7ª Lista de Exercícios

(Combinações Lineares, Bases e Coordenadas)

1. Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ e o subespaço

$$W = \big[(1,1,-2,4),(1,1,-1,2),(1,4,-4,8)\big].$$

(a) O vetor $v = (\frac{2}{3},1,-1,2)$ pertence a W?

(b) O vetor $w = (0,0,1,1)$ pertence a W?

2. Considere o $\mathbb{C}$-espaço vetorial $\mathbb{C}^3$ e o subconjunto

$$\mathcal{B} = \big\{(i,1-i,2),(2,1,-i),(5-2i,4,-1-i)\big\}.$$

(a) $\mathcal{B}$ é um conjunto LD ou LI?

(b) O vetor $v = (3+i,4,2)$ pertence ao subespaço gerado por $\mathcal{B}$?

3. Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ e o subconjunto

$$\mathcal{B} = \big\{(0,0,1,1),(-1,1,1,2),(1,1,0,0),(2,1,2,1)\big\}.$$

(a) Prove que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$.

(b) Escreva o vetor $v = (a,b,c,d)$ como combinação linear dos vetores da base $\mathcal{B}$.

(c) Com base no resultado do item anterior, forneça as coordenadas do vetor $v = (-6,-2,0,3)$ na base $\mathcal{B}$.

4. Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ e o subconjunto

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right\}.$$

(a) Prove que $\mathcal{B}$ é uma base de $M_2(\mathbb{R})$.

(b) Escreva a matriz $A = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ como combinação linear das matrizes da base $\mathcal{B}$.

(c) Com base no resultado do item anterior, forneça as coordenadas da matriz $A = \begin{bmatrix}3 & 9\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ na base $\mathcal{B}$.

5. Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e o subconjunto

$$\mathcal{B} = \big\{1, 2+t, 3t-t^2, t-t^3\big\}.$$

(a) Prove que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

(b) Escreva o polinômio $p(t) = a+bt+ct^2+dt^3$ como combinação linear dos polinômios da base $\mathcal{B}$.

(c) Com base no resultado do item anterior, forneça as coordenadas do polinômio $p(t) = 1+t+t^2+t^3$ na base $\mathcal{B}$.

6. Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ e o subconjunto

$$W = \big\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \,\big|\, x+y=0 \text{ e } z-w=0\big\}.$$

(a) Prove que W é um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

(b) Encontre uma base de W.

(c) Qual a dimensão de W?

7. Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial W das soluções do sistema linear homogêneo

$$\begin{cases}5x+y+\ \ 2z-\ \ 3w=0\\ 6x+y-\ \ 3z+\ \ 2w=0\\ 3x+y+12z-13w=0\end{cases}$$

(a) Encontre uma base de W.

(b) Qual a dimensão de W?

8. Considere o $\mathbb{C}$-espaço vetorial $M_n(\mathbb{C})$ e o subconjunto

$$W = \big\{A\in M_n(\mathbb{C}) \,\big|\, \operatorname{tr}(A)=0\big\}.$$

(a) Prove que W é um subespaço de $M_n(\mathbb{C})$.

(b) Encontre uma base de W.

(c) Qual a dimensão de W?

9. Considere o $\mathbb{C}$-espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ de todas as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. Verifique que é LI o conjunto $\{f_1,f_2,f_3\}$, onde f_1, f_2 e f_3 são dadas por $f_1(x)=1$, $f_2(x)=e^{ix}=\cos x + i\operatorname{sen} x$ e $f_3(x)=e^{-ix}$ para cada $x\in\mathbb{R}$.

10. Dado um $\mathbb{C}$-espaço vetorial V, denote por $V_{\mathbb{R}}$ o conjunto V visto como um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

(a) Prove que se $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ é um subconjunto LI de V, então $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ e $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}\cup\{iv_1,iv_2,\ldots,iv_n\}$ são subconjuntos LI de $V_{\mathbb{R}}$.

(b) Prove que se $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ é uma base de V, então $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}\cup\{iv_1,iv_2,\ldots,iv_n\}$ é uma base de $V_{\mathbb{R}}$.

(c) Com base no resultado do item anterior, forneça uma base para $\mathbb{C}^n$ visto como um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

11. Prove que se $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ é uma base de um K-espaço vetorial V, então $\{\alpha_1v_1,\alpha_2v_2,\ldots,\alpha_nv_n\}$, para $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\neq 0$, é também uma base de V.

12. Seja $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ uma base do K-espaço vetorial K^n. Prove que se $A\in M_n(K)$ é uma matriz não singular, então $\{Av_1,Av_2,\ldots,Av_n\}$ é também uma base de K^n.

Respostas