8ª Lista de Exercícios

(Transformações Lineares e Teorema do Núcleo e Imagem)

1. Prove que cada uma das transformações abaixo é linear.

(a) $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ dada por $T(x, y, z) = x + 2y + zi$.

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dada por $T(a, b) = at^2 + bt + (a+b)$.

(c) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dada por $T(p(t)) = t^2 p''(t)$.

(d) $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_4$ dada por $T(p(t)) = tp(t+1)$.

(e) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $T(X) = MX + X$, onde $M \in M_2(\mathbb{R})$ é uma matriz pré-fixada.

(f) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $T(X) = MX - XM$, onde $M \in M_2(\mathbb{R})$ é uma matriz pré-fixada.

2. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z, t) = (x + z, y + t)$.

(a) $(2, 3, -2, 3) \in \mathrm{Nuc}(T)$?

(b) $(4, -2, -4, 2) \in \mathrm{Nuc}(T)$?

(c) $(1, 2) \in \mathrm{Im}(T)$?

3. Determine o núcleo e a imagem das transformações lineares abaixo.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x - y, x + y)$.

(b) $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x + iy, z + it) = (x + 2z, -x + 2t).$$

(c) $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ dada por

$$T(z_1, z_2, z_3) = (z_1 - z_2 + 2z_3, 2z_1 + z_2 - z_3, 2z_2 - 2z_3).$$

(d) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dada por

$$T(at^2 + bt + c) = (a + 2b)t + (b + c).$$

4. Verifique o Teorema do Núcleo e Imagem para cada trasnformação linear do exercício anterior.

5. Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(e_1) = (1, 2)$, $T(e_2) = (-3, 1)$, $T(e_3) = (2, 4)$ e $T(e_4) = (0, -5)$.

6. Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$\begin{aligned} T(1, 1, 0) &= (4, 1, 1, 2), \\ T(0, -1, 1) &= (-3, 0, -7, -1), \\ \text{e} \quad T(-1, 1, -1) &= (0, 0, 6, 0). \end{aligned}$$

7. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$\begin{aligned} \mathrm{Nuc}(T) &= [(1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)] \\ \text{e} \quad \mathrm{Im}(T) &= [(1, -1, 0, 2), (0, 1, -1, 0)]. \end{aligned}$$

8. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\{(1, -1, 2), (3, 1, -1)\}$ é uma base para $\mathrm{Im}(T)$.

9. Seja V um K-espaço vetorial de dimensão finita n. Prove que se n é ímpar, então não existe transformação linear $T : V \to V$ tal que $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Nuc}(T)$.

Respostas

5. $T(x, y, z, w) = (x - 3y + 2z, 2x + y + 4z - 5w)$

6. $T(x, y, z, w) = (3x + y - 2z, y + z, x - 7z, x + y)$