Corrigé exa 2021

Arthur Herbette

Dimanche 08 juin 2025

Question 1 En premier lieu on voit que dans l'ensemble A on a que z est "libre". Dans l'ensemble B, $z > 1$ est obligatoire. l'intersection des deux ensemble oblige notre $z > 1$ mais c'est tout. Il peut donc tendre vers l'infini. Dès lors l'intersection n'est pas borné.

Question 2 Ici on utilise lagrange comme d'habitude

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= (y, x + 2z, 2y) \\ \nabla g(x, y, z) &= (2x, 2y, 2z)\end{aligned}$$

On a donc:

$$\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x + 2z = 2\lambda y \\ 2y = 2\lambda z \end{cases}$$

Si on prends $\lambda \neq 0$ on a donc (en mettant la première équation dans la troisième):

$$2\lambda x = \lambda z \implies x = \frac{z}{2}$$

Ce qui nous amène ensuite aussi on remplace $2y$ par $2\lambda z$:

$$\begin{aligned}\frac{z}{2} + 2z &= \lambda^2 z \\ \frac{1}{2} + 2 &= \lambda^2 \\ \frac{5}{2} &= \lambda^2 \\ \lambda &= \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

Attention!, ici on assume que $z \neq 0$, il faudra le tester plus tard au besoin.
On a maintenant une nouvelle relation:

$$\begin{cases} y = \sqrt{5}x \\ x + 2z = \sqrt{5}y \\ 2y = \sqrt{5}z \end{cases}$$

Qui est plus simple à résoudre:

$$\begin{aligned}x + 2z &= \sqrt{5}\sqrt{5}x \\ x + 2z &= 5x \\ z &= 2x\end{aligned}$$

On peut remplacer dans la contrainte:

$$\begin{aligned}x^2 + 5x^2 + 4x^2 &= 1 \\ 10x^2 &= 1 \\ x^2 &= \frac{1}{10} \\ x &= \pm\frac{1}{\sqrt{10}}\end{aligned}$$