INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

PESQUISA QUANTITATIVA – PRÁTICAS DE LABORATÓRIO

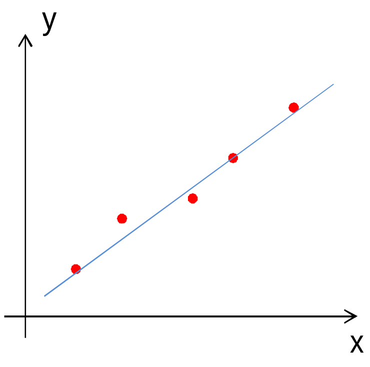
AJUSTE DE RETAS POR MÍNIMOS QUADRADOS

Prof. Marcelo Girardi Schappo
FÍSICA

O QUE É AJUSTE DE RETAS?

É determinar a função matemática que MELHOR descreve o comportamento de pontos experimentais entre grandezas que se relacionam de FORMA LINEAR.

$$\boxed{y = A.x + B}$$



exemplos

d	Deslocamento com velocidade constante
t	Tempo de movimento

$$d = v.t$$

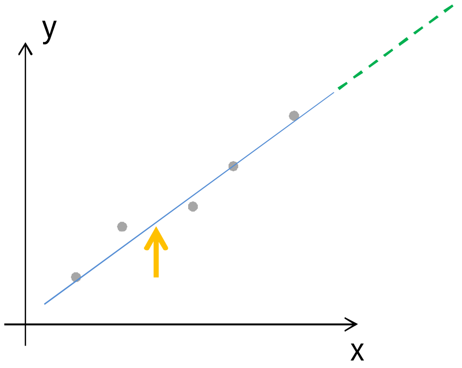
p	Pressão nas paredes do recipiente de um gás
T	Temperatura do gás

$$p = \frac{c}{V}.T$$

O QUE É AJUSTE DE RETAS?

Vantagens de saber fazer um ajuste de função

$$y = A.x + B$$



Comparar diferentes tipos de funções (computacionalmente, no caso)

Determinação de valores intermediários (interpolação)

Determinação de valores além dos medidos (extrapolação)

Determinação experimental de parâmetros

$$d = \boldsymbol{v}.t \qquad p = \frac{\boldsymbol{c}}{V}.T$$

AJUSTE DE RETA

Determinação da função linear por MÍNIMOS QUADRADOS

Conhecemos a tabela experimental entre as grandezas

y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

$$y = A.x + B$$

Determinação dos parâmetros da função linear

$$A = \frac{n.\Sigma(x.y) - \Sigma x.\Sigma y}{n.\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$B = \frac{\Sigma y.\Sigma x^2 - \Sigma x.\Sigma(x.y)}{n.\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$r = \frac{n.\Sigma(x.y) - \Sigma x.\Sigma y}{\sqrt{n.\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}.\sqrt{n.\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

Onde: n: número de pontos experimentais medidos

$\sum x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

$\sum x^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2$

$\sum y = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$

$\sum (x.y) = x_1.y_1 + x_2.y_2 + \cdots + x_n.y_n$

$\sum y^2 = {y_1}^2 + {y_2}^2 + \cdots + {y_n}^2$

AJUSTE DE RETA

Determinação da função linear por MÍNIMOS QUADRADOS

Conhecemos a tabela experimental entre as grandezas

y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

$$\boxed{y = A.x + B}$$

Determinação das incertezas dos parâmetros da função linear

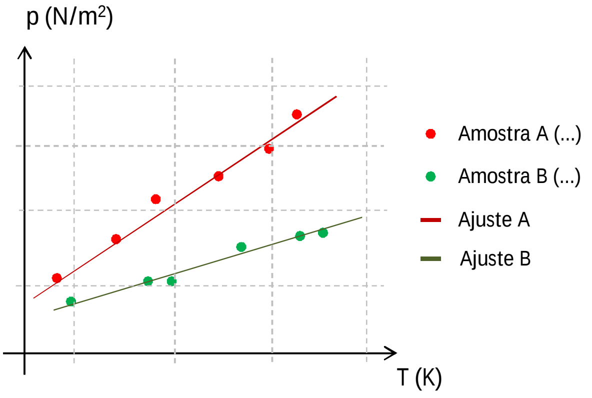
$$E_A = t.\sigma_A \qquad \sigma_A = \sqrt{\frac{n.\sigma^2}{n.\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}}$$

$$E_B = t.\sigma_B \qquad \sigma_B = \sqrt{\frac{\Sigma x^2.\sigma^2}{n.\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2 + \cdots + (\Delta y_n)^2}{n-2}}$$

$$\Delta y_i = y_i - B - A.x_i$$

COMO REPRESENTAR UM GRÁFICO CORRETAMENTE?



Identificação de eixos e unidades

Significativos corretos nas escalas ("*gridlines*")

Escalas que não gerem "aglomeração dos pontos"

Pontos marcados sem linhas de referências

Legenda adequada

Ajuste não é "ligar os pontos"

Os eixos não precisam iniciar no "zero"

VAMOS PARA UM EXEMPLO!

Em um experimento envolvendo um gás, variou-se a temperatura do mesmo e a pressão exercida por ele no recipiente foi medida. O volume (V) do gás é de 2,0m^3. A função que relaciona a pressão e a temperatura do gás é conhecida. Determine:

a) A equação e o gráfico da melhor reta que ajusta os pontos;

b) O valor do parâmetro matemático “c” com seu respectivo erro propagado.

p (N/m^2)	*3,7.10^5*	*4,0.10^5*	*4,3.10^5*	*4,5.10^5*
T (K)	*300,0*	*318,0*	*341,0*	*357,0*

$$p = \frac{c}{V}.T$$

Atenção: não é necessário conhecer termodinâmica para saber resolver esse problema!

Passo 1: Escolher as grandezas em cada eixo e identificar os parâmetros

p (N/m^2)	*3,7.10^5*	*4,0.10^5*	*4,3.10^5*	*4,5.10^5*
T (K)	*300,0*	*318,0*	*341,0*	*357,0*

$$p = \frac{c}{V}.T$$

$$y = A.x + B$$

↓

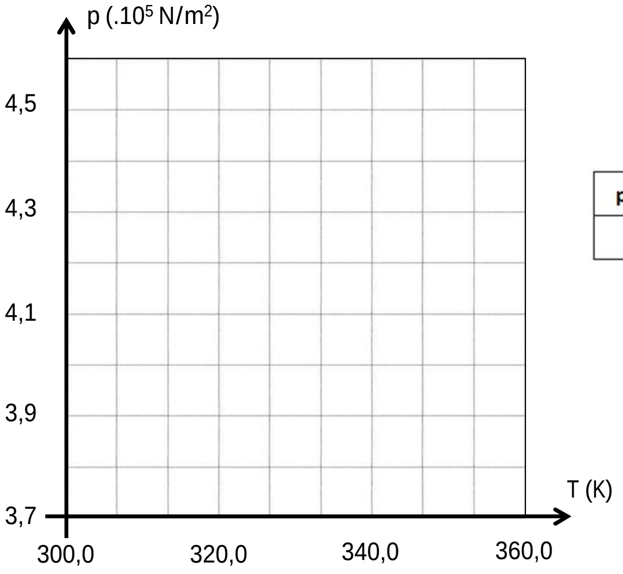
$$y = p$$

$$x = T$$

$$A = \frac{c}{V}$$

$$B = 0$$

Passo 2: Identificar os eixos e escolher as escalas adequadamente



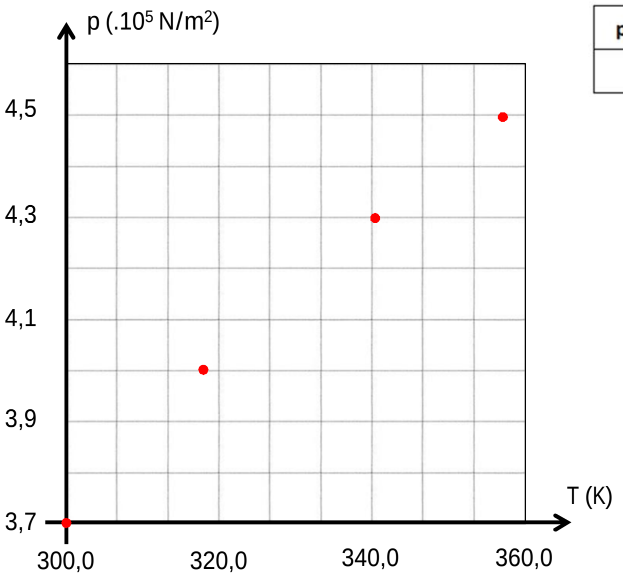
$$valor\ div \geq \frac{intervalo}{numero\ div}$$

p (N/m²)	*3,7.10⁵*	*4,0.10⁵*	*4,3.10⁵*	*4,5.10⁵*
T (K)	*300,0*	*318,0*	*341,0*	*357,0*

$$div\ y \geq \frac{0{,}8}{9} \geq 0{,}0888\ =\ 0{,}1$$

$$div\ x \geq \frac{57}{9} \geq 6{,}333\ =\ 6{,}666$$

Passo 3: Marcar os pontos experimentais com atenção



p (N/m²)	*3,7.10⁵*	*4,0.10⁵*	*4,3.10⁵*	*4,5.10⁵*
T (K)	*300,0*	*318,0*	*341,0*	*357,0*

Passo 4: Determinar os parâmetros A e B e seus erros associados

y	**p (N/m²)**	$3,7.10^5$	$4,0.10^5$	$4,3.10^5$	$4,5.10^5$
x	**T (K)**	300,0	318,0	341,0	357,0

$$A = \frac{n.\Sigma(x.y) - \Sigma x.\Sigma y}{n.\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$B = \frac{\Sigma y.\Sigma x^2 - \Sigma x.\Sigma(x.y)}{n.\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$\Sigma x = 1316$$

$$\Sigma y = 16{,}5.10^5$$

$$\Sigma(x.y) = 5{,}4548.10^8$$

$$\Sigma x^2 = 4{,}34854.10^5$$

$$\Sigma y^2 = 6{,}843.10^{11}$$

$$A = \frac{4\,.\,5{,}4548.10^8 - 1316\,.\,16{,}5.10^5}{4\,.\,4{,}34854.10^5 - 1{,}731856.10^6}$$

$$A = 1{,}3915343.10^3$$

$$B = -4{,}5314814.10^4$$

Passo 4: Determinar os parâmetros A e B e seus erros associados

y	**p (N/m²)**	$3,7.10^5$	$4,0.10^5$	$4,3.10^5$	$4,5.10^5$
x	**T (K)**	300,0	318,0	341,0	357,0

$$E_A = t.\sigma_A$$

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{n.\sigma^2}{n.\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2 + \cdots + (\Delta y_n)^2}{n-2}}$$

$$\Delta y_i = y_i - B - A.x_i$$

$$\Delta y_1 = -2145{,}476$$

$$\Delta y_2 = 2806{,}907$$

$$\Delta y_3 = 801{,}618$$

$$\Delta y_4 = -1462{,}931$$

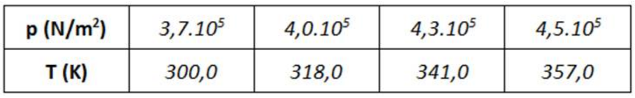
$$t = 1$$

$$\Delta y_1 = 3{,}7.10^5 + 4{,}5314814.10^4 - 1{,}3915343.10^3\,.\,300$$

$$E_A = 63{,}54716$$

Passo 4: Determinar os parâmetros A e B e seus erros associados

$$E_B = t.\sigma_B$$



y	**p (N/m^2)**	*3,7.10^5*	*4,0.10^5*	*4,3.10^5*	*4,5.10^5*
x	**T (K)**	*300,0*	*318,0*	*341,0*	*357,0*

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\Sigma x^2.\sigma^2}{n.\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2 + \cdots + (\Delta y_n)^2}{n-2}}$$

$$\Delta y_i = y_i - B - A.x_i$$

$$\Delta y_1 = 3{,}7.10^5 + 4{,}5314814.10^4 - 1{,}3915343.10^3\ .300$$

$\Delta y_1 = -2145{,}476$

$\Delta y_2 = 2806{,}907$

$\Delta y_3 = 801{,}618$

$\Delta y_4 = -1462{,}931$

$t = 1$

$E_B = 2{,}0953.10^4$

Passo 4: Determinar os parâmetros A e B e seus erros associados

$A = 1{,}3915343.10^3$	$E_A = 63{,}54716$
$B = -4{,}5314814.10^4$	$E_B = 2{,}0953.10^4$

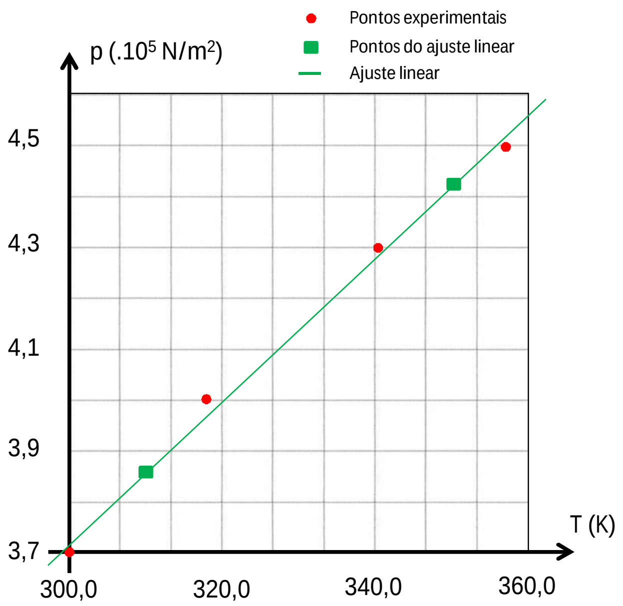
$$A = 1{,}3915343.10^3 \pm 0{,}06354.10^3$$

$$A = (1{,}39 \pm 0{,}07).10^3\ un$$

$$B = (-4{,}53 \pm 2{,}0953).10^4$$

$$B = (-5 \pm 3).10^4\ un$$

Passo 5: Determinar dois pontos da função encontrada e colocar no gráfico (com legenda)



$A = (1{,}39 \pm 0{,}07).10^3\ un$

$B = (-5 \pm 3).10^4\ un$

$\boxed{y = 1{,}39.10^3.x - 5.10^4}$

$A = 1{,}3915343.10^3$

$B = -4{,}5314814.10^4$

$\boldsymbol{x = 310} \quad \boldsymbol{y = 3{,}86.10^5}$

$\boldsymbol{x = 350} \quad \boldsymbol{y = 4{,}42.10^5}$

Passo 6: Determinar parâmetros de interesse com seu erro propagado

$A = 1{,}3915343.10^3 \quad E_A = 63{,}54716$

$B = -4{,}5314814.10^4 \quad E_B = 2{,}0953.10^4$

$y = p$

$x = T$

$A = \dfrac{c}{V}$

$B = 0$

$c = A.V \quad c = 1{,}3915343.10^3\ .\ 2{,}0 \quad c = 2{,}7830686.10^3$

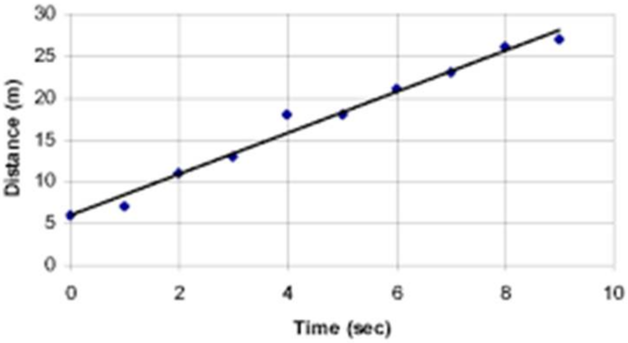
Como o erro de V não foi informado, considero constante para propagar o erro

$E_P = 2{,}0\ .\ 63{,}54716 = 127{,}09432$

$c = (2{,}7830686 \pm 0{,}127).10^3$

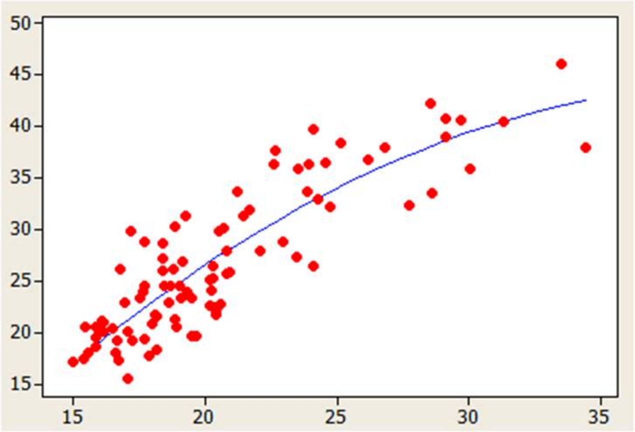
$\boxed{c = (2{,}8 \pm 0{,}2).10^3\ un}$

MÉTODOS COMPUTACIONAIS



Existem softwares que fazem o ajuste a partir dos pontos e fornecem os parâmetros da reta.
Mas é sempre bom saber fazer manualmente para poder não ficar totalmente dependente.

E SE A FUNÇÃO QUE AJUSTA MEUS PONTOS NÃO É LINEAR?



Algumas funções poderão ser LINEARIZADAS! As que não podem,
você deve usar métodos computacionais ou softwares para fazer os ajustes.