Mécanique des fluides - S3

I Equations de bilans

Definition I.1. Bilan de masse (continuité)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0$$

On en déduit l'équivalence : écoulement incompressible $\Leftrightarrow div(\vec{v})$

Definition I.2. Bilan de quantité de mouvement

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -grad(p) + \mu \Delta \vec{v} + \vec{f}$$

en développement la dérivé droite et en introduisant la viscosité cinématique ($\nu = \frac{\mu}{\rho}$) :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overline{\overline{grad}}.\vec{v} = -\frac{grad(p)}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} + \frac{\vec{f}}{\rho}$$

Definition I.3. Loi de Newton

- Tenseur de contraintes : $\bar{\bar{\sigma}} = -p * \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}}$
- Tenseur de contraintes visqueuses : $\bar{\bar{\tau}} = 2\ \mu\ \bar{\bar{D}} + \eta\ div(\vec{v})\ \bar{\bar{I}} = 2\ \eta\ (\bar{\bar{D}} - \frac{div(\vec{v})}{3} \bar{\bar{I}})$
- Tenseur du taux de déformation : $\bar{\bar{D}} = sym(\overline{\overline{grad}}(\vec{v}))$
- Taux de variation de volume : $div(\vec{v}) = tr(\bar{\bar{D}})$
- Hypothese de Stockes sur les coéfficients de viscosité (viscosité de volume nulle) : $2\mu + 3\eta = 0$

On en déduit la force totale appliqué sur un solide immergé : $\vec{F} = \int_S \bar{\bar{\sigma}} \vec{n}\ dS$

II Analyse des écoulements incompressibles

II.1 Echelles caractéristiques

Definition II.1. Temps caractéristiques

- Temps caractéristiques de transport **advectif** (transport sur L à la vitesse V) : $T_a = \frac{L}{V}$
- Temps caractéristiques de transport **diffusif** (affectation de la ligne σ par la viscosité) : $T_d = \frac{\sigma^2}{\nu}$

Avec **L** la distance caractéristiques, **T** le temps caractéristiques et **V** la vitesse caractéristiques.

Definition II.2. Nombres caractéristiques

- **Nombre de Strouhal** : Caractéristise l'instationarité
  $St = \frac{T_a}{T} = \frac{L}{VT} \begin{cases} St << 1 \Rightarrow \text{quasi-permanent} \\ St \approx 1 \Rightarrow \text{instationnaire} \\ St << 1 \Rightarrow \text{fortement instationnaire} \end{cases}$
- **Nombre de Reynolds** : Caractéristise les effets visqueux (matériaux géologique, bactéries, lubrifiaction ...)
  $Re = \frac{T_d}{T_a} = \frac{VL}{\nu} \approx \frac{\text{force d'inertie}}{\text{force de viscosité}} \begin{cases} Re << 1 \Rightarrow \text{ecoulement rampant} \\ Re \approx 1 \Rightarrow \text{diffusion et advection du même ordre de grandeur} \\ Re << 1 \Rightarrow \text{effets de viscosité négligeables} \end{cases}$
- **Nombre de Froude** : $Fr = \frac{V^2}{L\ g} \approx \frac{\text{force d'inertie}}{\text{force de pesanteur}}$

Definition II.3. Couche limite (approfondie par la suite)
Distance à la paroie, notée σ, sur la quelle le milieu est affectée par la diffusion.

$$\sigma \approx \sqrt{\nu\ T_a} \approx \sqrt{\nu\ T_d}$$

II.2 Rotation dans les écoulements

Definition II.4. Theoreme de Kelvin

$$\frac{\vec{\Omega}}{2} = \frac{rot(\vec{V})}{2}$$

Remarque : Par le théoreme de Stockes, on obtient un lien avec la circulation $\Theta(C) = \oint_C \vec{v}\ \vec{dl} = \int_S \vec{\Omega}\vec{n}\ dS$

Definition II.5. Taux de rotation local

Si les effets visqueux sont négligeables au voisinage d'un domaine matériel dans le fluide (fluide parfait) : La circulation sur un **contour matériel fermé** reste constante au cours du temps. *Remarque* : Proche de la paroie (omniprésence des phénomene visqueux), la condition d'adhrence fait apparaitre un rotationel non nul.

Definition II.6. Loi de Biot et Savart

$$\vec{V}(M) = -\int_V \frac{\vec{\Omega}(M') \wedge \vec{r}}{4\pi r^3} dV \text{ avec } \vec{r} = M\vec{M}'$$

La vorticité dans l'élément de volume dV **induit une rotation** de tout le fluide à la distance r de vitesse de rotation $\frac{\Omega\ dV}{4\pi r^3}$