FTML Exercices 4

Pour le 10 avril 2025

TABLE DES MATIÈRES

1 JACOBIENNES

Remarque : En dimension finie, qui est le cas qui nous occupe en grande majorité en ML, la notion de gradient n'apporte pas de nouvelle notion par rapport à celle de jacobienne. En effet le gradient est simplement le vecteur correspondant à la transposée de la jacobienne, dans le cas où l'application dont on étudie la différentielle est à valeurs réelles. Le gradient permet juste d'écrire le développement à l'ordre 1 comme un produit scalaire entre un vecteur colonne (le gradient) et le déplacement (souvent noté h), au lieu d'un produit matriciel entre un vecteur ligne et ce même vecteur colonne.

On rappelle que $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $a \in \mathbb{R}^d$ s'il existe une application linéaire continue, notée df_a, telle que :

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o(h) \tag{1}$$

Ainsi, si f est différentiable en a, on a un développement limité à l'ordre 1 de f en a. C'est la généralisation du développement à l'ordre 1 qu'on a pour une fonction dérivable g allant de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Si g est dérivable en a, on a le développement à l'ordre 1 :

$$g(a+h) = g(a) + g'(a)h + o(h) \tag{2}$$

Dans ce cas, la jacobienne est la matrice à 1 ligne et 1 colonne contenant $g'(a)$.

Pour les applications suivantes :

— déterminer si elles sont différentiables (et si elles ne le sont pas, en quels points)

— déterminer leur différentielles en tout point où elles sont différentiables

— calculer leur jacobienne lorsqu'elles sont différentiables, et leur gradient si ce dernier est défini (application à valeurs réelles)

Remarque : Pour calculer la jacobienne, vous pouvez vous entrainer à le voir de 2 façons : soit en considérant que c'est la matrice de la différentielle au point considéré, soit en prenant les dérivées partielles. Ces deux définitions sont équivalentes, on doit obtenir le même résultat avec l'une ou l'autre.

1.

$$f_1 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \\ \theta \mapsto c \end{array} \right.$$

avec $c \in \mathbb{R}^d$.

2

$$f_2 = \begin{cases} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \\ \theta \mapsto 2\theta \end{cases}$$

3

$$f_3 = \begin{cases} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ \theta \mapsto ||\theta||^2 \end{cases}$$

4

$$f_4 = \begin{cases} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ \theta \mapsto ||X\theta - y||^2 \end{cases}$$

avec $X \in\mapsto R^{n,d}$, et $y \in \mathbb{R}^n$.

5

$$f_5 = \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (|x|, |y|) \end{cases}$$