FTML Exercices 6

Pour le 24 avril 2025

TABLE DES MATIÈRES

1 MATRICES SYMÉTRIQUES RÉELLES (UTILE POUR COMPRENDRE LA PCA)

1.1 Solution

Soit $w \in \mathbb{R}^d$. On considère une base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ formée de vecteurs propres de $X^T X$, avec valeurs propres $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d)$. On écrit w dans cette base, il existe des réels $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d)$ tels que :

$$w = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i e_i \tag{1}$$

$$\begin{aligned} ||Xw||^2 &= \langle Xw, Xw \rangle \\ &= \langle X^T Xw, w \rangle \\ &= \langle X^T X \sum_{i=1}^{d} \alpha_i e_i, \sum_{i=j}^{d} \alpha_j e_j \rangle \end{aligned} \tag{2}$$

Remarque : les lettres i et j sont des variables muettes, il est important de ne pas utiliser deux fois i. On poursuit le calcul :

$$\begin{aligned} ||Xw||^2 &= \langle X^T X \sum_{i=1}^{d} \alpha_i e_i, \sum_{i=j}^{d} \alpha_j e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{d} \sum_{i=j}^{d} \langle X^T X \alpha_i e_i, \alpha_j e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{d} \sum_{i=j}^{d} \alpha_i \alpha_j \langle X^T X e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{d} \sum_{i=j}^{d} \alpha_i \alpha_j \langle \lambda_i e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{d} \sum_{i=j}^{d} \alpha_i \alpha_j \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle \end{aligned} \tag{3}$$

La base e étant orthonormée, $\langle e_i, e_j \rangle$ est nul si $i \neq j$ et vaut 1 sinon. On en déduit que :

$$\begin{aligned} ||Xw||^2 &= \sum_{i=1}^{d} \sum_{i=j}^{d} \alpha_i \alpha_j \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{d} \alpha_i^2 \lambda_i \end{aligned} \tag{4}$$

Ainsi,

$$\lambda_{min} \sum_{i=1}^{d} \alpha_i^2 \leqslant ||Xw||^2 \leqslant \lambda_{max} \sum_{i=1}^{d} \alpha_i^2 \tag{5}$$

Mais on remarque que $\sum_{i=1}^{d} \alpha_i^2 = ||w||^2$. En effet :

$$\begin{aligned} ||w||^2 &= \langle w, w \rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^{d} \alpha_i e_i, \sum_{i=j}^{d} \alpha_j e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{d} \sum_{i=j}^{d} \alpha_i \alpha_j \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{d} \alpha_i^2 \end{aligned} \tag{6}$$