2^a Avaliação de Álgebra Linear

Nota:

Prof. Rafael L. Arruda - INMA/UFMS, 19/10/2023, Turma T03

Nome: ____

RGA: ______________________

Instruções

1. Em folhas separadas, resolva as questões apresentando todos os passos das suas soluções; respostas sem justificativas não serão consideradas.
2. Nas folhas de soluções, informe o seu nome, RGA e turma.
3. As questões podem ser resolvidas a lápis ou à caneta; a ordem das soluções das questões não é relevante.

Questão 1 (2 p.) Sejam V um K-espaço vetorial e $v_1, \ldots, v_m \in V$. Denote por $[v_1, \ldots, v_m]$ o conjunto de todas as combinações lineares $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$, onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$. Verifique que $[v_1, \ldots, v_m]$ é um subespaço vetorial de V. Esse subespaço é chamado de *subespaço gerado* por $v_1, \ldots, v_m$.

Questão 2 Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ e o subconjunto

$$\mathcal{B} = \big\{(0,0,1,1), (-1,1,1,2), (1,1,0,0), (2,1,2,1)\big\}.$$

(a) (1,5 p.) Prove que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$.

(b) (1,5 p.) Escreva o vetor $v = (a,b,c,d)$ como combinação linear dos vetores da base $\mathcal{B}$.

(c) (1 p.) Com base no resultado do item anterior, forneça as coordenadas do vetor $v = (-6,-2,0,3)$ na base $\mathcal{B}$.

Questão 3 Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x,y,z) = (x - 2y, 3y + z).$$

(a) (1 p.) Encontre uma base para o núcleo de T.

(b) (1 p.) Encontre uma base para a imagem de T.

Questão 4 (2 p.) Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$\begin{aligned} &\mathrm{Nuc}(T) = [(1,-1,1)] \\ \text{e} \quad &\mathrm{Im}(T) = [(1,0,0,1), (0,1,-1,0)]. \end{aligned}$$