Mécanique des fluides - S3

I Equations de bilans

Definition I.1. Bilan de masse (continuité)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0$$

On en déduit l'équivalence : écoulement incompressible $\Leftrightarrow div(\vec{v})$

Definition I.2. Bilan de quantité de mouvement

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -grad(p) + \mu \Delta \vec{v} + \vec{f}$$

en développement la dérivé droite et en introduisant la viscosité cinématique ($\nu = \frac{\mu}{\rho}$) :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overline{\overline{grad}}(\vec{v}).\vec{v} = -\frac{grad(p)}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} + \frac{\vec{f}}{\rho}$$

Definition I.3. Loi de Newton

- Tenseur de contraintes : $\bar{\bar{\sigma}} = -p * \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}}$
- Tenseur de contraintes visqueuses : $\bar{\bar{\tau}} = 2\ \mu\ \bar{\bar{D}} + \eta\ div(\vec{v})\ \bar{\bar{I}} = 2\ \eta\ (\bar{\bar{D}} - \frac{div(\vec{v})}{3} \bar{\bar{I}})$
- Tenseur du taux de déformation : $\bar{\bar{D}} = sym(\overline{\overline{grad}}(\vec{v}))$
- Taux de variation de volume : $div(\vec{v}) = tr(\bar{\bar{D}})$
- Hypothese de Stockes sur les coéfficients de viscosité (viscosité de volume nulle) : $2\mu + 3\eta = 0$

On en déduit la force totale appliqué sur un solide immergé : $\vec{F} = \int_S \bar{\bar{\sigma}} \vec{n}\ dS$

II Analyse des écoulements incompressibles

II.1 Echelles caractéristiques

Definition II.1. Temps caractéristiques

- Temps caractéristiques de transport **advectif** (transport sur L à la vitesse V) : $T_a = \frac{L}{V}$
- Temps caractéristiques de transport **diffusif** (affectation de la ligne σ par la viscosité) : $T_d = \frac{\sigma^2}{\nu}$

Avec **L** la distance caractéristiques, **T** le temps caractéristiques et **V** la vitesse caractéristiques.

Definition II.2. Nombres caractéristiques

- **Nombre de Strouhal** : Caractéristise l'instationarité
  $St = \frac{T_a}{T} = \frac{L}{VT} \begin{cases} St << 1 \Rightarrow \text{quasi-permanent} \\ St \approx 1 \Rightarrow \text{instationnaire} \\ St >> 1 \Rightarrow \text{fortement instationnaire} \end{cases}$
- **Nombre de Reynolds** : Caractéristise les effets visqueux (matériaux géologique, bactéries, lubrifiaction ...)
  $Re = \frac{T_d}{T_a} = \frac{VL}{\nu} \approx \frac{\text{force d'inertie}}{\text{force de viscosité}} \begin{cases} Re << 1 \Rightarrow \text{ecoulement rampant} \\ Re \approx 1 \Rightarrow \text{diffusion et advection du même ordre de grandeur} \\ Re >> 1 \Rightarrow \text{effets de viscosité négligeables} \end{cases}$
- **Nombre de Froude** : $Fr = \frac{V^2}{L\ g} \approx \frac{\text{force d'inertie}}{\text{force de pesanteur}}$

Definition II.3. Couche limite (approfondie par la suite)
Distance à la paroie, notée σ, sur la quelle le milieu est affectée par la diffusion.

$$\sigma \approx \sqrt{\nu\ T_a} \approx \sqrt{\nu\ T_d}$$

II.2 Rotation dans les écoulements

Definition II.4. Theoreme de Kelvin

$$\frac{\vec{\Omega}}{2} = \frac{rot(\vec{V})}{2}$$

Remarque : Par le théoreme de Stockes, on obtient un lien avec la circulation $\Theta(C) = \oint_C \vec{v}\ \vec{dl} = \int_S \vec{\Omega}\vec{n}\ dS$

Definition II.5. Taux de rotation local

Si les effets visqueux sont négligeables au voisinage d'un domaine matériel dans le fluide (fluide parfait) : La circulation sur un **contour matériel fermé** reste constante au cours du temps. *Remarque* : Proche de la paroie (omniprésence des phénomene visqueux), la condition d'adhrence fait apparaitre un rotationel non nul.

Definition II.6. Loi de Biot et Savart

$$\vec{V}(M) = -\int_V \frac{\vec{\Omega}(M') \wedge \vec{r}}{4\pi r^3} dV \text{ avec } \vec{r} = M\vec{M}'$$

La vorticité dans l'élément de volume dV **induit une rotation** de tout le fluide à la distance r de vitesse de rotation $\frac{\Omega\ dV}{4\pi r^3}$

Definition II.7. Enstrophie

L'enstrophie représente l'intensité tourbillonnaire (indépendement de l'orientation).

$$F = \frac{\Omega^2}{2}$$

Seul l'étirement d'un tourbillon peut faire varier son intensé. Les autres actions se traduisent par une réorientation des filets tourbillonnaires (qui s'arretent obligatoirement sur une paroi ou sur eux-meme).

II.3 Mise en situation

- **Ecoulement de couette**
  L'echelle de temps pertinente est $T_d = \frac{h^2}{\nu}$ pour l'établissement de la solution Couette stationnaire. Les effets visqueux sont confinés à une distance de l'ordre $\delta = \sqrt{\nu t}$ au temps t.
- **Ecoulement de Poiseuille en conduite**
  L'echelle de temps pertinente est $T_d = \frac{a^2}{\nu}$ où a est le rayon du tube. La pression est le seul role moteur. Sa force compense les fortement visqueux aux paroies et sa puissance équilibre les dissipations.
- **Ecoulement à lignes de courant circulaires**
  Le gradient radial de pression compense les effets centrifuges.
- **Tourbillon de Lamb-Oseen** TD 4
  Vitesse radiale : $V_\theta = \frac{\Gamma}{2\Pi\ r}$ où Γ est la circulation. La longueur caractéristique de diffusion est $\Delta = \nu\ t$.
- **Tourbillon de Burger**, tourbillon visqueux maintenu par étirement
  Le rayon du coeur tourbillonnaire est approché par $\delta_d = \sqrt{\frac{\nu}{\alpha}} = \frac{d}{Re}$ avec l'étirement $\alpha = \frac{U}{d} > 0$ où d est le diametre d'orifice et U la vitesse débitante.

II.4 Stabilité des écoulements

III Couche limite laminaire

Definition III.1. Présence d'une couche limite et estimation

Dans les écoulements à $Re >> 1$ les effets inertielles dominent mais il existe une zone proche des paroies où la viscosité ne peut etre négligé. On peut caractéristiser l'epaisseur sur la quelle les deux effets sont présents :

$$T_a = T_d \Leftrightarrow \frac{L}{V} = \frac{\delta^2}{\nu} \Leftrightarrow \delta = \sqrt{\frac{\nu L}{V}} = \frac{L}{\sqrt{R_{eL}}}$$

Definition III.2. Epaisseur conventionnelle de couche limite

Soit $U_e(x)$ la vitesse en fluide parfait, $U(x, y)$ la vitesse en considerant la viscosité.

$$U(x, \delta(x)) = 0.99\ U_e(x)$$

Remarque : cette longueur sera utilisé dans les bilans intégraux.

Definition III.3. Epaisseur de déplacement de couche limite

Caractéristise l'écart à la situation du fuilde parfait concernant le débit à travers l'épaisseure de la couche limite.

$$\delta^* = \int_0^{"\infty"} (1 - \frac{U}{U_e})dy = \int_0^{\delta} (1 - \frac{U}{U_e})dy$$

Remarque : δ^* peut etre considéré comme le déplacement de la ligne de courant $q_v = U_e(\delta - \delta^*)$

Definition III.4. Epaisseur de quantité de mouvement de couche limite

C'est la hauteur dont il faudrait déplacer la surface de déplacement pour conserver le début de quantité de mouvement en fluide parfait.

$$\Theta(x) = \int_0^{\delta} \frac{U}{U_e}(1 - \frac{U}{U_e})dy$$