9ª Lista de Exercícios

(Matrizes de Transformações Lineares)

1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por

$$T(x, y) = (x + 2y, 2x - y).$$

(a) Calcule a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$.

(b) Seja $\mathcal{B} = \{(-1, 2), (2, 0)\}$ base de $\mathbb{R}^2$. Calcule a matriz de T em relação à base $\mathcal{B}$.

(c) Calcule $T(u)_{\mathcal{B}}$ e $T(u)$, onde $u = (4, -3)_{\mathcal{B}}$.

2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por

$$T(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y + 3z).$$

(a) Calcule a matriz de T em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e de $\mathbb{R}^2$.

(b) Sejam $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1, 2), (1, 3)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ e de $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Calcule a matriz de T em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

(c) Calcule $T(u)_{\mathcal{B}'}$ e $T(u)$, onde $u = (2, -1, 3)_{\mathcal{B}}$.

3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$T(1, 0, 0) = (1, 1, 0), \qquad T(0, 1, 0) = (2, 0, 1) \qquad \text{e} \qquad T(0, 0, 1) = (1, 0, 1).$$

(a) Determine a expressão de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$, isto é, determine $T(x, y, z)$.

(b) Calcule $T(1, 2, 3)$.

(c) Prove que T é um isomorfismo.

(d) Calcule a expressão de T^{-1} em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$, isto é, determine $T^{-1}(a, b, c)$.

4. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja matriz em relação à base canônica é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Determine $T(x, y, z)$.

(b) T é isomorfismo? Justifique.

5. Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear dada por

$$T(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} A$$

(a) Calcule a matriz de T em relação à base canônica de $M_2(\mathbb{R}^2)$.

(b) Seja

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

base de $M_2(\mathbb{R}^2)$. Calcule a matriz de T em relação à base $\mathcal{B}$.

6. Seja $T : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ a transformação linear dada por

$$T(p(t)) = tp(t) + p(0).$$

Sejam $\mathcal{B} = \{t + 1, t - 1\}$ base de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ e $\mathcal{B}' = \{t^2 + 1, t - 1, t + 1\}$ base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Calcule a matriz de T em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

Respostas

1. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$

(c) $T(u)_{\mathcal{B}} = (4, -3)_{\mathcal{B}}$ e $T(u) = (-10, 8)$.

2. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $T(u)_{\mathcal{B}'} = (5, 0)_{\mathcal{B}'}$ e $T(u) = (5, 10)$

3. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $T(1, 2, 3) = (8, 1, 5)$

(c) .

(d) $T^{-1}(a, b, c) = (b, a - b - c, -a + b + 2c)$

5. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 3 \\ -6 & -5 & -4 & -3 \\ 3 & 3 & 7 & 0 \\ 8 & 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$