PUC Minas

Trabalho Final de Cálculo I

Ciência da Computação - 2023/1

Prof.: Neila Oliveira e Luiz Otávio

1. Uma aproximação linear para uma função $f(x)$ em um ponto no domínio de f, $x = x_0$ (também chamada de linearização de $f(x)$ ao redor de x_0) é uma função linear, denotada por $L(x)$, cujo gráfico é a reta tangente à função f no ponto x_0. Assim:

$$L(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Essa aproximação é boa para valores de x próximos de x_0. Verifique essa afirmação resolvendo o EXERCÍCIO seguinte:

EXERCÍCIO 1: a) Determine uma aproximação linear $L(x)$ para a função $f(x) = \ln(1+x)$ em $x_0 = 0$.

b) Utilize um software ou calculadora a fim de comparar o gráfico de f e sua linearização (plote-os em uma mesma tela).

c) Para quais valores de x o erro absoluto cometido na aproximação, cujo valor é dado por $|L(x) - f(x)|$ é menor que $0,1$?

As aproximações de funções são utilizadas no intuito de simplificar eventuais cálculos que necessitem ser feitos (certifique-se, por exemplo, de que uma função linear pode ser facilmente derivada!). Podemos fazer tais aproximações por polinômios de grau maior.

Estudemos agora a aproximação quadrática, isto é, a aproximação de uma função $f(x)$ em um ponto $x = x_0$ através de um polinômio de 2º grau $P(x) = A + Bx + Cx^2$. Com o intuito de garantir a qualidade da aproximação, consideremos:

$$P(x_0) = f(x_0)$$
$$P'(x_0) = f'(x_0)$$
$$P''(x_0) = f''(x_0)$$

Para facilitar os cálculos vamos considerar o polinômio $P(x)$ na forma:

$$P(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2$$

EXERCÍCIO 2: a) Calcule as derivadas $P^{'}(x)$ e $P^{''}(x)$.

b) Usando as igualdades definidas anteriormente e os resultados obtidos no item (a), mostre que:

$$P(x) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f^{''}(x_0)(x - x_0)^2$$

Este polinômio é chamado polinômio de Taylor de grau 2 centrado em x_0 (ou ao redor de x_0 e é denotado por $T_2(x)$.

EXERCÍCIO 3: Encontre o polinômio de Taylor de grau 2 $T_2(x)$ para a função:

a) $f(x) = cos(x)$, centrado em $x = 0$.

b) $f(x) = \sqrt{x+3}$, centrado em $x = 1$.

De uma maneira geral, podemos obter o polinômio de Taylor de grau n, $T_n(x)$, de uma função $f(x)$, centrado em $x = x_0$, através da fórmula

$$T_n(x) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

2. Pesquise e escreva um exemplo sobre a aplicação de derivadas de função de uma variável na análise da complexidade de algoritmos por meio de equações de recorrência.