

# Problema das Oito Rainhas Modelado em Grafos

Arthur Gabriel

DCOMP, Universidade Federal de São João del-Rei, Brasil

arthurgabrielbd@gmail.com

## Resumo

Neste trabalho será analisado o problema das 8 rainhas em uma modelagem usando grafos. A solução para o problema é dada pelo Algoritmo de Bron-Kerbosch e da sua relação com Conjuntos Independentes em Grafos.

## 1 Introdução

O problema das oito rainhas surgiu em 1848, sendo proposto pelo compositor de xadrez Max Bezzel, e dois anos mais tarde, Franz Nauck propôs o problema das  $N$  rainhas. Devido à complexidade do movimento de rainhas, o aumento do número de cálculos necessários à medida que o tamanho da entrada aumenta (complexidade de tempo) e o grande número de possíveis estados no tabuleiro. O problema das  $N$  rainhas tem sido explorada por matemáticos e programadores bastante extensivamente.

Dentre as aplicações deste problema é muito comum ser utilizado para testar as habilidades de resolução de problemas de Inteligência Artificial, bem como uma maneira de testar a capacidade de criar algoritmos com menor complexidade de tempo.

O pior caso da sua solução por “força bruta” tem complexidade de tempo  $\mathcal{O}(n^n)$ , que é de longe o método mais lento e impraticável. Existem outras soluções mais inteligentes como a por **backtracking** que representa um refinamento da solução por “força bruta”, em que múltiplas soluções podem ser eliminadas sem serem explicitamente examinadas.

Neste trabalho será abordado uma solução do problema de oito rainhas por meio de uma modelagem usando grafos. A solução encontrada pelo Algoritmo de Bron-Kerbosch usado para determinar cliques maximais em grafos.

## 2 Modelagem em Grafo

O grafo  $G=(V,A)$  modelado foi em formato do tabuleiro  $8 \times 8$  de xadrez, de forma que, os conjunto de vértices  $V$  representa as possíveis posições em que uma peça pode estar, e o conjunto de arestas  $A$  representa as ligações entre os vértices. O grafo é conexo, não direcionado e não ponderado.

As arestas de um vértice qualquer aos outros é dada pelos possíveis movimentos de uma rainha neste vértice qualquer. De maneira geral, um vértice qualquer deste grafo irá possuir

aresta conectando ele com todos os outros que estão em sua linha, coluna, diagonal esquerda e diagonal direita.

## 2.1 Algoritmo Bron-Kerbosch

O algoritmo Bron-Kerbosch foi publicado em 1973, sendo criado pelos cientistas holandeses Coenraad Bron e Joep Kerbosch. É um algoritmo para encontrar cliques maximais em um grafo não direcionado, ou seja, lista todos os subconjuntos de vértices que formam grafos completos. É bem conhecido e amplamente utilizado em áreas de aplicação de algoritmos de grafos, como química computacional. O algoritmo 1 mostra os pseudo-código de Bron-Kerbosch.

## 2.2 Determinação de Conjuntos Independentes

A solução do problema das  $n$  rainhas pode ser visto como um problema de Conjuntos Independentes em Grafos. Os Conjuntos Independentes são vértices que não possuem adjacência (arestas) entre si.

A determinação de conjuntos independentes em um grafo pode ser dada pelo seu grafo complementar  $G'$ , onde em  $G'$  será aplicado o algoritmo de Bron-Kerbosch para determinar o conjunto de clique maximal, este conjunto de vértices da clique maximal em  $G'$  representa um Conjunto Independentes em  $G$ .

Cada Conjunto Independente em  $G$  é uma possível solução para as 8 rainhas.

---

### Algorithm 1 Bron-Kerbosch

---

**Input:** Bron-Kerbosch( $R, P, X$ )

```
1: if  $P$  e  $X$  estão vazios then
2:   retorna  $R$  como clique maximal
3: end if
4: for vértice  $v$  em  $P$  do
5:   BronKerbosch( $R \cup v, P \cap N(v), X \cap N(v)$ )
6:    $P := P \setminus v$ 
7:    $X := X \cup v$ 
8: end for
```

---

## 3 Análise dos Resultados

O algoritmo foi capaz de encontrar 92 soluções possíveis sem colisão entre rainhas, o que realmente corresponde ao espe-

rado. O tempo médio de execução está em torno de 0.34 segundos utilizando a linguagem Python.

#### **4 Limitação do Resultado**

O algoritmo implementado não encontra as 12 soluções únicas que não possuem rotação do tabuleiro.