

a

Analyse II

Arthur Herbette
Prof. Lachowska Anna

Lundi 24 mars 2025

Table des matières

1	Introduction	7
2	Equations différentielles ordinaires	9
2.1	definition	9
2.2	Existence et unicité d'une solution de EDVS	10
3	Méthode de démonstration, Raisonnement mathématique	11
3.1	Méthode de démonstration	11
3.1.1	Théorème Existence et unicité d'une solution de EDVS	12
3.1.2	Solution maximale	13
3.2	Equation différentielle linéaire du premier ordre (EDL1)	13
3.2.1	Principe de superposition de solutions	14
3.2.2	Théorème à savoir pour l'examen	15
3.2.3	Rappel : Equation différentielles linéaires du premier ordre (EDL1)	15
3.2.4	Application de EDVS (EDL1) : Croissance et décroissance exponentielle	18
3.3	Méthodes de démonstration	18
3.4	Equation différentielle du second ordre	20
3.4.1	Unicité d'un EDL2	22
3.4.2	Rappel : Equation différentielle linéaires du second ordre (EDL2)	23
3.4.3	Caractérisation des 2 solutions de EDL2 linéairement indépendante	24
3.4.4	Démonstration à savoir	24
3.4.5	Théorème aussi à savoir	25
3.4.6	Méthode de résolution de EDL2	29
3.4.7	Méthode de démonstration par l'absurde	32
4	Espace \mathbb{R}^n	35
4.0.1	\mathbb{R}^n espace vectoriel normé	35
4.0.2	Sous-ensemble ouverts et fermés de \mathbb{R}^n	36
4.0.3	Méthodes de démonstration : Démonstration par le principe des tiroirs	39
4.0.4	L'adhérence et la frontière d'un sous-ensemble \mathbb{R}^n	40
4.0.5	Suites d'éléments de \mathbb{R}^n et la topologie de \mathbb{R}^n	41
5	Fonction réelles de plusieurs variables réelles limite et continuité	45
5.0.1	Définition et exemples	45
5.0.2	Limites et continuité	46
6	Calcul différentielle des fonctions de plusieurs variables	57
6.1	Dérivées partielles, le gradient	57
6.2	Dérivée directionnelle	58

6.3	Dérivabilité et la différentielle	58
-----	---	----

Liste des cours

Cours 1 : Equa Diff — Lundi 17 février 2025	9
Cours 2 : EDO — Mercredi 19 février 2025	12
Cours 3 : EDL1 Et Méthode de démonstration — Lundi 24 février 2025	15
Cours 4 : EDL2 — Mercredi 26 février 2025	20
Cours 5 : Equation différentielle — Lundi 3 mars 2025	23
Cours 6 : EDL2 — Jeudi 6 mars 2025	29
Cours 7 : Espace \mathbb{R}^n — Lundi 10 mars 2025	33
Cours 8 : Suite d'élément de \mathbb{R}^n — Mercredi 12 février 2025	40
Cours 9 : Limite et continuité — Samedi 15 mars 2025	46
Cours 10 : Limites de fonctions — Mercredi 19 mars 2025	53
Cours 11 : Differentiable — Lundi 24 mars 2025	54

Chapitre 1

Introduction

Le but de ce document est d'y faire un résumé qui se trouve entre les notes de Joachim Favre (Dont j'ai utilisé le template) et Les résumés des théorèmes disponibles sur moodle. Je vais essayer de me tenir à environ une à 2 pages par cours

Chapitre 2

Equations différentielles ordinaires

Lundi 17 février 2025 — Cours 1 : Equa Diff

2.1 définition

Définition 1 Une équation différentielle ordinaire est une expression

$$E(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

où E est une expression fonctionnelle, $n \in \mathbb{N}_0$, et $y = y(x)$ est une fonction inconnue de x . On cherche un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n telle que l'équation donnée est satisfaite $\forall x \in I$.

Equation à variable séparées

Une équation à variables séparées est une équation du type $f(y) \cdot y' = g(x)$ est une **EDVS** où :

- $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$
- $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $J \subset \mathbb{R}$

Une fonction $y : J' \subset J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C' satisfaisant l'équation $f(y) \cdot y' = g(x)$ est une solution

*Remarque
personnelle*

Ce type d'équation se résout très rapidement car on peut transformer le y' en $\frac{dy}{dx}$ et "mettre le dx de l'autre côté" :

$$f(y) \cdot \frac{dy}{dx} = g(x) \implies \int f(y) dy = \int g(x) dx$$

Et il suffit donc d'intégrer les deux côtés et le tour est joué.

Terminologie

Soit $E(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$ (*) une équation différentielle (ED) :

- **Def :** un nombre naturel $n \in \mathbb{N}_+$ est l'**ordre** de l'équation (*) si n est l'ordre maximal de dérivée de $y(x)$ dans l'équation.

- **Def :** Si (*) est de la forme $\alpha_0(x)y + \alpha_1(x)y' + \alpha_2(x)y'' + \dots + \alpha_n(x)y^{(n)} = b(x)$ alors l'équation est dite **linéaire** où $\alpha_i(x)$, $b(x)$ sont des fonctions continues
- **Def** Si l'expression (*) ne contient pas de x l'équation (*) est dite **autonome**

Problème de Cauchy

Définition 2 Résolve **Le problème de Cauchy (ED avec des conditions initiales)** pour l'équation $E(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ c'est de trouver l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^n(I)$, telle que $E(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$ sur I et $y(x_0) = b_0, y'(x_0) = B, \dots, y^{(n)}(x_0) = \dots$

Le nombre des conditions initiales dépend du type de l'ED

C'est ce qui se passe en physique lorsqu'on a une forme et que l'on cherche la position au cours du temps :

$$\begin{aligned} ma &= F \\ a &= \frac{F}{m} \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{F}{m} \\ x &= \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 + c_1 t + c_0 \end{aligned}$$

Et le but est de trouver ses constantes qui sont les conditions initiales.

Définition 3 Une solution d'un problème de Cauchy est **maximale** si elle est définie sur le plus grand intervalle possible.

2.2 Existence et unicité d'une solution de EDVS

Théorème

Théorème 1 Soit

- $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(y) \neq 0 \quad \forall y \in I$
- $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout couple $(x_0 \in J, b_0 \in I)$, l'équation $f(y) \cdot y' = g(x)$ admet une solution $y : J' \subset J \rightarrow I$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = b_0$

Si $y_1 : J_1 \rightarrow I$ et $y_2 : J_2 \rightarrow I$ sont deux solutions telles que $y_1(x_0) = y_2(x_0) = b_0$, alors $y_1(x) = y_2(x)$ pour tout $x \in J_1 \cap J_2$
(Démonstration la prochaine fois)

Chapitre 3

Méthode de démonstration, Raisonnement mathématique

Introduction

Définition 4 Une *proposition* est un énoncé qui peut être vrai ou faux.

Définition 5 Une *démonstration* est une suite d'implication logique qui sert à dériver la proposition en question à partir des axiomes (propositions admises comme vraies) et des propositions préalablement obtenue

3.1 Méthode de démonstration

Méthode 1

Démonstration direct :

$$\underbrace{P}_{\text{condition donnée}} \implies \text{implications logiques/axiomes/propositions connues} \implies \underbrace{Q}_{\text{proposition désirée}}$$

*Remarque
personnelle*

C'est pas vraiment très claire comme ça mais en gros ça veut juste dire que pour prouver quelque chose on y va en mode brute force (tout les nombres entiers sont des nombres réels (propositions connues) et par exemple est ce que 23 est un réel?)

Raisonnement par contraposée

Comme vu en AICC on sait que $P \implies Q \equiv \neg P \implies \neg Q$

3.1.1 Théorème Existence et unicité d'une solution de EDVS

Théorème

Théorème 2 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(y) \neq 0 \ \forall y \in I$
 $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout coupe $(x_0 \in J, b_0 \in I)$, l'équation

$$f(y) \cdot y'(x) = g(x)$$

admet une solution $y : J' \subset J \rightarrow I$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = b_0$.

Si $y_1 : J_1 \rightarrow I$ et $y_2 : J_2 \rightarrow I$ sont deux solutions telles que $y_1(x_0) = y_2(x_0) = b_0$, alors $y_1(x) = y_2(x)$ pour tout $x \in J_1 \cap J_2$

Démonstration

Idée : $\int f(y)dy = \int g(x)dx \implies F(y) = G(x) \implies y(x) = F^{-1}(G(x))$

Le reste de la preuve se trouve sur les pdf de Joachim Favre.

Résumé

Résumé 1 EDVS : $f(y) \cdot y' = g(x)$ où $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue (respectivement J pour g),
 Pour résoudre $\int f(y)dy = \int g(x)dx$ où $\int f(y)dy$ est une primitive (sans constante) et $\int g(x)dx$ est une primitive générale (avec une constante)

Exemple

Exemple 1

$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = 1$ EDVS : $\frac{1}{x^2}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^*

On a aussi que $g(x)$ est continue sur \mathbb{R} . on fait donc :

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int dx \implies -\frac{1}{y} = x + C$$

$$y = -\frac{1}{x + C} \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

la solution générale sur $] -\infty, -C[$ et $] -C, \infty[$.

Condition initiale $y(0) = b_0 \in \mathbb{R}^* \implies y(0) = -\frac{1}{C} = b_0 \implies C = -\frac{1}{b_0}$

- Si $b_0 > 0 \implies \frac{1}{b_0} > 0 \implies y(x) = -\frac{1}{x - \frac{1}{b_0}}$ sur $] -\infty, \frac{1}{b_0}[$
 - la solution particulière
- Et vis versa pour $b_0 < 0$

3.1.2 Solution maximale

Solution maximale

Définition 6 Une solution **solution maximale** de l'EDVS avec la condition initiale $y(x_0) = b_0$, $x \in J$, $b_0 \in I$ est une fonction $y(x)$ de classe C^1 satisfaisant l'équation, la condition initiale et qui est définie sur le plus **grand** intervalle possible.

Le théorème sur EDVS dit que si $f(y) \neq 0$ sur I , alors il existe une unique solution maximale. Toute solution avec la même condition initiale est une restriction de la solution maximale

Exemple 2

L'équation différentielle $2yy' = 4x^3$ avec la condition initiale $y(0) = 0$ possède :

1. Une seule solution sur \mathbb{R}
2. 2 solutions sur \mathbb{R}
3. 3 solutions sur \mathbb{R}
4. 4 solutions sur \mathbb{R}

En premier lieu il faudra résoudre :

$$\begin{aligned}\int 2y dy &= \int 4x^3 dx \\ y^2 &= x^4 + C \quad \forall C \in \mathbb{R} \\ y &= \pm \sqrt{x^4 + C} \\ y(0) &= \pm \sqrt{C'} = 0 \implies C' = 0 \\ y(x) &= \pm \sqrt{x^4} = \pm x^2\end{aligned}$$

On voit ici qu'il y a 4 solutions à cause des \pm qui se rajoute entre eux :

- $y(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$
- $y(x) = -x^2, x \in \mathbb{R}$
- $y(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$
- $y(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$

3.2 Equation différentielle linéaire du premier ordre (EDL1)

Définition

Définition 7 Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Une équation de la forme :

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x), \text{ où } p, f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ sont continues}$$

est une **équation différentielle linéaire du premier ordre (EDL1)**

Une solution est une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 satisfaisant l'équation.

Comment résoudre une EDL1

Considérant l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = 0$

Elle s'appelle **l'équation homogène associée** à l'EDL1 $y' + py = f$ qui

nous amène :

$$\begin{cases} y(x) = 0 \quad \forall x \in I \\ \frac{y'(x)}{y(x)} = -p(x) \quad EDVS \implies \int \frac{dy}{y} = - \int p(x) dx \end{cases}$$

Ce qui implique que $\ln |y| = -P(x) + C_1$ où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$, $C_1 \in \mathbb{R}$, ensuite, $|y| = e^{-P(x)+C_1} = e^{C_1} e^{-P(x)} \implies y(x) = \pm C_2 e^{-P(x)}$, $C_2 \in \mathbb{R}_+^*$

Mais on a aussi $y(x) = 0$ sur I ce qui implique que

$$y(x) = C e^{-P(x)}$$

où $C \in \mathbb{R}$, $x \in I$ est la solution générale de l'équation homogène associée $y' + py = 0$ sur I

3.2.1 Principe de superposition de solutions

Principe

Soit $I \subset \mathbb{R}$ ouvert, $p, f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions continues
Supposons que $v_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 est une solution

$$y' + p(x)y(x) = 0$$

Méthode de la variation de constante

On cherche une solution particulière de $y'(x) + p(x)y(x) = f(x) : p, f : I \xrightarrow{\text{continue}} \mathbb{R}$

sout la forme :

Ansatz :

$$v(x) = C(x) e^{-P(x)}$$

où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ sur I

Si $v(x)$ est une solution $\implies v'(x) + p(x)v(x) = f(x)$ ce qui implique que

$$C'(x) e^{-P(x)} + C(x) (-e^{-P(x)}) \cdot p(x) + p(x) C(x) e^{-P(x)} = f(x)$$

Ce qui revient à dire

$$C'(x) = f(x) e^{P(x)} \implies c(x) = \int f(x) e^{P(x)} dx$$

une solution particulière de l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$ est $v(x) = \left(\int f(x) e^{P(x)} dx \right) \cdot e^{-P(x)}$ où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ sur I

3.2.2 Théorème à savoir pour l'examen

Proposition Soit $p_1, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions continues. Supposons que $v_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution particulière de l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$
Alors la solution générale de cette équation est :

$$v(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}, \text{ pour tout } C \in \mathbb{R}, \text{ où } P(x) \text{ est une primitive de } p(x) \text{ sur } I$$

Démonstration (1)

Soit $v_1(x)$ une solution de $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$. On va démontrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $v_1(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}$, où $v_0(x)$ est une solution de $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$.

Ce qui est équivalent à $\exists C \in \mathbb{R} : v_1(x) - v_0(x) = Ce^{-P(x)}$

(2)

Par le principe de **superposition des solutions**, la fonction $v_1(x) - v_0(x)$ est une solution de l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$ est $v(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}$ où $C \in \mathbb{R}, x \in I$

(3)

$y'(x) + p(x)y(x) = 0$ est EDVS \implies la solution générale de cette équation est $v(x) = Ce^{-P(x)}$, $C \in \mathbb{R}$ et $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ sur I .

(4)

Donc, par la définition $v(x)$ est la **solution générale**.

Lundi 24 février 2025 — Cours 3 : EDL1 Et Méthode de démonstration

3.2.3 Rappel : Equation différentielles linéaires du premier ordre (EDL1)

Rappel

$$y' + p(x)y = f(x)$$

Où $p, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions continues. Alors la solution générale est donnée par la formule :

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_{part}(x)$$

Où $y_{hom}(x)$ est la solution générale de l'équation générale de l'équation homogène associée : $y' + p(x)y = 0$ et $y_{part}(x)$ est une solution particulière de l'équation donnée : $y' + p(x)y = f(x)$.

- $y_{hom}(x) = Ce^{-P(x)}$, où $P(x) = \int p(x)dx$ est une primitive (sans constante), $C \in \mathbb{R}$.
- $y_{part}(x) = \left(\int f(x)e^{P(x)}dx \right) e^{-P(x)}$

Théorème 3 La solution générale de l'EDL1 :

$$y(x) = Ce^{-P(x)} + \left(\int f(x)e^{P(x)}dx \right) e^{-P(x)}$$

Attention avec le signe moins qui se trouve dans la solution homogène mais pas dans la solution particulière.

Ex1

$$y' - \underbrace{\frac{2}{x}}_{p(x)} y = \underbrace{x^3 + 1}_{f(x)} \text{ avec } p :]-\infty, 0[\text{ et }]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R} \text{ continue,}$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

$$P(x) = \int -\frac{2}{x} = -2 \ln |x| \implies P(x) = -2 \ln |x| \text{ avec } x \neq 0$$

On a donc comme solution homogène :

$$y_{hom}(x) = C e^{-P(x)} = C e^{-(-2 \ln |x|)} = C e^{-\ln |x|^2} = C e^{-\ln x^2} = C x^2$$

Sur $] -\infty, 0[\cap]0, \infty[$

On cherche maintenant une solution particulière de l'équation complète :

$$y' + \frac{-2}{x} y = x^3 + 1$$

On utilise la méthode de la variation des constantes :

$$\begin{aligned} \int f(x) e^{P(x)} dx &= \int (x^3 + 1) e^{-\ln x^2} dx \\ &= \int \frac{x^3 + 1}{x^2} dx \\ &= \int \left(x + \frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{x} \text{ pas de constante} \end{aligned}$$

Ce qui implique donc que :

$$y_{part}(x) = \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{x}\right) e^{-(-\ln x^2)} = \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{x}\right) x^2 = \frac{1}{2} x^4 - x$$

Vérification :

$$\begin{aligned} y'_{part}(x) - \frac{2}{x} y_{part} &= 2x^3 - 1 - \frac{2}{x} \left(\frac{1}{2} x^4 - x\right) \\ &= 2x^3 - 1 - x^3 + 2 = x^3 + 1 \end{aligned}$$

Solution générale de l'équation originale :

$$y(x) = C x^2 + \frac{1}{2} x^4 - x$$

Sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$

Si on multiplie par x l'équation de base :

$$x y' - 2y = x^4 + x$$

Alors, la solution va sur \mathbb{R}

$$\implies y(x) = C x^2 + \frac{1}{2} x^4 - x \text{ sur } \mathbb{R}$$

Ex2

$y' - (\tan x)y = \cos x$ n'est pas continue en $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Puisque $0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\implies$ on considère l'équation sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $p, f :] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ continues.

1. Solution générale de l'équation homogène associée.

$$\begin{aligned} y' + (-\tan x)y &= 0 \\ P(x) &= \int (-\tan x)dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \underbrace{\int \frac{du}{u}}_{\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}} = \ln |\cos x| \\ \implies P(x) &= \ln(\cos x) \text{ sur }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{aligned}$$

On a donc :

$$y_{hom}(x) = Ce^{-P(x)} = Ce^{-\ln \cos x} = \frac{C}{\cos x}, x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, C \in \mathbb{R}$$

Vérification :

$$-\frac{C}{\cos^2 x} \cdot (-\sin x) - \tan x \cdot \frac{C}{\cos x} = C \frac{\sin x}{\cos^2 x} - C \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0$$

2. Solution particulière de l'équation complète :

$$y' - \tan xy = \cos x$$

Selon la même méthode :

$$\begin{aligned} \int f(x)e^{P(x)}dx &= \int \cos x e^{\ln \cos x} dx = \int \cos^2 x dx \\ &= \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)dx \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} y_{part}(x) &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right) \cdot e^{-P(x)} \\ &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right) \frac{1}{\cos x} \\ &= \frac{1}{2} \frac{x}{\cos x} + \frac{1}{4} \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x} \\ y_{part}(x) &= \frac{1}{2} \frac{x}{\cos x} + \frac{1}{2} \sin x, x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{aligned}$$

3.2.4 Application de EDVS (EDL1) : Croissance et décroissance exponentielle

Exemple

Soit $y = y(t)$ tel que $y' = ky, k \in \mathbb{R}$; $y = 0$ est une solution

$$\text{EDVS : } \int \frac{dy}{y} = \int k dt \implies \ln |y| = kt + C_1 \implies |y| = e^{C_1} e^{kt} \implies y(t) = C e^{kt}$$

Condition initiales :

- $y(0) = C = y_0 > 0$
- $y(t) = y_0 e^{kt}$

La solution maximale satisfaisant la condition initiale $y(0) = y_0$ est :

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

3.3 Méthodes de démonstration

Méthode 3 :
Raisonnement
par disjonction
des cas

Définition 8 Soient P, Q deux propositions. Pour montrer que $P \implies Q$ on sépare l'hypothèse de P de départ en différent cas possibles et on montre que l'implication est vraie dans chacun des cas. Il est très important de considérer *tous les cas possibles*

Ex1

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a :

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

$$1. |x| \geq |y| \implies$$

$$\begin{aligned} ||x| - |y|| &= |x| - |y| \\ &= |x - y + y| - |y| \\ &\stackrel{\Delta}{\leq} |x - y| + |y| - |y| = |x - y| \end{aligned}$$

$$2. |x| < |y| \implies$$

$$\begin{aligned} ||x| - |y|| &= -|x| + |y| \\ &= -|x| + |y - x + x| \\ &\stackrel{\Delta}{\leq} -|x| + |y - x| + |x| = |y - x| \\ &= |x - y| \end{aligned}$$

Ex2

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $2n^2 + n + 1$ n'est pas divisible par 3. 3 Cas :

$$1. n \equiv 0 \pmod{3} \iff n = 3k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2n^2 + n + 1 = 2(3k)^2 + (3k) + 1 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$2. n \equiv 1 \pmod{3} \iff n = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}$$

$$\implies 2n^2 + n + 1 = 2(3k + 1)^2 + (3k + 1) + 1 \equiv 2 + 1 + 1 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$3. n \equiv 2 \pmod{3}, n = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}$$

$$2n^2 + n + 1 = 2(3k + 2)^2 + (3k + 2) + 1 \equiv 8 + 2 + 1 \equiv 2 \pmod{3}$$

Finalement, $2n^2 + n + 1$ n'est pas divisible par 3 $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Méthode 4 :
Comment démontrer les propositions de la forme $P \iff Q$

Deux méthodes existent :

1. $P \implies Q$ **ET** $Q \implies P$
2. Suite d'équivalences : $P \iff R_1 \iff R_2 \iff \dots \iff Q$

Pour la deuxième méthode, il faut vérifier que chaque implication est une **équivalence**.

Ex3

Soit $a, b \in \mathbb{N}$:

- $P : \{ab + 1 = c^2 \text{ pour un nombre naturel } c\}$
- $Q : \{a = b \pm 2\}$

Proposition $P \iff Q$

Démonstration

$$\underbrace{ab + 1 = c^2}_P \iff ab = c^2 - 1 \iff ab = (c-1)(c+1)$$

$$= (c+1)(c-1) \underbrace{\iff}_{\text{Faux}} \begin{cases} a = c-1 \\ b = c+1 \\ a = c+1 \\ b = c-1 \end{cases}$$

Néanmoins, Contre exemple : $a = 3, b = 8$ on a que $24 + 1 = 25 = 5^2 = c^2$, P est vrai, Q est faux

Proposition qui est vraie : $Q \implies P$ Soient $a, b \in \mathbb{N} : a = b \pm 2$, Alors $ab + 1 = c^2, c \in \mathbb{N}$

Démonstration

$$\begin{aligned} a = b \pm 2 &\implies ab + 1 = b(b \pm 2) + 1 \\ &= b^2 \pm 2b + 1 \\ &= (b \pm 1)^2 = c^2 \end{aligned}$$

Ex4

Soient $z = \underbrace{\rho e^{i\varphi}}_{\rho > 0} \in \mathbb{C}^*, P : \{z^2 \in \mathbb{R}^*\}, Q : \{\varphi = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

On cherche ici à savoir la relation entre P ?? Q

Démonstration $Q \implies P$:

Soit $z = \rho e^{i\varphi}, \varphi = \frac{\pi}{2}k \implies z^2 = \rho^2 e^{2i\varphi} = \rho^2 (-1)^k \in \mathbb{R}^*$.

Démonstration $P \implies Q$

Soit $z = \rho e^{i\varphi}, \rho > 0 \implies z^2 = \rho^2 e^{2i\varphi}$

3.4 Equation différentielle du second ordre

Définition

Définition 9 Soit I un intervalle ouvert. On appelle **équation différentielle linéaire de second ordre** une équation de la forme :

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)$$

où $p, q, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues

Définition 10 Une équation de la forme

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

est dite **EDL2 homogène**.

On cherche une solution de cette équation de classe C^2

$$\text{Ex1} \quad y'' = 5 \implies y' = 5x + C, x \in \mathbb{R}, \forall C \in \mathbb{R}$$

Ce qui implique

$$y(x) = \frac{5}{2}x^2 + C_1x + C_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

EDL2 homogène à coefficients constants

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

$y''(x) - (a+b)y'(x) + aby(x) = 0$, où a, b sont des racines de l'équation $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

Par un changement de variables :

$$\underbrace{(y'(x) - ay(x))}_{z(x)}' - b \underbrace{(y'(x) - ay(x))}_{z(x)} = 0$$

$$z'(x) - bz(x) = 0 \implies \text{EDVS pour } z$$

$$\implies z(x) = C_1 e^{bx}$$

$$\implies z(x) = y'(x) - ay(x) = C_1 e^{bx}$$

Ce qui est une EDL1.

$$= y'(x) - ay(x) = C_1 e^{bx}, \quad p(x) = -a, \quad f(x) = C_1 e^{bx}$$

$$\implies P(x) = \int -a dx = -ax,$$

$$= y_{hom}(x) = C_2 e^{ax} \quad \text{solution générale de l'équation homogène}$$

On a alors pour $C(x)$:

$$C(x) = \int C_1 e^{bx} e^{-ax} dx = C_1 \int e^{(b-a)x} dx = \begin{cases} \frac{1}{b-a} C_1 e^{(b-a)x}, & \text{si } b \neq a \\ C_2 e^{ax} + C_1 x e^{ax} & \text{si } a = b \end{cases}$$

Si $a \neq b$ sont des racines complexes, $a, b \notin \mathbb{R} \implies a = \hat{b}$ Ce qui implique que :
 $y(x) = Ce^{ax} + \hat{C}e^{\hat{a}x}$ pour avoir une solution réelle, $a = \alpha + i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$
 Soit $C = \frac{1}{2}(C_2 - iC_4) \implies \hat{C} = \frac{1}{2}(C_3 + iC_4), C_3, C_4 \in \mathbb{R}$
 Alors on a que :

$$\begin{aligned} y(x) &= Ce^{ax} + \hat{C}e^{\hat{a}x} = \frac{1}{2}(C_3 - iC_4)e^{\alpha x}e^{i\beta x} + \frac{1}{2}(C_3 + iC_4)e^{\alpha x}e^{-i\beta x} \\ &= C_3e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + C_4e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} \end{aligned}$$

Résumé

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$$

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ les racines de l'équation $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$
 Alors la solution générale est :

$$y(x) = \begin{cases} C_1e^{ax} + C_2e^{bx}, & \text{si } a \neq b, a, b \in \mathbb{R} \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} \\ C_1e^{ax} + C_2xe^{bx}, & \text{si } a = b \\ C_1e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2e^{\alpha x} \sin \beta x, & \text{si } a = \alpha + i\beta = \hat{b} \notin \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

oui

Exemple 2

$$y'' + 9y = 0$$

Equation caractéristique : $\lambda^2 + 9 = 0 \implies a = 3i, b = -3i$ Ce
 qui donne : $a = 3i = \alpha + \beta i$
 Ce qui donne comme solution générale :

$$y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$$

Vérification : $y'(x) = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x \implies y'' = -9C_1 \cos 3x - 9C_2 \sin 3x \implies y'' + 9y = 0$

Exemple 3

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

Même procédé avec l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \implies \lambda = 3$$

Ce qui donne comme solution :

$$y(x) = C_1e^{ax} + C_2e^{ax}$$

3.4.1 Unicité d'un EDL2

Considérons l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$

Théorème

Théorème 4 Une EDL2 homogène admet une seule solution $y(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 satisfaisant $y(x_0) = t$ et $y'(x_0) = s$ pour un $x_0 \in I$ et les nombres arbitraires $s, t \in \mathbb{R}$.

La démonstration n'est pas vu dans ce cours car trop fastidieuse

Remarque

(1) **Superposition des solutions** Si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont 2 solutions de EDL2 **homogènes** alors

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$$

Est aussi une solution, où $A, B \in \mathbb{R}$

Dépendance linéaire de fonctions

Définition 11 Deux solutions $y_1(x), y_2(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont linéairement indépendants s'il n'existe pas de constante $c \in \mathbb{R}$ tel que $y_2(x) = cy_1(x)$

Remarque

Cela implique, en particulier, que $y_1(x)$ et $y_2(x)$ ne sont pas trivialement $= 0$ sur I

Comment résoudre

Comment résoudre $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$?

Supposons que $v_1(x)$ est une solution de cette équation, telle que On sait trouver une autre solution linéairement dépendante.

Ansatz

$$v_2(x) = c(x)v_1(x)$$

Telle que $c(x) \neq \text{const.}$ Alors :

$$v_2'(x) = c'(x)v_1(x) + c(x)v_1'(x)$$

Si on cherche la seconde dérivée de v_2 :

$$v_2''(x) = c''(x)v_1(x) + c'(x)v_1'(x) + c'(x)v_1'(x) + c(x)v_1''(x)$$

Si on simplifie l'expression :

$$\begin{aligned} \Rightarrow c''(x)v_1(x) + 2c'(x)v_1'(x) + c(x)v_1''(x) + p(x)c'(x)v_1(x) \\ + p(x)c(x)v_1'(x) + q(x)c(x)v_1(x) = 0 \end{aligned}$$

On peut trouver vu que $v_1(x)$ est solution que :

$$c(x)(v_1''(x) + p(x)v_1'(x) + q(x)v_1(x)) = 0$$

Ce qui revient pour notre équation :

$$c''(x)v_1(x) + 2c'(x)v_1'(x) + p(x)c'(x)v_1(x) = 0$$

On suppose que $v_1(x) \neq 0$ sur I et $c'(x) \neq 0$ sur I . (Une condition en plus, de toute façon, si $c'(x) = 0$ on peut juste

enlever le 0 de l'intervalle et ensuite peut être le rajouter après).
On peut donc diviser ce qui donne :

$$\frac{c''(x)}{c'(x)} = -p(x) - 2\frac{v_1'(x)}{v_1(x)} \implies \text{EDVS pour } c'(x)$$

Ce qui revient :

$$\begin{aligned} \ln c'(x) &= \underbrace{-P(x)}_{\ln e^{-P(x)}} - 2 \ln v_1(x) + \ln C, \quad C \in \mathbb{R}_+^* \\ &= \ln \frac{C e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} \end{aligned}$$

On cherche la dérivée de $c(x)$:

$$\begin{aligned} c'(x) &= \pm \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} \\ &= C_1 \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} \quad C_1 \in \mathbb{R}^*, C_1 = \pm C \\ c(x) &= \int C_1 \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx + C_2 \end{aligned}$$

$\implies v(x) = c(x)v_1(x)$ est une solution.

Si on prend $C_1 = 1$ et $C_2 = 0$ on obtient $v_2(x)$ linéairement dépendante de $v_1(x)$:

Théorème 5

$$v_2(x) = c(x)v_1(x) = v_1(x) \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx$$

Lundi 3 mars 2025 — Cours 5 : Equation différentielle

3.4.2 Rappel : Equation différentielle linéaires du second ordre (EDL2)

EDL2 homogène

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

avec, $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues

EDL2 à coefficient constants

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = f(x)$$

avec $p, q \in \mathbb{R}, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues

EDL2 homogène à coefficient constant

$$y''(X) + py'(x) + qy(x) = 0$$

avec $p, q \in \mathbb{R}$

La solution générale de cette dernière : $\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \implies a, b \implies 3$ cas qui sont solution générale. Pour un EDL2 homogène, si $v_1(x)$ est une solution et $v_1(x) \neq 0$ sur $I \rightarrow v_2(x) = v_1(x) \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx$ est une solution linéairement indépendante, où $P(x) = \int p(x) dx$ est une primitive.

3.4.3 Caractérisation des 2 solutions de EDL2 linéairement indépendante

Définition 12 Si $v_1, v_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $I \subset \mathbb{R}$ alors la fonction $W[v_1, v_2], I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$W[v_1, v_2] = \det \begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} = v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x)$$

est appelée le **Wronskien** de v_1 et v_2

Exemple

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \implies \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

qui donne comme solution $\lambda_{1,2} = 3$ qui nous donne :

$$v(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{2x}, \text{ avec } x \in \mathbb{R}$$

On calcule le wronskien :

$$W[e^{3x}, x e^{3x}] = \det \begin{pmatrix} e^{3x} & x e^{3x} \\ 3e^{3x} & e^{3x} + 3x e^{3x} \end{pmatrix} = e^{6x} + 3x e^{6x} - 3x e^{6x} = e^{6x}$$

On a donc :

$$e^{6x} = W[e^{3x}, x e^{3x}] \neq 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

3.4.4 Démonstration à savoir**Proposition**

Théorème 6 Soient $v_1, v_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux solutions de l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$, Alors $v_1(x)$ et $v_2(x)$ sont linéairement indépendantes si et seulement si $W[v_1, v_2] \neq 0 \forall x \in I$

Nous allons le prouver par contraposée :

$$\neg P \implies \neg Q \wedge \neg Q \implies \neg P$$

$$\left| \begin{array}{l} (1) \neg P \implies \neg P \implies \neg Q \text{ les solutions sont linéairement indépendante} \\ \neg Q \implies \text{sans perte de généralité, il existe } c \in \mathbb{R} \text{ tel que } v_2(x) = \end{array} \right.$$

$cv_1(x) \forall x \in I$ Alors on a :

$$W[v_1, v_2](x) = \det \begin{pmatrix} v_1(x) & cv_1(x) \\ v_1'(x) & cv_1'(x) \end{pmatrix} = cv_1(x)v_1'(x) - cv_1(x)v_1'(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

Et donc :

$$W[v_1, v_2](x) = 0 \quad \forall x \in I$$

(2) $\neg Q \implies \neg P$ Supposons qu'il existe $x_0 \in I : W[v_1, v_2](x_0) = 0$. Alors cela implique que :

$$\det \begin{pmatrix} v_1(x_0) & v_2(x_0) \\ v_1'(x_0) & v_2'(x_0) \end{pmatrix} = 0$$

Cela implique qu'il existe un vecteur non nul $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} v_1(x_0) & v_2(x_0) \\ v_1'(x_0) & v_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit $v(x) = av_1(x) + bv_2(x)$ Alors $v(x)$ est une solution de l'EDL2 homogène et de plus $v(x_0) = 0$ et $v'(x_0) = 0$. Par le théorème de l'existence et unicité d'une solution de l'EDL2 homogène satisfaisant les conditions initiales. $y(x_0) = 0$ et $y'(x_0) = 0$, puisque la solution triviale $y(x) = 0 \quad \forall x \in I$ satisfait l'équation et les mêmes conditions initiales $\implies v(x) = av_1(x) + bv_2(x) = 0$ et cela pour tout x dans I .

Puisque a et b ne sont pas tous les deux nuls :

$$\begin{cases} v_1(x) = -\frac{b}{a}v_2(x) \quad \forall x \in I \\ v_2(x) = -\frac{a}{b}v_1(x) \quad \forall x \in I \end{cases} \implies v_1(x) \text{ et } v_2(x) \text{ sont linéairement indépendants}$$

Exemple

EDL2 homogène a coefficient constants $y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0 \implies \lambda^2 + p\lambda + q = 0$ telle que les racines sont $a = \bar{b} = \alpha + \beta i \notin \mathbb{R}$

Montrer que $W[e^{\alpha y} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x] \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3.4.5 Théorème aussi à savoir

Théorème

Théorème 7 Soit $v_1, v_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux solution linéairement indépendantes de l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ alors la solution générale de cette équation est de la forme :

$$v(x) = C_1v_1(x) + C_2v_2(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in I$$

Démonstration

Soit $\sim v(x)$ une solution de l'équation donnée (arbitraire), soit $x_0 \in I$ alors

$v(x_0) = a_0 \in \mathbb{R}$, et $v'(x_0) = b_0 \in \mathbb{R}$

On a deux solutions linéairement indépendantes $v_1, v_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$. Alors par la proposition précédente on sait que $W[v_1, v_2] \neq 0, \forall x \in I \implies W[v_1, v_2](x_0) \neq 0$ implique que \exists unique constantes c_1, c_2 tel que le noyau de la matrice est

donné par le "point" $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$

Considérons la fonction $v(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x)$

Superposition des solutions

Si $v(x)$ est une solution de des EDL2, et $u(x)$ une solution de l'équation homogène associée : $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$, alors $v(x) + u(x)$ est une solution de l'équation (1) (exercice)

Méthode de la variation de constante

On cherche une solution particulière de (1) supposant qu'on connaît deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène associée : $v_1, v_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ (ce qui implique $W[v_1, v_2](x) \neq 0 \quad \forall x \in I$)

Ansatz

posons :

$$v_0(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x)$$

Où $c_1(x)$ et $c_2(x)$ sont des fonctions de classe C^2 sur I

Condition sur $c_1(x)$ et $c_2(x)$?

$$v_0'(x) = \underbrace{c_1'(x)v_1(x) + c_2'(x)v_2(x)}_{\text{Supposons } = 0} + c_1(x)v_1'(x) + c_2(x)v_2'(x)$$

On cherche la dérivée seconde :

$$v_0''(x) = c_1'(x)v_1'(x) + c_2'(x)v_2'(x) + c_1v_1''(x) + c_2v_2''(x)$$

$$v_0''(x) + p(x)v_0'(x) + q(x)v_0(x) = f(x)$$

$$\begin{aligned} & c_1'(x)v_1'(x) + c_2'(x)v_2'(x) + c_1(x)v_1''(x) + c_2(x)v_2''(x) \\ & + p(x)c_1(x)v_1'(x) + p(x)c_2(x)v_2'(x) + q(x)c_1(x)v_1(x) \\ & \quad + q(x)c_2(x)v_2(x) = f(x) \\ \implies & c_1'(x)v_1'(x) + c_2'(x)v_2'(x) = f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} c_1'(x)v_1(x) + c_2'(x)v_2'(x) = f(x) \\ c_1'(x)v_1'(x) + c_2'(x)v_2(x) = f(x) \end{cases} \quad \forall x \in I$$

Qui est un système pour $c_1'(x)$ et $c_2'(x)$, On sait que

$$W[v_1, v_2](x) \neq 0 \text{ sur } I, \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix}(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$$

On écrit ce qu'on cherche :

$$\begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Implique qu'il existe une unique solution $\forall x \in I$

En faisant l'inverse de la matrice de gauche :

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{W[v_1, v_2]} \begin{pmatrix} v_2' & -v_2 \\ -v_1' & v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} = \frac{1}{W[v_1, v_2]} \begin{pmatrix} -v_2 f \\ v_1 f \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2(x)f(x) \\ v_1(x)f(x) \end{pmatrix} \frac{1}{W[v_1, v_2]x}$$

Ce qui implique :

$$c_1(x) = - \int \frac{f(x)v_2(x)}{W[v_1, v_2]} dx$$

$$c_2(x) = \int \frac{f(x)v_1(x)}{W[v_1, v_2]} dx$$

On a donc que $v_0(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x)$ est une solution de (1), la solution générale de (1) est :

$$v(x) = v_0(x) + c_1v_1(x) + c_2v_2(x) \text{ où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in I$$

Exemple

Trouver la solution générale de l'équation :

$$y''(x) - \frac{1}{x(\ln x - 1)}y'(x) + \frac{1}{x^2(\ln x - 1)}y(x) = \ln x - 1$$

sur $]e, \infty[$

(1)

Essayons de trouver une solution non nulle de l'équation homogène associée :

$$y''(x) - \frac{1}{x \ln x - 1)}y'(x) + \frac{1}{x^2(\ln x - 1)}y(x) = 0$$

Essayons avec $y = x$:

$$y = x \implies y' = 1, y'' = 0 = -\frac{1}{x(\ln x - 1)} + \frac{x}{x^2(\ln x - 1)} = 0 \quad \forall x \in]e, \infty[$$

(2)

Trouver une autre solution de l'équation, linéairement indépendante

$$v_2(x) = c(x)v_1(x) \text{ où } c(x) = \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx, P(x) = \int p(x) dx$$

On cherche $P(x)$:

$$\begin{aligned} p(x) &= -\frac{1}{x(\ln x - 1)} \implies P(x) = -\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)} \\ &= -\int \frac{d(\ln x - 1)}{\ln x - 1} \\ &= -\ln(\ln x - 1) \end{aligned}$$

On cherche donc maintenant $c(x)$:

$$\begin{aligned} c(x) &= \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx = \int \frac{e^{+\ln(\ln x - 1)}}{x^2} dx = \int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx \\ &= -\int (\ln x - 1) d\frac{1}{x} = -\frac{\ln x - 1}{x} + \int \frac{1}{x} d\frac{1}{x} = -\frac{\ln x - 1}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{\ln x}{x} \end{aligned}$$

On a donc que

$$v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x) = C_1 x + C_2 \ln x$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in]e, \infty[$

Est la solution générale de l'équation homogène.

(3)

On cherche maintenant une solution particulière de l'équation complète :

$$y''(x) - \frac{1}{x(\ln x - 1)} y'(x) + \frac{1}{x^2(\ln x - 1)} y(x) = \ln x - 1$$

On prends :

$$v_0(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x)$$

où :

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\int \frac{f(x)v_2(x)}{W[v_1, v_2]} dx \\ c_2(x) &= +\int \frac{f(x)v_1(x)}{W[v_1, v_2]} dx \end{aligned}$$

On cherche le Wronskien :

$$W[v_1, v_2] = \det \begin{pmatrix} x & -\ln x \\ 1 & -\frac{1}{x} \end{pmatrix} = -1 + \ln x = \ln x - 1 \neq 0 \text{ sur }]e, \infty[$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\int \frac{(\ln x - 1)(-\ln x)}{\ln x - 1} dx = +\int \ln x dx \\ &= x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x \end{aligned}$$

Pour $c_2(x)$:

$$c_2(x) = \int \frac{(\ln x - 1) \cdot x}{\ln x - 1} dx = \int x dx = \frac{1}{2} x^2$$

On trouve finalement :

$$\begin{aligned} v_0(x) &= c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x) \\ &= x(\ln x - 1)x + \frac{1}{2}x^2(-\ln x) \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - x^2 \end{aligned}$$

(4)

On cherche finalement la solution générale de l'équation complète

$$v(x) = C_1x + C_2 \ln x + \frac{1}{2}x^2 \ln x - x^2$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in]e, \infty[$

Jeudi 6 mars 2025 — Cours 6 : EDL2

3.4.6 Méthode de résolution de EDL2

Rappel (Méthode de la variation des constantes)

En premier lieu on calcule le Wronskien de $v_1(x)$ et $v_2(x)$,

$$W[v_1, v_2] = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix}$$

Ensuite, On calcule les fonctions $c_1(x)$ et $c_2(x)$:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= - \int \frac{f(x)v_2(x)}{W[v_1, v_2]} dx \\ c_2(x) &= \int \frac{f(x)v_1(x)}{W[v_1, v_2]} dx \end{aligned}$$

Méthode de calcul

Pour des fonctions $f(x)$ spéciales, une méthode alternative existe :

Case 1

si $f(x)$ est de la forme :

$$f(x) = e^{cx} R_n(x)$$

avec $R_n(x)$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$.

Alors la solution est donné par :

$$\implies y_p(x) = x^r e^{cx} T_n(x)$$

Avec $r = 0, 1$ ou 2 la multiplicité de la racine c dans l'équation caractéristique, $T_n(x)$ un polynôme à déterminer de degré n .

Cas 2

$$f(x) = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) P_k(x) + \sin(\beta x) Q_n(x)); \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\implies y_p(x) = x^r e^{\alpha x} (\cos(\beta x) T_n(x) + \sin(\beta x) S_n(x))$$

Avec $r = 1$ si $\alpha + i\beta$ est racine de l'équation caractéristique, et $r = 0$ sinon, $T_n(x)$ et $S_n(x)$ des polynômes à déterminer de degré $n = \max(k, m)$

Pour déterminer les **coefficients des polynômes inconnus** :

- Calculer les dérivées de la solution particulière
- Remplacer dans l'équation initiale, et résoudre l'équation.

Exemple

$$y'' + 2y' + 10y = 40e^x \sin(3x)$$

Solution homogène :

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2\lambda + 10 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} = \frac{-2 \pm i6}{2} \\ &= -1 \pm i3 \end{aligned}$$

On cherche maintenant $y_h(x)$:

$$y_h(x) = C_1 e^{-2x} \cos(3x) + C_2 e^{-x^2} \sin(3x)$$

Coefficient indéterminé

$f(x) = 40 \cdot e^x \sin(3x)$, on cherche donc une fonction qui rempli ce critère :

$$f(x)e^{\alpha x} (\underbrace{\cos(\beta x) P_k(x)}_{=A} + \sin(\beta x) \underbrace{Q_m(x)}_{=B})$$

On sait que $\beta = 3$ et que $\alpha = 1$:

Il n'y a pas de rapport direct entre ce $\alpha = 1$ et la solution de l'équation caractéristique.

On observe la fonction $f(x)$ qui ici à pour l'exponentielle $e^x = e^{1 \cdot x}$, c'est de là que vient notre α

$$\alpha + i\beta = 1 + i3 \implies r = 0$$

Comme $r = 0$ on sait donc que le polynôme n'est qu'une constante qu'on va noter $T_n(x) = A$ et $S_n(x) = B$

On peut noter donc notre fonction pour laquelle on cherche les coefficients :

$$y_p(x) = e^3 (\cos(3x)A + \sin(3x)B)$$

On va dérivée tout ce beau monde :

$$y'_p(x) = e^x (\cos(3x)A + \sin(3x)B - r \sin(3x)A + 3 \cos(3x)B)$$

$$\begin{aligned} y''_p(x) &= e^x (\cos(3x)(A + 3B) + \sin(3x)(B - 3A) - 3(A + 3B) \sin(3x) + 3 \cos(3x)(B - 3A)) \\ &= e^x (\cos(3x)(6B - 8A) + \sin(3x)(-8B - 6A)) \end{aligned}$$

On injecte tout ca dans l'EDL2 :

On peut tout diviser par e^x car il se trouve partout et n'est jamais égal à 0.

$$\begin{aligned} \cos(3x)(6B - 8A + 2(A + 3B) + 10A) + \sin(3x)(-8B - 6A) \\ + 2(B - 3A) + 10B = 40 \sin(3x) \end{aligned}$$

On voit ici que tout la partie du $\cos(x)$ est égal à 0, c'est comme ci on avait deux équation, la partie avec le $\cos(x)$ et la partie avec le $\sin(x)$:

$$\Rightarrow \begin{cases} 12B + 4A = 0 \\ 4B - 12A = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -3B \\ 4B + 36B = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -3 \\ B = 1 \end{cases}$$

On obtient donc que la solution particulière :

$$y_p(x) = e^x(-3 \cos(3x) + \sin(3x))$$

Et pour la solution générale :

$$y = C_1 e^{-x} \cos(3x) + C_2 e^{-x^2} \sin(3x) + e^x(-3 \cos(3x) + \sin(3x))$$

Exemple

$$y'' + 2y' - 3y = (x + 1)e^{-3x}$$

Ici nous somme dans le cas numéro 1 :

$$f(x) = e^{cx} R_n(x) \Rightarrow c = -3, n = 1$$

$$\begin{aligned} y_p(x) &= x^r e^{-3x} (Ax + B) \text{ où } r = 1 \\ y_p(x) &= e^{-3x} (Ax + Bx) \end{aligned}$$

Ici on a pris un polynôme R_n de puissance 1 c'est pour cela qu'on peut l'écrire comme nous l'avons fait ci-dessus.

Donc ici on va dérivée y_p deux fois et tout remettre dans l'équation de base et ensuite résoudre :

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= e^{-3x}(-3(Ax^2 + Bx) + 2Ax + B) = e^{-3x}(-3Ax^2 + (2A - 3B)x + B) \\ y_p''(x) &= e^{-3x}(9Ax^2 + (-6A + 9B)x - 3B + (-6A)x + (2A - 3B)) \\ &= e^{-3x}(9A + (-12A + 9B)x + 2A - 6B) \end{aligned}$$

On divise l'EDL2 par e^{-3x} ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} 9Ax^2 + (-12A + 9B)x + 2A - 6B + 2(-3Ax^2 + (2A - 3B)x + B) - 3Ax^2 + Bx &= x + 1 \\ \Rightarrow \begin{cases} (9A - 6A - 3A)x^2 = 0x^2 \\ (-2A + 9B + 9A - 6B - 3B)x = x \\ (2A - 6B) + 2B = 1 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} -8A = 1 \\ 2A - 4B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{8} \\ B = -\frac{5}{16} \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient finalement pour la solution particulière :

$$y_p(x) = e^{-3x} \left(-\frac{x^2}{8} - \frac{5x}{16} \right)$$

$$y_h(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

3.4.7 Méthode de démonstration par l'absurde

Méthode On a une relation tel que :

$$T \implies Q \equiv \neg Q \implies F$$

Exemple

$\neg \exists \in \mathbb{Z}$ tel que $18x - 54y = 21$:

Supposons $\neg Q$ tel qu'il existe x, y tel que :

$$18x - 54y = 21$$

Comme cela est impossible, alors il ne peut exister de $x, y \in \mathbb{Z}$ tel que la relation tienne :

$$\neg Q \implies \neg P$$

Euclide

Théorème 8 soit \mathbb{P} l'ensemble des nombres premiers alors :

$$|\mathbb{P}| = \infty$$

Démonstration

Supposons $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $|\mathbb{P}| = n < \infty$

$$\mathbb{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$$

Soit $k = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$, alors, $k \notin \mathbb{P}$ car $k > p_i \forall i = 1 \dots n$ (Il ne peut pas être dans \mathbb{P} car il est plus grand que tous les éléments de \mathbb{P})

Et donc, il existe un élément dans \mathbb{P} tel qu'il divise k :

$$\exists p_j \neq k \text{ tel que } p_j \mid k$$

Si on note

$$\underbrace{k - p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n}_{\text{divisible par } p_j} = \underbrace{1}_{\text{pas div}}$$

Ce qui est une contradiction logique.

la partie $k - p_1 p_2 \dots p_n$ est divisible par p_j car de (1) on n'a dit que k l'était (juste au dessus) et le produit de tous les p_n est forcément divisible par p_j vu que $p_j \in \mathbb{P}$. L'addition de deux nombres divisibles par un nombre est forcément divisible par ce dernier.

Chapitre 4

Espace \mathbb{R}^n

4.0.1 \mathbb{R}^n espace vectoriel normé

Définition

Définition 13 \mathbb{R}^n est un ensemble de tout les n -tuples ordonnés de nombre réels.

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Il y a donc toute les propriétés d'un espace vectoriel dont l'addition et l'action scalaire :

1. $+$: $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n), \bar{y} = (y_1, \dots, y_n) \implies \bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
2. Multiplication par un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \implies \lambda \cdot \bar{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Et par conséquent, les opérations présentées ci-dessus satisfont :

- $(\lambda_1 \lambda_2) \bar{x} = \lambda_1 (\lambda_2 \bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$
- $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$
- $(\lambda_1 + \lambda_2) \bar{x} = \lambda_1 \bar{x} + \lambda_2 \bar{x}$
- $\lambda (\bar{x} + \bar{y}) = \lambda \bar{x} + \lambda \bar{y} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
- $\lambda (\bar{x} + \bar{y}) = \lambda \bar{x} + \lambda \bar{y} \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$

Base

On a une base canonique :

$$\{\bar{e}_i = (0, 0, \dots, \overbrace{1}^i, \dots, 0)\}_{i=1}^n \implies \bar{e}_i \underbrace{\in}_{\forall i=1, \dots, n} \mathbb{R}^n$$

Produit scalaire

On introduit le **produit scalaire** dans \mathbb{R}^n :

Définition 14

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Et par la suite la **norme euclidienne** :

$$\| \bar{x} \| = (\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \implies \mathbb{R}^n \text{ est un espace vectoriel normé}$$

Propriétés
de la norme
euclidienne

1. $\| \bar{x} \| \geq 0$ et $\| \bar{x} \| = 0 \implies \bar{x} = (0, 0, \dots, 0)$
2. $\bar{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \implies \| \lambda \cdot \bar{x} \| = |\lambda| \cdot \| \bar{x} \|$
3. Cauchy-Schwartz : $|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| \leq \| \bar{x} \| \cdot \| \bar{y} \|$
4. Inégalité triangulaire : $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n \implies \| \bar{x} + \bar{y} \| \leq \| \bar{x} \| + \| \bar{y} \|$
5. \implies 4, $\| \bar{x} + \bar{y} \|^2 = \langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle + 2 \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle$
Qui après plusieurs opération fini par :

$$\| \bar{x} \| + \| \bar{y} \| \geq \| \bar{x} + \bar{y} \|$$

6. Un autre inégalité triangulaire : $\| \bar{x} - \bar{y} \| \geq \| \| \bar{x} \| - \| \bar{y} \| \|$

Pour cette égalité, Nous pouvons faire une démonstration par disjonction des cas (vu au cours 3)

Distance

Définition 15 L'expression $\| \bar{x} \bar{y} \| = d(\bar{x}, \bar{y})$ est appelée **la distance** entre \bar{x} et \bar{y} dans \mathbb{R}^n .

Alors :

- $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{x}, \bar{y})$
- $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \iff \bar{x} = \bar{y}$
- $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(\bar{x}, \bar{z}) + d(\bar{z}, \bar{y})$

$$\| \bar{x} - \bar{y} \| = \| \bar{x} - \bar{z} + \bar{z} - \bar{y} \| \leq \| \bar{x} - \bar{z} \| + \| \bar{z} - \bar{y} \|$$

4.0.2 Sous-ensemble ouverts et fermés de \mathbb{R}^n

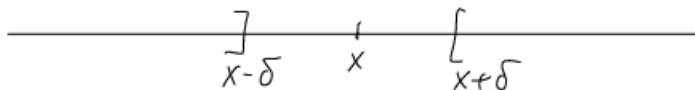
Définition 16 Pour tout $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $\delta > 0$, soit $B(\bar{x}, \delta) = \{ \bar{y} \in \mathbb{R}^n : \| \bar{x} - \bar{y} \| < \delta \}$. Alors $B(\bar{x}, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ est appelé **la boule ouverte** de centre \bar{x} et de rayon δ .

Boule ouverte

Définition 17 $E \subset \mathbb{R}^n$ est **ouvert** si et seulement si :

1. $E = \emptyset$
2. $E \neq \emptyset$ et pour tout $\bar{x} \in E$ il existe $\delta > 0$ tel que $B(\bar{x}, \delta) \subset E$

Exemple Une boule ouverte dans \mathbb{R} $B(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta\} =]x - \delta, x + \delta[$



Intérieur d'une boule

Définition 18 Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide. Alors $\bar{x} \in E$ est un **point intérieur** de E s'il existe $\delta > 0$ tel que $B(\bar{x}, \delta) \subset E$. L'ensemble des points intérieurs est appelé **intérieur** de E . Notation \mathring{E}

Remarque personnelle

On voit ici clairement que $\mathring{E} \subset E$. Cette relation est vraie grâce au δ qui rend "plus petit" notre point \bar{x}

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide. Alors $E \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert $\iff E = \mathring{E}$

Exemple 1 La boule ouverte $B(\bar{x}, \delta) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{y}\| < \delta\}$ est un sous-ensemble ouvert.

Soit $\bar{y} \in B(\bar{x}, \delta)$ Alors $\delta = \frac{1}{2}(\delta - \|\bar{x} - \bar{y}\|) > 0$ implique que :

$$\implies B(\bar{y}, \delta_1) \subset B(\bar{x}, \delta)$$

$$\implies B(\bar{x}, \delta) \subset \mathbb{R}^n$$

est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \delta > 0$

Exemple 2 Soit $n \geq 2$, $E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0, x_i > 0, i = 2, \dots, n\} \subset \mathbb{R}^n$
Ici, nous voulons montrer qu'il n'est pas ouvert.
Prenons le point $\bar{y} = (0, y_2, \dots, y_n)$ où $y_2, \dots, y_n > 0$. Alors pour tout $\delta > 0$:

$$B(\bar{y}, \delta) \ni (\frac{\delta}{2}, y_2, \dots, y_n) \notin E$$

Exemple 3 \emptyset et $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$ sont des sous-ensembles ouverts.
Ici on a deux cas de figure,

- *emptyset* : alors le sous-ensemble est ouvert par définition
- Sinon, soit $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ alors $B(\bar{x}, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ et cela : $\forall \delta > 0$

Exemple 4 $E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_i > 0 \forall i = 1, \dots, n\}$
Soit $\bar{y} \in E$. Alors, nous pouvons prendre $B(\bar{y}, \min(y_i)) \subset E$.

Propriétés

Ici on remarque deux grandes propriétés :

1. Toute réunion $\bigcup_{i \in I} E_i$ des sous-ensembles ouverts est un sous-ensemble ouvert.

$$\bar{x} \in \bigcup_{i \in I} E_i \implies \exists j : \bar{x} \in E_j, E_j \text{ est ouvert} \implies \exists \delta > 0 : B(\bar{x}, \delta) \subset E_j$$

$$\implies B(\bar{x}, \delta) \subset \bigcup_{i \in I} E_i$$

2. Toute intersection **finie** $\bigcap_{i=1}^n E_i$ des sous-ensembles ouverts est un sous-ensemble ouvert :

$$\begin{aligned} \bar{x} \in \bigcap_{i \in I} E_i &\implies \forall j \bar{x} \in E_j \text{ ouvert} \implies \exists \delta_j > 0 : B(\bar{x}, \delta_j) \subset E_j \\ &\implies B(\bar{x}, \min_j \delta_j) \subset E_j \forall j \implies B(\bar{x}, \min_j \delta_j) \subset \bigcap_{i=1}^n E_i = E \end{aligned}$$

Une intersection infinie des sous-ensembles ouverts de \mathbb{R}^n

Sous-ensemble fermé

Définition 19 Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble. Alors E est **Fermé** dans \mathbb{R}^n si son complément $CE = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \notin E\} = \mathbb{R}^n - E$ est ouvert

$$CB(\bar{x}, \delta) = E \subset \mathbb{R}^n \text{ est fermé} : E = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{y}\| \geq \delta\}$$

Puisque $C(CB(\bar{x}, \delta)) = B(\bar{x}, \delta)$ est ouvert.

Exemples

$$E = \{\bar{x}\} \subset \mathbb{R}^n$$

Ceci est **fermé**, car si on prends le complément :

$$CE = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y} - \bar{x}\| > 0\}$$

$$\forall \bar{y} \in CE \text{ la boule } \overline{B}(\bar{y}, \frac{1}{2} \|\bar{y} - \bar{x}\|) \subset CE$$

Question pendant le cours

Soient A et B deux sous-ensembles ouverts non-vides de \mathbb{R}^n Soit $A \setminus B = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \in A \text{ et } \bar{x} \notin B\}$ non-vide.

$A \setminus B$ peut être ouvert, fermé ou ni ouvert ni fermé

1. $A \setminus B$ est soit ouvert, soit fermé
2. $A \setminus B$ ne peut pas être ouvert
3. $A \setminus B$ ne peut pas être fermé

Il n'y a qu'une seule possibilité et pour la trouver il faut des contre exemples.

Exemple

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \tan(x + y) \geq 1\}$$

Et on se pose la question A ouvert, fermé, ni ouvert, ni fermé ?

Déjà on va trouver toutes les valeurs possibles pour x et y c'est à dire la définition de \tan :

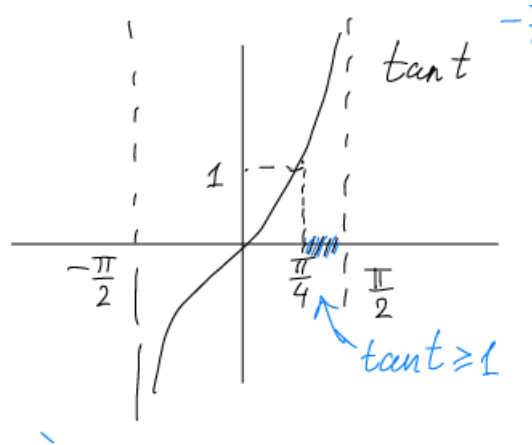
$$\implies \tan u \text{ existe} \implies u \in]-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k[\quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan u \geq 1 \implies u \in [\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k[\quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

On a donc comme dit auparavant :

$$\begin{aligned} x + y &\in \left[\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k \right[\\ \frac{\pi}{4} + \pi k &\leq x + y < \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{4} + \pi k - x &\leq y < \frac{\pi}{2} + \pi k - x \end{aligned}$$

Ici A n'est ni ouvert ni fermé :



Explications :

1. A n'est pas ouvert : $(x, y) = (0, \frac{\pi}{4}) = p \in A$

$$\forall \delta > 0 \quad B(\bar{p}, \delta) \text{ contient } (0, \frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2}) \notin A$$

2. A n'est pas fermé : $(x, y) = (0, \frac{\pi}{2}) = q \in CA$

$$\forall \delta > 0 B(\bar{q}, \delta) \text{ contient } (0, \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}) \in A \implies (0, \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}) \notin CA$$

Et comme CA n'est pas ouvert, alors A n'est pas fermé.

4.0.3 Méthodes de démonstration : Démonstration par le principe des tiroirs

Principes des tiroirs

Si $(n + 1)$ objets sont placés dans n tiroirs, alors au moins un tiroir contient 2 objets ou plus.

Plus généralement :

Théorème 9 Si n objets sont placés dans k tiroirs, alors au moins un tiroir contient $\frac{n}{k} = \min\{m \in \mathbb{N} : m \geq \frac{n}{k}\}$ objets, ou plus.

Ceci est exactement la même méthode que celle vu en AICC I qu'on appelait le pigeon hole principle, Les preuves sont exactement les mêmes et le but est exactement le même.

Rappel : Sous-ensembles ouverts et fermés dans \mathbb{R}^n

Définition 20 Soit E un ensemble tel que $E \subset \mathbb{R}^n$. Alors :

$$E \subset \mathbb{R}^n \iff \begin{cases} E = \emptyset \\ E \neq \emptyset \text{ et pour chaque point } \bar{x} \in E \text{ il existe } \delta > 0 \text{ tel que } B(\bar{x}, \delta) \subset E \end{cases}$$

Définition 21 $E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé \iff son complémentaire $CE = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \notin E\}$ est ouvert

4.0.4 L'adhérence et la frontière d'un sous-ensemble \mathbb{R}^n

Adhérence

Définition 22 Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ sous-ensemble non vide. Alors l'intersection de tous les sous-ensembles fermés contenant E est appelée **l'adhérence de E** .

Notation \bar{E} est **l'adhérence** de E dans \mathbb{R}^n .

Si notre sous-ensemble est déjà fermé alors l'adhérence est égal à lui même :

$$E \subset \mathbb{R}^n \text{ fermé} \iff E = \bar{E}$$

Définition 23 $E \subset \mathbb{R}^n$ non-vide. $E \neq \mathbb{R}^n$. Un point $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est un point de **frontière** de E si toute la boule ouverte de centre x contient au moins un point de E et au moins un point de CE

L'ensemble des points frontières de E est **la frontière de E** Notation : ∂E

le d des dérivé partielle.

Exemple

$$E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, i = 1, \dots, n\} \implies \partial E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \exists i : x_i = 0, x_j \geq 0 \text{ si } j \neq i\}$$

$$\bar{E} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$$

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide. Alors :

- $\partial E \cap \overset{\circ}{E} = \emptyset$
- $\overset{\circ}{E} \cup \partial E = \bar{E}$
Ici, on le sait parce que en premier lieu $\overset{\circ}{E} \cup \partial E$ est fermé, et aussi $E \subset \overset{\circ}{E} \cup \partial E$
- $\partial E = \bar{E} \setminus \overset{\circ}{E} = \bar{E} \cup CE \implies \partial E$ est fermé
- $\partial \emptyset = \emptyset, \partial \mathbb{R}^n = \emptyset$

Pourquoi faut il distinguer entre les sous-ensembles ouverts et fermés dans \mathbb{R}^n ? La topologie de \mathbb{R}^n est liée aux propriétés des limites des suites d'éléments de \mathbb{R}^n . Et comme la base de l'analyse se base sur la limite, il y a de quoi creuser.

4.0.5 Suites d'éléments de \mathbb{R}^n et la topologie de \mathbb{R}^n

Définition 24 Une suite d'éléments de \mathbb{R}^n est une application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$f : k \rightarrow \overline{x_k} = (x_{1_k}, x_{2_k}, \dots, x_{n_k}) \in \mathbb{R}^n$$

Où :

$$\{\overline{x_k}\}_{k=0}^{\infty}$$

est une suite d'éléments de \mathbb{R}^n

Définition 25 $\{\overline{x_k}\}_{k=0}^{\infty}$ est **convergent** et admet pour **limite** $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ si, pour tout $\varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0, \|\overline{x_k} - \overline{x}\| \leq \varepsilon$ Ou alors :

$$\overline{x_n} \in \overline{B(\overline{x}, \varepsilon)} \quad \forall k \geq k_0$$

Remarque

soit $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n), \overline{x_k} = (x_{1_k}, \dots, x_{n_k})$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{x_k} = \overline{x}$ si et seulement si la limite $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{j_k} = x_j \quad \forall j = 1, \dots, n$

Propriétés

1. La limite d'une suite $\{\overline{x_k}\}$, si elle existe, est unique.
2. Toute suite convergente $\{\overline{x_k}\}$ est bornée (\iff est contenue dans une boule fermée $\overline{B(\overline{o}, M)}$)

$$\begin{aligned} \lim \overline{x_k} = \overline{x} &\implies \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 \implies \|\overline{x} - \overline{x_k}\| \leq \varepsilon \\ &\implies \{\overline{x_0}, \dots\} \subset \overline{B(\overline{x}, \varepsilon)} \\ \{\overline{x_0}, \overline{x_1}, \dots, \overline{x_{k_0-1}}\} \cup \{\overline{x_k}, k \geq k_0\} &= \{\overline{x_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

Si nous prenons $M = \max\{\|\overline{x_i}\|, i = 0, \dots, k_{o-1}, \|\overline{x}\| + \varepsilon\}$

Bolzano-Weierstrass

Théorème 10 De toute suite bornée $\{\overline{x_k}\} \subset \mathbb{R}^n$ on peut extraire une sous-suite convergente.

Théorème à savoir, Un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé

Théorème 11 Un sous-ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé **si et seulement si** toute suite $\{\overline{x_k}\} \subset E$ d'éléments E qui converge, a pour limite un élément de E .

Démonstration \implies par absurde

On cherche donc avec P et $\neg Q \implies$ absurde Soit $\overline{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{x_k}, \overline{x_k} \in E \forall k \in \mathbb{N}$. Supposons par l'absurde que $\overline{x} \notin E$, E est fermé

ce qui implique que $\overline{x} \in CE$ où CE est ouvert dans \mathbb{R}^n . Par la définition :

$$\exists \delta > 0 : B(\overline{x}, \delta) \subset CE \implies \{\overline{x_k} \forall k \in \mathbb{N}\} \cap B(\overline{x}, \delta) = \emptyset$$

D'autre côté, $\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{x_k} = \overline{x} \implies \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0, \overline{x_k} \in \overline{B(\overline{x}, \frac{\varepsilon}{2})} \subset B(\overline{x}, \delta)$

Contraposé, par contraposé Supposons que E n'est pas fermé, $\iff CE$ n'est pas ouvert
Alors :

$$\implies \exists \bar{y} \in CE \forall k \in \mathbb{N}_+ B(\bar{y}, \frac{1}{k}) \cap E \neq \emptyset$$

$$\implies \exists \bar{y}_k \in B(\bar{y}, \frac{1}{k}) \text{ tel que } \bar{y}_k \in E$$

On a obtenu une suite $\{\bar{y}_k\}_{k \in \mathbb{N}_+} \subset E$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{y}_k = \bar{y} \in CE$

$$\iff \bar{y} \notin E$$

$$\implies \neq Q \text{ Alors } Q \implies P$$

Pour construire l'adhérence E d'un sous-ensemble non-vidé $E \subset \mathbb{R}^n$, il faut et suffit d'ajouter les limites de toutes suites convergentes d'éléments de E .

Définition 26 Un sous-ensemble non-vidé de \mathbb{R}^n est **compact** s'il est fermé et borné

Exemple Soit une boule fermé $\overline{B(\bar{x}, \delta)} = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{y}\| = \delta\}$ Alors $\overline{B(\bar{x}, \delta)} \subset \overline{B(\bar{o}, \|\bar{x}\| + \delta)}$ est borné. Et donc le sous-ensemble est compact

Exemple 2

$$E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : n \geq 2, x_1 = 0\}$$

est fermé, mais non bornée

$$\{\bar{a}_k = (0, k, 0, \dots)\}_{k \in \mathbb{N}}$$

Ici les normes $\|\bar{a}_k\| = k \in \mathbb{N}$. Et donc CE n'est ni borné ni fermé

Théorème Heine-Borel-Lebesgue

Théorème 12 Un sous-ensemble non-vidé $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact \iff de tout recouvrement de E par des sous-ensembles dans \mathbb{R}^n :

$$(E \subset \bigcup_{i \in I} A_i, A_i \subset \mathbb{R}^n \text{ ouverts, } A_i \in I \text{ un recouvrement de } E)$$

On peut extraire une **famille finie** d'ensemble que forment un recouvrement de E :

$$E \subset \bigcup_{i \in I} A_i \quad A_i \subset \mathbb{R}^n \text{ ouverts} \implies \exists \{A_{i_j}\}_{j=1}^m : E \subset \bigcup_{j=1}^m A_{i_j}$$

Ici on peut prendre un nombre infini d'ensemble qui peut recouvrir un nombre fini d'ensemble. Cela ne marche pas si E n'est pas compact.

Exemple 1 Une droite dans \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ est fermée, pas bornée \implies qu'elle n'est pas compacte.

Exemple 2

Intervalle ouvert dans \mathbb{R} tel que $E =]0, 1[\subset \mathbb{R}$ n'est pas fermé ce qui implique que notre ensemble E n'est pas compact

$$E \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}}]0, \frac{i}{i+1}[$$

On ne peut pas choisir un sous recouvrement fini. Car si on prends un nombre fini k on doit pouvoir s'arrêter à un k néanmoins ici on n'y arrive pas car on a toujours le nombre $k+1$

La propriétés d'être compactes est une propriétés très fortes

Exemple

Exercice

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(\sin(y-x)) \leq 0\}$$

Il faut démontrer que A est ouvert.

Question 6

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{y \cdot \ln x} < 1\}$$

1. Compact
2. Ouvert et borné
3. ni ouvert, ni fermé et non borné
4. fermé et non borné
5. ouvert et non borné
6. ni ouvert, ni fermé et borné

Pour répondre à cette question, on va prendre tout les cas possibles :

1. $\ln x \implies x > 0$
2. Soit $y = 0 \implies \{y = 0, x > 0\} \in S$
Aussi $\{x = 1, y \in \mathbb{R}\} \in S$
3. Soit $y > 0 \implies y \ln x \geq 0 \implies \ln x \geq 0 \wedge x \geq 1$

$$y \ln x < 1 \implies y < \frac{1}{\ln x}$$

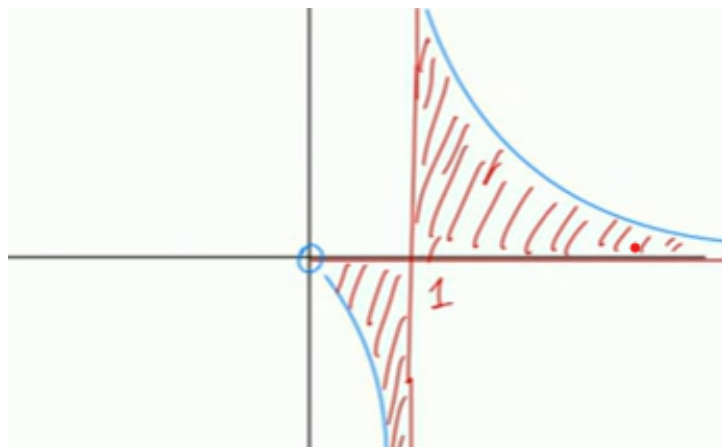
$$\{y > 0, x > 1, y < \frac{1}{\ln x}\} \subset S$$

4. Soit $y < 0 \implies y \ln x \geq 0 \implies \ln x \leq 0$ Alors :

$$y \ln x < 1 \implies y < \frac{1}{\ln x}$$

$$\{y < 0, 0 < x < 1, y > \frac{1}{\ln x}\}$$

Ce qui donne comme ensemble :



Qui est une droite vertical avec $x = 1$ entre nos deux droite bleu. Néanmoins les lignes bleu ne sont pas inclus, et comme vu sur l'image l'ensemble tends vers les infinis en $x = 1$ et donc, il n'est ni fermé ni borné. Et la raison pour laquelle ce n'est pas ouvert, la ligne rouge horizontale et fermé et donc ce n'est pas ouvert.

Attention à faire attention car ici les courbes bleu impliquent que l'ensemble n'est pas fermé mais même si elles étaient fermés, il manquerait quand même le point 0 qui impliquerait que l'ensemble ne serait pas fermé.

Chapitre 5

Fonction réelles de plusieurs variables réelles limite et continuité

5.0.1 Définition et exemples

Définition 27 Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ sous-ensemble non-vide, $n \geq 1$ Une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une application qui envoie chaque point $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in E$ dans \mathbb{R} .
 E est le domaine de définition de f et $f(E) \subset \mathbb{R}$ est l'ensemble image.

Exemple 1

$$f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 - y^2)}$$

Exemple 2

$$f(x, y) = 2x + 1$$

Plus généralement :

$$f(x, y) = ax + by + c; \quad a, b, c, \in \mathbb{R}, E = \mathbb{R}^2$$

Comment visualiser cette fonction ?

Soit $c = 0$

Considérons $f(x, y) = ax + by$: Graphique $F = \{(x, y, z) : ax + by = z\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by - z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x, y, z), (a, b, -1) \rangle = 0\}$
On a donc un plan dont les valeurs $a, b, -1$ sont les composantes d'un vecteur orthogonal : $\bar{n} = (a, b, -1)$ et contenant $(0, 0, 0)$.

Soit $c \in \mathbb{R}$ arbitraire, alors il faut monter le plan par c unité le long de l'axe z pour obtenir le graphique de $f(x, y) = ax + by + c$ Et donc :

$$z = ax + by + c$$

qui est le plan $\perp \bar{n} = (a, b, -1)$ qui contient $(0, 0, c)$

Niveau

Définition 28 Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $c \in f(E)$ Alors $\mathcal{N}_f(c) = \{\bar{x} \in E : f(\bar{x}) = c\} \subset E$

Exemple 4

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sin(x^2 + y) : E = \mathbb{R}^2 \\ f(E) &= [-1, 1] \end{aligned}$$

Je conseil de taper sur google les fonctions pour avoir une bonne visualisation de ces fonctions :

google.com

On cherche donc les niveaux :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_f(1) &= \{x, y\} \in \mathbb{R}^2 : \sin(x^2 + y) = 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x^2 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Samedi 15 mars 2025 — Cours 9 : Limite est continuité

Rappel

Définition 29 Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ sous-ensemble non vide, $n \geq 1$ Une fonction est une application qui envoie chaque point $\bar{x}_0 = (x_1, \dots, x_n) \in E$ dans \mathbb{R} .
 E est le domaine de définition de f et $f(E) \subset \mathbb{R}$ est l'ensemble image.

5.0.2 Limites et continuité

Définition 30 Une fonction **définie au voisinage de \bar{x}_0** (mais pas nécessairement en \bar{x}_0 tel que

$$[\exists \delta > 0 : B(\bar{x}_0, \delta) \subset E \cup \{\bar{x}_0\}]$$

admet pour **limite** le nombre réel l lorsque \bar{x} tend vers \bar{x}_0 si **pour tout $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tel que pour tout $\bar{x} \in E$ et $0 < \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq \delta$, on a $|f(\bar{x}) - l| \leq \varepsilon$**

Notation

Pour notre notation on utilise comme à notre habitude :

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l$$

Ici on a la norme $\|\bar{x} - \bar{x}_0\|$ à la place de la valeur absolue lorsqu'on parlait de fonction à une variable.

Continuité

Définition 31 Soit $\bar{x}_0 \in E$ un point intérieur de E . Alors $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $\bar{x} = \bar{x}_0$ **si et seulement si**

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0)$$

Exemple 1

$$f(x, y) = 2x + y$$

soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$: Alors

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} (x + 2y) = x_0 + 2y_0$$

Soit $\varepsilon > 0$ alors on cherche $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |(x + 2y) - (x_0 + 2y_0)|$ si on utilise plus la norme ici et la valeur absolue car on est sur le côté à droite. On utilise l'inégalité triangulaire :

$$\leq |x - x_0| + 2|y - y_0|$$

Ici on peut toujours prendre comme on a que $\bar{x} - \bar{x}_0$ plus petit que δ on doit les gérer ensembles et non séparément. Des lors :
Dès lors on choisit $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$

$$\leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + 2\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = 3\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Exemple 2

$$f(x, y) = x \cdot y$$

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ Alors $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} x \cdot y = x_0 \cdot y_0$

Démonstration :

Le cas où $x_0 = 0$ est vu en exercice, dès lors, nous traiterons ici le cas où nous supposons que $x_0 \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$ alors :

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| =$$

$$|y - y_0| \cdot |x| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} |x| \leq \frac{\varepsilon}{2} \implies \delta \leq \frac{\varepsilon}{2|x_0|} (x_0 \neq 0)$$

$$|x - x_0| |y| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \cdot |y| \leq \delta(|y_0| + \delta) \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\implies \delta \leq \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)}$$

On peut choisir comme valeur pour δ :

$$\implies \delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{2|x_0|}, \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)}, 1\right) \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Caractérisation de la limite à partir des suites convergentes

Théorème 13 Une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $\overline{x_0}$ admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque $\overline{x} \rightarrow \overline{x_0}$ **Si et seulement si** pour toute suite d'éléments $\{\overline{a_k}\}$ de $\{\overline{x} \in E : \overline{x} \neq \overline{x_0}\}$, qui converge vers $\overline{x_0}$, la suite $\{f(\overline{a_k})\}$ converge vers l .

$$\lim_{\overline{x} \rightarrow \overline{x_0}} f(\overline{x}) = l \iff \lim_{k \rightarrow \infty} f(\overline{a_k}) = l \text{ pour toute suite } \{\overline{a_k}\} \subset E \setminus \{\overline{x_0}\} : \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{a_k} = \overline{x_0}$$

Démonstration

$\implies P \implies Q$ Comme ce théorème est une équivalence, nous allons devoir prouver les deux sens. Commençons par $P \implies Q$. Prenons la définition de la limite à gauche :

$$\lim_{\overline{x} \rightarrow \overline{x_0}} f(\overline{x}) = l \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \overline{x} : 0 < \|\overline{x} - \overline{x_0}\| \leq \delta$$

$$\implies |f(\overline{x}) - l| \leq \varepsilon$$

$$\text{Si on a } \{\overline{a_k}\} : \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{a_k} = \overline{x_0} \implies \text{pour } \delta > 0 \exists k_0 : \forall k \geq k_0$$

$$\implies \|\overline{a_k} - \overline{x_0}\| \leq \delta \implies |f(\overline{a_k}) - l| \leq \varepsilon$$

$$|f(\overline{a_k}) - l| \leq \varepsilon$$

L'idée ici est de prendre le même δ sur les deux première lignes.

(\Leftarrow) par contraposée

Petit rappel pour la contraposée : si on a $Q \implies P$ alors la contraposée est $\neg P \implies \neg Q$ donc ici on veut prouver que si la limite n'est pas l alors la limite de $f(\overline{a_k})$ n'est pas non plus l . Supposons donc que $\lim_{\overline{x} \rightarrow \overline{x_0}} f(\overline{x}) \neq l$ Alors :

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists \overline{x}_\delta : \|\overline{x}_\delta - \overline{x_0}\| \leq \frac{1}{\delta} \text{ et } |f(\overline{x}_\delta) - l| > \varepsilon$$

Dès lors, on peut choisir $\delta = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$ ce qui implique :

$$\exists \overline{x}_k \in E : \|\overline{x}_k - \overline{x_0}\| \leq \frac{1}{k} \text{ et } |f(\overline{x}_k) - l| > \varepsilon$$

On obtient la suite $\{\overline{x}_k\}_{k=1}^\infty : \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{x}_k = \overline{x_0}$ mais $|f(\overline{x}_k) - l| > \varepsilon \forall k \in \mathbb{N}^*$ Dès lors

$$\implies f(\overline{x}_k) \neq l$$

Idee générale de la preuve

Ici on prends P et **Ensuite** $\neg P$ il est important de pouvoir différencier les deux et de pouvoir construire $\neg P$ à partir de P .

Opération algébrique

Soit f, g deux fonctions : $E_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\lim_{\overline{x} \rightarrow \overline{x_0}} f(\overline{x}) = l_1$ et $\lim_{\overline{x} \rightarrow \overline{x_0}} g(\overline{x}) = l_2$ Alors :

1. $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} (\alpha f + \beta g)(\bar{x}) = \alpha l_1 + \beta l_2$
2. $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} (f \cdot g)(\bar{x}) = l_1 \cdot l_2$
3. Si $l_2 \neq 0$, alors $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \left(\frac{f}{g}\right)(\bar{x}) = \frac{l_1}{l_2}$

Conclusion

Tous les polynômes en plusieurs variables et toutes les fonctions rationnelles sont continues sur leur domaines de définition,

La caractérisation de la limite à partir des suites convergentes est pratique pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 1

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Soit $\bar{a}_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \rightarrow (0, 0)$ qui implique donc pour la limite :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{a}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2}$$

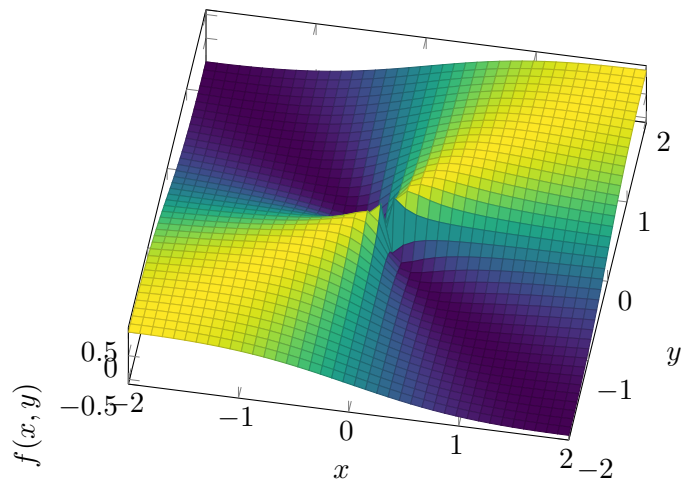
Dès lors, on peut aussi prendre $\bar{b}_k = (\frac{1}{k}, 0) \rightarrow (0, 0)$ qui par le même procédé :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{b}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0 \cdot \frac{1}{k}}{0 + \frac{1}{k^2}} = 0$$

Et donc, par la caractérisation à partir des suites, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ ne peut pas exister.

On peut aussi prendre une autre suite du genre $\bar{c}_k = (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{c}_k) = -\frac{1}{2}$

Alors quelle est la limite $f(x, y)$ en $(0, 0)$



Proposition

Théorème 14 Soit $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l$ si et seulement si pour toute courbe $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\Upsilon([a, b]) \subset D \setminus \{\bar{x}_0\} \text{ et } \lim_{t \rightarrow a^*} y(t) = \bar{x}_0, \text{ on a } \lim_{t \rightarrow a^+} f(y(t)) = l$$

On ne peut pas calculer la limite d'une fonction de plusieurs variable en faisant de manière consecutive par rapport à chaque variable.

Exemple 2

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Alors on prends deux fonctions ; :

$$y_1(t) = (t, 0)$$

$$y_2(t) = (0, t)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\gamma_1(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 - 0}{t^2 + 0} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - t^2}{0 + t^2} = -1$$

Et donc la fonction n'a pas de limite en ce point.

Exemple 3

soit :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \\ 0 \end{cases}$$

En prenant les mêmes fonctions :

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \implies \lim_{t \rightarrow 0} \gamma_1(t) = \bar{0}, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 + 0}{t^2 + 0} = 0$$

$$\gamma_2(t) = (0, t) \implies \lim_{t \rightarrow 0} \gamma_2(t) = \bar{0}, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - t^3}{0 + t^2} = 0$$

$$\gamma_3(t, t) \implies \lim_{t \rightarrow 0} \gamma_3(t) = \bar{0}, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 + t^2}{t^2 + t^1} = 0$$

On voit ici que ces fonctions ont toute la même limite, et si on prenait n'importe quelle autre fonction la limite existerait toujours. **Hypothèse** $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \bar{0}$

Méthode de changement de variables polaires

On peut démontrer l'existence de cette limite par le changement de variables en coordonnées polaires. :

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \text{ si } r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \\y &= r \sin \varphi \text{ si } r \neq 0\end{aligned}$$

Alors on a :

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \implies f(r, \varphi) = \frac{r^3 \cos^3 \varphi + r^3 \sin^3 \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} \\&= \frac{r^2 (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)}{r^2} \\&= r (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)\end{aligned}$$

Ici, $\varphi(r)$ est une fonction inconnue, elle pourrait être n'importe quoi.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= \lim_{r \rightarrow 0} \Phi(r, \varphi) \\ \lim_{r \rightarrow 0} |r (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)| &= 0 \\ \implies \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= 0\end{aligned}$$

Cette méthode est efficace pour montrer l'existence des limites pour des fonctions de seulement deux variables, et qui tendent vers $(0, 0)$ tel que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$

Théorème des 2 gendarmes

Théorème 15 Soit $f, g, h : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

1. $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} g(\bar{x}) = l$
2. Il existe $\alpha > 0$ pour tout $x \in \{x \in E : 0 < ||\bar{x} - \bar{x}_0|| \leq \alpha\}$ on a :

$$f(\bar{x}) \leq h(\bar{x}) \leq g(\bar{x})$$

Alors :

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} h(\bar{x}) = l$$

Critère des 2 gendarmes en coordonnées polaires

Proposition Soit $D \subset \mathbb{R}^2, f : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = l \text{ si et seulement si}$$

$$\exists \delta > 0 \text{ et } \varphi :]0, \delta[\rightarrow \mathbb{R} :$$

- $\forall \varphi \in [0, 2\pi] \implies |f(x_0, r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) - l| \leq \varphi(r)$
- $\lim_{r \rightarrow 0^+} \varphi(r) = 0$

Exemple 5 soit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4xy^2}{x^2+y^2+3y^4} \\ 0 \end{cases}$$

$$f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{4r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi}{r^2 + 3r^4 \cos^4 \varphi} = \frac{4r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi}{r^2(1 + 3r^2 \sin^4 \varphi)}$$

$$|f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - 0| = \frac{4r^3 |\cos \varphi \sin^2 \varphi|}{r^2 |1 + 3r^2 \sin^4 \varphi|}$$

On sait ici que la partie du numérateur (la partie en haut j'ai un doute) est toujours plus petite ou égale à 1 et la partie du bas plus grande ou égale à 1. ce qui nous donne :

$$\leq \frac{4r^3}{r^2} = 4r = \Phi(r)$$

Alors

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Phi(r) = 0$$

Ce qui par les 2 gendarmes en coordonnées polaires nous donne :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = (0, 0)$$

Question à la fin du cours (Question 7)

Soit les fonctions

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos(xy)(x^2 + \sin(y^2))}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{Autrement} \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^4}{y^2 + x^4 + x^6}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}$$

La question est quelle fonction est continue en $(0, 0)$?

Solution

On passe d'abord en coordonnées polaire :

$f(x, y)$

$$f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{\cos(r^2 \sin \varphi \cos \varphi)(r^2 \cos \varphi + \sin(r^2 \sin^2 \varphi))}{r}$$

On prend ensuite la limite :

$$\begin{aligned}
 |f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - 0| &= \frac{|\cos(r^2 \sin \varphi \cos \varphi)| |r^2 \cos \varphi + \sin(r^2 \sin^2 \varphi)|}{r} \\
 &\leq \frac{\overbrace{r^2 \cos \varphi}^{\geq r^2} + \underbrace{|\sin(r^2 \sin^2 \varphi)|}_{\leq |r^2 \sin^2 \varphi| \leq r^2}}{r} \\
 &\leq \frac{2r^2}{r} = 2r
 \end{aligned}$$

Et donc ici on voit que la limite de la fonction va bien vers 0. ON peut aussi le "deviner" en voyant un r tout seul en bas et une $r^2 \cos \dots$ en haut. Cela peut donner quelque indice.

Solution
 $g(x, y)$

Pour cette fonction on refait le même procédé mais avant on va tester les limites du type $\lim_{t \rightarrow 0} g(0, t)$ et aussi $\lim_{t \rightarrow 0} g(t, 0)$ et on voit qu'elle ne donne pas la même réponse et que donc, la limite n'existe pas.

Mercredi 19 mars 2025 — Cours 10 : Limites de fonctions

Rappel

Voici un petit tappel sur les méthodes de calcul des limites de fonction $f : E_{\mathbb{C}\mathbb{R}^2} \rightarrow \mathbb{R}$

1. s'il existent 2 suites \overline{a}_k et $\overline{b}_k \subset E \setminus \{\overline{x}_0\} : \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{a}_k = \overline{x}_0, \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{b}_k = \overline{x}_0$ et que, $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\overline{a}_k) \neq \lim_{k \rightarrow \infty} f(\overline{b}_k)$ Alors la limite

$$\lim_{\overline{x} \rightarrow \overline{x}_0} f(\overline{x})$$

n'existe pas

2. S'il existent 2 courbe $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow E \setminus \{\overline{x}_0\}$ tel que :

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \gamma_1(t) = \lim_{t \rightarrow a^+} \gamma_2(t) = \overline{x}_0$$

Et que :

$$\lim_{t \rightarrow a^+} f(\gamma_1(t)) \neq \lim_{t \rightarrow a^+} f(\gamma_2(t))$$

Alors, la limite $\lim_{\overline{x} \rightarrow \overline{x}_0} f(\overline{x})$ n'existe pas.

3. Deux gendarmes : soit $f, g, h : E \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\lim_{\overline{x} \rightarrow \overline{x}_0} f(\overline{x}) = \lim_{\overline{x} \rightarrow \overline{x}_0} g(\overline{x}) = l$$

Et que $\exists \alpha > 0 : \forall x \in E : 0 < ||\overline{x} - \overline{x}_0|| < \alpha$ on a

$$f(\overline{x}) \leq h(\overline{x}) \leq g(\overline{x})$$

Alors, $h(\overline{x}) = l$

4. Coordonnées polaires : $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Alors $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = 0 \iff \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ **Ici $\varphi = \varphi(r)$ est une fonction inconnue de r**

5. Deux gendarmes en coordonnées polaires : $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = l \iff \exists \delta > 0 \text{ et } \Phi :]0, \delta[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall \varphi \in [0, 2\pi], \quad \forall r \in]0, \delta[\text{ on a } |f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - l| \leq \Phi(r)$$

$$\text{et } \lim_{r \rightarrow 0^+} \Phi(r) = 0$$

Développement limité Pour calculer des limites, on peut aussi utiliser les DL connus pour les fonctions d'une seule variables pour trouver des estimations pour les deux gendarme. Notamment, dans les limites lorsque $\|(x, y) - (0, 0)\| \rightarrow 0$ on peut remplacer des expression $\Phi(x)$, $\varphi(x)$ par leur DL autour de $x = 0$ ou $y = 0$:

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k + t^n \cdot \varepsilon(t) \quad 1 \text{ seule variable}$$

$$x(y) = \sum_{k=0}^n b_k y^k + y^n \cdot \varepsilon(y), \dots$$

On peut composer une fonction d'une seule variable

Proposition Soit $D \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in D$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de (x_0, y_0) , telle que

Lundi 24 mars 2025 — Cours 11 : Differentiable

Méthode 7 Ré- currence

Le principe fondamental de récurrence Soit $S \subset \mathbb{N}$ sous-ensemble : $0 \in S$ et pour tout $n \in S$ on a $(n+1) \in S$. Alors $S = \mathbb{N}$

Méthode de récurrence Soit $P(n)$ une proposition qui dépend de $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$
Supposons que

- $P(n_0)$ est vraie
- $P(n)$ implique $P(n+1)$ pour tout $n \geq n_0$ naturel

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$

On regroupe quatre étapes pour une preuve par récurrence :

La proposition (Soit $P(n)$ la proposition pour x)

L'initialisation $P(0)$

L'hérédité : Supposons que $P(n)$ est vrai, alors il faut en déduire $P(n+1)$

Conclusion : Puisque $P(x_0)$ est vraie et que pour tout $x \geq x_0$, $P(n) \implies P(n+1)$, par récurrence $P(n)$ est vraie $\forall n \geq x_0$.

Attention a ne pas mélanger ce qu'on veut et ce qu'on a.

**Récurrance
généralisée**

Soit $P(n)$ une proposition qui dépend de $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$.

Supposons que (1) $P(n_0), \dots, P(n_0 + k)$ sont vraie pour un $k \in \mathbb{N}$

En deuxième $\{P(n), P(n+1), \dots, P(n+k)\}$ impliquent $P(n+k+1) \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$.

Alors, $P(n)$ est vraie $\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$

Chapitre 6

Calcul différentielle des fonctions de plusieurs variables

6.1 Dérivées partielles, le gradient

Dérivée partielle

Définition 32 Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $E \subset \mathbb{R}$ sous-ensemble ouvert.

Soit $g(s) = f(a_1, a_2, \dots, \overbrace{s}^k, a_{k+1}, \dots, a_n)$ où $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in E$.

$$g : D = \{s \in \mathbb{R} : (a_1, a_2, \dots, s, a_{k+1}, \dots, a_n) \in E\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Alors si g est dérivable en $a_k \in D$, on dit que la ***k*-ième dérivée partielle** de f en $\bar{a} \in E$ existe et est égale à $g'(a_k)$

$$\text{Notation : } \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) \equiv D_k f(\bar{a})$$

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(a_k + t) - g(a_k)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{e}_k) - f(\bar{a})}{t}$$

Gradient

Définition 33 Si toutes les dérivées partielles existent en $\bar{a} \in E$: $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{a}) \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a})$, alors on définit le **gradient** de f en \bar{a} comme :

$$\nabla f(\bar{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) \right)$$

6.2 Dérivée directionnelle

Définition Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ sous-ensemble ouvert, $\bar{a} \in E$, $\bar{v} \in \mathbb{R}^n, \bar{v} \neq 0$. La droite passant par \bar{a} en direction \bar{v} admet la paramétrisation $\bar{e}(t) = \bar{a} + t\bar{v}$ et cela $\forall t \in \mathbb{R}$.
Considérons la fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$
et soit $g(t) = f(\bar{a} + t\bar{v})$ la fonction d'une seule variable $t \in \mathbb{R}$:

$$g : D = \{t \in \mathbb{R} : \bar{a} + t\bar{v} \in E\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Définition 34 Si g est dérivable en $t = 0$ on dit qu'il existe **la dérivée directionnelle** de f en \bar{a} suivant le vecteur \bar{v} (en direction de \bar{v})
La dérivée directionnelle de f en \bar{a} en direction de \bar{v} est :

$$Df(\bar{a}, \bar{v}) = \frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{v}) - f(\bar{a})}{t}$$

Si $\bar{v} = \bar{e}_i$ ou \bar{e}_i est un vecteur unitaire, Alors

$$Df(\bar{a}, \bar{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})$$

Si toutes les dérivées directionnelles existent en \bar{a} (pour tout $\bar{v} \neq \bar{0}$), alors toutes les dérivées partielles existent en \bar{a} . La réciproque est fautive en générale

$$Df(\bar{a}, \lambda \bar{v}) = \lambda \cdot Df(\bar{a}, \bar{v}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \neq 0$$

6.3 Dérivabilité et la différentielle

Définition 35 Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $\bar{a} \in E$
On dit que f est **dérivable** au point \bar{a} s'il existe une transformation linéaire :

$$L_{\bar{a}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

et une fonction $r : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = f(\bar{a}) + L_{\bar{a}}(x - \bar{a}) + r(x) \quad \forall x \in E$$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{a}} \frac{r(x)}{\|x - \bar{a}\|} = 0$$

Définition 36 $L_{\bar{a}}$ s'appelle **la différentielle** de f au point $\bar{a} \in E$

Notation :

$$L_{\bar{a}} = df(\bar{a})$$

Une transformation linéaire $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que $\tau(\alpha\bar{x}_1 + \beta\bar{x}_2) = \alpha T(\bar{x}_1) + \beta T(\bar{x}_2)$ pour tout $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \mathbb{R}^n$. Par exemple $x + 3y$ est une transformation linéaire tandis que $x + 2y + 2$ n'en est pas une.