5ª Lista de Exercícios

(Determinantes)

1. Calcule os determinantes das matrizes abaixo via redução à forma triangular ou citando um resultado particular.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 11 & 8 & -4 & 6 \end{bmatrix}$

2. Sabendo que $\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$, calcule

$$\det \begin{bmatrix} a_1 + 2b_1 - 3c_1 & a_2 + 2b_2 - 3c_2 & a_3 + 2b_3 - 3c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

3. Sabendo que $\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = -2$, calcule

$$\det \begin{bmatrix} a_1 - \frac{1}{2}a_3 & a_2 & a_3 \\ b_1 - \frac{1}{2}b_3 & b_2 & b_3 \\ c_1 - \frac{1}{2}c_3 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

4. Sabendo que $\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 4$, calcule

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 4a_3 - 2a_2 \\ b_1 & b_2 & 4b_3 - 2b_2 \\ \frac{1}{2}c_1 & \frac{1}{2}c_2 & 2c_3 - c_2 \end{bmatrix}.$$

5. Prove que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Este determinante é chamado de *determinante de Vandermonde*.

6. Prove que, se A é uma matriz tal que $A^2 = A$, então $\det A = 0$ ou $\det A = 1$.

7. Sabendo que $\det A = 2$, calcule $\det A^5$.

8. Prove que, se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, então $\det(AB) = \det(BA)$.

9. Prove que, se λ é um escalar e A é uma matriz quadrada de ordem n, então $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

10. Prove que, se A e B são matrizes quadradas, então

$$\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = (\det A)(\det B).$$

11. Prove que, se A, B e C são matrizes quadradas, então

$$\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix} = (\det A)(\det B).$$

12. Sejam A, B e C matrizes tais que $AB = AC$. Prove que, se $\det A \neq 0$, então $B = C$.

Respostas

1. **(a)** 4

   (b) -24

   (c) -30

   (d) 72

   (e) -120

   (f) -30

   (g) 0

2. 3

3. -2

4. 8

7. 32