

Analyse II

Arthur Herbette
Prof. Lachowska Anna

Samedi 31 mai 2025

Table des matières

1	Introduction	7
2	Equations différentielles ordinaires	9
2.1	Introduction aux équation différentielles	9
2.2	Existence et unicité d'une solution de EDVS	10
	Introduction aux méthodes de démonstration	11
2.2.1	Théorème Existence et unicité d'une solution de EDVS	12
2.2.2	Solution maximale	13
2.3	Equation différentielle linéaire du premier ordre (EDL1)	13
2.3.1	Principe de superposition de solutions, variation de la constante	14
2.3.2	Théorème à savoir pour l'examen	15
	Rappel : Equation différentielles linéaires du premier ordre (EDL1)	15
2.3.3	Application de EDVS (EDL1) : Croissance et décroissance exponentielle	18
	Méthodes de démonstration : Disjonction des cas	18
	Méthode de démonstration : équivalence	19
2.4	Equation différentielle du second ordre	20
2.4.1	Unicité d'un EDL2	22
2.4.2	Rappel : Equation différentielle linéaires du second ordre (EDL2)	23
2.4.3	Caractérisation des 2 solutions de EDL2 linéairement indépendante	24
2.4.4	Démonstration à savoir	24
2.4.5	Théorème aussi à savoir	25
2.4.6	Méthode de résolution de EDL2	29
2.4.7	Méthode de démonstration par l'absurde	32
3	Espace \mathbb{R}^n	35
3.0.1	\mathbb{R}^n espace vectoriel normé	35
3.0.2	Sous-ensemble ouverts et fermés de \mathbb{R}^n	36
3.0.3	Méthodes de démonstration : Démonstration par le principe des tiroirs	39
3.0.4	L'adhérence et la frontière d'un sous-ensemble \mathbb{R}^n	40
3.0.5	Suites d'éléments de \mathbb{R}^n et la topologie de \mathbb{R}^n	41
4	Fonction réelles de plusieurs variables réelles limite et continuité	45
4.0.1	Définition et exemples	45
4.0.2	Limites et continuité	46
5	Calcul différentielle des fonctions de plusieurs variables	57
5.1	Dérivées parielles, le gradient	57
5.2	Dérivée directionnelle	58
5.3	Dérivabilité et la différentielle	58

	Equation du plan tangent de la surface	60
5.3.1	Fonction à valeur dans \mathbb{R}^m , $m \geq 1$, la matrice jacobienne	61
5.3.2	Formule de Taylor	62
	Le laplacien d'une fonction de classe C^2	64
5.3.3	Extrema d'une fonction à plusieurs variables	64
5.3.4	Corrigé du test blanc	69
5.3.5	Théorème des fonctions implicites	76
5.3.6	Application de TFI Equation d'un (hyper plan tangent à la surface définie par une équation	79
5.3.7	Extrema liés. Méthode des multiplicateurs de Lagrange	82
	Rappel Extrema liés. Méthode des multiplicateur de Lagrange	83
5.4	Résumé : Méthode de démonstration	87
6	Calcul d'intégrale des fonctions de plusieurs variables	91
6.1	Intégrale sur un pavé fermé	91
6.1.1	Théorème de Fubini sur un pavé fermé	93
6.1.2	Intégrale sur un domaine bornée	96
6.1.3	Théorème de Fubini pour les intégrales triples	101
6.1.4	Changement de variables dans une intégrale multiple	104
	Conclusion : changement de variable polaires	106
	Coordonnées sphérique	109
	Application : masse totale d'un objet solide	110
	Rappel : Méthode d'intégration des fonctions de plusieurs variables	111
7	Fin du cours, Révision	117
7.1	Intégrale	117

Liste des cours

Cours 1 : Equa Diff — Lundi 17 février 2025	9
Cours 2 : EDO — Mercredi 19 février 2025	12
Cours 3 : EDL1 Et Méthode de démonstration — Lundi 24 février 2025	15
Cours 4 : EDL2 — Mercredi 26 février 2025	20
Cours 5 : Equation différentielle — Lundi 3 mars 2025	23
Cours 6 : EDL2 — Jeudi 6 mars 2025	29
Cours 7 : Espace \mathbb{R}^n — Lundi 10 mars 2025	33
Cours 8 : Suite d'élément de \mathbb{R}^n — Mercredi 12 février 2025	39
Cours 9 : Limite et continuité — Samedi 15 mars 2025	46
Cours 10 : Limites de fonctions — Mercredi 19 mars 2025	53
Cours 11 : Differentiable — Lundi 24 mars 2025	54
Cours 12 : Tangente de la surface — Mercredi 26 mars 2025	59
Cours 13 : Jacobienne — Lundi 7 avril 2025	61
Cours 17 : Jacob — Lundi 14 avril 2025	62
Cours 18 : Cours — Mercredi 16 avril 2025	64
Cours 19 : Test blanc — Lundi 28 avril 2025	69
Cours 20 : Test blanc ou pas — Mercredi 30 avril 2025	73
Cours 21 : TFI — Lundi 5 mai 2025	78
Cours 22 : Méthode de Lagrange — Mercredi 7 mai 2025	83

Cours 23 : Intégrale à plusieurs variables — Lundi 12 mai 2025	91
Cours 24 : Intégrale sur un domaine borné — Mercredi 14 mai 2025	94
Cours 25 : Intégrales sur intégrales — Lundi 19 mai 2025	100
Cours 26 : Examen final approche — Mercredi 21 mai 2025	105
Cours 27 : Dernier cours ??? — Lundi 26 mai 2025	111

Chapitre 1

Introduction

Ce document a été écrit en utilisant Latex et vim, le style utiliser de pour ce document a été directement tirée des note de Joachim Favre (avec quelque modifications) qui m'ai aussi aidé pour le setup vim donc merci, Pour ce qui est de comment prendre les notes je renvoie <https://castel.dev/post/lecture-notes-1/> qui explique vraiment bien. Ces notes sont prise durant le cours, mais avec quand même des rajoutes après, avec quelque complément etc.. La matière expliquée provient des cours et non de moi, les explications proviennent des livres, slide et des professeurs directement.

J'ai aussi pas mal changé la façon dont je prenais mes notes durant le semestre, donc c'est normal que par exemple au début il n'y a que la théorie et non des exemples (il me semble que j'ai mis un résumé avec des exemples vers le milieu du semestre d'equa diff), il y a des peut être des fautes, donc, **attention**.

Chapitre 2

Equations différentielles ordinaires

Lundi 17 février 2025 — Cours 1 : Equa Diff

2.1 Introduction aux équation différentielles

Définition 1 Une *équation différentielle ordinaire* est une expression

$$E(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

où E est une expression fonctionnelle, $n \in \mathbb{N}_0$, et $y = y(x)$ est une fonction inconnue de x . On cherche un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n telle que l'équation donnée est satisfaite $\forall x \in I$.

Equation à variable séparées

Une équation à variables séparées est une équation du type $f(y) \cdot y' = g(x)$ est une **EDVS** où :

- $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$
- $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $J \subset \mathbb{R}$

Une fonction $y : J' \subset J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C' satisfaisant l'équation $f(y) \cdot y' = g(x)$ est une solution

*Remarque
personnelle*

Ce type d'équation se résoudre relativement “rapidement” car on peut transformer le y' en $\frac{dy}{dx}$ et “mettre le dx de l'autre côté” :

$$f(y) \cdot \frac{dy}{dx} = g(x) \implies \int f(y) dy = \int g(x) dx$$

Et il suffit donc d'intégrer les deux côtés et le tour est joué.

Terminologie

Définition 2 Soit $E(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$ (*) une équation différentielle (ED) :

- un nombre naturel $n \in \mathbb{N}_+$ est **l'ordre** de l'équation (*) si n est l'ordre maximal de dérivée de $y(x)$ dans l'équation.
- Si (*) est de la forme $\alpha_0(x)y + \alpha_1(x)y' + \alpha_2(x)y'' + \dots + \alpha_n(x)y^{(n)} = b(x)$ alors l'équation est dite **linéaire** où $\alpha_i(x)$, $b(x)$ sont des fonctions continues
- Si l'expression (*) ne contient pas de x l'équation (*) est dite **autonome**

Problème de Cauchy

Définition 3 Résoudre **Le problème de Cauchy (ED avec des conditions initiales)** pour l'équation $E(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ c'est de trouver l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^n(I)$, telle que $E(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$ sur I et $y(x_0) = b_0$, $y(x_1) = b_1, \dots, y'(x_2) = \dots$

Le nombre des conditions initiales dépend du type de l'ED

C'est ce qui se passe en physique lorsqu'on parle de mécanique et que l'on cherche la position au cours du temps (à partir du principe fondamental de la dynamique) :

$$\begin{aligned} ma &= F \\ a &= \frac{F}{m} \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{F}{m} \\ x &= \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 + c_1 t + c_0 \end{aligned}$$

Et le but est de trouver ces constantes qui sont les conditions initiales.

Définition 4 Une solution d'un problème de Cauchy est **maximale** si elle est définie sur le plus grand intervalle possible.

2.2 Existence et unicité d'une solution de EDVS

Théorème

Théorème 1 *Soit*

- $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(y) \neq 0 \ \forall y \in I$
- $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout couple $(x_0 \in J, b_0 \in I)$, l'équation $f(y) \cdot y' = g(x)$ admet une solution $y : J' \subset J \rightarrow I$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = b_0$

Si $y_1 : J_1 \rightarrow I$ et $y_2 : J_2 \rightarrow I$ sont deux solutions telles que $y_1(x_0) = y_2(x_0) = b_0$, alors $y_1(x) = y_2(x)$ pour tout $x \in J_1 \cap J_2$
(Démonstration la prochaine fois)

Ce que dit ce théorème en français est :

Si on a une équation différentielle séparable alors :

- Tu peux toujours séparer et intégrer localement si :
 - $f(y)$ ne s'annule pas
 - $g(x)$ est continue
- Il y a une **unique courbe (solution)** qui passe par le point (x_0, b_0) .

Introduction aux méthodes de démonstration**Introduction**

Définition 5 Une **proposition** est un énoncé qui peut être vrai ou faux.

Définition 6 Une **démonstration** est une suite d'implication logique qui sert à dériver la proposition en question à partir des axiomes (propositions admises comme vraies) et des propositions préalablement obtenue

Méthode 1

Démonstration direct :

$$\underbrace{P}_{\text{condition donnée}} \implies \text{implications logiques/axiomes/propositions connues} \implies \underbrace{Q}_{\text{proposition désirée}}$$

*Remarque
personnelle*

C'est pas vraiment très claire comme ça mais en gros ça veut juste dire que pour prouver quelque chose on y va en mode brute force (tout les nombres entiers sont des nombres réels (propositions connues) et par exemple est ce que 23 est un réel?)

**Raisonnement
par contraposée**

Comme vu en AICC on sait que $P \implies Q \equiv \neg P \implies \neg Q$

2.2.1 Théorème Existence et unicité d'une solution de EDVS

Théorème

Théorème 2 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(y) \neq 0 \ \forall y \in I$
 $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout couple $(x_0 \in J, b_0 \in I)$,
l'équation

$$f(y) \cdot y'(x) = g(x)$$

admet une solution $y : J' \subset J \rightarrow I$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = b_0$.

Si $y_1 : J_1 \rightarrow I$ et $y_2 : J_2 \rightarrow I$ sont deux solutions telles que $y_1(x_0) = y_2(x_0) = b_0$, alors $y_1(x) = y_2(x)$ pour tout $x \in J_1 \cap J_2$

Démonstration

Idée : $\int f(y)dy = \int g(x)dx \implies F(y) = G(x) \implies y(x) = F^{-1}(G(x))$

Le reste de la preuve se trouve sur les pdf de Joachim Favre.

Résumé

Résumé 1 EDVS : $f(y) \cdot y' = g(x)$ où $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue (respectivement J pour g),

Pour résoudre, il suffit de résoudre cette relation : $\int f(y)dy = \int g(x)dx$ où $\int f(y)dy$ est une primitive (sans constante) et $\int g(x)dx$ est une primitive générale (avec une constante)

Exemple

Exemple 1

$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = 1$ EDVS : $\frac{1}{x^2}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^*

On a aussi que $g(x)$ est continue sur \mathbb{R} . on fait donc :

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int dx \implies -\frac{1}{y} = x + C$$

$$y = -\frac{1}{x + C} \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

la solution générale sur $] -\infty, -C[$ et $] -C, \infty[$.

Condition initiale $y(0) = b_0 \in \mathbb{R}^* \implies y(0) = -\frac{1}{C} = b_0 \implies C = -\frac{1}{b_0}$

- Si $b_0 > 0 \implies \frac{1}{b_0} > 0 \implies y(x) = -\frac{1}{x - \frac{1}{b_0}}$ sur $] -\infty, \frac{1}{b_0}[$
- la solution particulière
- Et vis versa pour $b_0 < 0$

2.2.2 Solution maximale

Solution maximale

Définition 7 Une solution dite **solution maximale** de l'EDVS avec la condition initiale $y(x_0) = b_0$, $x \in J, b_0 \in I$ est une fonction $y(x)$ de classe C^1 satisfaisant l'équation, la condition initiale et qui est définie sur le plus **grand** intervalle possible.

Le théorème sur EDVS dit que si $f(y) \neq 0$ sur I , alors il existe une unique solution maximale. Toute solution avec la même condition initiale est une restriction de la solution maximale

Exemple 2

L'équation différentielle $2yy' = 4x^3$ avec la condition initiale $y(0) = 0$ possède :

1. Une seule solution sur \mathbb{R}
2. 2 solutions sur \mathbb{R}
3. 3 solutions sur \mathbb{R}
4. 4 solutions sur \mathbb{R}

En premier lieu il faudra résoudre :

$$\begin{aligned}\int 2y dy &= \int 4x^3 dx \\ y^2 &= x^4 + C \quad \forall C \in \mathbb{R} \\ y &= \pm \sqrt{x^4 + C} \\ y(0) &= \pm \sqrt{C'} = 0 \implies C' = 0 \\ y(x) &= \pm \sqrt{x^4} = \pm x^2\end{aligned}$$

On voit ici qu'il y a 4 solutions à cause des \pm qui se rajoute entre eux :

- $y(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$
- $y(x) = -x^2, x \in \mathbb{R}$
- $y(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$
- $y(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$

2.3 Equation différentielle linéaire du premier ordre (EDL1)

Définition

Définition 8 Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Une équation de la forme :

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x), \text{ où } p, f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ sont continues}$$

est une **équation différentielle linéaire du premier ordre (EDL1)**

Une solution de cette équation est une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 satisfaisant l'équation.

Comment résoudre une EDL1

Considérant l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = 0$
Elle s'appelle **l'équation homogène associée** à l'EDL1 $y' + py = f$ qui nous amène :

$$\begin{cases} y(x) = 0 \quad \forall x \in I \\ \frac{y'(x)}{y(x)} = -p(x) \quad EDVS \implies \int \frac{dy}{y} = - \int p(x)dx \end{cases}$$

Ce qui implique que $\ln |y| = -P(x) + C_1$ où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$, $C_1 \in \mathbb{R}$, ensuite, $|y| = e^{-P(x)+C_1} = e^{C_1}e^{-P(x)} \implies y(x) = \pm C_2 e^{-P(x)}$, $C_2 \in \mathbb{R}_+^*$

Mais on a aussi $y(x) = 0$ sur I ce qui implique que

$$y(x) = Ce^{-P(x)}$$

où $C \in \mathbb{R}$, $x \in I$ est la solution générale de l'équation homogène associée $y' + py = 0$ sur I

2.3.1 Principe de superposition de solutions, variation de la constante

Principe

Soit $I \subset \mathbb{R}$ ouvert, $p, f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions continues
Supposons que $v_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C' est une solution

$$y' + p(x)y(x) = f_1(x)$$

Et $v_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C' est une solution de l'équation

$$y' + p(x)y = f_2(x)$$

Alors **pour tout couple** $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, la fonction $v(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x)$ est une solution de l'équation :

$$y' + p(x)y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$$

Vérification

Si juste on pose tout ça on obtient :

$$\begin{aligned} v'(x) + p(x)v(x) &= c_1 v_1'(x) + c_2 v_2'(x) + p(x)(c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x)) \\ &= c_1 \underbrace{(v_1'(x) + p(x)v_1(x))}_{f_1(x)} + c_2 \underbrace{(v_2'(x) + p(x)v_2(x))}_{f_2(x)} \\ &= c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \end{aligned}$$

Méthode de la variation de constante

On cherche une solution particulière de $y'(x) + p(x)y(x) = f(x) : p, \underbrace{f}_{\text{continue}} : I \rightarrow \mathbb{R}$ sous la forme :

Ansatz :

$$v(x) = c(x)e^{-P(x)}$$

où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ sur I

Si $v(x)$ est une solution $\implies v'(x) + p(x)v(x) = f(x)$ ce qui implique que

$$C'e^{-P(x)} + C(x)(-e^{-P(x)}) \cdot p(x) + p(x)Ce^{-P(x)} = f(x)$$

Ce qui revient à dire

$$C'(x) = f(x)e^{P(x)} \implies c(x) = \int f(x)e^{P(x)}dx$$

une solution particulière de l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$ est $v(x) = \left(\int f(x)e^{P(x)}dx\right) \cdot e^{-P(x)}$ où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ sur I

2.3.2 Théorème à savoir pour l'examen

Proposition

Théorème 3 Soit $p, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions continues. Supposons que $v_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution particulière de l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$. Alors la solution générale de cette équation est :

$$v(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}, \text{ pour tout } C \in \mathbb{R}, \text{ où } P(x) \text{ est une primitive de } p(x) \text{ sur } I$$

Démonstration (1)

Soit $v_1(x)$ une solution de $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$. On va démontrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $v_1(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}$, où $v_0(x)$ est une solution de $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$.

Ce qui est équivalent à $\exists C \in \mathbb{R} : v_1(x) - v_0(x) = Ce^{-P(x)}$

(2)

Par le principe de **superposition des solutions**, la fonction $v_1(x) - v_0(x)$ est une solution de l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$ est $v(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}$ où $C \in \mathbb{R}, x \in I$

(3)

$y'(x) + p(x)y(x) = 0$ est EDVS \implies la solution générale de cette équation est $v(x) = Ce^{-P(x)}$, $C \in \mathbb{R}$ et $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ sur I .

(4)

Donc, par la définition $v(x)$ est la **solution générale**.

Lundi 24 février 2025 — Cours 3 : EDL1 Et Méthode de démonstration

Rappel : Equation différentielles linéaires du premier ordre (EDL1)

Rappel

$$y' + p(x)y = f(x)$$

Où $p, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions continues. Alors la solution générale est donnée par la formule :

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_{part}(x)$$

Où $y_{hom}(x)$ est la solution générale de l'équation générale de l'équation homogène associée : $y' + p(x)y = 0$ et $y_{part}(x)$ est une solution particulière de l'équation donnée : $y' + p(x)y = f(x)$.

- $y_{hom}(x) = Ce^{-P(x)}$, où $P(x) = \int p(x)dx$ est une primitive (sans constante), $C \in \mathbb{R}$.

- $y_{part}(x) = \left(\int f(x)e^{P(x)} dx \right) e^{-P(x)}$

Théorème 4 La solution générale de l'EDL1 :

$$y(x) = Ce^{-P(x)} + \left(\int f(x)e^{P(x)} dx \right) e^{-P(x)}$$

Attention avec le signe moins qui se trouve dans la solution homogène mais pas dans la solution particulière.

Ex1

$$y' - \underbrace{\frac{2}{x}}_{p(x)} y = \underbrace{x^3 + 1}_{f(x)} \text{ avec } p :]-\infty, 0[\text{ et }]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R} \text{ continue,}$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

$$P(x) = \int -\frac{2}{x} = -2 \ln |x| \implies P(x) = -2 \ln |x| \text{ avec } x \neq 0$$

On a donc comme solution homogène :

$$y_{hom}(x) = Ce^{-P(x)} = Ce^{-(-2 \ln |x|)} = Ce^{-\ln |x|^2} = Ce^{-\ln x^2} = Cx^2$$

Sur $] -\infty, 0[\cap]0, \infty[$

On cherche maintenant une solution particulière de l'équation complète :

$$y' + \frac{-2}{x} y = x^3 + 1$$

On utilise la méthode de la variation des constantes :

$$\begin{aligned} \int f(x)e^{P(x)} dx &= \int (x^3 + 1)e^{-\ln x^2} dx \\ &= \int \frac{x^3 + 1}{x^2} dx \\ &= \int \left(x + \frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} \text{ pas de constante} \end{aligned}$$

Ce qui implique donc que :

$$y_{part}(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} \right) e^{-(-\ln x^2)} = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} \right) x^2 = \frac{1}{2}x^4 - x$$

Vérification :

$$\begin{aligned} y'_{part}(x) - \frac{2}{x} y_{part} &= 2x^3 - 1 - \frac{2}{x} \left(\frac{1}{2}x^4 - x \right) \\ &= 2x^3 - 1 - x^3 + 2 = x^3 + 1 \end{aligned}$$

Solution générale de l'équation originale :

$$y(x) = Cx^2 + \frac{1}{2}x^4 - x$$

Sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$

Si on multiplie par x l'équation de base :

$$xy' - 2y = x^4 + x$$

Alors, la solution va sur \mathbb{R}

$$\Rightarrow y(x) = Cx^2 + \frac{1}{2}x^4 - x \text{ sur } \mathbb{R}$$

Ex2

$y' - (\tan x)y = \cos x$ $\tan(x)$ n'est pas continue en $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Puisque $0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow$ on considère l'équation sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $p, f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ continues.

1. Solution générale de l'équation homogène associée.

$$y' + (-\tan x)y = 0$$

$$P(x) = \int (-\tan x) dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\stackrel{\underbrace{\int \frac{du}{u}}}{=} \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \ln |\cos x|$$

$$\Rightarrow P(x) = \ln(\cos x) \text{ sur }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

On a donc :

$$y_{hom}(x) = Ce^{-P(x)} = Ce^{-\ln \cos x} = \frac{C}{\cos x}, x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, C \in \mathbb{R}$$

Vérification :

$$-\frac{C}{\cos^2 x} \cdot (-\sin x) - \tan x \cdot \frac{C}{\cos x} = C \frac{\sin x}{\cos^2 x} - C \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0$$

2. Solution particulière de l'équation complète :

$$y' - \tan xy = \cos x$$

Selon la même méthode :

$$\begin{aligned} \int f(x)e^{P(x)} dx &= \int \cos x e^{\ln \cos x} dx = \int \cos^2 x dx \\ &= \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} y_{part}(x) &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right) \cdot e^{-P(x)} \\ &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right) \frac{1}{\cos x} \\ &= \frac{1}{2} \frac{x}{\cos x} + \frac{1}{4} \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x} \\ y_{part}(x) &= \frac{1}{2} \frac{x}{\cos x} + \frac{1}{2} \sin x, x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{aligned}$$

2.3.3 Application de EDVS (EDL1) : Croissance et décroissance exponentielle

Exemple

Soit $y = y(t)$ tel que $y' = ky, k \in \mathbb{R}$; $y = 0$ est une solution

$$\text{EDVS : } \int \frac{dy}{y} = \int k dt \implies \ln |y| = kt + C_1 \implies |y| = e^{C_1} e^{kt} \implies y(t) = C e^{kt}$$

Condition initiales :

- $y(0) = C = y_0 > 0$
- $y(t) = y_0 e^{kt}$

La solution maximale satisfaisant la condition initiale $y(0) = y_0$ est :

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

Méthodes de démonstration : Disjonction des cas

Méthode 3 : Raisonnement par disjonction des cas

Définition 9 Soient P, Q deux propositions. Pour montrer que $P \implies Q$ on sépare l'hypothèse de P de départ en différent cas possibles et on montre que l'implication est vraie dans chacun des cas. Il est très important de considérer **tous les cas possibles**

Ex1

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a :

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

$$1. |x| \geq |y| \implies$$

$$\begin{aligned} ||x| - |y|| &= |x| - |y| \\ &= |x - y + y| - |y| \\ &\stackrel{\Delta}{\leq} |x - y| + |y| - |y| = |x - y| \end{aligned}$$

$$2. |x| < |y| \implies$$

$$\begin{aligned} ||x| - |y|| &= -|x| + |y| \\ &= -|x| + |y - x + x| \\ &\stackrel{\Delta}{\leq} -|x| + |y - x| + |x| = |y - x| \\ &= |x - y| \end{aligned}$$

Ex2

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $2n^2 + n + 1$ n'est pas divisible par 3. 3 Cas :

$$1. n \equiv 0 \pmod{3} \iff n = 3k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2n^2 + n + 1 = 2(3k)^2 + (3k) + 1 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$2. n \equiv 1 \pmod{3} \iff n = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}$$

$$\implies 2n^2 + n + 1 = 2(3k + 1)^2 + (3k + 1) + 1 \equiv 2 + 1 + 1 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$3. n \equiv 2 \pmod{3}, n = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}$$

$$2n^2 + n + 1 = 2(3k + 2)^2 + (3k + 2) + 1 \equiv 8 + 2 + 1 \equiv 2 \pmod{3}$$

Finalement, $2n^2 + n + 1$ n'est pas divisible par 3 $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Méthode de démonstration : équivalence

Méthode 4 :
Comment démontrer les propositions de la forme $P \iff Q$

Deux méthodes existent :

1. $P \implies Q$ **ET** $Q \implies P$
2. Suite d'équivalences : $P \iff R_1 \iff R_2 \iff \dots \iff Q$

Pour la deuxième méthode, il faut vérifier que chaque implication est une **équivalence**.

Ex3

Soit $a, b \in \mathbb{N}$:

- $P : \{ab + 1 = c^2 \text{ pour un nombre naturel } c\}$
- $Q : \{a = b \pm 2\}$

Proposition $P \iff Q$

Démonstration

$$\underbrace{ab + 1 = c^2}_P \iff ab = c^2 - 1 \iff ab = (c-1)(c+1)$$

$$= (c+1)(c-1) \xLeftrightarrow{\text{Faux}} \begin{cases} a = c-1 \\ b = c+1 \\ a = c+1 \\ b = c-1 \end{cases}$$

Néanmoins, Contre exemple : $a = 3, b = 8$ on a que $24 + 1 = 25 = 5^2 = c^2$, P est vrai, Q est faux

Proposition qui est vraie : $Q \implies P$ Soient $a, b \in \mathbb{N} : a = b \pm 2$, Alors $ab + 1 = c^2, c \in \mathbb{N}$

Démonstration

$$\begin{aligned} a = b \pm 2 &\implies ab + 1 = b(b \pm 2) + 1 \\ &= b^2 \pm 2b + 1 \\ &= (b \pm 1)^2 = c^2 \end{aligned}$$

Ex4

Soient $z = \underbrace{\rho e^{i\varphi}}_{\rho > 0} \in \mathbb{C}^*, P : \{z^2 \in \mathbb{R}^*\}, Q : \{\varphi = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

On cherche ici à savoir la relation entre P ?? Q

Démonstration $Q \implies P$:

Soit $z = \rho e^{i\varphi}, \varphi = \frac{\pi}{2}k \implies z^2 = \rho^2 e^{2i\varphi} = \rho^2 (-1)^k \in \mathbb{R}^*$.

Démonstration $P \implies Q$

Soit $z = \rho e^{i\varphi}, \rho > 0 \implies z^2 = \rho^2 e^{2i\varphi}$

2.4 Equation différentielle du second ordre

Définition

Définition 10 Soit I un intervalle ouvert. On appelle **équation différentielle linéaire de second ordre** une équation de la forme :

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)$$

où $p, q, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues

Définition 11 Une équation de la forme

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

est dite **EDL2 homogène**.

On cherche une solution de cette équation de classe C^2

$$\text{Ex1} \quad y'' = 5 \implies y' = 5x + C, x \in \mathbb{R}, \forall C \in \mathbb{R}$$

Ce qui implique

$$y(x) = \frac{5}{2}x^2 + C_1x + C_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

EDL2 homogène à coefficients constants

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

$y''(x) - (a + b)y'(x) + aby(x) = 0$, où a, b sont des racines de l'équation $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

Par un changement de variables :

$$\underbrace{(y'(x) - ay(x))}_{z(x)}' - b \underbrace{(y'(x) - ay(x))}_{z(x)} = 0$$

$$z'(x) - bz(x) = 0 \implies \text{EDVS pour } z$$

$$\implies z(x) = C_1 e^{bx}$$

$$\implies z(x) = y'(x) - ay(x) = C_1 e^{bx}$$

Ce qui est une EDL1.

$$= y'(x) - ay(x) = C_1 e^{bx}, \quad p(x) = -a, \quad f(x) = C_1 e^{bx}$$

$$\implies P(x) = \int -a dx = -ax,$$

$$= y_{hom}(x) = C_2 e^{ax} \quad \text{solution générale de l'équation homogène}$$

On a alors pour $C(x)$:

$$C(x) = \int C_1 e^{bx} e^{-ax} dx = C_1 \int e^{(b-a)x} dx = \begin{cases} \frac{1}{b-a} C_1 e^{(b-a)x}, & \text{si } b \neq a \\ C_2 e^{ax} + C_1 x e^{ax} & \text{si } a = b \end{cases}$$

Si $a \neq b$ sont des racines complexes, $a, b \notin \mathbb{R} \implies a = \hat{b}$ Ce qui implique que :
 $y(x) = Ce^{ax} + \hat{C}e^{\hat{a}x}$ pour avoir une solution réelle, $a = \alpha + i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$
 Soit $C = \frac{1}{2}(C_2 - iC_4) \implies \hat{C} = \frac{1}{2}(C_3 + iC_4), C_3, C_4 \in \mathbb{R}$
 Alors on a que :

$$\begin{aligned} y(x) &= Ce^{ax} + \hat{C}e^{\hat{a}x} = \frac{1}{2}(C_3 - iC_4)e^{\alpha x}e^{i\beta x} + \frac{1}{2}(C_3 + iC_4)e^{\alpha x}e^{-i\beta x} \\ &= C_3e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + C_4e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} \end{aligned}$$

Résumé

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$$

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ les racines de l'équation $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$
 Alors la solution générale est :

$$y(x) = \begin{cases} C_1e^{ax} + C_2e^{bx}, & \text{si } a \neq b, a, b \in \mathbb{R} \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} \\ C_1e^{ax} + C_2xe^{bx}, & \text{si } a = b \\ C_1e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2e^{\alpha x} \sin \beta x, & \text{si } a = \alpha + i\beta = \hat{b} \notin \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

oui

Exemple 2

$$y'' + 9y = 0$$

Equation caractéristique : $\lambda^2 + 9 = 0 \implies a = 3i, b = -3i$ Ce
 qui donne : $a = 3i = \alpha + \beta i$
 Ce qui donne comme solution générale :

$$y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$$

Vérification : $y'(x) = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x \implies y'' = -9C_1 \cos 3x - 9C_2 \sin 3x \implies y'' + 9y = 0$

Exemple 3

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

Même procédé avec l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \implies \lambda = 3$$

Ce qui donne comme solution :

$$y(x) = C_1e^{ax} + C_2e^{ax}$$

2.4.1 Unicité d'un EDL2

Considérons l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$

Théorème

Théorème 5 Une EDL2 homogène admet une seule solution $y(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 satisfaisant $y(x_0) = t$ et $y'(x_0) = s$ pour un $x_0 \in I$ et les nombres arbitraires $s, t \in \mathbb{R}$.

La démonstration n'est pas vu dans ce cours car trop fastidieuse

Remarque

(1) **Superposition des solutions** Si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont 2 solutions de EDL2 **homogènes** alors

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$$

Est aussi une solution, où $A, B \in \mathbb{R}$

Dépendance linéaire de fonctions

Définition 12 Deux solutions $y_1(x), y_2(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont linéairement indépendants s'il n'existe pas de constante $c \in \mathbb{R}$ tel que $y_2(x) = cy_1(x)$

Remarque

Cela implique, en particulier, que $y_1(x)$ et $y_2(x)$ ne sont pas trivialement $= 0$ sur I

Comment résoudre

Comment résoudre $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$?

Supposons que $v_1(x)$ est une solution de cette équation, telle que On sait trouver une autre solution linéairement dépendante.

Ansatz

$$v_2(x) = c(x)v_1(x)$$

Telle que $c(x) \neq \text{const.}$ Alors :

$$v_2'(x) = c'(x)v_1(x) + c(x)v_1'(x)$$

Si on cherche la seconde dérivée de v_2 :

$$v_2''(x) = c''(x)v_1(x) + c'(x)v_1'(x) + c'(x)v_1'(x) + c(x)v_1''(x)$$

Si on simplifie l'expression :

$$\begin{aligned} \Rightarrow c''(x)v_1(x) + 2c'(x)v_1'(x) + c(x)v_1''(x) + p(x)c'(x)v_1(x) \\ + p(x)c(x)v_1'(x) + q(x)c(x)v_1(x) = 0 \end{aligned}$$

On peut trouver vu que $v_1(x)$ est solution que :

$$c(x)(v_1''(x) + p(x)v_1'(x) + q(x)v_1(x)) = 0$$

Ce qui revient pour notre équation :

$$c''(x)v_1(x) + 2c'(x)v_1'(x) + p(x)c'(x)v_1(x) = 0$$

On suppose que $v_1(x) \neq 0$ sur I et $c'(x) \neq 0$ sur I . (Une condition en plus, de toute façon, si $c'(x) = 0$ on peut juste

enlever le 0 de l'intervalle et ensuite peut être le rajouter après).
On peut donc diviser ce qui donne :

$$\frac{c''(x)}{c'(x)} = -p(x) - 2\frac{v_1'(x)}{v_1(x)} \implies \text{EDVS pour } c'(x)$$

Ce qui revient :

$$\begin{aligned} \ln c'(x) &= \underbrace{-P(x)}_{\ln e^{-P(x)}} - 2 \ln v_1(x) + \ln C, \quad C \in \mathbb{R}_+^* \\ &= \ln \frac{C e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} \end{aligned}$$

On cherche la dérivée de $c(x)$:

$$\begin{aligned} c'(x) &= \pm \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} \\ &= C_1 \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} \quad C_1 \in \mathbb{R}^*, C_1 = \pm C \\ c(x) &= \int C_1 \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx + C_2 \\ \implies v(x) = c(x)v_1(x) &\text{ est une solution.} \end{aligned}$$

Si on prend $C_1 = 1$ et $C_2 = 0$ on obtient $v_2(x)$ linéairement dépendante de $v_1(x)$:

Théorème 6

$$v_2(x) = c(x)v_1(x) = v_1(x) \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx$$

Lundi 3 mars 2025 — Cours 5 : Equation différentielle

2.4.2 Rappel : Equation différentielle linéaires du second ordre (EDL2)

EDL2 homogène

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

avec, $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues

EDL2 à coefficients constants

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = f(x)$$

avec $p, q \in \mathbb{R}, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues

EDL2 homogène a coefficient constant

$$y''(X) + py'(x) + qy(x) = 0$$

avec $p, q \in \mathbb{R}$

La solution générale de cette dernière : $\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \implies a, b \implies 3$ cas qui sont solution générale Pour un EDL2 homogène, si $v_1(x)$ est une solution et $v_1(x) \neq 0$ sur $I \rightarrow v_2(x) = v_1(x) \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx$ est une solution linéairement indépendante, où $P(x) = \int p(x)dx$ est une primitive.

2.4.3 Caractérisation des 2 solutions de EDL2 linéairement indépendante

Définition 13 Si $v_1, v_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $I \subset \mathbb{R}$ alors la fonction $W[v_1, v_2], I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$W[v_1, v_2] = \det \begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} = v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x)$$

est appelée le **Wronskien** de v_1 et v_2

Exemple

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \implies \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

qui donne comme solution $\lambda_{1,2} = 3$ qui nous donne :

$$v(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{2x}, \text{ avec } x \in \mathbb{R}$$

On calcule le wronskien :

$$W[e^{3x}, x e^{3x}] = \det \begin{pmatrix} e^{3x} & x e^{3x} \\ 3e^{3x} & e^{3x} + 3x e^{3x} \end{pmatrix} = e^{6x} + 3x e^{6x} - 3x e^{6x} = e^{6x}$$

On a donc :

$$e^{6x} = W[e^{3x}, x e^{3x}] \neq 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

2.4.4 Démonstration à savoir**Proposition**

Théorème 7 Soient $v_1, v_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux solutions de l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$, Alors $v_1(x)$ et $v_2(x)$ sont linéairement indépendantes si et seulement si $W[v_1, v_2] \neq 0 \forall x \in I$

Nous allons le prouver par contraposée :

$$\neg P \implies \neg Q \wedge \neg Q \implies \neg P$$

$$\left| \begin{array}{l} (1) \neg P \implies \neg P \implies \neg Q \text{ les solutions sont linéairement indépendante} \\ \neg Q \implies \text{sans perte de généralité, il existe } c \in \mathbb{R} \text{ tel que } v_2(x) = \end{array} \right.$$

$cv_1(x) \forall x \in I$ Alors on a :

$$W[v_1, v_2](x) = \det \begin{pmatrix} v_1(x) & cv_1(x) \\ v_1'(x) & cv_1'(x) \end{pmatrix} = cv_1(x)v_1'(x) - cv_1(x)v_1'(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

Et donc :

$$W[v_1, v_2](x) = 0 \quad \forall x \in I$$

(2) $\neg Q \implies \neg P$ Supposons qu'il existe $x_0 \in I : W[v_1, v_2](x_0) = 0$. Alors cela implique que :

$$\det \begin{pmatrix} v_1(x_0) & v_2(x_0) \\ v_1'(x_0) & v_2'(x_0) \end{pmatrix} = 0$$

Cela implique qu'il existe un vecteur non nul $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} v_1(x_0) & v_2(x_0) \\ v_1'(x_0) & v_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit $v(x) = av_1(x) + bv_2(x)$ Alors $v(x)$ est une solution de l'EDL2 homogène et de plus $v(x_0) = 0$ et $v'(x_0) = 0$. Par le théorème de l'existence et unicité d'une solution de l'EDL2 homogène satisfaisant les conditions initiales. $y(x_0) = 0$ et $y'(x_0) = 0$, puisque la solution triviale $y(x) = 0 \quad \forall x \in I$ satisfait l'équation et les mêmes conditions initiales $\implies v(x) = av_1(x) + bv_2(x) = 0$ et cela pour tout x dans I .

Puisque a et b ne sont pas tous les deux nuls :

$$\begin{cases} v_1(x) = -\frac{b}{a}v_2(x) \quad \forall x \in I \\ v_2(x) = -\frac{a}{b}v_1(x) \quad \forall x \in I \end{cases} \implies v_1(x) \text{ et } v_2(x) \text{ sont linéairement indépendants}$$

Exemple

EDL2 homogène a coefficient constants $y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0 \implies \lambda^2 + p\lambda + q = 0$ telle que les racines sont $a = \bar{b} = \alpha + \beta i \notin \mathbb{R}$

Montrer que $W[e^{\alpha y} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x] \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2.4.5 Théorème aussi à savoir

Théorème

Théorème 8 Soit $v_1, v_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux solution linéairement indépendantes de l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ alors la solution générale de cette équation est de la forme :

$$v(x) = C_1v_1(x) + C_2v_2(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in I$$

Démonstration

Soit $\sim v(x)$ une solution de l'équation donnée (arbitraire), soit $x_0 \in I$ alors

$v(x_0) = a_0 \in \mathbb{R}$, et $v'(x_0) = b_0 \in \mathbb{R}$

On a deux solution linéairement indépendantes $v_1, v_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ Alors par la proposition précédente on sait que $W[v_1, v_2] \neq 0, \forall x \in I \implies W[v_1, v_2](x_0) \neq 0$ implique que \exists unique constantes c_1, c_2 tel que le noyau de la matrice est

donne par le "point" $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$

Considérons la fonction $v(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x)$

Superposition des solutions

Si $v(x)$ est une solution de des EDL2, et $u(x)$ une solution de l'équation homogène associée : $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$, alors $v(x) + u(x)$ est une solution de l'équation (1) (exercice)

Méthode de la variation de constante

On cherche une solution particulière de (1) supposant qu'on connaît deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène associée : $v_1, v_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ (ce qui implique $W[v_1, v_2](x) \neq 0 \quad \forall x \in I$)

Ansatz

posons :

$$v_0(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x)$$

Où $c_1(x)$ et $c_2(x)$ sont des fonctions de classe C^2 sur I

Condition sur $c_1(x)$ et $c_2(x)$?

$$v'_0(x) = \underbrace{c'_1(x)v_1(x) + c'_2(x)v_2(x)}_{\text{Supposons } = 0} + c_1(x)v'_1(x) + c_2(x)v'_2(x)$$

On cherche la dérivée seconde :

$$v''_0(x) = c'_1(x)v'_1(x) + c'_2(x)v'_2(x) + c_1(x)v''_1(x) + c_2(x)v''_2(x)$$

$$v''_0(x) + p(x)v'_0(x) + q(x)v_0(x) = f(x)$$

$$\begin{aligned} & c'_1(x)v'_1(x) + c'_2(x)v'_2(x) + c_1(x)v''_1(x) + c_2(x)v''_2(x) \\ & + p(x)c_1(x)v'_1(x) + p(x)c_2(x)v'_2(x) + q(x)c_1(x)v_1(x) \\ & \quad + q(x)c_2(x)v_2(x) = f(x) \\ \implies & c'_1(x)v'_1(x) + c'_2(x)v'_2(x) = f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} c'_1(x)v_1(x) + c'_2(x)v_2(x) = f(x) \\ c'_1(x)v'_1(x) + c'_2(x)v'_2(x) = f(x) \end{cases} \quad \forall x \in I$$

Qui est un système pour $c'_1(x)$ et $c'_2(x)$, On sait que

$$W[v_1, v_2](x) \neq 0 \text{ sur } I, \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v'_1 & v'_2 \end{pmatrix}(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$$

On écrit ce qu'on cherche :

$$\begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v'_1(x) & v'_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Implique qu'il existe une unique solution $\forall x \in I$

En faisant l'inverse de la matrice de gauche :

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{W[v_1, v_2]} \begin{pmatrix} v_2' & -v_2 \\ -v_1' & v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} = \frac{1}{W[v_1, v_2]} \begin{pmatrix} -v_2 f \\ v_1 f \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2(x)f(x) \\ v_1(x)f(x) \end{pmatrix} \frac{1}{W[v_1, v_2]x}$$

Ce qui implique :

$$c_1(x) = - \int \frac{f(x)v_2(x)}{W[v_1, v_2]} dx$$

$$c_2(x) = \int \frac{f(x)v_1(x)}{W[v_1, v_2]} dx$$

On a donc que $v_0(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x)$ est une solution de (1), la solution générale de (1) est :

$$v(x) = v_0(x) + c_1v_1(x) + c_2v_2(x) \text{ où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in I$$

Exemple

Trouver la solution générale de l'équation :

$$y''(x) - \frac{1}{x(\ln x - 1)}y'(x) + \frac{1}{x^2(\ln x - 1)}y(x) = \ln x - 1$$

sur $]e, \infty[$

(1)

Essayons de trouver une solution non nulle de l'équation homogène associée :

$$y''(x) - \frac{1}{x \ln x - 1)}y'(x) + \frac{1}{x^2(\ln x - 1)}y(x) = 0$$

Essayons avec $y = x$:

$$y = x \implies y' = 1, y'' = 0 = -\frac{1}{x(\ln x - 1)} + \frac{x}{x^2(\ln x - 1)} = 0 \quad \forall x \in]e, \infty[$$

(2)

Trouver une autre solution de l'équation, linéairement indépendante

$$v_2(x) = c(x)v_1(x) \text{ où } c(x) = \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx, P(x) = \int p(x) dx$$

On cherche $P(x)$:

$$\begin{aligned} p(x) &= -\frac{1}{x(\ln x - 1)} \implies P(x) = -\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)} \\ &= -\int \frac{d(\ln x - 1)}{\ln x - 1} \\ &= -\ln(\ln x - 1) \end{aligned}$$

On cherche donc maintenant $c(x)$:

$$\begin{aligned} c(x) &= \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx = \int \frac{e^{+\ln(\ln x - 1)}}{x^2} dx = \int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx \\ &= -\int (\ln x - 1) d\frac{1}{x} = -\frac{\ln x - 1}{x} + \int \frac{1}{x} d\frac{1}{x} = -\frac{\ln x - 1}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{\ln x}{x} \end{aligned}$$

On a donc que

$$v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x) = C_1 x + C_2 \ln x$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in]e, \infty[$

Est la solution générale de l'équation homogène.

(3) On cherche maintenant une solution particulière de l'équation complète :

$$y''(x) - \frac{1}{x(\ln x - 1)} y'(x) + \frac{1}{x^2(\ln x - 1)} y(x) = \ln x - 1$$

On prends :

$$v_0(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x)$$

où :

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\int \frac{f(x)v_2(x)}{W[v_1, v_2]} dx \\ c_2(x) &= +\int \frac{f(x)v_1(x)}{W[v_1, v_2]} dx \end{aligned}$$

On cherche le Wronskien :

$$W[v_1, v_2] = \det \begin{pmatrix} x & -\ln x \\ 1 & -\frac{1}{x} \end{pmatrix} = -1 + \ln x = \ln x - 1 \neq 0 \text{ sur }]e, \infty[$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\int \frac{(\ln x - 1)(-\ln x)}{\ln x - 1} dx = +\int \ln x dx \\ &= x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x \end{aligned}$$

Pour $c_2(x)$:

$$c_2(x) = \int \frac{(\ln x - 1) \cdot x}{\ln x - 1} dx = \int x dx = \frac{1}{2} x^2$$

On trouve finalement :

$$\begin{aligned} v_0(x) &= c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x) \\ &= x(\ln x - 1)x + \frac{1}{2}x^2(-\ln x) \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - x^2 \end{aligned}$$

(4)

On cherche finalement la solution générale de l'équation complète

$$v(x) = C_1x + C_2 \ln x + \frac{1}{2}x^2 \ln x - x^2$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in]e, \infty[$

Jeudi 6 mars 2025 — Cours 6 : EDL2

2.4.6 Méthode de résolution de EDL2

Rappel (Méthode de la variation des constantes)

En premier lieu on calcule le Wronskien de $v_1(x)$ et $v_2(x)$,

$$W[v_1, v_2] = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix}$$

Ensuite, On calcule les fonctions $c_1(x)$ et $c_2(x)$:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= - \int \frac{f(x)v_2(x)}{W[v_1, v_2]} dx \\ c_2(x) &= \int \frac{f(x)v_1(x)}{W[v_1, v_2]} dx \end{aligned}$$

Méthode de calcul

Pour des fonctions $f(x)$ spéciales, une méthode alternative existe :

Case 1

si $f(x)$ est de la forme :

$$f(x) = e^{cx} R_n(x)$$

avec $R_n(x)$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$.

Alors la solution est donné par :

$$\implies y_p(x) = x^r e^{cx} T_n(x)$$

Avec $r = 0, 1$ ou 2 la multiplicité de la racine c dans l'équation caractéristique, $T_n(x)$ un polynôme à déterminer de degré n .

Cas 2

$$f(x) = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) P_k(x) + \sin(\beta x) Q_n(x)); \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\implies y_p(x) = x^r e^{\alpha x} (\cos(\beta x) T_n(x) + \sin(\beta x) S_n(x))$$

Avec $r = 1$ si $\alpha + i\beta$ est racine de l'équation caractéristique, et $r = 0$ sinon, $T_n(x)$ et $S_n(x)$ des polynômes à déterminer de degré $n = \max(k, m)$

Pour déterminer les **coefficients des polynômes inconnus** :

- Calculer les dérivées de la solution particulière
- Remplacer dans l'équation initiale, et résoudre l'équation.

Exemple

$$y'' + 2y' + 10y = 40e^x \sin(3x)$$

Solution homogène :

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2\lambda + 10 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} = \frac{-2 \pm i6}{2} \\ &= -1 \pm i3 \end{aligned}$$

On cherche maintenant $y_h(x)$:

$$y_h(x) = C_1 e^{-2x} \cos(3x) + C_2 e^{-x^2} \sin(3x)$$

Coefficient indéterminé

$f(x) = 40 \cdot e^x \sin(3x)$, on cherche donc une fonction qui rempli ce critère :

$$f(x)e^{\alpha x} (\underbrace{\cos(\beta x) P_k(x)}_{=A} + \sin(\beta x) \underbrace{Q_m(x)}_{=B})$$

On sait que $\beta = 3$ et que $\alpha = 1$:

Il n'y a pas de rapport direct entre ce $\alpha = 1$ et la solution de l'équation caractéristique.

On observe la fonction $f(x)$ qui ici à pour l'exponentielle $e^x = e^{1 \cdot x}$, c'est de là que vient notre α

$$\alpha + i\beta = 1 + i3 \implies r = 0$$

Comme $r = 0$ on sait donc que le polynôme n'est qu'une constante qu'on va noter $T_n(x) = A$ et $S_n(x) = B$

On peut noter donc notre fonction pour laquelle on cherche les coefficients :

$$y_p(x) = e^3(\cos(3x)A + \sin(3x)B)$$

On va dérivée tout ce beau monde :

$$y'_p(x) = e^x(\cos(3x)A + \sin(3x)B - r \sin(3x)A + 3 \cos(3x)B)$$

$$\begin{aligned} y''_p(x) &= e^x(\cos(3x)(A + 3B) + \sin(3x)(B - 3A) - 3(A + 3B) \sin(3x) + 3 \cos(3x)(B - 3A)) \\ &= e^x(\cos(3x)(6B - 8A) + \sin(3x)(-8B - 6A)) \end{aligned}$$

On injecte tout ca dans l'EDL2 :

On peut tout diviser par e^x car il se trouve partout et n'est jamais égal à 0.

$$\begin{aligned} \cos(3x)(6B - 8A + 2(A + 3B) + 10A) + \sin(3x)(-8B - 6A) \\ + 2(B - 3A) + 10B = 40 \sin(3x) \end{aligned}$$

On voit ici que tout la partie du $\cos(x)$ est égal à 0, c'est comme ci on avait deux équation, la partie avec le $\cos(x)$ et la partie avec le $\sin(x)$:

$$\Rightarrow \begin{cases} 12B + 4A = 0 \\ 4B - 12A = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -3B \\ 4B + 36B = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -3 \\ B = 1 \end{cases}$$

On obtient donc que la solution particulière :

$$y_p(x) = e^x(-3 \cos(3x) + \sin(3x))$$

Et pour la solution générale :

$$y = C_1 e^{-x} \cos(3x) + C_2 e^{-x^2} \sin(3x) + e^x(-3 \cos(3x) + \sin(3x))$$

Exemple

$$y'' + 2y' - 3y = (x + 1)e^{-3x}$$

Ici nous somme dans le cas numéro 1 :

$$f(x) = e^{cx} R_n(x) \Rightarrow c = -3, n = 1$$

$$\begin{aligned} y_p(x) &= x^r e^{-3x} (Ax + B) \text{ où } r = 1 \\ y_p(x) &= e^{-3x} (Ax + Bx) \end{aligned}$$

Ici on a pris un polynôme R_n de puissance 1 c'est pour cela qu'on peut l'écrire comme nous l'avons fait ci-dessus.

Donc ici on va dérivée y_p deux fois et tout remettre dans l'équation de base et ensuite résoudre :

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= e^{-3x}(-3(Ax^2 + Bx) + 2Ax + B) = e^{-3x}(-3Ax^2 + (2A - 3B)x + B) \\ y_p''(x) &= e^{-3x}(9Ax^2 + (-6A + 9B)x - 3B + (-6A)x + (2A - 3B)) \\ &= e^{-3x}(9A + (-12A + 9B)x + 2A - 6B) \end{aligned}$$

On divise l'EDL2 par e^{-3x} ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} 9Ax^2 + (-12A + 9B)x + 2A - 6B + 2(-3Ax^2 + (2A - 3B)x + B) - 3Ax^2 + Bx &= x + 1 \\ \Rightarrow \begin{cases} (9A - 6A - 3A)x^2 = 0x^2 \\ (-2A + 9B + 9A - 6B - 3B)x = x \\ (2A - 6B) + 2B = 1 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} -8A = 1 \\ 2A - 4B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{8} \\ B = -\frac{5}{16} \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient finalement pour la solution particulière :

$$y_p(x) = e^{-3x} \left(-\frac{x^2}{8} - \frac{5x}{16} \right)$$

$$y_h(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

2.4.7 Méthode de démonstration par l'absurde

Méthode

On a une relation tel que :

$$T \implies Q \equiv \neg Q \implies F$$

Exemple

$\neg \exists \in \mathbb{Z}$ tel que $18x - 54y = 21$:

Supposons $\neg Q$ tel qu'il existe x, y tel que :

$$18x - 54y = 21$$

Comme cela est impossible, alors il ne peut exister de $x, y \in \mathbb{Z}$ tel que la relation tienne :

$$\neg Q \implies \neg P$$

Euclide

Théorème 9 soit \mathbb{P} l'ensemble des nombres premiers alors :

$$|\mathbb{P}| = \infty$$

Démonstration

Supposons $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $|\mathbb{P}| = n < \infty$

$$\mathbb{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$$

Soit $k = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$, alors, $k \notin \mathbb{P}$ car $k > p_i \forall i = 1 \dots n$ (Il ne peut pas être dans \mathbb{P} car il est plus grand que tous les éléments de \mathbb{P})

Et donc, il existe un élément dans \mathbb{P} tel qu'il divise k :

$$\exists p_j \neq k \text{ tel que } p_j \mid k$$

Si on note

$$\underbrace{k - p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n}_{\text{divisible par } p_j} = \underbrace{1}_{\text{pas div}}$$

Ce qui est une contradiction logique.

la partie $k - p_1 p_2 \dots p_n$ est divisible par p_j car de (1) on n'a dit que k l'était (juste au dessus) et le produit de tous les p_n est forcément divisible par p_j vu que $p_j \in \mathbb{P}$. L'addition de deux nombres divisibles par un nombre est forcément divisible par ce dernier.

Chapitre 3

Espace \mathbb{R}^n

3.0.1 \mathbb{R}^n espace vectoriel normé

Définition

Définition 14 \mathbb{R}^n est un ensemble de tout les n -tuples ordonnés de nombre réels.

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Il y a donc toute les propriétés d'un espace vectoriel dont l'addition et l'action scalaire :

1. $+$: $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n), \bar{y} = (y_1, \dots, y_n) \implies \bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
2. Multiplication par un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \implies \lambda \cdot \bar{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Et par conséquent, les opérations présentées ci-dessus satisfont :

- $(\lambda_1 \lambda_2) \bar{x} = \lambda_1 (\lambda_2 \bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$
- $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$
- $(\lambda_1 + \lambda_2) \bar{x} = \lambda_1 \bar{x} + \lambda_2 \bar{x}$
- $\lambda(\bar{x} + \bar{y}) = \lambda \bar{x} + \lambda \bar{y} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
- $\lambda(\bar{x} + \bar{y}) = \lambda \bar{x} + \lambda \bar{y} \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$

Base

On a une base canonique :

$$\{\bar{e}_i = (0, 0, \dots, \overbrace{1}^i, \dots, 0)\}_{i=1}^n \implies \bar{e}_i \underbrace{\in}_{\forall i=1, \dots, n} \mathbb{R}^n$$

Produit scalaire

On introduit le **produit scalaire** dans \mathbb{R}^n :

Définition 15

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Et par la suite la **norme euclidienne** :

$$\|\bar{x}\| = (\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \implies \mathbb{R}^n \text{ est un espace vectoriel normé}$$

Propriétés
de la norme
euclidienne

1. $\|\bar{x}\| \geq 0$ et $\|\bar{x}\| = 0 \implies \bar{x} = (0, 0, \dots, 0)$
2. $\bar{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \implies \|\lambda \cdot \bar{x}\| = |\lambda| \cdot \|\bar{x}\|$
3. Cauchy-Schwartz : $|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$
4. Inégalité triangulaire : $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n \implies \|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$
5. \implies 4, $\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 = \langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle + 2\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle$
Qui après plusieurs opération fini par :

$$\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\| \geq \|\bar{x} + \bar{y}\|$$

6. Un autre inégalité triangulaire : $\|\bar{x} - \bar{y}\| \geq \left| \|\bar{x}\| - \|\bar{y}\| \right|$

Pour cette égalité, Nous pouvons faire une démonstration par disjonction des cas (vu au cours 3)

Distance

Définition 16 L'expression $\|\bar{x} - \bar{y}\| = d(\bar{x}, \bar{y})$ est appelée **la distance** entre \bar{x} et \bar{y} dans \mathbb{R}^n .

Alors :

- $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{x}, \bar{y})$
- $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \iff \bar{x} = \bar{y}$
- $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(\bar{x}, \bar{z}) + d(\bar{z}, \bar{y})$

$$\|\bar{x} - \bar{y}\| = \|\bar{x} - \bar{z} + \bar{z} - \bar{y}\| \leq \|\bar{x} - \bar{z}\| + \|\bar{z} - \bar{y}\|$$

3.0.2 Sous-ensemble ouverts et fermés de \mathbb{R}^n

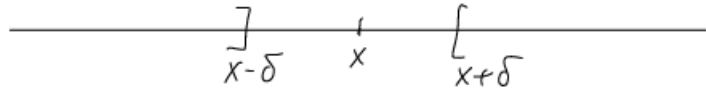
Définition 17 Pour tout $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $\delta > 0$, soit $B(\bar{x}, \delta) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{y}\| < \delta\}$. Alors $B(\bar{x}, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ est appelé **la boule ouverte** de centre \bar{x} et de rayon δ .

Boule ouverte

Définition 18 $E \subset \mathbb{R}^n$ est **ouvert** si et seulement si :

1. $E = \emptyset$
2. $E \neq \emptyset$ et pour tout $\bar{x} \in E$ il existe $\delta > 0$ tel que $B(\bar{x}, \delta) \subset E$

Exemple Une boule ouverte dans \mathbb{R} $B(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta\} =]x - \delta, x + \delta[$



Intérieur d'une boule

Définition 19 Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide. Alors $\bar{x} \in E$ est un **point intérieur** de E s'il existe $\delta > 0$ tel que $B(\bar{x}, \delta) \subset E$. L'ensemble des points intérieurs est appelé **intérieur** de E . Notation \mathring{E}

Remarque personnelle

On voit ici clairement que $\mathring{E} \subset E$. Cette relation est vraie grâce au δ qui rend "plus petit" notre point \bar{x}

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide. Alors $E \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert $\iff E = \mathring{E}$

Exemple 1 La boule ouverte $B(\bar{x}, \delta) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{y}\| < \delta\}$ est un sous-ensemble ouvert.

Soit $\bar{y} \in B(\bar{x}, \delta)$ Alors $\delta = \frac{1}{2}(\delta - \|\bar{x} - \bar{y}\|) > 0$ implique que :

$$\implies B(\bar{y}, \delta_1) \subset B(\bar{x}, \delta)$$

$$\implies B(\bar{x}, \delta) \subset \mathbb{R}^n$$

est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \delta > 0$

Exemple 2 Soit $n \geq 2$, $E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0, x_i > 0, i = 2, \dots, n\} \subset \mathbb{R}^n$
Ici, nous voulons montrer qu'il n'est pas ouvert.
Prenons le point $\bar{y} = (0, y_2, \dots, y_n)$ où $y_2, \dots, y_n > 0$. Alors pour tout $\delta > 0$:

$$B(\bar{y}, \delta) \ni (\frac{\delta}{2}, y_2, \dots, y_n) \notin E$$

Exemple 3 \emptyset et $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$ sont des sous-ensembles ouverts.
Ici on a deux cas de figure,

- *emptyset* : alors le sous-ensemble est ouvert par définition
- Sinon, soit $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ alors $B(\bar{x}, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ et cela : $\forall \delta > 0$

Exemple 4 $E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_i > 0 \forall i = 1, \dots, n\}$
Soit $\bar{y} \in E$. Alors, nous pouvons prendre $B(\bar{y}, \min(y_i)) \subset E$.

Propriétés

Ici on remarque deux grandes propriétés :

1. Toute réunion $\bigcup_{i \in I} E_i$ des sous-ensembles ouverts est un sous-ensemble ouvert.

$$\bar{x} \in \bigcup_{i \in I} E_i \implies \exists j : \bar{x} \in E_j, E_j \text{ est ouvert} \implies \exists \delta > 0 : B(\bar{x}, \delta) \subset E_j$$

$$\implies B(\bar{x}, \delta) \subset \bigcup_{i \in I} E_i$$

2. Toute intersection **finie** $\bigcap_{i=1}^n E_i$ des sous-ensembles ouverts est un sous-ensemble ouvert :

$$\begin{aligned} \bar{x} \in \bigcap_{i \in I} E_i &\implies \forall j \bar{x} \in E_j \text{ ouvert} \implies \exists \delta_j > 0 : B(\bar{x}, \delta_j) \subset E_j \\ &\implies B(\bar{x}, \min_j \delta_j) \subset E_j \forall j \implies B(\bar{x}, \min_j \delta_j) \subset \bigcap_{i=1}^n E_i = E \end{aligned}$$

Une intersection infinie des sous-ensembles ouverts de \mathbb{R}^n

Sous-ensemble fermé

Définition 20 Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble. Alors E est **Fermé** dans \mathbb{R}^n si son complément $CE = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \notin E\} = \mathbb{R}^n - E$ est ouvert

$$CB(\bar{x}, \delta) = E \subset \mathbb{R}^n \text{ est fermé} : E = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{y}\| \geq \delta\}$$

Puisque $C(CB(\bar{x}, \delta)) = B(\bar{x}, \delta)$ est ouvert.

Exemples

$$E = \{\bar{x}\} \subset \mathbb{R}^n$$

Ceci est **fermé**, car si on prends le complément :

$$\begin{aligned} CE &= \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y} - \bar{x}\| > 0\} \\ \forall \bar{y} \in CE \text{ la boule } \overline{B}(\bar{y}, \frac{1}{2} \|\bar{y} - \bar{x}\|) &\subset CE \end{aligned}$$

Question pendant le cours

Soient A et B deux sous-ensembles ouverts non-vides de \mathbb{R}^n Soit $A \setminus B = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \in A \text{ et } \bar{x} \notin B\}$ non-vidé.

$A \setminus B$ peut être ouvert, fermé ou ni ouvert ni fermé $A \setminus$ est soit ouvert, soit fermé $A \setminus$ ne peut pas être ouvert $A \setminus$ ne peut pas être fermé

Il n'y a qu'une seule possibilité et pour la trouver il faut des contre exemples.

Exemple

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \tan(x + y) \geq 1\}$$

Et on se pose la question A ouvert, fermé, ni ouvert, ni fermé ?

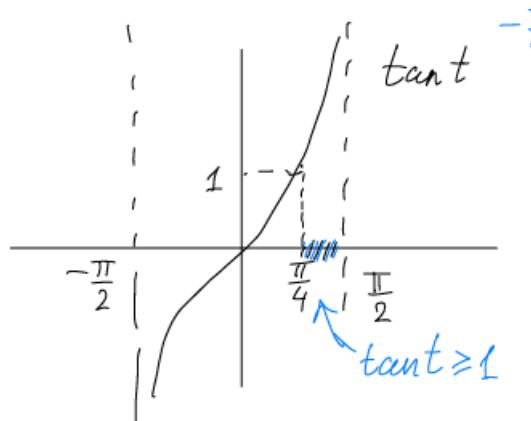
Déjà on va trouver toutes les valeurs possibles pour x et y c'est à dire la définition de \tan :

$$\begin{aligned} \implies \tan u \text{ existe} &\implies u \in]-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k[\quad k \in \mathbb{Z} \\ \tan u \geq 1 &\implies u \in [\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k[\quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

On a donc comme dit auparavant :

$$\begin{aligned} x + y &\in [\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k[\\ \frac{\pi}{4} + \pi k &\leq x + y < \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{4} + \pi k - x &\leq y < \frac{\pi}{2} + \pi k - x \end{aligned}$$

Ici A n'est ni ouvert ni fermé :



3. /

Explications :

1. A n'est pas ouvert : $(x, y) = (0, \frac{\pi}{4}) = p \in A$

$$\forall \delta > 0 \quad B(\bar{p}, \delta) \text{ contient } (0, \frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2}) \notin A$$

2. A n'est pas fermé : $(x, y) = (0, \frac{\pi}{2}) = q \in CA$

$$\forall \delta > 0 \quad B(\bar{q}, \delta) \text{ contient } (0, \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}) \in A \implies (0, \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}) \notin CA$$

Et comme CA n'est pas ouvert, alors A n'est pas fermé.

3.0.3 Méthodes de démonstration : Démonstration par le principe des tiroirs

Principes des tiroirs

Si $(n + 1)$ objets sont placés dans n tiroirs, alors au moins un tiroir contient 2 objets ou plus.

Plus généralement :

Théorème 10 Si n objets sont placés dans k tiroirs, alors au moins un tiroir contient $\frac{n}{k} = \min\{m \in \mathbb{N} : m \geq \frac{n}{k}\}$ objets, ou plus.

Ceci est exactement la même méthode que celle vu en AICC I qu'on appelait le pigeon hole principle, Les preuves sont exactement les mêmes est le but est exactement le même.

Rappel : Sous-ensembles ouverts et fermés dans \mathbb{R}^n

Définition 21 Soit E un ensemble tel que $E \subset \mathbb{R}^n$ Alors :

$$E \subset \mathbb{R}^n \iff \begin{cases} E = \emptyset \\ E \neq \emptyset \text{ et pour chaque point } \bar{x} \in E \text{ Il existe } \delta > 0 \text{ tel que } B(\bar{x}, \delta) \subset E \end{cases}$$

Définition 22 $E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé \iff son complémentaire $CE = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \notin E\}$ est ouvert

3.0.4 L'adhérence et la frontière d'un sous-ensemble \mathbb{R}^n

Adhérence

Définition 23 Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ sous-ensemble non vide. Alors l'intersection de tous les sous-ensembles fermés contenant E est appelée **l'adhérence de E** .

Notation \overline{E} est **l'adhérence** de E dans \mathbb{R}^n .

Si notre sous-ensemble est déjà fermé alors l'adhérence est égal à lui même :

$$E \subset \mathbb{R}^n \text{ fermé} \iff E = \overline{E}$$

Définition 24 $E \subset \mathbb{R}^n$ non-vide. $E \neq \mathbb{R}^n$. Un point $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est un point de **frontière** de E si toute la boule ouverte de centre x contient au moins un point de E et au moins un point de CE

L'ensemble des points frontières de E est **la frontière de E** Notation : ∂E
le d des dérivé partielle.

Exemple

$$E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, i = 1, \dots, n\} \implies \partial E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \exists i : x_i = 0, x_j \geq 0, i \neq j\}$$

$$\overline{E} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$$

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide. Alors :

- $\partial E \cap \overset{\circ}{E} = \emptyset$
- $\overset{\circ}{E} \cup \partial E = \overline{E}$
Ici, on le sait parce que en premier lieu $\overset{\circ}{E} \cup \partial E$ est fermé, et aussi $E \subset \overset{\circ}{E} \cup \partial E$
- $\partial E = \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E} = \overline{E} \cup C\overset{\circ}{E} \implies \partial E$ est fermé
- $\partial \emptyset = \emptyset, \partial \mathbb{R}^n = \emptyset$

Pourquoi faut il distinguer entre les sous-ensembles ouverts et fermés dans \mathbb{R}^n ? La topologie de \mathbb{R}^n est liée aux propriétés des limites des suites d'éléments de \mathbb{R}^n . Et comme la base de l'analyse se base sur la limite, il y a de quoi creuser.

3.0.5 Suites d'éléments de \mathbb{R}^n et la topologie de \mathbb{R}^n

Définition 25 Une suite d'éléments de \mathbb{R}^n est une application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$f : k \rightarrow \overline{x_k} = (x_{1_k}, x_{2_k}, \dots, x_{n_k}) \in \mathbb{R}^n$$

Où :

$$\{\overline{x_k}\}_{k=0}^{\infty}$$

est une suite d'éléments de \mathbb{R}^n

Définition 26 $\{\overline{x_k}\}_{k=0}^{\infty}$ est **convergent** et admet pour **limite** $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ si, pour tout $\varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0, \|\overline{x_k} - \overline{x}\| \leq \varepsilon$ Ou alors :

$$\overline{x_n} \in \overline{B(\overline{x}, \varepsilon)} \quad \forall k \geq k_0$$

Remarque

soit $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n), \overline{x_k} = (x_{1_k}, \dots, x_{n_k})$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{x_k} = \overline{x}$ si et seulement si la limite $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{j_k} = x_j \quad \forall j = 1, \dots, n$

Propriétés

1. La limite d'une suite $\{\overline{x_k}\}$, si elle existe, est unique.
2. Toute suite convergente $\{\overline{x_k}\}$ est bornée (\iff est contenue dans une boule fermée $\overline{B(\overline{o}, M)}$)

$$\begin{aligned} \lim \overline{x_k} = \overline{x} &\implies \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 \implies \|\overline{x} - \overline{x_k}\| \leq \varepsilon \\ &\implies \{\overline{x_0}, \dots\} \subset \overline{B(\overline{x}, \varepsilon)} \\ \{\overline{x_0}, \overline{x_1}, \dots, \overline{x_{k_0-1}}\} \cup \{\overline{x_k}, k \geq k_0\} &= \{\overline{x_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

Si nous prenons $M = \max\{\|\overline{x_i}\|, i = 0, \dots, k_0-1, \|\overline{x}\| + \varepsilon\}$

Bolzano-Weierstrass

Théorème 11 De toute suite bornée $\{\overline{x_k}\} \subset \mathbb{R}^n$ on peut extraire une sous-suite convergente.

Théorème à savoir, Un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé

Théorème 12 Un sous-ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé **si et seulement si** toute suite $\{\overline{x_k}\} \subset E$ d'éléments de E qui converge, a pour limite un élément de E .

Démonstration \implies par absurde

On cherche donc avec P et $\neg Q \implies$ absurde Soit $\overline{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{x_k}, \overline{x_k} \in E \forall k \in \mathbb{N}$. Supposons par l'absurde que $\overline{x} \notin E$, E est fermé

ce qui implique que $\overline{x} \in CE$ où CE est ouvert dans \mathbb{R}^n . Par la définition :

$$\exists \delta > 0 : B(\overline{x}, \delta) \subset CE \implies \{\overline{x_k} \forall k \in \mathbb{N}\} \cap B(\overline{x}, \delta) = \emptyset$$

D'autre côté, $\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{x_k} = \overline{x} \implies \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0, \overline{x_k} \in \overline{B(\overline{x}, \frac{\varepsilon}{2})} \subset B(\overline{x}, \delta)$

Contraposé, par contra- Supposons que E n'est pas fermé, $\iff CE$ n'est pas ouvert
posé Alors :

$$\implies \exists \bar{y} \in CE \forall k \in \mathbb{N}_+ B(\bar{y}, \frac{1}{k}) \cap E \neq \emptyset$$

$$\implies \exists \bar{y}_k \in B(\bar{y}, \frac{1}{k}) \text{ tel que } \bar{y}_k \in E$$

On a obtenu une suite $\{\bar{y}_k\}_{k \in \mathbb{N}_+} \subset E$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{y}_k = \bar{y} \in CE$

$$\iff \bar{y} \notin E$$

$$\implies \neq Q \text{ Alors } Q \implies P$$

Pour construire l'adhérence E d'un sous-ensemble non-vidé $E \subset \mathbb{R}^n$, il faut et suffit d'ajouter les limites de toutes suites convergentes d'éléments de E .

Définition 27 Un sous-ensemble non-vidé de \mathbb{R}^n est **compact** s'il est fermé et borné

Exemple Soit une boule fermé $\overline{B(\bar{x}, \delta)} = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{y}\| = \delta\}$ Alors $\overline{B(\bar{x}, \delta)} \subset \overline{B(\bar{o}, \|\bar{x}\| + \delta)}$ est borné. Et donc le sous-ensemble est compact

Exemple 2

$$E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : n \geq 2, x_1 = 0\}$$

est fermé, mais non bornée

$$\{\bar{a}_k = (0, k, 0, \dots)\}_{k \in \mathbb{N}}$$

Ici les normes $\|\bar{a}_k\| = k \in \mathbb{N}$. Et donc CE n'est ni borné ni fermé

Théorème Heine-Borel-Lebesgue

Théorème 13 Un sous-ensemble non-vidé $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact \iff de tout recouvrement de E par des sous-ensembles dans \mathbb{R}^n :

$$(E \subset \bigcup_{i \in I} A_i, A_i \subset \mathbb{R}^n \text{ ouverts, } A_i \in I \text{ un recouvrement de } E)$$

On peut extraire une **famille finie** d'ensemble que forment un recouvrement de E :

$$E \subset \bigcup_{i \in I} A_i \quad A_i \subset \mathbb{R}^n \text{ ouverts} \implies \exists \{A_{i_j}\}_{j=1}^m : E \subset \bigcup_{j=1}^m A_{i_j}$$

Ici on peut prendre un nombre infini d'ensemble qui peut recouvrir un nombre fini d'ensemble. Cela ne marche pas si E n'est pas compact.

Exemple 1 Une droite dans \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ est fermée, pas bornée \implies qu'elle n'est pas compacte.

Exemple 2

Intervalle ouvert dans \mathbb{R} tel que $E =]0, 1[\subset \mathbb{R}$ n'est pas fermé ce qui implique que notre ensemble E n'est pas compact

$$E \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}}]0, \frac{i}{i+1}[$$

On ne peut pas choisir un sous recouvrement fini. Car si on prends un nombre fini k on doit pouvoir s'arrêter à un k néanmoins ici on n'y arrive pas car on a toujours le nombre $k+1$

La propriétés d'être compactes est une propriétés très fortes

Exemple

Exercice

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(\sin(y-x)) \leq 0\}$$

Il faut démontrer que A est ouvert.

Question 6

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{y \cdot \ln x} < 1\}$$

1. Compact
2. Ouvert et borné
3. ni ouvert, ni fermé et non borné
4. fermé et non borné
5. ouvert et non borné
6. ni ouvert, ni fermé et borné

Pour répondre à cette question, on va prendre tout les cas possibles :

1. $\ln x \implies x > 0$
2. Soit $y = 0 \implies \{y = 0, x > 0\} \in S$
Aussi $\{x = 1, y \in \mathbb{R}\} \in S$
3. Soit $y > 0 \implies y \ln x \geq 0 \implies \ln x \geq 0 \wedge x \geq 1$

$$y \ln x < 1 \implies y < \frac{1}{\ln x}$$

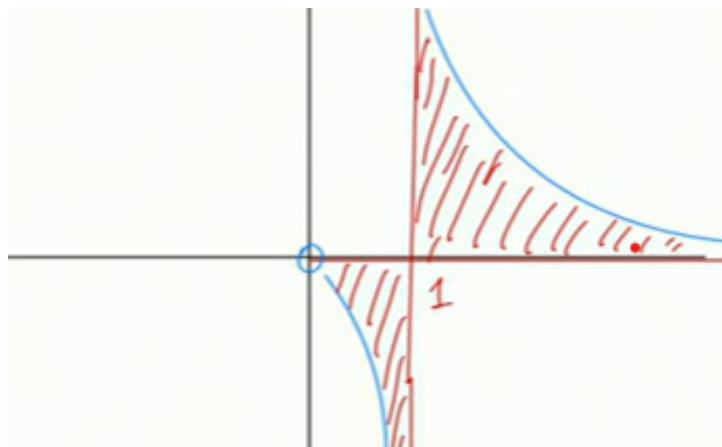
$$\{y > 0, x > 1, y < \frac{1}{\ln x}\} \subset S$$

4. Soit $y < 0 \implies y \ln x \geq 0 \implies \ln x \leq 0$ Alors :

$$y \ln x < 1 \implies y < \frac{1}{\ln x}$$

$$\{y < 0, 0 < x < 1, y > \frac{1}{\ln x}\}$$

Ce qui donne comme ensemble :



Qui est une droite vertical avec $x = 1$ entre nos deux droite bleu. Néanmoins les lignes bleu ne sont pas inclus, et comme vu sur l'image l'ensemble tends vers les infinis en $x = 1$ et donc, il n'est ni fermé ni borné. Et la raison pour laquelle ce n'est pas ouvert, la ligne rouge horizontale et fermé et donc ce n'est pas ouvert.

Attention à faire attention car ici les courbes bleu impliquent que l'ensemble n'est pas fermé mais même si elles étaient fermés, il manquerait quand même le point 0 qui impliquerait que l'ensemble ne serait pas fermé.

Chapitre 4

Fonction réelles de plusieurs variables réelles limite et continuité

4.0.1 Définition et exemples

Définition 28 Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ sous-ensemble non-vide, $n \geq 1$ Une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une application qui envoie chaque point $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in E$ dans \mathbb{R} .
 E est le domaine de définition de f et $f(E) \subset \mathbb{R}$ est l'ensemble image.

Exemple 1

$$f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 - y^2)}$$

Exemple 2

$$f(x, y) = 2x + 1$$

Plus généralement :

$$f(x, y) = ax + by + c; \quad a, b, c, \in \mathbb{R}, E = \mathbb{R}^2$$

Comment visualiser cette fonction ?

Soit $c = 0$

Considérons $f(x, y) = ax + by$: Graphique $F = \{(x, y, z) : ax + by = z\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by - z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x, y, z), (a, b, -1) \rangle = 0\}$
On a donc un plan dont les valeurs $a, b, -1$ sont les composantes d'un vecteur orthogonal : $\bar{n} = (a, b, -1)$ et contenant $(0, 0, 0)$.

Soit $c \in \mathbb{R}$ arbitraire, alors il faut monter le plan par c unité le long de l'axe z pour obtenir le graphique de $f(x, y) = ax + by + c$ Et donc :

$$z = ax + by + c$$

qui est le plan $\perp \bar{n} = (a, b, -1)$ qui contient $(0, 0, c)$

Niveau

Définition 29 Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $c \in f(E)$ Alors $\mathcal{N}_f(c) = \{\bar{x} \in E : f(\bar{x}) = c\} \subset E$

Exemple 4

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sin(x^2 + y) : E = \mathbb{R}^2 \\ f(E) &= [-1, 1] \end{aligned}$$

Je conseil de taper sur google les fonctions pour avoir une bonne visualisation de ces fonctions :

google.com

On cherche donc les niveaux :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_f(1) &= \{x, y\} \in \mathbb{R}^2 : \sin(x^2 + y) = 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x^2 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Samedi 15 mars 2025 — Cours 9 : Limite est continuité

Rappel

Définition 30 Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ sous-ensemble non vide, $n \geq 1$ Une fonction est une application qui envoie chaque point $\bar{x}_0 = (x_1, \dots, x_n) \in E$ dans \mathbb{R} .
 E est le domaine de définition de f et $f(E) \subset \mathbb{R}$ est l'ensemble image.

4.0.2 Limites et continuité

Définition 31 Une fonction **définie au voisinage de \bar{x}_0** (mais pas nécessairement en \bar{x}_0 tel que

$$[\exists \delta > 0 : B(\bar{x}_0, \delta) \subset E \cup \{\bar{x}_0\}]$$

admet pour **limite** le nombre réel l lorsque \bar{x} tend vers \bar{x}_0 si **pour tout $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tel que pour tout $\bar{x} \in E$ et $0 < \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq \delta$, on a $|f(\bar{x}) - l| \leq \varepsilon$**

Notation

Pour notre notation on utilise comme à notre habitude :

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l$$

Ici on a la norme $\|\bar{x} - \bar{x}_0\|$ à la place de la valeur absolue lorsqu'on parlait de fonction à une variable.

Continuité

Définition 32 Soit $\bar{x}_0 \in E$ un point intérieur de E . Alors $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $\bar{x} = \bar{x}_0$ **si et seulement si**

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0)$$

Exemple 1

$$f(x, y) = 2x + y$$

soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$: Alors

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} (x + 2y) = x_0 + 2y_0$$

Soit $\varepsilon > 0$ alors on cherche $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |(x + 2y) - (x_0 + 2y_0)|$ si on utilise plus la norme ici et la valeur absolue car on est sur le côté à droite. On utilise l'inégalité triangulaire :

$$\leq |x - x_0| + 2|y - y_0|$$

Ici on peut toujours prendre comme on a que $\bar{x} - \bar{x}_0$ plus petit que δ on doit les gérer ensembles et non séparément. Des lors :
Dès lors on choisit $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$

$$\leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + 2\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = 3\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Exemple 2

$$f(x, y) = x \cdot y$$

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ Alors $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} x \cdot y = x_0 \cdot y_0$

Démonstration :

Le cas où $x_0 = 0$ est vu en exercice, dès lors, nous traiterons ici le cas où nous supposons que $x_0 \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$ alors :

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| =$$

$$|y - y_0| \cdot |x| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} |x| \leq \frac{\varepsilon}{2} \implies \delta \leq \frac{\varepsilon}{2|x_0|} (x_0 \neq 0)$$

$$|x - x_0| |y| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \cdot |y| \leq \delta(|y_0| + \delta) \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\implies \delta \leq \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)}$$

On peut choisir comme valeur pour δ :

$$\implies \delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{2|x_0|}, \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)}, 1\right) \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Caractérisation de la limite à partir des suites convergentes

Théorème 14 Une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $\overline{x_0}$ admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque $\overline{x} \rightarrow \overline{x_0}$ **Si et seulement si** pour toute suite d'éléments $\{\overline{a_k}\}$ de $\{\overline{x} \in E : \overline{x} \neq \overline{x_0}\}$, qui converge vers $\overline{x_0}$, la suite $\{f(\overline{a_k})\}$ converge vers l .

$$\lim_{\overline{x} \rightarrow \overline{x_0}} f(\overline{x}) = l \iff \lim_{k \rightarrow \infty} f(\overline{a_k}) = l \text{ pour toute suite } \{\overline{a_k}\} \subset E \setminus \{\overline{x_0}\} : \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{a_k} = \overline{x_0}$$

Démonstration

$\implies P \implies Q$ Comme ce théorème est une équivalence, nous allons devoir prouver les deux sens. Commençons par $P \implies Q$. Prenons la définition de la limite à gauche :

$$\lim_{\overline{x} \rightarrow \overline{x_0}} f(\overline{x}) = l \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \overline{x} : 0 < \|\overline{x} - \overline{x_0}\| \leq \delta$$

$$\implies |f(\overline{x}) - l| \leq \varepsilon$$

$$\text{Si on a } \{\overline{a_k}\} : \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{a_k} = \overline{x_0} \implies \text{pour } \delta > 0 \exists k_0 : \forall k \geq k_0$$

$$\implies \|\overline{a_k} - \overline{x_0}\| \leq \delta \implies |f(\overline{a_k}) - l| \leq \varepsilon$$

$$|f(\overline{a_k}) - l| \leq \varepsilon$$

L'idée ici est de prendre le même δ sur les deux première lignes.

(\Leftarrow) par contraposée

Petit rappel pour la contraposée : si on a $Q \implies P$ alors la contraposée est $\neg P \implies \neg Q$ donc ici on veut prouver que si la limite n'est pas l alors la limite de $f(\overline{a_k})$ n'est pas non plus l . Supposons donc que $\lim_{\overline{x} \rightarrow \overline{x_0}} f(\overline{x}) \neq l$ Alors :

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists \overline{x}_\delta : \|\overline{x}_\delta - \overline{x_0}\| \leq \frac{1}{\delta} \text{ et } |f(\overline{x}_\delta) - l| > \varepsilon$$

Dès lors, on peut choisir $\delta = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$ ce qui implique :

$$\exists \overline{x}_k \in E : \|\overline{x}_k - \overline{x_0}\| \leq \frac{1}{k} \text{ et } |f(\overline{x}_k) - l| > \varepsilon$$

On obtient la suite $\{\overline{x}_k\}_{k=1}^\infty : \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{x}_k = \overline{x_0}$ mais $|f(\overline{x}_k) - l| > \varepsilon \forall k \in \mathbb{N}^*$ Dès lors

$$\implies f(\overline{x}_k) \neq l$$

Idee générale de la preuve

Ici on prends P et **Ensuite** $\neg P$ il est important de pouvoir différencier les deux et de pouvoir construire $\neg P$ à partir de P .

Opération algébrique

Soit f, g deux fonctions : $E_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\lim_{\overline{x} \rightarrow \overline{x_0}} f(\overline{x}) = l_1$ et $\lim_{\overline{x} \rightarrow \overline{x_0}} g(\overline{x}) = l_2$ Alors :

1. $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} (\alpha f + \beta g)(\bar{x}) = \alpha l_1 + \beta l_2$
2. $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} (f \cdot g)(\bar{x}) = l_1 \cdot l_2$
3. Si $l_2 \neq 0$, alors $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \left(\frac{f}{g}\right)(\bar{x}) = \frac{l_1}{l_2}$

Conclusion

Tous les polynômes en plusieurs variables et toutes les fonctions rationnelles sont continues sur leur domaines de définition,

La caractérisation de la limite à partir des suites convergentes est pratique pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 1

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Soit $\bar{a}_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \rightarrow (0, 0)$ qui implique donc pour la limite :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{a}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2}$$

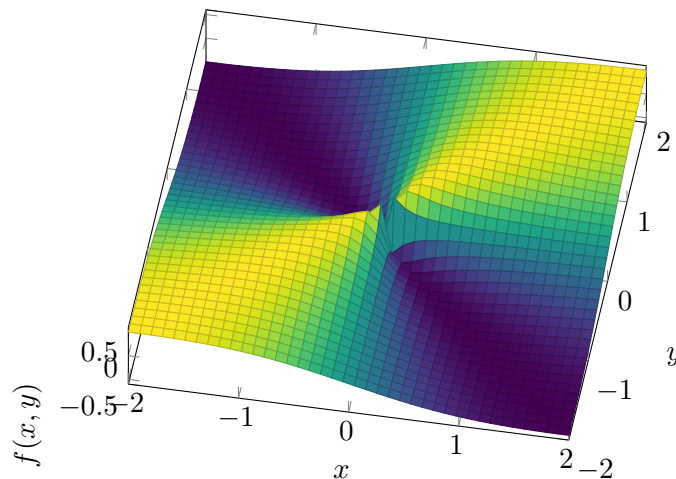
Dès lors, on peut aussi prendre $\bar{b}_k = (\frac{1}{k}, 0) \rightarrow (0, 0)$ qui par le même procédé :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{b}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0 \cdot \frac{1}{k}}{0 + \frac{1}{k^2}} = 0$$

Et donc, par la caractérisation à partir des suites, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ ne peut pas exister.

On peut aussi prendre une autre suite du genre $\bar{c}_k = (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{c}_k) = -\frac{1}{2}$

Alors quelle est la limite $f(x, y)$ en $(0, 0)$



Proposition

Théorème 15 Soit $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l$ si et seulement si pour toute courbe $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\Upsilon([a, b]) \subset D \setminus \{\bar{x}_0\} \text{ et } \lim_{t \rightarrow a^*} y(t) = \bar{x}_0, \text{ on a } \lim_{t \rightarrow a^+} f(y(t)) = l$$

On ne peut pas calculer la limite d'une fonction de plusieurs variable en faisant de manière consecutive par rapport à chaque variable.

Exemple 2

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Alors on prends deux fonctions ; :

$$y_1(t) = (t, 0)$$

$$y_2(t) = (0, t)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\gamma_1(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 - 0}{t^2 + 0} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - t^2}{0 + t^2} = -1$$

Et donc la fonction n'a pas de limite en ce point.

Exemple 3

soit :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \\ 0 \end{cases}$$

En prenant les mêmes fonctions :

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \implies \lim_{t \rightarrow 0} \gamma_1(t) = \bar{0}, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 + 0}{t^2 + 0} = 0$$

$$\gamma_2(t) = (0, t) \implies \lim_{t \rightarrow 0} \gamma_2(t) = \bar{0}, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - t^3}{0 + t^2} = 0$$

$$\gamma_3(t, t) \implies \lim_{t \rightarrow 0} \gamma_3(t) = \bar{0}, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 + t^2}{t^2 + t^1} = 0$$

On voit ici que ces fonctions ont toute la même limite, et si on prenait n'importe quelle autre fonction la limite existerait toujours. **Hypothèse** $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \bar{0}$

Méthode de changement de variables polaires

On peut démontrer l'existence de cette limite par le changement de variables en coordonnées polaires. :

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \text{ si } r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \\ y &= r \sin \varphi \text{ si } r \neq 0\end{aligned}$$

Alors on a :

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \implies f(r, \varphi) = \frac{r^3 \cos^3 \varphi + r^3 \sin^3 \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} \\ &= \frac{r^2 (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)}{r^2} \\ &= r (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)\end{aligned}$$

Ici, $\varphi(r)$ est une fonction inconnue, elle pourrait être n'importe quoi.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= \lim_{r \rightarrow 0} \Phi(r, \varphi) \\ \lim_{r \rightarrow 0} |r (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)| &= 0 \\ \implies \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= 0\end{aligned}$$

Cette méthode est efficace pour montrer l'existence des limites pour des fonctions de seulement deux variables, et qui tendent vers $(0, 0)$ tel que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$

Théorème des 2 gendarmes

Théorème 16 Soit $f, g, h : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

1. $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} g(\bar{x}) = l$
2. Il existe $\alpha > 0$ pour tout $x \in \{x \in E : 0 < ||\bar{x} - \bar{x}_0|| \leq \alpha\}$ on a :

$$f(\bar{x}) \leq h(\bar{x}) \leq g(\bar{x})$$

Alors :

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} h(\bar{x}) = l$$

Critère des 2 gendarmes en coordonnées polaires

Proposition Soit $D \subset \mathbb{R}^2, f : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = l \text{ si et seulement si}$$

$$\exists \delta > 0 \text{ et } \varphi :]0, \delta[\rightarrow \mathbb{R} :$$

- $\forall \varphi \in [0, 2\pi] \implies |f(x_0, r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) - l| \leq \varphi(r)$
- $\lim_{r \rightarrow 0^+} \varphi(r) = 0$

Exemple 5 soit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4xy^2}{x^2+y^2+3y^4} \\ 0 \end{cases}$$

$$f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{4r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi}{r^2 + 3r^4 \cos^4 \varphi} = \frac{4r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi}{r^2(1 + 3r^2 \sin^4 \varphi)}$$

$$|f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - 0| = \frac{4r^3 |\cos \varphi \sin^2 \varphi|}{r^2 |1 + 3r^2 \sin^4 \varphi|}$$

On sait ici que la partie du numérateur (la partie en haut j'ai un doute) est toujours plus petite ou égale à 1 et la partie du bas plus grande ou égale à 1. ce qui nous donne :

$$\leq \frac{4r^3}{r^2} = 4r = \Phi(r)$$

Alors

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Phi(r) = 0$$

Ce qui par les 2 gendarmes en coordonnées polaires nous donne :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = (0, 0)$$

Question à la fin du cours (Question 7)

Soit les fonctions

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos(xy)(x^2 + \sin(y^2))}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{Autrement} \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^4}{y^2 + x^4 + x^6}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}$$

La question est quelle fonction est continue en $(0, 0)$?

Solution

On passe d'abord en coordonnées polaire :

$f(x, y)$

$$f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{\cos(r^2 \sin \varphi \cos \varphi)(r^2 \cos \varphi + \sin(r^2 \sin^2 \varphi))}{r}$$

On prend ensuite la limite :

$$\begin{aligned} |f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - 0| &= \frac{|\cos(r^2 \sin \varphi \cos \varphi)| |r^2 \cos \varphi + \sin(r^2 \sin^2 \varphi)|}{r} \\ &\leq \frac{\overbrace{r^2 \cos \varphi}^{\geq r^2} + \underbrace{|\sin(r^2 \sin^2 \varphi)|}_{\leq |r^2 \sin^2 \varphi| \leq r^2}}{r} \\ &\leq \frac{2r^2}{r} = 2r \end{aligned}$$

Et donc ici on voit que la limite de la fonction va bien vers 0. ON peut aussi le "deviner" en voyant un r tout seul en bas et une $r^2 \cos \dots$ en haut. Cela peut donner quelque indice.

Solution
 $g(x, y)$

Pour cette fonction on refait le même procédé mais avant on va tester les limites du type $\lim_{t \rightarrow 0} g(0, t)$ et aussi $\lim_{t \rightarrow 0} g(t, 0)$ et on voit qu'elle ne donne pas la même réponse et que donc, la limite n'existe pas.

Mercredi 19 mars 2025 — Cours 10 : Limites de fonctions

Rappel

Voici un petit tappel sur les méthodes de calcul des limites de fonction $f : E_{\mathbb{C}\mathbb{R}^2} \rightarrow \mathbb{R}$

1. s'il existent 2 suites \overline{a}_k et $\overline{b}_k \subset E \setminus \{\overline{x}_0\} : \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{a}_k = \overline{x}_0, \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{b}_k = \overline{x}_0$ et que, $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\overline{a}_k) \neq \lim_{k \rightarrow \infty} f(\overline{b}_k)$ Alors la limite

$$\lim_{\overline{x} \rightarrow \overline{x}_0} f(\overline{x})$$

n'existe pas

2. S'il existent 2 courbe $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow E \setminus \{\overline{x}_0\}$ tel que :

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \gamma_1(t) = \lim_{t \rightarrow a^+} \gamma_2(t) = \overline{x}_0$$

Et que :

$$\lim_{t \rightarrow a^+} f(\gamma_1(t)) \neq \lim_{t \rightarrow a^+} f(\gamma_2(t))$$

Alors, la limite $\lim_{\overline{x} \rightarrow \overline{x}_0} f(\overline{x})$ n'existe pas.

3. Deux gendarmes : soit $f, g, h : E \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\lim_{\overline{x} \rightarrow \overline{x}_0} f(\overline{x}) = \lim_{\overline{x} \rightarrow \overline{x}_0} g(\overline{x}) = l$$

Et que $\exists \alpha > 0 : \forall x \in E : 0 < ||\overline{x} - \overline{x}_0|| < \alpha$ on a

$$f(\overline{x}) \leq h(\overline{x}) \leq g(\overline{x})$$

Alors, $h(\overline{x}) = l$

4. Coordonnées polaires : $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Alors $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = 0 \iff \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ **Ici $\varphi = \varphi(r)$ est une fonction inconnue de r**

5. Deux gendarmes en coordonnées polaires : $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = l \iff \exists \delta > 0 \text{ et } \Phi :]0, \delta[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall \varphi \in [0, 2\pi], \quad \forall r \in]0, \delta[\text{ on a } |f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - l| \leq \Phi(r)$$

$$\text{et } \lim_{r \rightarrow 0^+} \Phi(r) = 0$$

Développement limité

Pour calculer des limites, on peut aussi utiliser les DL connus pour les fonctions d'une seule variable pour trouver des estimations pour les deux gendarmes. Notamment, dans les limites lorsque $\|(x, y) - (0, 0)\| \rightarrow 0$ on peut remplacer des expressions $\Phi(x)$, $\varphi(x)$ par leur DL autour de $x = 0$ ou $y = 0$:

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k + t^n \cdot \varepsilon(t) \quad \text{1 seule variable}$$

$$x(y) = \sum_{k=0}^n b_k y^k + y^n \cdot \varepsilon(y), \dots$$

On peut composer une fonction d'une seule variable

Proposition Soit $D \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in D$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de (x_0, y_0) , telle que

Lundi 24 mars 2025 — Cours 11 : Différentiable

Méthode 7 Ré-currence

Le principe fondamental de récurrence Soit $S \subset \mathbb{N}$ sous-ensemble : $0 \in S$ et pour tout $n \in S$ on a $(n+1) \in S$. Alors $S = \mathbb{N}$

Méthode de récurrence Soit $P(n)$ une proposition qui dépend de $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$
Supposons que

- $P(n_0)$ est vraie
- $P(n)$ implique $P(n+1)$ pour tout $n \geq n_0$ naturel

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$

On regroupe quatre étapes pour une preuve par récurrence :

1. La proposition (Soit $P(n)$ la proposition pour x)
2. L'initialisation $P(0)$
3. L'hérédité : Supposons que $P(n)$ est vrai, alors il faut en déduire $P(n+1)$
4. Conclusion : Puisque $P(x_0)$ est vraie et que pour tout $x \geq x_0$, $P(n) \implies P(n+1)$, par récurrence $P(n)$ est vraie $\forall n \geq x_0$.

Attention à ne pas mélanger ce qu'on veut et ce qu'on a.

**Récurrance
généralisée**

Soit $P(n)$ une proposition qui dépend de $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$.

Supposons que (1) $P(n_0), \dots, P(n_0 + k)$ sont vraie pour un $k \in \mathbb{N}$

En deuxième $\{P(n), P(n+1), \dots, P(n+k)\}$ impliquent $P(n+k+1) \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$.

Alors, $P(n)$ est vraie $\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$

Chapitre 5

Calcul différentielle des fonctions de plusieurs variables

5.1 Dérivées partielles, le gradient

Dérivée partielle

Définition 33 Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $E \subset \mathbb{R}$ sous-ensemble ouvert.

Soit $g(s) = f(a_1, a_2, \dots, \overbrace{s}^k, a_{k+1}, \dots, a_n)$ où $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in E$.

$$g : D = \{s \in \mathbb{R} : (a_1, a_2, \dots, s, a_{k+1}, \dots, a_n) \in E\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Alors si g est dérivable en $a_k \in D$, on dit que la ***k*-ième dérivée partielle** de f en $\bar{a} \in E$ existe et est égale à $g'(a_k)$

$$\text{Notation : } \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) \equiv D_k f(\bar{a})$$

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(a_k + t) - g(a_k)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{e}_k) - f(\bar{a})}{t}$$

Gradient

Définition 34 Si toutes les dérivées partielles existent en $\bar{a} \in E$: $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{a}) \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a})$, alors on définit le **gradient** de f en \bar{a} comme :

$$\nabla f(\bar{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) \right)$$

5.2 Dérivée directionnelle

Définition Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ sous-ensemble ouvert, $\bar{a} \in E$, $\bar{v} \in \mathbb{R}^n, \bar{v} \neq 0$. La droite passant par \bar{a} en direction \bar{v} admet la paramétrisation $\bar{e}(t) = \bar{a} + t\bar{v}$ et cela $\forall t \in \mathbb{R}$.
Considérons la fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$
et soit $g(t) = f(\bar{a} + t\bar{v})$ la fonction d'une seule variable $t \in \mathbb{R}$:

$$g : D = \{t \in \mathbb{R} : \bar{a} + t\bar{v} \in E\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Définition 35 Si g est dérivable en $t = 0$ on dit qu'il existe **la dérivée directionnelle** de f en \bar{a} suivant le vecteur \bar{v} (en direction de \bar{v})
La dérivée directionnelle de f en \bar{a} en direction de \bar{v} est :

$$Df(\bar{a}, \bar{v}) = \frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{v}) - f(\bar{a})}{t}$$

Si $\bar{v} = \bar{e}_i$ ou \bar{e}_i est un vecteur unitaire, Alors

$$Df(\bar{a}, \bar{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})$$

Si toutes les dérivées directionnelles existent en \bar{a} (pour tout $\bar{v} \neq \bar{0}$), alors toutes les dérivées partielles existent en \bar{a} . La réciproque est fautive en générale

$$Df(\bar{a}, \lambda \bar{v}) = \lambda \cdot Df(\bar{a}, \bar{v}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \neq 0$$

5.3 Dérivabilité et la différentielle

Définition 36 Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $\bar{a} \in E$
On dit que f est **dérivable** au point \bar{a} s'il existe une transformation linéaire :

$$L_{\bar{a}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

et une fonction $r : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = f(\bar{a}) + L_{\bar{a}}(x - \bar{a}) + r(x) \quad \forall x \in E$$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{a}} \frac{r(x)}{\|x - \bar{a}\|} = 0$$

Définition 37 $L_{\bar{a}}$ s'appelle **la différentielle** de f au point $\bar{a} \in E$

Notation :

$$L_{\bar{a}} = df(\bar{a})$$

Une transformation linéaire $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que $\tau(\alpha\bar{x}_1 + \beta\bar{x}_2) = \alpha T(\bar{x}_1) + \beta T(\bar{x}_2)$ pour tout $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \mathbb{R}^n$. Par exemple $x + 3y$ est une transformation linéaire tandis que $x + 2y + 2$ n'en est pas une.

Mercredi 26 mars 2025 — Cours 12 : Tangente de la surface

Rappel

Définition 38 Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $a \in E$.

On dit que f est dérivable au point \bar{a} s'il existe une transformation linéaire $L_{\bar{a}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et une fonction $r : E \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$f(\bar{x}) = f(\bar{a}) + L_{\bar{a}}(\bar{x} - \bar{a}) + r(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in E$$

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \frac{r(\bar{x})}{\|\bar{x} - \bar{a}\|} = 0$$

Théorème 1

Théorème 17 Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{a} \in E$ tel que f est dérivable en \bar{a} de différentielle $L_{\bar{a}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Alors :

- f est continue en $\bar{a} \in E$
- Pour tout $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{v} \neq \bar{0}$, la dérivée directionnelle $Df(\bar{a}, \bar{v})$ existe et

$$Df(\bar{a}, \bar{v}) = L_{\bar{a}}(\bar{v})$$

- Toutes les dérivées partielles existent de f en \bar{a} et

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) = L_{\bar{a}}(\bar{e}_k)$$

Le gradient de f existent en \bar{a} et :

$$\nabla f(\bar{a}) = (L_{\bar{a}}(\bar{e}_1), L_{\bar{a}}(\bar{e}_2), \dots, L_{\bar{a}}(\bar{e}_n))$$

- Pour tout $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{v} \neq \bar{0}$

$$Df(\bar{a}, \bar{v}) = L_{\bar{a}}(\bar{v}) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{v} \rangle$$

- Pour tout $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\bar{v}\| = 1$, on a que :

$$Df(\bar{a}, \bar{v}) \leq \|\nabla f(\bar{a})\|$$

Et que si :

$$Df\left(\bar{a}, \frac{\nabla f(\bar{a})}{\|\nabla f(\bar{a})\|}\right) = \|\nabla f(\bar{a})\|$$

Alors le gradient donne la direction de la plus grande croissance de f en \bar{a}

Equation du plan tangent de la surface

Définition 39 Soit $\bar{a} : F(\bar{a}) = 0$, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $\bar{x} = \bar{a}$ et $\nabla F(\bar{a}) \neq 0$:
L'équation de l'hyperplan tangent à $F(\bar{x}) = 0$ au point \bar{a} est :

$$\langle \nabla F(\bar{a}), (\bar{x} - \bar{a}) \rangle = 0$$

Et si $F(a, b, c) = 0$ et $\nabla F(a, b, c) \neq 0$ Alors :

$$\langle \nabla F(a, b, c), (x - a, y - b, z - c) \rangle = 0$$

Ce qu'on fait en "gros" c'est de prendre le gradient qui donne le vecteur normal au plan tangent qui a donc dans ces coordonnées les valeurs pour l'équation cartésienne du plan, et on fait comme un changement de référentiel pour pouvoir avoir le 0 du plan à l'endroit où il touche le point, c'est de là que provient le $x - x_0, y - y_0, z - z_0$.

Résumé

Dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{e}_k) - f(\bar{a})}{t}$$

si la limite existe, $\bar{e}_k = (0, \dots, \overbrace{1}^k, \dots, 0)$.
Le gradient :

$$\nabla f(\bar{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) \right)$$

Dérivée directionnelles

$$Df(\bar{a}, \bar{v}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{v}) - f(\bar{a})}{t}$$

Si la limite existe, $\bar{v} \in \mathbb{R}^n, \bar{v} \neq \bar{0}$.

- $Df(\bar{a}, \bar{e}_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a})$ si $Df(\bar{a}, \bar{v})$ existent pour tout $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$
- Si f est dérivable en \bar{a} , alors par le théorème 1, f est continue en \bar{a} , $Df(\bar{a}, \bar{v})$ existe, et on a :

$$L_{\bar{a}}(\bar{v}) = Df(\bar{a}, \bar{v}) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{v} \rangle$$

Théorème deux

Théorème 18 Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{a} \in E$. Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x})$ existent sur $B(\bar{a}, \delta)$ et sont continues en \bar{a} . Alors f est dérivable en $\bar{a} \in E$

Lundi 7 avril 2025 — Cours 13 : Jacobienne

5.3.1 Fonction à valeur dans \mathbb{R}^m , $m \geq 1$, la matrice jacobienne

Définition 40 Plus généralement, on peut considérer les fonctions :

$$\bar{f} : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ f_2(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

Chaque fonction f_i est une fonction réelle de n variables réelles.

Dérivée La k -ième dérivée partielle de $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ en $\bar{a} \in E$ est :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) \end{pmatrix}$$

Mercredi 2 avril 2025 — Cours 14 : Ca dérive

5.3.2 Méthode de démonstration : Méthode 7 : Récurrence

Récurrence forte Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, et $P(n)$ une proposition qui dépend de $n \in \mathbb{N} : n \geq n_0$.
Supposons que :

1. $P(n_0)$ est vrai
2. $\{P(n_0), P(n_0 + 1), \dots, P(n)\}$ impliquent $P(n + 1)$

Alors $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$.

Exemple Graphe à $n \geq 2$ sommets tels que tous les 2 sommets sont connectés par exactement une arête. Démontrer qu'il existe un chemin suivant les arêtes qui passe par tous les sommets.

Démonstrations

On a donc $P(n)$ est la proposition donnée.
La base avec $n = 2$ qui nous donne que $P(s)$ est vraie.
Hérédité : On suppose que $P(k)$ est vrai $\forall k : 2 \leq k \leq n$. Il faut en déduire $P(n + 1)$
Soit X un sommet dans l'ensemble de $(n + 1)$ sommets.
Alors X est connecté avec chacun des n sommets qui restent.
Soit :

$$A = \{ \text{sommets } v : v \rightarrow X \} \exists \text{ une arête de } v \text{ vers } X$$

$$B = \{ \text{sommets } u : X \rightarrow u \} \exists \text{ une arête de } X \text{ vers } u$$

Cela implique donc que $A \cap B = \emptyset$ et $|A \cup B| = n$ ce que cela implique est donc forcément : $|A| \leq n$ et aussi que $|B| \leq n$.
Ce qui par la supposition de récurrence de récurrence, dans A il existe un chemin C_A suivant les arêtes qui relie tous les sommets de A ; de même dans B il existe un chemin C_B qui relie tous les sommets de B (c'est vrai aussi trivialement dans le cas où $|A| = 1$ ou $|B| = 0$ (respectivement aussi pour B)).
Soit v_A le dernier sommet du C_A et u_B le premier sommet de C_B . Alors $C_A \rightarrow v_A \rightarrow X \rightarrow u_B \rightarrow C_B$ est un chemin qui relie tous les $(n + 1)$ sommets.

Ce qui implique que $P(n + 1)$ est vrai.

Conclusion : Par récurrence forte, $P(n)$ est vrai $\forall n \geq 2$.

Résumé Récurrence

Réurrence simple	$P(n_0)$ est vrai, $P(n) \implies P(n+1), \forall n \geq n_0 \implies P(n)$ est vrai $\forall n \geq n_0$.
Réurrence généralisée	$P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(n_0+k)$ est vraies. $\{P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(n_0+k)\} \implies P(n_0+k+1)$ Et cela implique que $P(n)$ vrai $\forall n \geq n_0$.
Réurrence forte	$P(n_0)$ est vrai ; $\{P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(n)\} \implies P(n+1)$ Et cela implique que $P(n)$ est vrai $\forall n \geq n_0$.

Mercredi 9 avril 2025 — Cours 15 : Jacobe

5.3.3 Fonction à valeur dans $\mathbb{R}^m, m \geq 1$, La matrice Jacobienne

Définition 41 Plus généralement, on peut considérer les fonctions :

$$\bar{f} : E^{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ à valeurs dans } \mathbb{R}^m$$

$$\bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ f_2(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

Chaque composante de f est une fonction réelles. de n variables réelles.

Il faut le voir comme en algèbre linéaire, par exemple une matrice d'application 2×2 revient à faire une fonction qui va de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Aussi, on a déjà vu en fait des fonctions à valeur dans \mathbb{R}^m , le gradient :

Preneons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \sin(xy)$ Si on calcule son gradient on obtient :

$$\nabla f/(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

Et donc si on prends sa transposée :

$$(\nabla f(x, y))^T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Ce qui nous donne un champ vectoriels. (pour chaque point dans $\mathbb{R}^2 \in$ ensemble de départ, on a un vecteur.

k -eme dérivée partielle k -eme dérivée partielle de $f : e \rightarrow \mathbb{R}^m$ pour $\bar{a} \in E$:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_k}(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

Si chacune des fonctions f_1, \dots, f_m admet la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x_k}$ en \bar{a} .

Dérivée directionnelle Soit $\bar{v} \neq \bar{0}$. La dérivée directionnelle de $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ suivant \bar{v} en $\bar{a} \in E$ est :

$$D\bar{f}(\bar{a}, \bar{v}) = \begin{pmatrix} Df_1(\bar{a}, \bar{v}) \\ Df_2(\bar{a}, \bar{v}) \\ \vdots \\ Df_m(\bar{a}, \bar{v}) \end{pmatrix}$$

Si, encore une fois les $Df_i(\bar{a}, \bar{v})$ existent $\forall i = 1, \dots, m$.

Limite

Définition 42 $\bar{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ admet $\bar{l} \in \mathbb{R}^m$ pour limite lorsque $\bar{x} \rightarrow \bar{a}$ si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tel que

$$0 < \|\bar{x} - \bar{a}\|_{\mathbb{R}^n} \leq \delta \implies \|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{l}\|_{\mathbb{R}^m} \leq \varepsilon$$

Résumé

Ce qu'on fait ici finalement c'est exactement ce qu'on a toujours faire mais avec plusieurs fonctions en même temps, on fait toute les calculs (gradient, dérivée directionnelle, limite) par **composante**.

Fin du cours

J'ai skip la fin de ce cours malgré le faite qu'il y a beaucoup de définition mais toutes ces définitions et porpositons se trouve dans le résumé *Calcul_diff* sur moodle

Pour ce qui est de pourquoi la matrice Jacobienne est importante, c'est surtout car elle permet de remplace la dérivée interne des fonctions à une variable : En analyse I, lorsqu'on dérivait des fonctions composée, on faisait de la sorte :

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Pour les fonctions à plusieurs composantes, on utilise la matrice jacobienne exactment de la même façons que la dérivée interne.

Lundi 14 avril 2025 — **Cours 17 : Jacob** beg

Rappel

Pour rappel des semaine précédentes

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q \\ \implies J_{\bar{f} \cdot \bar{g}(\bar{a})} &= J_{\bar{f}(\bar{g}(\bar{a}))} \cdot J_{\bar{g}(\bar{a})} \end{aligned}$$

alors :

$$F'(t) = f(g(t), t) \cdot g'(t) - f(h(t), t) \cdot h'(t) + \int_{h(t)}^{g(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

Exemple

Si nous prenons une fonctions qui ne s'exprime en fonctions élémentaires :

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx$$

On a que :

$$\begin{aligned} I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} dx &\implies I'(\alpha) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{x^\alpha - 1}{\ln x} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^\alpha \cdot \ln x}{\ln x} dx \\ &= \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1} \end{aligned}$$

Et ensuite on peut résoudre tout cela

Tout cela ne se retrouve pas à l'examen

5.3.4 Formule de Taylor

Théorème

Théorème 19 Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{p+1} au voisinage de $\bar{a} \in E$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in B(\bar{a}, \delta) \cap E$ il existe $0 < \theta < 1$ tel que :

$$f(\bar{x}) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \dots + \frac{1}{p!}F^{(p)}(0) + \frac{1}{(p+1)!}F^{(p+1)}(\theta)$$

Explication

$f(\bar{x}) = F(1), f(\bar{a}) = F(0)$ Depuis analyse I on sait que, la formule de Taylor pour $F(t)$, fonction d'une seule variable

$$\begin{aligned} F(t) &= F(0) + F'(0) \cdot t + \frac{1}{2}F''(0) \cdot t^2 + \dots + \frac{1}{p!}F^{(p)}(0) \cdot t^p + \frac{1}{(1+p)!}F^{(p+1)}(\theta) \\ \implies f(\bar{x}) &= F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \dots \text{ Même chose} \end{aligned}$$

On a donc ici :

$$F'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t(\bar{x} - \bar{a})) - f(\bar{a})}{t} = Df(\bar{a}, (\bar{x} - \bar{a}))$$

Cas $n = 2$

Soit $\bar{a} = (a, b)$, $\bar{x} = (x, y)$, f de classe C^{p+1}

Soit $f(x, y) : E \rightarrow \mathbb{R}$, on cherche le polynôme de Taylor d'ordre p autour de (a, b) .

Par le changement de variable : $F(t) = f(a + t(x - a), b + t(y - b))$. Trouver $F'(t), F''(t)$ en termes de f .

$$\begin{aligned} F(t) &= f \circ g(t), f_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, g(t) = (a + t(x - a), b + t(y - b))^T \\ &\implies F'(t) = J \end{aligned}$$

Question 15

soit $f(x, y) = \frac{1}{\sin(x+y)}$ Et le coefficient de $(x - \frac{\pi}{2})^2 y^2$ dans le polynôme de Taylor d'ordre 4 autour de $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ est :

- $\frac{1}{24}$
- $\frac{5}{4}$
- $\frac{5}{24}$
- $\frac{5}{6}$

donc si on a $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ si on regarde $\sin(\frac{\pi}{2} + 0) = 1$ et donc on ne peut pas faire un développement limité. On prends donc $s = (x - \frac{\pi}{2}, y)$ afin de pouvoir utiliser les développement limité :

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \varepsilon(x^4)$$

Pour un développement d'ordre 4. On pose :

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} + s\right) &= \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2} \cos s + \cos \frac{\pi}{2} \sin s} = \frac{1}{\cos s} = \frac{1}{1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{4!} \varepsilon(s^4)} \\ &= \frac{1}{1 - (\frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{4!} + \varepsilon(s^4))} \end{aligned}$$

On obtient donc pour le polynôme :

$$P_4 = 1 + \left(\frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{4!}\right) + \left(\frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{4!}\right)^2$$

On pose donc pour $\frac{1}{\sin(s)}$:

$$f(x, y) = \frac{1}{(x - \frac{\pi}{2} + y - \frac{1}{6}(x - \frac{\pi}{2} + y)^3)}$$

Le laplacien d'une fonction de classe C^2 **Le Laplacien**

Définition 43 Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur E . La fonction $\delta f : E \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\Delta f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

Est le laplacien de f .

Harmonique

Définition 44 Une fonction telle que $\Delta f = 0$ sur $E \subset \mathbb{R}^2$ s'appelle *harmonique*

Une fonction harmonique sur un domaine compact atteint son min et son max **sur la frontière** du domaine (Sans démonstration).

On peut prendre par exemple la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$ qui si l'on calcule $\Delta f(x, y) = 2 - 2 = 0$ Et l'on voit sur un graphe que si l'on prends une ensemble compact ses max, min se trouvent toujours sur la frontière, ce qui n'est pas le cas par exemple pour $f(x, y) = x^2 + y^2$.

5.3.5 Extrema d'une fonction a plusieurs variable

Mercredi 16 avril 2025 — Cours 18 : Cours

Point historique

oui

Rappel

Soit un ensemble ouvert $E \subset \mathbb{R}^n$ contenant un point $a \in E$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^3(E)$.

Alors f s'écrit :

$$f(x) = P_2 f_a(x) + \varepsilon(\|x - a\|^2) \quad (5.1)$$

Avec le polynôme de Taylor de f d'ordre 2 : autour de (a, b) tel que :

$$P_2 f_a(x) = f(a) + \langle \nabla f(a), x - a \rangle + \frac{1}{2}(x - a)^T \text{Hess} f(a)(x - a) \quad (5.2)$$

Extrema d'une fonction de plusieurs variable

Définition 45 Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ alors on appelle $a \in E$ un **point stationnaire** si $\nabla f(a) = 0$

Extremum local

Définition 46 La fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ admet un **maximum local** (resp. **minimum local**) au point $a \in E$ s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in E \cap B(a, \delta)$ on a $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$)

Proposition si $a \in E$ est un extremum local et $\nabla f(a)$ existe, alors a est un point stationnaire ($\nabla f(a) = 0$)

Proposition Soit $g_i(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$.
Par nos hypothèses, $g'_i(a_i)$ existe et $g_i(x)$ admet un extremum local en $x = a$ et donc, $g'_i(a_i) = 0$. Vu que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = g'_i(a_i) = 0$, et que l'argument s'applique pour tout $i = 1, \dots, n$, on a $\nabla f(a) = 0$.

Remarque La réciproque est fausse, $\nabla f(a) = 0$ n'implique pas que a est un extremum local.

Selle

Définition 47 Un point stationnaire qui n'est pas un extremum local est un **point selle** de f .

Exemple Si $f(x, y) = x^2 - y^2$, alors $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$ s'annule au point $(0, 0)$, mais ce n'est pas un extremum local.

Point critique

Définition 48 $a \in E$ est un point critique de $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ si a est un point stationnaire ($\nabla f(a) = 0$), ou bien au moins une dérivées partielles de f n'existe pas en $x = a$.

Théorème 20 soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $C^2(E)$, $a \in E$ un point stationnaire, et λ_i les valeurs propres de Hess de $f(a)$.

- $\forall i, \lambda_i > 0 \implies a$ est un minimum local
- $\forall i, \lambda_i < 0 \implies a$ est un maximum local
- $\exists i, j$ tels que $\lambda_i > 0$ et $\lambda_j < 0 \implies a$ est un point selle :

Résultat du théorème

Ce que nous dit ce théorème et que les Hessiennes peuvent nous dire si un point est un extremum local.

Prenons comme exemple :

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

On a pour la Hessienne

$$\text{Hess}f(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On peut aussi prendre la fonction

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

On a pour la Hessienne :

$$\text{Hess}f(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Soit maintenant un dernier exemple :

$$f(x, y) = x^2$$

On a pour notre matrice :

$$\text{Hess}f(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce genre d'exemple sont pas très pratique car le théorème nous permet pas de faire le calcul a notre place.

Esquisse de démonstration

La démonstration n'est pas parfaite, il y a des imprécisions.

Si la fonction est de classe C^2 , par le théorème de schwartz, on a que la Hessienne de $f(a)$ est symétrique, alors cela implique que la Hessienne est diagonalisable.

On écrit $\text{Hess}f(a) = ODO^T$ avec O orthogonale et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

De manière équivalente, on a $\text{Hess}f \circ O^T(a) = D$, un changement de variable $y = O^T x$.

On veut donc analyser notre fonction grâce au valeur propre de la Hessienne Par la formule de Taylor de $f(y)$ dans un voisinage de a , on peut écrire de manière appriciamtive :

$$f(y) = f(a) + \langle \nabla f(a), y - a \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial y_i^2}(a)(y_i - a_i) + \varepsilon(\|y - a\|^2)$$

Ce qui si on l'approxime :

$$\approx f(a) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i (y_i - a_i)^2$$

Ici on remplace la fonction directement par les valeurs propre de la Hessienne. Donc si $\lambda_i > 0$ on a $f(y) \geq f(a)$, $\forall y$ dans un voisinage de $a \implies a$ est un minimum local de f . La “faute” ici est que l'on est entrain d'étudier le changement de variable de f et non f directement.

Ici on a deux chose a ne pas confondre, $f \circ O^T(a)$ et ODO^T qui n'ont pas le même produit, le premier ici prends un produit de matrice classique tandis que $f \circ O^T$ est une composition de fonction entre des fonctions dans $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Remarque

Soit $c(t) = a + tv$ pour $v \in \mathbb{R}^n$. si $h(t) = f(c(t))$ admet un minimum au point 0 cela n'implique pas que a est un minimum local de f .

Si on prends la fonction $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$ autour de $a = 0$, selon la droite $c(t) = t(u, v)$.

On remplace par $c(t) = t(u, v)$:

$$h(t) = (tv \cdot (tu)^2) (tv - 2(tu)^2) = t^2 (v^2 + q(t))$$

$$h'(t) = 2t(v^2 + q(t)) + t^2 q'(t)$$

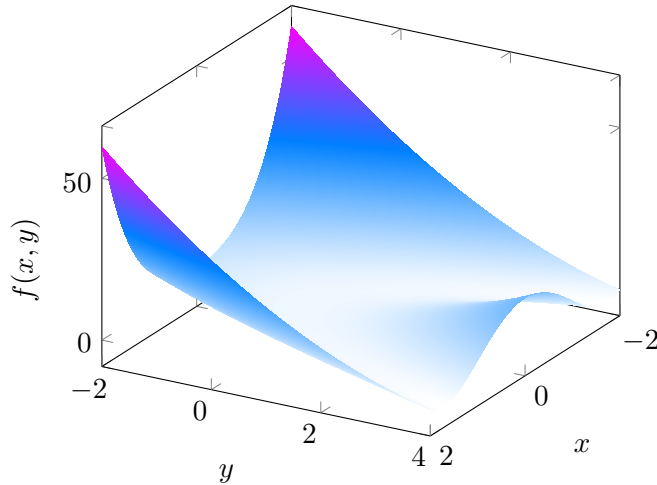
Donc on redérive une fois encore pour pouvoir trouve les maximum est minimum locaux.

$$h''(t) = 2v^2 + q(t) + 2 \text{ tel que } '(t) + t^2 q''(t)$$

On a que $h'(0) = 0$ et $h''(0) \geq 0$ et donc 0 est un minium local de h .

Cependant si on prends la courbe, $c'(t) = (t, \frac{3}{2}t^2)$ quand $t \neq 0$ on a des points proches de $(0, 0)$, mais tels que :

$$f(c'(t)) = \left(\frac{3}{2}t^2 - t^2\right) \left(\frac{3}{2}t^2 - 2t^2\right) = -\frac{1}{4}t^4 < f(0, 0)$$



Théorème à connaître
(condition équivalents sur Hess $f(a)$, cas $n = 2$)

Théorème 21 La proposition suivante s'applique à toute matrice symétrique, donc on note $H := \text{Hess}f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \iff \det H > 0 \text{ et } r > 0$$

$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 \iff \det H > 0 \text{ et } r < 0$$

$$\text{sgn}(\lambda_1) \neq \text{sgn}(\lambda_2) \iff \det H < 0$$

Démonstration Le déterminant et la trace de H sont invariants par conjugaison. La diagonalisation $H = ODO^T$ donne alors :

$$rt - s^2 = \det H = \det D = \lambda_1 \lambda_2$$

$$r + t = \text{Tr} H = \text{Tr} D = \lambda_1 + \lambda_2$$

1 \implies Supposons que $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ immédiatement, on a que $\det H = \lambda_1 \lambda_2 > 0$.
Ensuite, $\lambda_1 \lambda_2 = rt - s^2 > 0$ dont $rt > s^2 \geq 0 \implies r$ et t qui sont de même signe.
De plus, $\text{Tr} H = \lambda_1 + \lambda_2 = r + t > 0$. On conclut que r doit être strictement positif. (si la multiplication est positive **et** l'addition est positif).

Dans l'autre sens Supposons que $\det H > 0$ et $r > 0$.
Alors $\det H = \lambda_1 \lambda_2 > 0 \implies \lambda_1$ et λ_2 sont de même signe.
Ensuite, $\lambda_1 \lambda_2 = rt - s^2 > 0$ dont $rt > s^2 \geq 0$ mais $r > 0$ dont $t > 0$ aussi, $\text{Tr} H \implies r + t = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$ et donc on utilise le même argument que précédemment, $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$.

2 Le point 2 est laissé en exercice

3 $\det H < 0 \iff \lambda_1 \lambda_2 < 0 \iff \lambda_1$ et λ_2 sont de signe opposés.

Critère de Sylvester

Théorème 22 Condition équivalentes aux conditions suffisantes dans le cas $n = 3$.

Soit $f \in C^2(E)$ au voisinage de a tel que $\nabla f(a) = 0$:

Soit

- $\Delta_1 = \det \text{Hess}_x f(a)$
- $\Delta_2 = \det \text{Hess}_{x,y} f(a)$
- $\Delta_3 = \det \text{Hess}_{x,y,z} f(a)$

Alors :

- $\Delta_1 > 0, \Delta_2, \Delta_3 > 0 \iff \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0 \iff a$ est un minimum local de f
- $\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 < 0 \iff \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0 \iff a$ est un maximum local de f
- Autrement $\Delta_3 \neq 0 \implies \exists \lambda_i > 0$ et $\lambda_j > 0$ et $\lambda_j < 0 \implies a$ est un point selle de f

Exercice

Le but est de trouver les points critique et de déterminer leur nature.

Soit $f(x, y) = y^3 + 3y^2 - 4xy + x^2$. Alors $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ donc tout les points critiques trouvés sont stationnaire.

On calcule

$$\nabla f(x, y) = (-4y + 2x, 3y^2 + 6y - 4x)$$

Et Pour la Hessienne :

$$\text{Hess}f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6y + 6 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x, y) = 0 \iff \begin{cases} 2x = 4y \\ 3y^2 + 6y = 4x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ y(3y - 2) = 0 \end{cases}$$

Donc si on remplace ce qu'on trouve dans la Hessienne :

On étudie donc les points stationnaire $(x, y) \in \{(0, 0), (\frac{4}{3}, \frac{2}{3})\}$ Si on cherche donc les points selles :

$$\text{Hess}f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \implies \det = -4 < 0$$

Ce qui implique que le point $(0, 0)$ est un point selle.

Si on prends donc $\text{Hess}f(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} = 4 > 0 \implies$ que ce point est un minimum local.

Lundi 28 avril 2025 — Cours 19 : Test blanc

5.3.6 Corrigé du test blanc

Ici ce n'est pas le corrigé de la professeur mais moi directement lorsque je fais mes exercices donc il se peut que l'approche ne soit pas rigoureuse peut être même éronnée en quelque sorte :

Question 1 La solution $y(x)$ de l'équation différentielle :

$$y'(x) = \frac{x}{x^2 + 9}(y(x) - 1)$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 7$ vérifie aussi pour $y(4) = \dots$

Corrigé

Donc on voit ici en premier lieu que l'équation est une EDVS, on arrive à séparer les y des x :

$$y'(x) = \frac{x}{x^2 + 9}(y - 1)$$

$$\frac{y'}{y - 1} = \frac{x}{x^2 + 9}$$

A partir de là, il faut alors intégrer des deux côtés et on trouvera la solution :

$$\int \frac{1}{y-1} dy = \int \frac{x}{x^2+9} dx$$

$$\ln|y-1| + C' = \frac{1}{2} \ln \overbrace{[x^2+9]}^{\geq 0} + C$$

$$|y-1| = \ln C \overbrace{\sqrt{x^2+9}}^{\geq 0}$$

$$y-1 = C\sqrt{x^2+9}$$

$$y = 1 + C\sqrt{x^2+9}$$

Ensuite on va donc trouver la valeur pour $y(0)$:

On évalue $y(0) = 1 + C \cdot \sqrt{9} = 1 + 3C \implies C = 2$. Et donc

On évalue notre fonction en $y(4) = 1 + 2\sqrt{16+9} = 11$

Question 2

La solution $y(x)$ de l'équation différentielle :

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{2}{(1+x^2)^2}$$

sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$...

Pour cette question soit on apprend par coeur la formule soit on la construit.

On a une équation du type $y' + p(x)y = f(x)$. On sait que la solution générale est donné par :

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_{part}(x)$$

Commençons par la solution homogène :

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

On arrive assez aisément à la séparer :

$$y' = -\frac{y}{x}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$$

Ensuite on intègre des deux côtés :

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + C''$$

Et à partir d'ici (je vais le faire très proprement un peu overkill)

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|\frac{1}{x}| + C''}$$

$$y = e^{C''} e^{\ln|\frac{1}{x}|}$$

$$y = C''' \frac{1}{x}$$

Après avoir trouver la solution homogène associé $y_{hom} = C\frac{1}{x}$, On utilise la méthode de la variation de la constante pour trouver la solution particulière :

$$y_{part}(x) = c(x)y_{hom}(x)$$

Et par le cours (section 2.3.1) on cherchera donc la fonction $c(x)$:

$$c(x) = \int f(x)e^{P(x)}$$

On voit ici qu'il faudra faire attention au signe qu'on avait enlevé dans le ln. Donc on avait trouver pour $P(x) = \ln|Cx|$ (on peut mettre le C dedans si on fait une manip avec l'exponentielle).

$$c(x) = \int \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx$$

Ici j'ai essayé avec les éléments simples mais j'ai rien trouvé donc je vais essayé avec un changement de variable :

Soit $u = 1 + x^2$, on prends $\frac{du}{dx} = 2x$ si on remplace :

$$\begin{aligned} c(x) &= \int \frac{2x}{u^2} \frac{du}{2x} \\ &= \int \frac{1}{u^2} du \\ &= -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{(1+x^2)} \end{aligned}$$

On obtient donc pour la solution particulière :

$$y_{part}(x) = -\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{x}$$

On a donc la solution générale :

$$y(x) = \frac{1}{x(1+x^2)} + \frac{C}{x}$$

avec $C = \frac{1}{2}$

Question 3

La solution de $y(x)$:

$$y'' - y' - 6y = 4e^{-x}$$

On trouve d'abord la solution homogène :

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

Qui a pour racine 3 et -2 :

$$y_{hom} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$$

Pour la solution particulière, on pose $y = Ae^{-x}$ avec :

$$y' = -Ae^{-x} \quad y'' = Ae^{-x}$$

Si on remplit l'équation on obtient :

$$\begin{aligned} Ae^{-x} + Ae^{-x} - 6Ae^{-x} &= 4e^{-x} \\ 2A - 6A &= 4 \\ A &= -1 \end{aligned}$$

Et donc on trouve que :

$$y(x) = -e^{-x} + C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}$$

Et donc on posera pour les deux conditions tel que :

$$\begin{cases} -2 = -1 + C_1 + C_2 \\ 3 = 1 + 3C_1 - 2C_2 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

Ce qui donne comme solution final :

$$y(x) = -e^{-x} - e^{-2x}$$

Question 4

Le sous ensemble :

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1 \text{ et } -1 < xy < 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

Est

- ouvert et borné
- fermé et non borné
- fermé et borné
- ouvert et non borné

Ici déjà on peut voir en quelque sorte à l'oeil nu si le sous-ensemble est ouvert ou fermé. Si l'on le regarde comme un ensemble dans \mathbb{R} on voit que tout les $<$ ou $>$ donne des ensemble ouvert (de ce type $] \quad [$) ce qui est "l'équivalent" de ouvert. et donc peut deviner ici que l'ensemble est ouvert et non fermé.

Pour ce qui est de borné, prenons la deuxième condition, pour montrer qu'un ensemble n'est pas borné il faut montrer qu'il y a une de ces variables qui peut s'étendre jusqu'à l'infini (c'est une sorte d'esquisse de preuve mais ça permet de se repérer lors de qcm).

Donc on prend la deuxième condition : $-1 < xy < 1$ si on prends par exemple : $y = \frac{1}{k+1}$ et $x = k$ et que nous faisons la limite du produit :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1}$$

On voit que cette limite est bornée par 1 : soit $k \in \mathbb{R}$ prenons :

$$\begin{aligned} 0 &< 1 \\ k &< k + 1 \\ \frac{k}{k+1} &< 1 \end{aligned}$$

On voit ici donc que x peut tendre vers l'infini et fera toujours parti de l'ensemble, donc l'ensemble n'est pas bornée.

Question 5

Soit $\{\bar{x}_n\}$ la suite d'éléments de \mathbb{R}^2 définie par

$$\bar{x}_n = \left(n \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right), \frac{(-1)^n}{n} \sin(n) \right)^T$$

Et on demande la convergence de la suite et/ou elle est bornée.

Pour rappel lorsqu'on traite de suite dans \mathbb{R}^n c'est comme si on traite de suite individuelle donc prenons la première : On reconnaît ici bien le schéma de la suite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Si on prends la première suite on voit que cela ressemble dangereusement comme ceci :

$$\frac{\sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

Néanmoins à cause du $(-1)^n$ la suite converge **absolument** vers 1 mais oscille entre -1 et 1, donc la suite est bornée mais pas convergente.

Pour l'autre On peut aussi utilise le même argument mais dans "l'autre sens" car on a $\frac{(-1)^n}{n}$ qui tends vers 0 mais $\sin(n)$ quant a lui va juste oscillé à l'infini, donc la suite ne pourra jamais converger vers une valeur.

$$\left| \frac{1}{n} \sin(n) \right| \leq \frac{n}{n}$$

Et on arrive pas a montrer que la limite tends vers 0 (le sinus se "comporte" comme la variable a l'intérieur lorsque celle ci s'approche de 0). Et donc la suite est bornée mais pas convergente

Question 6

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \frac{x^3 y + y^3 x}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Comme je soupçonne grandement que la fonction soit dérivable je vais commencer par ça :

Soit $r(\bar{x}) = f(\bar{x}) - f(\bar{a}) - \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{x} - \bar{a} \rangle$.

Pour ce qui est du gradient, on peut le faire de tête car il y a une puissance

de 3 en haut et une puissance de 2 en bas. donc quand tu feras la limite tu tomberas sur 0 des deux côtés. donc $r(\bar{x}) = f(\bar{x})$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos^3 \psi \sin \psi + r^4 \sin^3 \psi \cos \psi}{r^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r^2 (\text{blabla}) = 0\end{aligned}$$

Donc la fonction est dérivable.

Mercredi 30 avril 2025 — Cours 20 : Test blanc ou pas

Rappel : Thm.
Condition suf-
fisante pour un
extremum local
d'une fonction

Théorème 23 Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 , $\bar{a} \in E$:
 $\nabla f(\bar{a}) = \bar{o}$.
Alors :

1. $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \dots, \lambda_n < 0$ sont négatives \implies un maximum locale en \bar{x} .
2. $\exists \lambda_i > 0$ et $\exists \lambda_j < 0 \implies$ pas **pas d'extremum en** en $\bar{x} = \bar{a}$ (un point selle).

Proposition cas
 $n = 2$

Les condition du Théorème sur la matrice $Hess_f(\bar{a})$ sont équivalentes aux conditions suivantes. Posons

$$\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} = Hess_f(\bar{a})$$

Cas $n = 3$

Lorsque $n = 3$ on a la matrice de Hessienne qui est donnée par :

$$Hess_f(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}$$

Min et Max
d'une fonction
continue sur
un ensemble
compact

Rappel

Théorème 24 Une fonction *continue* sur un sous-ensemble *compact* $D \subset \mathbb{R}^n$. atteint son min et son maximum. Formellement :

$$\exists \bar{c}_1 \in D : f(\bar{c}_1) = \min_{\bar{x} \in D} f(\bar{x})$$

$$\exists \bar{c}_2 \in D : f(\bar{c}_2) = \max_{\bar{x} \in D} f(\bar{x})$$

Pour trouver \bar{c}_1 et \bar{c}_2 il faut :

1. Trouver les points critiques $\{\bar{c}_1\}$ de f sur D (avec la frontière)
2. Trouver les points $\{\bar{d}_j\}$ de min, max de $f(\nabla D)$ calculer les valeurs de $f(\bar{d}_j)$
3. Choisir le min et le max de $\{f(\bar{c}_i), f(\bar{d}_j)\}$

Exemple

$f(x, y) = 6x^2 + 2x^2y - 3y^2 + 2y + 1$ Trouver le min et le max absolus (global) de f sur le carré $E = \{-2 \leq x, y \leq 2\}$.

La première étape est sur l'ensemble $E = \{-2 < x, y < 2\}$

On calcule les dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -12x + 4xy = 4x(3 - y) = 0$$

Qui arrive lorsque $x = 0$ ou $y = 3$ qui n'est pas dans notre ensemble, et donc : $-6y + 2 = 0 \implies y = \frac{1}{3}, \left(0, \frac{1}{3}\right) \in E$.

De l'autre côté :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 - 6y + 2$$

En calculant les dérivées partielles secondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -12 + 4y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4x$$

Ce qui implique lorsqu'on calcule la Hessienne :

$$Hess_f\left(0, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -12 + \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Et on voit que le déterminant de cette matrice est plus grand que 0 et que toutes les valeurs propres sont négatives ($\det > 0$ et $\lambda_i < 0$ nous donne que toutes les valeurs propres sont négatives (les deux seulement). Ce qui nous donne un maximum local sur E avec la frontière en $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

*Min et Max
de f sur la
frontière de E*

Maintenant on cherche le minimum et maximum sur la frontière directement tel que :

$$\begin{aligned} f(x, y)_{x=\pm 2} &= -24 + 8y - 3y^2 + 2y + 1 \\ &= -3y^2 + 10y - 23 = g(y) \end{aligned}$$

$$g'(y) = -6y + 10 \implies y = \frac{5}{3}$$

Ce qui nous donne comme élément de l'ensemble $(\pm 2, \frac{5}{3})$.

Du côté du y :

$$f(x, y)_{y=2} = -6x^2 + 4x^2 - 12 + 4 + 1 = -2x^2 - 7 = h_1(x) \implies (0, 2) \text{ est un } \dots$$

$$\text{Avec } h_1'(x) = -4x, h_1''(x) = -4 < 0.$$

$$f(x, y)_{y=-2} = -6x^2 - 4x^2 - 12 - 4 + 1 = -10x^2 - 15 = h_2(x) \implies (0, -2) \text{ est un } \dots$$

$$\text{Avec } h_2'(x) = -20x \text{ et } h_2''(x) = -20 < 0.$$

On regarde finalement les coins :

$$\begin{aligned} f(\pm 2, 2) &= -15 \\ f(\pm 2, -2) &= -55 \end{aligned}$$

On cherche donc sur toutes les valeurs qu'on a trouvées le minimum et le maximum qui nous donne $\frac{4}{3}$ pour le maximum global sur E et -55 le minimum global sur E . avec :

$$\begin{aligned} f\left(0, \frac{1}{3}\right) &= \frac{4}{3} \\ f(\pm 2, -2) &= -55 \end{aligned}$$

5.3.7 Théorème des fonctions implicites

Question

Fonction implicite : Une dépendance $f = f(\bar{x})$ qui est définie par une équation. La question posée est, est-ce que l'équation $F(x, y) = 0$ définit une fonction $y = y(x)$?

Exemple 1

$$\text{Soit } F(x, y) = x + 3y = 0$$

On voit ici que la fonction $y = f(x)$ est donnée par : $y = -\frac{1}{3}x$ et on voit que cela est défini partout.

Exemple 2

Soit la fonction $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Et soit $(a, b) \in$ le cercle, alors $a^2 + b^2 + 1 = 0$. Si $b > 0 \implies y = \sqrt{1 - x^2}$ au voisinage de (a, b) $b > 0$

Si $b < 0 \implies y = -\sqrt{1 - x^2}$ au voisinage de (a, b) : $b < 0$. Si

$b = 0$ on a deux solution pour chaque x dans le voisinage $(\pm 1, 0)$

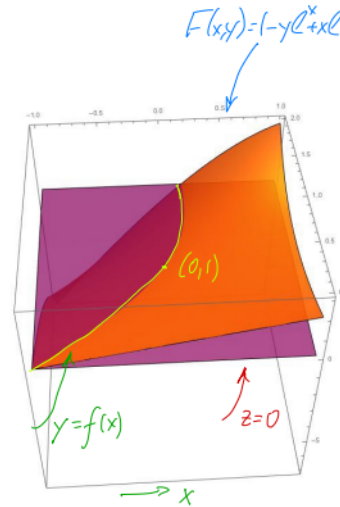
Surface

Définition 49 Une surface (*ligne*) de niveau d'une fonction $F(x, y, z)$ ou $(F(x, y))$ est la surface (ligne) définie par l'équation

$$F(x, y, z) = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Exemple 3

soit la fonction $F(x, y) = 2 - ye^x + xe^y$ on cherche $y = f(x)$ autour d'un point donné $(0, 1)$?



Soit $(x, y) = (0, 1)$. On vérifie que $F(x, y) = 0$ définit autour de $(0, 1)$ une fonction $y = f(x)$ telle que $F(x, f(x)) = 0$ au voisinage de $x = 0$ et trouver $f'(0)$.

On trouve d'abord :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -e^x x e^y \text{ en } (0, 1) = -1 \neq 0$$

Ce qui implique que le TFI est applicable.

Il existe alors une fonction $f(x)$ tel que $y = f(x)$ au voisinage de $(0, 1)$: $F(x, f(x)) = 0$. et

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)} = -\frac{ye^x + e^y}{-e^x + xe^y}_{(0,1)} = -\frac{-1 + e}{-1} = -1 + e = f'(0)$$

On a donc pour l'équation de la tangente au point $(0, 1)$ à la courbe $y = f(x)$.

$$\begin{aligned} y - 1 &= (-1 + e)(x - 0) \\ y &= 1 + (e - 1)x \end{aligned}$$

Théorème des fonctions implicites

Théorème 25 $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 au voisinage de $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in E$ telle que :

$$F(\bar{a}) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_n}(\bar{a}) \neq 0$$

Alors il existe un voisinage $B(\bar{a}', \delta)$ de $\bar{a}' = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ et une fonction $f : B(\bar{a}', \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

1. $a_n = f(a_1, \dots, a_{n-1})$
2. $F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0$ et cela $\forall (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in B(\bar{a}', \delta)$.

De plus, f est de classe C^1 dans un voisinage de \bar{a}' et on a

$$\frac{\partial f}{\partial d_p}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_p}(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1}))}{\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1}))} \quad \forall p \in \{1, \dots, n-1\}$$

Cas particulier du TFI : deux variables

Soit $F(x, y) : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $F(a, b) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Alors l'équation $F(x, y) = 0$ définit localement autour de (a, b) une fonction $y = f(x)$ telle que :

1. $f(a) = b$
2. $F(x, f(x)) = 0$
3. $f'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$

Cela veut dire que l'on peut calculer $f'(a)$ sans savoir la formule explicite pour $f(x)$.

Cas particulier du TFI : trois variables

Soit $F(x, y, z) : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tel que $F(a, b, c) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$. Alors il existe localement une fonction $z = f(x, y)$ telle que

1. $f(a, b) = c$
2. $F(x, y, f(x, y)) = 0$ pour tout couple, (x, y) dans un voisinage de (a, b)
3. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))}$; ∂ je ferais après

Q16

L'équation $F(x, y) = \sin(x + y) \cos(x - y) - \frac{1}{2} = 0$. On cherche $g(x)$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \cos(x + y) \cos(x - y) - \sin(x + y) \sin(x - y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \cos(x + y) \cos(x - y) + \sin(x + y) \sin(x - y)$$

Donc si on simplifie :

$$\frac{\cos(2x)}{\cos(2y)}$$

On pose les questions : $\exists x = h(y)$ et $\exists y = g(x)$ et nous voyons que cela est vrai seulement pour $x = h(y)$. :

Comme dit précédemment on trouve donc la dérivée de la fonction grâce à notre formule :

$$h'(y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \right)} = -\frac{0}{-1}$$

On obtient logiquement pour la pente de la tangente $x = h(y)$ en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \right)$ est 0.

Lundi 5 mai 2025 — Cours 21 : TFI

Rappel TFI

TFI en 2
variables

Théorème 26 Soit $F(x, y) : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $F(a, b) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y} a, b \neq 0$. Alors l'équation $F(x, y) = 0$ définit localement autour de (a, b) une fonction $y = f(x)$ telle que :

- $f(a) = b$
- $F(x, f(x)) = 0$ pour tout x dans un voisinage de $x = a$
- $f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)} \Big|_{(x, f(x))}$

TFI en 3
variables

Soit $F(x, y, z) : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , tel que $F(a, b, c) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$. Alors il existe localement une fonction $z = f(x, y)$ telle que :

1. j'ai pas eu le temps parce que vim compile pas

Exemple 4

Soit $F(x, y, z) = x \cos y + y \cos z + z \cos x - 1$

En premier lieu on vérifie les conditions, $F(0, 0, 1) = 0$ et que $F(x, y, z) = 0$ définit autour de $(0, 0, 1)$ une fonction $z = f(x, y)$ telle que $F(x, y, f(x, y)) = 0$. On cherche ensuite $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$

1. $F(0, 0, 1) = 0 \cos 0 + 0 \cos 1 + 1 \cos 0 - 1 = 1 - 1 = 0$
2. $\frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 1) = -y \sin z + \cos x$ en $(0, 0, 1)$ ce qui implique :

$$-0 \sin 1 + \cos 0 = 1 \neq 0 \implies \text{TFI est applicable}$$

Ce qui implique que $\exists z = f(x, y)$ la solution de $F(x, y, z) = 0$ autour de $(0, 0, 1)$

- 3.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)} = -\frac{\cos y - z \sin x}{-y \sin z + \cos x} = -\frac{1}{1} = -1$$

4.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)} = -\frac{-x \sin y + \cos z}{-y \sin z + \cos x} = -\cos 1 = -\cos 1$$

Donc ici lorsqu'on a une question de ce type lors de l'examen on voit que c'est une question qui est censée être facile vu que sa résolution est très algorithmique.

Plan tangent

Des lors grâce à ce qu'on a trouvé et aussi comme on a trouvé que l'équation du plan tangent est :

$$z = f(a,b) + \langle \nabla f(a,b), (x-a, y-b) \rangle$$

Comme on a déjà trouvé les dérivées partielles grâce à notre petit exemple on a :

$$\begin{aligned} z &= 1 + \langle (-1, -\cos 1), (x-0, y-0) \rangle = 1 + (-x) + (-\cos 1) \cdot y = 1 - x - (\cos 1) \cdot y \\ \implies z &= 1 - x - (\cos 1) \cdot y \text{ est l'équation du plan tangent à la surface} \end{aligned}$$

(Surface qui est celle de $z = f(0,0,1)$)

5.3.8 Application de TFI Equation d'un (hyper plan tangent à la surface définie par une équation

Application de TFI : Soit $F(x_1, \dots, x_n)$ de classe C' sur $E \subset \mathbb{R}^n$ et $\exists i : 1 \leq i \leq n$ tel que :

$$p \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{a}) \neq 0 \text{ pour un } \bar{a} \in E \text{ où } F(\bar{a}) = 0$$

Alors le TFI implique que l'équation $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ définit une (hyper) surface $x_i = f(x_1, \dots, x_n)$ (où on a enlevé le i)

Equation du plan tangent

Si $a \neq 0$, alors $DF(\bar{a}, \bar{v}) = 0 \iff \bar{v}$ est tangent à la hyper surface de niveau.

$$DF(\bar{a}, \bar{v}) = \langle \nabla F(\bar{a}), \bar{v} \rangle = 0 \text{ pour tout vecteur } \bar{v} \text{ dans l'hyperplan tangent à } F(\bar{x})$$

Et tout cela au point $\bar{x} = \bar{a}$ Ce qui implique et se fait implique (ssi) :

$$\bar{v} = (\bar{x} - \bar{a}) \perp \nabla F(\bar{a})$$

Théorème 27 L'équation de l'hyperplan tangent à $F(\bar{x}) = 0$ au point $\bar{a} : F(\bar{a}) = 0$ est :

$$\langle \nabla F(a, b, c), (x-a, y-b, z-c) \rangle = 0$$

Exemple 4

soit donc la même fonction $F(x, y, z) = x \cos y + y \cos z + z \cos x - 1 = 0$ et on a aussi que $\bar{a} = (0, 0, 1)$

$$\begin{aligned}\nabla F(0, 0, 1) &= (1, \cos 1, 1) \neq \bar{0} \\ \implies < (1, \cos 1, 1), (x - 0, y - 0, z - 1) > &= 0 \\ \implies x + y \cos 1 + z - 1 &= 0 \\ \implies z &= 1 - x - (\cos 1)y\end{aligned}$$

Ce qui nous donne bien l'équation du plan tangent
Ce qui pourrait donner comme exercice : $y = g(x, z)$ tel que :

$$F(x, g(x, z), z) = 0 \text{ au voisinage de } (0, 0, 1)$$

Exemple 5

Soit l'ellipsoïde $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0$
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 6$ Trouver une équation du plan tangent à la surface au point (a, b, c) .

$$\begin{aligned}\nabla F(x, y, z) &= (2x, 4y, 6z)_{(a,b,c)} = (2a, 4b, 6c) \neq \bar{0} \quad \forall (a, b, c) \in \text{l'ellipsoïde} \\ < \nabla F(a, b, c), (x - a, y - b, z - c) > &= 0\end{aligned}$$

Ce qui nous donne l'équation du plan tangent en (a, b, c) :

$$\begin{aligned}< (2a, 4b, 6c), (x - a, y - b, z - c) > &= 2ax - 2a^2 + 4by - 4b^2 + 6cz - 6c^2 = 0 \\ ax + 2by + 3cz - a^2 - 2b^2 - 3c^2 &= 0 \\ ax + 2by + 3cz &= 6\end{aligned}$$

Lien avec le plan tangent au graphique d'une fonction $z = f(x, y)$

Si $F(x, y, z) = z - f(x, y) \implies \frac{\partial F}{\partial z} = 1 \neq 0$ Ce qui implique que $\nabla F(x, y, z) \neq \bar{0}$. Alors :

$$\forall (x, y, z) \text{ où } z = f(x, y)$$

Si $c = f(a, b) \iff (a, b, c) \in \text{surface de niveau } F(x, y, z) = 0$
Et donc par le TFI l'équation du plan tangent au point (a, b, c) est :

$$\nabla F(a, b, c), (x - a, y - b, z - c) > = 0$$

Développement

Donc on développe notre équation :

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c) \cdot (x - a) + \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c) \cdot (y - b) + \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \cdot (z - c) &= 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + z - f(a, b) &= 0 \\ z = f(a, b) + < \nabla f(a, b), (x - a, y - b) > &\end{aligned}$$

Exemple :
droite tangente à la fonction définie implicitement :

Exemple 6

Soit la surface tel que : $F(x, y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - 4 = 0$ Alors, le but est de trouver l'équation de la tangente au point $(a, b) = (2^{\frac{3}{2}}, 2^{\frac{3}{2}})$

Donc on met nos valeurs dedans : $2^{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}} + 2^{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}} - 4 = 0$ ce qui implique que $F(a, b) = 0$

On calcule ensuite le gradient :

$$\nabla F(x, y) = \left(\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}, \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} \right)_{(2^{\frac{3}{2}}, 2^{\frac{3}{2}})} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \neq \bar{0}$$

On a donc que l'équation de la tangente est $\langle \nabla F(a, b), (x - a, y - b) \rangle = 0$

On va donc développer et simplifier :

$$\left\langle \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3} \right), (x - 2^{\frac{3}{2}}, y - 2^{\frac{3}{2}}) \right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{3} (x - 2^{\frac{3}{2}}) + \frac{\sqrt{2}}{3} (y - 2^{\frac{3}{2}}) = 0$$

$$x + y - 2 \cdot 2^{\frac{3}{2}} = 0$$

$$x + y - 2^{\frac{5}{2}} = 0$$

Question 17

Soit la fonction $f(x, y) = \ln(x + y^2) - y^2 - x^2$ Alors sur son domaine de définition la fonction f on demande un peu tout ce qui se passe avec les points stationnaires etc..

On commence par calculer le gradient :

$$\nabla f(x, y) = \frac{1}{x + y^2} - 2x, \frac{2y}{x + y^2} - 2y$$

On cherche donc comment on peut arriver à trouver les 0 tel que :

$$\nabla f(x, y) = \bar{0}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x + y^2} - 2x = 0 \\ \frac{2y}{x + y^2} - 2y = 0 \end{cases} \implies 1 = 1 \frac{1}{x + y^2}$$

et ce qui si on simplifie grâce à notre première équation :

$$2x = \frac{1}{x + y^2} = 1 \implies x = \frac{1}{2}$$

On obtient donc $y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ ce qui nous donne donc 2 points stationnaires, on peut aussi poser $y = 0$ ce qui nous donne bien 0 pour la dérivée partielle de y et pour celle de x :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x + y^2} &= 2x \\ \frac{1}{x} &= 2x \implies x^2 = \frac{1}{2} \\ x &= \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

et il faut faire attention au domaine de définition qui ne prends par en compte le point $(-\sqrt{\frac{1}{2}}, 0)$ car il n'est pas défini pour le \ln et donc on obtient 3 point stationnaire.

On va maintenant calculer la hessienne avec ces quatre valeurs propres :

5.3.9 Extrema liés. Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Théorème cas $n = 2$

Théorème 28 *Condition nécessaire pour un extremum sans contrainte. Soient les fonctions $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Supposons que $f(x, y)$ admet un extremum en $(a, b) \in E$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$:*

$$\min, \max\{f(x, y) : (x, y) \in E \text{ et } g(x, y) = 0\}$$

et que $\nabla g(x, y) \neq \vec{0}$ pour $g(x, y) = 0$ Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$$

**Extrema liés
interprétation
géométrique**

Soit $g(x, y) = 0$ la contrainte \implies c'est une courbe d niveau :

$$\implies \nabla g(x, y) \perp \text{ à la courbe, } \nabla g(x, y) \neq 0$$

Si (a, b) est un extremum local de $f(x, y)$ sur la courbe. Alors :

$$Df(a, b)(\vec{v}_{\text{tangent à } g(x, y) = 0}) = \langle \nabla f(a, b), \vec{v}_{\text{tang}} \rangle = 0$$

On obtient donc que :

$$\begin{aligned} \nabla f(a, b) = \vec{0} &\implies \nabla f(a, b) = 0 \cdot \nabla g(\bar{a}, b) \cdot \lambda = 0 \\ \nabla f(\bar{a}, b) \perp \text{ à la courbe} &\iff \nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b), \lambda \neq 0 \end{aligned}$$

Ce qui implique finalement :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla f(a, b) = \lambda \cdot \nabla g(a, b)$$

Qui est le théorème de Lagrange.

Rappel Extrema liés. Méthode des multiplicateur de Lagrange

Théorème (cas $n = 2$)

Théorème 29 Condition nécessaire pour un extremum sans contrainte. (mais qui n'est pas suffisante)

Soit les fonctions $f, g : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

Supposons que $f(x, y)$ admet un extremum en $(a, b) \in E$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$. Ce qui se dit tel que : un extremum de $\{f(x, y) : (x, y) \in E \text{ et } g(x, y) = 0\}$. Et que $\nabla g(a, b) \neq \vec{0}$.

Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$$

Définition 50 λ est le multiplicateur de Lagrange

Extrema liés :
interprétation
géométrique

soit $g(x, y) = 0$ avec la contrainte que c'est sur une courbe de niveau, alors $\nabla g(x, y) \perp$ à cette courbe de niveau, $\nabla g(x, y) \neq \vec{0}$ (contrainte mentionnée dans le théorème).

Si (a, b) est un extremum local de $f(x, y)$ sur la courbe, il y a deux possibilités :

- Soit c'est un extremum local de f sur \mathbb{R}^2
- Soit ce n'est pas un extremum local de f sur \mathbb{R}^2 mais un extremum local seulement sur la courbe.

Ce qui implique donc dans chaque cas :

- $\nabla f(a, b) = \vec{0}$
- $\nabla f(a, b) \perp$ à la courbe de niveau.

Ce qui implique donc que :

- $\nabla f(a, b) = 0 \cdot \nabla g(a, b)$
- $\nabla f(a, b) = \lambda \cdot \nabla g(a, b)$ où $\lambda \neq 0$

Démonstration

Pour la démonstration je renvoie le pdf de Joachim Favre qui est plus propre et plus clair que moi

Les idées majeurs sont TFI, qui permet de mieux réécrire notre fonction, par la suite la dérivée de la composition (avec la jacobienne avec le "changement de variable" :)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ h(x) \end{pmatrix}$$

Extrema liés
cas général

Théorème 30 Soit $f, g_1, \dots, g_m : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions de classe C^1 tel que $m \leq n - 1$. Soit $\bar{a} \in E$ un extremum de f sous les contraintes $g_1(\bar{x}) = \dots = g_m(\bar{x}) = 0$.

Supposons que les vecteurs $\nabla g_1(\bar{a}), \dots, \nabla g_m(\bar{a})$ sont linéairement indépendants.

Alors il existe un vecteur $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$\nabla f(\bar{a}) = \sum_{k=1}^m \lambda_k \nabla g_k(\bar{a})$$

Ici on utilise linéairement indépendant comme “analogie” à $\nabla g(a, b) \neq \bar{0}$ lorsque on avait $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. (maintenant on va dans \mathbb{R}^n) En particulier si on cherche un extremum de f sous la contrainte $g(\bar{x}) = 0$ on obtient les équations :

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) = \nabla g(\bar{x}) & \text{si } \nabla g(\bar{x}) \neq 0 \text{ pour } g(\bar{x}) = 0 \\ g(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

Exemple 1

Trouver les extrema de la fonction $f(x, y, z) = 4x + 2y - z$ sous la contrainte $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 21 = 0$ (qui est donc une sphère de rayon $\sqrt{21}$). On commence avec le théorème, le gradient : $\nabla g(2x, 2y, 2z) \neq (0, 0, 0)$ sur la sphère de rayon $\sqrt{21}$

Alors, par le théorème de Lagrange, si on a $(x, y, z) \in$ sphère qui est un point d’extremum local de f sur la sphère, alors, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \lambda \nabla g(x, y, z) \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 21 \end{aligned}$$

On a donc ici quatre équations dont les trois du gradients :

$$\begin{cases} (4, 2, -1) = \lambda(2x, 2y, 2z) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 21 \end{cases}$$

Donc si on pose notre première trois relations :

$$\begin{cases} 4 = \lambda 2x \\ 2 = \lambda 2y \\ -1 = \lambda 2z \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{2}{\lambda} \\ y = \frac{1}{\lambda} \\ z = -\frac{1}{2\lambda} \end{cases} \implies \begin{cases} x = -4z \\ y = -2z \end{cases}$$

Et cela dans $g(x, y, z) = 0$.

On implique ce qu’on trouve à notre contrainte :

$$16z^2 + 4z^2 + z^2 = 21 \implies 21z^2 = 21 \implies z = \pm 1$$

Ce qui nous implique que : $z = -1, y = 2, x = 4$ ou alors l’opposé qui nous donne :

$$(-4, -2, 1), (4, 2, -1)$$

On remet notre valeur dans notre fonction :

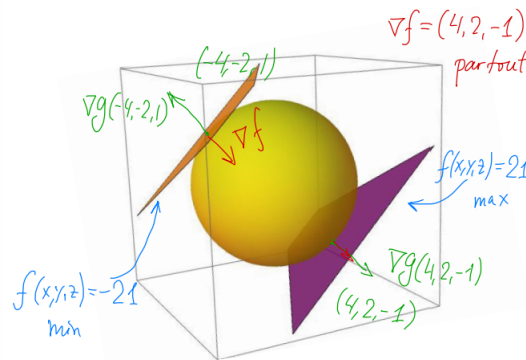
$$f(-4, -2, 1) = 4x + 2y - z = -16 - 4 - 1 = -21$$

$$f(4, 2, -1) = 16 + 4 + 1 = 21$$

Néanmoins ici on parle d'une sphère qui est un espace fermé dans \mathbb{R}^3 , qui est aussi borné. Comme on est donc dans un ensemble compact, et puisque que notre fonction est aussi continue sur cette ensemble alors, notre fonction atteint **forcement** son maximum et son minimum sur la sphère.

Ce qui implique que f atteint son minimum et son maximum absolus sur la sphère.

On va donc chercher les plans où il y a le minimum et le maximum, logiquement ces plans se retrouvent au sommets de la sphère, ces plans sont donc tangent à cette sphères :



Ici on a des plans qui sont en pente car on a notre plan qui est “pas tout joli” ces plan veulent dire que notre fonction a toujours la même valeur dans ce point, et donc notre valeur a toujours la même valeur sur ce plan ce qui “fausse” notre idée d’un plan horizontale

Exemple 2

Trouver les extrema de la fonction $f(x, y, z) = xyz$ sous les contraintes

$$\begin{cases} g_1(x, y, z) = x + y + z - 5 = 0 \\ g_2(x, y, z) = xy + yz + xz - 8 = 0 \end{cases}$$

On va donc chercher :

$$\nabla g_1(x, y, z) = (1, 1, 1) \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \nabla g_2(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y) \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

On va donc chercher :

$$\nabla g_2(x, y, z) = k \nabla g_1(x, y, z) \implies (y + z, x + z, x + y) = (k, k, k) \implies x = y = z$$

Et donc si on remplace ce que l’on vient de trouver dans notre fonction g :

$$\begin{cases} g_1(x, x, x) = 3x - 5 = 0 \implies x = \frac{5}{3} \\ g_2(x, x, x) = 3x^2 - 8 = 0 \implies 3\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{3} \neq 8 \end{cases}$$

Ce qui implique donc que $\nabla g_1(x, y, z)$ et $\nabla g_2(x, y, z)$ sont linéairement indépendants ce qui implique que le théorème de Lagrange est applicable.

Et donc obtient donc les équations :

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = (yz, xz, xy) = \lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(y + z, x + z, x + y) \\ g_1(x, y, z) = x + y + z - 5 = 0 \\ g_2(x, y, z) = xy + yz + xz - 8 = 0 \end{cases}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{cases} yz = \lambda_1 + \lambda_2(y + z) \\ xz = \lambda_1 + \lambda_2(x + z) \\ xy = \lambda_1 + \lambda_2(x + y) \\ x + y + z = 5 \\ xy + yz + xz = 8 \end{cases}$$

Donc on voit ici que ça a l'air embêtant à faire donc on va se poser quelque minute pour voir s'il y a quelque chose afin d'accélérer tout ça.

Si on additionne nos deux première relations :

$$\begin{aligned} (1) + (2) &\implies z(x + y) = 2\lambda_1 + \lambda_2(x + y + 2z) \\ &\quad z(5 - z) = 2\lambda_1 + \lambda_2(5 + z) \end{aligned}$$

On obtient donc une équation quadratique pour z .

Si on additionne (2) + (3) :

$$x(5 - x) = 2\lambda_1 + \lambda_2(5 + x)$$

Et finalement pour (1) + (3) :

$$y(5 - y) = 2\lambda_1 + \lambda_2(5 + y)$$

Ce qui revient donc :

$$\begin{cases} z^2 + (\lambda_2 - 5)z + 5\lambda_2 + 2\lambda_1 = 0 \\ x^2 + (\lambda_2 - 5)x + 5\lambda_2 + 2\lambda_1 = 0 \\ y^2 + (\lambda_2 - 5)y + 5\lambda_2 + 2\lambda_1 = 0 \end{cases}$$

Vu qu'on a trois fois la même équations ; soit $x = y = z$ qui ne satisfait pas les contraintes, soit une variable différente des 2 autres, par exemple $x = y, z \neq x$.

On peut maintenant utiliser les équations (4) et (5) :

$$\begin{cases} 2x + z = 5 \\ x^2 + 2xz = 8 \end{cases} \implies \begin{cases} z = 5 - 2x \\ x^2 + 2x(5 - 2x) - 8 = 0 \implies 3x^2 + 10x - 8 = 0 \end{cases}$$

Donc on peut résoudre notre équation tel que :

$$\begin{aligned} x &= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{6} = \frac{10 \pm 2}{6} \\ &\implies x_1 = 2 = y_1 \implies z_1 = 1 \\ &\implies x_2 = \frac{4}{3} = y_2 \implies z_2 = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Donc ici les points qu'on a trouvé sont :

$$(x, y, z) = (2, 2, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2) \\ \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right), \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Qui sont donc nos 6 points candidats. Donc il suffit maintenant de trouver on faisant les calculs :

$$f(2, 2, 1) = f(1, 2, 2) = f(2, 1, 2) = 4 \\ f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right) = f\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = f\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{112}{3}$$

Puisque les $g_1(x, y, z) = 0$, $g_2(x, y, z)$ est compact dans \mathbb{R}^3 et f est continue. Alors f atteint son min et son max sur le compact ; f est de classe c^∞ alors f atteint son max, min, aux points donnés par notre calcul.

| *remarque* Ici il faudrait aussi prouver que le sous-ensemble soit compact

5.4 Résumé : Méthode de démonstration

Démonstration
direct

$$P \implies Q$$

A base de logique tel que :

$$P \implies \dots \implies Q$$

Par contrapo-
sée

$$P \implies Q$$

On le prouve tel que :

$$\neg Q \implies \dots \implies \neg P$$

Disjonction des
cas

$$P \implies Q$$

On le fait par cas :

$$P = \begin{cases} \text{cas 1} \implies Q \\ \vdots \\ \text{cas n} \implies Q \end{cases}$$

Si et seulement
si

$$\iff$$

Par récurrence

$$P(n)$$

Simple	<ul style="list-style-type: none"> • Base : $P(n_0)$ • Hérédité : $P(n) \implies P(n+1)$
Généralisé	<ul style="list-style-type: none"> • Base : $P(n_0), \dots, P(n_0+k)$ • Hérédité : $\{P(n), \dots, P(n+k)\} \implies P(n+k+1)$
Forte	<ul style="list-style-type: none"> • Base : $P(n_0)$ • Hérédité :

Exemple : choisir la méthode de démonstration

Proposition 1	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n^2 + n + 1$ n'est pas divisible par 5.
Question 2	Il y a 12 boules vertes, 15 boules rouges et 16 boules blanches dans un sac, Quel nombre minimal de boules faut-il sortir du sac pour avoir au moins 4 boules de même couleur ?
Proposition 3	Il existe une infinité de nombre premier tels que : $p+2$ n'est pas premier.
Proposition 4	Il n'existe pas de nombre entiers x, y tels que $42x - 70y = 124$
Proposition 5	Pour tout $n \geq 2$ naturel, on a : <div style="text-align: center;"> $P(n) : \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ </div>
Proposition 6	Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , telle que $\det \text{Hess}_f(\bar{0}) < 0$, Alors $\bar{0}$ n'est pas un point de minimum local de f
Proposition 7	Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Si $y^3 + yx^2 - x^3 \leq xy^2$, alors $y \leq x$

Méthode

Proposition 1	Pour cette méthode on va plutôt utilise la disjonction des cas comme la plupart des propositions avec la divisibilité
Question 2	Ici on utilise Les tiroirs car un a un nombre "minimale" qui peut facilement se compter.
Proposition 3	On utilise l'absurde avec le Euclide On prends un premier q premier quelque part tel que $q+2$ est premier néanmoins si on prends donc $q(q+2)$ est un nombre qui rentre dans la contradiction.
Proposition 4	Donc ici on fait par l'absurde tel que "imaginons que cela existe" on voit que cela est une contradiction, donc cela ne peut pas exister.

| Proposition 5

| Proposition 6 Ici on peut juste faire une preuve direct

| Proposition 7 Ici on utilise la contraposée

Question

Soit une famille des propositions $\{P(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+4)$ est vraie.

Alors :

1. $P(6)$ et $P(8)$ ne peuvent pas être vrai les deux
2. si $P(19)$ est vrai, alors $P(7)$ est vraie
3. $P(2)$ et $P(10)$ sont soit les deux vraies, soit les deux fausses
4. si $P(21)$ est fausse, alors $P(9)$ est faux

Chapitre 6

Calcul d'intégrale des fonctions de plusieurs variables

Lundi 12 mai 2025 — Cours 23 : Intégrale à plusieurs variables

6.1 Intégrale sur un pavé fermé

Définition 51 Un **pavé fermé** est un sous-ensemble de \mathbb{R}^n qui est le produit cartésien de n intervalles fermés bornés :

$$P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \quad a_i < b_i \forall i = 1, \dots, n$$

On note le pavé ouvert $\mathring{P} =]a_1, b_1[\times \dots \times]a_n, b_n[$

Exemple

Pour un pavé de dimension 1 , $P_1 = [a, b]$ qui est juste un intervalle fermé.
Pour un pavé de dimension 2 $\implies P_2 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$

Volume d'un pavé fermé

Définition 52 Le volume d'un pavé fermé est défini par :

$$|P| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$$

Définition 53 Soit G_j une **subdivision** de $[a_j, b_j]$; $a_j < b_j$ tel que

$$G_j = \{a_j = x_0^j < x_1^j < \dots < x_{n_j}^j < b_j\}$$

Alors $G = (G_1, \dots, G_n)$ est appelée une **subdivision de P**

Somme de Darboux

Définition 54 Soit $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ **bornée sur P** Alors on définit **les sommes de Darboux** de f sur P .

Soit $D(\sigma)$ une collection des pavées fermés engendrée par la subdivision σ .

Alors $S_\sigma(f) = \sum_{Q \in D(\sigma)} m(Q)|Q|$ où $m(Q) = \inf_{\bar{x} \in Q} f(\bar{x})$

$\bar{S}_\sigma = \sum_{Q \in D(\sigma)} M(Q)|Q|$ où $M(Q) = \sup_{\bar{x} \in Q} f(\bar{x})$

Alors $S(f) = \sup\{S_\sigma(f), \sigma \text{ est une subdivision de } P\}$ est la somme de Darboux.

Intégrabilité

Définition 55 Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un pavé fermé et $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors, f est **intégrable sur P** si et seulement si :

$$S(f) = \bar{S}(f)$$

Pour lesquels on a toujours $S(f) \leq \bar{S}(f)$

Dans ce cas, **l'intégrale de f sur P** est définie par :

$$\int \int \int \int_P f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_P \int \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \underline{S}(f) = \bar{S}(f)$$

Exemple 3

Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un pavé fermé : $f : P \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) = C \in \mathbb{R}$ constante.

Soit σ une subdivision de P . $S_\sigma(f) = \sum_{Q \in D(\sigma)} \inf_Q(f)|Q| = C \sum_Q |Q| = C|P|$

Quelque exemple

Soit $f(\bar{x}) = 1$ Alors :

$$\int_P d\bar{x} = \int \int_1 \dots dx_n$$

Théorème

Théorème 31 Toute fonction **continue** est **intégrable sur un pavé fermé**.

Idée de la preuve

Soit $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

En premier lieu, f est bornée sur P . Puisque P est un sous-ensemble compact. Alors cette fonction atteint son minimum et maximum sur $P \implies f$ est bornée sur P .

Soit $\varepsilon > 0$ si f est continue en chaque point de P . Cela implique que :

$$\forall \bar{x}_0 \in P \quad \exists \delta_{\bar{x}_0} : \|\bar{x}_0 - \bar{x}\| < \delta_{\bar{x}_0} \implies |f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

On considère le recouvrement de P pour des boules ouvertes $B(\bar{x}_0, \delta_{\bar{x}_0})$ Ce qui implique par le théorème de Heine-Borel *Lebesgue* que parce que c'est un recouvrement fini, on a une subdivision finie

$S_\sigma \leq \varepsilon|P| \implies \bar{S} - S \leq \varepsilon|P|$ Ce qui implique finalement que f est intégrable sur P .

Propriétés de l'intégrale

1. **Additivité** : Soit P un pavé fermé et $\{P_i\}_{i \in I}$ une famille finie (dénombrable) des pavés fermés tels que $P = \bigcup_{i \in I} P_i$

Alors pour toute fonction continue $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ on a :

$$\int_P$$

6.1.1 Théorème de Fubini sur un pavé fermé

Théorème 32 Soit $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$
Alors f est intégrable sur P et on a :

$$\int_P f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) dx_2 \dots dx_{n-1} \right) dx_n$$

Explication

Donc en fait on intègre une variable à la fois avec les autres x_j comme paramètre. On commence de l'intérieur jusqu'à l'extérieur (Cela est fait pour le théorème de Fubini, néanmoins on peut quand même échanger l'ordre des variables dans l'intégrale). **Attention**, cela ne fonctionne pas seulement sur un pavé fermé.

Exemple 1

Calculer $\int_P x e^{xy} dx dy$, $P = [0, 1] \times [0, 1]$.

Par le théorème de Fubini, c'est plus simple donc de commencer par y :

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \left(\int_0^1 x e^{xy} dy \right) &= \int_0^1 dx \int_0^1 e^{xy} d(xy) = \int_0^1 dx (e^{x \cdot 1} - e^{x \cdot 0}) = \int_0^1 dx (e^x - 1) \\ &= \int_0^1 (e^x - 1) dx = e^x - x \Big|_0^1 = e - 2 \end{aligned}$$

Autrement on peut le faire par partie avec :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{xy} dx &= \int_0^1 \frac{1}{y} d(e^{xy}) = \frac{x}{y} e^{xy} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{xy} \frac{1}{y} dx \\ &= \frac{1}{y} e^y - \frac{1}{y^2} (e^y - 1) \end{aligned}$$

Ici on a mis $d(xy)$ car du point de vue de y , x est seulement un paramètre, qui peut donc sortir de l'intégrale
L'écriture avec le dx à gauche de la parenthèse est souvent préférée

Exemple 2

on a $I = \int_D x^2 e^y dx dy$, où $D = [0, 1] \times [0, 2]$:

$$\begin{aligned} \int_D e^y dx dy &= \int_0^2 dy \left(\int_0^1 x^2 e^y dx \right) = \int_0^2 e^y dy \left(\int_0^1 x^2 dx \right) \\ &= \int_0^2 e^y dy \left(\frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 \right) = \int_0^2 e^y \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3} \int_0^2 e^y dy \\ &= \frac{1}{3} (e^2 - 1) \end{aligned}$$

Si $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ sur $P = [a, b] \times [c, d]$. Alors :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{P}} f_1(x)f_2(y)dxdy &= \int_c^d dy \left(\int_a^b f_1(x)f_2(y)dx \right) = \int_c^d f_2(y) \left(\int_a^b f_1(x)dx \right) dy \\ &= \int_a^b f_1(x)dx \cdot \int_c^d f_2(y)dy \end{aligned}$$

Mercredi 14 mai 2025 — Cours 24 : Intégrale sur un domaine borné

**Exemple avec
le théorème de
Fubini**

Le but ici est de calculer le volume du sous-ensemble de \mathbb{R}^3 défini par :

$$\left\{ (x, y, z) \text{ in } \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq (1 + 3x + x \sin(xy)) \right\}$$

La fonction $1 + x(3 + \sin(xy)) > 0$ et elle est continue.

Donc on a que $P = \underbrace{[0, 4]}_x \times \underbrace{[0, 3]}_y$.

On calcule donc le volume $V = \int_{\mathbb{P}} \int (1 + 3x + x \sin(xy))dxdy$ Qui par la linéarité nous donne :

$$\begin{aligned} V &= \int_{\mathbb{P}} \int 1dxdy + 3 \int \int_P x dxdy + \int \int_P x \sin(xy) dxdy \\ &= 1 \cdot \overbrace{1(4-0)(3-0)}^{=12} + 3 \int_0^3 \left(\int_0^4 x dx \right) dy + \int \int_P x \sin(xy) dxdy \end{aligned}$$

Pour la deuxième intégrale on a :

$$\begin{aligned} 3 \int_0^3 \left(\int_0^4 x dx \right) dy &= 3 \int_0^3 1 dy \cdot \int_0^4 x dx \\ &= 3y_{0 \rightarrow 3} \cdot \frac{1}{2} x_{0 \rightarrow 4}^2 = 9 \cdot 8 = 72 \end{aligned}$$

Pour la dernière intégrale on a :

$$\begin{aligned} \int \int_P x \sin(xy) dxdy &= \int_0^4 \left(\int_0^3 x \sin(xy) dy \right) dx = \int_0^4 \left(\int_0^3 \sin(xy) d(xy) \right) dx \\ &= \int_0^4 -\cos(xy)_{0 \rightarrow 3} dx \\ &= \int_0^4 (-\cos(3x) + 1) dx = -\frac{1}{3} \sin(3x) + x_{0 \rightarrow 4} = -\frac{1}{3} \sin(12) + 4 \end{aligned}$$

Ce qui nous donne pour le volume final : $V = 12 + 72 - \frac{1}{3} \sin(12) = 88 - \frac{1}{3} \sin(12)$.

Dans l'autre sens

On peut considérer la même intégrale dans l'autre sens $\int_0^3 \left(\int_0^4 x \sin(xy) dx \right) dy$
 Pour résoudre cela on va faire une intégration par partie ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \int_0^4 x \sin(xy) dx &= - \int_0^4 \frac{x}{y} d(\cos(xy)) \\ &= - \frac{x \cos(xy)}{y} \Big|_{0 \rightarrow 4} + \int_0^4 \cos(xy) \cdot \frac{1}{y} dx \\ &= - \frac{4 \cos(4y)}{y} + \frac{1}{y^2} \sin(xy) \Big|_{0 \rightarrow 4} = - \frac{4 \cos(4y)}{y} + \frac{\sin(4y)}{y^2} \end{aligned}$$

Nous voyons que cette fonctions n'est pas définie en 0 si l'on veut éviter de faire une intégrale impropre, ça peut être rentable d'essayer de prolonger la fonction en $y = 0$:

Par un développement limité de sinus :

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(4y) - 4y \cos(4y)}{y^2} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{4y - \frac{1}{6}(4y)^3 + \dots - 4y \left(1 - \frac{1}{2}(4y)^2 + \dots\right)}{y^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{C(y^3)}{y^2} = 0 \end{aligned}$$

On a donc que :

$$\int_0^3 \frac{\sin(4y) - 4y \cos(4y)}{y^2} dy = \int_0^3 \frac{\sin(4y)}{y^2} dy - \int_0^3 \frac{4y \cos(4y)}{y^2} dy$$

Néanmoins ces primitives ne s'expriment pas en fonctions élémentaires. Pour quand même essayer de trouver un résultat convaincant, on peut en tirer des sommes :

L'idée ici c'est d'utiliser le fait que la dérivée de $\frac{1}{y}$ est $\frac{-1}{y^2}$:

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{\sin(4y) - 4y \cos(4y)}{y^2} dy &= \int_0^3 (4y \cos(4y) - \sin(4y)) d\left(\frac{1}{y}\right) \\ &= - \frac{\sin(4y)}{y} + 4 \cos(4y) \Big|_{0 \rightarrow 3} - \int \frac{4 \cos(4y) - 16y \sin(4y) - 4 \cos(4y)}{y} dy \\ &= - \frac{\sin(12)}{3} + 4 \cos(12) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4y)}{y} - 4 + \int_0^3 16 \sin(4y) dy \\ &= - \frac{\sin(12)}{3} + 4 \cos(12) + 4 - 4 - 4 \cos(4y) \Big|_{0 \rightarrow 3} \\ &= - \frac{\sin(12)}{3} + 4 \cos(12) - 4 \cos(12) + 4 \\ &= 4 - \frac{1}{3} \sin(12) \end{aligned}$$

Qui est le même résultat que l'intégrale précédente.

Conclusion Il est important donc de choisir un bon ordre pour l'intégration afin d'éviter des calculs techniques

6.1.2 Intégrale sur un domaine bornée

Définition

Définition 56 Soit $E \subset P \subset \mathbb{R}^n$; $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ fonction bornée sur E .

Posons $\hat{f}(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}), & \bar{x} \in E \\ 0, & \bar{x} \in P \setminus E \end{cases}$ La fonction f est intégrable sur E si \hat{f} est intégrable sur P .

Dans ce cas on pose :

$$\int_E f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_P \hat{f}(\bar{x}) d\bar{x}$$

Remarque

1. La définition ne dépend pas du choix du pavé fermé autour de E .
2. Condition suffisante d'intégrabilité. Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée sur E , continue sur \bar{E} et la frontière ∂E est aussi régulière (de mesure nulle)

\Rightarrow Alors, $f(\bar{x})$ est intégrable sur E .

*Frontière
régulière*

Définition 57

$\forall \varepsilon > 0 \exists$ un recouvrement $\partial E \subset \bigcup_{i \in I} q_i$, q_i pavés fermés

tels que $\sum_{i \in I} |q_i| < \varepsilon \Rightarrow \partial E$ est de mesure nulle

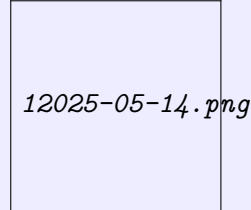
Théorème de Fubini sur un domaine régulier

Théorème 33 1. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$, un intervalle, $a < b$
 2. $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonction continues, telles que

$$\varphi_1(x) < \varphi_2(x) \quad \forall x \in]a, b[$$

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}$, Alors pour toute fonction continue $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ on a :

$$\int_D \int f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

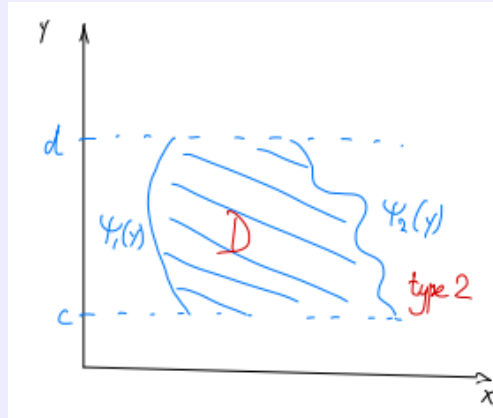


3. Soit $[c, d] \subset \mathbb{R}$, un intervalle $c < d$
 $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues telles que

$$\psi_1(y) < \psi_2(y) \quad \forall y \in]c, d[$$

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c < y < d, \psi_1(y) < x < \psi_2(y)\}$
 Alors pour toute fonction continue $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ on a

$$\int_D \int f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$



Exemple

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 2 - 2x\}$, avec $f(x, y) = xy$. On a D de type 1.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < 1, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}$$

Avec $\varphi_1(x) = 0, \varphi_2(x) = 2 - 2x$ On a alors l'intégrale :

$$\begin{aligned}
 \int_D \int xy dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} xy dy \right) dx \\
 &= \int_0^1 x \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^{2-2x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 x(2-2x)^2 dx \\
 &= 2 \int_0^1 x(1-x)^2 dx \\
 &= 2 \int_0^1 x(1-2x+x^2) dx \\
 &= 2 \int_0^1 (x-2x^2+x^3) dx \\
 &= 2 \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

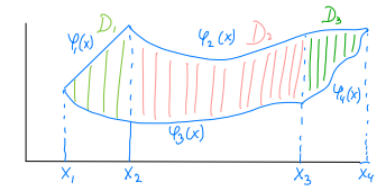
Néanmoins on peut aussi le voir comme D de type 2 : $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 2, 0 < x < 1 - \frac{1}{2}y \right\}$, on a donc pour nos deux fonctions $\psi_1(y) = 0$ et $\psi_2(y) = 1 - \frac{1}{2}y$. Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
 \int_D &= \int_0^2 \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} xy dx \right) dy \\
 &= \int_0^2 \left(\int_0^{1-\frac{1}{2}y} xy dx \right) dy
 \end{aligned}$$

Intégral à faire à la maison.

Si le domaine D n'est pas de type 1 ou 2 ?

Donc si on a par exemple la fonction :



Pour pouvoir intégrer, il faut diviser le domaine en réunions de domaines de type 1 ou 2 et utiliser l'additivité de l'intégrale. tel que D est :

$$D = \bigcup_{i=1}^3 D_i$$

Exemple 2

$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \sqrt{4-y^2}, y \leq x \right\}$, on demande de calculer $\int \int_D \frac{x}{4+y^2} dx dy$.

Donc en premier lieu on va devoir regarder notre domaine D . On a en premier lieu $x = \sqrt{4-y^2} \implies x^2 + y^2 = 4$ qui est donc un cercle. Pour

$0 \leq x \leq \sqrt{4-y^2}$ on a donc qu'on est dans le cercle mais que $x \geq 0$ ce qui nous dit qu'on prends le demi cercle à gauche. Finalement, on a que $y \leq x$ qui est tout ce qui se trouve en dessous de la droite. On a donc le demi Cercle à droite de $x = 0$ qui se trouve en dessous de la droite $y = x$. On peut découper cela en deux domaines

Ecrivons donc le premier domaine du quart de cercle en bat à droite :

$$D_1 = \left\{ -2 < y < 0, 0 < x < \sqrt{4-y^2} \right\}$$

On a donc pour le deuxième domaine :

$$D_2 = \left\{ 0 < y < \sqrt{2}, y < x < \sqrt{4-y^2} \right\}$$

On a donc l'intégrale

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^0 \left(\int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{x}{4+y^2} dx \right) dy + \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{x}{4+y^2} dx \right) dy \\ &= \int_{-2}^0 \frac{1}{2} \left(\frac{4-y^2}{4+y^2} \right) dy + \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \frac{4-y^2-y^2}{4+y^2} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 \frac{-4-y^2+8}{4+y^2} dy + \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{-2(4+y^2)+12}{4+y^2} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 \left(-1 + \frac{8}{4+y^2} \right) dy + \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \left(-2 + \frac{12}{4+y^2} \right) dy \\ &= -\frac{1}{2} y \Big|_{-2}^0 + \int_{-2}^0 \frac{4}{4+y^2} dy - y \Big|_0^{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{4}{4+y^2} dy \\ &= -1 + 2 \int_{-2}^0 \frac{1}{1+\left(\frac{y}{2}\right)^2} d\left(\frac{y}{2}\right) - \sqrt{2} + \frac{3}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{1+\left(\frac{y}{2}\right)^2} d\left(\frac{y}{2}\right) = -1 + 2 \arctan\left(\frac{y}{2}\right) \Big|_{-2}^0 - \sqrt{2} \\ &= -1 - \sqrt{2} + -2 \left(\frac{\pi}{4} \right) + 3 \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= -1 - \sqrt{2} + \underbrace{\frac{\pi}{3} + 3 \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{\approx 0,615} > 0 \end{aligned}$$

Remarque :
calcul d'aire
d'un domaine
dans \mathbb{R}^2

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble régulier, Alors on peut calculer l'aire D par intégration double comme suit :

Question

L'aire du domaine D entre les courbes $y = -x^2 + 2x + 1$ et $y = 1 - x$ est donné par l'intégrale :

On domaine juste d'écrire l'intégrale mais pas de la résoudre (on utilise ici le type 2).

petit test

Exemple

$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2, \frac{1}{x} < y < x \right\}$ avec la fonction $f(x, y) = x + \frac{1}{y}$
 Nous cherchons donc :

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = ?$$

Comme on peut le voir, notre ensemble est déjà une intégrale de type 1. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^x x + \frac{1}{y} dy \right) dx &= \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x x + \frac{1}{y} dy \\ &= \int_1^2 dx (xy + \ln y) \Big|_{\frac{1}{x}}^x \\ &= \int_1^2 x^2 + \ln x - 1 - \ln \frac{1}{x} dx \\ &= \int_1^2 x^2 + 2 \ln x - 1 dx = \frac{1}{3} x^3 - x \Big|_1^2 + 2 \int_1^2 \ln x dx \\ &= \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 + 2x \ln x \Big|_1^2 - 2 \int_1^2 1 dx \\ &= \frac{7}{3} - 1 + 4 \ln 2 - 2x \Big|_1^2 = \frac{7}{3} - 1 + 4 \ln 2 - 4 + 2 = -\frac{2}{3} + 4 \ln 2 > 0 \end{aligned}$$

Changement d'ordre par intégration

Donc si maintenant on veut le faire dans l'autre sens, on veut écrire x dans les bornes de y .

On cherche en premier lieu l'intersection des deux intersections de $D : y = x$ et $y = \frac{1}{x}$:

$$\frac{1}{x} = x \implies x^2 = 1, x > 0 \implies x = 1, y = 1$$

On a donc le max qui est $x = 2 = y$ ce qui nous donne :

$$D_1 = \{1 < y < 2, y < x < 2\}$$

$$D_2 = \left\{ \frac{1}{x} < y < 1, \frac{1}{y} < x < 2 \right\}$$

Qui sont donc les deux de types 2. Si on écrit donc l'intégrale :

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{\frac{1}{y}}^2 x + \frac{1}{y} dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_y^2 x + \frac{1}{y} dx \right) dy$$

Exemple 2

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1, 0 < x < \arccos y\}$.

Calculer $\int \int_D x dx dy \implies D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \cos x\}$ Ce

que l'on peut aisément intégrer :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\cos x} x dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx (xy \big|_0^{\cos x}) \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x}_f d \underbrace{\sin x}_g \\
 &= x \sin x \big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\
 &= \frac{\pi}{2} - 1
 \end{aligned}$$

Maintenant on peut le faire dans l'autre sens :

$$\begin{aligned}
 \int \int_D x dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^{\arccos y} x dx \\
 &= \int_0^1 dx \left(\frac{1}{2} x^2 \big|_0^{\arccos y} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (\arccos y)^2 dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 u^2 d \cos u \\
 &= \frac{1}{2} u^2 \cos u \big|_{\frac{\pi}{2}}^0 - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 2u \cos u du \\
 &= 0 - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 u d \sin u = -u \sin u \big|_{\frac{\pi}{2}}^0 - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin u du = \frac{\pi}{2} - 1
 \end{aligned}$$

Comme on le voit ici, ça vaut la peine de réfléchir quel type utiliser avant de commencer à calculer.

6.1.3 Théorème de Fubini pour les intégrales triples

Théorème

Théorème 34 Soit $[a, b]$ intervalle, $a < b$; $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues $\varphi_1(x) < \varphi_2(x) \forall x \in]a, b[$.

$$D = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, \quad \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)$$

Soient $G_1, H : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ continues, tel que $G(x, y) < H(x, y) \quad \forall (x, y) \in D$.

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D; \quad G(x, y) < z < H(x, y)\}$$

Soit $f : \overline{E} \rightarrow \mathbb{R}$ continue,

Alors f est intégrable sur E et on a :

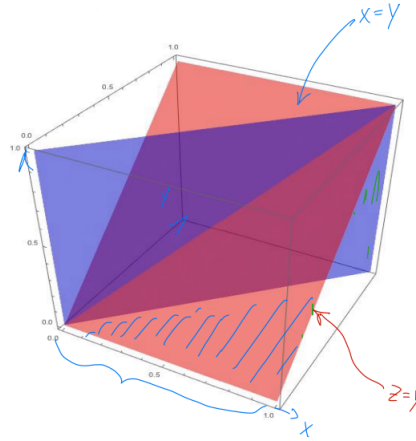
$$\int \int \int_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{G(x, y)}^{H(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

Exemple

Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < y < x < 1\} \implies \int \int \int_E f(x, y, z) dx dy dz =$
 Avec la fonction $f(x, y, z) = e^{x^3}$

On cherche donc à écrire nous ensemble petit à petit. On sait déjà que $0 < x < 1$ et que $0 < y < x$, et que $0 < z < y$ (c'est comme si on séparait notre inégalité). Ce qui nous donne comme domaine :

$$E = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0 < x < 1, 0 < y < x, 0 < z < y$$



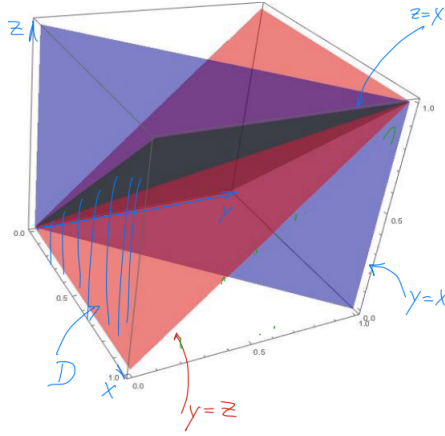
On nous donne donc comme intégrale :

$$\begin{aligned} \int \int \int_E f(x, y, z) dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y e^{x^3} dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x dy z e^{x^3} \Big|_0^y \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x y e^{x^3} dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x y e^{x^3} dy = \int_0^1 dx \cdot \frac{1}{2} y^2 e^{x^3} \Big|_0^x \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{6} \int_0^1 e^{x^3} d(x^3) = \frac{1}{6} e^{x^3} \Big|_0^1 = \frac{1}{6} (e - 1) \end{aligned}$$

Donc maintenant si on veut le faire dans l'autre sens (avec le z en avant dernier) on a :

$$E = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1, 0 < z < x, z < y < x$$

On peut jouer dans l'ordre de nos ensemble, on voit ici qu'il y a 6 possibilités d'arranger l'ensemble, dont toute donne la même réponse.

**Exemple 4**

Trouver le volume de la région $E \subset \mathbb{R}^3$ entre les plans $x = 0, y = 0, z = 0$ et $2x + 3y - z = 6$.

Donc déjà, on a 4 plans, ce qui nous donnera dans notre cas un triangle. On cherche donc les arêtes de ce triangle (l'intersection de deux plans ensemble) on a :

$$z = 0 \implies 2x + 3y = 6 \implies y = 2 - \frac{2}{3}x$$

On a donc ensuite l'intersection de tout les plans :

$$x = 0, y = 0, z = 2x + xy - 6 \implies -6$$

On a donc :

$$E = \{0 < x < 3, 0 < y < 2 - \frac{2}{3}x, 2x + 3y - 6 < z < 0\}$$

Pourquoi dans ce sens ? étant donnée que notre plan se trouve en dessous de 0, il est forcément borné supérieurement par ce dernier.

Si on calcule donc le volume :

$$\begin{aligned} V &= \int \int \int_E 1 dx dy dz = \int_0^3 dx \int_0^{2-\frac{2}{3}x} dy \int_{2x+3y-6}^0 dz \\ &= \int_0^3 dx \int_0^{2-\frac{2}{3}x} (-2x - 3y + 6) dy \\ &= \int_0^3 dx \int_0^{2-\frac{2}{3}x} (-2x - 2y + 6) dy = \int_0^3 dx (-2xy - \frac{3}{2}y^2 + 6y) \Big|_0^{2-\frac{2}{3}x} \\ &= \int_0^3 (-2x(2 - \frac{2}{3}x) - \frac{3}{2}(2 - \frac{2}{3}x)^2 + 6(2 - \frac{2}{3}x)) dx \\ &= \int_0^3 (-4x + \frac{4}{3}x^2 - 6 + 4x - \frac{2}{3}x^2 + 12 - 4x) dx \\ &= \int_0^3 (-4x + \frac{2}{3}x^2 + 6) dx = -2x^2 + \frac{2}{9}x^3 + 6x \Big|_0^3 = 6 \end{aligned}$$

6.1.4 Changement de variables dans une intégrale multiple

Théorème 35 Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble (\overline{E} compact) ; $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\psi \in C'(E)$ et $\psi : E \rightarrow \psi(E)$ est bijective ($J_\psi(\bar{u})$ est invertible $\forall \bar{u} \in E$).

Soit $f : \overline{D} = \overline{\psi(E)} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors :

$$\int_D f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_E f(\psi(\bar{u})) \cdot |\det J_\psi(\bar{u})| d\bar{u}$$

Exemple 0

On prends $f(x, y) = 1 = f(u, v)$.

Soit donc :

$$\psi(u, v) = \begin{pmatrix} 3u \\ 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ de classe } C^1$$

$$J_\psi(u, v) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \implies |\det J_\psi(u, v)| = 6$$

Exemple 5

Soit $f(x, y) = x^2$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1, -x < y < x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2, x - 2 < y < 2 - x\}$.

On calcule l'intégrale :

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^x x^2 dy + \int_1^2 dx \int_{x-2}^{2-x} x^2 dx$$

Ou alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ -x < y < x \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} 1 < x < 2 \\ x-2 < y < 2-x \end{array} \right\} \implies E = \left\{ \begin{array}{l} (u, v) : 0 < u < 2 \\ 0 < v < 2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(u-v) \end{array} \right.$$

On a donc pour la jacobienne :

$$J_{\psi(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \implies \det J_{\psi(u,v)} = \frac{1}{2}$$

Ceux qui nous donne lorsqu'on calcule l'intégrale (attention à ne pas oublié le facteur du déterminant) :

$$\begin{aligned} \int \int_D x^2 dx dy &= \int \int_E \left(\frac{1}{2}(u+v)\right)^2 \cdot \frac{1}{2} du dv \\ &= \int_0^2 dv \int_0^2 \left(\frac{1}{8}(u+v)^2\right) du \\ &= \int_0^2 dv \left(\frac{1}{24}(u+v)^3 \Big|_0^2\right) \\ &= \int_0^2 \frac{1}{24} ((v+2)^3 - v^3) dv \\ &= \frac{1}{24} \frac{1}{4} ((v+2)^4 - v^4) \Big|_0^2 \\ &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

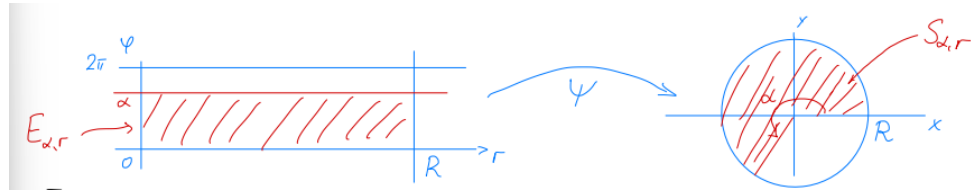
**Application :
changement de
variable polaire**

$$\psi(r, \varphi) = \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \psi : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

avec ψ qui est bijective

On a donc pour la jacobienne :

$$J_\psi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \implies \det J_{\psi(r, \varphi)} = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r$$



Exemple 1

On cherche l'aire du secteur circulaire $S_{\alpha, r}$ d'angle α et de rayon R :

-70-7

On a donc :

$$\begin{aligned} A_{\alpha, r} &= \int \int_S 1 dx dy = \int_0^\alpha d\varphi \int_0^R |\det \psi_{r, \varphi}| dr \\ &= \int_0^\alpha d\varphi \int_0^R r dr = \alpha \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^R = \frac{1}{2} R^2 \alpha \end{aligned}$$

Si $\alpha = 2\pi \implies$ l'aire du disque du rayon R est :

$$A_{2\pi, R} = \frac{1}{2} R^2 \cdot 2\pi = \pi R^2$$

Exercice

L'aire du disque de rayon 1 en coordonnées cartésiennes.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

On a donc l'intégrale qui est donnée par :

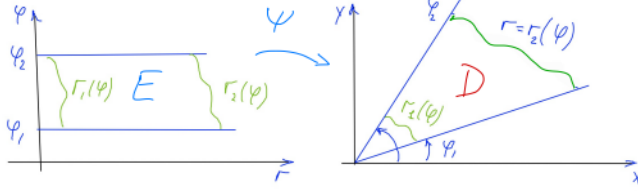
$$A = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 dy = \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2} dx$$

Ensuite on peut poser le changement de variable $x = \sin t$. On utilisera aussi le fait que notre fonction est paire afin de calculer "qu'une seule fois" l'intégrale comme ceci :

$$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$$

Conclusion : changement de variable polaires**Cas important :****Coordonnées
polaires**

$$G(r, \varphi) = \begin{cases} r \cos \varphi = x \\ r \sin \varphi = y \end{cases}$$

**Exemple**

soit $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ avec $a > 0$, D est une boucle de lemmiscate de Bernoulli (1694) :

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad x > 0$$

Si on cherche maintenant à le placer en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} r^4 &= a^2(r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi) = a^2 r^2 \cos 2\varphi \\ \iff r^2 &= a^2 \cos 2\varphi \implies \cos 2\varphi \geq 0 \end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi > 0 &\implies -\frac{\pi}{2} < 2\varphi < \frac{\pi}{2} \\ &\implies -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \\ \frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{5\pi}{4} &x < 0 \end{aligned}$$

On a donc finalement : $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ avec $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ qui est l'équation d'une boucle de la lemmiscate.

Si on prends les deux "maximum", $\varphi = \pm \frac{\pi}{4} \implies r = 0$ et ensuite $\varphi = 0 \implies r = a$, on a donc finalement pour l'ensemble :

$$E = \left\{ -\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}, 0 < r < a\sqrt{\cos 2\varphi} \right\}$$

-80-8

On a donc avec un changement de variable :

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy &= \iint_E \sqrt{a^2 - r^2} \underbrace{r}_{|\det J|} dr d\varphi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{a^2 - r^2} r dr \end{aligned}$$

On voit ici qu'on peut juste faire un changement de variable $u = a^2 - r^2$ ce qui au vu du r qui "dépasse" de la racine va se simplifier :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{a^2 - r^2} d(a^2 - r^2) \\ = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \\ = -\frac{1}{3} (a^2 - a^2 \cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} a^3 \end{aligned}$$

Donc si on essaie de simplifier tout ça :

$$(1 - \cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}} = (-\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} (\sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} |\sin \varphi|^3$$

Et donc on peut intégrer :

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{1}{3} 2^{\frac{3}{2}} a^3 |\sin \varphi|^3 + \frac{1}{3} a^3 \right) d\varphi \\ = \frac{1}{3} a^3 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{3} a^3 2^{\frac{3}{2}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin \varphi|^3 d\varphi \\ = \frac{\pi}{6} a^3 - \frac{1}{3} a^3 2^{\frac{3}{2}} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 \varphi d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 \varphi d\varphi &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-1 \cos^2 \varphi) d(-\cos \varphi) \\ &= \frac{1}{3} \cos^3 \varphi - \cos \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3} + 1 \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{6} - 1 \right) &= \frac{2}{3} - \frac{5}{6\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Et donc si on remet tout ça dans notre intégrale en haut (qui comment par $\frac{\pi}{6}$)

$$\iint = \frac{\pi a^3}{6} - \frac{a^3 \cdot 2^{\frac{3}{2}} \cdot 2}{3} \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6\sqrt{2}} \right)$$

Exemple 3

Soit $f(x, y) = xy$ avec $D = \left\{ (x+1)^2 + y^2 \leq 1, y \geq \frac{x}{\sqrt{3}} \right\}$

On voit en premier lieu que notre ensemble à une condition qui ressemble à un disque donc on peut essayer d'utiliser un changement de variable :

$$\begin{aligned} r^2 \cos^2 \varphi + 2r \cos \varphi + 1 + r^2 \sin^2 \varphi \leq 1 &\implies r^2 + 2r \cos \varphi \leq 0 \\ t + 2 \cos \varphi \leq 0 &\implies r \leq -2 \cos \varphi \implies \cos \varphi < 0 \\ &\implies \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Si on prends maintenant la deuxième condition avec un changement de variable polaire :

$$\begin{aligned} y \geq \frac{x}{\sqrt{3}} &\implies r \sin \varphi \geq \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{3}} \\ &\implies \sin \varphi \geq \frac{\cos \varphi}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Ce qui nous donne deux cas, soit $\sin \varphi > 0, \cos \varphi < 0 \implies \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$. ou alors $\sin \varphi < 0, \cos \varphi < 0 \implies \tan \varphi < \frac{1}{\sqrt{3}}$.
et donc si on développe pour φ on a :

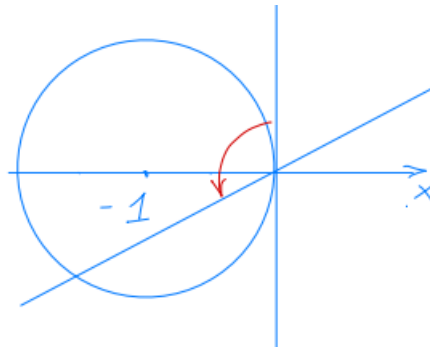
$$\tan \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \varphi = \frac{\pi}{6} + \pi k \implies \pi < \varphi < \frac{7}{6}\pi$$

On a donc notre ensemble qui est :

$$E = \left\{ \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{7}{6}\pi, 0 < r < -2 \cos \varphi \right\}$$

Il reste plus qu'à intégrer :

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}} d\varphi \int_0^{-2 \cos \varphi} r^2 \cos \varphi \sin \varphi r dr \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}} d\varphi \left(\frac{1}{4} r^4 \cos \varphi \sin \varphi \right) \Big|_0^{-2 \cos \varphi} \\ &= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}} \cos^5 \varphi \sin \varphi d\varphi \\ &= -4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}} \cos^5 \varphi d \cos \varphi \\ &= -\frac{4}{6} \cos^6 \varphi \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}} = \cos^6 \frac{7\pi}{6} = -\cos^6 \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



Coordonnées
cartésiennes

$$D = \left\{ (x+1)^2 + y^2 \leq 1, y \geq \frac{x}{\sqrt{3}} \right\}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} y = \frac{x}{\sqrt{3}} &\implies (x+1)^2 + \frac{x^2}{3} = 1 \\ \implies \frac{4}{3}x^2 + 2x + 1 &= 1 = \begin{cases} x = 0 \\ \frac{4}{3}x = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui implique donc que :

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}, y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

On a donc pour l'autre condition :

$$y^2 \leq 1 - (x+1)^2 \implies -\sqrt{1 - (x+1)^2} < y < \sqrt{1 - (x+1)^2}$$

Et cela sur D_1 .

$$\frac{x}{\sqrt{3}} < y < \sqrt{1 - (x+1)^2}$$

Si on met donc l'union de nos deux ensemble ensemble :

$$\begin{aligned} D = \left\{ -2 \leq x \leq -\frac{3}{2}, -\sqrt{1 - (x+1)^2} < y < \sqrt{1 - (x+1)^2} \right\} \\ \cap \left\{ \frac{-3}{2} < x < 0, \frac{x}{\sqrt{3}} < y < \sqrt{1 - (x+1)^2} \right\} \end{aligned}$$

On peut ensuite intégrer sur cette ensemble.

Coordonnées sphérique

Coordonnée sphérique

$$G(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

On a donc $G :]0, \infty[\times [0, \pi] \times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}$

On peut donc calculer la jacobienne qui est donné par :

$$J_{G(r, \theta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

Je passe les calculs avec la règle de Sarrus mais on obtient :

$$\left| \det J_{G(r, \theta, \varphi)} \right| = \left| r^2 \cos^2 \theta \sin \theta + r^2 \sin^3 \theta \right| = \left| r^2 \sin \theta \right| \quad 0 < \theta < \pi$$

Exemple, Volume d'une boule de rayon $a > 0$

On a donc pour l'ensemble :

$$E = \{0 < r < a, 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$$

On a donc pour le volume :

$$\begin{aligned} V &= \int \int \int_{B(\bar{0}, a)} 1 dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \int_0^a r^2 \sin \theta dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \cdot \int_0^a r^2 dr \\ &= 2\pi(-\cos \theta) \Big|_0^\pi \cdot \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^a \\ &= 2\pi(1 + 1) \cdot \frac{1}{3} a^3 = \frac{4}{3} \pi a^3 \end{aligned}$$

Application : masse totale d'un objet solide

Masse total d'un objet de solide de densité donnée

$$M = \int \int \int_V \rho(x, y, z) dx dy dz$$

est la masse totale du volume V avec la densité $\rho(x, y, z)$

Exemple

Trouver la masse totale d'un secteur sphérique :

$$S = \{x > 0, y > 0, z > 0, x^2 + y^2 + z^2 < a^2\}$$

Avec la fonction de densité $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$.

On a va donc comme on l'a fait juste avant, effectuer un changement de variable en coordonnées sphériques ce qui nous donne donc :

$$E = \left\{0 < r < a, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right\}$$

Ce qui nous donne donc :

$$\begin{aligned} M &= \int \int \int_S (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \iint_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a r^2 \sin^2 \theta \underbrace{r^2 \sin \theta}_{|\det J|} dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta \int_0^a r^4 dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta - 1) d\cos \theta \cdot \frac{1}{5} r^5 \Big|_0^a = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{3} \cos^3 \theta - \cos \theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{5} a^5 \\ &= \frac{\pi a^5}{10} \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{\pi a^5}{15} \end{aligned}$$

Question du jour

$$f(x, y) = 2x + 3y$$

Avec

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y > 0, 1 < x^2 + y^2 < 4\}$$

Alors $\int \int_D f(x, y) dx dy$ vaut ?

Alors en premier lieu on peut changer en coordonnée polaire :

$$D = \{(r, \varphi) : r \cos \varphi < 0, r \sin \varphi > 0, 1 < r^2 < 4\}$$

On écrit notre fonction en coordonnée

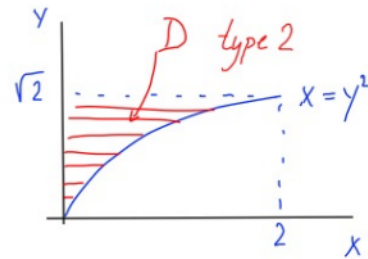
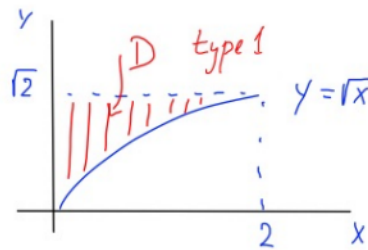
$$f(r\varphi) = 2r \cos \varphi + 3r \sin \varphi$$

Comme $x < 0$ et que $y > 0$ on sait donc que $\varphi > \frac{\pi}{2}$ et aussi que $\varphi < \pi$ comme on a $1 < r^2 < 4 \implies 1 < r < 2$ (on s'occupe pas du négatif).

Rappel : Méthode d'intégration des fonctions de plusieurs variables

Lundi 26 mai 2025 — Cours 27 : Dernier cours ???

Théorème de Fubini \implies changement d'ordre d'intégration



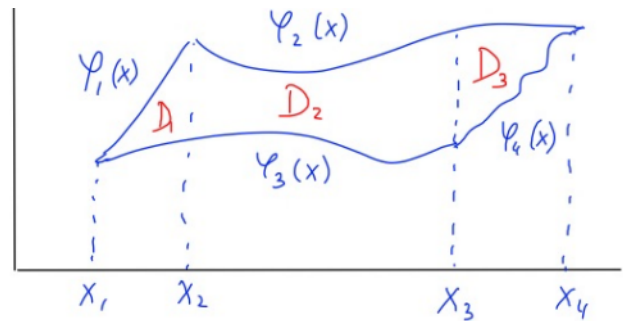
Qui nous donne :

$$\int_0^2 dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2}} f(x, y) dy = \int_0^{\sqrt{2}} dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx$$

L'additivité de l'intégrale \implies Division du domaine d'intégration

$$D = \bigcup_{i=1}^3 D_i$$

domaines réguliers

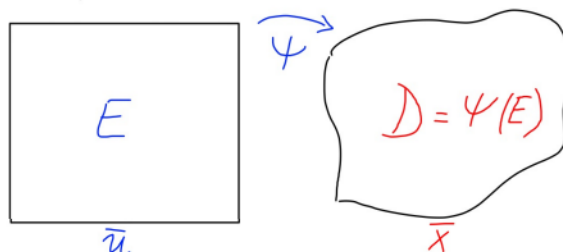


Il faut diviser le domaine en réunion et utiliser l'additivité de l'intégrale.

Changement de variable

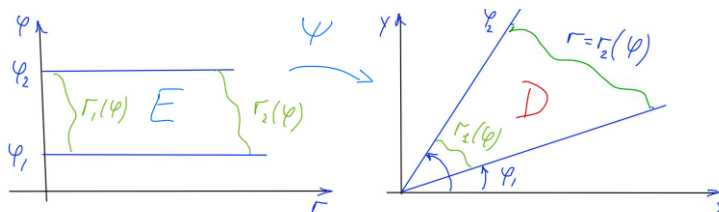
Théorème 36 Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble, \overline{E} est compact, $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\psi \in C^1(E)$, et $\psi : E \rightarrow \psi(E) = D$ bijective. Soit $f : \overline{D} = \overline{\psi(E)} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors :

$$\int_D f(\overline{x}) = \int_E f(\psi \overline{u}) |\det J_{\psi(\overline{u})}| d\overline{u}$$



**Coordonnées
sphériques**

$$G(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$



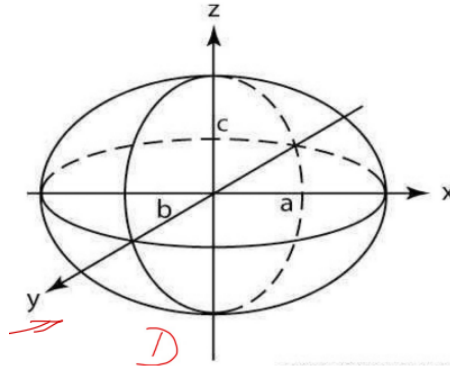
$$|\det J_{G(r, \theta, \varphi)}| = r^2 \sin \theta$$

Exemple

Le volume d'un ellipsoïde $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$. On pose le changement de variable :

$$\begin{cases} x = au \\ y = bv \\ z = cw \end{cases} \implies \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\} \implies J_{H(u, v, w)} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\implies |\det J_H| = |abc|$$



Donc ici on en premier lieu, le changement de variable polaire (on passe de l'ellipsoïde à une sphère) et ensuite de la sphère à un pavé :

$$J_{H\hat{G}} = J_{H(G)} \cdot J_G = \underbrace{\left| \det J_{H(G)} \right|}_{abc} \cdot \underbrace{\left| \det J_G \right|}_{r^2 \sin \theta} = abc r^2 \sin \theta$$

On a donc notre volume :

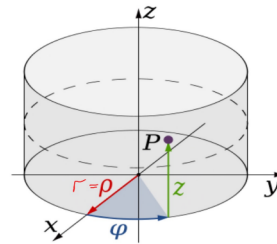
$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^1 abc r^2 \sin \theta dr = abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^1 r^2 dr = abc \frac{4}{3} \pi$$

**Coordonnées
cylindriques**

$$G(r, \theta, z) = \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

On a donc notre fonction $G : [0, \infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, Je passe les details pour la jacobienne mais son déterminant est donnée par :

$$\det J_{G(r, \varphi, z)} = r$$



Exemple

Trouver le volume du domaine D avec les frontières :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2za, a > 0 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

Qui contient $(0, 0, a)$. Donc ici comme on a des $x^2 + y^2$ mais dans \mathbb{R}^3 (sans le $+z^2$) les coordonnées cylindrique sont utiles :

$$\begin{cases} r^2 + z^2 - 2za = r^2 + z^2 - 2za + a^2 = a^2 \\ r^2 = z^2 \end{cases} \implies \begin{cases} r^2 + (z - a)^2 = a^2 \\ r = z, z \geq 0 \\ r = -z, z \leq 0 \end{cases}$$

On a ici donc une sphère de rayon a qui est centré en $(0, 0, a)$. Pour ce qui est de la deuxième équation, comme $r = z$, on a le rayon du cercle qui est égal à la hauteur, plus la hauteur plus le rayon du cercle augment (on parle pas de la sphère ici). Est donc on a un **cône**.

On cherche donc l'intersection qui se trouve en $r = z$:

$$\begin{aligned} a^2 &= r^2 + (r - a)^2 \\ 0 &= 2r^2 + -2ra \\ &= 2r(r - a) \implies r = a = z \end{aligned}$$

On a ici donc le cercle de rayon a dans le plan $a = z$.

On a donc notre volume qui se calcule avec la somme d'un demi sphère de rayon a et d'un cône $r = z$ coupé par $0 < z < a$.

Donc la demi sphère est donné par :

$$\frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi a^3 = \frac{2}{3} \pi a^3$$

On cherche donc maintenant le volume du cône (qui a donc un angle de $\frac{\pi}{4}$ (vu qu'on a $z = r$) et une hauteur de a) : Si on écrit l'ensemble :

$$D = \{0 < z < a, 0 < \varphi < 2\pi, 0 < r < z\}$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dz \int_0^z r dr = 2\pi \int_0^a \left(\frac{1}{2} r^2 \Big|_0^z \right) dz \\ &= \pi \int_0^a z^2 dz \\ &= \frac{1}{3} \pi z^3 \Big|_0^a = \frac{1}{3} \pi a^3 \end{aligned}$$

On a donc le volume total :

$$V = \frac{2}{3} \pi a^3 + \frac{1}{3} \pi a^3 = \pi a^3$$

Géométrie de changement de variables

Dans le changement de variables sphériques et cylindriques, une coordonnée cartésienne est de la forme spéciale **z**. Mais selon la géométrie du domaine et la fonction donnée, on peut choisir une autre coordonnée cartésienne d'avoir cette forme spéciale, par exemple y

$$\begin{aligned}
 G_{sph} &= \begin{cases} x = r \sin \vartheta \cos \varphi \\ z = r \sin \vartheta \sin \varphi \\ y = r \cos \vartheta \end{cases} \\
 \begin{matrix} [0, \infty[\times [0, \pi] \times [0, 2\pi[\\ r \quad \vartheta \quad \varphi \end{matrix} & \text{Diagram of a sphere in } (x, y, z) \text{ coordinates. The radial distance is } r, \text{ the polar angle is } \vartheta, \text{ and the azimuthal angle is } \varphi. \\
 |J_{G_{sph}}| = r^2 \sin \vartheta &
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 G_{cyl} &= \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ z = r \sin \varphi \\ y = y \end{cases} \\
 \begin{matrix} [0, \infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \\ r \quad \varphi \quad y \end{matrix} & \text{Diagram of a cylinder in } (x, y, z) \text{ coordinates. The radial distance is } r, \text{ the azimuthal angle is } \varphi, \text{ and the vertical coordinate is } y. \\
 |J_{G_{cyl}}| = r &
 \end{aligned}$$

Exemple

$$\int \int \int_E e^y dx dy dz, \quad E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 4, -\sqrt{x^2 + z^2} < y < \sqrt{x^2 + z^2} \right\}$$

On a donc avec le changement de coordonnées cylindrique :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

On a donc notre ensemble qui change :

$$E = \left\{ (r, \varphi, z) : 0 < \varphi < 2\pi, 0 < r < 2, -r < y < r^2 \right\}$$

Il nous reste plus qu'à intégrer (avec le déterminant de la jacobienne) :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_{-r}^{r^2} e^y \cdot r dy$$

Chapitre 7

Fin du cours, Révision

7.1 Intégrale

(1)

$$\int \int_D \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dx dy$$
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$$

On voit ici qu'on a deux cercle (plus grand que 1 et plus petit que 9) et qu'on prends donc dans un seul cadran (celui ou $x \geq 0$ et $y \leq 0$).

On va utiliser les coordonnées polaires : $D = \{(r, \varphi) : -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0, 1 < r < 3\}$ on obtient donc :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\varphi \int_1^3 \arcsin\left(\frac{r \sin \varphi}{r}\right) \cdot r dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\varphi \int_1^3 \varphi r dr$$
$$= \frac{1}{2} \varphi^2 \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cdot \frac{1}{2} r^2 \Big|_1^3 = -\frac{1}{2} \pi^2$$

(2)

$$\int \int \int_V z^2 dx dy dz$$

Avec comme domaine :

$$V = \left\{ (x, y, z) : x < y, x^2 + y^2 < 4, 0 < z < (x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}} \right\}$$

Donc on a ici un cercle centré en $(0, 0, 0)$ de rayon 2 coupé par la droite $x = y$ et nous prenons ce qu'il y a au dessus de cette droite, le demi cercle au dessus de la droite $x = y$.

Pour ce qui est du z c'est pas très clair donc on préfère "l'ignorer" pour l'instant.

Donc par changement de variable on a :

$$V = \left\{ (r, \varphi, z) : \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{5\pi}{4}, 0 < r < 2, 0 < z < \sqrt{r} \right\}$$

On a donc si on réécrit l'intégrale :

$$\begin{aligned}
 \int \int \int_V z^2 dx dy dz &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\varphi \int_0^2 dr \int_0^{\sqrt{r}} z^2 r dz \\
 &= \varphi \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cdot \int_0^2 r \frac{1}{3} z^3 \Big|_0^{\sqrt{r}} dr \\
 &= \pi \cdot \frac{1}{3} \int_0^2 r^{\frac{5}{3}} dr = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{2}{7} \cdot r^{\frac{7}{2}} \Big|_0^2 \\
 &= \frac{16\pi}{21} \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

(3)

$$\int \int \int_D$$

Avec le domaine

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq 1\}$$

On a donc ici la fonction $y = x^2$ renversé (sur le côté) de $x = y^2$ et $x = (-y)^2$:

$$\int_{-1}^1 dy \int_{y^2}^1 \sin y \cos x dx = \int_{-1}^1 dy (\sin y (\sin 1 - \sin(y^2)))$$

Néanmoins la fonction $\sin(y^2)$ n'a pas de primitive de fonction usuelle donc on va simplement essayer avec un autre type. Donc ici ça sera le x qui varie entre deux nombre et le y qui lui entre des fonctions de x :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, -\sqrt{x} < y < \sqrt{x}\}$$

Si on réécrit donc notre intégrale on a :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \sin y \cos x dx &= \int_0^1 dx (\cos x (-\cos y)) \Big|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \\
 &= \int_0^1 \cos x (-\cos \sqrt{x} + \cos(-\sqrt{x})) dx \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Ici on voit ici qu'on a $f(x, y) = \sin y \cos x$ mais on voit que cette dernière est pair : $f(x, -y) = \sin$ (pas eu le temps mais ducoup ca faisait 0)

Question 23

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -1, |y| \leq 1 - x\}$. On demande la forme de cette ensemble.

Réponse

Ici on peut remarque deux truc important, on a la "réciproque" (pas formellement mais à peu près) de la fonction $f(x) = |x|$. Ensuite on a fonc les max se trouve $x = -1$ et si on évalue pour $y : |y| = 1 - -1$ ce qui nous donne donc $|y| = 2 \implies y = \pm 2$.

donc on a un triangle avec les points $(-1, \pm 2)$. Ensuite on a donc le maximum pour $x = 1$ et donc $y = 0$.

Question 24

L'intégrale $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin \varphi}} r dr$ exprime l'aire d'un(e) :

- Secteur circulaire
- Triangle
- Rectangle
- Tranche d'un cercle

Réponse

Donc déjà on a des coordonnées polaires avec donc $D = \left\{ (\varphi, r) : \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}, 0 < r < \frac{1}{\sin \varphi} \right\}$. On a donc $0 < r < \frac{1}{\sin \varphi}$ ce qui est une droite