

Abstract geometric lines in black and grey, forming various polygons and intersecting lines, creating a dynamic and complex background.

*SIMULATION DES **COLLISIONS** : ÉTUDE LA PHYSIQUE DE LA PÉTANQUE*

Mécanique numérique en informatique graphique

MISE EN CONTEXTE :

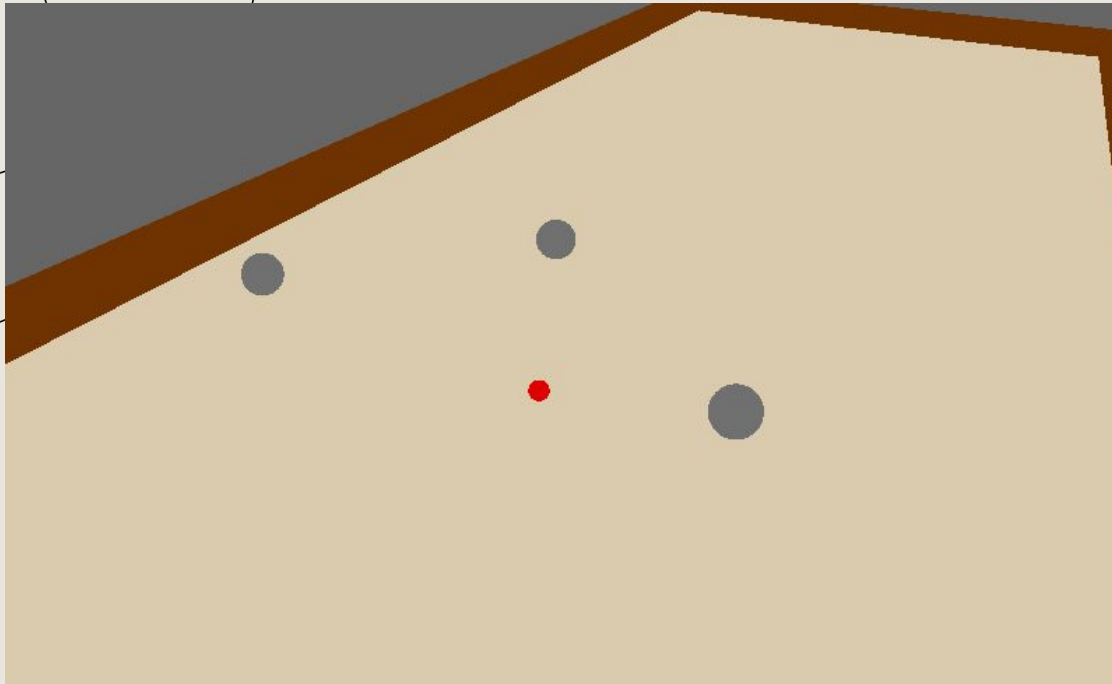
La pétanque est un scénario où la collision est un des phénomènes physiques prédominants.

Dans ce scénario, on peut facilement faire l'hypothèse que les boules de pétanques sont des solides indéformables.

On peut aussi considérer que le sol est indéformable.



MODÉLISATION ET HYPOTHÈSE



On s'intéresse à des objets sphériques. Ils ont certaines propriétés que l'on a exploitées pour simplifier nos calculs :

- Leurs moments d'inertie sont identiques selon les 3 axes et valent:

$$I = \frac{2}{5}mR^2$$

- Les forces de contact normales ne génèrent pas de moment.
- $E = 200Gpa$ et $\nu = 0.3$

RÉSOLUTION DE LA DYNAMIQUE DES CORPS

A partir des équations de Lagrange, on obtient les équations de la dynamique :

$$\begin{cases} M\ddot{x} = Mg + F \\ I\dot{w} + w \wedge Iw = m_F \end{cases}$$

Schéma numérique :

Translation :

$$\begin{cases} M\dot{x}^{n+1} = M\dot{x} + \Delta t (Mg + F) \\ x^{n+1} = x^n + \Delta t \dot{x}^{n+1} \end{cases}$$

Rotation :

$$\begin{cases} R^{n+1} = R^n e^{\Delta t S(\Omega^n)} \\ \Omega^{n+1} = e^{-\Delta t S(\Omega^n)} (\Omega^n + \Delta t R^{nT} m_F) \end{cases}$$

AJOUT DES FORCES DE CONTACTS :

On a essayé plusieurs méthodes pour modéliser le contact :

- Méthode de Signorini

Puis on a utilisé des méthode pour modéliser les impacts :

- Le théorème de Hertz
- Adaptation de la méthode de Hertz

Puis on s'est intéressé aux forces de contact tangentielles :

- Méthode de pénalisation des lois de coulomb

MÉTHODE SIGNORINI

On s'intéresse dans un premier temps à une réponse de contact normal.

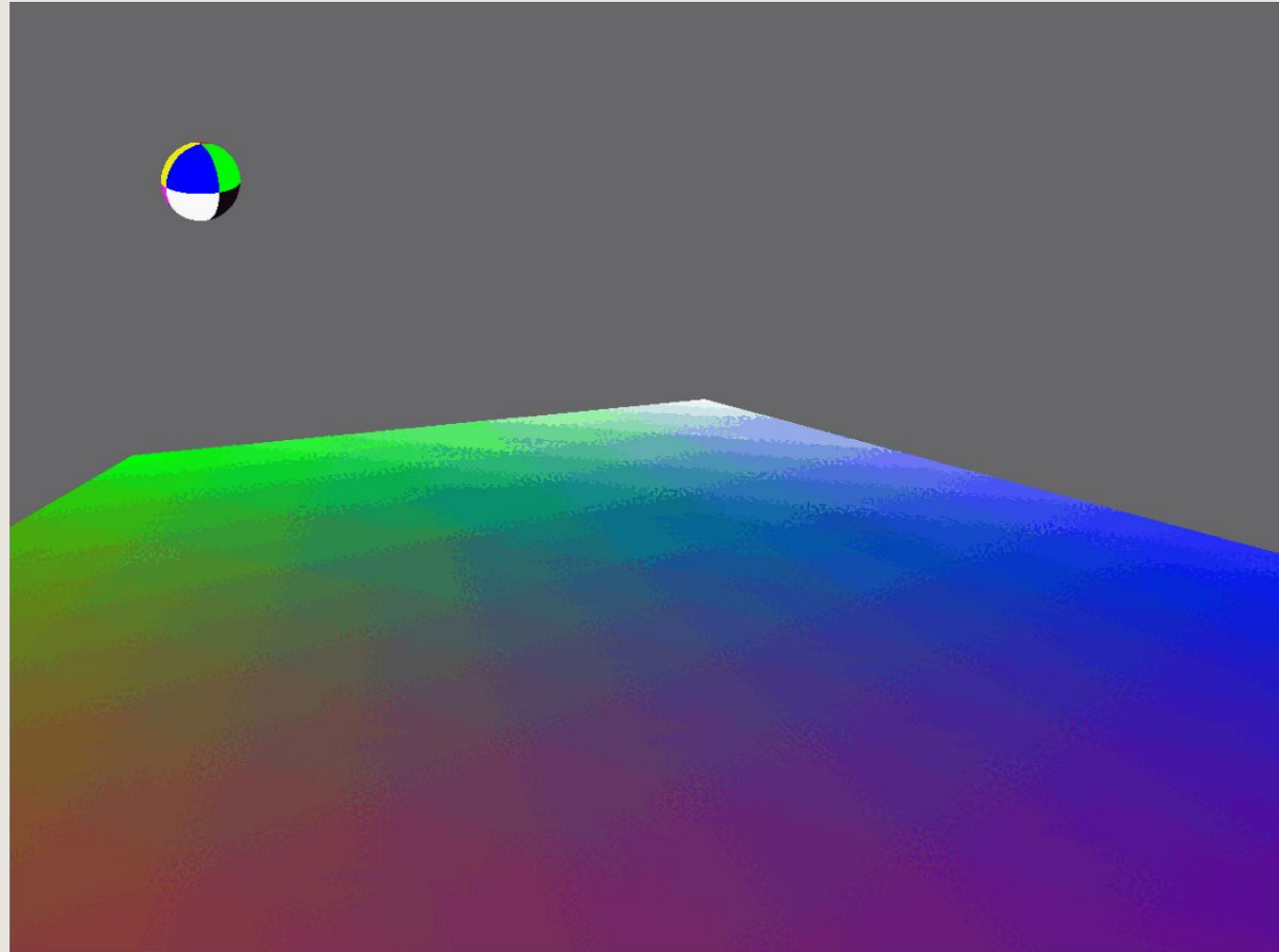
La force de contact est déterminée en résolvant les équations du mouvement sous la contrainte de signorini :

$$0 \leq u_{cn} \perp f_{cn} \geq 0$$

La contrainte de Signorini assure seulement la condition de non pénétration.

Elle modélise très bien le contact, mais il ne nous permet pas de modéliser la réponse à une collision.

MÉTHODE SIGNORINI : DEMO



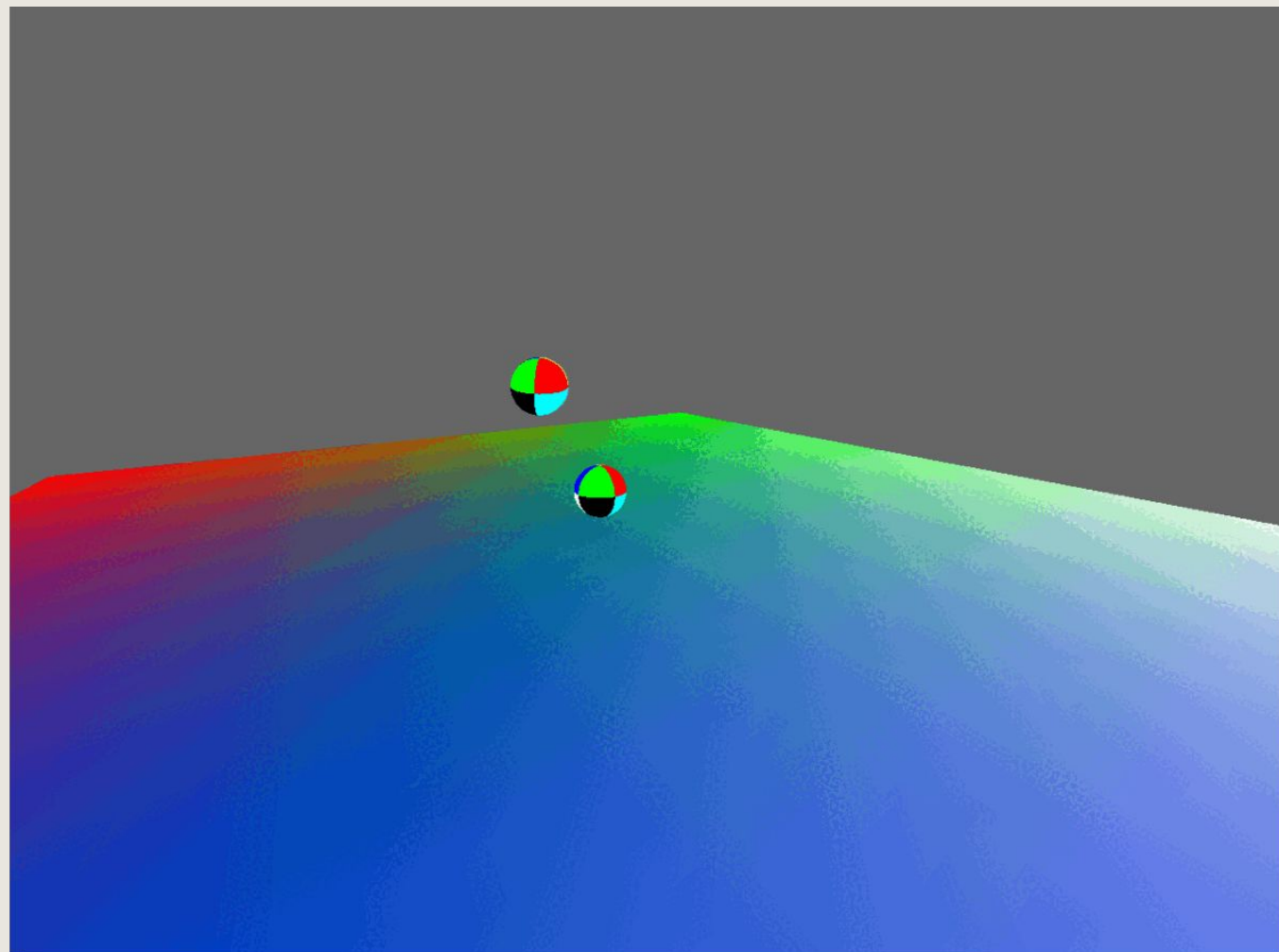
MÉTHODE DE HERTZ

Avec la mécanique des milieux continus, le théorème de Hertz nous donne la formulation d'une force de contact entre 2 solides :

$$F_c = \frac{4}{3} \frac{E}{1-\nu^2} \sqrt{R} \delta^{\frac{3}{2}}$$

Une fois que les collisions ont été détectées, les forces de contact générées par les collisions sont calculées et prises en compte dans les équations de la dynamique.

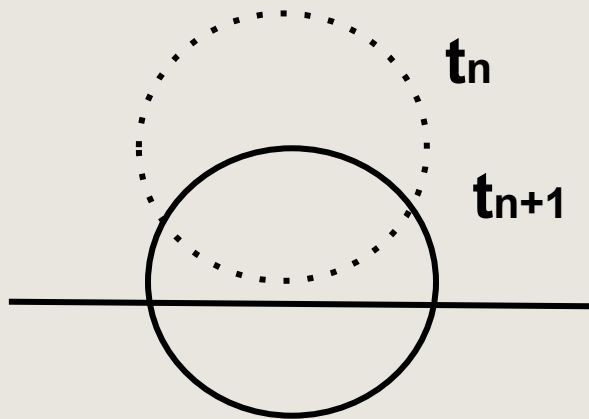
MÉTHODE DE HERTZ : DEMO



LIMITE DE LA MÉTHODE DE HERTZ

Cette méthode de prise en compte du contact est sensible au Δt et à la vitesse v .

On peut avoir des enfoncements δ qui ne peuvent pas être physiquement atteints par la boule de pétanque



Dans la simulation on peut avoir des enfoncements de l'ordre de $\delta = \Delta t \cdot v$

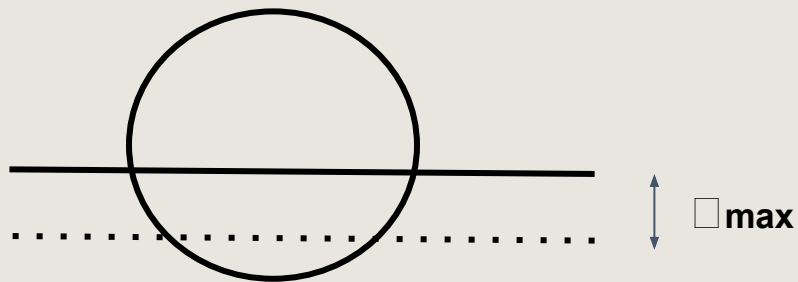
Pour $\Delta t = 0.02$ et $v = 1\text{m/s}$, $\delta = 20\text{ mm}$

Or, une boule en acier reste dans le domaine plastique pour un $\delta \approx 0.01\text{ mm}$

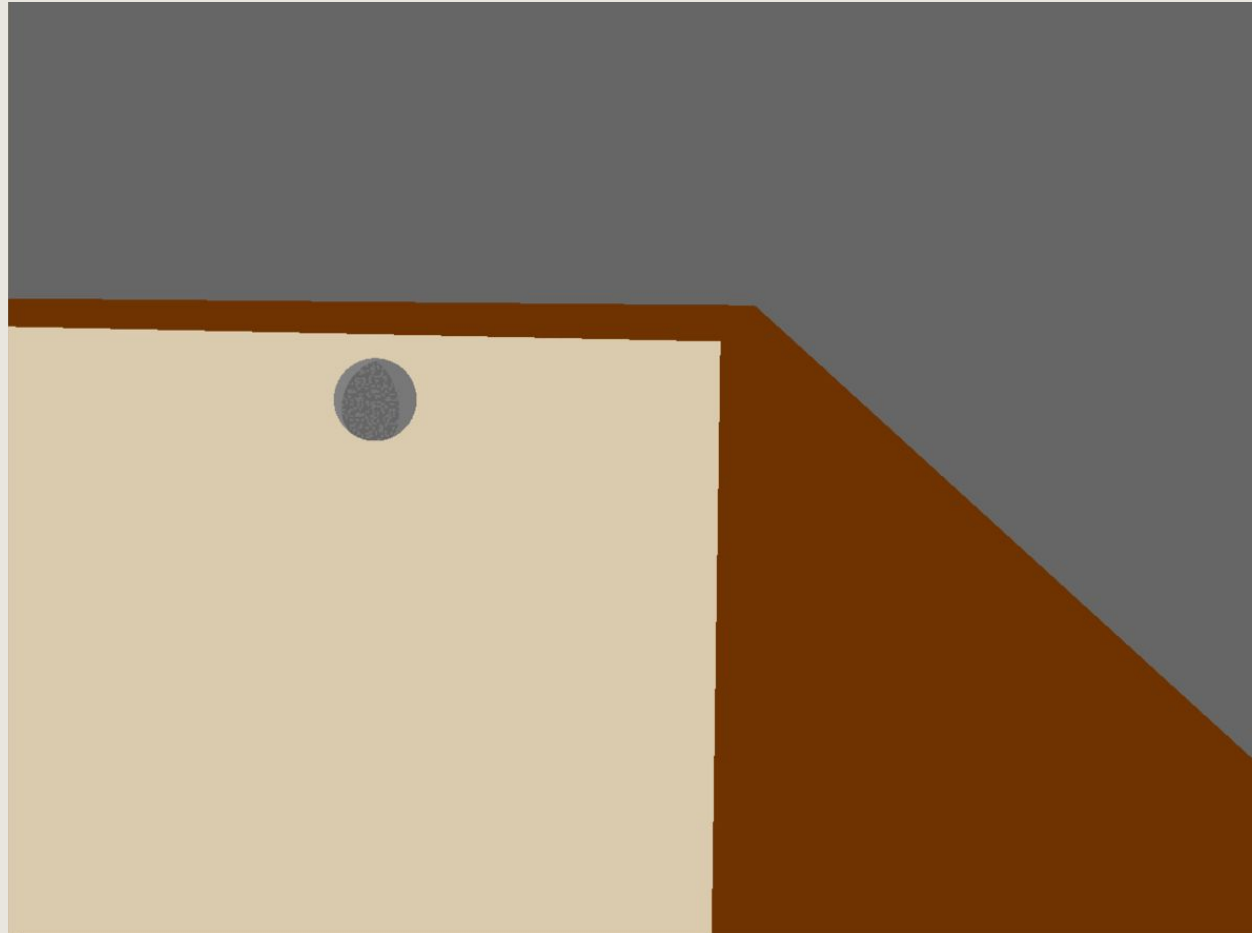
AMÉLIORATION DE LA MÉTHODE DE HERTZ

On définit un δ_{\max} dépendant du module de Young et de la vitesse de l'objet.

Pour que la force résultant ne soit pas trop forte, l'enfoncement δ ne doit pas être plus élevé que le δ_{\max} .



MÉTHODE DE HERTZ AMÉLIORÉE: DEMO



FRICTION ET LOIS DE COULOMB

On cherche maintenant à intégrer les forces de frictions à notre modèle.

On utilise les forces décrites par les lois de Coulomb :

$$\begin{cases} \|F_t\| \leq \mu F_n & \text{si adhérence} \\ F_t = -\mu F_n \frac{u_c}{\|u_c\|} & \text{si glissement} \end{cases}$$

où μ est le coefficient de frottement entre les 2 objets en contact.

LE MODÈLE DE PÉNALISATION

Pour représenter numériquement les forces de coulomb, on va ajouter une force de contact tangentielle au plan de contact de la forme :

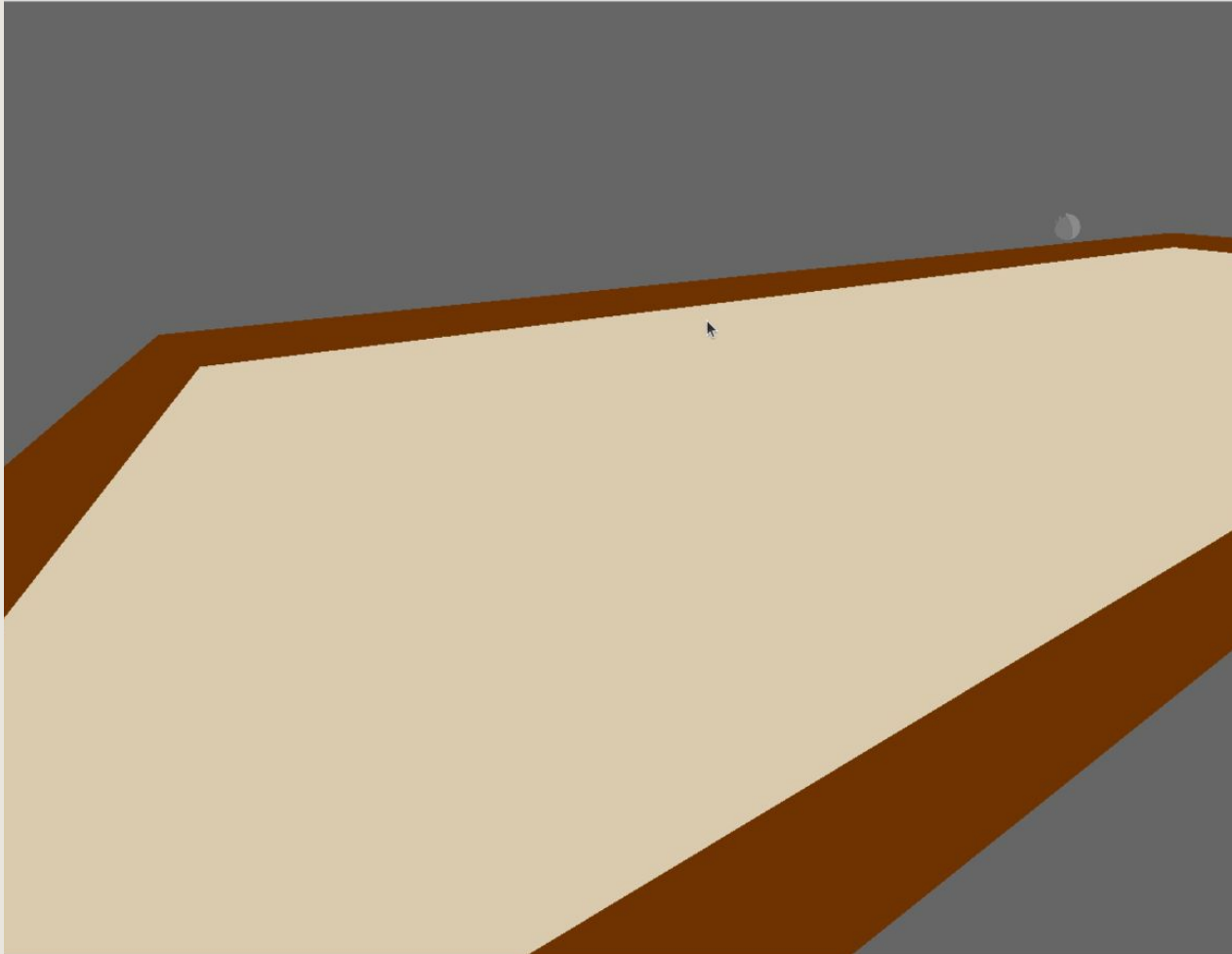
$$F_t = \min(k_s \delta_s^{\frac{3}{2}}, \mu F_n) \frac{u_c}{\|u_c\|}$$

Où δ_s est le déplacement dans tangentielle au plan de contact, du point de contact
On approxime δ_s par :

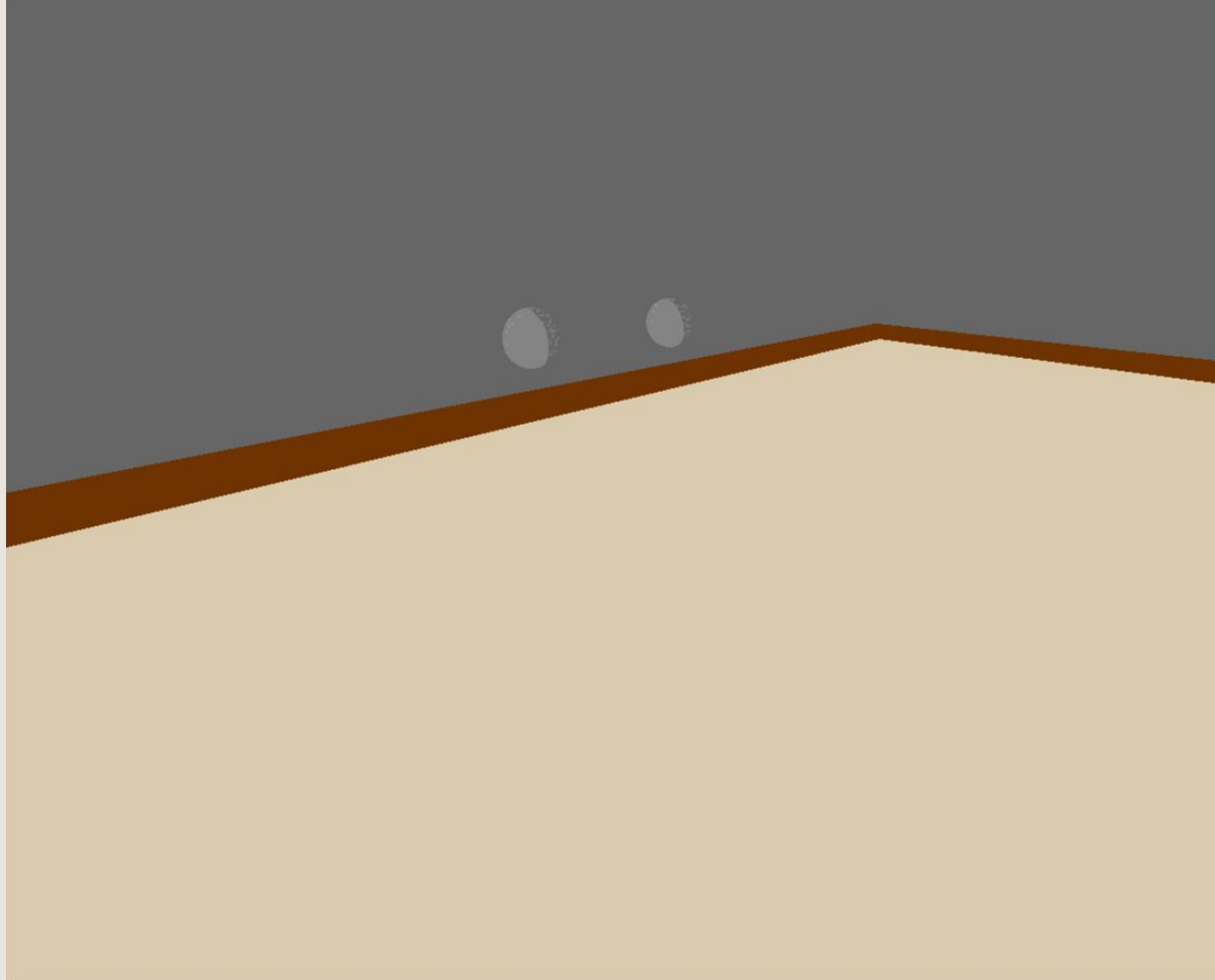
$$d\delta_s = (u_c - u_{cn} \cdot n_c) \cdot \Delta t$$

On a utilisé le théorème de Hertz pour calculer la force dans le cas de l'adhérence.

LE MODÈLE DE PÉNALISATION : DEMO



LE MODÈLE DE PÉNALISATION : DEMO



CONCLUSION

Les forces de contact sont à peu près cohérentes avec la réalité.

Potentielles améliorations :

- Amélioration de la simulation des frictions.
- Prise en compte de la conservation de l'énergie pour borner les réponses aux contacts.
- Utilisation de schémas numériques plus précis.
- Amélioration du modèle du sol : ajout de sable, de graviers...

ANNEXE

$I_{\text{sphere}} = \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) = \text{une intégral sur le volume de } r^2$

$$\square_{el} = \pi \cdot p_0 / 4 \cdot a \cdot E^* \times 2 \cdot a^2 \rightarrow \square_{el} = 4 \cdot \pi^2 \cdot R \cdot (R_e / E^*)^2 \quad (\text{avec } a = \sqrt{\square \cdot R})$$