1ª Lista de Exercícios

(Sistemas de Equações Lineares, Método da Eliminação Gaussiana)

1. Resolva os sistemas de equações lineares abaixo utilizando o método da eliminação gaussiana. Indique, a cada passo, as operações entre linhas realizadas.

(a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ x + 6y + 3z = 3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + z = 3 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \\ x + 7y - 7z = 5 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} -x + 3y - 2z = 4 \\ -x + 4y - 3z = 5 \\ -x + 5y - 4z = 6 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 14 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = -1 \end{cases}$

2. Resolva o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 8x + 5y + 2z = 15 \\ 21x + 19y + 16z = 56 \\ 39x + 48y + 53z = 140 \end{cases}$$

utilizando o método da eliminação gaussiana. Em seguida, faça uma pequena modificação no sistema, trocando o valor 15 da primeira equação por 14, e então resolva novamente o sistema utilizando o método da eliminação gaussiana. O que se pode concluir sobre este sistema?

3. Resolvendo um sistema de equações lineares, encontre os coeficientes da parábola $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ que passa pelos pontos $(1, 1)$, $(2, 2)$ e $(3, 0)$.

4. Encontre ângulos α, β e γ tais que

$$\begin{cases} 2\,\mathrm{sen}\,\alpha - \cos\beta + \mathrm{tg}\,\gamma = 3 \\ 4\,\mathrm{sen}\,\alpha + 2\cos\beta - 2\,\mathrm{tg}\,\gamma = 2 \\ 6\,\mathrm{sen}\,\alpha - 3\cos\beta + \mathrm{tg}\,\gamma = 9 \end{cases}$$

onde $0 \le \alpha \le 2\pi$, $0 \le \beta \le 2\pi$ e $0 \le \gamma \le \pi$.

5. O sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y - az = 0 \\ ax + y - z = 2 - a \\ x + ay - z = -a \end{cases}$$

tem alguns de seus coeficientes em função de uma constante a desconhecida. Determine os valores de a para que o sistema possua exatamente uma solução.

6. Foram estudados três tipos de alimentos. Fixada a mesma quantidade (1g) concluiu-se que:

(i) o alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 3 unidades de vitamina B e 4 unidades de vitamina C;

(ii) o alimento II tem 2 unidades de vitamina A, 3 unidades de vitamina B e 5 unidades de vitamina C;

(iii) o alimento III tem 3 unidades de vitamina A, 3 unidades de vitamina C e não contém vitamina B.

Se são necessárias 11 unidades de vitamina A, 9 de vitamina B e 20 de vitamina C,

(a) encontre todas as possíveis quantidades dos alimentos I, II e III, que fornecem a quantidade de vitaminas desejada;

(b) se o alimento I custa 60 centavos por grama e os outros dois custam 10 centavos, existe uma solução custando exatamente 1 real?

Respostas

1. **(a)** $(0, 0, 1)$

   (b) $(\frac{7}{16}, -\frac{1}{16}, \frac{17}{8})$

   (c) $(-1, 2, 5)$

   (d) O sitema não admite solução.

   (e) $(z - 1, z + 1, z)$, onde $z \in \mathbb{R}$

   (f) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1)$

   (g) $(1 - 3x_2 - x_5, x_2, 2 + x_5, 3 + 2x_5, x_5)$, onde $x_2, x_5 \in \mathbb{R}$

2. A solução do sistema inicial é $(1, 1, 1)$. Após a modificação a solução é $(-238, 490, -266)$. O sistema é mal-condicionado.

3. $\alpha = -3, \beta = \frac{11}{2}$ e $\gamma = -\frac{3}{2}$

4. $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \pi$ e $\gamma = 0$

5. $a \neq 1$ e $a \neq -2$

6. **(a)** Se x, y e z denotam, respectivamente, as quantidades dos alimentos I, II e III, então $x = -5+3z$ e $y = 8-3z$, onde $\frac{5}{3} \leq z \leq \frac{8}{3}$.

   (b) Sim, $x = 1$, $y = 2$ e $z = 2$.