notation : ∂E le d des dérivé partielle.

Exemple

$$E = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, i = 1, \ldots, n\} \implies \partial E = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : \exists i : x_i = 0, x_j \geq 0 i \neq j\}$$
$$\overline{E} = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n\}$$

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide. Alors :

- $\partial E \cap \mathring{E} = \emptyset$
- $\mathring{E} \cup \partial E = \overline{E}$
  Ici, on le sait parce que en premier lieu $\mathring{E} \cup \partial E$ est fermé, et aussi $E \subset \mathring{E} \cup \partial E)$
- $\partial E = \overline{E} \setminus \mathring{E} = \overline{E} \cup C\mathring{E} \implies \partial E$ est fermé
- $\partial \emptyset = \emptyset$, $\partial \mathbb{R}^n = \emptyset$

Pourquoi faut il distinguer entre les sous-ensembles ouverts et fermés dans $\mathbb{R}^n$? La topologie de $\mathbb{R}^n$ est liée au propriétés des limites des suites d'éléments de $\mathbb{R}^n$. Et comme la base de l'analyse se base sur la limite, il y a de quoi creuser.

3.0.5 Suites d'éléments de $\mathbb{R}^n$ et la topologie de $\mathbb{R}^n$

Définition 24 ***Une suite*** *d'éléments de* $\mathbb{R}^n$ *est une application* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$

$$f : k \to \overline{x_k} = (x_{1_k}, x_{2_k}, \dots, x_{n_k}) \in \mathbb{R}^n$$

Où :

$$\{\overline{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$$

est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$

Définition 25 $\{\overline{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$ *est* ***convergent*** *et admet pour* ***limite*** $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ *si, pour tout* $\varepsilon > 0 \exists k_o \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0, || \overline{x_k} - \overline{x} || \leq \varepsilon$ *Ou alors :*

$$\overline{x_n} \in \overline{B(\overline{x}, \varepsilon} \ \ \forall k \geq k_0$$

Remarque soit $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n), \overline{x_k} = (x_{1_k}, \dots, x_{n_k}, \lim_{n \to \infty} \overline{x_k} = \overline{x}$ si et seulement si la limite $\lim_{k \to \infty} x_{j_k} = x_j \ \ \forall j = 1, \dots, n$

Propriétés

1. La limite d'une suite $\{\overline{x}_k\}$, si elle exitste, est unique.
2. Toute suite convergente $\{\overline{x_k}\}$ est bornée ($\iff$ est contenue dans une boule fermé $\overline{B(\overline{o}, M)}$

$$\lim \overline{x_k} = \overline{x} \implies \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 \implies || \overline{x} - \overline{x_k} || \leq \varepsilon$$
$$\implies \{\overline{x_0}, \dots\} \subset \overline{B(\overline{x}, \varepsilon)}$$
$$\{\overline{x_0}, \overline{x_1}, \dots, \overline{x}_{k_0 - 1}\} \cup \{\overline{x_k}, k \geq k_0\} = \{\overline{x_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$$

Si nous prenons $M = \max\{|| \overline{x_i} ||, i = 0, \dots, k_{o-1}, || \overline{x} || + \varepsilon\}$

Bolzano-Weierstrass

Théorème 10 *De toute suite bornée* $\{\overline{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *on peut extraire une sous-suite convergente.*

Théorème à savoir, Un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé

Théorème 11 *Un sous-ensemble non vide* $E \subset \mathbb{R}^n$ *est fermé* ***si et seulement si*** *toute suite* $\{\overline{x}_k\} < E$ *d'élément* E *qui converge, a pour limite un élément de* E.

Demonstration $\implies$ *par absurde*

On cherche dont avec P et $\neg Q \implies$ absurde Soit $\overline{x} = \lim_{k \to \infty} \overline{x_k}, \overline{x_k} \in E \forall k \in \mathbb{N}$. Supposons par l'absurde que $\overline{x} \notin E$, E est fermé

ce qui implique que $\overline{x} \in CE$ où CE est ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Par la définition :

$$\exists \delta > 0 : B(\overline{x}, \delta) \subset CE \implies \{\overline{x_k} \forall k \in \mathbb{N}\} \cap B(\overline{x}, \delta) = \emptyset$$

D'autre côté, $\lim_{k \to \infty} = \overline{x} \implies \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0, \overline{x}_k \in \overline{B(\overline{x}, \frac{\varepsilon}{2})} \subset B(\overline{x}, \delta)$

Contraposé, par contraposé Supposons que E n'est pas fermé, $\iff$ CE n'est pas ouvert Alors :

$$\implies \exists \overline{y} \in CE \ \forall k \in \mathbb{N}_+ \ \ B(\overline{y}, \frac{1}{k}) \cap E \neq \emptyset$$

$$\implies \exists \overline{y_k} \in B(\overline{y}, \frac{1}{k}) \text{ tel que } \overline{y_k} \in E$$

On a obtenu une suite $\{\overline{y_k}\}_{k\in\mathbb{N}_+} \subset E$ et $\lim_{k\to\infty} \overline{y}_k = \overline{y} \in CE$

$$\iff \overline{y} \notin E$$

$$\implies \neq Q \text{ Alors } Q \implies P$$

Pour construire l'adhérence E d'un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$, il faut et suffit d'ajouter les limites de toues suites convergentes d'éléments de E.

Définition 26 *Un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}^n$ est* ***compact*** *s'il est fermé et borné*

Exemple Soit une boule fermé $\overline{B(\overline{x}, \delta)} = \{\overline{y} \in \mathbb{R}^n :\| \overline{x} - \overline{y} \|= \delta\}$ Alors $\overline{B(\overline{x}, \delta)} \subset \overline{B(\overline{o}, \| \overline{x} \| + \delta)}$ est borné. Et donc le sous-ensemble est compact

Exemple 2

$$E = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : n \geq 2, x_1 = 0\}$$

est fermé, mais non bornée

$$\{\overline{a}_k = (0, k, 0, \dots)\}_{k\in\mathbb{N}}$$

Ici les normes $\| a_k \|= k \in \mathbb{N}$. Et donc CE n'est ni borné ni fermé

Théorème Heine-Borel-Lebesgue

Théorème 12 *Un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact $\iff$ de tout recouvrement de E par des sous-ensembles dans $\mathbb{R}^n$:*

$$(E \subset \bigcup_{i\in I} A_i, \ A_i \subset \mathbb{R}^n \textit{ouverts}, \ A_i \in I \textit{ un recouvrement de } E)$$

On peut extraire une ***famille finie*** *d'ensemble que forment un recouvrement de E :*

$$E \subset \bigcup_{i\in I} A_i \ \ A_i \subset \mathbb{R}^n \textit{ ouverts} \implies \exists \{A_{i_j}\}_{j=1}^m : E \subset \bigcup_{j=1}^m A_{i_j}$$

Ici on peut prendre un nombre infini d'ensemble qui peut recouvrire un nombre fini d'ensemble. Cela ne marche pas si E n'est pas compact.

Exemple 1 Une droite dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ est fermée, pas bornée $\implies$ qu'elle n'est pas compacte.

Exemple 2 Intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$ tel que $E =]0,1[\subset \mathbb{R}$ n'est pas fermé ce qui implique que notre ensemble E n'est pas compact

$$E \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}}]0, \frac{i}{i+1}[$$

On ne peut pas choisir un sous recouvrement fini. Car si on prends un nombre fini k on dois pouvoir s'arrêter à un k néanmoins ici on n'y arrive pas car on a toujours le nombre $k+1$

> La propriétés d'être compactes est une propriétés très fortes

Exemple

Exercice

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(\sin(y-x)) \leq 0\}$$

Il faut démontrer que A est ouvert.

Question 6

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{y \cdot \ln x} < 1\}$$

1. Compact
2. Ouvert et borné
3. ni ouvert, ni fermé et non borné
4. fermé et non borné
5. ouvert et non borné
6. ni ouvert, ni fermé et borné

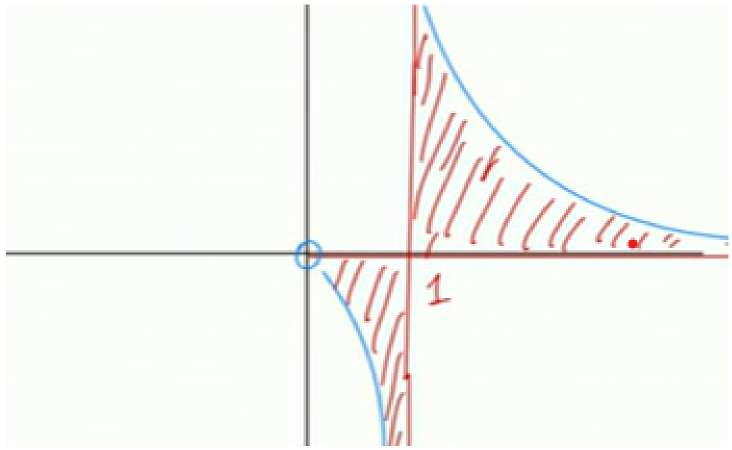
Pour répondre à cette question, on va prendre tout les cas possibles :

1. $lnx \implies x > 0$
2. Soit $y = 0 \implies \{y = 0, x > 0\} \in S$
   Aussi $\{x = 1, y \in \mathbb{R}\} \in S$
3. Soit $y > 0 \implies y \ln x \geq 0 \implies \ln x geq 0 \wedge x \geq 1$

   $$y \ln x < 1 \implies y < \frac{1}{\ln x}$$
   $$\{y > 0, x > 1, y < \frac{1}{\ln x}\} \subset S$$
4. Soit $y < 0 \implies y \ln x \geq 0 \implies \ln x \leq 0$ Alors :

   $$y \ln x < 1 \implies < \frac{1}{\ln x}$$
   $$\{y < 0, 0 < xx < 1, y > \frac{1}{\ln x}$$

   Ce qui donne comme ensemble :



Qui est une droite vertical avec $x = 1$ entre nos deux droite bleu. Néanmoins les lignes bleu ne sont pas inclus, et comme vu sur l'image l'ensemble tends vers les infinis en $x = 1$ et donc, il n'est ni fermé ni borné. Et la raison pour laquelle ce n'est pas ouvert, la ligne rouge horizontale et fermé et donc ce n'est pas ouvert.

Attention à faire attention car ici les courbes bleu impliquent que l'ensemble n'est pas fermé mais même si elles étaient fermés, il manquerait quand même le point 0 qui impliquerait que l'ensemble ne serait pas fermé.

Chapitre 4

Fonction réelles de plusieurs variables réelles limite et continuité

4.0.1 Définition et exemples

Définition 27 *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ sous-ensemble non-vide, $n \geq 1$ Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est une application qui envoie chaque point $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ dans $\mathbb{R}$.*
E est le domaine de définition de f et $f(E) \subset \mathbb{R}$ est l'ensemble image.

Exemple 1

$$f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 - y^2)}$$

Exemple 2

$$f(x, y) = 2x + 1$$

Plus généralement :

$$f(x, y) = ax + by + c;\ a, b, c, \in \mathbb{R}, E = \mathbb{R}^2$$

Comment visualiser cette fonction ?

$$\text{Soit } c = 0$$

Considérons $f(x, y) = ax + by$: Graphique $F = \{(x, y, z) : ax + by = z\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by - z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :< (x, y, z), (a, b, -1) >= 0\}$
On a donc un plan dont les valeur a, b -1 sont les composantes d'un vecteur orthogonal : $\overline{n} = (a, b, -1)$ et contenant $(0, 0, 0)$.
Soit $c \in \mathbb{R}$ arbitraire, alors il faut monter le plan par c unité le long de l'axe z pour obtenir le graphique de $f(x, y) = ax + by + c$ Et donc :

$$z = ax + by + x$$

qui est le plan $\perp \overline{n} = (a, b, -1)$ qui contient $(0, 0, c)$

Niveau

Définition 28 *Soit* $f : E \to \mathbb{R}$ *et* $c \in f(E)$ *Alors* $\mathcal{N}_f(c) = \{\overline{x} \in E : f(\overline{x}) = c\} \subset E$

Exemple 4

$$f(x, y) = \sin(x^2 + y) : E = \mathbb{R}^2$$
$$f(E) = [-1, 1]$$

Je conseil de taper sur google les fonctions pour avoir une bonne visualisation de ces fonctions :

google.com

On cherche donc les niveaux :

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_f(1) &= \{x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x^2 + y) = 1\}\\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}\\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x^2 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Samedi 15 mars 2025 — **Cours 9 : Limite est continuité**

Rappel

Définition 29 *Soit* $E \subset \mathbb{R}^n$ *sous-ensemble non vide,* $n \geq 1$ *Une fonction est une application qui envoie chaque point* $\overline{x0} = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ *dans* $\mathbb{R}$.
E *est le domaine de définition de* f *et* $f(E) \subset \mathbb{R}$ *est l'ensemble image.*

4.0.2 Limites et continuité

Définition 30 *Une fonction* ***définie au voisinage de*** $\overline{x_0}$ *(mais pas nécéssairement en* $\overline{x_0}$ *tel que*

$$[\exists\delta > 0 : B(\overline{x}_0, \delta) \subset E \cup \{\overline{x_0}\}]$$

admet pour ***limite*** *le nombre réel* l *lorsque* $\overline{x}$ *tend vers* $\overline{x_0}$ *si* ***pour tout*** $\boldsymbol{\varepsilon > 0 \exists \delta > 0}$ ***tel que pour tout*** $\boldsymbol{\overline{x} \in E}$ ***et*** $\boldsymbol{0 <\| \overline{x} - \overline{x}_0 \| \leq \delta}$***, on a*** $\boldsymbol{| f(\overline{x}) - l | \leq \varepsilon}$

Notation

Pour notre notation on utilise comme à notre habitude :

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{x_0}} f(\overline{x}) = l$$

Ici on a la norme $\| \overline{x} - \overline{x_0} \|$ à la place de la valeur absolue lorsqu'on parlait de fonction à une variable.

Continuité

Définition 31 *Soit $\overline{x_0} \in E$ un point intérieur de E. Alors $f : E \to \mathbb{R}$ est continue en $\overline{x} = \overline{x_0}$* ***si et seulement si***

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{x_0}} f(\overline{x}) = f(\overline{x_0})$$

Exemple 1

$$f(x, y) = 2x + y$$

soit $(x_0, y0) \in \mathbb{R}^2$: Alors

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (x + 2y) = x_0 + 2y_0$$

Soit $\varepsilon > 0$ alors on cherche $\mid f(x, y) - f(x_0, y_) \mid = \mid (x + 2y) - (x_0 + 2y_0) \mid$ si on utilise plus la norme ici et la valeur absolue car on est sur le côté à droite. On utilise l'inéégalité triangulaire :

$$\leq \mid x - x_0 \mid +2 \mid y - y_0 \mid$$

Ici on peut toujours prendre comme on a que $\overline{x} - \overline{x_0}$ plus petit que δ on doit les gérer ensembles et non séparément. Des lors : Dès lors on choisit $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$

$$\leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + 2\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = 3\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0$$

Exemple 2

$$f(x, y) = x \cdot y$$
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ Alors $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x \cdot y = x_0 \cdot y_0$

Démonstration :

Le cas où $x_0 = 0$ est vu en exercice, dès lors, nous traiterons ici le cas où nous supposerons que $x_0 \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$ alors :

$$\mid f(x, y) - f(x_0, y_0) \mid =$$
$$=$$
$$\leq$$

$$\mid y - y_0 \mid \cdot \mid x_0 \mid \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \mid x_0 \mid \leq \frac{\varepsilon}{2} \implies \delta \leq \frac{\varepsilon}{2 \mid x_0 \mid} (x_0 \neq 0)$$

$$\mid x - x_0 \mid y \mid \mid \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \cdot \mid y \mid \leq \delta(\mid y_0 \mid +\delta) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\implies \delta \leq \frac{\varepsilon}{2(\mid y_0 \mid +1)}$$

On peut choisir comme valeur pour δ :

$$\implies \delta = \min\left(\frac{e}{2 \mid x_0 \mid}, \frac{\varepsilon}{2(\mid y_0 \mid +1)}, 1\right) \implies \mid f(x, y) f(x_0, y_0) \mid \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Caractérisation de la limite à partir des suites convergentes

Théorème 13 *Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $\overline{x_0}$ admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque $\overline{x} \to \overline{x_0}$* ***Si et seulement si*** *pour toute suite d'élément $\{\overline{a_k}\}$ de $\{\overline{x} \in E : \overline{x} \neq \overline{x_0}\}$, qui converge vers $\overline{x_0}$, la suite $\{f(\overline{a}_k)\}$ converge vers l.*

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}} f(\overline{x}) = l \iff \lim_{k\to\infty} f(\overline{a_k}) = l \text{ pour toute suite } \{\overline{a_k}\} \subset E \setminus \{\overline{x_0}\} : \lim_{k\to\infty} \overline{a_k} = \overline{x_0}$$

Démonstration

$\implies P \implies Q$

Comme ce théorème est une équivalence, nous allons devoir prouver les deux sens. Commençons par $P \implies Q$. Prenons la définition de la limite à gauche :

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}} f(\overline{x}) = l \implies \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall\overline{x} : 0 <\mid\mid \overline{x} - \overline{x_0} \mid\mid\leq \delta$$
$$\implies \mid f(\overline{x}) - l \mid\leq \varepsilon$$
$$\text{Si on a } \{\overline{a_k}\} : \lim_{k\to\infty} \overline{a_k} = \overline{x_0} \implies \quad \text{pour } \delta > 0 \exists k_0 : \forall k \geq k_0$$
$$\implies \mid\mid \overline{a_k} - \overline{x_0} \mid\mid\leq \delta \implies \mid f(\overline{a_k}) - l \mid\leq \varepsilon$$
$$\mid f(\overline{a}_k) - l \mid\leq \varepsilon$$

L'idée ici est de prendre le même δ sur les deux première lignes.

$(\Longleftarrow)$ par contraposée

Petit rappel pour la contraposée : si on a $Q \implies P$ alors la contraposé est $\neg P \implies \neg Q$ donc ici on veut prouver que si la limite n'est pas l alors la limite de $f(\overline{a_k})$ n'est pas non plus l. Supposons donc que $\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}} f(\overline{x}) \neq l$ Alors :

$$\exists\varepsilon > 0 : \forall\delta > 0 \exists\overline{x}_\delta :\mid\mid \overline{x_k} - \overline{x_0} \mid\mid\leq \frac{1}{\delta} \mid \text{ et } \mid f(\overline{x}_\delta) - l \mid> \varepsilon$$

Dès lors, on peut choisir $\delta = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$ ce qui implique :

$$\exists\overline{x}_k \in E :\mid\mid \overline{x_k} - \overline{x_0} \mid\mid\leq \frac{1}{k} \text{ et } \mid f(\overline{x_k}) - l \mid> \varepsilon$$

On obtient la suite $\{\overline{x}_k\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k\to\infty} \overline{x_k} = \overline{x_0}$ mais $\mid f(\overline{x_k}) - l \mid> \varepsilon \forall k \in \mathbb{N}^*$ Dès lors

$$\implies f(\overline{x}_k) \neq l$$

Idée générale de la preuve

Ici on prends P et **Ensuite** $\neg P$ il est important de pouvoir différencier les deux et de pouvoir construite $\neg P$ à partir de P.

Opération algébrique

Soit f, g deux fonctions : $E_{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}} f(\overline{x}) = l_1$ et $\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}} g(\overline{x}) = l_2$ Alors :

1. $\lim_{\overline{x}\overline{x_0}}(\alpha f + \beta g)(\overline{x}) = \alpha l_1 + \beta l_2$
2. $\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}}(f \cdot g)(\overline{x}) = l_1 \cdot l_2$
3. Si $l_2 \neq 0$, alors $\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}}(\frac{f}{g})(\overline{x}) = \frac{l_1}{l_2}$

Conclusion Tous les polynômes en plusieurs variables et toutes les fonctions rationnelles sont continues sur leur domaines de définition,

> La caractérisation de la limite à partir des suites convergentes est pratique pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en $\overline{x_0} \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 1

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

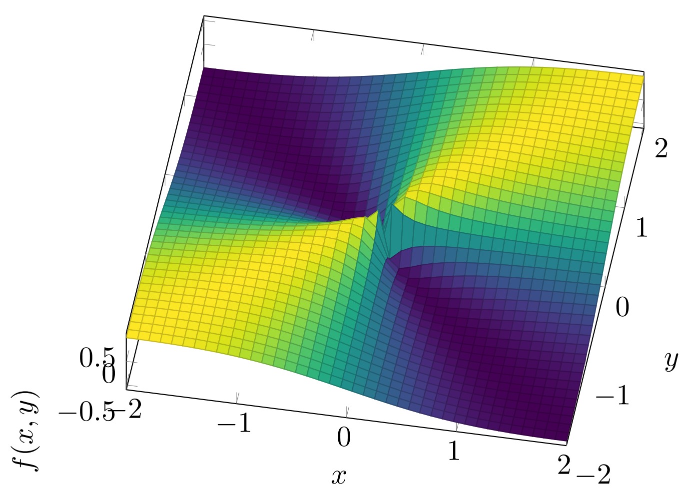
Soit $\overline{a_k} = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \to (0,0)$ qui implique donc pour la limite :

$$\lim_{k\to\infty} f(\overline{a_k}) = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2}$$

Dès lors, on peut aussi prendre $\overline{b_k} = (\frac{1}{k}, 0) \to (0,0)$ qui par le même procédé :

$$\lim_{k\to\infty} f(\overline{b_k}) = \lim_{k\to\infty} \frac{0\cdot\frac{1}{k}}{0+\frac{1}{k^2}} = 0$$

Et donc, par la caractérisation à partir des suites, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ne peut pas exister.
On peut aussi prendre une autre suite du genre $\overline{c_k} = (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \implies \lim_{k\to\infty} f(\overline{a_k}) = -\frac{1}{2}$
Alors quelle est la limite $f(x,y)$ en $(0,0)$



Proposition

Théorème 14 *soir $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $\overline{x_0} \in \mathbb{R}^n$. Alors $\lim_{\overline{x} \to \overline{x_0}} f(\overline{x}) = l$ si et seulement si pour toute courbe $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ telle que :*

$$\Upsilon([a,b]) \subset D \setminus \{\overline{x_0}\} \text{ et } \lim_{t \to a^*} y(t) = \overline{x_0}, \text{ on a } \lim_{t \to a^+} f(y(t)) = l$$

On ne peut pas calculer la limite d'une fonction de plusieurs variable en faisant de manière consecutive par rapport à chaque variable.

Exemple 2

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Alors on prends deux fonctions ; :

$$y_1(t) = (t,0)$$
$$y_2(t) = (0,t)$$

$$\lim_{t \to o} (\gamma_1(t)) = \lim_{t \to o} \frac{t^2 - 0}{t^2 + 0} = 1$$
$$\lim_{t \to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{0 - t^2}{0 + t^2} = -1$$

Et donc la fonction n'a pas de limite en ce point.

Exemple 3 soit :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \\ 0 \end{cases}$$

En prenant les mêmes fonctions :

$$\gamma_1(t) = (t,0) \implies \lim_{t \to 0} \gamma_1(t) = \overline{0}, \lim_{t \to 0} \frac{t^3+0}{t^2+0} = 0$$
$$\gamma_2(t) = (0,t) \implies \lim_{t \to 0} \gamma_2(t) = \overline{0}, \lim_{t \to 0} \frac{0-t^3}{0+t^2} = 0$$
$$\gamma_3(t,t) \implies \lim_{t \to 0} \gamma_3(t) = \overline{0}, \lim_{t \to 0} \frac{t^3+t^2}{t^2+t^1} = 0$$

On voit ici que ces fonctions ont toute la même limite, et si on prenait n'importe quelle autre fonction la limite existerait toujours. **Hypothèse** $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \overline{0}$

Méthode de changement de variables polaires

On peut démontrer l'existence de cette limite par le changement de variables en coordonnées polaires. :

$$x = r\cos\varphi \text{ si } r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$y = r\sin\varphi \text{ si } r \neq 0$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} &\implies f(r,\varphi) = \frac{r^3\cos^3\varphi + r^3\sin^3\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} \\ &= \frac{r^2(cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}{r^2} \\ &= r(cos^3\varphi + \sin^3\varphi) \end{aligned}$$

Ici, $\varphi(r)$ est une fonction inconnue, elle pourrait être n'importe quoi.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{r\to 0} \Phi(r,\varphi) \\ \lim_{r\to 0} \mid r(cos^3\varphi + \sin^3\varphi) \mid &= 0 \\ \implies \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

Cette méthode est efficace pour montrer l'existence des limites pour des fonctions de seulement deux variables, et qui tendent vers $(0,0)$ tel que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Théorème des 2 gendarme

Théorème 15 *Soit $f,g,h : E^{\subset\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$ telles que :*

1. $\lim_{\overline{x}to\overline{x_0}} f(\overline{x}) = \lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}} g(\overline{x}) = l$
2. *Il existe $\alpha > 0$ pour tout $x \in \{x \in E : o <\mid\mid \overline{x} - \overline{x_0} \mid\mid \leq \alpha\}$ on a :*

$$f(\overline{x}) \leq h(\overline{x}) \leq g(\overline{x})$$

Alors :

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}} h(\overline{x}) = l$$

Critère des 2 gendarmes en coordonnées polaires

Proposition Soit $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $(x_0, y0) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \text{ si et seulement si}$$

$$\exists\delta > 0 \text{ et } \varphi :]0,\delta[\to \mathbb{R} :$$

- $\forall \varphi \in [0, 2\pi] \implies \mid f(x_0, r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) - l \mid \leq \varphi(r)$
- $\lim_{r \to o^+} \varphi(r) = 0$

Exemple 5 soit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy^2}{x^2+y^2+3y^4} \\ 0 \end{cases}$$

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{4r^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{r^2 + 3r^4\cos^4\varphi} = \frac{4r^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{r^2(1 + 3r^2\sin^4\varphi}$$

$$\mid f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - 0 \mid = \frac{4r^3 \mid \cos\varphi\sin^2\varphi \mid}{r^2 \mid 1 + 3r^2\sin^4\varphi \mid}$$

On sait ici que la partie du nominateur (la partie en haut j'ai un doute) est toujours plus petite ou égale à 1 et la partie du bas plus grande ou égal à 1. ce qui nous donne :

$$\leq \frac{4r^3}{r^2} = 4r = \Phi(r)$$

Alors

$$\lim_{r \to 0} \Phi(r) = 0$$

Ce qui par les 2 gendarmes en coordonnées polaires nous donne :

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = (0,0)$$

Question à la fin du cours (Question 7) Soit les fonctions

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{cos(xy)(x^2+\sin(y^2))}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{Autrement} \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^4}{y^2+x^4+x^6}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}$$

La question est quelle fonction est continue en $(0,0)$?

Solution *$f(x,y)$* On passe d'abord en coordonnées polaire :

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{\cos(r^2\sin\varphi\cos\varphi)(r^2\cos\varphi + \sin(r^2\sin^2\varphi))}{r}$$

On prend ensuite la limite :

$$
\begin{aligned}
|\ f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - 0\ | &= \frac{|\cos(r^2\sin\varphi\cos\varphi)\ ||\ r^2\cos\varphi + \sin(r^2\sin^2\varphi)\ |}{r} \\
&\leq \frac{\overbrace{r^2\cos\varphi}^{\geq r^2} + |\ \overbrace{\sin(r^2\sin^2\varphi)}^{\leq |r^2\sin^2\varphi| \leq r^2}\ |}{r} \\
&\leq \frac{2r^2}{r} = 2r
\end{aligned}
$$

Et donc ici on voit que la limite de la fonction va bien vers 0. ON peut aussi le *"deviner"* en voyant un r tout seul en bas et une $r^2\cos\ldots$ en haut. Cela peut donner quelque indice.

Solution $g(x,y)$

Pour cette fonction on refait le même procédé mais avant on va tester les limites du type $\lim_{t\to 0} g(0,t)$ et aussi $\lim_{t\to 0} g(t,0)$ et on voit qu'elle ne donne pas la même réponse et que donc, la limite n'existe pas.

Mercredi 19 mars 2025 — **Cours 10 : Limites de fonctions**

Rappel

Voici un petit tappel sur les méthodes de calcul des limites de fonction $f : E_{\subset\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}$

1. s'il existent 2 suites $\overline{a_k}$ et $\overline{b}_k \subset E \setminus \{\overline{x_0}\}$: $\lim_{k\to\infty} \overline{a_k} = \overline{x_0}, \lim_{k\to\infty} \overline{a_k} = \overline{x_0}$ et que, $\lim_{k\to\infty} f(\overline{a_k}) \neq \lim_{k\to\infty} f(\overline{b_k})$ Alors la limite
$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}} f(\overline{x})$$
n'existe pas
2. S'il existent 2 courbe $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to E \setminus \{\overline{x_0}\}$ tel que :
$$\lim_{t\to a^+} \gamma_1(t) = \lim_{t\to a^+} \gamma_2(t) = \overline{x_0}$$
Et que :
$$\lim_{t\to a^+} f(\gamma_1(t)) \neq \lim_{t\to a^+} f(\gamma_2(t))$$
Alors, la limite $\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}} f(\overline{x})$ n'existe pas.
3. Deux gendarmes : soit $f, g, h : E \to \mathbb{R}$ telles que
$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = \lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} g(\overline{x}) = l$$
Et que $\exists\alpha > 0 :\ \forall x \in \{x \in E : 0 <\|\ \overline{x} - \overline{x_0}\ \|< \alpha\}$ on a
$$f(\overline{x}) \leq h(\overline{x}) \leq g(\overline{x})$$
Alors, $h(\overline{x}) = l$
4. Coordonnées polaires : $f : E \to \mathbb{R}$. Alors $\lim_{r\to o} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = 0 \iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ **Ici $\varphi = \varphi(r)$ est une fonction inconnue de r**

5. Deux gendarmes en coordonnées polaires : $f : E \to \mathbb{R}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l \iff \exists \delta > 0 \text{ et } \Phi :]0,\delta[\to \mathbb{R}$$
$$\forall \varphi \in [0, 2\pi], \ \ \forall r \in]0,\delta[\text{ on a } \mid f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - l \mid \leq \Phi(r)$$
$$\text{et } \lim_{r\to o^+} \Phi(r) = 0$$

Développement limité Pour calculer des limites, on peut aussi utiliser les DL connus pour les fonctions d'une seule variables pour trouver des estimations pour les deux gendarme. Notemment, dans les limites lorsque $|| (x,y) - (0,0) || \to 0$ on peut remplacer des expression $\Phi(x)$, $\varphi(x)$ par leur DL autour de $x = 0$ ou $y = 0$:

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{n} a_\alpha x^k + x^n \cdot \varepsilon(x) \text{ 1 seule variable}$$
$$x(y) = \sum_{k=0}^{n} b_k y^k + y^n \cdot \varepsilon(y), \ldots$$

On peut composer une fonction d'une seule variable

Proposition oit $D \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in D, g : D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de (x_0, y_0), telle que

Lundi 24 mars 2025 — **Cours 11 : Differentiable**

Méthode 7 Récurrence

Le principe fondamental de récurrence Soit $S \subset \mathbb{N}$ sous-ensemble : $0 \in S$ et pour tout $n \in S$ on a $(n+1) \in S$. Alors $S = \mathbb{N}$

Méthode de récurrence Soit $P(n)$ une proposition qui dépend de $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$
Supposons que

- $P(n_0)$ est vraie
- $P(n)$ implique $P(n+1)$ pour tout $n \geq n_0$ naturel

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$

On regroupe quatre étapes pour une preuve par récurrence :

1. La proposition (Soit $P(n)$ la proposition pour x)
2. L'initialisation $P(0)$
3. L'hérédité : Supposons que $P(n)$ est vrai, alors il faut en déduire $P(n+1)$
4. Conclusion : Puisque $P(x_0)$ est vraie et que pour tout $x \geq x_0$, $P(n) \implies P(n+1)$, par récurrence $P(n)$ est vraie $\forall n \geq x_0$.

Attention a ne pas mélanger ce qu'on veut et ce qu'on a.

Récurrence généralisée

Soit $P(n)$ une proposition qui dépend de $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$.
Supposons que (1)$P(n_0), \ldots P(n_0 + k)$ sont vraie pour un $k \in \mathbb{N}$
En deuxième $\{P(n), P(n+1), \ldots, P(n+k)\}$ impliquent $P(n+k+1) \forall n \geq n_0$, $n \in, \mathbb{N}$.
Alors, $P(n)$ est vraie $\forall n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$

Chapitre 5

Calcul différentielle des fonctions de plusieurs variables

5.1 Dérivées parielles, le gradient

Dérivée partielle

Définition 32 *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction, $E \subset \mathbb{R}$ sous-ensemble ouvert.*

Soit $g(s) = f(a_1, a_2, \ldots, \overbrace{s}^{k}, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ *où* $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in E$.

$$g : D = \{s \in \mathbb{R} : (a_1, a_2, \ldots, s, a_{k+1}, \ldots, a_n) \in E\} \to R$$

Alors si g est dérivable en $a_k \in D$, on dit que la ***k-ième dérivée partielle*** *de f en $\overline{a} \in E$ existe et est égale à $g'(a_k)$*

Notation : $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{a}) \equiv D_k f(\overline{a})$

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{g(a_k + t) - g(a_k)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\overline{a} + t\overline{e_k}) - f(\overline{a})}{t}$$

Gradient

Définition 33 *Si toutes les dérivées partielles existent en $\overline{a} \in E$: $\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{a}) \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{a})$, alors on définit le* ***gradient*** *de f en $\overline{a}$ comme :*

$$\nabla f(\overline{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{a}), \ldots \frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{a}), \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{a})\right)$$

5.2 Dérivée directionnelle

Définition Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ sous-ensemble ouvert, $\overline{a} \in E$, $\overline{v} \in \mathbb{R}^n, \overline{v} \neq 0$ La droite passant par $\overline{a}$ en direction $\overline{v}$ admet la paramétrisation $\overline{e}(t) = \overline{a} + t\overline{v}$ et cela $\forall t \in \mathbb{R}$.
Considérons la fonction $f : E \to \mathbb{R}$
et soit $g(t) = f(\overline{a} + t + \overline{v})$ la fonction d'une seule variable $t \in \mathbb{R}$:

$$g : D = \{t \in \mathbb{R} : \overline{a} + t\overline{v} \in E\} \to R$$

Définition 34 *Si g est dérivable en $t = 0$ on dit qu'il existe* ***la dérivée directionnelle*** *de f en $\overline{a}$ suivant le vecteur $\overline{v}$ (en direction de $\overline{v}$)*
La dérivée directionnelle de f en $\overline{a}$ en direction de $\overline{v}$ est :

$$Df(\overline{a}, \overline{v}) = \frac{\partial f}{\partial \overline{v}}(\overline{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\overline{a} + t\overline{v} - f(\overline{a}}{t}$$

Si $\overline{v} = \overline{e}_i$ ou $\overline{e_i}$ est un vecteur unitaire, Alors

$$Df(\overline{a}, \overline{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{a})$$

Si toutes les dérivées directionnelles existent en $\overline{a}$ (pour tout $\overline{v} \neq \overline{0}$), alors toutes les dérivées partielles existent en $\overline{a}$. La réciproque est fausse en générale

$$Df(\overline{a}, \lambda\overline{v}) = \lambda \cdot Df(\overline{a}, \overline{v}) \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R} : \;\; \lambda \neq 0$$

5.3 Dérivabillité et la différentielle

Définition 35 *Soit $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $\overline{a} \in E$*
On dit que f est ***dérivable*** *au point $\overline{a}$ s'il existe une transformation linéaire :*

$$L_{\overline{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

et une fonction $r : E \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = f(\overline{a}) + L_{\overline{a}}(\overline{x} - \overline{a}) + r(\overline{x}) \;\; \forall \overline{x} \in E$$

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{a}} \frac{r(\overline{x})}{|| \; \overline{x} - \overline{a} \; ||}$$

Définition 36 *$L_{\overline{a}}$ s'appelle **la différentielle** de f au point $\overline{a} \in E$*
Notation :

$$L_{\overline{a}} = df(\overline{a})$$

Une transformation linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que $\tau(\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2) = \alpha T(\overline{x}_1) + \beta T(\overline{x}_2)$ pour tout $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ Par example $x + 3y$ est une transformation linéaire tandis que $x + 2y + 2$ n'en est pas une.

Mercredi 26 mars 2025 — **Cours 12 : Tangente de la surface**

Rappel

Définition 37 *Soit $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $a \in E$.*
On dit que f est dérivable au point $\overline{a}$ s'il existe une transformation linéaire $L_{\overline{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et une fonction $r : E \to \mathbb{R}$ telles que :

$$f(\overline{x}) = f(\overline{a}) + L_{\overline{a}}(\overline{x} - \overline{a}) + r(\overline{x}) \; \forall \overline{x} \in E$$

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{a}} = \frac{r(\overline{x})}{|| \; \overline{x} - \overline{a} \; ||} = 0$$

Théorème 1

Théorème 16 *Soit $f : E \to \mathbb{R}$, $\overline{a} \in E$ tel que f est dérivable en $\overline{a}$ de différentielle $L_{\overline{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Alors :*

- *f est continue en $\overline{a} \in E$*
- *Pour tout $\overline{v} \in \mathbb{R}^n, \overline{v} \neq \overline{0}$, la dérivée directionnelle $Df(\overline{a}, \overline{v})$ existe et*

$$Df(\overline{a}, \overline{v}) = L_{\overline{a}}(\overline{v})$$

- *Toutes les dérivées partielles existent de f en $\overline{a}$ et*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{a}) = L_{\overline{a}}(\overline{e}_k)$$

Le gradient de f existent en $\overline{a}$ et :

$$\nabla f(\overline{a}) = (L_{\overline{a}}(\overline{e_1}), L_{\overline{a}}(\overline{e_2}), \ldots, L_{\overline{a}}(\overline{e_n}))$$

- *Pour tout $\overline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\overline{v} \neq \overline{0}$*

$$Df(\overline{a}, \overline{v}) = L_{\overline{a}}(\overline{v}) =< \nabla f(\overline{a}), \overline{v} >$$

- *Pour tout $\overline{v} \in \mathbb{R}^n$, $|| \overline{v} ||= 1$, on a que :*

$$Df(\overline{a}, \overline{v}) \leq|| \nabla f(\overline{a}) ||$$

Et que si :

$$Df\left(\overline{a}, \frac{\nabla f(\overline{a})}{|| \nabla f(\overline{a}) ||}\right) =|| \nabla f(\overline{a}) ||$$

Alors le gradient donne la direction de la plus grande croissance de f en $\overline{a}$

Equation du plan tangent de la surface

Définition 38 *Soit $\overline{a}$: $F(\overline{a}) = 0$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dérivable en $\overline{x} = \overline{a}$ et $\nabla F(\overline{a}) \neq 0$:*
L'équation de l'hyperplan tangent à $F(\overline{x}) = 0$ au point $\overline{a}$ est :

$$< \nabla F(\overline{a}), (\overline{x} - \overline{a}) >= 0$$

Et si $F(a, b, c) = 0$ et $\nabla F(a, b, c) \neq 0$ Alors :

$$< \nabla F(a, b, c), (x - a, y - b, z - c) > = 0$$

Ce qu'on fait en *gros*" c'est de prendre le gradient qui donne le vecteur normal au plan tangent qui a donc dans ces coordonnées les valeur pour l'équation cartésienne du plan, et on fait comme un changement de référentiel pour pouvoir avoir le 0 du plan à l'endroit ou il touche le point, c'est de là que provient le $x - x_0, y - y_0, z - z_0$.

Résumé

Dérivée partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{a}) = \lim_{t\to 0}\frac{f(\overline{a}+t\overline{e_k})-f(\overline{a})}{t}$$

si la limite existe, $\overline{e_k} = (0,\ldots,\overbrace{1}^{k},\ldots,0)$.
Le gradient :

$$\nabla f(\overline{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{a}),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{a})\right)$$

Dérivée directionnelles

- $$Df(\overline{a},\overline{v}) = \lim_{t\to 0}\frac{f(\overline{a}+t\overline{v})-f(\overline{a})}{t}$$
  Si la limite existe, $\overline{v}\in\mathbb{R}^n, \overline{v}\neq\overline{0}$.
- $Df(\overline{a},\overline{e}_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{a})$ si $Df(\overline{a},\overline{v})$ existent pour tout $\overline{v}\in\mathbb{R}^n$
- Si f est dérivable en $\overline{a}$, alors par le théorème 1, f est continue en $\overline{a}$, $Df(\overline{a},\overline{v})$ existe, et on a :

$$L_{\overline{a}}(\overline{v}) = Df(\overline{a},\overline{v}) =< \nabla f(\overline{a}),\overline{v} >$$

Théorème deux

Théorème 17 *Soit $E\subset\mathbb{R}^n$ ouvert, $f: E\to\mathbb{R}$, $\overline{a}\in E$. Supposons qu'il existe $\delta>0$ tel que toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{x})$ existent sur $B(\overline{a},\delta)$ et sont continues en $\overline{a}$.*
Alors f est dérivable en $\overline{a}\in E$

Lundi 7 avril 2025 — **Cours 13 : Jacobienne**

5.3.1 Fonction à valeur dans $\mathbb{R}^m$, $m\geq 1$, la matrice jacobienne

Définition 39 *Plus généralement, on peut considérer les fonctions :*

$$\overline{f}\cdot E^{\subset\mathbb{R}^m}$$

$$\overline{f}(\overline{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\overline{x}) \\ f_2(\overline{x}) \\ \vdots \\ f_m(\overline{x})\end{pmatrix}$$

Chaque fonction f_i est une fonction réelle de n variables réelles.

Dérivée La k-ième dérivée partielle de $f : E \to \mathbb{R}^m$ en $\overline{a} \in E$ est :

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial x}(\overline{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{a}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{a}) \end{pmatrix}$$

Lundi 14 avril 2025 — **Cours 17 : Jacob**

Rappel Pour rappel des semaine précédentes

$$\begin{gathered} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q \\ \implies J_{\overline{f} \cdot \overline{g}(\overline{a})} = J_{\overline{f}(\overline{g}(\overline{a}))} \cdot J_{\overline{g}(\overline{a})} \end{gathered}$$

alors :

$$F'(t) = f(g(t), t) \cdot g'(t) - f(h(t), t) \cdot h'(t) + \int_{h(t)}^{g(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

Exemple Si nous prenons une fonctions qui ne s'exprime en fonctions élémentaires :

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx$$

On a que :

$$\begin{aligned} I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} dx \implies I'(\alpha) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha}(\frac{x^\alpha - 1}{\ln x}) dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^\alpha \cdot \ln x}{\ln x} dx \\ &= \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1} \end{aligned}$$

Et ensuite on peut résoudre tout cela
Tout cela ne se retrouve pas a l'examen

5.3.2 Formule de taylor

Théorème

Théorème 18 *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ de classe C^{p+1} au voisinage de $\overline{a} \in E$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in B(\overline{a}, \delta) \cap E$ il existe $0 < \theta < 1$ tel que :*

$$f(\overline{x}) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \cdots + \frac{1}{p!}F^{(p)}(0) + \frac{1}{(p+1)!}F^{(p+1)}(\theta)$$

Explication $f(\overline{x}) = F(1), f(\overline{a}) = F(0)$ Depuis analyse I on sait que, la formule de Taylor pour $F(t)$, fonction d'une seule variable

$$F(t) = F(0) + F'(0) \cdot t + \frac{1}{2}F''(0) \cdot t^2 + \cdots + \frac{1}{p!}F^{(p)}(0) \cdot t^p + \frac{1}{(1+p)!}F^{(p+1)}(\theta)$$

$$\implies f(\overline{x}) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + ... \text{ Même chose}$$

On a donc ici :

$$F'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\overline{a} + t(\overline{x} - \overline{a})) - f(\overline{a})}{t} = Df(\overline{a}, (\overline{x} - \overline{a}))$$

Cas $n = 2$ Soit $\overline{a} = (a, b)$, $\overline{x} = (x, y)$, f de classe C^{p+1}
Soit $f(x, y) : E \to \mathbb{R}$, on cherche le polynôme de Taylor d'ordre p autour de (a, b).
Par le changement de variable : $F(t) = f(a + t(x - a), b + t(y - b))$. Trouver $F'(t), F''(t)$ en termes de f.

$$F(t) = f \circ g(t), f^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R},\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, g(t) = (a + t(x - a)b + t(y - b))^T$$

$$\implies F'(t) = J$$

Question 15 soit $f(x, y) = \frac{1}{\sin(x+y)}$ Et le coefficient de $(x - \frac{\pi}{2})^2 y^2$ dans le polynôme de taylor d'ordre 4 autour de $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ est :

- $\frac{1}{24}$
- $\frac{5}{4}$
- $\frac{5}{24}$
- $\frac{5}{6}$

donc si on a $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ si on regarde $\sin(\frac{\pi}{2} + 0) = 1$ et donc on ne peut pas faire un développement limité. On prends donc $s = (x - \frac{\pi}{2}, y)$ afin de pouvoir utiliser les développement limité :

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \varepsilon(x^4)$$

Pour un développement d'ordre 4. On pose :

$$\sin(\frac{\pi}{2} + s) = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}\cos s + \cos\frac{\pi}{2}\sin s} = \frac{1}{\cos s} = \frac{1}{1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{4!}\varepsilon(s^4)}$$

$$= \frac{1}{1 - (\frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{4!} + \varepsilon(s^4)}$$

On obtient donc pour le polynôme :

$$P_4 = 1 + (\frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{4!}) + (\frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{4!})^2$$

On pose donc pour $\frac{1}{\sin(s)}$:

$$f(x, y) = \frac{1}{(x - \frac{\pi}{2} + y - \frac{1}{6}(x - \frac{\pi}{2} + y)^3}$$

Le laplacien d'une fonction de classe C^2

Le Laplacien

Définition 40 *Soit $f : E \to R$ de classe C^2 sur E. La fonction $\delta f : E \to \mathbb{R}$:*

$$\Delta f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

Est le laplacien de f.

Harmonique

Définition 41 *Une fonction telle que $\Delta f = 0$ sur $E \subset \mathbb{R}^2$ s'appelle* ***harmonique***

Une fonction harmonique sur un domaine compact atteint son min et son max **sur la frontière** du domaine (Sans démonstration).
On peut prendre par exemple la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$ qui si l'on calcule $\Delta f(x, y) = 2 - 2 = 0$ Et l'on voit sur un graphe que si l'on prends une ensemble compact ses max, min se trouvent toujours sur la frontière, ce qui n'est pas le cas par exemple pour $f(x, y) = x^2 + y^2$.

5.3.3 Extrema d'une fonction a plusieurs variable

Mercredi 16 avril 2025 — **Cours 18 : Cours**

Point historique

oui

Rappel

Soit un ensemble ouvert $E \subset \mathbb{R}^n$ contenant un point $a \in E$ et $f : E \to \mathbb{R}$de classe $C^3(E)$.
Alors f s'écrit :

$$f(x) = P_2 f_a(x) + \varepsilon\Big(||\ x - a\ ||^2\Big) \tag{5.1}$$

Avec le polynôme de taylor de f d'ordre 2 : autour de (a, b) tel que :

$$P_2 f_a(x) = f(a) + < \nabla f(a), x - a > + \frac{1}{2}(x - a)^T \mathrm{Hess} f(a)(x - a) \tag{5.2}$$

Extrema d'une fonction de plusieurs variable

Définition 42 *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$ alors on appelle $a \in E$ un* ***point stationnaire*** *si $\nabla f(a) = 0$*

Extremum local

Définition 43 *La fonction $f : E \to \mathbb{R}$ admet un* ***maximum local (resp. minimum local)*** *au point $a \in E$ s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in E \cap B(a, \delta)$ on a $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$*

Proposition si $a \in E$ est un extremum local et $\nabla f(a)$ existe, alors a est un point stationnaire ($\nabla f(a) = 0$)

Proposition Soit $g_i(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$.
Par nos hypothèses, $g_i'(a_i)$ existe et $g_i(x)$ admet un extremum

local en $x = a$ et donc, $g_i'(a_i) = 0$. Vu que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = g_i'(a_i) = 0$, et que l'argument s'applique pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a $\nabla f(a) = 0$.

Remarque La réciproque est fausse, $\nabla f(a) = 0$ n'implique par que a est un extremum local.

Selle

Définition 44 *Un point stationnaire qui n'est pas un extremum local est un* ***point selle*** *de f.*

Exemple Si $f(x, y) = x^2 - y^2$, alors $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$ s'annule au point $(0, 0)$, mais ce n'est pas un extremum local.

Point critique

Définition 45 *$a \in E$ est un point critique de $f : E \to \mathbb{R}$ si a est un point stationnaire ($\nabla f(a) = 0$), ou bien au moins une dérivées partielles de f n'existe pas en $x = a$.*

Théorème 19 *soit $f : E \to \mathbb{R}^2$ de classe $C^2(E), a \in E$ un point stationnaire, et λ_i les valeurs propres de Hess de $f(a)$.*

- $\forall i, \lambda_i > 0 \implies$ *a est un minimum local*
- $\forall i, \lambda_i < 0 \implies$ *a est un maximum local*
- $\exists i, j$ *tels que* $\lambda_i > 0$ *et* $\lambda_j < 0 \implies$ *a est un point selle :*

Résultat du théorème

Ce que nous dit ce théorème et que les Hessiennes peuvent nous dire si un point est un extremum local.
Prenons comme exemple :

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

On a pour la Hessienne

$$\mathrm{Hess} f(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On peut aussi prendre la fonction

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

On a pour la Hessienne :

$$\mathrm{Hess} f(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Soit maintenant un dernier exemple :

$$f(x, y) = x^2$$

On a pour notre matrice :

$$\mathrm{Hess} f(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce genre d'exemple sont pas très pratique car le théorème nous permet pas de faire le calcul a notre place.

Esquisse de démonstration La démonstration n'est pas parfaite, il y a des imprécisions.
Si la fonction est de classe C^2, par le théorème de schwartz, on a que la Hessienne de $f(a)$ est symmetrique, alors cela implique que la Hessienne est diagonalisable.
On écrit Hess$f(a) = ODO^T$ avec O orthogonale et $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
De manière équivalente, on a Hess $f \circ O^T(a) = D$, un changement de variable $y = O^T x$.
On veut donc analyser notre fonction grâce au valeur propre de la Hessienne Par la formule de Taylor de $f(y)$ dans un voisinnage de a, on peut écrire de manière approciamtive :

$$f(y) = f(a) + < \nabla f(a), y - a > + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial y_i^2}(a)(y_i - a_i) + \varepsilon\Big(|| \, y - a \, ||^2\Big)$$

Ce qui si on l'approxime :

$$\approx f(a) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (y_i - a_i)^2$$

Ici on remplace la fonction directment par les valeurs propre de la Hessienne.
Donc si $\lambda_i > 0$ on a $f(y) \geq f(a)$, $\forall y$ dans un voisinage de $a \implies a$ est un minimum local de f. La "faute" ici est que l'on est entrain d'étudier le changement de variable de f et non f directement.

Ici on a deux chose a ne pas confondre, $f \circ O^T(a)$ et ODO^T qui n'ont pas le même produit, le premier ici prends un produit de matrice classique tandis que $f \circ O^T$ est une composition de fonction entre des fonctions dans $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.

Remarque Soit $c(t) = a + tv$ pour $v \in \mathbb{R}^n$. si $h(t) = f(c(t))$ admet un minimum au point 0 cela n'implique pas que a est un minimum local de f.
Si on prends la fonction $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$ autour de $a = 0$, selon la droite $c(t) = t(u, v)$.
On remplace par $c(t) = t(u, v)$:

$$h(t) = \Big(tv.(tu)^2\Big)\Big(tv - 2(tu)^2\Big) = t^2\Big(v^2 + q(t)\Big)$$

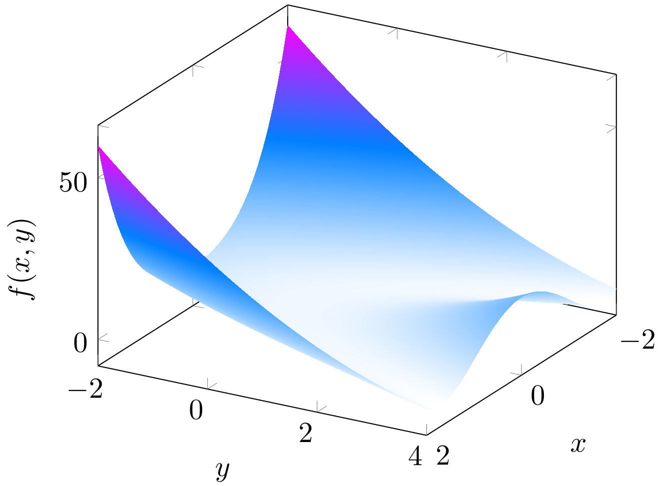
$$h'(t) = 2t\Big(v^2 + q(t)\Big) + t^2 q'(t)$$

Donc on redérive une fois encore pour pouvoir trouve les maximum est minimum locaux.

$$h''(t) = 2v^2 + q(t) + 2 \text{ tel que }'(t) + t^2 q''(t)$$

On a que $h'(0) = 0$ et $h''(0) \geq 0$ et donc 0 est un minium local de h.
Cependant si on prends la courbe, $c'(t) = \Big(t, \frac{3}{2}t^2\Big)$ quand $t \neq 0$ on a des points proches de $(0, 0)$, mais tels que :

$$f(c'(t)) = \left(\frac{3}{2}t^2 - t^2\right)\left(\frac{3}{2}t^2 - 2t^2\right) = -\frac{1}{4}t^4 < f(0, 0)$$



Théorème à connaître (condition équivalents sur Hess $f(a)$, cas $n=2$)

Théorème 20 *La proposition suivante s'applique à tous les matrice symmétrique, donc on notre* $H := Hessf(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \iff \det H > 0$ *et* $r > 0$

$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 \iff \det H > 0$ *et* $r < 0$

sgn $(\lambda_1) \neq$ *sgn* $(\lambda_2) \neq 0 \iff \det H < 0$

Démonstration Le déterminant et la trice de H sont invariants par conjugaison. La diagonalisation $H = ODO^T$ donne alors :

$$rt - s^2 = \det H = \det D = \lambda_1 \lambda_2$$

$$r + t = Tr\, H = Tr\, D = \lambda_1 + \lambda_2$$

1 $\implies$ Supposons que $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ immédiatement, on a que $\det H = \lambda_1 \lambda_2 > 0$.
Ensuite, $\lambda_1 \lambda_2 = rt - s^2 > 0$ dont $rt > s^2 \geq 0 \implies r$ et t qui sont de même signe.
De plus, $Tr\, H = \lambda_1 + \lambda_2 = r + t > 0$. On conclut que r doit être strictement positif. (si la multiplication est positive **et** l'addition est positif).

Dans l'autre sens Suppsons que $\det H > 0$ et $r > 0$.
Alors $\det H = \lambda_1 \lambda_2 > 0 \implies \lambda_1$ et λ_2 sont de même signe.
Ensuite, $\lambda_1 \lambda_2 = rt - s^2 > 0$ dont $rt > s^2 \geq 0$ mais $r > 0$ dont $t > 0$ aussi, $Tr\, H \implies r + t = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$ et donc on utilise le même arguement que précédemment, $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$.

2 Le point 2 est laissé en exercice

3 $\det H < 0 \iff \lambda_1 \lambda_2 < 0 \iff \lambda_1$ et $\lambda_2$sont de signe opposés.

Critère de Sylvester

Théorème 21 *Condition équivalentes aux condition suffisantes dans le cas $n = 3$.*
Soit $f \in C^2(E)$ au voisiange de a tel que $\nabla f(a) = 0$. :
Soit

- $\Delta_1 = \det Hess_x f(a)$
- $\Delta_2 = \det Hess_{x,y} f(a)$
- $\Delta_3 = \det Hess_{x,y,z} f(a)$

Alors :

- $\Delta_1 > 0, \Delta_2, \Delta_3 > 0 \iff \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0 \iff$ *a est un minium local de f*
- $\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0\delta_3 < 0 \iff \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0 \iff$ *a est un maximum local de f*
- *Autrement $\Delta_3 \neq 0 \implies \exists \lambda_i > 0$ et $\lambda_j > 0$ et $\lambda_j < 0 \implies$ a est un point selle de f*

Exercice Le but est de trouver les points critique et de déterminer leur nature.
Soit $f(x, y) = y^3 + 3y^2 - 4xy + x^2$. Alors $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ donc tout les points critiques trouvés sont stationnaire.
On calcule

$$(x, y) = \left(-4y + 2x, 3y^2 + 6y - 4x\right)$$

Et Pour la Hessienne :

$$\text{Hess} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6y + 6 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x, y) = 0 \iff \begin{cases} 2x = 4y \\ 3y^2 + 6y = 4x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ y(3y - 2) = 0 \end{cases}$$

Donc si on remplace ce qu'on trouve dans la Hessienne :
On étudie donc les points stationnaire $(x, y) \in \{(0, 0), \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)\}$ Si on cherche donc les points selles :

$$\text{Hess} f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \implies \det = -4 < 0$$

Ce qui implique que le point $(0, 0)$ est un point selle.
Si on prends donc Hess $f\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} = 4 > 0 \implies$ que ce point est un minimum local.

Lundi 28 avril 2025 — **Cours 19 : Test blanc**

5.3.4 Corrigé du test blanc

Ici ce n'est pas le corrigé de la professeur mais moi directement lorsque je fais mes exercices donc il se peut que l'approche ne soit pas rigoureuse peut être même éronnée en quelque sorte :

Question 1 La solution $y(x)$ de l'équation différentielle :

$$y'(x) = \frac{x}{x^2+9}(y(x)-1)$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 7$ vérifie aussi pour $y(4) = \ldots$.

Corrigé Donc on voit ici en premier lieu que l'équation est une EDVS, on arrive à séparer les y des x :

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{x}{x^2+9}(y-1) \\ \frac{y'}{y-1} &= \frac{x}{x^2+9} \end{aligned}$$

A partir de là, il faut alors intégrer des deux côtés et on trouvera la solution :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y-1}dy &= \int \frac{x}{x^2+0}dx \\ \ln|y-1| + C' &= \frac{1}{2}\ln\overbrace{\left|x^2+9\right|}^{\geq 0} + C \\ |y-1| &= \ln C\overbrace{\sqrt{x^2+9}}^{\geq 0} \\ y-1 &= C\sqrt{x^2+9} \\ y &= 1 + C\sqrt{x^2+9} \end{aligned}$$

Ensuite on va donc trouver la valeur pour $y(0)$:
On évalue $y(0) = 1 + C \cdot \sqrt{9} = 1 + 3C \implies C = 2$. Et donc
On évalue notre fonction en $y(4) = 1 + 2\sqrt{16+9} = 11$

Question 4 Le sous ensemble :

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1 \text{ et } -1 < xy < 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

Est

- ouvert et borné
- fermé et non borné
- fermé et borné
- ouvert et non borné

Ici déja on peut voir en quelque sorte a l'oeil nu si le sous-ensemble est ouvert ou fermé. Si l'on le regard comme un ensemble dans $\mathbb{R}$ on voit que tout les $<$ ou $>$ donne des ensemble ouvert (de ce type] [) ce qui est "l'équivalent" de ouvert. et donc peut deviner ici que l'ensemble est ouvert et non fermé.
Pour ce qui est de borné, prenons la deuxième condition, pour montrer qu'un ensemble n'est pas borné il faut montrer qu'il y a une de ces variables qui peut s'étendre jusqu'à l'infini (c'est une sorte d'esquisse de preuve mais ca permet de se répérer lors de qcm).
Donc on prend la deuxième condition : $-1 < xy < 1$ si on prends par exemple : $y = \frac{1}{k+1}$ et $x = k$ et que nous faisons la limite du produit :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1}$$

On voit que cette limite est bornée par 1 : soit $k \in \mathbb{R}$prenons :

$$\begin{aligned} 0 &< 1 \\ k &< k+1 \\ \frac{k}{k+1} &< 1 \end{aligned}$$

On voit ici donc que x peut tendre vers l'infini et fera toujours parti de l'ensemble, donc l'ensemble n'est pas bornée.

Question 5 Soit $\{\overline{x}_n\}$ la suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$ définie par

Mercredi 30 avril 2025 — **Cours 20 : Test blanc ou pas**

Rappel : Thm. Condition suffisante pour un extremum local d'une fonction

Théorème 22 *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, $\overline{a} \in E$: $\nabla f(\overline{a}) = \overline{o}$.*
Alors :

1. *Si toutes les valeurs propres de $Hess_f(\overline{a})$ sont positives $\implies$ il y a un minimum locale en $\overline{x}$.*
2. *$\lambda_1 < 0, \lambda_2, < 0 \ldots, \lambda_n < 0$ sont négatives $\implies$ un maximum locale en $\overline{x}$.*
3. *$\exists \lambda_i > 0$ et $\exists \lambda_j < 0$ $\implies$ pas **pas d'extremum en** en $\overline{x} = \overline{a}$ (un point selle).*

Proposition cas $n = 2$ Les condition du Théorème sur la matrice $Hess_f(\overline{a})$ sont équivalentes aux conditions suivantes. Posons

$$\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} = Hess_f(\overline{a})$$

Cas $n = 3$ Lorsque $n = 3$ on a la matrice de Hessienne qui est donnée par :

$$Hess_f(\bar{a}) = \begin{array}{c} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{array} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}$$

Min et Max d'une fonction conitnue sur un ensemble compact

Rappel

Théorème 23 *Une fonction* ***continue*** *sur un sous-ensemble* ***compact*** *$D \subset \mathbb{R}^n$. atteint son min et sont maximum . Formellement :*

$$\exists \overline{c_1} \in D : f(\overline{c_1}) = min_{\overline{x} \in D} f(\overline{x})$$
$$\exists \overline{c_2} \in D : f(\overline{c_2}) = max_{\overline{x} \in D} f(\overline{x})$$

Pour trouver $\overline{c_1}$ et $\overline{c_2}$ il faut :

1. Trouver les points critiques $\{\overline{c_1}\}$ de f sur D (avec la frontière)
2. Trouver les points $\{\overline{d_j}\}$ de min, max de $f(\nabla D)$ calculer les valeurs de $f\left(\overline{d_j}\right)$
3. Choisir le min et le max de $\{f(\overline{c_i}), f\left(\overline{d_j}\right)\}$

Exemple

$f(x, y) = 6x^2 + 2x^2y - 3y^2 + 2y + 1$ Trouver le min et le max absolus (global) de f sur le carré $E = \{-2 \leq x, y \leq 2\}$.
La première étape et sur l'ensemble $E = \{-2 < x, y < 2\}$
On calcule les dérivée partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -12x + 4xy = 4x(3 - y) = 0$$

Qui arrive lorsque $x = 0$ ou $y = 3$ qui n'est pas dans notre ensemble, et donc : $-6y + 2 = 0 \implies y = \frac{1}{3}$, $\left(0, \frac{1}{3}\right) \in E$.
De l'autre côté :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 - 6y + 2$$

En calculant les dérivée partielle seconde :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -12 + 4y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4x$$

Ce qui implique lorsqu'on calcule la Hessienne :

$$Hess_f\left(0, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -12 + \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}\left(0, \frac{1}{3}\right)$$

Et on voit que le déterminant de cette matrice est plus grande que 0 et que tout les valeurs propres sont négative (det > 0 et $\lambda_i < 0$ nous donne que tout les valeurs propres sont négative (les deux seulement). Ce qui nous donne un maximum locale sur E avec la frontière en $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

Min et Max de f sur la frontière de E

Maintenant on cherche le miniment et maximum sur la frontière directement tel que :

$$\begin{aligned} f(x,y)_{x=\pm 2} &= -24 + 8y - 3y^2 + 2y + 1 \\ &= -3y'2 + 10y - 23 = g(y) \end{aligned}$$

$$g'(y) = -6y + 10 \implies y\frac{5}{3}$$

Ce qui nous donne comme élément de l'ensemble $\left(\pm 2, \frac{5}{3}\right)$.
Du côté du y :

$f(x,y)_{y=2} = -6x^2 + 4x^2 - 12 + 4 + 1 = -2x^2 - 7 = h_1(x) \implies (0,2)$ est un r

Avec $h_1'(x) = -4x, h_1''(x) = -4 < 0$.

$f(x,y)_{y=-2} = -6x^2 - 4x^2 - 12 - 4 + 1 = -10x^2 - 15 = h_2(x) \implies (0,-2)$ es

Avec $h_2'(x) = -20x$ et $h_2''(x) = -20 < 0$.
On regarde finalement les coins :

$$f(\pm 2, 2) = -15$$
$$f(\pm 2, -2) = -55$$

On cherche donc sur toute les valeurs qu'on a trouvées le min et le max qui nous donne $\frac{4}{3}$ pour le max global sur E et -55 le minimum global sur E. avec :

$$f\left(0, \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$
$$f(\pm 2, -2) = -55$$

5.3.5 Théorème des fonctions implicites

Question

Fonction implicite : Une dépendance $f = f(\overline{x})$ qui est définie par une équation. La question posée est, est ce que l'équation $F(x, y) = 0$ définit une fonction $y = y(x)$?

Exemple 1 Soit $F(x, y) = x + 3y = 0$
On voit ici que a fonction $y = f(x)$ et donnée par : $y = -\frac{1}{3}x$ et on voit que cela est définit partout.

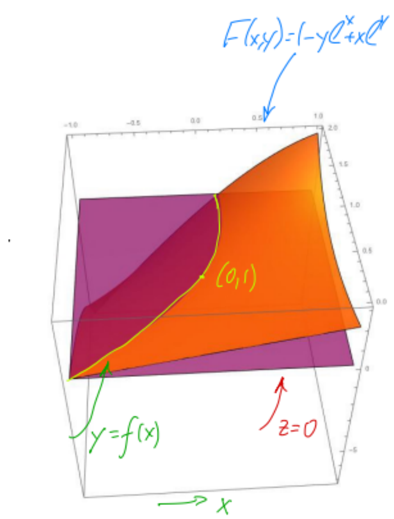
Exemple 2 Soit la fonction $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Et soit $(a, b) \in$ le cercle, alors $a^2 + b^2 + 1 =$ Si $b > 0 \implies y = \sqrt{1 - x^2}$ au voisinage de $(a, b)b > 0$
Si $b < 00 > y = -\sqrt{1 - x^2}$ au voisinage de $(a, b) : b < 0$. Si $b = 0$ on a deux solution pour chaque x dans le voisinage $(\pm 1, 0)$

Surface

Définition 46 *Une surface (**ligne**) de niveau d'une fonction $F(x, y, z)$ ou $(F(x, y))$ est la surface (ligne) définie par l'équation*

$$F(x, y, z) = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Exemple 3 soit la fonction $F(x, y) = 2 - ye^x + xe^y$ on cherche $y = f(x)$ autour d'une point donné $(0, 1)$?



Soit $(x, y) = (0, 1)$. On vérifie que $F(x, y) = 0$ définit autour de $(0, 1)$ une fonction $y = f(x)$ telle que $F(x, f(x)) = 0$ au voisinage de $x = 0$ et trouver $f'(0)$.
On trouve d'abord :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -e^x x e^y \text{ en } (0, 1) \ = -1 \neq 0$$

Ce qui implique que le TFI est appliquable.
Il existe alors une fonction $f(x)$ tel que $y = f(x)$au voisinage de $(0,1)$: $F(x, f(x)) = 0$. et

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)} = -\frac{ye^x + e^y}{-e^x + xe^y}_{(0,1)} = -\frac{-1+e}{-1} = -1 + e = f'(0)$$

On a donc pour l'equation de la tangente au point $(0,1)$ à la courbe $y = f(x)$.

$$y - 1 = (-1+e)(x-0)$$
$$y = 1 + (e-1)x$$

Théorème des fonctions implicites

Théorème 24 *$F : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 au voisinage de $\overline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in E$ telle que :*

$$F(\overline{a}) = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_n}(\overline{a}) \neq 0$$

Alors il existe un voisinage $B(\overline{a}', \delta)$ de $\overline{a}' = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ et une fonction $f : B(\overline{a}', \delta) \to \mathbb{R}$ telle que

1. *$a_n = f(a_1, \dots a_{n-1})$*
2. *$F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0$ et cela $\forall (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in B(\overline{a}', \delta)$.*

De plus, f est de classe C^1 dans un voisinage de $\overline{a}'$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial d_p}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_p}(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1}))}{\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1}))} \quad \forall p \in \{1, \dots, n-1\}$$

Cas particulier du TFI : deux variables

Soit $F(x,y) : E \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $F(a,b) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$.
Alors l'équation $F(x,y) = 0$ définit localement autour de (a,b) une fonction $y = f(x)$ telle que :

1. $f(a) = b$
2. $F(x_1, f(x)) = 0$
3. $f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}$

Cela veut dire que l'on peut calculer $f'(a)$ sans savoir la formule explicite pour $f(x)$.

Cas particulier du TFI : trois variables

Soit $F(x,y,z) : E \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tel que $F(a,b,c) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c) \neq 0$.
Alors il existe localement une fonction $z = f(x,y)$ telle que

1. $f(a,b) = c$
2. $F(x,y,f(x,y)) = 0$ pour tout couple, (x,y) dans un voisinage de (a,b)

3. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,f(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y))}$; ∂ je ferais après

Q16 L'équation $F(x,y) = \sin(x+y)\cos(x-y) - \frac{1}{2} = 0$. On cherche $g(x)$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \cos(x+y)\cos(x-y) - \sin(x+y)\sin(x-y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \cos(x+y)\cos(x-y) + \sin(x+y)\sin(x-y)$$

Donc si on simplifie :

$$\frac{\cos(2x)}{\cos(2y)}$$

On pose les questions : $\exists x = h(y)$ et $\exists y = g(x)$ et nous voyons que cela est vrai seulement pour $x = h(y)$. :
Comme dit précédemment on trouve donc la dérivée de la fonction grâce a notre formule :

$$h'(y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}_{\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{0}{-1}$$

On obtient logiquement pour la pente de la tangent $x = h(y)$ en $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$ est 0.