As listas de exercícios podem ser encontradas nos seguintes endereços:
www.mat.ufmg.br/calculoI ou na pasta J18, no xerox (sala1036)

TERCEIRA LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Derive:

   a) $y = 3x^6 + 9x - 3$ *b*) $y = x^{-\frac{5}{9}}$ *c*) $y = 10\sqrt[7]{x^6} - \dfrac{9}{\sqrt{x}}$

   d) $y = x\sqrt[7]{x^2} + \dfrac{5}{x^4\sqrt{x}}$

2. Calcule $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(9+h)^6 - 9^6}{h}$.

3. Calcule o $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1 - \cos h}{h}$.

4. Calcule $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^{2000} - 3^{2000}}{x - 3}$. Como esse limite se relaciona com uma derivada?

5. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $y = x^{\frac{5}{3}} - \sqrt{x}$, no ponto de abscissa

   $x = 64$.

6. Determine a equação da reta r tangente ao gráfico de $y = x^2 + 3x + 1$ e que é paralela à reta de equação $y = 4x + 7$.

7. Determine as tangentes horizontais ao gráfico de $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} + 6x + 5$.

8. Mostre que a reta de equação $y = -x$ é tangente à curva de equação $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Encontre o ponto de tangência.

Respostas:

1) *a*) $\dfrac{dy}{dx} = 18x^5 + 9$. *b*) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{5}{9x^{\frac{14}{9}}}$. *c*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{60}{7\sqrt[7]{x}} + \dfrac{9}{2\sqrt{x^3}}$.

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{9\sqrt[7]{x^2}}{7} - \dfrac{45}{2\sqrt{x^{11}}}$. 2) 6×9^5. 3) 0.

4) Esse limite é igual a $\dfrac{dx^{2000}}{dx}\Big|_{x=3} = 2000 \times 3^{1999}$. 5) $y = \dfrac{1277}{48}x - \dfrac{2060}{3}$.

6) $y = 4x + \dfrac{3}{4}$. 7) $y = \dfrac{29}{3}$ em $x = 2$ e $y = \dfrac{19}{2}$ em $x = 3$. 8) $(3, -3)$.

9. Considere a função dada por $f(x)=\begin{cases}3-ax & se\ \ x<1\\ 2 & se\ \ x=1\\ x^2+bx+c & se\ \ x>1\end{cases}$.

a) Encontre uma relação entre *a*, *b* e *c* para que *f* seja contínua em $x = 1$.
b) Determine os valores de *a*, *b* e *c* para que *f* seja derivável em $x = 1$.

10. Derive:

a) $y = e^{-2x+5}$ *b*) $y = \dfrac{1}{\cos x}$.

c) $y=\text{sen}\,(\ln(-x))$. Qual é o domínio dessa função? Qual é o domínio da derivada *y'*?

d) $y=(-5x^4+3x-9)^7$ *e*) $y=e^{3x^4+2}\,(x^3-\dfrac{1}{x}+2x+7)$

f) $y=(x^2-3x+1)^4\,(4x^5+2x+3)^9$ *g*) $y=xe^{-x}$ *h*) $y = \ln(-x)$

i) $y=e^{\text{tg}(\ln(\text{sen}\,x))}$ *j*) $y=e^{\ln x}$ *k*) $y = \ln(\cos x)$

11. Mostre que $h(t) = |t - 3|$ não é derivável em $t = 3$.

12. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $y=\text{sen}(\frac{\pi}{2}x)+\cos(\frac{3\pi}{2}x)$ no ponto de abscissa $x = 1$.

13. Seja $f(x)=\dfrac{2+x^2\,h(x)}{x^3}$. Se *h* é derivável, $h(1) = -2$ e $h'(1) = 10$, calcule $f'(1)$.

14. Suponha que *h(x)* seja uma função derivável e que $f(x) = h(x^5)$. Determine $f'(x)$.

15. Em cada caso, verifique se a derivada existe. Em caso afirmativo escreva a expressão de $f'(x)$.

a) $f(x)=\begin{cases}x\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & se\ x\neq 0\\ 0 & se\ x=0\end{cases}$ *b*) $f(x)=\begin{cases}x^2\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & se\ x\neq 0\\ 0 & se\ x=0\end{cases}$

Respostas: 9) *a*) $a=1;\ b+c=1.$ *b*) $a=1;\ b=-3;\ c=4.$

10) *a*) $\dfrac{dy}{dx}=-2e^{-2x+5}$. *b*) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\text{sen}\,x}{\cos^2 x}=\sec x\,\text{tg}\,x$. *c*) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos(\ln(-x))}{x}$, para $x<0$.

d) $\dfrac{dy}{dx}=7(-5x^4+3x-9)^6(-20x^3+3)$.

e) $\dfrac{dy}{dx}=e^{3x^4+2}\left(12x^6-9x^2+24x^4+84x^3+2+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

f) $\dfrac{dy}{dx}=4(2x-3)(x^2-3x+1)^3(4x^5+2x+3)^9+9(20x^4+2)(4x^5+2x+3)^8(x^2-3x+1)^4$.

g) $\dfrac{dy}{dx}=(1-x)e^{-x}$. *h*) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}$. *i*) $\dfrac{dy}{dx}=\cot g(x)\sec^2(\ln(\text{sen}\,x))e^{\text{tg}(\ln(\text{sen}\,x))}$

j) $\dfrac{dy}{dx}=1$. *k*) $\dfrac{dy}{dx}=-\text{tg}\,x$. 12) $y=\dfrac{3\pi}{2}x-\dfrac{3\pi-2}{2}$. 13) 6. 14) $f'(x) = 5x^4h'(x^5)$.

15) *a*) $f'(x)=\text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ se $x\neq 0$. A derivada não existe em $x=0$.

b) $f'(x)=2x\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $se\ x\neq 0$ e $f'(0)=0$.

16. Um avião, à velocidade constante de 500 km/h, voa horizontalmente a uma altitude de 2.000 metros e passa diretamente sobre uma estação de radar. Encontre a taxa segundo a qual a distância do avião até a estação está crescendo quando ele está a 4.000 metros da estação.
17. Uma luz situa-se no topo de um poste de 15 m. Um homem com 1,80 m de altura afasta-se desse poste com uma velocidade de 3 m/s. Quando o homem estiver a 40 m do poste, determine:
    a) a taxa de variação do comprimento de sua sombra.
    b) a velocidade do topo de sua sombra.
18. Dois carros partem de um mesmo ponto. Um viaja para o sul a 60 km/h, e o outro para oeste a 25 km/h. A que taxa está aumentando a distância entre os carros duas horas depois da partida?
19. A altura de um triângulo cresce a uma taxa de 1 cm/min, enquanto sua área cresce a uma taxa de 2 cm^2/min. A que taxa estará variando a base desse triângulo quando sua altura for 10 cm e sua área 100 cm^2 ?
20. Ao meio-dia, um navio A está 100 km a oeste do navio B. O navio A está navegando para o sul a 35 km/h, e o navio B está indo para o norte a 25 km/h. Quão rápido estará variando a distância entre eles às 4 horas da tarde?
21. O volume de um cubo está aumentando à taxa de 2 cm^3 por segundo. Com que taxa estará variando a área de uma de suas faces quando sua aresta tiver 20 cm?
22. Uma partícula está se movendo ao longo do gráfico da função $f(x)=\sqrt{x}$. Quando a partícula passa pelo ponto (4 , 2), sua coordenada x está crescendo a taxa de 3 cm/s. Quão rápido está variando a distância dessa partícula à origem, nesse instante?
23. Um papagaio (pipa) a 100 metros acima do solo move-se horizontalmente a uma velocidade de 3 metros por segundo. A que taxa estará decrescendo o ângulo entre a linha e a horizontal depois de terem sido soltos 200 metros de linha?
24. Dois lados de um triângulo medem 4 m e 5 m, e o ângulo entre eles está crescendo a uma taxa de 0,06 radianos por segundo.
    a) Encontre a taxa segundo a qual estará variando o comprimento do terceiro lado desse triângulo quando o ângulo entre os lados de comprimento fixo for $\pi/3$.
    b) Encontre a taxa segundo a qual a área desse triângulo estará crescendo quando o ângulo entre os lados de comprimento fixo for $\pi/3$.
25. Um farol está localizado em uma ilha, e a distância entre ele e o ponto mais próximo P em uma praia reta no continente é de 3 km. Sua luz faz quatro revoluções por minuto. Quão rápido estará se movendo o feixe de luz ao longo da praia quando ele estiver a 1 km do ponto P?

Respostas:

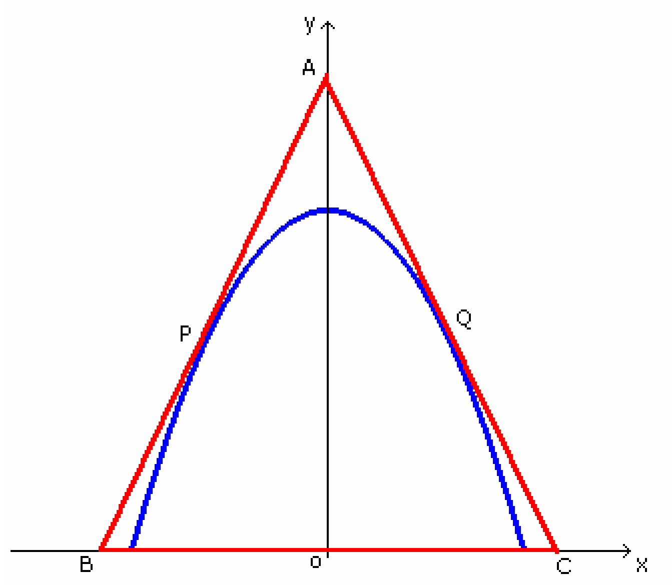
16) $250\sqrt{3}$ km/h. 17) *a*) $\frac{9}{22}$ m/s; *b*) $\frac{75}{22}$ m/s. 18) 65 km/h. 19) -1,6 cm/min.

20) $\frac{720}{13}$ km/h. 21) $\frac{1}{15}$ cm^2/s. 22) $\frac{27}{4\sqrt{5}}$ cm/s. 23) *R*) $-\frac{3}{400}$ rad/s.

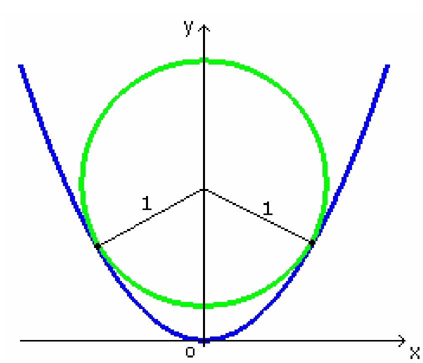
24) *a*) $\frac{0,6}{\sqrt{7}}$ m/s; *b*) 0,3 m^2/s. 25) $\frac{80}{3}\pi$ km/min.

26. Um velocista corre em uma pista circular de raio 100 m, a uma velocidade constante de 7 m/s. Seu amigo está em pé a uma distância de 200 m do centro da pista. Quão rápido estará variando a distância entre eles quando a distância entre eles for de 200 m?

27. Encontre os pontos P e Q, sobre a parábola $y = 1 - x^2$, de forma que o triângulo ABC formado pelo eixo x e pelas retas tangentes a parábola em P e Q seja eqüilátero.



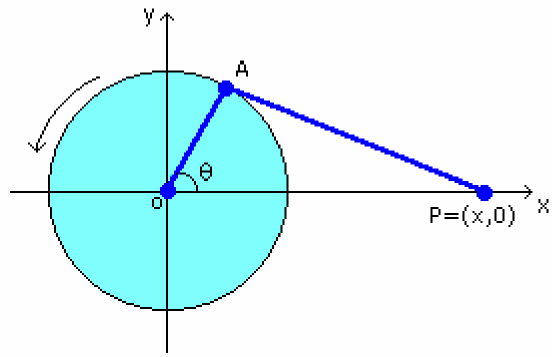
28. A figura mostra um círculo de raio 1 inscrito na parábola de equação $y = x^2$. Determine as coordenadas do centro desse círculo.



Respostas:

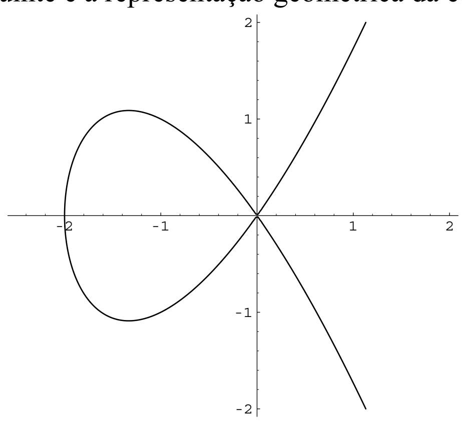
26) $-\dfrac{7\sqrt{15}}{4}$ m/s. 27) $P = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ e $Q = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$. 28) $\left(0, \dfrac{5}{4}\right)$.

29. A figura mostra uma roda giratória de 40 cm de raio e uma barra de conexão AP de comprimento fixo 1,2 m. O pino P pode escorregar para frente e para trás ao longo do eixo x à medida que a roda gira no sentido anti-horário a uma taxa de 360 revoluções por minuto. Encontre uma expressão para a velocidade do pino P em termos do ângulo θ, indicado na figura.



30. Um bote é puxado em direção ao ancoradouro por uma corda que está atada à sua proa e que passa por uma polia sobre o ancoradouro, que está 1 m mais alto do que a proa desse bote. Se a corda for puxada a uma taxa de 1 m/s, quão rápido o bote aproxima-se do ancoradouro, quando ele estiver a 8 m dele?

31. A curva seguinte é a representação geométrica da equação $y^2 = x^3 + 2x^2$.



Ache a equação da reta tangente a essa curva no ponto $(-1,1)$.

Respostas: 29) $\dfrac{dx}{dt} = -288\dfrac{\left(\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + 8}\right)\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + 8}}$ m/s. 30) $\dfrac{\sqrt{65}}{8}$ m/s.

31) $y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}$.