Resumo de teoremas de kernels em digrafos

Arthur Rodrigues

1 Definições

Um digrafo é chamado de **kernel perfeito** se todo subgrafo induzido possui kernel.

Dado um circuito C, uma **corda** de C é uma aresta cujo vértices adjacentes estão em C. O **comprimento** da corda é a distância dos seus vértices adjacentes *no circuito*. Uma corda é **curta** se seu comprimento é igual a 2. Duas cordas $c = (a, b)$ e $z = (x, y)$ **cruzam**, se seus vértices aparecem na ordem a, x, b e y no circuito.

Um digrafo D é chamado de **super-orientação** de um grafo G, se D é obtido de G substituindo suas arestas por arcos, podendo ser duplos.

Um grafo G é **kernel-solucionavel** (ou **quase-perfeito**) se, para toda super-orientação de D de G em que todo clique de D possui um kernel, D também possui um kernel.

Seja G um grafo, $B = (v_0, \ldots, v_n)$ uma sequência de vértices de G e $C = (C_0, \ldots, C_n)$ uma sequência de cliques. Dizemos que G' é uma substituição de B por C em G se G' é obtido a partir de $(G - B) \cup C$ adicionando as arestas de $C_i \in C$ e $\{uc, c \in V(C_i) : \exists v \in B : uv \in E(G)\}$. Chamamos G' de um **blow-up** de G.

Seja D um digrafo e seja $S \subset A(D)$. Dizemos que um conjunto de arcos T é uma **orientação** (ou **reorientação**) de S se, para todo $f \in T$,f^- ou $f \in S$. Note que é possível f e f^- existir em T, mas só um deles existir em S. Uma orientação é **parcial** se $f \in T$, então $f^- \notin T$ e ou $f \in S$ ou $f^- \in S$. Uma orientação T é **total** se $f \in S$, então $f \in T$ ou $f^- \in T$.

2 Teoremas

Teorema 1 (von Neumann) *Todo digrafo acíclico é kernel perfeito. Além disso,seu kernel é único.*

Prova: Ordem topológica ou por indução em número de vértices $\square$

Teorema 2 (Richardson) *Todo digrafo sem circuito ímpar é kernel perfeito.*

Prova: Se é fortemente conexo, usa busca em largura.

Se não: Seja D um digrafo sem circuitos ímpares com n vértices. Podemos supor que D não seja fortemente conexo. Seja D' um componente fortemente conexo de D do qual não existem arcos saindo dele. Pela hipótese de indução, D' possui um kernel K'. Seja $D'' = D - N^{-}[K]$. Pela hipótese de indução, D'' possui um kernel K''. Como não existem (K', K'')-arcos nem (K'', K')-arcos,$K' \cup K''$ é um kernel de D, pois todo vértice de D pertence a K',K'' ou é absorvido por eles e, além disso, K' e K'' são independentes. $\square$

"O teorema direciona a atenção do estudo da existênciade kernel para digrafos que contém circuitos ímpares."

Teorema 3 (Teorema forte de grafos perfeitos) *Um grafo é perfeito se ele não possui circuitos impares com ao menos cinco vértices nem complementos desses como subgrafos induzidos.*

Teorema 4 *Grafos perfeitos são kernel-solucionáveis.*

A recíproca é mais difícil.

Teorema 5 *Grafos de linha kernel-solucionáveis são perfeitos.*

Teorema 6 *Se todo blow-up G' de G é kernel-solucionavel, então G é perfeito.*

"Pode-se mostrar que ambas as conjecturas seguem do Teorema Forte dos Grafos Perfeitos. Por conta de ser uma prova muito extensa, a omitimos."

Conjectura 7 (Meyniel) *Se todo circuito ímpar de um digrafo D possui duas cordas, então D é kernel-perfeito.*

Teorema 8 *Se todo circuito de um digrafo D possui um arco simétrico, o digrafo é kernel perfeito.*