

a



# Analyse II

Arthur Herbette  
Prof. Lachowska Anna

Lundi 14 avril 2025

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Equations différentielles ordinaires</b>	<b>9</b>
2.1	definition . . . . .	9
2.2	Existence et unicité d'une solution de EDVS . . . . .	10
2.3	Méthode de démonstration . . . . .	11
2.3.1	Théorème Existence et unicité d'une solution de EDVS . . . . .	11
2.3.2	Solution maximale . . . . .	12
2.4	Equation différentielle linéaire du premier ordre (EDL1) . . . . .	13
2.4.1	Principe de superposition de solutions . . . . .	13
2.4.2	Théorème à savoir pour l'examen . . . . .	14
2.4.3	Rappel : Equation différentielles linéaires du premier ordre (EDL1) . . . . .	14
2.4.4	Application de EDVS (EDL1) : Croissance et décroissance exponentielle . . . . .	17
2.5	Méthodes de démonstration . . . . .	17
2.6	Equation différentielle du second ordre . . . . .	19
2.6.1	Unicité d'un EDL2 . . . . .	21
2.6.2	Rappel : Equation différentielle linéaires du second ordre (EDL2) . . . . .	22
2.6.3	Caractérisation des 2 solutions de EDL2 linéairement indépendante . . . . .	23
2.6.4	Démonstration à savoir . . . . .	23
2.6.5	Théorème aussi à savoir . . . . .	24
2.6.6	Méthode de résolution de EDL2 . . . . .	28
2.6.7	Méthode de démonstration par l'absurde . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Espace <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>33</b>
3.0.1	$\mathbb{R}^n$ espace vectoriel normé . . . . .	33
3.0.2	Sous-ensemble ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	34
3.0.3	Méthodes de démonstration : Démonstration par le principe des tiroirs . . . . .	37
3.0.4	L'adhérence et la frontière d'un sous-ensemble $\mathbb{R}^n$ . . . . .	38
3.0.5	Suites d'éléments de $\mathbb{R}^n$ et la topologie de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Fonction réelles de plusieurs variables réelles limite et continuité</b>	<b>43</b>
4.0.1	Définition et exemples . . . . .	43
4.0.2	Limites et continuité . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Calcul différentielle des fonctions de plusieurs variables</b>	<b>55</b>
5.1	Dérivées partielles, le gradient . . . . .	55
5.2	Dérivée directionnelle . . . . .	56
5.3	Dérivabilité et la différentielle . . . . .	56
	Equation du plan tangent de la surface . . . . .	58

5.3.1	Fonction à valeur dans $\mathbb{R}^m$ , $m \geq 1$ , la matrice jacobienne . . . . .	59
5.3.2	Formule de taylor . . . . .	60



# Liste des cours

Cours 1 : Equa Diff — Lundi 17 février 2025	9
Cours 2 : EDO — Mercredi 19 février 2025	11
Cours 3 : EDL1 Et Méthode de démonstration — Lundi 24 février 2025	14
Cours 4 : EDL2 — Mercredi 26 février 2025	19
Cours 5 : Equation différentielle — Lundi 3 mars 2025	22
Cours 6 : EDL2 — Jeudi 6 mars 2025	28
Cours 7 : Espace $\mathbb{R}^n$ — Lundi 10 mars 2025	32
Cours 8 : Suite d'élément de $\mathbb{R}^n$ — Mercredi 12 février 2025	38
Cours 9 : Limite et continuité — Samedi 15 mars 2025	44
Cours 10 : Limites de fonctions — Mercredi 19 mars 2025	51
Cours 11 : Differentiable — Lundi 24 mars 2025	52
Cours 12 : Tangente de la surface — Mercredi 26 mars 2025	57
Cours 13 : Jacobienne — Lundi 7 avril 2025	59
Cours 17 : Jacob — Lundi 14 avril 2025	60





# Chapitre 1

## Introduction

Le but de ce document est d'y faire un résumé qui se trouve entre les notes de Joachim Favre (Dont j'ai utilisé le template) et Les résumés des théorèmes disponibles sur moodle. Je vais essayer de me tenir à environ une à 2 pages par cours



# Chapitre 2

## Equations différentielles ordinaires

---

Lundi 17 février 2025 — Cours 1 : Equa Diff

### 2.1 définition

**Définition 1** Une équation différentielle ordinaire est une expression

$$E(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

où  $E$  est une expression fonctionnelle,  $n \in \mathbb{N}_0$ , et  $y = y(x)$  est une fonction inconnue de  $x$ . On cherche un intervalle ouvert  $I \subset \mathbb{R}$  et une fonction  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^n$  telle que l'équation donnée est satisfaite  $\forall x \in I$ .

**Equation à variable séparées**

Une équation à variables séparées est une équation du type  $f(y) \cdot y' = g(x)$  est une **EDVS** où :

- $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue sur  $I \subset \mathbb{R}$
- $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue sur  $J \subset \mathbb{R}$

Une fonction  $y : J' \subset J \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C'$  satisfaisant l'équation  $f(y) \cdot y' = g(x)$  est une solution

*Remarque personnelle*

Ce type d'équation se résout très rapidement car on peut transformer le  $y'$  en  $\frac{dy}{dx}$  et "mettre le  $dx$  de l'autre côté" :

$$f(y) \cdot \frac{dy}{dx} = g(x) \implies \int f(y) dy = \int g(x) dx$$

Et il suffit donc d'intégrer les deux côtés et le tour est joué.

**Terminologie**

Soit  $E(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$  (\*) une équation différentielle (ED) :

- **Def :** un nombre naturel  $n \in \mathbb{N}_+$  est l'**ordre** de l'équation (\*) si  $n$  est l'ordre maximal de dérivée de  $y(x)$  dans l'équation.

- **Def :** Si (\*) est de la forme  $\alpha_0(x)y + \alpha_1(x)y' + \alpha_2(x)y'' + \dots + \alpha_n(x)y^{(n)} = b(x)$  alors l'équation est dite **linéaire** où  $\alpha_i(x)$ ,  $b(x)$  sont des fonctions continues
- **Def** Si l'expression (\*) ne contient pas de  $x$  l'équation (\*) est dite **autonome**

### Problème de Cauchy

**Définition 2** Résoudre **Le problème de Cauchy (ED avec des conditions initiales)** pour l'équation  $E(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  c'est de trouver l'intervalle ouvert  $I \subset \mathbb{R}$  et une fonction  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^n(I)$ , telle que  $E(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$  sur  $I$  et  $y(x_0) = b_0$ ,  $y'(x_0) = B, \dots, y^{(n)}(x_0) = \dots$

Le nombre des conditions initiales dépend du type de l'ED

C'est ce qui se passe en physique lorsqu'on a une forme et que l'on cherche la position au cours du temps :

$$\begin{aligned} ma &= F \\ a &= \frac{F}{m} \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{F}{m} \\ x &= \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 + c_1 t + c_0 \end{aligned}$$

Et le but est de trouver ses constantes qui sont les conditions initiales.

**Définition 3** Une solution d'un problème de Cauchy est **maximale** si elle est définie sur le plus grand intervalle possible.

## 2.2 Existence et unicité d'une solution de EDVS

### Théorème

**Théorème 1** Soit

- $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $f(y) \neq 0 \quad \forall y \in I$
- $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors pour tout couple  $(x_0 \in J, b_0 \in I)$ , l'équation  $f(y) \cdot y' = g(x)$  admet une solution  $y : J' \subset J \rightarrow I$  vérifiant la condition initiale  $y(x_0) = b_0$

Si  $y_1 : J_1 \rightarrow I$  et  $y_2 : J_2 \rightarrow I$  sont deux solutions telles que  $y_1(x_0) = y_2(x_0) = b_0$ , alors  $y_1(x) = y_2(x)$  pour tout  $x \in J_1 \cap J_2$   
(Démonstration la prochaine fois)

### Introduction

**Définition 4** Une **proposition** est un énoncé qui peut être vrai ou faux.

**Définition 5** Une **démonstration** est une suite d'implication logique qui sert à dériver la proposition en question à partir des axiomes (propositions admises comme vraies) et des propositions préalablement obtenues

## 2.3 Méthode de démonstration

### Méthode 1

Démonstration direct :

$\underbrace{P}_{\text{condition donnée}} \implies \text{implications logiques/axiomes/propositions connues} \implies \underbrace{Q}_{\text{proposition désirée}}$

*Remarque  
personnelle*

C'est pas vraiment très claire comme ça mais en gros ça veut juste dire que pour prouver quelque chose on y va en mode brute force (tout les nombres entiers sont des nombres réels (propositions connues) et par exemple est ce que 23 est un réel ?)

### Raisonnement par contraposée

Comme vu en AICC on sait que  $P \implies Q \equiv \neg P \implies \neg Q$

---

Mercredi 19 février 2025 — Cours 2 : EDO

### 2.3.1 Théorème Existence et unicité d'une solution de EDVS

#### Théorème

**Théorème 2** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $f(y) \neq 0 \ \forall y \in I$   
 $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors pour tout coupe  $(x_0 \in J, b_0 \in I)$ , l'équation

$$f(y) \cdot y'(x) = g(x)$$

admet une solution  $y : J' \subset J \rightarrow I$  vérifiant la condition initiale  $y(x_0) = b_0$ .

Si  $y_1 : J_1 \rightarrow I$  et  $y_2 : J_2 \rightarrow I$  sont deux solutions telles que  $y_1(x_0) = y_2(x_0) = b_0$ , alors  $y_1(x) = y_2(x)$  pour tout  $x \in J_1 \cap J_2$

#### Démonstration

Idée :  $\int f(y)dy = \int g(x)dx \implies F(y) = G(x) \implies y(x) = F^{-1}(G(x))$

Le reste de la preuve se trouve sur les pdf de Joachim Favre.

#### Résumé

**Résumé 1** EDVS :  $f(y) \cdot y' = g(x)$  où  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue (respectivement  $J$  pour  $g$ ),  
 Pour résoudre  $\int f(y)dy = \int g(x)dx$  où  $\int f(y)dy$  est une primitive (sans constante) et  $\int g(x)dx$  est une primitive générale (avec une constante)

#### Exemple

*Exemple 1*  $\frac{y'(x)}{y^2(x)} = 1$  EDVS :  $\frac{1}{x^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{R}_-^*$ .  
On a aussi que  $g(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . on fait donc :

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int dx \implies -\frac{1}{y} = x + C$$

$$y = -\frac{1}{x + C} \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

la solution générale sur  $] -\infty, -C[$  et  $] -C, \infty[$ .

Condition initiale  $y(0) = b_0 \in \mathbb{R}^* \implies y(0) = -\frac{1}{C} = b_0 \implies C = -\frac{1}{b_0}$

- Si  $b_0 > 0 \implies \frac{1}{b_0} > 0 \implies y(x) = -\frac{1}{x - \frac{1}{b_0}}$  sur  $] -\infty, \frac{1}{b_0}[$   
- la solution particulière
- Et vis versa pour  $b_0 < 0$

### 2.3.2 Solution maximale

**Solution maximale**

**Définition 6** Une solution **solution maximale** de l'EDVS avec la condition initiale  $y(x_0) = b_0$ ,  $x \in J$ ,  $b_0 \in I$  est une fonction  $y(x)$  de classe  $C^1$  satisfaisant l'équation, la condition initiale et qui est définie sur le plus **grand** intervalle possible.

Le théorème sur EDVS dit que si  $f(y) \neq 0$  sur  $I$ , alors il existe une unique solution maximale. Toute solution avec la même condition initiale est une restriction de la solution maximale

**Exemple 2**

L'équation différentielle  $2yy' = 4x^3$  avec la condition initiale  $y(0) = 0$  possède :

1. Une seule solution sur  $\mathbb{R}$
2. 2 solutions sur  $\mathbb{R}$
3. 3 solutions sur  $\mathbb{R}$
4. 4 solutions sur  $\mathbb{R}$

En premier lieu il faudra résoudre :

$$\int 2y dy = \int 4x^3 dx$$

$$y^2 = x^4 + C \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

$$y = \pm \sqrt{x^4 + C}$$

$$y(0) = \pm \sqrt{C} = 0 \implies C = 0$$

$$y(x) = \pm \sqrt{x^4} = \pm x^2$$

On voit ici qu'il y a 4 solutions à cause des  $\pm$  qui se rajoute entre eux :

- $y(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$
- $y(x) = -x^2, x \in \mathbb{R}$
- $y(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$

$$\bullet y(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$$

## 2.4 Equation différentielle linéaire du premier ordre (EDL1)

### Definition

**Définition 7** Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle ouvert. Une équation de la forme :

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x), \text{ où } p, f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ sont continues}$$

est une **équation différentielle linéaire du premier ordre (EDL1)**

### Comment résoudre une EDL1

Une solution est une fonction  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  satisfaisant l'équation.

Considérant l'équation  $y'(x) + p(x)y(x) = 0$

Elle s'appelle **l'équation homogène associée** à l'EDL1  $y' + py = f$  qui nous amène :

$$\begin{cases} y(x) = 0 \quad \forall x \in I \\ \frac{y'(x)}{y(x)} = -p(x) \quad EDVS \implies \int \frac{dy}{y} = - \int p(x) dx \end{cases}$$

Ce qui implique que  $\ln |y| = -P(x) + C_1$  où  $P(x)$  est une primitive de  $p(x)$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}$ , ensuite,  $|y| = e^{-P(x)+C_1} = e^{C_1} e^{-P(x)} \implies y(x) = \pm C_2 e^{-P(x)}$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}_+^*$

Mais on a aussi  $y(x) = 0$  sur  $I$  ce qui implique que

$$y(x) = C e^{-P(x)}$$

où  $C \in \mathbb{R}$ ,  $x \in I$  est la solution générale de l'équation homogène associée  $y' + py = 0$  sur  $I$

### 2.4.1 Principe de superposition de solutions

#### Principe

Soit  $I \subset \mathbb{R}$  ouvert,  $p, f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  fonctions continues

Supposons que  $v_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  est une solution

$$y' + p(x)y(x) = 0$$

#### Méthode de la variation de constante

On cherche une solution particulière de  $y'(x) + p(x)y(x) = f(x) : p, f : I \xrightarrow{\text{continue}} \mathbb{R}$

sout la forme :

**Ansatz :**

$$v(x) = C(x) e^{-P(x)}$$

où  $P(x)$  est une primitive de  $p(x)$  sur  $I$

Si  $v(x)$  est une solution  $\implies v'(x) + p(x)v(x) = f(x)$  ce qui implique que

$$C' e^{-P(x)} + C(x)(-e^{-P(x)}) \cdot p(x) + p(x) C e^{-P(x)} = f(x)$$

Ce qui revient à dire

$$C'(x) = f(x)e^{P(x)} \implies c(x) = \int f(x)e^{P(x)}dx$$

une solution particulière de l'équation  $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$  est  $v(x) = \left(\int f(x)e^{P(x)}dx\right) \cdot e^{-P(x)}$  où  $P(x)$  est une primitive de  $p(x)$  sur  $I$

### 2.4.2 Théorème à savoir pour l'examen

**Proposition** Soit  $p, f : I \rightarrow \mathbb{R}$  fonctions continues. Supposons que  $v_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une solution particulière de l'équation  $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$   
Alors la solution générale de cette équation est :

$$v(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}, \text{ pour tout } C \in \mathbb{R}, \text{ où } P(x) \text{ est une primitive de } p(x) \text{ sur } I$$

**Démonstration** (1)

Soit  $v_1(x)$  une solution de  $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$ . On va démontrer qu'il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que  $v_1(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}$ , où  $v_0(x)$  est une solution de  $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$ .

Ce qui est équivalent à  $\exists C \in \mathbb{R} : v_1(x) - v_0(x) = Ce^{-P(x)}$

(2)

Par le principe de **superposition des solutions**, la fonction  $v_1(x) - v_0(x)$  est une solution de l'équation  $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$  est  $v(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}$  où  $C \in \mathbb{R}, x \in I$

(3)

$y'(x) + p(x)y(x) = 0$  est EDVS  $\implies$  la solution générale de cette équation est  $v(x) = Ce^{-P(x)}$ ,  $C \in \mathbb{R}$  et  $P(x)$  est une primitive de  $p(x)$  sur  $I$ .

(4)

Donc, par la définition  $v(x)$  est la **solution générale**.

---

Lundi 24 février 2025 — Cours 3 : EDL1 Et Méthode de démonstration

### 2.4.3 Rappel : Equation différentielles linéaires du premier ordre (EDL1)

**Rappel**

$$y' + p(x)y = f(x)$$

Où  $p, f : I \rightarrow \mathbb{R}$  fonctions continues. Alors la solution générale est donnée par la formule :

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_{part}(x)$$

Où  $y_{hom}(x)$  est la solution générale de l'équation générale de l'équation homogène associée :  $y' + p(x)y = 0$  et  $y_{part}(x)$  est une solution particulière de l'équation donnée :  $y' + p(x)y = f(x)$ .

- $y_{hom}(x) = Ce^{-P(x)}$ , où  $P(x) = \int p(x)dx$  est une primitive (sans constante),  $C \in \mathbb{R}$ .
- $y_{part}(x) = \left(\int f(x)e^{P(x)}dx\right)e^{-P(x)}$



**Théorème 3** La solution générale de l'EDL1 :

$$y(x) = Ce^{-P(x)} + \left( \int f(x)e^{P(x)} dx \right) e^{-P(x)}$$

Attention avec le signe moins qui se trouve dans la solution homogène mais pas dans la solution particulière.

Ex1

$$y' - \underbrace{\frac{2}{x}}_{p(x)} y = \underbrace{x^3 + 1}_{f(x)} \text{ avec } p : ]-\infty, 0[ \text{ et } ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue,}$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue.

$$P(x) = \int -\frac{2}{x} = -2 \ln |x| \implies P(x) = -2 \ln |x| \text{ avec } x \neq 0$$

On a donc comme solution homogène :

$$y_{hom}(x) = Ce^{-P(x)} = Ce^{-(-2 \ln |x|)} = Ce^{-\ln |x|^2} = Ce^{-\ln x^2} = Cx^2$$

Sur  $] -\infty, 0[ \cap ]0, \infty[$

On cherche maintenant une solution particulière de l'équation complète :

$$y' + \frac{-2}{x} y = x^3 + 1$$

On utilise la méthode de la variation des constantes :

$$\begin{aligned} \int f(x)e^{P(x)} dx &= \int (x^3 + 1)e^{-\ln x^2} dx \\ &= \int \frac{x^3 + 1}{x^2} dx \\ &= \int \left(x + \frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} \text{ pas de constante} \end{aligned}$$

Ce qui implique donc que :

$$y_{part}(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}\right)e^{-(-\ln x^2)} = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}\right)x^2 = \frac{1}{2}x^4 - x$$

**Vérification :**

$$\begin{aligned} y'_{part}(x) - \frac{2}{x}y_{part} &= 2x^3 - 1 - \frac{2}{x}\left(\frac{1}{2}x^4 - x\right) \\ &= 2x^3 - 1 - x^3 + 2 = x^3 + 1 \end{aligned}$$

Solution générale de l'équation originale :

$$y(x) = Cx^2 + \frac{1}{2}x^4 - x$$

Sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $]0, \infty[$

Si on multiplie par  $x$  l'équation de base :

$$xy' - 2y = x^4 + x$$

Alors, la solution va sur  $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow y(x) = Cx^2 + \frac{1}{2}x^4 - x \text{ sur } \mathbb{R}$$

Ex2

$y' - (\tan x)y = \cos x$   $\tan(x)$  n'est pas continue en  $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ . Puisque  $0 \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \Rightarrow$  on considère l'équation sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $p, f : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$  continues.

1. Solution générale de l'équation homogène associée.

$$y' + (-\tan x)y = 0$$

$$\begin{aligned} P(x) &= \int (-\tan x) dx = - \int \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \underbrace{\int \frac{du}{u}}_{\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}} = \ln |\cos x| \\ &\Rightarrow P(x) = \ln(\cos x) \text{ sur } ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \end{aligned}$$

On a donc :

$$y_{hom}(x) = Ce^{-P(x)} = Ce^{-\ln \cos x} = \frac{C}{\cos x}, x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ , C \in \mathbb{R}$$

**Vérification :**

$$-\frac{C}{\cos^2 x} \cdot (-\sin x) - \tan x \cdot \frac{C}{\cos x} = C \frac{\sin x}{\cos^2 x} - C \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0$$

2. Solution particulière de l'équation complète :

$$y' - \tan xy = \cos x$$

Selon la même méthode :

$$\begin{aligned} \int f(x)e^{P(x)} dx &= \int \cos x e^{\ln \cos x} dx = \int \cos^2 x dx \\ &= \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} y_{part}(x) &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x\right) \cdot e^{-P(x)} \\ &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x\right) \frac{1}{\cos x} \\ &= \frac{1}{2} \frac{x}{\cos x} + \frac{1}{4} \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x} \\ y_{part}(x) &= \frac{1}{2} \frac{x}{\cos x} + \frac{1}{2} \sin x, x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \end{aligned}$$

### 2.4.4 Application de EDVS (EDL1) : Croissance et décroissance exponentielle

#### Exemple

Soit  $y = y(t)$  tel que  $y' = ky, k \in \mathbb{R}$ ;  $y = 0$  est une solution

$$\text{EDVS : } \int \frac{dy}{y} = \int k dt \implies \ln |y| = kt + C_1 \implies |y| = e^{C_1} e^{kt} \implies y(t) = C e^{kt}$$

Condition initiales :

- $y(0) = C = y_0 > 0$
- $y(t) = y_0 e^{kt}$

La solution maximale satisfaisant la condition initiale  $y(0) = y_0$  est :

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

## 2.5 Méthodes de démonstration

### Méthode 3 : Raisonnement par disjonction des cas

**Définition 8** Soient  $P, Q$  deux propositions. Pour montrer que  $P \implies Q$  on sépare l'hypothèse de  $P$  de départ en différent cas possibles et on montre que l'implication est vraie dans chacun des cas. Il est très important de considérer **tous les cas possibles**

Ex1

Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$  on a :

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

$$1. |x| \geq |y| \implies$$

$$\begin{aligned} ||x| - |y|| &= |x| - |y| \\ &= |x - y + y| - |y| \\ &\stackrel{\Delta}{\leq} |x - y| + |y| - |y| = |x - y| \end{aligned}$$

$$2. |x| < |y| \implies$$

$$\begin{aligned} ||x| - |y|| &= -|x| + |y| \\ &= -|x| + |y - x + x| \\ &\stackrel{\Delta}{\leq} -|x| + |y - x| + |x| = |y - x| \\ &= |x - y| \end{aligned}$$

Ex2

Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $2n^2 + n + 1$  n'est pas divisible par 3. 3 Cas :

$$1. n \equiv 0 \pmod{3} \iff n = 3k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2n^2 + n + 1 = 2(3k)^2 + (3k) + 1 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$2. n \equiv 1 \pmod{3} \iff n = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}$$

$$\implies 2n^2 + n + 1 = 2(3k + 1)^2 + (3k + 1) + 1 \equiv 2 + 1 + 1 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$3. n \equiv 2 \pmod{3}, n = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}$$

$$2n^2 + n + 1 = 2(3k + 2)^2 + (3k + 2) + 1 \equiv 8 + 2 + 1 \equiv 2 \pmod{3}$$

Finalement,  $2n^2 + n + 1$  n'est pas divisible par 3  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

**Méthode 4 :**  
Comment démontrer les propositions de la forme  $P \iff Q$

Deux méthodes existent :

1.  $P \implies Q$  **ET**  $Q \implies P$
2. Suite d'équivalences :  $P \iff R_1 \iff R_2 \iff \dots \iff Q$

Pour la deuxième méthode, il faut vérifier que chaque implication est une **équivalence**.

Ex3

Soit  $a, b \in \mathbb{N}$  :

- $P : \{ab + 1 = c^2 \text{ pour un nombre naturel } c\}$
- $Q : \{a = b \pm 2\}$

**Proposition**  $P \iff Q$

**Démonstration**

$$\underbrace{ab + 1 = c^2}_P \iff ab = c^2 - 1 \iff ab = (c-1)(c+1)$$

$$= (c+1)(c-1) \underset{\text{Faux}}{\iff} \begin{cases} a = c-1 \\ b = c+1 \\ a = c+1 \\ b = c-1 \end{cases}$$

Néanmoins, Contre exemple :  $a = 3, b = 8$  on a que  $24 + 1 = 25 = 5^2 = c^2$ ,  $P$  est vrai,  $Q$  est faux

Proposition qui est vraie :  $Q \implies P$  Soient  $a, b \in \mathbb{N} : a = b \pm 2$ , Alors  $ab + 1 = c^2, c \in \mathbb{N}$

**Démonstration**

$$\begin{aligned} a = b \pm 2 \implies ab + 1 &= b(b \pm 2) + 1 \\ &= b^2 \pm 2b + 1 \\ &= (b \pm 1)^2 = c^2 \end{aligned}$$

Ex4

Soient  $z = \underbrace{\rho e^{i\varphi}}_{\rho > 0} \in \mathbb{C}^*, P : \{z^2 \in \mathbb{R}^*\}, Q : \{\varphi = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

On cherche ici à savoir la relation entre  $P$  ??  $Q$

**Démonstration**  $Q \implies P$  :

Soit  $z = \rho e^{i\varphi}, \varphi = \frac{\pi k}{2} \implies z^2 = \rho^2 e^{2i\varphi} = \rho^2 (-1)^k \in \mathbb{R}^*$ .

**Démonstration**  $P \implies Q$

Soit  $z = \rho e^{i\varphi}, \rho > 0 \implies z^2 = \rho^2 e^{2i\varphi}$

## 2.6 Equation différentielle du second ordre

### Définition

**Définition 9** Soit  $I$  un intervalle ouvert. On appelle **équation différentielle linéaire de second ordre** une équation de la forme :

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)$$

où  $p, q, f : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions continues

**Définition 10** Une équation de la forme

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

est dite **EDL2 homogène**.

On cherche une solution de cette équation de classe  $C^2$

Ex1

$$y'' = 5 \implies y' = 5x + C, x \in \mathbb{R}, \forall C \in \mathbb{R}$$

Ce qui implique

$$y(x) = \frac{5}{2}x^2 + C_1x + C_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

**EDL2 homogène à coefficients constants**

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

où  $a, b$  sont des racines de l'équation  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

Par un changement de variables :

$$\underbrace{(y'(x) - ay(x))}_{z(x)}' - b \underbrace{(y'(x) - ay(x))}_{z(x)} = 0$$

$$z'(x) - bz(x) = 0 \implies \text{EDVS pour } z$$

$$\implies z(x) = C_1 e^{bx}$$

$$\implies z(x) = y'(x) - ay(x) = C_1 e^{bx}$$

Ce qui est une EDL1.

$$= y'(x) - ay(x) = C_1 e^{bx}, \quad p(x) = -a, \quad f(x) = C_1 e^{bx}$$

$$\implies P(x) = \int -a dx = -ax,$$

$$= y_{hom}(x) = C_2 e^{ax} \quad \text{solution générale de l'équation homogène}$$

On a alors pour  $C(x)$  :

$$C(x) = \int C_1 e^{bx} e^{-ax} dx = C_1 \int e^{(b-a)x} dx = \begin{cases} \frac{1}{b-a} C_1 e^{(b-a)x}, & \text{si } b \neq a \\ C_2 e^{ax} + C_1 x e^{ax} & \text{si } a = b \end{cases}$$

Si  $a \neq b$  sont des racines complexes,  $a, b \notin \mathbb{R} \implies a = \hat{b}$  Ce qui implique que :  
 $y(x) = Ce^{ax} + \hat{C}e^{\hat{a}x}$  pour avoir une solution réelle,  $a = \alpha + i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$   
 Soit  $C = \frac{1}{2}(C_2 - iC_4) \implies \hat{C} = \frac{1}{2}(C_3 + iC_4), C_3, C_4 \in \mathbb{R}$   
 Alors on a que :

$$\begin{aligned} y(x) &= Ce^{ax} + \hat{C}e^{\hat{a}x} = \frac{1}{2}(C_3 - iC_4)e^{\alpha x}e^{i\beta x} + \frac{1}{2}(C_3 + iC_4)e^{\alpha x}e^{-i\beta x} \\ &= C_3e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + C_4e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} \end{aligned}$$

## Résumé

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$$

Soient  $a, b \in \mathbb{C}$  les racines de l'équation  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$   
 Alors la solution générale est :

$$y(x) = \begin{cases} C_1e^{ax} + C_2e^{bx}, & \text{si } a \neq b, a, b \in \mathbb{R} \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} \\ C_1e^{ax} + C_2xe^{bx}, & \text{si } a = b \\ C_1e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2e^{\alpha x} \sin \beta x, & \text{si } a = \alpha + i\beta = \hat{b} \notin \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

oui

*Exemple 2*

$$y'' + 9y = 0$$

Equation caractéristique :  $\lambda^2 + 9 = 0 \implies a = 3i, b = -3i$  Ce  
 qui donne :  $a = 3i = \alpha + \beta i$   
 Ce qui donne comme solution générale :

$$y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$$

**Vérification :**  $y'(x) = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x \implies y'' = -9C_1 \cos 3x - 9C_2 \sin 3x \implies y'' + 9y = 0$

*Exemple 3*

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

Même procédé avec l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \implies \lambda = 3$$

Ce qui donne comme solution :

$$y(x) = C_1e^{ax} + C_2e^{ax}$$

### 2.6.1 Unicité d'un EDL2

Considérons l'équation  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$

#### Théorème

**Théorème 4** Une EDL2 homogène admet une seule solution  $y(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  satisfaisant  $y(x_0) = t$  et  $y'(x_0) = s$  pour un  $x_0 \in I$  et les nombres arbitraires  $s, t \in \mathbb{R}$ .

La démonstration n'est pas vu dans ce cours car trop fastidieuse

Remarque

(1) **Superposition des solutions** Si  $y_1(x)$  et  $y_2(x)$  sont 2 solutions de EDL2 **homogènes** alors

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$$

Est aussi une solution, où  $A, B \in \mathbb{R}$

#### Dépendance linéaire de fonctions

**Définition 11** Deux solutions  $y_1(x), y_2(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont linéairement indépendants s'il n'existe pas de constante  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $y_2(x) = cy_1(x)$

Remarque

Cela implique, en particulier, que  $y_1(x)$  et  $y_2(x)$  ne sont pas trivialement  $= 0$  sur  $I$

#### Comment résoudre

Comment résoudre  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$  ?

Supposons que  $v_1(x)$  est une solution de cette équation, telle que On sait trouver une autre solution linéairement dépendante.

Ansatz

$$v_2(x) = c(x)v_1(x)$$

Telle que  $c(x) \neq \text{const.}$  Alors :

$$v_2'(x) = c'(x)v_1(x) + c(x)v_1'(x)$$

Si on cherche la seconde dérivée de  $v_2$  :

$$v_2''(x) = c''(x)v_1(x) + c'(x)v_1'(x) + c'(x)v_1'(x) + c(x)v_1''(x)$$

Si on simplifie l'expression :

$$\begin{aligned} \Rightarrow c''(x)v_1(x) + 2c'(x)v_1'(x) + c(x)v_1''(x) + p(x)c'(x)v_1(x) \\ + p(x)c(x)v_1'(x) + q(x)c(x)v_1(x) = 0 \end{aligned}$$

On peut trouver vu que  $v_1(x)$  est solution que :

$$c(x)(v_1''(x) + p(x)v_1'(x) + q(x)v_1(x)) = 0$$

Ce qui revient pour notre équation :

$$c''(x)v_1(x) + 2c'(x)v_1'(x) + p(x)c'(x)v_1(x) = 0$$

On suppose que  $v_1(x) \neq 0$  sur  $I$  et  $c'(x) \neq 0$  sur  $I$ . (Une condition en plus, de toute façon, si  $c'(x) = 0$  on peut juste

enlever le 0 de l'intervalle et ensuite peut être le rajouter après).  
On peut donc diviser ce qui donne :

$$\frac{c''(x)}{c'(x)} = -p(x) - 2\frac{v_1'(x)}{v_1(x)} \implies \text{EDVS pour } c'(x)$$

Ce qui revient :

$$\begin{aligned} \ln c'(x) &= \underbrace{-P(x)}_{\ln e^{-P(x)}} - 2 \ln v_1(x) + \ln C, \quad C \in \mathbb{R}_+^* \\ &= \ln \frac{C e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} \end{aligned}$$

On cherche la dérivée de  $c(x)$  :

$$\begin{aligned} c'(x) &= \pm \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} \\ &= C_1 \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} \quad C_1 \in \mathbb{R}^*, C_1 = \pm C \\ c(x) &= \int C_1 \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx + C_2 \end{aligned}$$

$\implies v(x) = c(x)v_1(x)$  est une solution.

Si on prend  $C_1 = 1$  et  $C_2 = 0$  on obtient  $v_2(x)$  linéairement dépendante de  $v_1(x)$  :

#### Théorème 5

$$v_2(x) = c(x)v_1(x) = v_1(x) \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx$$

---

Lundi 3 mars 2025 — Cours 5 : Equation différentielle

### 2.6.2 Rappel : Equation différentielle linéaires du second ordre (EDL2)

**EDL2 homogène**

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

avec,  $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions continues

**EDL2 à coefficient constants**

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = f(x)$$

avec  $p, q \in \mathbb{R}, f : I \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions continues



**EDL2 homogène a coefficient constant**

$$y''(X) + py'(x) + qy(x) = 0$$

avec  $p, q \in \mathbb{R}$

La solution générale de cette dernière :  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \implies a, b \implies 3$  cas qui sont solution générale Pour un EDL2 homogène, si  $v_1(x)$  est une solution et  $v_1(x) \neq 0$  sur  $I \rightarrow v_2(x) = v_1(x) \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx$  est une solution linéairement indépendante, où  $P(x) = \int p(x)dx$  est une primitive.

**2.6.3 Caractérisation des 2 solutions de EDL2 linéairement indépendante**

**Définition 12** Si  $v_1, v_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions dérivables sur  $I \subset \mathbb{R}$  alors la fonction  $W[v_1, v_2], I \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$W[v_1, v_2] = \det \begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} = v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x)$$

est appelée le **Wronskien** de  $v_1$  et  $v_2$

**Exemple**

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \implies \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

qui donne comme solution  $\lambda_{1,2} = 3$  qui nous donne :

$$v(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{2x}, \text{ avec } x \in \mathbb{R}$$

On calcule le wronskien :

$$W[e^{3x}, x e^{3x}] = \det \begin{pmatrix} e^{3x} & x e^{3x} \\ 3e^{3x} & e^{3x} + 3x e^{3x} \end{pmatrix} = e^{6x} + 3x e^{6x} - 3x e^{6x} = e^{6x}$$

On a donc :

$$e^{6x} = W[e^{3x}, x e^{3x}] \neq 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

**2.6.4 Démonstration à savoir****Proposition**

**Théorème 6** Soient  $v_1, v_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux solutions de l'équation  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ , Alors  $v_1(x)$  et  $v_2(x)$  sont linéairement indépendantes si et seulement si  $W[v_1, v_2] \neq 0 \forall x \in I$

Nous allons le prouver par contraposée :

$$\neg P \implies \neg Q \wedge \neg Q \implies \neg P$$

$$\left| \begin{array}{l} (1) \neg P \implies \neg P \implies \neg Q \text{ les solutions sont linéairement indépendante} \\ \neg Q \implies \text{sans perte de généralité, il existe } c \in \mathbb{R} \text{ tel que } v_2(x) = \end{array} \right.$$

$cv_1(x) \forall x \in I$  Alors on a :

$$W[v_1, v_2](x) = \det \begin{pmatrix} v_1(x) & cv_1(x) \\ v_1'(x) & cv_1'(x) \end{pmatrix} = cv_1(x)v_1'(x) - cv_1(x)v_1'(x) = 0 \forall x \in I$$

Et donc :

$$W[v_1, v_2](x) = 0 \quad \forall x \in I$$

(2)  $\neg Q \implies \neg P$  Supposons qu'il existe  $x_0 \in I : W[v_1, v_2](x_0) = 0$ . Alors cela implique que :

$$\det \begin{pmatrix} v_1(x_0) & v_2(x_0) \\ v_1'(x_0) & v_2'(x_0) \end{pmatrix} = 0$$

Cela implique qu'il existe un vecteur non nul  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} v_1(x_0) & v_2(x_0) \\ v_1'(x_0) & v_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit  $v(x) = av_1(x) + bv_2(x)$  Alors  $v(x)$  est une solution de l'EDL2 homogène et de plus  $v(x_0) = 0$  et  $v'(x_0) = 0$ . Par le théorème de l'existence et unicité d'une solution de l'EDL2 homogène satisfaisant les conditions initiales.  $y(x_0) = 0$  et  $y'(x_0) = 0$ , puisque la solution triviale  $y(x) = 0 \forall x \in I$  satisfait l'équation et les mêmes conditions initiales  $\implies v(x) = av_1(x) + bv_2(x) = 0$  et cela pour tout  $x$  dans  $I$ .

Puisque  $a$  et  $b$  ne sont pas tous les deux nuls :

$$\begin{cases} v_1(x) = -\frac{b}{a}v_2(x) \quad \forall x \in I \\ v_2(x) = -\frac{a}{b}v_1(x) \quad \forall x \in I \end{cases} \implies v_1(x) \text{ et } v_2(x) \text{ sont linéairement indépendants}$$

*Exemple*

EDL2 homogène a coefficient constants  $y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0 \implies \lambda^2 + p\lambda + q = 0$  telle que les racines sont  $a = \bar{b} = \alpha + \beta i \notin \mathbb{R}$

Montrer que  $W[e^{\alpha y} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x] \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

### 2.6.5 Théorème aussi à savoir

**Théorème**

**Théorème 7** Soit  $v_1, v_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux solution linéairement indépendantes de l'équation  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$  alors la solution générale de cette équation est de la forme :

$$v(x) = C_1v_1(x) + C_2v_2(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in I$$

**Démonstration**

Soit  $\sim v(x)$  une solution de l'équation donnée (arbitraire), soit  $x_0 \in I$  alors

$v(x_0) = a_0 \in \mathbb{R}$ , et  $v'(x_0) = b_0 \in \mathbb{R}$

On a deux solution linéairement indépendantes  $v_1, v_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  Alors par la proposition précédente on sait que  $W[v_1, v_2] \neq 0, \forall x \in I \implies W[v_1, v_2](x_0) \neq 0$  implique que  $\exists$  unique constantes  $c_1, c_2$  tel que le noyau de la matrice est

donne par le "point"  $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$

Considérons la fonction  $v(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x)$

### Superposition des solutions

Si  $v(x)$  est une solution de des EDL2, et  $u(x)$  une solution de l'équation homogène associée :  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ , alors  $v(x) + u(x)$  est une solution de l'équation (1) (exercice)

### Méthode de la variation de constante

On cherche une solution particulière de (1) supposant qu'on connaît deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène associée :  $v_1, v_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( ce qui implique  $W[v_1, v_2](x) \neq 0 \quad \forall x \in I$ )

*Ansatz*

posons :

$$v_0(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x)$$

Où  $c_1(x)$  et  $c_2(x)$  sont des fonctions de classe  $C^2$  sur  $I$

Condition sur  $c_1(x)$  et  $c_2(x)$  ?

$$v'_0(x) = \underbrace{c'_1(x)v_1(x) + c'_2(x)v_2(x)}_{\text{Supposons } = 0} + c_1(x)v'_1(x) + c_2(x)v'_2(x)$$

On cherche la dérivée seconde :

$$v''_0(x) = c'_1(x)v'_1(x) + c'_2(x)v'_2(x) + c_1(x)v''_1(x) + c_2(x)v''_2(x)$$

$$v''_0(x) + p(x)v'_0(x) + q(x)v_0(x) = f(x)$$

$$\begin{aligned} & c'_1(x)v'_1(x) + c'_2(x)v'_2(x) + c_1(x)v''_1(x) + c_2(x)v''_2(x) \\ & + p(x)c_1(x)v'_1(x) + p(x)c_2(x)v'_2(x) + q(x)c_1(x)v_1(x) \\ & \quad + q(x)c_2(x)v_2(x) = f(x) \\ \implies & c'_1(x)v'_1(x) + c'_2(x)v'_2(x) = f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} c'_1(x)v_1(x) + c'_2(x)v_2(x) = f(x) \\ c'_1(x)v'_1(x) + c'_2(x)v'_2(x) = f(x) \end{cases} \quad \forall x \in I$$

Qui est un système pour  $c'_1(x)$  et  $c'_2(x)$  , On sait que

$$W[v_1, v_2](x) \neq 0 \text{ sur } I, \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v'_1 & v'_2 \end{pmatrix}(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$$

On écrit ce qu'on cherche :

$$\begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v'_1(x) & v'_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Implique qu'il existe une unique solution  $\forall x \in I$

En faisant l'inverse de la matrice de gauche :

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{W[v_1, v_2]} \begin{pmatrix} v_2' & -v_2 \\ -v_1' & v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} = \frac{1}{W[v_1, v_2]} \begin{pmatrix} -v_2 f \\ v_1 f \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2(x)f(x) \\ v_1(x)f(x) \end{pmatrix} \frac{1}{W[v_1, v_2]x}$$

Ce qui implique :

$$c_1(x) = - \int \frac{f(x)v_2(x)}{W[v_1, v_2]} dx$$

$$c_2(x) = \int \frac{f(x)v_1(x)}{W[v_1, v_2]} dx$$

On a donc que  $v_0(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x)$  est une solution de (1), la solution générale de (1) est :

$$v(x) = v_0(x) + c_1v_1(x) + c_2v_2(x) \text{ où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in I$$

### Exemple

Trouver la solution générale de l'équation :

$$y''(x) - \frac{1}{x(\ln x - 1)}y'(x) + \frac{1}{x^2(\ln x - 1)}y(x) = \ln x - 1$$

sur  $]e, \infty[$

(1)

Essayons de trouver une solution non nulle de l'équation homogène associée :

$$y''(x) - \frac{1}{x \ln x - 1)}y'(x) + \frac{1}{x^2(\ln x - 1)}y(x) = 0$$

Essayons avec  $y = x$  :

$$y = x \implies y' = 1, y'' = 0 = -\frac{1}{x(\ln x - 1)} + \frac{x}{x^2(\ln x - 1)} = 0 \quad \forall x \in ]e, \infty[$$

(2)

Trouver une autre solution de l'équation, linéairement indépendante

$$v_2(x) = c(x)v_1(x) \text{ où } c(x) = \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx, P(x) = \int p(x) dx$$

On cherche  $P(x)$  :

$$\begin{aligned} p(x) &= -\frac{1}{x(\ln x - 1)} \implies P(x) = -\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)} \\ &= -\int \frac{d(\ln x - 1)}{\ln x - 1} \\ &= -\ln(\ln x - 1) \end{aligned}$$

On cherche donc maintenant  $c(x)$  :

$$\begin{aligned} c(x) &= \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx = \int \frac{e^{+\ln(\ln x - 1)}}{x^2} dx = \int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx \\ &= -\int (\ln x - 1) d\frac{1}{x} = -\frac{\ln x - 1}{x} + \int \frac{1}{x} d\frac{1}{x} = -\frac{\ln x - 1}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{\ln x}{x} \end{aligned}$$

On a donc que

$$v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x) = C_1 x + C_2 \ln x$$

avec  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in ]e, \infty[$

Est la solution générale de l'équation homogène.

(3)

On cherche maintenant une solution particulière de l'équation complète :

$$y''(x) - \frac{1}{x(\ln x - 1)} y'(x) + \frac{1}{x^2(\ln x - 1)} y(x) = \ln x - 1$$

On prends :

$$v_0(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x)$$

où :

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\int \frac{f(x)v_2(x)}{W[v_1, v_2]} dx \\ c_2(x) &= +\int \frac{f(x)v_1(x)}{W[v_1, v_2]} dx \end{aligned}$$

On cherche le Wronskien :

$$W[v_1, v_2] = \det \begin{pmatrix} x & -\ln x \\ 1 & -\frac{1}{x} \end{pmatrix} = -1 + \ln x = \ln x - 1 \neq 0 \text{ sur } ]e, \infty[$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\int \frac{(\ln x - 1)(-\ln x)}{\ln x - 1} dx = +\int \ln x dx \\ &= x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x \end{aligned}$$

Pour  $c_2(x)$  :

$$c_2(x) = \int \frac{(\ln x - 1) \cdot x}{\ln x - 1} dx = \int x dx = \frac{1}{2} x^2$$

On trouve finalement :

$$\begin{aligned} v_0(x) &= c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x) \\ &= x(\ln x - 1)x + \frac{1}{2}x^2(-\ln x) \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - x^2 \end{aligned}$$

(4)

On cherche finalement la solution générale de l'équation complète

$$v(x) = C_1x + C_2 \ln x + \frac{1}{2}x^2 \ln x - x^2$$

où  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in ]e, \infty[$

---

Jeudi 6 mars 2025 — Cours 6 : EDL2

### 2.6.6 Méthode de résolution de EDL2

**Rappel (Méthode de la variation des constantes)**

En premier lieu on calcule le Wronskien de  $v_1(x)$  et  $v_2(x)$ ,

$$W[v_1, v_2] = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix}$$

Ensuite, On calcule les fonctions  $c_1(x)$  et  $c_2(x)$  :

$$\begin{aligned} c_1(x) &= - \int \frac{f(x)v_2(x)}{W[v_1, v_2]} dx \\ c_2(x) &= \int \frac{f(x)v_1(x)}{W[v_1, v_2]} dx \end{aligned}$$

**Méthode de calcul**

Pour des fonctions  $f(x)$  spéciales, une méthode alternative existe :

*Case 1*

si  $f(x)$  est de la forme :

$$f(x) = e^{cx} R_n(x)$$

avec  $R_n(x)$  un polynôme de degré  $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ .

Alors la solution est donné par :

$$\implies y_p(x) = x^r e^{cx} T_n(x)$$

Avec  $r = 0, 1$  ou  $2$  la multiplicité de la racine  $c$  dans l'équation caractéristique,  $T_n(x)$  un polynôme à déterminer de degré  $n$ .

*Cas 2*

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\alpha x} (\cos(\beta x) P_k(x) + \sin(\beta x) Q_n(x)); \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ \implies y_p(x) &= x^r e^{\alpha x} (\cos(\beta x) T_n(x) + \sin(\beta x) S_n(x)) \end{aligned}$$

Avec  $r = 1$  si  $\alpha + i\beta$  est racine de l'équation caractéristique, et  $r = 0$  sinon,  $T_n(x)$  et  $S_n(x)$  des polynômes à déterminer de degré  $n = \max(k, m)$

Pour déterminer les **coefficients des polynômes inconnus** :

- Calculer les dérivées de la solution particulière
- Remplacer dans l'équation initiale, et résoudre l'équation.

### Exemple

$$y'' + 2y' + 10y = 40e^x \sin(3x)$$

**Solution homogène :**

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2\lambda + 10 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} = \frac{-2 \pm i6}{2} \\ &= -1 \pm i3 \end{aligned}$$

On cherche maintenant  $y_h(x)$  :

$$y_h(x) = C_1 e^{-2x} \cos(3x) + C_2 e^{-x^2} \sin(3x)$$

### Coefficient indéterminé

$f(x) = 40 \cdot e^x \sin(3x)$ , on cherche donc une fonction qui rempli ce critère :

$$f(x)e^{\alpha x} (\underbrace{\cos(\beta x) P_k(x)}_{=A} + \sin(\beta x) \underbrace{Q_m(x)}_{=B})$$

On sait que  $\beta = 3$  et que  $\alpha = 1$  :

Il n'y a pas de rapport direct entre ce  $\alpha = 1$  et la solution de l'équation caractéristique.

On observe la fonction  $f(x)$  qui ici à pour l'exponentielle  $e^x = e^{1 \cdot x}$ , c'est de là que vient notre  $\alpha$

$$\alpha + i\beta = 1 + i3 \implies r = 0$$

Comme  $r = 0$  on sait donc que le polynôme n'est qu'une constante qu'on va noter  $T_n(x) = A$  et  $S_n(x) = B$

On peut noter donc notre fonction pour laquelle on cherche les coefficients :

$$y_p(x) = e^3(\cos(3x)A + \sin(3x)B)$$

On va dérivée tout ce beau monde :

$$y'_p(x) = e^x(\cos(3x)A + \sin(3x)B - r \sin(3x)A + 3 \cos(3x)B)$$

$$\begin{aligned} y''_p(x) &= e^x(\cos(3x)(A + 3B) + \sin(3x)(B - 3A) - 3(A + 3B) \sin(3x) + 3 \cos(3x)(B - 3A)) \\ &= e^x(\cos(3x)(6B - 8A) + \sin(3x)(-8B - 6A)) \end{aligned}$$

On injecte tout ça dans l'EDL2 :

On peut tout diviser par  $e^x$  car il se trouve partout et n'est jamais égal à 0.

$$\begin{aligned} \cos(3x)(6B - 8A + 2(A + 3B) + 10A) + \sin(3x)(-8B - 6A) \\ + 2(B - 3A) + 10B = 40 \sin(3x) \end{aligned}$$

On voit ici que tout la partie du  $\cos(x)$  est égal à 0, c'est comme ci on avait deux équation, la partie avec le  $\cos(x)$  et la partie avec le  $\sin(x)$  :

$$\Rightarrow \begin{cases} 12B + 4A = 0 \\ 4B - 12A = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -3B \\ 4B + 36B = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -3 \\ B = 1 \end{cases}$$

On obtient donc que la solution particulière :

$$y_p(x) = e^x(-3 \cos(3x) + \sin(3x))$$

Et pour la solution générale :

$$y = C_1 e^{-x} \cos(3x) + C_2 e^{-x^2} \sin(3x) + e^x(-3 \cos(3x) + \sin(3x))$$

### Exemple

$$y'' + 2y' - 3y = (x + 1)e^{-3x}$$

Ici nous somme dans le cas numéro 1 :

$$f(x) = e^{cx} R_n(x) \Rightarrow c = -3, n = 1$$

$$\begin{aligned} y_p(x) &= x^r e^{-3x} (Ax + B) \text{ où } r = 1 \\ y_p(x) &= e^{-3x} (Ax + Bx) \end{aligned}$$

Ici on a pris un polynôme  $R_n$  de puissance 1 c'est pour cela qu'on peut l'écrire comme nous l'avons fait ci-dessus.

Donc ici on va dérivée  $y_p$  deux fois et tout remettre dans l'équation de base et ensuite résoudre :

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= e^{-3x}(-3(Ax^2 + Bx) + 2Ax + B) = e^{-3x}(-3Ax^2 + (2A - 3B)x + B) \\ y_p''(x) &= e^{-3x}(9Ax^2 + (-6A + 9B)x - 3B + (-6A)x + (2A - 3B)) \\ &= e^{-3x}(9A + (-12A + 9B)x + 2A - 6B) \end{aligned}$$

On divise l'EDL2 par  $e^{-3x}$  ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} 9Ax^2 + (-12A + 9B)x + 2A - 6B + 2(-3Ax^2 + (2A - 3B)x + B) - 3Ax^2 + Bx &= x + 1 \\ \Rightarrow \begin{cases} (9A - 6A - 3A)x^2 = 0x^2 \\ (-2A + 9B + 9A - 6B - 3B)x = x \\ (2A - 6B) + 2B = 1 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} -8A = 1 \\ 2A - 4B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{8} \\ B = -\frac{5}{16} \end{cases} \end{aligned}$$



On obtient finalement pour la solution particulière :

$$y_p(x) = e^{-3x} \left( -\frac{x^2}{8} - \frac{5x}{16} \right)$$

$$y_h(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

### 2.6.7 Méthode de démonstration par l'absurde

**Méthode**

On a une relation tel que :

$$T \implies Q \equiv \neg Q \implies F$$

*Exemple*

$\neg \exists \in \mathbb{Z}$  tel que  $18x - 54y = 21$  :

Supposons  $\neg Q$  tel qu'il existe  $x, y$  tel que :

$$18x - 54y = 21$$

Comme cela est impossible, alors il ne peut exister de  $x, y \in \mathbb{Z}$  tel que la relation tienne :

$$\neg Q \implies \neg P$$

**Euclide**

**Théorème 8** soit  $\mathbb{P}$  l'ensemble des nombres premiers alors :

$$|\mathbb{P}| = \infty$$

**Démonstration**

Supposons  $\exists n \in \mathbb{N}$  tel que  $|\mathbb{P}| = n < \infty$

$$\mathbb{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$$

Soit  $k = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ , alors,  $k \notin \mathbb{P}$  car  $k > p_i \forall i = 1 \dots n$  (Il ne peut pas être dans  $\mathbb{P}$  car il est plus grand que tous les éléments de  $\mathbb{P}$ )

Et donc, il existe un élément dans  $\mathbb{P}$  tel qu'il divise  $k$  :

$$\exists p_j \neq k \text{ tel que } p_j \mid k$$

Si on note

$$\underbrace{k - p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n}_{\text{divisible par } p_j} = \underbrace{1}_{\text{pas div}}$$

Ce qui est une contradiction logique.

la partie  $k - p_1 p_2 \dots p_n$  est divisible par  $p_j$  car de (1) on n'a dit que  $k$  l'était ( juste au dessus) et le produit de tous les  $p_n$  est forcément divisible par  $p_j$  vu que  $p_j \in \mathbb{P}$ . L'addition de deux nombres divisibles par un nombre est forcément divisible par ce dernier.



# Chapitre 3

## Espace $\mathbb{R}^n$

### 3.0.1 $\mathbb{R}^n$ espace vectoriel normé

#### Définition

**Définition 13**  $\mathbb{R}^n$  est un ensemble de tout les  $n$ -tuples ordonnés de nombre réels.

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Il y a donc toute les propriétés d'un espace vectoriel dont l'addition et l'action scalaire :

1.  $+$  :  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n), \bar{y} = (y_1, \dots, y_n) \implies \bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
2. Multiplication par un nombre réel  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \implies \lambda \cdot \bar{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Et par conséquent, les opérations présentées ci-dessus satisfont :

- $(\lambda_1 \lambda_2) \bar{x} = \lambda_1 (\lambda_2 \bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$
- $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$
- $(\lambda_1 + \lambda_2) \bar{x} = \lambda_1 \bar{x} + \lambda_2 \bar{x}$
- $\lambda(\bar{x} + \bar{y}) = \lambda \bar{x} + \lambda \bar{y} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
- $\lambda(\bar{x} + \bar{y}) = \lambda \bar{x} + \lambda \bar{y} \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$

#### Base

On a une base canonique :

$$\{\bar{e}_i = (0, 0, \dots, \overbrace{1}^i, \dots, 0)\}_{i=1}^n \implies \bar{e}_i \underbrace{\in}_{\forall i=1, \dots, n} \mathbb{R}^n$$

#### Produit scalaire

On introduit le **produit scalaire** dans  $\mathbb{R}^n$  :

**Définition 14**

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Et par la suite la **norme euclidienne** :

$$\| \bar{x} \| = (\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \implies \mathbb{R}^n \text{ est un espace vectoriel normé}$$

Propriétés  
de la norme  
euclidienne

1.  $\| \bar{x} \| \geq 0$  et  $\| \bar{x} \| = 0 \implies \bar{x} = (0, 0, \dots, 0)$
2.  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \implies \| \lambda \cdot \bar{x} \| = |\lambda| \cdot \| \bar{x} \|$
3. Cauchy-Schwartz :  $|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| \leq \| \bar{x} \| \cdot \| \bar{y} \|$
4. Inégalité triangulaire :  $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n \implies \| \bar{x} + \bar{y} \| \leq \| \bar{x} \| + \| \bar{y} \|$
5.  $\implies$  4,  $\| \bar{x} + \bar{y} \|^2 = \langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle + 2 \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle$   
Qui après plusieurs opération fini par :

$$\| \bar{x} \| + \| \bar{y} \| \geq \| \bar{x} + \bar{y} \|^2$$

6. Un autre inégalité triangulaire :  $\| \bar{x} - \bar{y} \| \geq \| \| \bar{x} \| - \| \bar{y} \| \|$

Pour cette égalité, Nous pouvons faire une démonstration par disjonction des cas (vu au cours 3)

**Distance**

**Définition 15** L'expression  $\| \bar{x} \bar{y} \| = d(\bar{x}, \bar{y})$  est appelée **la distance** entre  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Alors :

- $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{x}, \bar{y})$
- $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \iff \bar{x} = \bar{y}$
- $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(\bar{x}, \bar{z}) + d(\bar{z}, \bar{y})$

$$\| \bar{x} - \bar{y} \| = \| \bar{x} - \bar{z} + \bar{z} - \bar{y} \| \leq \| \bar{x} - \bar{z} \| + \| \bar{z} - \bar{y} \|^2$$

**3.0.2 Sous-ensemble ouverts et fermés de  $\mathbb{R}^n$** 

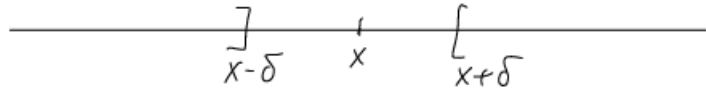
**Définition 16** Pour tout  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  et tout nombre réel  $\delta > 0$ , soit  $B(\bar{x}, \delta) = \{ \bar{y} \in \mathbb{R}^n : \| \bar{x} - \bar{y} \| < \delta \}$ . Alors  $B(\bar{x}, \delta) \subset \mathbb{R}^n$  est appelé **la boule ouverte** de centre  $\bar{x}$  et de rayon  $\delta$ .

**Boule ouverte**

**Définition 17**  $E \subset \mathbb{R}^n$  est **ouvert** si et seulement si :

1.  $E = \emptyset$
2.  $E \neq \emptyset$  et pour tout  $\bar{x} \in E$  il existe  $\delta > 0$  tel que  $B(\bar{x}, \delta) \subset E$

*Exemple* Une boule ouverte dans  $\mathbb{R}$   $B(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta\} = ]x - \delta, x + \delta[$



## Intérieur d'une boule

**Définition 18** Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  non vide. Alors  $\bar{x} \in E$  est un **point intérieur** de  $E$  s'il existe  $\delta > 0$  tel que  $B(\bar{x}, \delta) \subset E$ . L'ensemble des points intérieurs est appelé **intérieur** de  $E$ . Notation  $\mathring{E}$

*Remarque personnelle*

On voit ici clairement que  $\mathring{E} \subset E$ . Cette relation est vraie grâce au  $\delta$  qui rend "plus petit" notre point  $\bar{x}$

Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  non vide. Alors  $E \subset \mathbb{R}^n$  est ouvert  $\iff E = \mathring{E}$

*Exemple 1* La boule ouverte  $B(\bar{x}, \delta) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{y}\| < \delta\}$  est un sous-ensemble ouvert.

Soit  $\bar{y} \in B(\bar{x}, \delta)$  Alors  $\delta = \frac{1}{2}(\delta - \|\bar{x} - \bar{y}\|) > 0$  implique que :

$$\implies B(\bar{y}, \delta_1) \subset B(\bar{x}, \delta)$$

$$\implies B(\bar{x}, \delta) \subset \mathbb{R}^n$$

est un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \delta > 0$

*Exemple 2* Soit  $n \geq 2$ ,  $E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0, x_i > 0, i = 2, \dots, n\} \subset \mathbb{R}^n$   
Ici, nous voulons montrer qu'il n'est pas ouvert.  
Prenons le point  $\bar{y} = (0, y_2, \dots, y_n)$  où  $y_2, \dots, y_n > 0$ . Alors pour tout  $\delta > 0$  :

$$B(\bar{y}, \delta) \ni (\frac{\delta}{2}, y_2, \dots, y_n) \notin E$$

*Exemple 3*  $\emptyset$  et  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$  sont des sous-ensembles ouverts.  
Ici on a deux cas de figure,

- *emptyset* : alors le sous-ensemble est ouvert par définition
- Sinon, soit  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  alors  $B(\bar{x}, \delta) \subset \mathbb{R}^n$  et cela :  $\forall \delta > 0$

*Exemple 4*  $E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_i > 0 \forall i = 1, \dots, n\}$   
Soit  $\bar{y} \in E$ . Alors, nous pouvons prendre  $B(\bar{y}, \min(y_i)) \subset E$ .

## Propriétés

Ici on remarque deux grandes propriétés :

1. Toute réunion  $\bigcup_{i \in I} E_i$  des sous-ensembles ouverts est un sous-ensemble ouvert.

$$\bar{x} \in \bigcup_{i \in I} E_i \implies \exists j : \bar{x} \in E_j, E_j \text{ est ouvert} \implies \exists \delta > 0 : B(\bar{x}, \delta) \subset E_j$$

$$\implies B(\bar{x}, \delta) \subset \bigcup_{i \in I} E_i$$

2. Toute intersection **finie**  $\bigcap_{i=1}^n E_i$  des sous-ensembles ouverts est un sous-ensemble ouvert :

$$\begin{aligned} \bar{x} \in \bigcap_{i \in I} E_i &\implies \forall j \bar{x} \in E_j \text{ ouvert} \implies \exists \delta_j > 0 : B(\bar{x}, \delta_j) \subset E_j \\ &\implies B(\bar{x}, \min_j \delta_j) \subset E_j \forall j \implies B(\bar{x}, \min_j \delta_j) \subset \bigcap_{i=1}^n E_i = E \end{aligned}$$

Une intersection infinie des sous-ensembles ouverts de  $\mathbb{R}^n$

**Sous-ensemble fermé**

**Définition 19** Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  un sous-ensemble. Alors  $E$  est **Fermé** dans  $\mathbb{R}^n$  si son complément  $CE = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \notin E\} = \mathbb{R}^n - E$  est ouvert

$$CB(\bar{x}, \delta) = E \subset \mathbb{R}^n \text{ est fermé} : E = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{y}\| \geq \delta\}$$

Puisque  $C(CB(\bar{x}, \delta)) = B(\bar{x}, \delta)$  est ouvert.

**Exemples**

$$E = \{\bar{x}\} \subset \mathbb{R}^n$$

Ceci est **fermé**, car si on prends le complément :

$$CE = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y} - \bar{x}\| > 0\}$$

$$\forall \bar{y} \in CE \text{ la boule } \overline{B}(\bar{y}, \frac{1}{2} \|\bar{y} - \bar{x}\|) \subset CE$$

**Question pendant le cours**

Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles ouverts non-vides de  $\mathbb{R}^n$  Soit  $A \setminus B = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \in A \text{ et } \bar{x} \notin B\}$  non-vidé.

$A \setminus B$  peut être ouvert, fermé ou ni ouvert ni fermé

1.  $A \setminus$  est soit ouvert, soit fermé
2.  $A \setminus$  ne peut pas être ouvert
3.  $A \setminus$  ne peut pas être fermé

Il n'y a qu'une seule possibilité et pour la trouver il faut des contre exemples.

**Exemple**

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \tan(x + y) \geq 1\}$$

Et on se pose la question  $A$  ouvert, fermé, ni ouvert, ni fermé ?

Déjà on va trouver toutes les valeurs possibles pour  $x$  et  $y$  c'est à dire la définition de  $\tan$  :

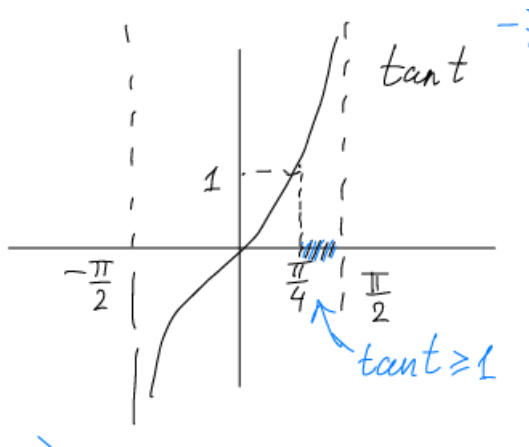
$$\implies \tan u \text{ existe} \implies u \in ]-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k[ \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan u \geq 1 \implies u \in [\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k[ \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

On a donc comme dit auparavant :

$$\begin{aligned} x + y &\in \left[ \frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k \right[ \\ \frac{\pi}{4} + \pi k &\leq x + y < \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{4} + \pi k - x &\leq y < \frac{\pi}{2} + \pi k - x \end{aligned}$$

Ici  $A$  n'est ni ouvert ni fermé :



**Explications :**

1.  $A$  n'est pas ouvert :  $(x, y) = (0, \frac{\pi}{4}) = p \in A$

$$\forall \delta > 0 \quad B(\bar{p}, \delta) \text{ contient } (0, \frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2}) \notin A$$

2.  $A$  n'est pas fermé :  $(x, y) = (0, \frac{\pi}{2}) = q \in CA$

$$\forall \delta > 0 B(\bar{q}, \delta) \text{ contient } (0, \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}) \in A \implies (0, \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}) \notin CA$$

Et comme  $CA$  n'est pas ouvert, alors  $A$  n'est pas fermé.

### 3.0.3 Méthodes de démonstration : Démonstration par le principe des tiroirs

#### Principes des tiroirs

Si  $(n + 1)$  objets sont placés dans  $n$  tiroirs, alors au moins un tiroir contient 2 objets ou plus.

Plus généralement :

**Théorème 9** Si  $n$  objets sont placés dans  $k$  tiroirs, alors au moins un tiroir contient  $\frac{n}{k} = \min\{m \in \mathbb{N} : m \geq \frac{n}{k}\}$  objets, ou plus.

Ceci est exactement la même méthode que celle vu en AICC I qu'on appelait le pigeon hole principle, Les preuves sont exactement les mêmes et le but est exactement le même.

**Rappel : Sous-ensembles ouverts et fermés dans  $\mathbb{R}^n$**

**Définition 20** Soit  $E$  un ensemble tel que  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Alors :

$$E \subset \mathbb{R}^n \iff \begin{cases} E = \emptyset \\ E \neq \emptyset \text{ et pour chaque point } \bar{x} \in E \text{ il existe } \delta > 0 \text{ tel que } B(\bar{x}, \delta) \subset E \end{cases}$$

**Définition 21**  $E \subset \mathbb{R}^n$  est fermé  $\iff$  son complémentaire  $CE = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \notin E\}$  est ouvert

### 3.0.4 L'adhérence et la frontière d'un sous-ensemble $\mathbb{R}^n$

**Adhérence**

**Définition 22** Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  sous-ensemble non vide. Alors l'intersection de tous les sous-ensembles fermés contenant  $E$  est appelée **l'adhérence de  $E$** .

*Notation*  $\bar{E}$  est **l'adhérence** de  $E$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Si notre sous-ensemble est déjà fermé alors l'adhérence est égal à lui même :

$$E \subset \mathbb{R}^n \text{ fermé} \iff E = \bar{E}$$

**Définition 23**  $E \subset \mathbb{R}^n$  non-vide.  $E \neq \mathbb{R}^n$ . Un point  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  est un point de **frontière** de  $E$  si toute la boule ouverte de centre  $x$  contient au moins un point de  $E$  et au moins un point de  $CE$

L'ensemble des points frontières de  $E$  est **la frontière de  $E$**  Notation :  $\partial E$

le d des dérivé partielle.

**Exemple**

$$E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, i = 1, \dots, n\} \implies \partial E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \exists i : x_i = 0, x_j \geq 0, i \neq j\}$$

$$\bar{E} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$$

Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  non vide. Alors :

- $\partial E \cap \mathring{E} = \emptyset$
- $\mathring{E} \cup \partial E = \bar{E}$   
Ici, on le sait parce que en premier lieu  $\mathring{E} \cup \partial E$  est fermé, et aussi  $E \subset \mathring{E} \cup \partial E$
- $\partial E = \bar{E} \setminus \mathring{E} = \bar{E} \cup CE \implies \partial E$  est fermé
- $\partial \emptyset = \emptyset, \partial \mathbb{R}^n = \emptyset$

Pourquoi faut il distinguer entre les sous-ensembles ouverts et fermés dans  $\mathbb{R}^n$  ? La topologie de  $\mathbb{R}^n$  est liée aux propriétés des limites des suites d'éléments de  $\mathbb{R}^n$ . Et comme la base de l'analyse se base sur la limite, il y a de quoi creuser.



### 3.0.5 Suites d'éléments de $\mathbb{R}^n$ et la topologie de $\mathbb{R}^n$

**Définition 24** Une suite d'éléments de  $\mathbb{R}^n$  est une application  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$f : k \rightarrow \overline{x_k} = (x_{1_k}, x_{2_k}, \dots, x_{n_k}) \in \mathbb{R}^n$$

Où :

$$\{\overline{x_k}\}_{k=0}^{\infty}$$

est une suite d'éléments de  $\mathbb{R}^n$

**Définition 25**  $\{\overline{x_k}\}_{k=0}^{\infty}$  est **convergent** et admet pour **limite**  $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$  si, pour tout  $\varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0, \|\overline{x_k} - \overline{x}\| \leq \varepsilon$  Ou alors :

$$\overline{x_n} \in \overline{B(\overline{x}, \varepsilon)} \quad \forall k \geq k_0$$

**Remarque**

soit  $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n), \overline{x_k} = (x_{1_k}, \dots, x_{n_k}, \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{x_k} = \overline{x}$  si et seulement si la limite  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{j_k} = x_j \quad \forall j = 1, \dots, n$

**Propriétés**

1. La limite d'une suite  $\{\overline{x_k}\}$ , si elle existe, est unique.
2. Toute suite convergente  $\{\overline{x_k}\}$  est bornée ( $\iff$  est contenue dans une boule fermée  $\overline{B(\overline{o}, M)}$ )

$$\begin{aligned} \lim \overline{x_k} = \overline{x} &\implies \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 \implies \|\overline{x} - \overline{x_k}\| \leq \varepsilon \\ &\implies \{\overline{x_0}, \dots\} \subset \overline{B(\overline{x}, \varepsilon)} \\ \{\overline{x_0}, \overline{x_1}, \dots, \overline{x_{k_0-1}}\} \cup \{\overline{x_k}, k \geq k_0\} &= \{\overline{x_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

Si nous prenons  $M = \max\{\|\overline{x_i}\|, i = 0, \dots, k_0-1, \|\overline{x}\| + \varepsilon\}$

**Bolzano-Weierstrass**

**Théorème 10** De toute suite bornée  $\{\overline{x_k}\} \subset \mathbb{R}^n$  on peut extraire une sous-suite convergente.

**Théorème à savoir, Un sous-ensemble non-vide  $E \subset \mathbb{R}^n$  est fermé**

**Théorème 11** Un sous-ensemble non vide  $E \subset \mathbb{R}^n$  est fermé **si et seulement si** toute suite  $\{\overline{x_k}\} \subset E$  d'éléments de  $E$  qui converge, a pour limite un élément de  $E$ .

*Démonstration  $\implies$  par absurde*

On cherche donc avec  $P$  et  $\neg Q \implies$  absurde Soit  $\overline{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{x_k}, \overline{x_k} \in E \forall k \in \mathbb{N}$ . Supposons par l'absurde que  $\overline{x} \notin E$ ,  $E$  est fermé

ce qui implique que  $\overline{x} \in CE$  où  $CE$  est ouvert dans  $\mathbb{R}^n$ . Par la définition :

$$\exists \delta > 0 : B(\overline{x}, \delta) \subset CE \implies \{\overline{x_k} \forall k \in \mathbb{N}\} \cap B(\overline{x}, \delta) = \emptyset$$

D'autre côté,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{x_k} = \overline{x} \implies \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0, \overline{x_k} \in \overline{B(\overline{x}, \frac{\varepsilon}{2})} \subset B(\overline{x}, \delta)$

*Contraposé, par contraposé* Supposons que  $E$  n'est pas fermé,  $\iff CE$  n'est pas ouvert  
 Alors :  

$$\implies \exists \bar{y} \in CE \forall k \in \mathbb{N}_+ B(\bar{y}, \frac{1}{k}) \cap E \neq \emptyset$$

$$\implies \exists \bar{y}_k \in B(\bar{y}, \frac{1}{k}) \text{ tel que } \bar{y}_k \in E$$
 On a obtenu une suite  $\{\bar{y}_k\}_{k \in \mathbb{N}_+} \subset E$  et  $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{y}_k = \bar{y} \in CE$   

$$\iff \bar{y} \notin E$$

$$\implies \neq Q \text{ Alors } Q \implies P$$

Pour construire l'adhérence  $E$  d'un sous-ensemble non-vidé  $E \subset \mathbb{R}^n$ , il faut et suffit d'ajouter les limites de toutes suites convergentes d'éléments de  $E$ .

**Définition 26** Un sous-ensemble non-vidé de  $\mathbb{R}^n$  est **compact** s'il est fermé et borné

*Exemple* Soit une boule fermée  $\overline{B(\bar{x}, \delta)} = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{y}\| = \delta\}$  Alors  $\overline{B(\bar{x}, \delta)} \subset \overline{B(\bar{o}, \|\bar{x}\| + \delta)}$  est borné. Et donc le sous-ensemble est compact

*Exemple 2*

$$E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : n \geq 2, x_1 = 0\}$$

est fermé, mais non bornée

$$\{\bar{a}_k = (0, k, 0, \dots)\}_{k \in \mathbb{N}}$$

Ici les normes  $\|\bar{a}_k\| = k \in \mathbb{N}$ . Et donc  $CE$  n'est ni borné ni fermé

**Théorème Heine-Borel-Lebesgue**

**Théorème 12** Un sous-ensemble non-vidé  $E \subset \mathbb{R}^n$  est compact  $\iff$  de tout recouvrement de  $E$  par des sous-ensembles dans  $\mathbb{R}^n$  :

$$(E \subset \bigcup_{i \in I} A_i, A_i \subset \mathbb{R}^n \text{ ouverts}, A_i \in I \text{ un recouvrement de } E)$$

On peut extraire une **famille finie** d'ensemble que forment un recouvrement de  $E$  :

$$E \subset \bigcup_{i \in I} A_i \quad A_i \subset \mathbb{R}^n \text{ ouverts} \implies \exists \{A_{i_j}\}_{j=1}^m : E \subset \bigcup_{j=1}^m A_{i_j}$$

Ici on peut prendre un nombre infini d'ensemble qui peut recouvrir un nombre fini d'ensemble. Cela ne marche pas si  $E$  n'est pas compact.

*Exemple 1* Une droite dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  est fermée, pas bornée  $\implies$  qu'elle n'est pas compacte.

*Exemple 2*

Intervalle ouvert dans  $\mathbb{R}$  tel que  $E = ]0, 1[ \subset \mathbb{R}$  n'est pas fermé ce qui implique que notre ensemble  $E$  n'est pas compact

$$E \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} ]0, \frac{i}{i+1}[$$

On ne peut pas choisir un sous recouvrement fini. Car si on prends un nombre fini  $k$  on doit pouvoir s'arrêter à un  $k$  néanmoins ici on n'y arrive pas car on a toujours le nombre  $k+1$

La propriétés d'être compactes est une propriétés très fortes

## Exemple

*Exercice*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(\sin(y-x)) \leq 0\}$$

Il faut démontrer que  $A$  est ouvert.

*Question 6*

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{y \cdot \ln x} < 1\}$$

1. Compact
2. Ouvert et borné
3. ni ouvert, ni fermé et non borné
4. fermé et non borné
5. ouvert et non borné
6. ni ouvert, ni fermé et borné

Pour répondre à cette question, on va prendre tout les cas possibles :

1.  $\ln x \implies x > 0$
2. Soit  $y = 0 \implies \{y = 0, x > 0\} \in S$   
Aussi  $\{x = 1, y \in \mathbb{R}\} \in S$
3. Soit  $y > 0 \implies y \ln x \geq 0 \implies \ln x \geq 0 \wedge x \geq 1$

$$y \ln x < 1 \implies y < \frac{1}{\ln x}$$

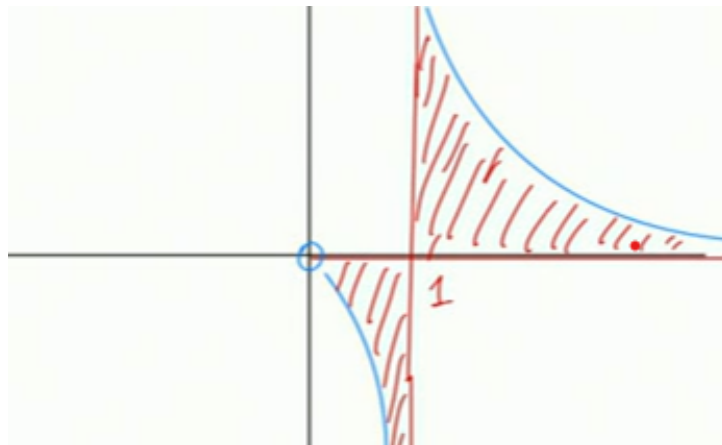
$$\{y > 0, x > 1, y < \frac{1}{\ln x}\} \subset S$$

4. Soit  $y < 0 \implies y \ln x \geq 0 \implies \ln x \leq 0$  Alors :

$$y \ln x < 1 \implies y < \frac{1}{\ln x}$$

$$\{y < 0, 0 < x < 1, y > \frac{1}{\ln x}\}$$

Ce qui donne comme ensemble :



Qui est une droite vertical avec  $x = 1$  entre nos deux droite bleu. Néanmoins les lignes bleu ne sont pas inclus, et comme vu sur l'image l'ensemble tends vers les infinis en  $x = 1$  et donc, il n'est ni fermé ni borné. Et la raison pour laquelle ce n'est pas ouvert, la ligne rouge horizontale et fermé et donc ce n'est pas ouvert.

Attention à faire attention car ici les courbes bleu impliquent que l'ensemble n'est pas fermé mais même si elles étaient fermés, il manquerait quand même le point 0 qui impliquerait que l'ensemble ne serait pas fermé.

## Chapitre 4

# Fonction réelles de plusieurs variables réelles limite et continuité

### 4.0.1 Définition et exemples

**Définition 27** Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  sous-ensemble non-vide,  $n \geq 1$  Une fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  est une application qui envoie chaque point  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in E$  dans  $\mathbb{R}$ .  
 $E$  est le domaine de définition de  $f$  et  $f(E) \subset \mathbb{R}$  est l'ensemble image.

#### Exemple 1

$$f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 - y^2)}$$

#### Exemple 2

$$f(x, y) = 2x + 1$$

Plus généralement :

$$f(x, y) = ax + by + c; \quad a, b, c, \in \mathbb{R}, E = \mathbb{R}^2$$

Comment visualiser cette fonction ?

Soit  $c = 0$

Considérons  $f(x, y) = ax + by$  : Graphique  $F = \{(x, y, z) : ax + by = z\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by - z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x, y, z), (a, b, -1) \rangle = 0\}$   
On a donc un plan dont les valeurs  $a, b, -1$  sont les composantes d'un vecteur orthogonal :  $\bar{n} = (a, b, -1)$  et contenant  $(0, 0, 0)$ .

Soit  $c \in \mathbb{R}$  arbitraire, alors il faut monter le plan par  $c$  unité le long de l'axe  $z$  pour obtenir le graphique de  $f(x, y) = ax + by + c$  Et donc :

$$z = ax + by + c$$

qui est le plan  $\perp \bar{n} = (a, b, -1)$  qui contient  $(0, 0, c)$

Niveau

**Définition 28** Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  et  $c \in f(E)$  Alors  $\mathcal{N}_f(c) = \{\bar{x} \in E : f(\bar{x}) = c\} \subset E$

Exemple 4

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sin(x^2 + y) : E = \mathbb{R}^2 \\ f(E) &= [-1, 1] \end{aligned}$$

Je conseil de taper sur google les fonctions pour avoir une bonne visualisation de ces fonctions :

google.com

On cherche donc les niveaux :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_f(1) &= \{x, y\} \in \mathbb{R}^2 : \sin(x^2 + y) = 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x^2 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

---

Samedi 15 mars 2025 — Cours 9 : Limite est continuité

Rappel

**Définition 29** Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  sous-ensemble non vide,  $n \geq 1$  Une fonction est une application qui envoie chaque point  $\bar{x}_0 = (x_1, \dots, x_n) \in E$  dans  $\mathbb{R}$ .  
 $E$  est le domaine de définition de  $f$  et  $f(E) \subset \mathbb{R}$  est l'ensemble image.

#### 4.0.2 Limites et continuité

**Définition 30** Une fonction **définie au voisinage de  $\bar{x}_0$**  (mais pas nécessairement en  $\bar{x}_0$  tel que

$$[\exists \delta > 0 : B(\bar{x}_0, \delta) \subset E \cup \{\bar{x}_0\}]$$

admet pour **limite** le nombre réel  $l$  lorsque  $\bar{x}$  tend vers  $\bar{x}_0$  si **pour tout  $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tel que pour tout  $\bar{x} \in E$  et  $0 < \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq \delta$ , on a  $|f(\bar{x}) - l| \leq \varepsilon$**

Notation

Pour notre notation on utilise comme à notre habitude :

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l$$

Ici on a la norme  $\|\bar{x} - \bar{x}_0\|$  à la place de la valeur absolue lorsqu'on parlait de fonction à une variable.

## Continuité

**Définition 31** Soit  $\bar{x}_0 \in E$  un point intérieur de  $E$ . Alors  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  est continue en  $\bar{x} = \bar{x}_0$  **si et seulement si**

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0)$$

Exemple 1

$$f(x, y) = 2x + y$$

soit  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  : Alors

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} (x + 2y) = x_0 + 2y_0$$

Soit  $\varepsilon > 0$  alors on cherche  $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |(x + 2y) - (x_0 + 2y_0)|$  si on utilise plus la norme ici et la valeur absolue car on est sur le côté à droite. On utilise l'inégalité triangulaire :

$$\leq |x - x_0| + 2|y - y_0|$$

Ici on peut toujours prendre comme on a que  $\bar{x} - \bar{x}_0$  plus petit que  $\delta$  on doit les gérer ensembles et non séparément. Des lors :  
Dès lors on choisit  $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$

$$\leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + 2\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = 3\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Exemple 2

$$f(x, y) = x \cdot y$$

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Soit  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  Alors  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} x \cdot y = x_0 \cdot y_0$

**Démonstration :**

Le cas où  $x_0 = 0$  est vu en exercice, dès lors, nous traiterons ici le cas où nous supposons que  $x_0 \neq 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$  alors :

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| =$$

$$|y - y_0| \cdot |x| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} |x| \leq \frac{\varepsilon}{2} \implies \delta \leq \frac{\varepsilon}{2|x_0|} (x_0 \neq 0)$$

$$|x - x_0| |y| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \cdot |y| \leq \delta(|y_0| + \delta) \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\implies \delta \leq \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)}$$

On peut choisir comme valeur pour  $\delta$  :

$$\implies \delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{2|x_0|}, \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)}, 1\right) \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

### Caractérisation de la limite à partir des suites convergentes

**Théorème 13** Une fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie au voisinage de  $\overline{x_0}$  admet pour limite  $l \in \mathbb{R}$  lorsque  $\overline{x} \rightarrow \overline{x_0}$  **Si et seulement si** pour toute suite d'éléments  $\{\overline{a_k}\}$  de  $\{\overline{x} \in E : \overline{x} \neq \overline{x_0}\}$ , qui converge vers  $\overline{x_0}$ , la suite  $\{f(\overline{a_k})\}$  converge vers  $l$ .

$$\lim_{\overline{x} \rightarrow \overline{x_0}} f(\overline{x}) = l \iff \lim_{k \rightarrow \infty} f(\overline{a_k}) = l \text{ pour toute suite } \{\overline{a_k}\} \subset E \setminus \{\overline{x_0}\} : \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{a_k} = \overline{x_0}$$

### Démonstration

$\implies P \implies Q$  Comme ce théorème est une équivalence, nous allons devoir prouver les deux sens. Commençons par  $P \implies Q$ . Prenons la définition de la limite à gauche :

$$\lim_{\overline{x} \rightarrow \overline{x_0}} f(\overline{x}) = l \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \overline{x} : 0 < \|\overline{x} - \overline{x_0}\| \leq \delta$$

$$\implies |f(\overline{x}) - l| \leq \varepsilon$$

$$\text{Si on a } \{\overline{a_k}\} : \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{a_k} = \overline{x_0} \implies \text{pour } \delta > 0 \exists k_0 : \forall k \geq k_0$$

$$\implies \|\overline{a_k} - \overline{x_0}\| \leq \delta \implies |f(\overline{a_k}) - l| \leq \varepsilon$$

$$|f(\overline{a_k}) - l| \leq \varepsilon$$

L'idée ici est de prendre le même  $\delta$  sur les deux première lignes.

( $\Leftarrow$ ) par contraposée

Petit rappel pour la contraposée : si on a  $Q \implies P$  alors la contraposée est  $\neg P \implies \neg Q$  donc ici on veut prouver que si la limite n'est pas  $l$  alors la limite de  $f(\overline{a_k})$  n'est pas non plus  $l$ . Supposons donc que  $\lim_{\overline{x} \rightarrow \overline{x_0}} f(\overline{x}) \neq l$  Alors :

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists \overline{x}_\delta : \|\overline{x}_\delta - \overline{x_0}\| \leq \frac{1}{\delta} \text{ et } |f(\overline{x}_\delta) - l| > \varepsilon$$

Dès lors, on peut choisir  $\delta = \frac{1}{k}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  ce qui implique :

$$\exists \overline{x}_k \in E : \|\overline{x}_k - \overline{x_0}\| \leq \frac{1}{k} \text{ et } |f(\overline{x}_k) - l| > \varepsilon$$

On obtient la suite  $\{\overline{x}_k\}_{k=1}^\infty : \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{x}_k = \overline{x_0}$  mais  $|f(\overline{x}_k) - l| > \varepsilon \forall k \in \mathbb{N}^*$  Dès lors

$$\implies f(\overline{x}_k) \neq l$$

*Idee générale de la preuve*

Ici on prends  $P$  et **Ensuite**  $\neg P$  il est important de pouvoir différencier les deux et de pouvoir construire  $\neg P$  à partir de  $P$ .

### Opération algébrique

Soit  $f, g$  deux fonctions :  $E_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\lim_{\overline{x} \rightarrow \overline{x_0}} f(\overline{x}) = l_1$  et  $\lim_{\overline{x} \rightarrow \overline{x_0}} g(\overline{x}) = l_2$  Alors :



1.  $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} (\alpha f + \beta g)(\bar{x}) = \alpha l_1 + \beta l_2$
2.  $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} (f \cdot g)(\bar{x}) = l_1 \cdot l_2$
3. Si  $l_2 \neq 0$ , alors  $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} (\frac{f}{g})(\bar{x}) = \frac{l_1}{l_2}$

*Conclusion*

Tous les polynômes en plusieurs variables et toutes les fonctions rationnelles sont continues sur leur domaines de définition,

La caractérisation de la limite à partir des suites convergentes est pratique pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en  $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ .

*Exemple 1*

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Soit  $\bar{a}_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \rightarrow (0, 0)$  qui implique donc pour la limite :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{a}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2}$$

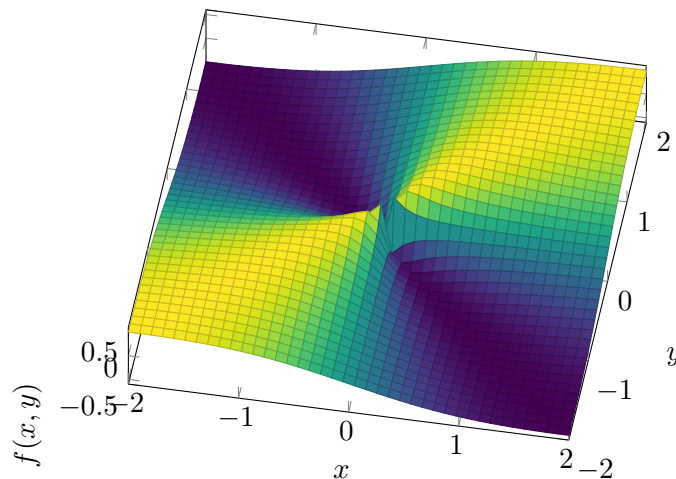
Dès lors, on peut aussi prendre  $\bar{b}_k = (\frac{1}{k}, 0) \rightarrow (0, 0)$  qui par le même procédé :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{b}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0 \cdot \frac{1}{k}}{0 + \frac{1}{k^2}} = 0$$

Et donc, par la caractérisation à partir des suites,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  ne peut pas exister.

On peut aussi prendre une autre suite du genre  $\bar{c}_k = (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{c}_k) = -\frac{1}{2}$

Alors quelle est la limite  $f(x, y)$  en  $(0, 0)$



Proposition

**Théorème 14** Soit  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  définie au voisinage de  $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ . Alors  $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l$  si et seulement si pour toute courbe  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que :

$$\Upsilon([a, b]) \subset D \setminus \{\bar{x}_0\} \text{ et } \lim_{t \rightarrow a^*} y(t) = \bar{x}_0, \text{ on a } \lim_{t \rightarrow a^+} f(y(t)) = l$$

On ne peut pas calculer la limite d'une fonction de plusieurs variable en faisant de manière consecutive par rapport à chaque variable.

Exemple 2

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Alors on prends deux fonctions ; :

$$y_1(t) = (t, 0)$$

$$y_2(t) = (0, t)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\gamma_1(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 - 0}{t^2 + 0} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - t^2}{0 + t^2} = -1$$

Et donc la fonction n'a pas de limite en ce point.

Exemple 3

soit :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \\ 0 \end{cases}$$

En prenant les mêmes fonctions :

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \implies \lim_{t \rightarrow 0} \gamma_1(t) = \bar{0}, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 + 0}{t^2 + 0} = 0$$

$$\gamma_2(t) = (0, t) \implies \lim_{t \rightarrow 0} \gamma_2(t) = \bar{0}, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - t^3}{0 + t^2} = 0$$

$$\gamma_3(t, t) \implies \lim_{t \rightarrow 0} \gamma_3(t) = \bar{0}, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 + t^2}{t^2 + t^1} = 0$$

On voit ici que ces fonctions ont toute la même limite, et si on prenait n'importe quelle autre fonction la limite existerait toujours. **Hypothèse**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \bar{0}$

### Méthode de changement de variables polaires

On peut démontrer l'existence de cette limite par le changement de variables en coordonnées polaires. :

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \text{ si } r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \\ y &= r \sin \varphi \text{ si } r \neq 0\end{aligned}$$

Alors on a :

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \implies f(r, \varphi) = \frac{r^3 \cos^3 \varphi + r^3 \sin^3 \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} \\ &= \frac{r^2 (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)}{r^2} \\ &= r (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)\end{aligned}$$

Ici,  $\varphi(r)$  est une fonction inconnue, elle pourrait être n'importe quoi.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= \lim_{r \rightarrow 0} \Phi(r, \varphi) \\ \lim_{r \rightarrow 0} |r (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)| &= 0 \\ \implies \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= 0\end{aligned}$$

Cette méthode est efficace pour montrer l'existence des limites pour des fonctions de seulement deux variables, et qui tendent vers  $(0, 0)$  tel que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$

### Théorème des 2 gendarmes

**Théorème 15** Soit  $f, g, h : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

1.  $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} g(\bar{x}) = l$
2. Il existe  $\alpha > 0$  pour tout  $x \in \{x \in E : 0 < ||\bar{x} - \bar{x}_0|| \leq \alpha\}$  on a :

$$f(\bar{x}) \leq h(\bar{x}) \leq g(\bar{x})$$

Alors :

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} h(\bar{x}) = l$$

### Critère des 2 gendarmes en coordonnées polaires

*Proposition* Soit  $D \subset \mathbb{R}^2, f : D \rightarrow \mathbb{R}$  définie au voisinage de  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Alors

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = l \text{ si et seulement si}$$

$$\exists \delta > 0 \text{ et } \varphi : ]0, \delta[ \rightarrow \mathbb{R} :$$

- $\forall \varphi \in [0, 2\pi] \implies |f(x_0, r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) - l| \leq \varphi(r)$
- $\lim_{r \rightarrow 0^+} \varphi(r) = 0$

Exemple 5      soit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4xy^2}{x^2+y^2+3y^4} \\ 0 \end{cases}$$

$$f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{4r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi}{r^2 + 3r^4 \cos^4 \varphi} = \frac{4r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi}{r^2(1 + 3r^2 \sin^4 \varphi)}$$

$$|f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - 0| = \frac{4r^3 |\cos \varphi \sin^2 \varphi|}{r^2 |1 + 3r^2 \sin^4 \varphi|}$$

On sait ici que la partie du numérateur (la partie en haut j'ai un doute) est toujours plus petite ou égale à 1 et la partie du bas plus grande ou égale à 1. ce qui nous donne :

$$\leq \frac{4r^3}{r^2} = 4r = \Phi(r)$$

Alors

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Phi(r) = 0$$

Ce qui par les 2 gendarmes en coordonnées polaires nous donne :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = (0, 0)$$

**Question à la fin du cours (Question 7)**

Soit les fonctions

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos(xy)(x^2 + \sin(y^2))}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{Autrement} \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^4}{y^2 + x^4 + x^6}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}$$

La question est quelle fonction est continue en  $(0, 0)$  ?

Solution

On passe d'abord en coordonnées polaire :

$f(x, y)$

$$f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{\cos(r^2 \sin \varphi \cos \varphi)(r^2 \cos \varphi + \sin(r^2 \sin^2 \varphi))}{r}$$

On prend ensuite la limite :

$$\begin{aligned}
 |f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - 0| &= \frac{|\cos(r^2 \sin \varphi \cos \varphi)| |r^2 \cos \varphi + \sin(r^2 \sin^2 \varphi)|}{r} \\
 &\leq \frac{\overbrace{r^2 \cos \varphi}^{\geq r^2} + \underbrace{|\sin(r^2 \sin^2 \varphi)|}_{\leq |r^2 \sin^2 \varphi| \leq r^2}}{r} \\
 &\leq \frac{2r^2}{r} = 2r
 \end{aligned}$$

Et donc ici on voit que la limite de la fonction va bien vers 0. ON peut aussi le "deviner" en voyant un  $r$  tout seul en bas et une  $r^2 \cos \dots$  en haut. Cela peut donner quelque indice.

*Solution*  
 $g(x, y)$

Pour cette fonction on refait le même procédé mais avant on va tester les limites du type  $\lim_{t \rightarrow 0} g(0, t)$  et aussi  $\lim_{t \rightarrow 0} g(t, 0)$  et on voit qu'elle ne donne pas la même réponse et que donc, la limite n'existe pas.

### Mercredi 19 mars 2025 — Cours 10 : Limites de fonctions

#### Rappel

Voici un petit tappel sur les méthodes de calcul des limites de fonction  $f : E_{\mathbb{C}\mathbb{R}^2} \rightarrow \mathbb{R}$

1. s'il existent 2 suites  $\overline{a}_k$  et  $\overline{b}_k \subset E \setminus \{\overline{x}_0\} : \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{a}_k = \overline{x}_0, \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{b}_k = \overline{x}_0$  et que,  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\overline{a}_k) \neq \lim_{k \rightarrow \infty} f(\overline{b}_k)$  Alors la limite

$$\lim_{\overline{x} \rightarrow \overline{x}_0} f(\overline{x})$$

n'existe pas

2. S'il existent 2 courbe  $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow E \setminus \{\overline{x}_0\}$  tel que :

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \gamma_1(t) = \lim_{t \rightarrow a^+} \gamma_2(t) = \overline{x}_0$$

Et que :

$$\lim_{t \rightarrow a^+} f(\gamma_1(t)) \neq \lim_{t \rightarrow a^+} f(\gamma_2(t))$$

Alors, la limite  $\lim_{\overline{x} \rightarrow \overline{x}_0} f(\overline{x})$  n'existe pas.

3. Deux gendarmes : soit  $f, g, h : E \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\lim_{\overline{x} \rightarrow \overline{x}_0} f(\overline{x}) = \lim_{\overline{x} \rightarrow \overline{x}_0} g(\overline{x}) = l$$

Et que  $\exists \alpha > 0 : \forall x \in E : 0 < ||\overline{x} - \overline{x}_0|| < \alpha$  on a

$$f(\overline{x}) \leq h(\overline{x}) \leq g(\overline{x})$$

Alors,  $h(\overline{x}) = l$

4. Coordonnées polaires :  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors  $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = 0 \iff \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$  **Ici  $\varphi = \varphi(r)$  est une fonction inconnue de  $r$**

5. Deux gendarmes en coordonnées polaires :  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = l \iff \exists \delta > 0 \text{ et } \Phi : ]0, \delta[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall \varphi \in [0, 2\pi], \quad \forall r \in ]0, \delta[ \text{ on a } |f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - l| \leq \Phi(r)$$

$$\text{et } \lim_{r \rightarrow 0^+} \Phi(r) = 0$$

**Développement limité** Pour calculer des limites, on peut aussi utiliser les DL connus pour les fonctions d'une seule variable pour trouver des estimations pour les deux gendarmes. Notamment, dans les limites lorsque  $\|(x, y) - (0, 0)\| \rightarrow 0$  on peut remplacer des expressions  $\Phi(x)$ ,  $\varphi(x)$  par leur DL autour de  $x = 0$  ou  $y = 0$  :

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k + t^n \cdot \varepsilon(t) \quad \text{1 seule variable}$$

$$x(y) = \sum_{k=0}^n b_k y^k + y^n \cdot \varepsilon(y), \dots$$

On peut composer une fonction d'une seule variable

*Proposition* Soit  $D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $(x_0, y_0) \in D$ ,  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  définie au voisinage de  $(x_0, y_0)$ , telle que

---

Lundi 24 mars 2025 — Cours 11 : Differentiable

## Méthode 7 Ré- currence

<i>Le principe fondamental de récurrence</i>	Soit $S \subset \mathbb{N}$ sous-ensemble : $0 \in S$ et pour tout $n \in S$ on a $(n+1) \in S$ . Alors $S = \mathbb{N}$
<i>Méthode de récurrence</i>	Soit $P(n)$ une proposition qui dépend de $n \in \mathbb{N}$ , $n \geq n_0$ Supposons que <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>P(n_0)</math> est vraie</li> <li>• <math>P(n)</math> implique <math>P(n+1)</math> pour tout <math>n \geq n_0</math> naturel</li> </ul> Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$

On regroupe quatre étapes pour une preuve par récurrence :

1. La proposition ( Soit  $P(n)$  la proposition pour  $x$ )
2. L'initialisation  $P(0)$
3. L'hérédité : Supposons que  $P(n)$  est vrai, alors il faut en déduire  $P(n+1)$
4. Conclusion : Puisque  $P(x_0)$  est vraie et que pour tout  $x \geq x_0$ ,  $P(n) \implies P(n+1)$ , par récurrence  $P(n)$  est vraie  $\forall n \geq x_0$ .

Attention à ne pas mélanger ce qu'on veut et ce qu'on a.

**Récurrance  
généralisée**

Soit  $P(n)$  une proposition qui dépend de  $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ .

Supposons que (1)  $P(n_0), \dots, P(n_0 + k)$  sont vraie pour un  $k \in \mathbb{N}$

En deuxième  $\{P(n), P(n+1), \dots, P(n+k)\}$  impliquent  $P(n+k+1) \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$ .

Alors,  $P(n)$  est vraie  $\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$





## Chapitre 5

# Calcul différentielle des fonctions de plusieurs variables

### 5.1 Dérivées partielles, le gradient

Dérivée partielle

**Définition 32** Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction,  $E \subset \mathbb{R}$  sous-ensemble ouvert.

Soit  $g(s) = f(a_1, a_2, \dots, \overbrace{s}^k, a_{k+1}, \dots, a_n)$  où  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in E$ .

$$g : D = \{s \in \mathbb{R} : (a_1, a_2, \dots, s, a_{k+1}, \dots, a_n) \in E\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Alors si  $g$  est dérivable en  $a_k \in D$ , on dit que la ***k*-ième dérivée partielle** de  $f$  en  $\bar{a} \in E$  existe et est égale à  $g'(a_k)$

$$\text{Notation : } \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) \equiv D_k f(\bar{a})$$

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(a_k + t) - g(a_k)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{e}_k) - f(\bar{a})}{t}$$

Gradient

**Définition 33** Si toutes les dérivées partielles existent en  $\bar{a} \in E$  :  $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{a}) \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a})$ , alors on définit le **gradient** de  $f$  en  $\bar{a}$  comme :

$$\nabla f(\bar{a}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) \right)$$

## 5.2 Dérivée directionnelle

**Définition** Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  sous-ensemble ouvert,  $\bar{a} \in E$ ,  $\bar{v} \in \mathbb{R}^n, \bar{v} \neq 0$  La droite passant par  $\bar{a}$  en direction  $\bar{v}$  admet la paramétrisation  $\bar{e}(t) = \bar{a} + t\bar{v}$  et cela  $\forall t \in \mathbb{R}$ .  
Considérons la fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$   
et soit  $g(t) = f(\bar{a} + t\bar{v})$  la fonction d'une seule variable  $t \in \mathbb{R}$  :

$$g : D = \{t \in \mathbb{R} : \bar{a} + t\bar{v} \in E\} \rightarrow \mathbb{R}$$

**Définition 34** Si  $g$  est dérivable en  $t = 0$  on dit qu'il existe **la dérivée directionnelle** de  $f$  en  $\bar{a}$  suivant le vecteur  $\bar{v}$  (en direction de  $\bar{v}$ )  
La dérivée directionnelle de  $f$  en  $\bar{a}$  en direction de  $\bar{v}$  est :

$$Df(\bar{a}, \bar{v}) = \frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{v}) - f(\bar{a})}{t}$$

Si  $\bar{v} = \bar{e}_i$  ou  $\bar{e}_i$  est un vecteur unitaire, Alors

$$Df(\bar{a}, \bar{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})$$

Si toutes les dérivées directionnelles existent en  $\bar{a}$  (pour tout  $\bar{v} \neq \bar{0}$ ), alors toutes les dérivées partielles existent en  $\bar{a}$ . La réciproque est fausse en générale

$$Df(\bar{a}, \lambda \bar{v}) = \lambda \cdot Df(\bar{a}, \bar{v}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \neq 0$$

## 5.3 Dérivabilité et la différentielle

**Définition 35** Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subset \mathbb{R}^n$  ouvert,  $\bar{a} \in E$   
On dit que  $f$  est **dérivable** au point  $\bar{a}$  s'il existe une transformation linéaire :

$$L_{\bar{a}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

et une fonction  $r : E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$f(x) = f(\bar{a}) + L_{\bar{a}}(x - \bar{a}) + r(x) \quad \forall x \in E$$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{a}} \frac{r(x)}{\|x - \bar{a}\|} = 0$$

**Définition 36**  $L_{\bar{a}}$  s'appelle **la différentielle** de  $f$  au point  $\bar{a} \in E$

Notation :

$$L_{\bar{a}} = df(\bar{a})$$

Une transformation linéaire  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction telle que  $\tau(\alpha\bar{x}_1 + \beta\bar{x}_2) = \alpha T(\bar{x}_1) + \beta T(\bar{x}_2)$  pour tout  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ . Par exemple  $x + 3y$  est une transformation linéaire tandis que  $x + 2y + 2$  n'en est pas une.

---

Mercredi 26 mars 2025 — Cours 12 : Tangente de la surface

### Rappel

**Définition 37** Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subset \mathbb{R}^n$  ouvert,  $a \in E$ .

On dit que  $f$  est dérivable au point  $\bar{a}$  s'il existe une transformation linéaire  $L_{\bar{a}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et une fonction  $r : E \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

$$f(\bar{x}) = f(\bar{a}) + L_{\bar{a}}(\bar{x} - \bar{a}) + r(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in E$$

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \frac{r(\bar{x})}{\|\bar{x} - \bar{a}\|} = 0$$

### Théorème 1

**Théorème 16** Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{a} \in E$  tel que  $f$  est dérivable en  $\bar{a}$  de différentielle  $L_{\bar{a}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors :

- $f$  est continue en  $\bar{a} \in E$
- Pour tout  $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{v} \neq \bar{0}$ , la dérivée directionnelle  $Df(\bar{a}, \bar{v})$  existe et

$$Df(\bar{a}, \bar{v}) = L_{\bar{a}}(\bar{v})$$

- Toutes les dérivées partielles existent de  $f$  en  $\bar{a}$  et

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) = L_{\bar{a}}(\bar{e}_k)$$

Le gradient de  $f$  existent en  $\bar{a}$  et :

$$\nabla f(\bar{a}) = (L_{\bar{a}}(\bar{e}_1), L_{\bar{a}}(\bar{e}_2), \dots, L_{\bar{a}}(\bar{e}_n))$$

- Pour tout  $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{v} \neq \bar{0}$

$$Df(\bar{a}, \bar{v}) = L_{\bar{a}}(\bar{v}) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{v} \rangle$$

- Pour tout  $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|\bar{v}\| = 1$ , on a que :

$$Df(\bar{a}, \bar{v}) \leq \|\nabla f(\bar{a})\|$$

Et que si :

$$Df\left(\bar{a}, \frac{\nabla f(\bar{a})}{\|\nabla f(\bar{a})\|}\right) = \|\nabla f(\bar{a})\|$$

Alors le gradient donne la direction de la plus grande croissance de  $f$  en  $\bar{a}$

### Equation du plan tangent de la surface

**Définition 38** Soit  $\bar{a} : F(\bar{a}) = 0$ ,  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable en  $\bar{x} = \bar{a}$  et  $\nabla F(\bar{a}) \neq 0$  :  
L'équation de l'hyperplan tangent à  $F(\bar{x}) = 0$  au point  $\bar{a}$  est :

$$\langle \nabla F(\bar{a}), (\bar{x} - \bar{a}) \rangle = 0$$

Et si  $F(a, b, c) = 0$  et  $\nabla F(a, b, c) \neq 0$  Alors :

$$\langle \nabla F(a, b, c), (x - a, y - b, z - c) \rangle = 0$$

Ce qu'on fait en "gros" c'est de prendre le gradient qui donne le vecteur normal au plan tangent qui a donc dans ces coordonnées les valeurs pour l'équation cartésienne du plan, et on fait comme un changement de référentiel pour pouvoir avoir le 0 du plan à l'endroit où il touche le point, c'est de là que provient le  $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ .

## Résumé

Dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{e}_k) - f(\bar{a})}{t}$$

si la limite existe,  $\bar{e}_k = (0, \dots, \overbrace{1}^k, \dots, 0)$ .  
Le gradient :

$$\nabla f(\bar{a}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) \right)$$

Dérivée directionnelle

$$Df(\bar{a}, \bar{v}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{v}) - f(\bar{a})}{t}$$

Si la limite existe,  $\bar{v} \in \mathbb{R}^n, \bar{v} \neq \bar{0}$ .

- $Df(\bar{a}, \bar{e}_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a})$  si  $Df(\bar{a}, \bar{v})$  existent pour tout  $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$
- Si  $f$  est dérivable en  $\bar{a}$ , alors par le théorème 1,  $f$  est continue en  $\bar{a}$ ,  $Df(\bar{a}, \bar{v})$  existe, et on a :

$$L_{\bar{a}}(\bar{v}) = Df(\bar{a}, \bar{v}) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{v} \rangle$$

## Théorème deux

**Théorème 17** Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  ouvert,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{a} \in E$ . Supposons qu'il existe  $\delta > 0$  tel que toutes les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x})$  existent sur  $B(\bar{a}, \delta)$  et sont continues en  $\bar{a}$ . Alors  $f$  est dérivable en  $\bar{a} \in E$

Lundi 7 avril 2025 — Cours 13 : Jacobienne

5.3.1 Fonction à valeur dans  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$ , la matrice jacobienne

**Définition 39** Plus généralement, on peut considérer les fonctions :

$$\bar{f} : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ f_2(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

Chaque fonction  $f_i$  est une fonction réelle de  $n$  variables réelles.

**Dérivée** La  $k$ -ième dérivée partielle de  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$  en  $\bar{a} \in E$  est :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) \end{pmatrix}$$

---

Lundi 14 avril 2025 — Cours 17 : Jacob

**Rappel** Pour rappel des semaine précédentes

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$$

$$\implies J_{\bar{f} \cdot \bar{g}(\bar{a})} = J_{\bar{f}(\bar{g}(\bar{a}))} \cdot J_{\bar{g}(\bar{a})}$$

alors :

$$F'(t) = f(g(t), t) \cdot g'(t) - f(h(t), t) \cdot h'(t) + \int_{h(t)}^{g(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

*Exemple*

Si nous prenons une fonctions qui ne s'exprime en fonctions élémentaires :

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx$$

On a que :

$$\begin{aligned} I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} dx &\implies I'(\alpha) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^\alpha \cdot \ln x}{\ln x} dx \\ &= \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1} \end{aligned}$$

Et ensuite on peut résoudre tout cela

Tout cela ne se retrouve pas à l'examen

### 5.3.2 Formule de Taylor

**Théorème**

**Théorème 18** Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^{p+1}$  au voisinage de  $\bar{a} \in E$ . Alors il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x \in B(\bar{a}, \delta) \cap E$  il existe  $0 < \theta < 1$  tel que :

$$f(\bar{x}) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \cdots + \frac{1}{p!}F^{(p)}(0) + \frac{1}{(p+1)!}F^{(p+1)}(\theta)$$

*Explication*  $f(\bar{x}) = F(1), f(\bar{a}) = F(0)$  Depuis analyse I on sait que, la formule de Taylor pour  $F(t)$ , fonction d'une seule variable

$$F(t) = F(0) + F'(0) \cdot t + \frac{1}{2}F''(0) \cdot t^2 + \dots + \frac{1}{p!}F^{(p)}(0) \cdot t^p + \frac{1}{(1+p)!}F^{(p+1)}(\theta) \cdot t^{p+1}$$

$$\implies f(\bar{x}) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \dots \text{ Même chose}$$

On a donc ici :

$$F'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t(\bar{x} - \bar{a})) - f(\bar{a})}{t} = Df(\bar{a}, (\bar{x} - \bar{a}))$$

**Cas  $n = 2$**

Soit  $\bar{a} = (a, b), \bar{x} = (x, y), f$  de classe  $C^{p+1}$

Soit  $f(x, y) : E \rightarrow \mathbb{R}$ , on cherche le polynôme de Taylor d'ordre  $p$  autour de  $(a, b)$ .

Par le changement de variable :  $F(t) = f(a + t(x - a), b + t(y - b))$ . Trouver  $F'(t), F''(t)$  en termes de  $f$ .

$$F(t) = f \circ g(t), f_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, g(t) = (a + t(x - a), b + t(y - b))^T$$

$$\implies F'(t) = J$$

**Question 15**

soit  $f(x, y) = \frac{1}{\sin(x+y)}$  Et le coefficient de  $(x - \frac{\pi}{2})^2 y^2$  dans le polynôme de Taylor d'ordre 4 autour de  $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, 0)$  est :

- $\frac{1}{24}$
- $\frac{5}{4}$
- $\frac{5}{24}$
- $\frac{5}{6}$

donc si on a  $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, 0)$  si on regarde  $\sin(\frac{\pi}{2} + 0) = 1$  et donc on ne peut pas faire un développement limité. On prends donc  $s = (x - \frac{\pi}{2}, y)$  afin de pouvoir utiliser les développement limité :

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \varepsilon(x^4)$$

Pour un développement d'ordre 4. On pose :

$$\sin(\frac{\pi}{2} + s) = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2} \cos s + \cos \frac{\pi}{2} \sin s} = \frac{1}{\cos s} = \frac{1}{1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{4!}\varepsilon(s^4)}$$

$$= \frac{1}{1 - (\frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{4!} + \varepsilon(s^4))}$$

On obtient donc pour le polynôme :

$$P_4 = 1 + (\frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{4!}) + (\frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{4!})^2$$

On pose donc pour  $\frac{1}{\sin(s)}$  :

$$f(x, y) = \frac{1}{(x - \frac{\pi}{2} + y - \frac{1}{6}(x - \frac{\pi}{2} + y)^3)}$$