10ª Lista de Exercícios

(Autovalores, Autovetores e Diagonalização de Operadores)

1. **(a)** Prove que se v é um autovetor de um operador linear $T : V \to V$, então todo múltiplo escalar não nulo αv também é um autovetor de T associado ao mesmo autovalor.

(b) Prove que se v_1 e v_2 são autovetores de um operador linear $T : V \to V$ associados a um mesmo autovalor, então a soma $v_1 + v_2$ também é um autovetor de T associado ao mesmo autovalor, desde que v_1 e v_2 não sejam vetores opostos um ao outro.

(c) Conclua, a partir dos itens acima, que o autoespaço $\mathrm{Aut}_T(\lambda)$ de um operador linear $T : V \to V$ associado a um autovalor λ é um subespaço vetorial de V.

2. Para cada um dos operadores lineares $T : V \to V$ abaixo, encontre **(i)** a matriz de T em relação à base canônica de V, **(ii)** o polinômio característico de T, **(iii)** os autovalores de T, **(iv)** os autoespaços de T associados aos seus autovalores. Com base nos resultados obtidos, decida se o operador T é diagonalizável, e em caso afirmativo, encontre **(v)** a matriz de T em relação à uma base de V formada por autovetores.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x, y) = (x - y, 2x + 4y)$$

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x, y) = (5x + 2y, -x + 3y)$$

(c) $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dado por

$$T(x, y) = (5x + 2y, -x + 3y)$$

(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x, y, z) = (2x + 2y + 3y, x + 2y + z, 2x - 2y + z)$$

(e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x, y, z) = (3x, -2x + 3y - 2z, 2x + 5z)$$

(f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x, y, z) = (-2x - y + 2z, -3x + 2z, -8x - 4y + 7z)$$

(g) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dado por

$$T(at^2 + bt + c) = c - at^2$$

(h) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dado por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a + 2b + 3c + 4d & -b + 3c + 2d \\ 3c + 3d & 2d \end{bmatrix}$$

3. Sejam $S : V \to V$ e $T : V \to V$ operadores lineares. Suponha que $v \in V$ é um autovetor de S e de T associado a autovalores λ_1 de S e λ_2 de T. Encontre um autovalor e um autovetor associado dos seguintes operadores lineares:

(a) $\alpha S + \beta T$, onde $\alpha, \beta \in K$

(b) $S \circ T$

4. Seja $T : V \to V$ um operador linear. Prove que se v é um autovetor de T associado a um autovalor λ, então v também é um autovetor de

$$T^k = T \circ T \circ \cdots \circ T \quad (k \text{ composições})$$

associado ao autovalor λ^k. Conclua que se T é nilpotente, isto é, $T^k = 0$ para algum inteiro positivo k, então 0 é o único autovalor de T. (*Dica*: use o Exercício 3.)

5. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear que tem como autovetores $(3, 1)$ e $(-2, 1)$ associados aos autovalores -2 e 3, respectivamente. Determine $T(x, y)$.

6. Prove que se A é uma matriz triangular superior ou inferior, então os autovalores de A são os elementos da diagonal principal de A.

7. Prove que uma matriz quadrada A e sua transposta A^t têm os mesmos autovalores. O que se pode afirmar sobre os autovetores associados de A e de A^t?

8. Prove que se A é uma matriz quadrada cujas colunas somam 1, então $\lambda = 1$ é um autovalor de A. (*Dica*: considere A^t e o vetor v cujas coordenadas são todas iguais a 1, e use o Exercício 7.)

Respostas

2. **(a)** **(i)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

(ii) $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$

(iii) 2 e 3

(iv) $\mathrm{Aut}_T(2) = [(1, -1)]$ e $\mathrm{Aut}_T(3) = [(1, -2)]$

(v) T é diagonalizável e $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B} = \{(1, -1), (1, -2)\}$

(b) **(i)** $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

(ii) $\lambda^2 - 8\lambda + 17$

(iii) Não existem autovalores

(iv) Não existem autovetores associados

(v) Não é diagonalizável

(c) **(i)** $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

(ii) $\lambda^2 - 8\lambda + 17 = (\lambda - 4 - i))(\lambda - 4 + i)$

(iii) $4 + i$ e $4 - i$

(iv) $\mathrm{Aut}_T(4 + i) = [(2, -1 + i)]$ e $\mathrm{Aut}_T(4 - i) = [(2, -1 - i)]$

(v) T é diagonalizável e $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 - i & 0 \\ 0 & 4 - i \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B} = \{(2, -1 + i), (2, -1 - i)\}$

(d) **(i)** $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 2\lambda + 8 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$

(iii) -1, 2 e 4

(iv) $\mathrm{Aut}_T(-1) = [(1, 0, -1)]$, $\mathrm{Aut}_T(2) = [(-2, -3, 2)]$ e $\mathrm{Aut}_T(4) = [(8, 5, 2)]$

(v) T é diagonalizável e $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (-2, -3, 2), (8, 5, 2)\}$

(e) **(i)** $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

(ii) $\lambda^3 - 11\lambda^2 + 39\lambda - 45 = (\lambda - 3)^2(\lambda - 5)$

(iii) 3 e 5

(iv) $\mathrm{Aut}_T(3) = [(-1, 0, 1), (0, 1, 0)]$ e $\mathrm{Aut}_T(5) = [(0, -1, 1)]$

(v) T é diagonalizável e $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B} = \{(-1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, -1, 1)\}$

(f) **(i)** $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ -8 & -4 & 7 \end{bmatrix}$

(ii) $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 3)$

(iii) 1 e 3

(iv) $\mathrm{Aut}_T(1) = [(1, 1, 2)]$ e $\mathrm{Aut}_T(3) = [(1, 1, 3)]$

(v) T não é diagonalizável

(g) **(i)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(ii) $\lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)$

(iii) 0, 1 e -1

(iv) $\mathrm{Aut}_T(0) = [t]$, $\mathrm{Aut}_T(1) = [1]$ e $\mathrm{Aut}_T(-1) = [t^2]$

(v) T é diagonalizável e $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B} = \{t, 1, t^2\}$

(h) **(i)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(ii) $(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3)(\lambda - 2)$

(iii) 1, -1, 3 e 2

(iv) $\mathrm{Aut}_T(1) = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]$, $\mathrm{Aut}_T(-1) = \left[\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]$, $\mathrm{Aut}_T(3) = \left[\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\right]$ e $\mathrm{Aut}_T(2) = \left[\begin{bmatrix} -29 & -7 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}\right]$

(v) T é diagonalizável e $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -29 & -7 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}\right\}$

3. **(a)** v é um autovetor de $\alpha S + \beta T$ associado ao autovalor $\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2$

(b) v é um autovetor de $S \circ T$ associado ao autovalor $\lambda_1\lambda_2$

5. $T(x, y) = (-6y, -x + y)$