12ª Lista de Exercícios

(Espaços com Produto Interno e Subespaços Ortogonais)

1. Prove que a função $\langle\,,\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 3x_2 y_2$$

define um produto interno no $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^2$. Qual o comprimento do vetor $u = (1, -1)$ com respeito a este produto interno? E com respeito ao produto interno canônico?

2. **(a)** Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números reais positivos. Prove que a função $\langle\,,\rangle : K^n \times K^n \to K$ dada por

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \overline{y_i}$$

define um produto interno no K-espaço vetorial K^n.

(b) Prove que se ao menos um dos α_i fosse nulo ou um número complexo, então a função $\langle\,,\rangle$ não definiria um produto interno no K-espaço vetorial K^n.

3. Dada uma matriz $A = \left[a_{ij}\right] \in M_{m,n}(K)$, a sua *transposta conjugada* é a matriz $A^* = \overline{A^T} = \left[\overline{a_{ji}}\right]$. Prove que a função $\langle\,,\rangle : M_{m,n}(K) \times M_{m,n}(K) \to K$ dada por

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(B^* A)$$

define um produto interno no K-espaço vetorial $M_{m,n}(K)$.

4. **(a)** Sejam U e V dois K-espaços vetoriais. Suponha que $\langle\,,\rangle$ é um produto interno em V e que $T : U \to V$ é uma transformação linear injetora. Prove que a função $\langle\,,\rangle_T : U \times U \to K$ dada por

$$\langle u_1, u_2 \rangle_T = \langle T(u_1), T(u_2) \rangle$$

define um produto interno em U.

(b) Considere os $\mathbb{R}$-espaços vetoriais $U = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $V = \mathbb{R}^3$ com o produto interno canônico. Encontre a expressão para o produto interno $\langle p(t), q(t) \rangle_T$, onde $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ é a transformação linear injetora dada por $T(at^2 + bt + c) = (a + b, a + c, b + c)$.

5. No $\mathbb{R}$-espaço vetorial $C([0,1], \mathbb{R})$ com o produto interno canônico, calcule o ângulo entre as funções $p(t) = t + 2$ e $q(t) = 2t - 3$.

6. Aplique a desigualdade de Schwarz em $\mathbb{R}^3$ para provar que para quaisquer números reais positivos a_1, a_2 e a_3 tem-se

$$(a_1 + a_2 + a_3)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \geq 9.$$

7. Seja V um K-espaço vetorial com produto interno. Prove que para quaisquer $u, v \in V$ tem-se

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

Esta identidade é conhecida como *lei do paralelogramo*.

8. Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ com o produto interno canônico. Seja $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z + w = 0\}$.

(a) Encontre uma base para W.

(b) Encontre uma base para $W^\perp$.

9. Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ com o produto interno dado por

$$\langle (a, b, c, d), (x, y, z, w) \rangle = 2ax + by + cz + dw,$$

para cada $(a, b, c, d), (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$. Encontre uma base para $[(1, 2, 0, -1), (2, 0, -1, 1)]^\perp$.

10. Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ com o produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt, \quad \text{para cada } f, g \in V.$$

Encontre uma base para $[5, 1 + t]^\perp$.

11. Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $V = M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno dado por

$$\langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22},$$

para cada $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in V$. Seja

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in V \,\middle|\, x + y - z = 0 \right\}.$$

(a) Encontre uma base para W.

(b) Encontre uma base para $W^\perp$.

Respostas