Resolução da 1ª Prova de Álgebra Linear

Prof. Rafael L. Arruda

Q1.

$$\begin{cases} x+y+2z+3w=13 \\ x-2y+z+w=8 \\ 3x+y+z-w=1 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y+2z+3w=13 \\ -3y-z-2w=-5 & \leftarrow L_2-L_1 \\ -2y-5z-10w=-38 & \leftarrow L_3-L_1 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x+y+2z+3w=13 \\ 3y+z+2w=5 & \leftarrow -L_2 \\ 2y+5z+10w=38 & \leftarrow -L_3 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y+2z+3w=13 \\ 3y+z+2w=5 \\ \frac{13}{3}z+\frac{26}{3}w=\frac{104}{3} & \leftarrow L_3-\frac{2}{3}L_2 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x+y+2z+3w=13 \\ 3y+z+2w=5 \\ z+2w=8 & \leftarrow \frac{3}{13}.L_3 \end{cases}$$

Da 3ª eq. temos $\boxed{z=8-2w}$. Subst. na 2ª eq. temos

$$3y+(8-\cancel{2w})+\cancel{2w}=5$$
$$3y=5-8 \Rightarrow \boxed{y=-1}$$

Subst. na 1ª eq. temos

$$x+(-1)+2.(8-2w)+3w=13$$
$$x-1+16-4w+3w=13$$
$$x+15-w=13 \Rightarrow \boxed{x=w-2}$$

Portanto, o conjunto solução é

$$S=\{(w-2,-1,8-2w,w) \mid w\in\mathbb{R}\}.$$

Q2.

$$\begin{cases} 3x-7y=a \\ x+y=b \\ 5x+3y=5a+2b \\ x+2y=a+b-1 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y=b \\ x+2y=a+b-1 \\ 3x-7y=a \\ 5x+3y=5a+2b \end{cases} \sim$$

$\underline{\underline{2}}$

$$\sim \begin{cases} x+y = b & \longrightarrow \quad x + (a-1) = b \Rightarrow \boxed{x = b-a+1} \\ \boxed{y = a-1} & \leftarrow L_2 - L_1 \\ -10y = a-3b & \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ -2y = 5a-3b & \leftarrow L_4 - 5L_1 \end{cases}$$

Da 2ª eq. vemos que y está sempre unicamente determinado. Precisamos apenas verificar para x. Subst. $y = a-1$ na 1ª eq. vemos que x também está sempre unicamente determinado, desde que o sistema resultante das duas últimas eqs. tenha solução. Esse sistema é

$$\begin{cases} -10.(a-1) = a-3b \\ -2.(a-1) = 5a-3b \end{cases} \sim \begin{cases} -11a + 3b = -10 \\ -7a + 3b = -2 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} -11a + 3b = -10 \\ 4a = 8. & \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$$

Da 2ª eq. temos $\boxed{a = 2}$. Subst. na 1ª eq. temos

$$-11.2 + 3b = -10$$
$$-22 + 3b = -10 \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

Portanto, para $a = -3$ e $b = 4$ o sistema possui única solução (x,y). //

Q3.

$$[A \,\vdots\, Id] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \text{pivô} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow L_3 \\ \\ \leftarrow L_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -4 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & -5 & -4 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2/3 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -2/3 & 1 & -5/3 & 1/3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ \\ \leftarrow L_3 + 5L_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2/3 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 5/2 & -1/2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow -\frac{3}{2}L_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 5/2 & -1/2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1 - \frac{2}{3}L_3 \\ \leftarrow L_2 - \frac{2}{3}L_3 \\ \\ \end{array}$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3/2 & 5/2 & -1/2 \end{bmatrix}. \ //$$

<u>Q4.</u>

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 11 & 8 & -4 & 6 \end{bmatrix} \overset{\div 2}{=} 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 11 & 8 & -4 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= -2 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 11 & 8 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \end{bmatrix} = -2 \cdot \det \begin{bmatrix} 8 & 4 & -7 & 0 \\ 20 & 14 & -16 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 11 & 8 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1 + 2L_4 \\ \leftarrow L_3 + 3L_4 \\ \\ \\ \end{array}$$

4

$$= -2 \cdot \det \begin{bmatrix} -6 & -17 & 0 & 0 \\ -12 & -34 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 11 & 8 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1 - 7L_3 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= -2 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -34 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 11 & 8 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1 - \frac{1}{2} L_2 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= -2 \cdot 0 \cdot (-34) \cdot (-1) \cdot 3 = 0. //$$

Q5.

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 4a_3 - 2a_2 \\ b_1 & b_2 & 4b_3 - 2b_2 \\ \frac{1}{2}c_1 & \frac{1}{2}c_2 & 2c_3 - c_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 4a_3 - 2a_2 \\ b_1 & b_2 & 4b_3 - 2b_2 \\ c_1 & c_2 & 4c_3 - 2c_2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 2L_3 \end{array} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \det \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 4a_3 \\ b_1 & b_2 & 4b_3 \\ c_1 & c_2 & 4c_3 \end{bmatrix} \\ \qquad\qquad \uparrow C_3 + 2C_2 \end{array} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \underbrace{\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}}_{=4} = 8. //$$