Modelagem e Otimização da estrutura do *Ball and Plate*

O presente trabalho tem como objetivo a modelagem e otimização da estrutura do *Ball and Plate* (BP), mais especificamente dos braços que conectam o motor à mesa. Um diagrama do sistema apresentando todas as grandezas consideradas é apresentado na Fig. 1.

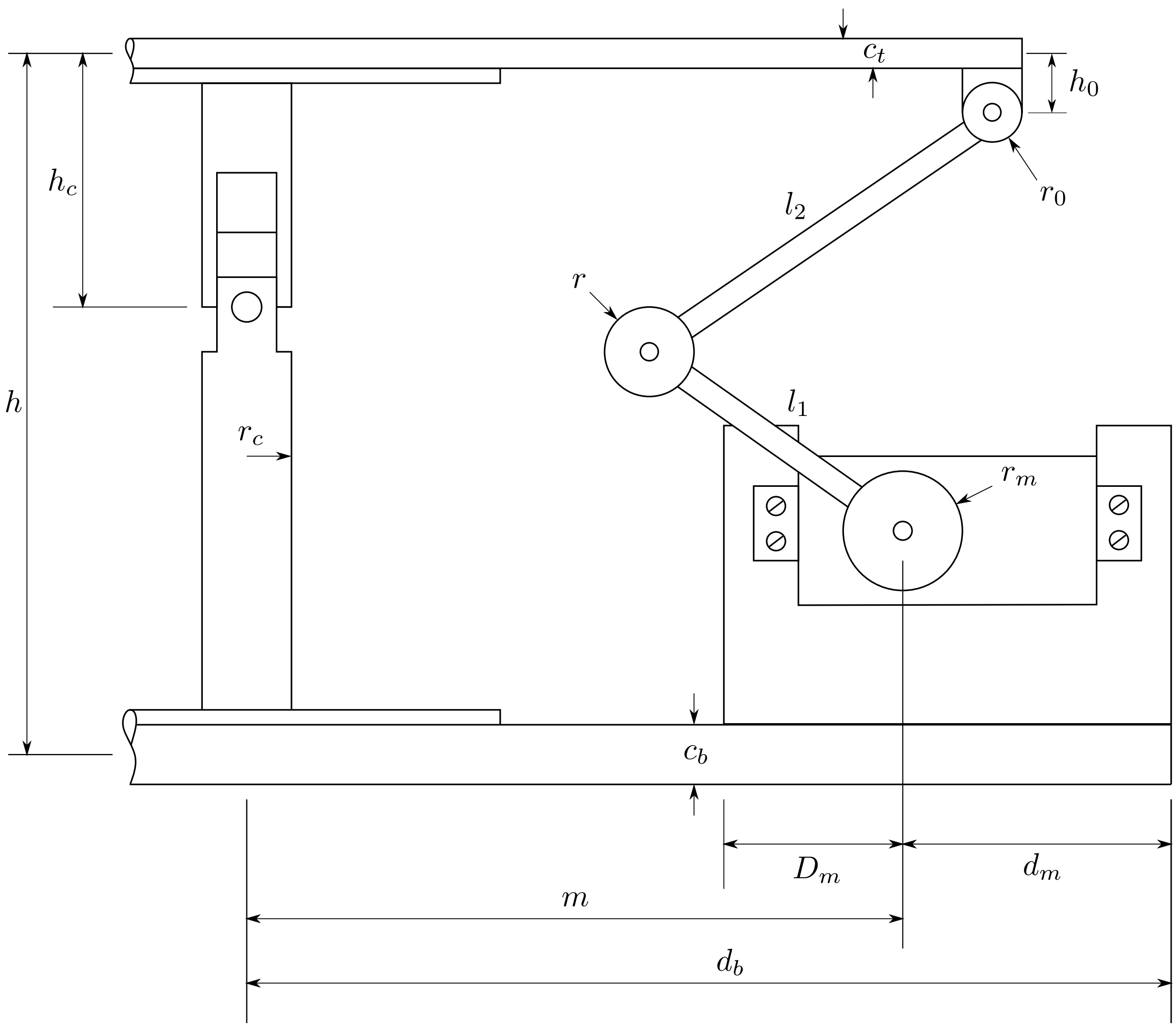

Figura 1: Vista lateral do sistema *Ball and Plate*.

Quando o braço do motor se move, a estrutura parte de um estado inicial, em que a inclinação da mesa era nula, para um novo estado, ambos representados na Fig. 2.

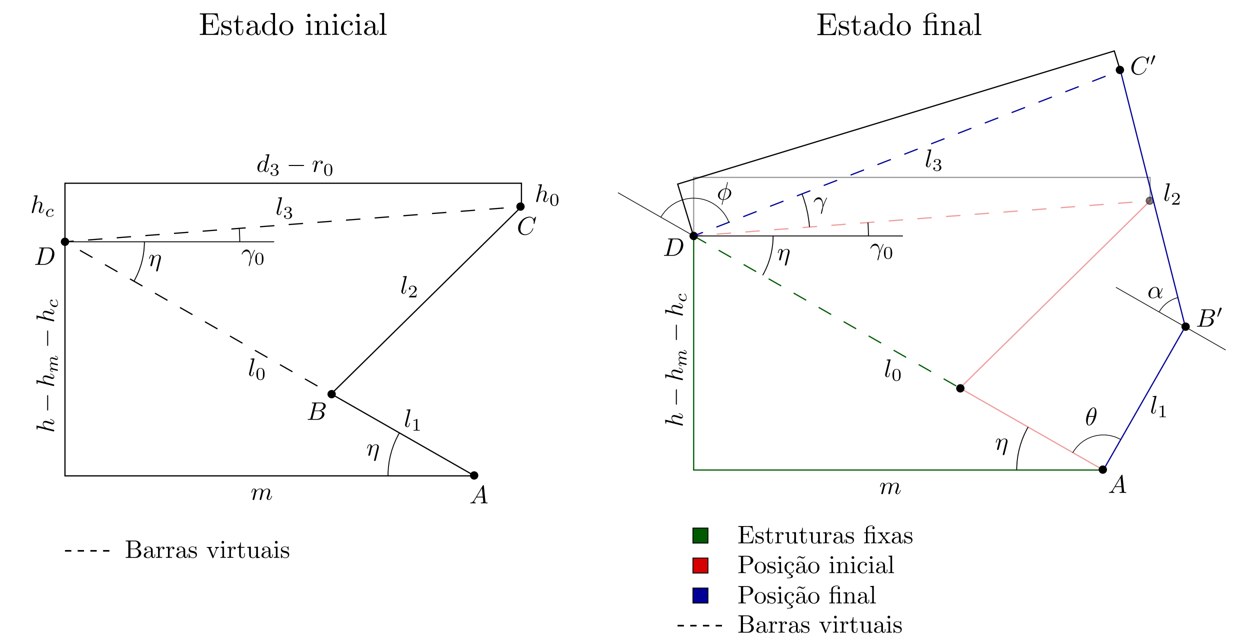

Figura 2: Diagrama simplificado para análise do comportamento cinemático da estrutura.

Avaliando a posição assumida pela estrutura no estado final, fica claro que os braços que conectam o motor à mesa formam um mecanismo de quatro barras, delimitado pelos pontos A, B', C' e D.

Para modelar o mecanismo de quatro barras, Fig. 3, é necessário primeiramente definir relações geométricas entre l_0, l_1, l_2 e l_3. Para tanto, basta avaliar as projeções de cada uma das barras tanto na horizontal, Eq. 1, quanto na vertical, Eq. 2.

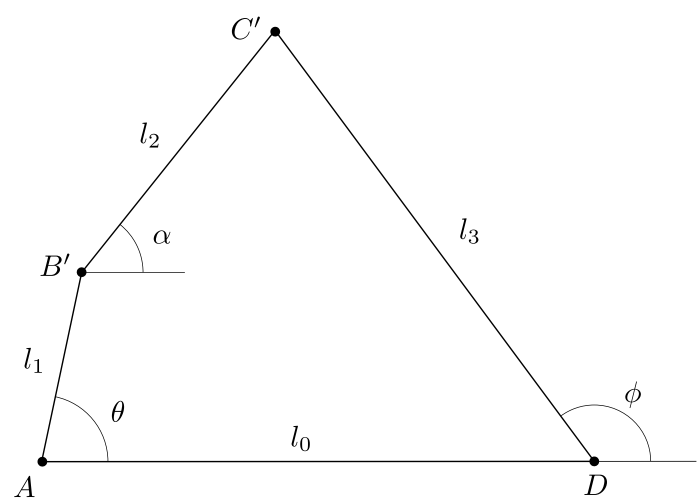

Figura 3: Diagrama simplificado do mecanismo de quatro barras composto pelos braços da estrutura do *Ball and Plate*.

$$\begin{aligned} l_0 - l_1 cos\theta - l_2 cos\alpha - l_3 cos(180 - \phi) = 0 \Rightarrow \\ l_0 - l_1 cos\theta - l_2 cos\alpha - l_3 cos\phi = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} l_3 sen(180 - \phi) - l_1 sen\theta - l_2 sen\alpha = 0 \Rightarrow \\ l_3 sen\phi - l_1 sen\theta - l_2 sen\alpha = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Uma vez que deseja-se obter a inclinação da mesa a partir da posição angular do motor, é necessário estabelecer uma relação entre θ e ϕ. Visando-se a obtenção de $\phi = f(\theta)$, isolam-se os termos dependentes de α nas Eqs. 1 e 2.

$$\begin{aligned} l_2 cos\alpha = l_0 + l_3 cos\phi - l_1 cos\theta \\ l_2 sin\alpha = l_3 sen\phi - l_1 sen\theta \end{aligned} \tag{3}$$

Em seguida, elevam-se ao quadrado as Eqs. 3 para posteriormente somá-las. Considerando o desenvolvimento apresentado na Eq. 4,

$$\begin{aligned} (A + B - C)^2 &= (A + B - C)(A + B - C) \\ &= A^2 + AB - AC + AB + B^2 - BC - AC - BC + C^2 \\ &= A^2 + B^2 + C^2 + 2AB - 2BC - 2AC \end{aligned} \tag{4}$$

e assumindo

$$\begin{aligned} A &= l_0 \\ B &= l_3 cos\phi \\ C &= l_1 cos\theta \end{aligned} \tag{5}$$

são obtidas as relações apresentadas nas Eqs. 6,

$$\begin{aligned} l_2^2 cos^2\alpha = l_0^2 + l_3^2 cos^2\phi + l_1^2 cos^2\theta + 2l_0 l_3 cos\phi - 2l_3 l_2 cos\phi cos\theta - 2l_0 l_1 cos\theta \\ l_2^2 sen^2\alpha = l_3^2 sen^2\phi + l_1^2 sen^2\theta - 2l_3 l_1 sen\phi sen\theta \end{aligned} \tag{6}$$

que quando somadas resultam na relação introduzida na Eq. 7.

$$\begin{aligned} l_2^2(cos^2\alpha + sen^2\alpha) = l_0^2 + l_3^2(cos^2\phi + sen^2\phi) + l_1^2(cos^2\theta + sen^2\theta) + \\ + 2l_0 l_3 cos\phi - 2l_0 l_1 cos\theta - 2l_3 l_1 cos\phi cos\theta - 2l_3 l_1 sen\phi sen\theta \end{aligned} \tag{7}$$

Reescrevendo a Eq. 7 em função dos termos dependentes de ϕ e adotando, a título de simplificação, constantes k_1, k_2 e k_3, é obtida a relação apresentada na Eq. 8.

$$\begin{aligned} sen\phi(-2l_3 l_1 sen\theta) + cos\phi(2l_0 l_3 - 2l_3 l_1 cos\theta) + (l_0^2 + l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 - 2l_0 l_1 cos\theta) = 0 \Rightarrow \\ k_1 sen\phi + k_2 cos\phi + k_3 = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Para obtenção da solução da Eq. 8, adota-se uma variável auxiliar t, definida da seguinte forma

$$t = tan\frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\phi}{1 + cos\phi}} \tag{9}$$

Uma vez definida a variável auxiliar t, é possível definir a partir dela uma relação para o cálculo do $cos\phi$, Eq. 10,

$$\begin{gathered} t^2 = \frac{1 - cos\phi}{1 + cos\phi} \Rightarrow \\ t^2 + t^2 cos\phi = 1 - cos\phi \Rightarrow \\ cos\phi(t^2 + 1) = 1 - t^2 \Rightarrow \\ cos\phi = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \end{gathered} \tag{10}$$

e uma para o cálculo do $sen\phi$, Eq. 11,

$$\begin{gathered} sen^2\phi + cos^2\phi = 1 \Rightarrow \\ sen\phi = \sqrt{1 - cos^2\phi} = \sqrt{1 - \frac{(1 - t^2)^2}{(1 + t^2)^2}} = \sqrt{1 - \frac{1 - 2t^2 + t^4}{1 + 2t^2 + t^4}} \Rightarrow \\ sen\phi = \sqrt{\frac{1 + 2t^2 + t^4 - 1 + 2t^2 - t^4}{1 + 2t + t^2}} \Rightarrow \\ sen\phi = \sqrt{\frac{4t^2}{(1 + t^2)^2}} \Rightarrow \\ sen\phi = \frac{2t}{1 + t^2} \end{gathered} \tag{11}$$

Introduzindo as Eqs. 11 e 10 na Eq. 8, obtêm-se uma relação para o cálculo de t, Eq. 12.

$$\begin{gathered} k_1 sen\phi + k_2 cos\phi + k_3 = 0 \Rightarrow \\ \frac{k_1(2t) + k_2(1 - t^2) + k_3(1 + t^2)}{1 + t^2} = 0 \Rightarrow \\ t^2(k_3 - k_2) + t(2k_1) + (k_2 + k_3) = 0 \Rightarrow \\ t = \frac{-2k_1 \pm \sqrt{4k_1^2 - 4(k_3 - k_2)(k_3 + k_2)}}{2(k_3 - k_2)} \Rightarrow \\ t = \frac{-k_1 \pm \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}}{k_3 - k_2} \end{gathered} \tag{12}$$

Uma vez que $t = \frac{\phi}{2}$ por definição, segue que

$$\phi = 2tan^{-1}\left(\frac{-k_1 \pm \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}}{k_3 - k_2}\right) \tag{13}$$

Uma vez que k_1, k_2 e k_3 dependem apenas dos comprimentos l_0, l_1, l_2 e l_3, e do ângulo θ, a Eq. 13 possibilita a relação entre a posição do motor, diretamente ligada a θ, e a inclinação da mesa, que depende de ϕ.

Uma vez determinado um modelo para o mecanismo de quatro barras, é necessário encontrar tanto a relação entre o ângulo θ e a posição angular do motor θ_m, quanto aquela entre o ângulo ϕ e a inclinação da mesa ϕ. Estas relações, e algumas outras, introduzidas nas Eqs. 14, podem ser obtidas pela análise do diagrama apresentados na Fig. 2 e serão de suma importância na determinação dos comprimentos dos braços da estruturas (representados por l_1 e l_2). Cabe ressaltar que adotou-se que as barras l_0 e l_1 estarão alinhadas quando a mesa estiver alinhada com a horizontal (caso em que $\gamma = \theta = 0$). Desta forma, $\theta = \theta_m$ e é possível obter o comprimento l_2 por meio da análise do triângulo BCD, Fig. 2.

$$\begin{gathered}
\theta = \theta_m \\
\eta = tan\left(\frac{h - h_m - h_c}{m}\right) \\
\gamma_0 = tan^{-1}\left(\frac{h_c - h_0}{d_3 - r_0}\right) \\
\phi = 180 - \eta - \gamma_0 - \phi \\
l_0 = \sqrt{m^2 + (h - h_m h_c)^2} \\
l_3 = \sqrt{(h_c - h_0)^2 + (d_3 - r_0)^2} \\
l_2 = \sqrt{(l_0 - l_1)^2 + l_3^2 - 2l_3(l_0 - l_1)cos(\eta + \gamma_0)}
\end{gathered} \tag{14}$$

Pela avaliação das Eqs. 14 conclui-se que para determinar as dimensões dos braços do BP é necessário que sejam determinados a posição m do motor com relação ao centro da mesa, e o comprimento l_1 do braço diretamente conectado ao motor.

Visando a simplificação do modelo dinâmico do BP, pretende-se escolher l_1 e m de forma que $\gamma \approx \theta$, como indica a Fig. 4. Para tanto, é necessário que a diferença entre as curvas, representada por e seja a menor possível. Assim sendo, pode-se determinar l_1 e m minimizando J, Eq. 15.

$$J = \int_{-30^o}^{30^o} e(l_1, m)^2 d\theta \tag{15}$$

Foram escolhidos como limites de integração $\theta = -30^o$ e $\theta = 30^o$ para que fosse possível adotar na modelagem dinâmica do BP as simplificações $sen\theta = \theta$ e $sen\gamma = \gamma$.

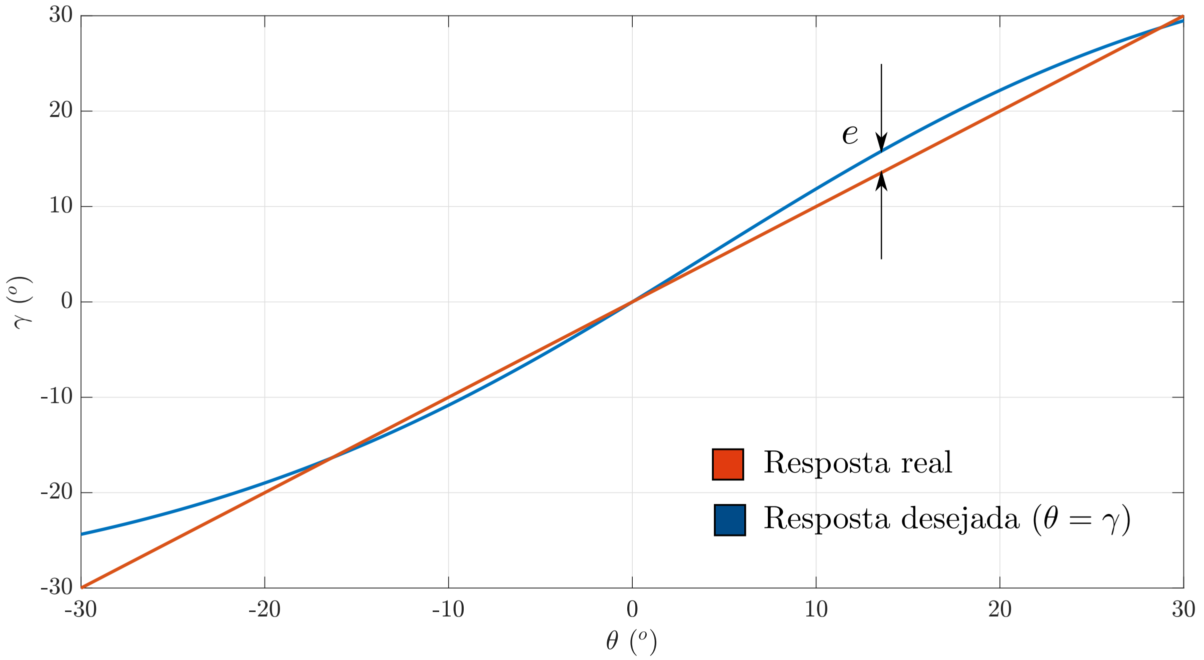

Figura 4: Comparação entre a relação real entre θ e γ e a relação que deseja-se obter a partir do processo de otimização, em que $\theta = \gamma$.

Uma vez estabelecida a função a ser minimizada, é necessário estabelecer os limites laterais para m e l_1. Estas podem ser obtidas da análise do diagrama introduzido na Fig. 1. Os limites para m são apresentados na Eq. 16.

$$r_c + D \leq m \leq d_b - d_m \tag{16}$$

Como valor máximo para l_1 adotou-se o próprio l_0, uma vez que considerou-se que l_0 e l_1 estão alinhados quando $\gamma = 0$. Uma vez que l_0 depende de m, o valor máximo de l_1 também dependerá. Foi assumido neste caso o valor máximo de m, uma vez que trata-se de um limite superior para l_1.

$$\begin{gathered} 0 \leq l_1 \leq l_0 \Rightarrow \\ 0 \leq l_1 \leq \sqrt{m^2 + (h - h_m)^2} \Rightarrow \\ 0 \leq l_1 \leq \sqrt{(d_b - d_m)^2 + (h - h_m)^2} \end{gathered} \tag{17}$$

Além disso, é necessário estabelecer algumas restrições geométricas que empeçam que o braço do motor se choque com quaisquer outras partes da estrutura. Para impedir que o mesmo se choque com o suporte da mesa, adotou-se a restrição introduzida na Eq. 18, deduzida a partir da análise do diagrama introduzido na Fig. 1.

$$\begin{gathered} l_1 + r \leq m - r_c \Rightarrow \\ l_1 + r - m + r_c \leq 0 \end{gathered} \tag{18}$$

Uma vez que o aumento do braço do motor acarreta a diminuição de J, como foi possível comprovar por meio de experimentações numéricas, a execução do processo de otimização acaba por ativar sempre esta restrição. Para evitar problemas com a montagem do sistema, adotou-se a adição de $1 \quad cm$ na restrição estabelecida inicialmente.

$$l_1 + r - m + r_c + 0{,}01 \leq 0 \tag{19}$$

Além disso, é necessário que o braço do motor não se choque com a base do BP. Para impedir que isto ocorra, outra restrição, Eq. foi levada em consideração. Sua dedução advém da análise do diagrama apresentado na Fig. 5 e na consideração de que o $-30^o \leq \theta \leq 30^o$.

$$\begin{gathered} h_r + r \leq h_m - \frac{c_b}{2} \Rightarrow \\ l_1 sen(\eta - 30^o) + r - h_m + \frac{c_b}{2} \leq 0 \end{gathered} \tag{20}$$

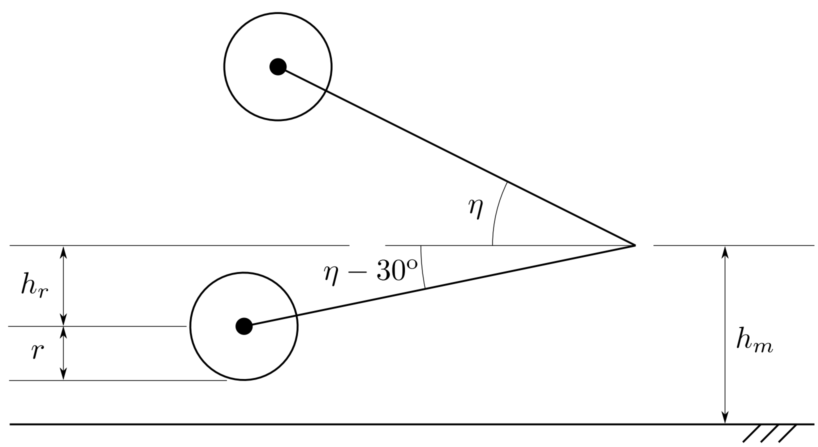

Figura 5: Diagrama simplificado do braço do motor em sua posição limite.

Considerando o que foi apresentado até o momento, as relações que resumem o processo de otimização a ser implementado são resumidas nas Eqs. 21.

$$\begin{gathered} \underset{m, l_1 \in \mathbb{R}}{min} \; J = \int_{-30^o}^{30^o} e \, d\theta \\ l_1 + r - m + r_c + 0{,}01 \leq 0 \\ l_1 sen(\eta - 30^o) + r - h_m + \frac{c_b}{2} \leq 0 \\ r_c + D \leq m \leq d_b - d_m \\ 0 \leq l_1 \leq \sqrt{(d_b - d_m)^2 + (h - h_m)^2} \end{gathered} \tag{21}$$

Por meio de medições realizadas no sistema já construído foram obtidas para as grandezas introduzidas no diagrama apresentado na Fig. 1 os valores numéricos exibidos na Tab. 1. Os códigos utilizados para obtenção da solução do problema de otimização proposto são apresentados em seguida. É importante ressaltar que o problema foi resolvido utilizando-se palpites iniciais igualmente distribuídos pelo espaço de busca, uma vez que a determinação destes pode afetar a solução do problema.

Tabela 1: Valores das grandezas introduzidas no diagrama apresentado na Fig. 1 em metros.

h_c	0,0540	h_0	0,0300	d_m	0,0290
d_3	0,1500	r	0,0100	D_m	0,0510
h	0,1625	r_0	0,0120	r_c	0,0130
h_m	0,0425	d_b	0,2000	c_b	0,0150

```
% main.m

clc; clear; close all;

% Inicializacao de variaveis
results = zeros(100,3);
k = 1;
% Funcao objetivo e restricoes
f = @fObj;
c = @const;
% Restricoes de desigualdade
A = [];
b = [];
% Restricoes de igualdade
Aeq = [];
beq = [];
% Limites laterais
h = 0.1625;
hc = 0.084;
hm = 0.0425;
db = 0.2;
dm = 0.029;
Dm = 0.051;
rc = 0.013;

lb = [0, rc+Dm];
ub = [sqrt((db-dm)^2+(h-hm-hc)^2), db-dm];

for x01 = linspace(0,0.1,10)
    for x02 = linspace(0,0.15,10)
        % Palpite inicial
        x0 = [x01, x02];
        % Processo de otimizacao
        [x, fval] = fmincon(f,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,c);
        results(k, 1:2) = x;
        results(k, 3) = fval;
        k = k + 1;
    end
```

```
end

disp('Fim da execucao');
```

```
% fObj.m

function f = fObj(x)

l1 = x(1); % Braco do motor
m = x(2); % Distancia do motor ate o centro da mesa

nData = 100;
hc = 0.054;
d3 = 0.15;
h = 0.1625;
hm = 0.0425;
h0 = 0.03;
r0 = 0.012;

l3 = sqrt((hc-h0)^2 + (d3-r0)^2);
thetaMValues = linspace(-pi/6,pi/6,nData); % Angulos que o motor assume
gamaValues = zeros(nData,1); % Vetor que guarda os valores de inclinacao ...
    da mesa

n = atan((h-hm-hc)/m); % Angulo entre l0 e a horizontal
gama0 = atan((hc-h0)/(d3-r0));
l0 = sqrt((h-hm-hc)^2 + m^2);
l2 = sqrt((l0 - l1)^2 + l3^2 - 2*l3*(l0-l1)*cos(n+gama0));

for j = 1:nData
    thetaM = thetaMValues(j);
    theta = thetaM;
    k1 = -2*l1*l3*sin(theta);
    k2 = 2*l3*(l0 - l1*cos(theta));
    k3 = l0^2 + l1^2 - l2^2 + l3^2 - 2*l0*l1*cos(theta);
    phi = 2*atan((-k1 - sqrt(k1^2 + k2^2 - k3^2))/(k3 - k2));
    gama = pi - n - gama0 - phi;
    gamaValues(j) = gama;
end

linGama = linspace(-pi/6,pi/6,nData)'; % Reta de 45 graus que relaciona ...
    theta e gamma

e = (gamaValues - linGama).^2; % Diferenca entre a aproximacao linear e os ...
    valores reais
dTheta = thetaMValues(2) - thetaMValues(1); % Calculo do incremento de theta
ie = sum(e*dTheta); % Calculo da integral do erro
f = ie; % Valor da funcao objetivo
```

```
% const.m
```

```
function [c, ceq] = const(x)

rc = 0.013;
r = 0.01;
h = 0.1625;
hm = 0.0425;
hc = 0.054;
cb = 0.015;

l1 = x(1); % Braco do motor
m = x(2); % Distancia do motor ate o centro da mesa

n = atan((h-hm-hc)/m); % Angulo entre l0 e a horizontal

c = [l1 + r - m + rc
l1*sin(n - pi/6) + r - hm + cb/2];
ceq = [];
```

```
clc; clear; close all;

x = [0.096436 0.17099];

c = const(x);

fprintf('Restricao 1 = %f cm \n', c(1)*100);
fprintf('Restricao 2 = %f cm \n', c(2)*100);

l1 = x(1); % Braco do motor
m = x(2); % Distancia do motor ate o centro da mesa

nData = 100;
hc = 0.054;
d3 = 0.15;
h = 0.1625;
hm = 0.0425;
h0 = 0.03;
r0 = 0.012;

l3 = sqrt((hc-h0)^2 + (d3-r0)^2);
thetaMValues = linspace(-pi/6,pi/6,nData); % Angulos que o motor assume
gamaValues = zeros(nData,1); % Vetor que guarda os valores de inclinacao ...
    da mesa

n = atan((h-hm-hc)/m); % Angulo entre l0 e a horizontal
gama0 = atan((hc-h0)/(d3-r0));
l0 = sqrt((h-hm-hc)^2 + m^2);
l2 = sqrt((l0 - l1)^2 + l3^2 - 2*l3*(l0-l1)*cos(n+gama0));

for j = 1:nData
    thetaM = thetaMValues(j);
    theta = thetaM;
    k1 = -2*l1*l3*sin(theta);
```

```
    k2 = 2*l3*(l0 - l1*cos(theta));
    k3 = l0^2 + l1^2 - l2^2 + l3^2 - 2*l0*l1*cos(theta);
    phi = 2*atan((-k1 - sqrt(k1^2 + k2^2 - k3^2))/(k3 - k2));
    gama = pi - n - gama0 - phi;
    gamaValues(j) = gama;
end

linGama = linspace(-pi/6,pi/6,nData)'; % Reta de 45 graus que relaciona ...
   theta e gamma

e = (gamaValues - linGama).^2; % Diferenca entre a aproximacao linear e os ...
   valores reais
dTheta = thetaMValues(2) - thetaMValues(1); % Calculo do incremento de theta
ie = sum(e*dTheta); % Calculo da integral do erro
f = ie; % Valor da funcao objetivo

% Apresentacao grafica dos resultados
figure;
plotI(thetaMValues*180/pi, gamaValues*180/pi, '-'); hold on;
plotI(thetaMValues*180/pi, linGama*180/pi, '-');
xlabelI('$\theta$ ($^o$)');
ylabelI('$\gamma$ ($^o$)');
cropPlotI;
printI('bracoOtimizado');

% Relatorio
fprintf('Braco do motor = %.2f cm \n', l1*100);
fprintf('Braco auxiliar = %.2f cm \n', l2*100);
fprintf('Posicao do motor = %.2f cm \n', m*100);
fprintf('Angulo entre a posicao inicial do braco do motor e a horizontal = ...
   %.2f graus \n', n*180/pi);
fprintf('Valor da funcao objetivo = %f \n', f);

relErr = abs(gamaValues - linGama)./linGama;
eAbs = abs(gamaValues - linGama);

fprintf('Erro relativo maximo entre as curvas = %.2f %% (%.2f graus)\n', ...
   100*max(abs(relErr)), 180/pi*max(eAbs));

B = gamaValues; % Dado real
f = linGama; % Dado ajustado
Bbar = mean(B);
SStot = sum((B - Bbar).^2);
SSres = sum((B - f).^2);
R2 = 1 - SSres/SStot;

fprintf('Correlacao entre as curvas (R2) = %.2f %% \n', R2*100);
```

Os resultados obtidos a partir da execução dos códigos introduzidos acima são apresentados a seguir.

```
Restricao 1 (centro da mesa) = -5.155400 cm
```

```
Restricao 2 (base da mesa) = -3.990973 cm
Braco do motor (l1) = 9.64 cm
Braco auxiliar (l2) = 7.94 cm
Posicao do motor (m) = 17.10 cm
Angulo entre l_1 (posicao inicial) e a horizontal = 21.11 graus
Valor da funcao objetivo (J) = 0.002085
Erro relativo maximo entre as curvas (porcentagem) = 25.63 (7.69 graus)
Correlacao entre as curvas (R2) (porcentagem) = 97.65
```

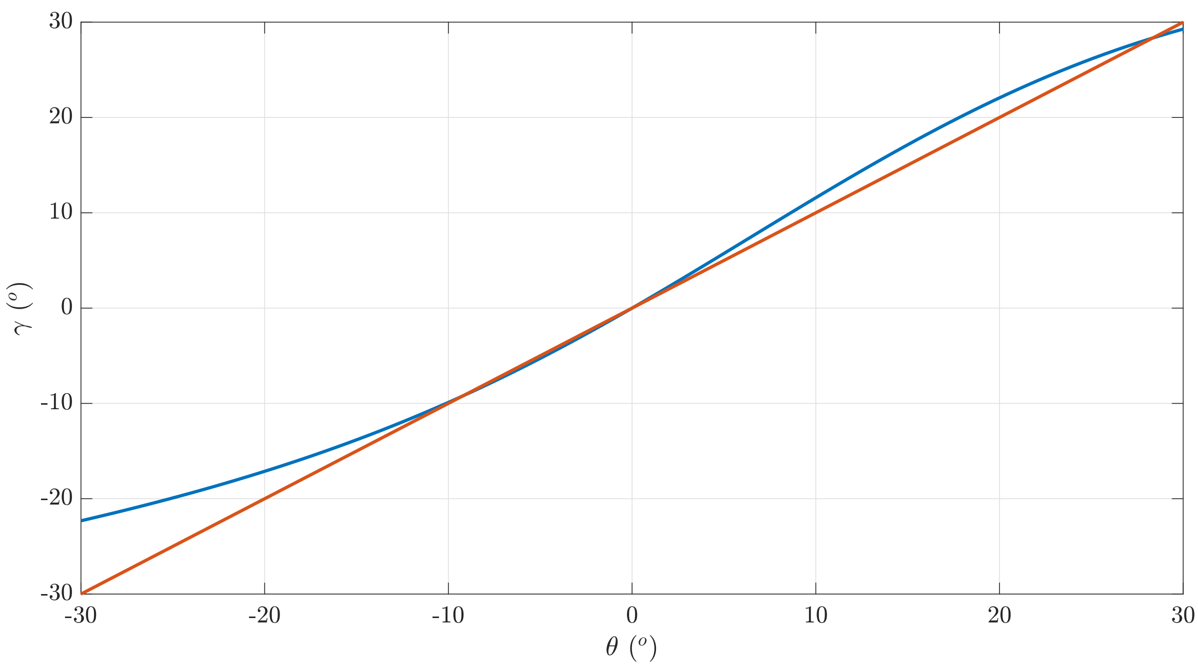

Figura 6: Relação entre θ e γ considerando l_1 e m obtidos após o processo de otimização