FTML Exercices 5 solutions

Pour le 17 avril 2025

TABLE DES MATIÈRES

1 JACOBIENNES

F1 Pour cet exemple le plus simple est d'utiliser les dérivées partielles. Si on note $J_{x,y,z}$ la jacobienne en (x, y, z), on a :

$$J_{x,y,z} = \begin{pmatrix} -y\sin(xy) & -x\sin(xy) & 0 \\ -z\sin(xz) & 0 & -x\sin(xz) \end{pmatrix} \tag{1}$$

F2 Si on note $J_{a,b,c,d}$ la jacobienne en (a, b, c, d), on a :

$$J_{a,b,c,d} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

3 Supposons par l'absurde que la norme $x \mapsto ||x||$ soit différentiable en 0. Il existe donc L linéaire continue telle que

$$||h|| = L(h) + o(h) \tag{3}$$

On peut réécrire $o(h)$ comme le produit $||h||a(h)$, avec a une application tendant vers 0 quand h tend vers 0. Soit t un nombre réel. Avec l'homogénéité de la norme, on sait que $||th|| = |t|||h||$. En appliquant 3, on obtient que

$$L(th) + ||th||a(th) = |t|(L(h) + ||h||a(h)) \tag{4}$$

Prenons $t > 0$. Avec la linéarité de L, 4 devient

$$tL(h) + t||h||a(th) = tL(h) + t||h||a(h) \tag{5}$$

Puis en simplifiant

$$a(th) = a(h) \tag{6}$$

En faisant tendre t vers o, on obtient que nécessairement $a(h) = 0$ pour tout h. Ainsi, $||h|| = L(h)$.

Par ailleurs on sait que si $h \neq 0$, alors $||h|| > 0$, et $|| - h|| > 0$. Or, $|| - h|| = L(h) = -L(h) = -||h|| < 0$, ce qui est absurde.