FTML Exercices 4 solutions

Pour le 10 avril 2025

TABLE DES MATIÈRES

1 JACOBIENNES

F1 Pour tout $\theta, h \in \mathbb{R}^d$,

$$f_1(\theta + h) = c = f_1(\theta) \tag{1}$$

On a donc que pour tout θ, $df1_\theta(h) = 0$.

Ainsi, la différentielle est l'application nulle, la jacobienne est la matrice nulle de $\mathbb{R}^d$.

F2 Pour tout $\theta, h \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} f_2(\theta + h) &= 2(\theta + h) \\ &= 2\theta + 2h \\ &= f_2(\theta) + 2h \end{aligned} \tag{2}$$

On a donc que pour tout θ, $df2_\theta(h) = 2h$, et la jacobienne est donc $2I_d$.

F3 Pour tout $\theta, h \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} f_3(\theta + h) &= ||\theta + h||^2 \\ &= \langle \theta + h, \theta + h \rangle \\ &= \langle \theta, \theta \rangle + 2\langle \theta, h \rangle + \langle h, h \rangle \\ &= ||\theta||^2 + \langle 2\theta, h \rangle + ||h||^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Comme $||h||^2 = o(h)$, on a que pour tout θ, $df3_\theta(h) = \langle 2\theta, h \rangle = (2\theta^T)h$.

La jacobienne est donc $2\theta^T$ et le gradient 2θ.

F4 On peut calculer la jacobienne par composition, comme dans les exercices 2. Ici on recalcule tout à la main pour avoir un autre point de vue.

Pour tout $\theta, h \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} f_4(\theta + h) &= ||X(\theta + h) - y||^2 \\ &= ||(X\theta - y) + Xh||^2 \\ &= ||X\theta - y||^2 + 2\langle X\theta - y, Xh \rangle + ||Xh||^2 \\ &= ||X\theta - y||^2 + \langle 2X^T(X\theta - y), h \rangle + ||Xh||^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Pour passer de la ligne 3 à la ligne 4, on a utilisé que $\langle x, Ay \rangle = \langle A^T x, y \rangle$ si les dimensions sont correctement définies.

Comme $\|h\|^2 = o(h)$, on a que pour tout θ, $df4_\theta(h) = \langle 2X^T(X\theta - y), h\rangle = 2(X\theta - y)^T Xh$ (on a utilisé le fait que $(AB)^T = B^T A^T$).

La jacobienne est donc $2(X\theta - y)^T X$ et le gradient $2X^T(X\theta - y)$.

F5 f_5 est différentiable en (x, y) si et seulement si $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

On note $h = (h_x, h_y) \in \mathbb{R}^2$ un déplacement suffisamment petit pour que le signe de $x + h_x$ soit celui de x, et de même pour y.

$x > 0$ et $y > 0$

$$\begin{aligned} f_5(x + h_x, y + h_y) &= (x + h_x, y + h_y) \\ &= f_5(x, y) + (h_x, h_y) \end{aligned} \tag{5}$$

La jacobienne est donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$x > 0$ et $y < 0$

$$\begin{aligned} f_5(x + h_x, y + h_y) &= (x + h_x, -y - h_y) \\ &= f_5(x, y) + (h_x, -h_y) \end{aligned} \tag{6}$$

La jacobienne est donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$x < 0$ et $y > 0$

$$\begin{aligned} f_5(x + h_x, y + h_y) &= (-x - h_x, y + h_y) \\ &= f_5(x, y) + (-h_x, h_y) \end{aligned} \tag{7}$$

La jacobienne est donc $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$x < 0$ et $y < 0$

$$\begin{aligned} f_5(x + h_x, y + h_y) &= (-x - h_x, -y - h_y) \\ &= f_5(x, y) + (-h_x, -h_y) \end{aligned} \tag{8}$$

La jacobienne est donc $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$