FTML Exercices 3

Pour le 21 mars 2025

TABLE DES MATIÈRES

1 Convexités 1
  1.1 Définitions 1
  1.2 Exercices 1
2 Risques de Bayes 2

1 CONVEXITÉS

La convexité est une notion importante en optimisation et donc en machine learning.

1.1 Définitions

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que f est convexe si :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \alpha \in [0,1], f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \tag{1}$$

Remarques :

— La convexité est définie de façon identique pour des fonctions de variables dans $\mathbb{R}^d$ avec $d > 1$. Vous pouvez remarquer que la définition resterait inchangée, mis à part pour l'espace de x et y. En optimisation et machine learning, on a très souvent des variables vectorielles, comme le θ de la régression linéaire ou les paramètres d'un réseau de neurones.

— Il existe d'autres caractérisations de la convexité, que vous pouvez retrouver dans **lecture_notes.pdf**. Pour commencer, on peut retenir les deux faits suivants, pour les fonctions de variable dans $\mathbb{R}$:

  — Si f est dérivable, f est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante (attention, cela n'aurait pas de sens pour des variables vectorielles, il faudra donc généraliser cela différemment avec le gradient)

  — Si f est deux fois dérivable, f est convexe si et seulement si sa dérivée seconde est positive (même remarque, ici c'est la Hessienne qui interviendra dans le cas de vecteurs)

  Ces deux faits ne sont pas évidents, ce sont des propositions qu'on peut prouver.

1.2 Exercices

— 1) S'entrainer à visualiser graphiquement le sens de l'équation 1.

— 2) Les fonctions de variable réelle suivantes sont elles convexes (le prouver) ?

  - $x \mapsto x$
  - $x \mapsto 7x + 2$
  - $x \mapsto \sin(x)$
  - $x \mapsto x^2$
  - $x \mapsto \sqrt{x}$
  - $x \mapsto |x|$
- 3) On dit qu'une fonction est concave si son opposée est convexe. Une fonction peut elle être convexe et concave ?
- 4) Une somme de fonction convexes est-elle convexe ?

2 RISQUES DE BAYES

Retrouver les valeurs théoriques des risques de Bayes des deux problèmes de l'exercice 3 du TP 1. Pour ces deux problèmes, nous avons vu en cours qu'on connaît le prédicteur de Bayes, et on peut ainsi calculer son risque car nous connaissons la distribution d'où les données sont issues.

Pour le premier problème (penalty), le calcul est similaire à ceux effectués au début du 3e cours magistral. Pour le deuxième problème (nombre de streams), une espérance non triviale est à calculer, il est possible de le faire numériquement.